UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Vanessa Cristina Franzoni

Proposta didática ao estudo de ângulos em uma circunferência

São José do Rio Preto
2021

Vanessa Cristina Franzoni

Proposta didática ao estudo de ângulos em uma circunferência

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof.ª Dr.ª Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

São José do Rio Preto
2021

F837p

Franzoni, Vanessa Cristina

Proposta didática ao estudo de ângulos em uma circunferência / Vanessa Cristina Franzoni. -- São José do Rio Preto, 2021

102 f. : il., tabs., fotos

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

1. Matemática (Ensino médio). 2. Jogos de Estratégia (Matemática). 3. Matemática Estudo e ensino. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Vanessa Cristina Franzoni

Proposta didática ao estudo de ângulos em uma circunferência

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof.ª Dr.ª Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientador

Prof.ª Dr.ª Grazielle Feliciano Barbosa
UFSCAR – Câmpus de São Carlos

Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
25 de fevereiro de 2021

No presente momento, dedico este trabalho à minha amada filha Maria Clara, que esteve presente em todas as dificuldades e vitórias durante minha trajetória no mestrado, que este trabalho seja para ela, no futuro, um incentivo a compreender como é importante ter a propriedade do conhecimento e partilhá-lo com todos a sua volta e, sem dúvida, lembrá-la de que apenas o saber nunca lhe será tirado.

Dedico também a alguém do passado, que com todo prazer do mundo foi meu eterno melhor professor, Marco Antônio Cândido Ribeiro *(in memoriam),* ele que um dia me mostrou o quanto é importante compartilhar o conhecimento para fazer do mundo um lugar melhor, não para si, mas para todos. Para ele, que na posição de mestre e doutor, com um currículo de encher os olhos e a alma, sempre me prestigiou como um amigo e sempre me fez sentir que sou especial pelo que sou.

AGRADECIMENTOS

Desde o início do mestrado eu já pensava em como seria escrever os agradecimentos da minha dissertação, por ansiedade, por motivação, mas principalmente porque eu sabia que todo o esforço até aqui feito, não seria só meu, mas de muitas pessoas que são importantes na minha vida.

À minha família, meu porto seguro, em especial minha filha mais que amada, Maria Clara, que aos seus dez anos teve que compreender o significado de dedicação, ficando distante muitas vezes, para que eu pudesse me concentrar nos estudos, abdicando de muitos finais de semana, ao qual eu me preparava para as provas, mas tudo isso foi por ela. Ao meu amado marido, João Márcio, que sempre me apoiou, em todas minhas decisões e fez o possível para tornar minha jornada mais leve. Aos meus pais, Wilson e Geralda, que depois de dezoito anos me viram retornar à universidade, me apoiaram igualmente, deram o seu melhor, sempre contribuíram para que minha vida fosse repleta de vitórias, sendo a minha maior tê-los como pais. A minha madrinha Solange, que sempre me incentivou e apoiou, principalmente distraindo minha filha, ao meu tio Jacaré que me faz sorrir, ou melhor, rir da vida, ao meu amado irmão William, por ser exemplo de força e luta, a minha cunhada Renata e minha sobrinha Luiza, pela torcida e por me lembrar que sou uma boa professora, aos meus primos Rodrigo e Camila por mostrarem o quão é importante a leitura e manter o espírito jovem. Amo cada um numa intensidade que tende ao infinito.

À minha orientadora Prof.ª Dr.ª Michelle Ferreira Zanchetta Morgado, por seu carinho, paciência e todas as contribuições teóricas mediante a escolha do meu tema. Por ter sido presente e companheira em todos os encontros, presencial e online, principalmente no momento difícil da pandemia covid-19, atendendo de forma remota em sua residência, mostrando que além de excelente docente é uma grande mulher e mãe. A ela toda minha admiração.

Ao Ibilce, onde palavras são poucas para expressar minha eterna gratidão ao lugar que abriu todo meu caminho, me deu as melhores oportunidades, os melhores momentos, as melhores amizades e a melhor formação que eu poderia ter. Foram nove anos de convivência nesse câmpus, desde a graduação ao mestrado, os melhores da minha vida.

À Deus por me guiar, iluminar e me dar tranquilidade, força e perseverança para seguir em frente com os meus objetivos, mesmo diante das dificuldades encontradas, possibilitando minhas conquistas ao mesmo tempo que abençoou minha vida.

A todos, tendo em vista que esta dissertação é o resultado de uma caminhada que se iniciou num simples bate-papo entre amigos, mas se não fosse isso, talvez não teria chegado até aqui, por isso quero agradecer a todos que de alguma forma fizeram parte da minha vida acadêmica e profissional, contribuindo para a construção do que sou hoje.

À amiga Beatriz Viscardi pelo incentivo, força, amizade e carinho que partilhamos durante nosso caminhar, que mesmo de áreas distintas, sempre estudamos juntas e dividindo nossos medos, anseios e sonhos. Aos amigos da turma do PROFMAT/2018, Amarílis, Edvaldo e Fabrício, que foram ponto de apoio, luta e motivo de muitas alegrias. Não posso esquecer de todos os colegas de trabalho dos colégios ao qual atuo, que sempre me incentivaram e torceram por mim desde a aprovação para o mestrado. E por fim a todos meus amigos que com gestos e palavras me mantiveram firme nos momentos difíceis e me fizeram rir dos erros.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Tendo em vista as dificuldades apresentadas por alunos do terceiro ano do Ensino Médio no estudo de ângulos em uma circunferência e baseado na aplicação de uma atividade que abordou vários tópicos desse conteúdo em diferentes exercícios, verificamos a necessidade de se investigar as contribuições de outras estratégias de ensino para garantir a efetiva aprendizagem de tal conteúdo. A finalidade desse trabalho é de propor uma sequência didática, aplicando um roteiro de atividades voltado para o ensino de ângulos em uma circunferência utilizando ferramentas que proporcionem um aprendizado mais promissor para o aluno. Foram utilizados o Geoplano Circular para as construções dos conceitos e o GeoGebra para a visualização em algumas situações-problema. O roteiro de atividades foi elaborado constituindo uma série de exercícios que possibilita ao aluno a experimentação no Geoplano Circular e posteriormente sua representação no papel, viabilizando a construção e consolidação de algumas propriedades, o que proporcionou um estudo construtivo, diferente e eficaz sobre o conteúdo. Além de serem inseridas situações-problema para aproximar a Matemática ao cotidiano dos alunos, utilizamos nestes momentos o software GeoGebra para visualizações. Ao final da proposta, foi aplicado uma nova atividade avaliativa, que englobou os mesmos conteúdos abordados no roteiro de atividades, para a efetiva comprovação de que essa proposta sugerida contribua de forma eficaz para o ensino e aprendizagem.

Palavras–chave: Ângulo central. Ângulo inscrito. Ângulo de segmento. Ângulo excêntrico. Geoplano Circular.

ABSTRACT

In view of the difficulties presented by students of the third year of high school in the study of angles in a circumference and based on the application of an activity that addressed various topics of this content in different exercises, we verified the need to investigate the contributions of other teaching strategies to ensure the effective learning of such content. The purpose of this work is to propose a didactic sequence, applying a scrit of activities aimed at teaching angles in the circumference using tools that provide a more promising learning for the student. Circular Geoplanes were used to construct the concepts and GeoGebra for visualization in some problem situations. The activities script was elaborated constituing a series of exercises that allows the student to experiment in the circular Geoplane and later its representation on paper, enabling the construction and consolidation of some properties, which provided a constructive, diferente and effective study on the content. In addition to inserting problem situations to bring mathematics closer to the students' daily lives, we used the GeoGebra software for visualization. At the end of the proposal, a new evaluative activity was applied, which encompassed the same contents covered in the activities script, for the effective proof that this suggested proposal contributes effectively to teaching and learning.

Keywords: Central angle. Inscribed angle. Segment angle. Eccentric angle. Circular Geoplane.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), que durante anos serviu de referência para as escolas brasileiras, são claros quanto ao papel que a Matemática deve desenvolver, ou seja, evidenciar a Matemática como instrumento para compreender o mundo à sua volta e enxergá-la como uma área de conhecimento que estimule a curiosidade, a investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas, destacando ainda a importância de que o próprio aluno tenha autonomia e segurança para construção de conhecimentos matemáticos.

> "...é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas..." (BRASIL, MEC. PCNs, 1998, p. 40)

Atualmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), apesar das alterações, não propõe uma ruptura com a visão sobre a disciplina adotada pelos PCNs, propõe um ensino de Matemática que possibilite estabelecer relações entre o conteúdo disciplinar e interdisciplinar com a realidade do indivíduo, onde o pensamento matemático, que envolve uma série de processos particulares, como construções e demonstrações de conjecturas, argumentações para a generalizações e conclusões, deverá ser construído de forma criativa, lúdica e multidisciplinar, de modo que cada indivíduo seja capaz de compreender e solucionar os problemas usando recursos matemáticos como estratégia.

> "...Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas..." (BRASIL, MEC. BNCC, 2017, p. 265)

Seguindo este documento, as habilidades estão organizadas segundo as unidades de cada área, a qual destacamos a Geometria dentro da Matemática, cuja importância na formação do aluno e a sua percepção do mundo é fundamental.

> "... A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes..." (BRASIL, MEC. BNCC, 2017, p. 272)

Seguindo essas diretrizes, este trabalho apresenta uma proposta didática para o ensino sobre o estudo de ângulos em uma circunferência através de atividades com o uso do Geoplano Circular, uma ferramenta lúdica de fácil manuseio e criação, que auxilia de forma simples e ampla nas estratégias de ensino, viabilizando a aprendizagem e permitindo que os estudantes tenham a oportunidade de compreender o significado à partir do que estão construindo, além de situações-problema para aplicar a geometria de maneira real, motivando o aprendizado, que contou com o auxílio do software GeoGebra.

Na BNCC o estudo de ângulos em uma circunferência está inicialmente contemplado na habilidade do 9º ano do Ensino Fundamental, depois retomada no Ensino Médio.

> "... (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica..." (BRASIL, MEC. BNCC, 2017, p. 317)

A (re)elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas no Ensino Médio, leva a compreensão de que no Novo Ensino Médio não existe um ano específico para que uma determinada área de conhecimento seja contemplada, mas que essa deva ser trabalhada em todos os anos de forma a construir um conhecimento amplo e aplicado a realidade do aluno.

> "... Na (re)elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas, é possível adotar outras organizações, recorrendo tanto às habilidades definidas nesta BNCC quanto a outras que sejam necessárias e que contemplem especificidades e demandas próprias dos sistemas de ensino e das escolas. A despeito disso, é fundamental preservar a articulação, proposta nesta BNCC, entre os vários campos da Matemática, com vistas à construção de uma visão integrada de Matemática e aplicada à realidade. Além disso, é importante que os saberes matemáticos, do ponto de vista pedagógico e didático, sejam fundamentados em diferentes bases, de modo a assegurar a compreensão de fenômenos do próprio contexto cultural do indivíduo e das relações interculturais..." (BRASIL, MEC. BNCC, 2017, p.542)

A proposta didática deste trabalho, foi aplicada para alunos do terceiro ano do Ensino Médio, que tiveram este conhecimento abordado no primeiro ano do

Ensino Médio, seguindo o material pedagógico da escola onde foi realizado este trabalho, mas segundo a BNCC, poderia ser aplicada a qualquer ano do Ensino Médio ao qual o objetivo seja abordar este conteúdo. Ela foi dividida em doze aulas, sendo as iniciais para a aplicação de uma atividade que comprovasse a necessidade da retomada sobre ângulos em uma circunferência (atividade diagnóstica) e as outras foram direcionadas para a realização do roteiro de atividades, utilizando o Geoplano Circular com finalidade de construção de conjecturas, argumentações e generalizações das propriedades sobre ângulos na circunferência, junto com situações-problema associando os conceitos ao cotidiano.

Neste contexto o trabalho está distribuído da seguinte forma: o Capítulo 2 aborda toda teoria matemática sobre ângulos em uma circunferência necessária para a compreensão desse trabalho, uma parte formal destinada a formação do professor, que deve saber sempre mais do que ensina.

No Capítulo 3 contém a proposta de sequência didática sobre ângulos na circunferência, começando com uma atividade diagnóstica para estabelecer o nível de conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema, em seguida atividades práticas seguindo um roteiro de atividades que fazem uso do Geoplano Circular e do GeoGebra para a visualização de algumas situações-problema.

Por fim uma atividade comprobatória, para verificação da efetiva aprendizagem, abordando os mesmos temas e níveis das outras atividades; no Capítulo 4, foram discutidos os resultados das atividades aplicadas, a evolução intelectual dos alunos em relação aos conteúdos abordados e a comprovação da necessidade de se trabalhar com ferramentas matemáticas que possibilitem o aprendizado concreto e efetivo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse capítulo serão apresentados os referenciais teóricos utilizados para a concretização desse trabalho, abordando as definições dos objetos geométricos e os resultados decorrentes deles, presentes nas atividades, tendo REZENDE e QUEIROZ, 2008, como principal referência.

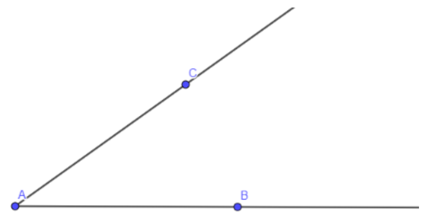
Antes de começarmos, é importante salientar que o estudo da Geometria Euclidiana se faz de forma dedutiva (ou axiomática), onde inicia-se com certas afirmações (axiomas ou postulados), aos quais aceita-se sem demais justificativas, e posteriormente deduz-se, através de demonstrações outras afirmações, como por exemplos os teoremas. Esse aprofundamento teórico é de suma importância principalmente aos professores que atuarão no processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, pois o possibilita um entendimento mais amplo para seu próprio conhecimento bem como seu modo de atuar profissionalmente.

Vamos supor conhecido a parte axiomática inicial, iniciando neste trabalho com o conceito de ângulos. Usamos as notações $\overline{AB}$ para o segmento com extremidades A e B, AB para a medida do segmento, $\overrightarrow{AB}$ para a semirreta de origem em A passando por B e $\overleftrightarrow{AB}$ a reta que passa por A e B.

2.1 Ângulos

Definição 2.1.1. Um **ângulo** é a união de duas semirretas que têm a mesma origem. Se um ângulo é formado pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, então essas semirretas são chamadas de **lados** do ângulo, e o ponto A é chamado de **vértice** do ângulo.

Figura 1 – Ângulo.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Quando as semirretas estão contidas em uma mesma reta, elas podem ser distintas (portanto opostas) e chamamos este ângulo de **ângulo raso**, ou podem ser a mesma semirreta e chamamos este ângulo de **ângulo nulo**.

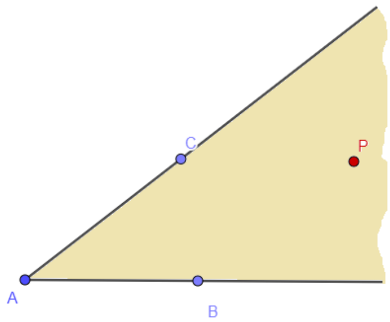
Notação: $B\hat{A}C$ ou $C\hat{A}B$ significa o ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ com vértice em A. Também pode ser denotado por $\widehat{BAC}$ ou $\widehat{CAB}$.

Quando não houver dúvidas com respeito das semirretas, por simplicidade um ângulo pode ser representado somente por seu vértice, ou seja, o ângulo $B\hat{A}C$ pode ser denotado simplesmente por $\hat{A}$.

Definição 2.1.2. Considere um ângulo $B\hat{A}C$, onde seus lados não estão contidos em uma mesma reta.

a) Dizemos que P **está no interior** do ângulo $B\hat{A}C$ ou que P é **ponto interior** do ângulo $B\hat{A}C$ se o segmento $\overline{BP}$ não intersecciona a semirreta $\overrightarrow{AC}$ e o segmento $\overline{CP}$ não intersecciona a semirreta $\overrightarrow{AB}$. O conjunto dos pontos interiores de $B\hat{A}C$ é chamado de **interior** de $B\hat{A}C$ e denotado por $int(B\hat{A}C)$.

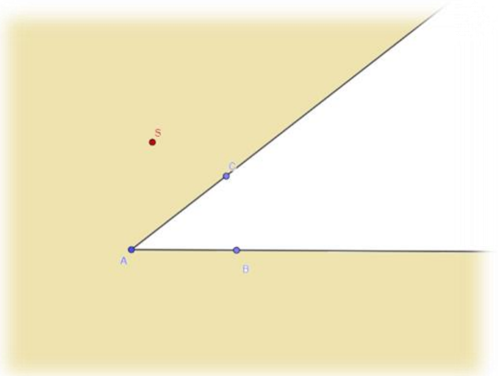
Figura 2 – Conjunto interior de um ângulo.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

b) Um ponto é dito **ponto exterior** do ângulo $B\hat{A}C$ se ele não pertence a este ângulo nem ao seu interior. O conjunto dos pontos exteriores do ângulo $B\hat{A}C$ é chamado de **conjunto exterior** deste ângulo e denotado por $ext(B\hat{A}C)$.

Figura 3 – Conjunto exterior de um ângulo.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Com o objetivo de associar um número ao objeto geométrico ângulo, faz-se necessário os seguintes postulados, surgindo assim o conceito de medida de ângulos. Como mencionado, antes de ângulos existe uma parte axiomática que consideramos conhecida, assim os postulados que iremos colocar não são os primeiros, além disso vamos colocar somente a parte necessária para o entendimento do trabalho.

Postulado 2.1.1. (Postulado da medida de ângulos) A cada ângulo $P\hat{Q}R$ corresponde um único número real de 0 a 180, sendo 0 para o ângulo nulo e 180 para o ângulo raso.

Definição 2.1.3.

a) o número correspondente ao postulado anterior é chamado de **medida de ângulo** e é denotado por $mB\hat{A}C$.
b) ângulos que possuem a mesma medida são denominados de **ângulos congruentes**.

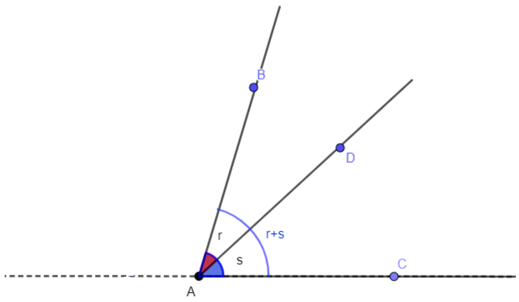
Notação:

- Se $B\hat{A}C$ e $P\hat{Q}R$ são congruentes, denotamos $B\hat{A}C \cong P\hat{Q}R$.
- $mB\hat{A}C$ é um número real, que podemos adicionar a nomenclatura “em graus” depois do número, usando o símbolo (º).

Exemplo: $mB\hat{A}C = 60$ ou $mB\hat{A}C = 60^o$

Postulado 2.1.2. (Postulado da Adição de Ângulos) Seja $B\hat{A}C$ um ângulo onde as semirretas não estão contidas em uma mesma reta. Se D é um ponto interior de $B\hat{A}C$, então $mB\hat{A}C = mB\hat{A}D + mD\hat{A}C$. Caso seja um ângulo raso, isso vale para todo ponto D que não pertence a este ângulo.

Figura 4 – Adição de ângulos.

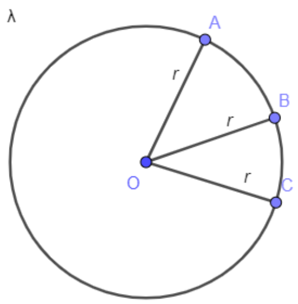


Fonte: elaborado pela professora/autora.

2.2 Circunferência e seus arcos

Definição 2.2.1. Uma **circunferência** de centro O e raio $r > 0$ é a união de todos os pontos do plano, cuja distância até o centro O é igual ao raio r.
Notação: uma letra minúscula grega λ ou $C(O,r)$.

Figura 5 – Circunferência.



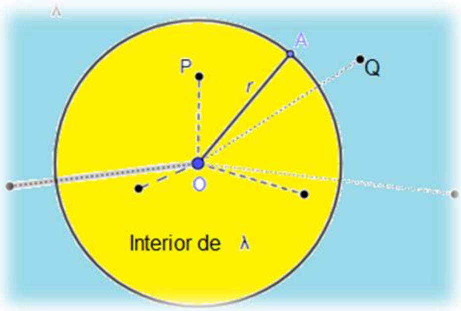
Fonte: elaborado pela professora/autora.

Utilizamos a palavra raio, como qualquer segmento ligando o centro a um ponto da circunferência.

Definição 2.2.2. Seja λ uma circunferência de centro O e raio r em um plano.

a) O conjunto dos pontos deste plano cuja distância ao centro O é menor do que r é chamado de **interior da circunferência** λ e seus pontos **de pontos interiores** de λ.
b) O conjunto dos pontos deste plano cuja distância ao centro O é maior do que r é chamado de **exterior da circunferência** λ e seus pontos **de pontos exteriores** de λ.

Figura 6 – Pontos interiores e exteriores da circunferência.

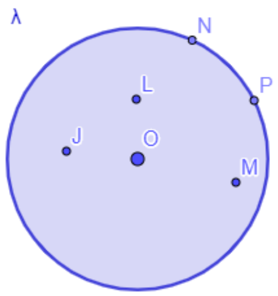


Fonte: elaborado pela professora/autora.

Na figura anterior, P é ponto interior e Q é ponto exterior de λ, a parte em amarelo representa o conjunto interior e a parte azul o conjunto exterior de λ.

Definição 2.2.3. Um **círculo** de centro O e raio r é a união da circunferência de centro O e raio r com o seu interior.

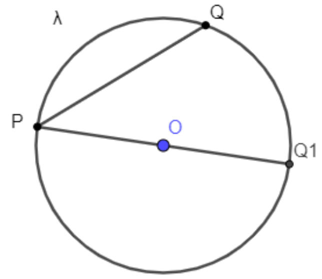
Figura 7 – Círculo.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Definição 2.2.4. Uma **corda** de uma circunferência é um segmento cujas extremidades pertencem a esta circunferência. Quando o centro da circunferência pertence à corda, ela é chamada de **diâmetro**.

Figura 8 – Corda e diâmetro.

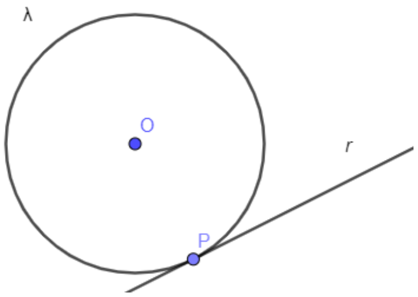


Fonte: elaborado pela professora/autora.

Também podemos usar o termo diâmetro para a medida deste objeto geométrico.

Definição 2.2.5. Quando uma reta r e uma circunferência λ têm apenas um ponto P em comum, dizemos que a reta r **tangencia** a circunferência λ em P, ou seja, $r \cap \lambda = \{P\}$. A reta r é chamada de **reta tangente** à circunferência λ e P de **ponto de tangência**.

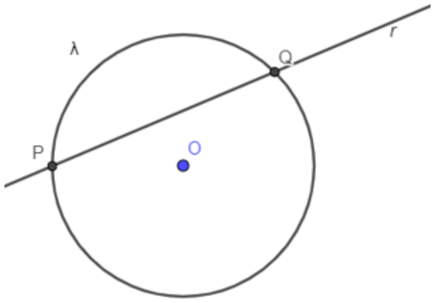
Figura 9 – Reta tangente à circunferência.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Definição 2.2.6. Quando uma reta r e uma circunferência λ têm dois pontos em comum, P e Q, dizemos que a reta r é **secante** a circunferência em P e Q.

Figura 10 – Reta secante à circunferência.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

O próximo resultado nos garante que dada uma reta e uma circunferência, elas não se interseccionam, são tangentes ou são secantes.

Teorema 2.2.1. (Teorema Fundamental das Circunferências) Sejam dadas uma reta s e uma circunferência de centro O e raio r. Se O' é a projeção ortogonal de O sobre s, então apenas uma das seguintes situações ocorre.

I. Todo ponto de s é um ponto exterior à circunferência.

II. O ponto O' está na circunferência, e a reta e a circunferência são tangentes neste ponto. Neste caso, todos os outros pontos de s são pontos exteriores à circunferência.

III. O ponto O' é um ponto interior da circunferência, e a reta intersecciona a circunferência em exatamente dois pontos que equidistam de O'.

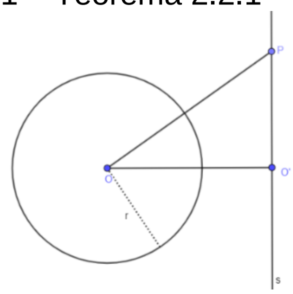
Demonstração.

Consideremos a reta s e a circunferência $\mathcal{C}(O, r)$. Seja O' a projeção ortogonal sobre s. Existem apenas três possibilidades para a situação de O' em relação á circunferência: O' é ponto exterior, ponto da circunferência, ou é ponto interior da circunferência. Provaremos os três casos a seguir.

Caso I: O' é ponto exterior à $\mathcal{C}(O, r)$.

Da Definição 2.2.2, $OO' > r$. Agora seja P um ponto qualquer da reta s, distinto de O'. Note que POO' é um triângulo retângulo, sendo $O\widehat{O'}P$ o ângulo reto. Como a medida da hipotenusa é maior que a medida de um cateto (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Corolário 3.10[1]), temos $OP > OO' > r$. Assim P também será um ponto exterior da circunferência, ou seja, todo ponto de s será ponto exterior da circunferência.

Figura 11 – Teorema 2.2.1 – Caso I.



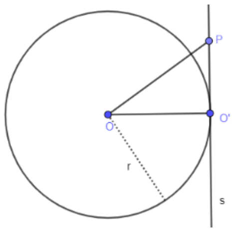
Fonte: elaborado pela professora/autora.

[1] Corolário 3.10: Em todo triângulo retângulo cada cateto é menor que a hipotenusa.

Caso II: O' é ponto da $\mathcal{C}(O, r)$.

Neste caso $OO' = r$. Considere P um ponto da reta s distinto de O', que como anteriormente, temos $OP > OO' = r$ e, com isso, P é ponto exterior à circunferência. Portanto o único ponto comum entre a reta s e a circunferência é O', portanto todos os pontos da reta s são pontos exteriores da circunferência.

Figura 12 – Teorema 2.2.1 – Caso II.



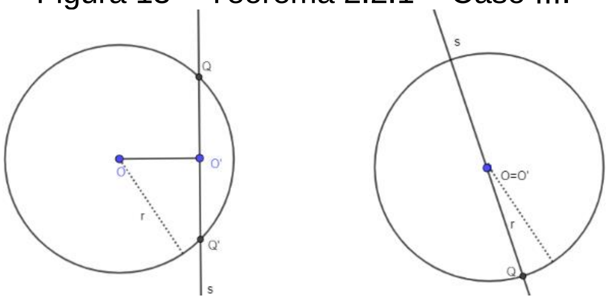
Fonte: elaborado pela professora/autora.

Caso III: O' é ponto interior à $\mathcal{C}(O, r)$.

Da Definição 2.2.2, obtemos $OO' < r$.

Sendo $OO'Q$ um triângulo retângulo, qualquer ponto Q que esteja na reta s e na circunferência deve satisfazer a equação $r^2 = (OO')^2 + (O'Q)^2$ e, com isso, $O'Q = \sqrt{r^2 - (OO')^2}$. Reciprocamente, tomando um ponto Q na reta s de forma que $O'Q = \sqrt{r^2 - (OO')^2}$, então Q satisfaz $OQ = r$. Portanto Q está na circunferência. Assim a equação$O'Q = \sqrt{r^2 - (OO')^2}$ caracteriza os pontos Q da reta s, que pertencem à circunferência.

Figura 13 – Teorema 2.2.1 – Caso III.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Pelo Teorema da Localização de Pontos (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Teorema 1.10[2]), na reta s, existem apenas dois destes pontos, um em cada uma

[2] Teorema 1.10: Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta e seja x um número positivo. Então existe um único ponto P em $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.

das semirretas de s que tem origem no ponto O', é claro que são pontos equidistantes de O', ocorrendo a situação (III), e ainda se $O' = O$ e $\overline{OQ} = \overline{O'Q} = r$, novamente teremos a existência de dois pontos, um em cada uma das semirretas de s que tem origem no ponto O', que são pontos equidistantes de O', ocorrendo também a situação III. ■

Corolário 2.2.1. Uma reta t é tangente a uma circunferência λ se, e somente se, essa reta é perpendicular ao raio que une o centro a um ponto de interseção da reta com a circunferência.

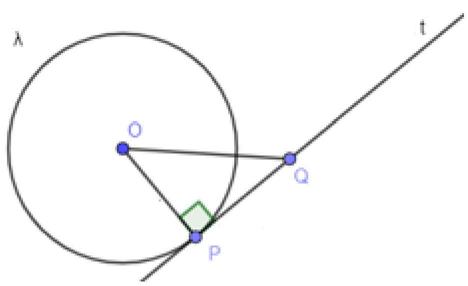
Demonstração.

Seja O o centro da circunferência λ. Vamos supor inicialmente que t é tangente à λ no ponto P (P é ponto de tangência). Neste caso, pelo Teorema 2.2.1, P é a projeção de O em t e, com isso, $t \perp \overline{OP}$.

Vamos supor agora que t é perpendicular à $\overline{OP}$, onde $P \in \lambda$. Mostremos que $t \cap \lambda = \{P\}$, ou seja, t é tangente à λ com ponto de tangência P.

Se existisse um ponto $Q \in (t \cap \lambda)$, tal que $Q \neq P$, então $OQ = OP$ $(*)$. Por outro lado, como t é perpendicular à $\overline{OP}$, então OPQ é um triângulo retângulo com ângulo reto em P. Por um resultado que diz que a medida da hipotenusa é maior que a medida de qualquer cateto (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Corolário 3.10[3]), temos que $OQ < OP$, o que contradiz (*). Portanto, não existe Q nestas condições, concluindo o desejado. ■

Figura 14 – Corolário 2.2.1.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

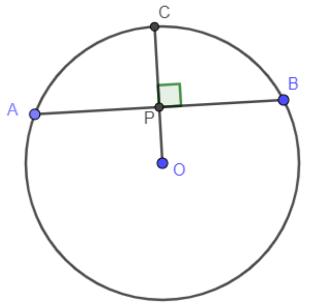
[3] Resultado citado na página 22.

Proposição 2.2.1. Uma corda de uma circunferência intercepta um raio no ponto P. Se esse raio é perpendicular à corda, então P é o ponto médio dessa corda.

Demonstração.

Seja $\overline{AB}$ uma corda, que não é um diâmetro, de uma circunferência de centro O tal que $\overline{AB} \cap \overline{OC} = P$, onde C é um ponto da circunferência. Queremos mostrar que se $\overline{OC}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, então P é ponto médio de $\overline{AB}$, ou seja, $AP = PB$.

Figura 15 – Proposição 2.2.1.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Na figura acima, comparando os triângulos OAP e OBP, temos que $AO = OB$ (pois ambos são raios), $\overline{OP}$ é lado comum e, por hipótese, o raio $\overline{OC}$ é perpendicular à corda $\overline{AB}$. Daí OAP e OBP são triângulos retângulos, com ângulo reto no vértice P. Aplicando o Teorema de Pitágoras, segue-se que:

$$AP^2 = OA^2 - OP^2 \text{ e } PB^2 = OB^2 - OP^2.$$

Logo $AP = PB$, ou seja, P é ponto médio da corda AB.

Se a corda $\overline{AB}$ for um diâmetro da circunferência, então P é o centro da circunferência e, com isso, $AP = PB,$ pois seriam raios. ■

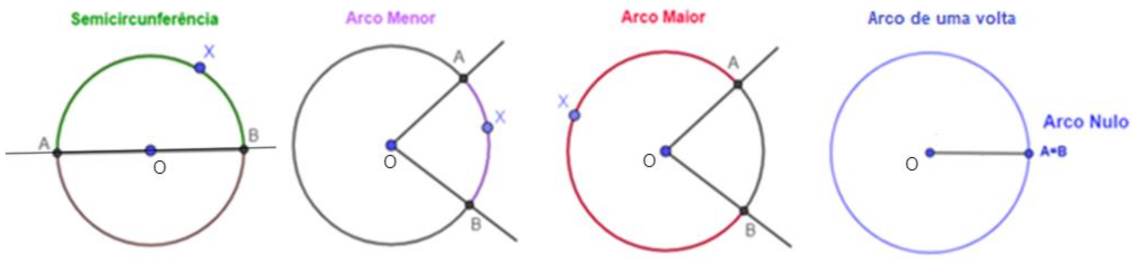
Definição 2.2.7. Sejam A e B pontos de uma circunferência de centro O.

a) Se A e B são distintos e $\overline{AB}$ é um diâmetro, então o conjunto formado pelos pontos A e B e o conjunto dos pontos da circunferência que estão no mesmo semiplano de origem $\overleftrightarrow{AB}$ é chamado de uma **semicircunferência**.

b) Se A e B são distintos e $\overline{AB}$ não é um diâmetro, então denominamos **arco menor** da circunferência o conjunto formado pelos pontos A e B e os pontos que estão no interior do ângulo $A\hat{O}B$, e denominamos **arco maior** da circunferência o conjunto formado pelos pontos A e B e os pontos que estão no exterior do ângulo $A\hat{O}B$.

c) Se A e B coincidem, isso determina dois conjuntos na circunferência: este ponto, chamado de um **arco nulo** da circunferência e a própria circunferência, chamada de **arco de uma volta**.

Figura 16 – Arcos em uma circunferência.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Notação: $\widehat{AXB}$ o arco de extremidade A e B que contêm o ponto X, ou simplesmente $\widehat{AB}$, quando não houver risco de confusão.

Definição 2.2.8. Sejam A e B dois pontos em uma circunferência de centro O. A **medida** (em graus) de $\widehat{AB}$, denotada por $m\widehat{AB}$, é definida como:

a) sendo $A = B$ temos se $\widehat{AB}$ é o arco nulo, então $m\widehat{AB} = 0$ e se $\widehat{AB}$ é a circunferência então $m\widehat{AB} = 360$.

b) sendo $A \neq B$ temos

i) se $\widehat{AB}$ é uma semicircunferência, então $m\widehat{AB} = 180$.

ii) se $\widehat{AB}$ é um arco menor, então $m\widehat{AB}$ é a medida do seu ângulo $A\hat{O}B$.

iii) se $\widehat{AB}$ é um arco maior, escrevendo $\widehat{AB} = \widehat{AYB}$ e $\widehat{AXB}$ o arco menor correspondente, então $m\widehat{AB} = m\widehat{AYB} = 360 - m\widehat{AXB}$.

.

Teorema 2.2.2. Se $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$ são arcos de uma mesma circunferência, com A, B e C pontos distintos, que têm em comum somente o ponto B, e se a sua união é um arco $\widehat{AC}$, então $m\widehat{AC} = m\widehat{AB} + m\widehat{BC}$.

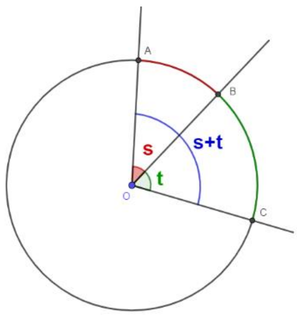
Demonstração.

Seja O o centro da circunferência mencionada. Note que $B \in \widehat{AC}$. Temos que considerar os tipos de arco que $\widehat{AC}$ pode ser: um arco menor, arco maior ou semicircunferência.

Caso 1: $\widehat{AC}$ é arco menor.

Neste caso, como $B \in \widehat{AC}$, da Definição 2.2.7, B é ponto interior de $A\hat{O}C$ e os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$ também são arcos menores. Usando a Definição 2.2.8 e o Postulado 2.1.2 segue que $m\widehat{AC} = mA\hat{O}C = mA\hat{O}B + mB\hat{O}C = m\widehat{AB} + m\widehat{BC}$.

Figura 17 – Teorema 2.2.2 - Caso 1.

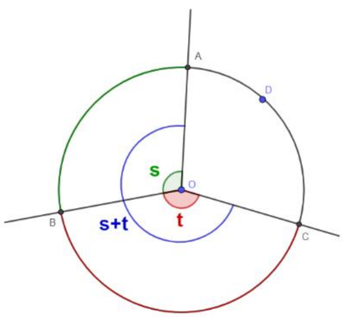


Fonte: elaborado pela professora/autora.

Caso 2: $\widehat{AC}$ é arco maior.

Neste caso, B é ponto exterior de $A\hat{O}C$ e os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$ são arcos menores, já que eles têm em comum somente o ponto B. Assim, pela Definição 2.2.8, $m\widehat{AB} = mA\hat{O}B$ e $m\widehat{BC} = mB\hat{O}C$, como mostra a figura a seguir:

Figura 18 – Teorema 2.2.2 - Caso 2.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Pela Definição 2.2.8, $m\widehat{AC} = m\widehat{ABC} = 360 - m\widehat{ADC}$, onde D é um ponto no arco menor correspondente de $\widehat{AC},$ ou seja, $m\widehat{ADC} = mA\hat{O}C$.

Agora $mA\hat{O}C + mA\hat{O}B + mB\hat{O}C = 360$. Assim temos

$$m\widehat{AC} = 360 - m\widehat{ADC} = 360 - mA\hat{O}C = 360 - (360 - mA\hat{O}B - mB\hat{O}C)$$
$$= mA\hat{O}B + mB\hat{O}C = m\widehat{AB} + m\widehat{BC}.$$

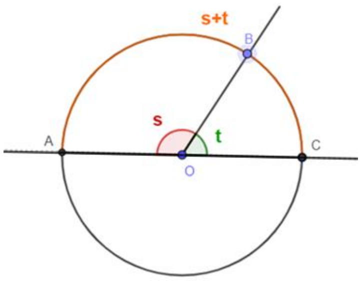
Caso 3: $\widehat{AC}$ é uma semicircunferência.

Neste caso os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{BC}$ são arcos menores, já que eles têm em comum somente o ponto B e o ângulo $A\hat{O}C$ é raso, ou seja, $mA\hat{O}C = 180$.

Novamente usando a Definição 2.2.8 e pelo Postulado 2.1.2 temos**:**

$$m\widehat{AC} = 180 = mA\hat{O}C = mA\hat{O}B + mB\hat{O}C = m\widehat{AB} + m\widehat{BC}. \quad \blacksquare$$

Figura 19 – Teorema 2.2.2 - Caso 3.

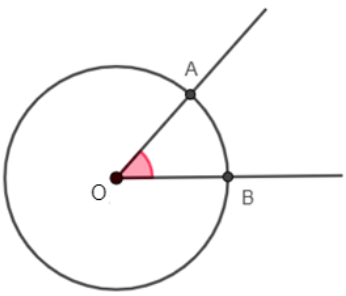


Fonte: elaborado pela professora/autora.

2.3 Ângulos em uma circunferência

Definição 2.3.1. Um **ângulo central** de uma circunferência é um ângulo cujo vértice é o centro da circunferência.

Figura 20 – Ângulo Central.

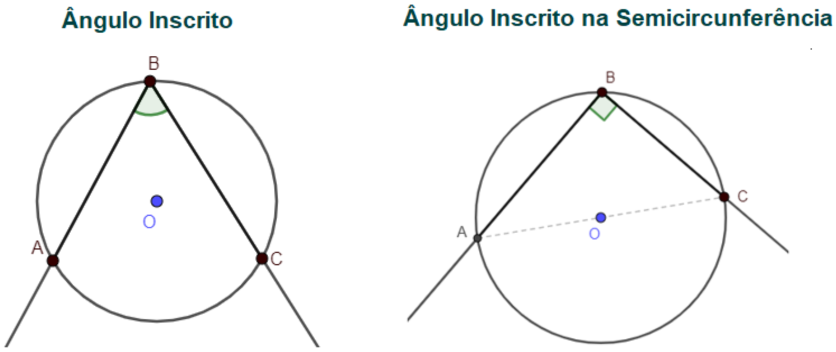


Fonte: elaborado pela professora/autora

Sendo $A\hat{O}B$ um ângulo central, com A e B na circunferência, dizemos que $A\hat{O}B$ tem como arco **correspondente** o arco menor definido por A e B.

Definição 2.3.2. Um **ângulo inscrito** de uma circunferência é um ângulo que possui o vértice sobre a circunferência e seus lados intersectam essa circunferência em outros dois pontos distintos.

Figura 21 – Ângulos Inscritos.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Seja $A\hat{B}C$ um ângulo inscrito em uma circunferência, com A, B, C pontos desta circunferência. Dizemos que o arco $\widehat{AC}$ é o **arco correspondente** a este ângulo inscrito ou que este ângulo está **inscrito** neste arco, se este estiver contido no interior do ângulo $A\hat{B}C$, a menos de A e C .

Se $\overline{AC}$ for um diâmetro, então dizemos que o ângulo é (ou está) **inscrito** na semicircunferência.

Teorema 2.3.1. A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é a metade da medida do seu arco correspondente.

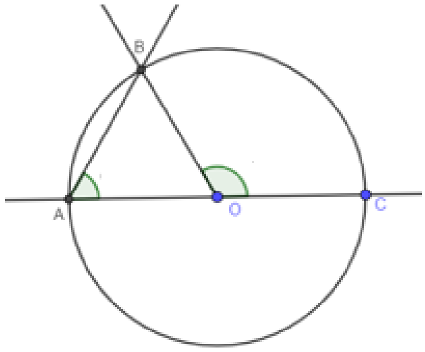
Demonstração.

Seja $B\hat{A}C$ um ângulo inscrito em uma circunferência de centro O com B e C pontos dessa circunferência. Mostraremos que $mB\hat{A}C = \frac{1}{2}.m\widehat{BC}$, sendo $\widehat{BC}$ o arco correspondente de $B\hat{A}C$. Vamos dividir a demonstração nos casos em que o centro da circunferência pertence a um dos lados do ângulo $B\hat{A}C$, quando ele está em $int(B\hat{A}C)$ e quando ele está em $ext(B\hat{A}C)$.

Caso 1: O pertence a um dos lados do ângulo $B\hat{A}C$.

Vamos supor $O \in \overrightarrow{AC}$, ou seja, $\overline{AC}$ é um diâmetro desta circunferência. O outro caso, quando $O \in \overrightarrow{AB}$, segue de maneira análoga.

Figura 22 – Teorema 2.3.1 – Caso 1.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Corolário 4.11c[4]), logo no triângulo AOB, temos que $mB\hat{O}C = mO\hat{A}B + mO\hat{B}A.$

Temos ainda que $AO = BO$ (pois são raios), logo o triângulo AOB é sósceles de base $\overline{AB}$, que pelo Teorema do Triângulo Isósceles (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Teorema 2.2[5]), obtemos que:

$mO\hat{A}B = mO\hat{B}A$. Daí, $mB\hat{O}C = 2.mB\hat{A}C$ e, portanto, $mB\hat{A}C = \frac{1}{2}.mB\hat{O}C$.

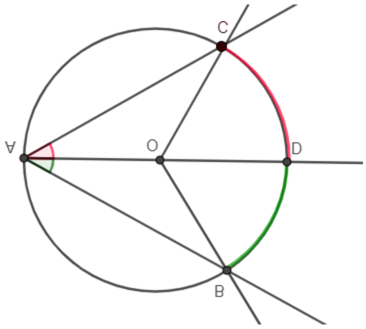
Como $\overline{AC}$ é um diâmetro da circunferência, então o arco $\widehat{BC}$ correspondente ao ângulo $B\hat{A}C$ é um ângulo menor e, com isso, $m\widehat{BC} = mB\hat{O}C$. Portanto, $mB\hat{A}C = \frac{1}{2}.m\widehat{BC}$.

Caso 2: $O \in int\,(B\hat{A}C)$.

Seja D um ponto da circunferência tal que $\overline{AD}$ seja um diâmetro. Neste caso D pertence ao o arco $\widehat{BC}$ correspondente ao ângulo $B\hat{A}C$ (ou seja, D está no interior deste ângulo), como ilustra a figura a seguir:

[4] Corolário 4.11c: Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
[5] Teorema 2.2 (Teorema do Triângulo Isósceles): Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Figura 23 – Teorema 2.3.1 – Caso 2.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Podemos aplicar o Caso 1 aos ângulos $B\hat{A}D$ e $D\hat{A}C$.

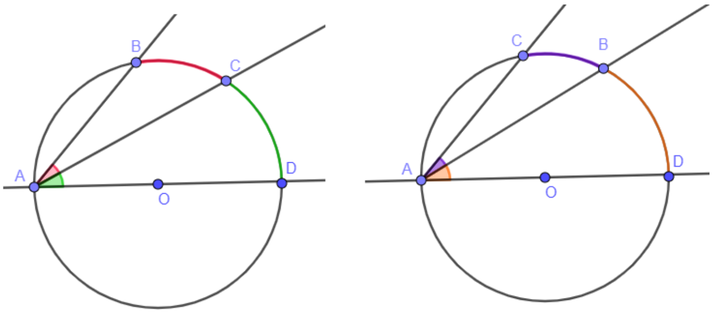
- $mB\hat{A}D = \frac{1}{2}.m\widehat{BD}$.
- $mD\hat{A}C = \frac{1}{2}.m\widehat{DC}$.

Pelo Teorema 2.2.2, $m\widehat{BD} + m\widehat{DC} = m\widehat{BC}$. Então, pelas igualdades anteriores e pelo Postulado 2.1.2, temos $mB\hat{A}C = \frac{1}{2}.m\widehat{BC}$.

Caso 3: $O \in ext(B\hat{A}C)$.

Novamente considere D um ponto da circunferência tal que $\overline{AD}$ seja um diâmetro. Neste caso temos duas situações possíveis: $C \in int(B\hat{A}D)$ ou $B \in int(C\hat{A}D)$.

Figura 24 – Teorema 2.3.1 – Caso 3.



Fonte: elaborado pela professora/autora

Vamos supor que $C \in int(B\hat{A}D)$. O outro caso segue de maneira análoga. Novamente, usando o Postulado 2.1.2, o Caso 1 aos ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$ e o Teorema 2.2.2, temos

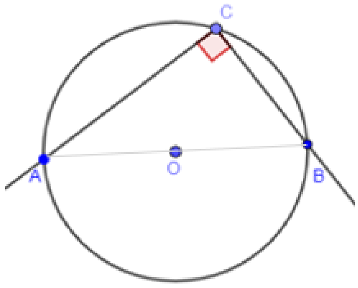
$$mB\hat{A}C = mB\hat{A}D - mC\hat{A}D = \frac{1}{2}.m\widehat{BD} - \frac{1}{2}.m\widehat{CD} = \frac{1}{2}.(m\widehat{BD} - m\widehat{CD}) = \frac{1}{2}.m\widehat{BC}. \blacksquare$$

Corolário 2.3.1. Um ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.

Demonstração.

Um ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo $A\hat{C}B$ inscrito em uma circunferência, digamos de centro O, com A, B e C pontos dessa circunferência e $\overline{AB}$ um diâmetro, ou seja, seu arco correspondente $\widehat{AB}$ é uma semicircunferência. Logo, $m\widehat{AB} = 180$. Pelo teorema anterior, $mA\hat{C}B = \frac{1}{2}.m\widehat{AB} = \frac{1}{2}.180 = 90$. ■

Figura 25 – Corolário 2.3.1.



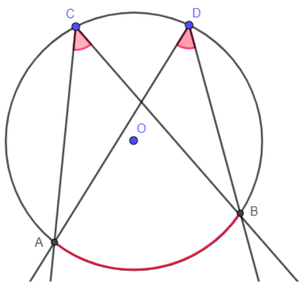
Fonte: elaborado pela professora/autora

Corolário 2.3.2. Ângulos inscritos em um mesmo arco são congruentes.

Demonstração.

Considere dois ângulos inscritos em um mesmo arco $\widehat{AB}$ de uma circunferência. Assim estes ângulos podem ser denotados por $A\hat{C}B$ e $A\hat{D}B$, com C e D pontos da circunferência. Pelo Teorema 2.3.1 temos $mA\hat{C}B = \frac{1}{2}.m\widehat{AB} = mA\hat{D}B$. ■

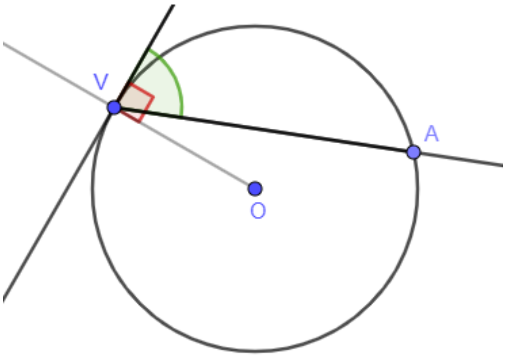
Figura 26 – Corolário 2.3.2.



Fonte: elaborado pela professora/autora

Definição 2.3.3. Um **ângulo de segmento** de uma circunferência é o ângulo de vértice na circunferência e seus lados são uma semirreta que contém uma corda desta circunferência (onde uma das extremidades é o vértice) e outro uma semirreta cuja reta que a contém é tangente à circunferência no vértice do ângulo.

Figura 27 – Ângulo de Segmento.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Sendo V o vértice de um ângulo de segmento de uma circunferência com $\overline{VA}$ a corda que define um dos seus lados, o arco **correspondente** a este ângulo é o conjunto dos pontos da circunferência que estão no interior deste ângulo mais os pontos V e A.

Teorema 2.3.2. A medida de um ângulo de segmento de uma circunferência é a metade da medida do seu arco correspondente.

Demonstração.

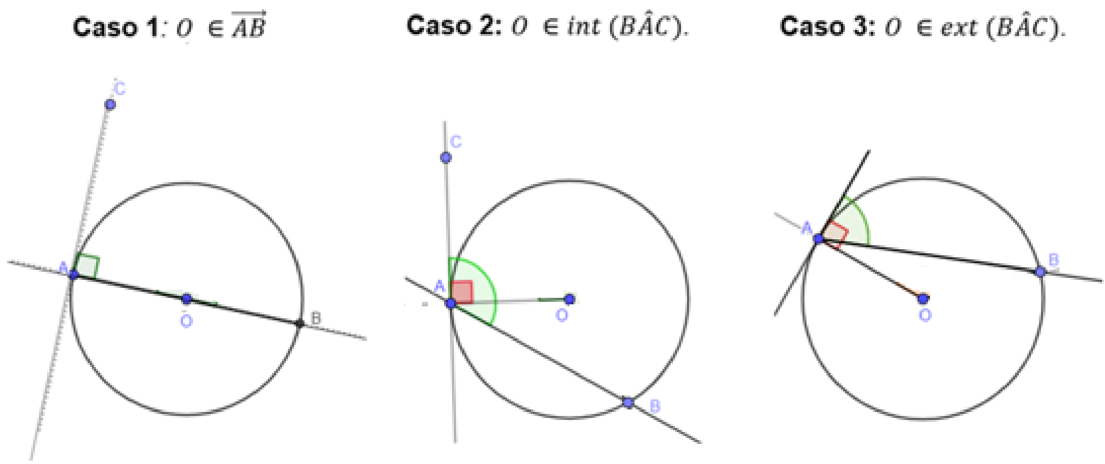
Seja $B\hat{A}C$ um ângulo de segmento de uma circunferência de centro $O,$ com A e B pontos dessa circunferência. Da Definição 2.3.3, a reta $\overleftrightarrow{AC}$ é tangente à essa circunferência em A.

Pelo Corolário 2.2.1, $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular à $\overline{AO}$ e daí:

$$mO\hat{A}C = 90. \text{ (*)}$$

Temos três casos a considerar: o centro da circunferência pertence ao lado $\overrightarrow{AB}$, quando ele está em $int(B\hat{A}C)$ e quando ele está em $ext(B\hat{A}C)$.

Figura 28 – Teorema 2.3.2.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Caso 1: $O \in \overrightarrow{AB}$ (ou seja, $O \in \overline{AB}$).

Neste caso $\overline{AB}$ é um diâmetro e, com isso, $180 = m\widehat{AB}$. Além disso, $O\hat{A}C = B\hat{A}C$. Como por (*) temos $mO\hat{A}C = 90$, então $mB\hat{A}C = \frac{m\widehat{AB}}{2}$.

Caso 2: $O \in int\,(B\hat{A}C)$.

Por (*) temos que $mO\hat{A}C = 90$. Pelo Postulado 2.1.2, $mB\hat{A}C = mO\hat{A}B + mO\hat{A}C$, pois $O \in int\,(B\hat{A}C)$. Sendo $\alpha = mB\hat{A}C$, temos $\alpha = mO\hat{A}B + 90$, ou seja, $mO\hat{A}B = \alpha - 90$. Como $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$ são raios da circunferência então o triângulo AOB é isósceles de base $\overline{AB}$. Pelo Teorema do Triângulo Isósceles (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Teorema 2.2[6]), $mO\hat{B}A = mO\hat{A}B = \alpha - 90$.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Teorema 4.10[7]), temos:

$$mA\hat{O}B + mO\hat{B}A + mO\hat{A}B = 180 \Rightarrow m\,A\hat{O}B + \alpha - 90 + \alpha - 90 = 180 \Rightarrow$$

$$\mathrm{m}A\hat{O}B = 360 - 2.\alpha = 360 - 2\,.mB\hat{A}C.$$

Sendo $\widehat{AB}$ o arco menor definido por A e B, como $O \in int\,(B\hat{A}C)$, o arco correspondente de $B\hat{A}C$ é o arco maior $\widehat{AB}$, cuja medida é

$$x = 360 - m\widehat{AB} = 360 - mO\hat{A}B.$$

[6] Resultado citado na página 30.
[7] Teorema 4.10: A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180.

Assim, $360 - x = mO\hat{A}B = 360 - 2\,.\,mB\hat{A}C$. Logo, $mB\hat{A}C = \frac{x}{2}$, como desejado.

Caso 3: $O \in ext\,(B\hat{A}C)$.

Novamente por (*) temos que $mO\hat{A}C = 90$. Agora como $O \in ext(B\hat{A}C)$, pelo Postulado 2.1.2, $mO\hat{A}C = mO\hat{A}B + mB\hat{A}C$. Sendo $\alpha = mB\hat{A}C$, temos $90 = mO\hat{A}B + \alpha$, ou seja, $mO\hat{A}B = 90 - \alpha$. Como $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$ são raios da circunferência então o triângulo AOB é isósceles de base $\overline{AB}$. Pelo Teorema do Triângulo Isósceles (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Teorema 2.2[8]), $mO\hat{B}A = mO\hat{A}B = 90 - \alpha$.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Teorema 4.10[9]) temos:

$$mA\hat{O}B + mO\hat{B}A + mO\hat{A}B = 180 \Rightarrow m\,A\hat{O}B + 90 - \alpha + 90 - \alpha = 180$$

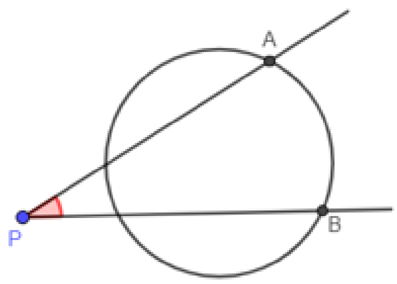
$$\Rightarrow \mathrm{m}A\hat{O}B = 2.\alpha \Rightarrow mA\hat{O}B = 2\,.\,mB\hat{A}C.$$

Sendo $\widehat{AB}$ o arco menor definido por A e B, como $O \in ext(B\hat{A}C)$, o arco correspondente de $B\hat{A}C$ é o arco menor $\widehat{AB}$, cuja medida é $mO\hat{A}B$.

Assim, $m\widehat{AB} = mO\hat{A}B = 2\,.\,mB\hat{A}C$. Logo, $mB\hat{A}C = \frac{m\widehat{AB}}{2}$, como desejado. ■

Definição 2.3.4. Chamamos de **ângulo excêntrico exterior** à circunferência o ângulo cujo vértice é um ponto exterior a ela e seus lados são semirretas tais que as retas que às contém podem ser tangentes ou secantes à circunferência.

Figura 29 – Ângulo excêntrico exterior.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

[8] Resultado citado na página 30.
[9] Resultado citado na página 34.

Os arcos da circunferência cujos pontos estão no interior do ângulo excêntrico exterior são ditos **arcos correspondentes** dele. Assim, cada ângulo excêntrico exterior tem dois arcos correspondentes.

Teorema 2.3.3. A medida de um ângulo excêntrico exterior é metade da diferença das medidas dos seus arcos correspondentes (maior e menor respectivamente).

Demonstração.

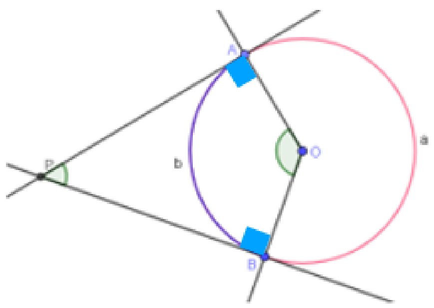
Temos 3 casos a considerar: seus lados são semirretas tais que as retas que às contém são ambas tangentes à circunferência, ambas secantes à circunferência e quando uma é tangente e a outra é secante à circunferência.

Sejam a e b as medidas dos seus arcos correspondentes (maior e menor respectivamente). Logo, precisamos mostrar que a medida do ângulo excêntrico exterior é $\frac{a-b}{2}$, em cada caso.

Caso 1: ambas tangentes à circunferência.

Seja $A\hat{P}B$ um ângulo excêntrico exterior a uma circunferência de centro O, com A e B os pontos de tangência dos lados do ângulo à essa circunferência.

Figura 30 – Teorema 2.3.3 – Caso 1.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Considerando o quadrilátero $APBO$, como a soma dos ângulos internos é 360 (consequência do resultado que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 e o Postulado 2.2.1), $mO\hat{A}P = 90$ e $mO\hat{B}P = 90$ (pelo Corolário 2.2.1), então $mA\hat{P}B = 180 - mA\hat{O}B$.

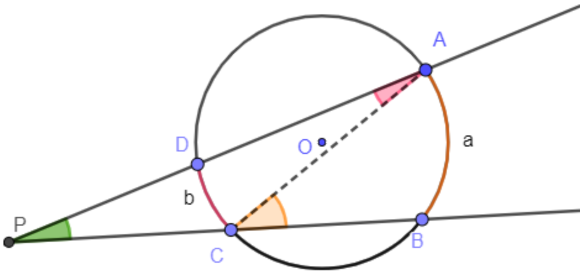
Logo a e b são as medidas dos arcos maior e menor definidos por A e B. Assim, $b = mA\hat{O}B$ e $a + b = 360$. Portanto,

$$mA\hat{P}B = 180 \ - \ mA\hat{O}B = 180 \ - \ b = \left(\frac{a+b}{2}\right) - b = \frac{a-b}{2}.$$

Caso 2: ambas secantes à circunferência.

Seja $A\hat{P}B$ um ângulo excêntrico exterior a uma circunferência de centro O, com A e B pontos da circunferência. Como $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são secantes à circunferência, sejam D e C os outros pontos de interseção dos lados com a circunferência, que vamos assumir que $D \in \overline{PA}$ e $C \in \overline{PB}$.

Figura 31 – Teorema 2.3.3 – Caso 2.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Temos que $P\hat{A}C$ é um ângulo inscrito na circunferência com arco correspondente determinado por C e D. Note que ele é um dos arcos correspondentes ao ângulo excêntrico exterior $A\hat{P}B$ e, com isso, sua medida é b. Pelo Teorema 2.3.1, $mP\hat{A}C \ = \frac{1}{2}.b$. Analogamente para $A\hat{C}B$, temos $mA\hat{C}B = \frac{1}{2}.a$.

No triângulo APC, $A\hat{C}B$ é um ângulo externo. Logo, sua medida é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Corolário 4.11c[10]), ou seja,

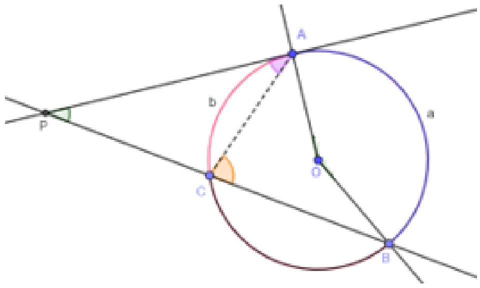
$$mA\hat{C}B = mP\hat{A}C + mA\hat{P}B \Rightarrow mA\hat{P}B = mP\hat{A}C - mA\hat{C}B \Rightarrow mA\hat{P}B = \frac{1}{2}.a \ - \frac{1}{2}.b \ = \ \frac{a-b}{2}.$$

Caso 3: uma tangente e outra secante à circunferência.

Seja $A\hat{P}B$ um ângulo excêntrico exterior a uma circunferência de centro O, com A e B pontos da circunferência, sendo A o ponto de tangência de $\overrightarrow{PA}$ à circunferência e C o outro ponto de interseção de $\overrightarrow{PB}$ com a circunferência, que vamos assumir que $C \in \overline{PB}$.

[10] Resultado citado na página 30.

Figura 32 – Teorema 2.3.3 – Caso 3.



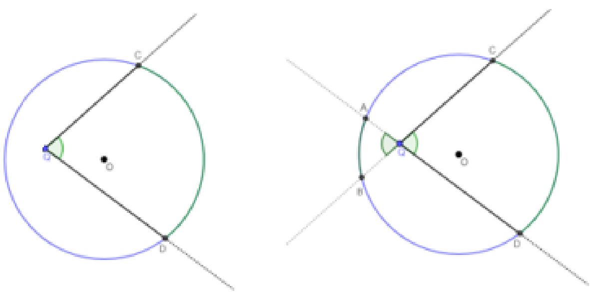
Fonte: elaborado pela professora/autora.

Note que $P\hat{A}C$ é um ângulo de segmento da circunferência com arco correspondente determinado por A e C, que é um dos arcos correspondentes do ângulo excêntrico exterior $A\hat{P}B$ e, com isso, sua medida é b. Pelo Teorema 2.3.2, $mP\hat{A}C = \frac{b}{2}$. Já o ângulo $A\hat{C}B$ é um ângulo inscrito na circunferência com arco correspondente determinado por A e B, que é o outro arco correspondente ao ângulo excêntrico exterior $A\hat{P}B$ e, com isso, sua medida é a. Pelo Teorema 2.3.1, $mA\hat{C}B = \frac{1}{2}.a$. No triângulo APC, $A\hat{C}B$ é um ângulo externo. Logo, sua medida é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Corolário 4.11c[11]), ou seja,

$$mA\hat{C}B = mP\hat{A}C + mA\hat{P}B \Rightarrow mA\hat{P}B = mP\hat{A}C - mA\hat{C}B \Rightarrow mA\hat{P}B = \frac{1}{2}.a - \frac{1}{2}.b = \frac{a-b}{2}. \blacksquare$$

Definição 2.3.5. Chamamos de **ângulo excêntrico interior à circunferência** o ângulo cujo vértice é um ponto interior da circunferência e os lados são semirretas cujas retas que as contêm são secantes à circunferência.

Figura 33 – Ângulo excêntrico interior.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

[11] Resultado citado na página 30.

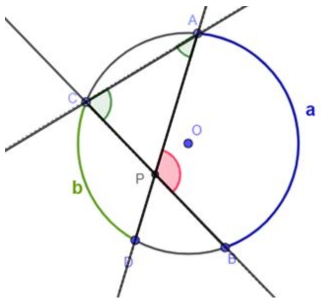
Note que dado um ângulo excêntrico interior e tomando as retas que contêm os seus lados obtemos um outro ângulo excêntrico interior, com mesma medida que o inicial pois são ângulos opostos pelo vértice. Os arcos da circunferência cujos pontos estão no interior destes ângulos são ditos **arcos correspondentes** do ângulo excêntrico interior inicial. Assim, cada ângulo excêntrico interior tem dois arcos correspondentes, como os ângulos excêntrico exteriores.

Teorema 2.3.4. A medida de um ângulo excêntrico interior é metade da soma das medidas dos seus arcos correspondentes.

Demonstração.

Seja $A\hat{P}B$ um ângulo excêntrico interior a uma circunferência de centro O, com A e B pontos da circunferência. Sejam a a medida do seu arco correspondente definido por A e B e b a medida do seu arco correspondente definido por C e D.

Figura 34 – Teorema 2.3.4.



Fonte: elaborado pela professora/autora

Note que o ângulo $A\hat{C}P$ é um ângulo inscrito na circunferência com arco correspondente determinado por A e B, que um arco correspondente ao ângulo excêntrico interior $A\hat{P}B$ e, com isso, sua medida é a. Pelo Teorema 2.3.1, $mA\hat{C}P = \frac{1}{2}.a$. De maneira análoga temos que $mC\hat{A}P = \frac{1}{2}.b$.

Como $A\hat{P}B$ é um ângulo externo do triângulo APC, sua medida é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Corolário 4.11c[12]), ou seja,

$$mA\hat{P}B = mA\hat{C}P + mC\hat{A}P \Rightarrow mA\hat{P}B = \frac{1}{2}.a + \frac{1}{2}.b = \frac{a+b}{2}. \quad \blacksquare$$

[12] Resultado citado na página 30.

Proposição 2.3.1. Sejam uma circunferência λ de centro O e um ponto exterior P. Sejam $r\ e\ l$ retas secantes passando por P e que interseccionam λ em $R\ e\ S$ e nos pontos $U\ e\ L,$ respectivamente. Seja t uma reta que passa por P e é tangente a λ no ponto T. Então valem as desigualdades $PR.PS = PU.PL = PT^2$.

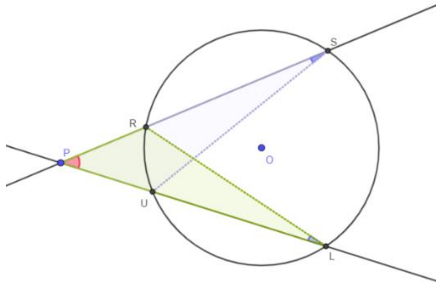
Demonstração.

Parte 1: $PR.PS = PU.PL$.

Comparando os triângulos SPU e LPR temos dois pares de ângulos:

- $S\hat{P}U \cong L\hat{P}R$ (mesmo ângulo)
- $P\hat{S}U \cong P\hat{L}R$ (ângulos inscritos em um mesmo arco de λ – Corolário 2.3.2)

Figura 35 – Proposição 2.3.1 – Parte 1.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Pelo Caso de Semelhança de Triângulos A.A. (para detalhes ver REZENDE e QUEIROZ, 2008 – Corolário 5.3[13]), SPU e LPR são semelhantes e, com isso, $\frac{PS}{PL} = \frac{PU}{PR}$. Portanto, $PR.PS = PU.PL$.

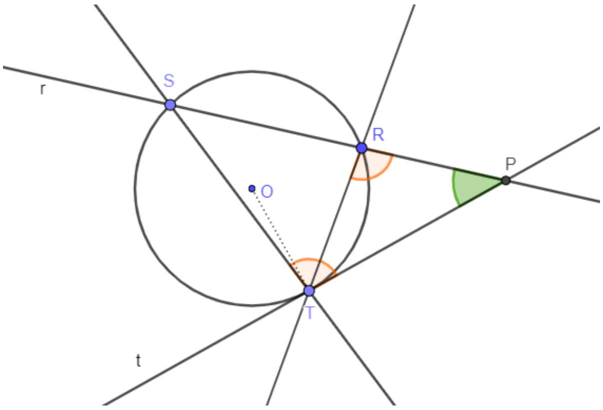
Parte 2: $PR.PS = PT^2$.

Comparando os triângulos $PST\ e\ PTR$ temos dois pares de ângulos:

- $S\hat{P}T \cong T\hat{P}R$ (mesmo ângulo)
- $S\hat{T}P \cong T\hat{R}P$ (como $P\hat{S}T$ e $P\hat{T}R$ têm o mesmo arco correspondente definido por R e T em λ, sendo α a medida deste arco, temos $mP\hat{S}T = \frac{1}{2}.\alpha$ (Teorema 2.3.1) e $mP\hat{T}R = \frac{1}{2}.\alpha$ (Teorema 2.3.2)).

[13] Corolário 5.3: Seja S uma correspondência entre os vértices de dois triângulos. Se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes então a correspondência S é uma semelhança.

Figura 36 – Proposição 2.3.1 – Parte 2.



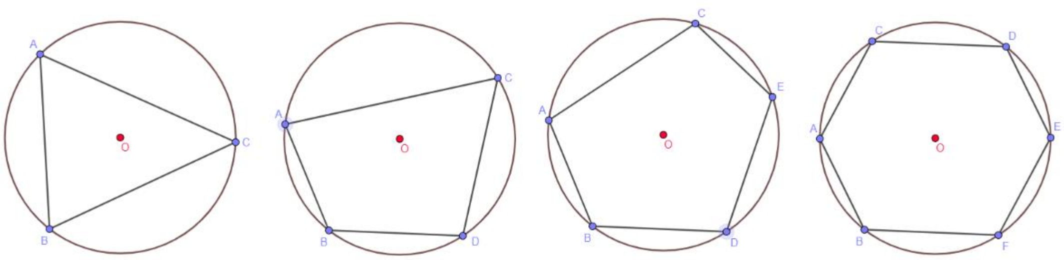
Fonte: elaborado pela professora/autora.

Pelo Caso de Semelhança de Triângulos A.A. (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Corolário 5.3[14]), $PST\ e\ PTR$ são semelhantes e, com isso, $\frac{PS}{PT} = \frac{PT}{PR}$. Portanto, $PR.PS = PT^2$. ■

2.4 Inscrição de polígonos e poliedros

Definição 2.4.1. Um polígono é dito **inscritível** se existe uma circunferência que contém todos os seus vértices. Neste caso dizemos o polígono está **inscrito** nesta circunferência.

Figura 37 – Polígonos inscritíveis.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Teorema 2.4.1. Todo triângulo é inscritível, ou seja, todo triângulo admite uma circunferência passando por seus vértices.

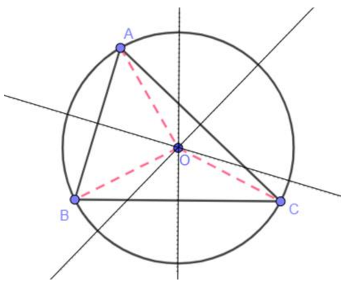
[14] Resultado citado na página 40.

Demonstração.

Seja ABC um triangulo de circuncentro O. Como O é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do triângulo, ele é equidistante dos seus vértices (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Teorema 2.11[15]), temos $AO = OB = OC$.

Denotando por r tal distância comum, segue que a circunferência de centro O e raio r passa por A, B e C. Existe, portanto, uma circunferência passando pelos vértices do triângulo ABC. ■

Figura 38 – Teorema 2.4.1.



Fonte: elaborado pela professora/autora

Observação: O resultado anterior não ocorre para polígonos em geral. No caso de polígonos convexos, onde estão bem definidos seus ângulos, é possível obter condições para que isso ocorra, como no próximo resultado.

Proposição 2.4.1. Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.

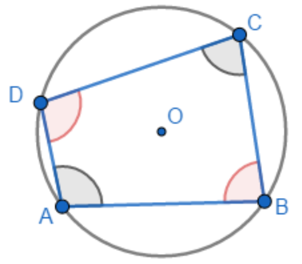
Demonstração.

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo inscritível. Logo, existe uma circunferência λ contendo $A,\ B,\ C$ e D. Assim $D\hat{A}B$ e $D\hat{C}B$ são ângulos inscritos em λ com arcos correspondentes definidos por B e $D,$ cuja união deles é toda a circunferência λ. Deste modo, pelo Teorema 2.3.1,

$$mD\hat{A}B\ +\ mD\hat{C}B = \frac{m\widehat{BCD}}{2} + \frac{m\widehat{DAB}}{2} = \frac{360}{2} = 180.$$

[15] Teorema 2.11: A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades do segmento.

Figura 39 – Proposição 2.4.1 – Parte 1.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

De maneira análoga temos que $mA\hat{D}C + mA\hat{B}C = 180$.

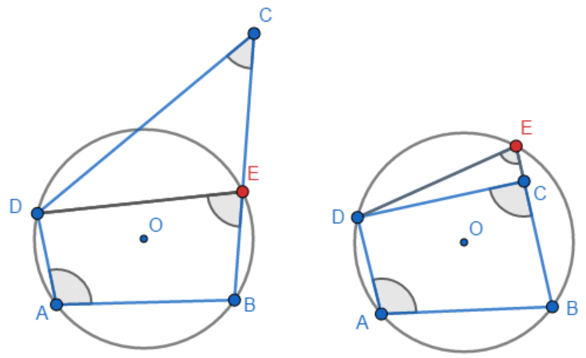
Suponha agora que $mD\hat{A}B + mD\hat{C}B = 180$. Considere o triângulo ABD e trace a circunferência λ circunscrita a esse triângulo (Teorema 2.4.1). Tem que ocorrer uma das 3 possibilidades: $C \in ext(\lambda)$, $C \in int(\lambda)$ ou $C \in \lambda$.

Se $C \in ext(\lambda)$, seja E o ponto de interseção do lado $\overline{BC}$ com a circunferência. Como $ABED$ é inscritível, $mD\hat{A}B + mD\hat{E}B = 180$. Portanto temos que $mD\hat{C}B = mD\hat{E}B$, o que é um absurdo pelo Teorema do Ângulo Externo (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Teorema 3.2[16]), já que $D\hat{E}B$ é ângulo externo ao triângulo CDE.

Se $C \in int(\lambda)$, seja E o ponto de interseção de $\overrightarrow{BC}$ com a circunferência. Como $ABED$ é inscritível, $mD\hat{A}B + mD\hat{E}B = 180$. Portanto temos que $mD\hat{C}B = mD\hat{E}B$, o que é um absurdo novamente pelo Teorema do Ângulo Externo, já que $D\hat{C}B$ *é* ângulo externo ao triângulo CDE.

Assim $C \in \lambda$, concluindo que $ABCD$ está inscrito nesta circunferência. ■

Figura 40 – Proposição 2.4.1 – Parte 2.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

[16] Teorema 3.2 (Teorema do Ângulo Externo): Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos seus ângulos internos não adjacentes.

Teorema 2.4.2. Se um polígono é regular (todos os seus lados são congruentes entre si e todos os seus ângulos são congruentes entre si), então ele é inscritível.

Demonstração:

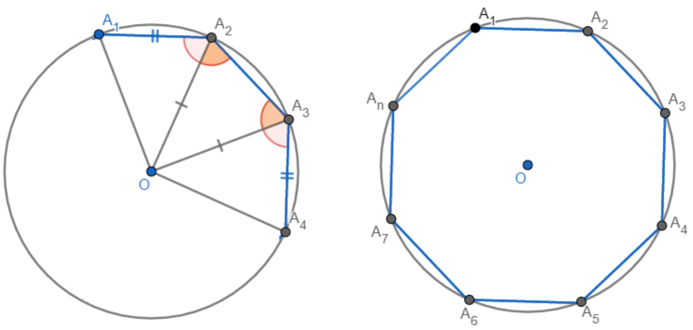
Seja $A_1A_2A_3 \dots A_n$ um polígono regular. Considere a circunferência que passa por $A_1A_2A_3$ (Teorema 2.4.1), sendo O centro desta circunferência.

Como $OA_2 = OA_3$, então o triângulo OA_2A_3 é isósceles e, pelo Teorema do Triângulo Isósceles (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Teorema 2.2[17]), $O\widehat{A_2}A_3 \cong O\widehat{A_3}A_2$. Como o polígono é regular, todos os seus ângulos internos têm a mesma medida, sendo assim, $A_1\widehat{A_2}A_3 \cong A_2\widehat{A_3}A_4$.

Usando o Postulado 2.1.2 e as congruências anteriores temos $A_1\widehat{A_2}O \cong O\widehat{A_3}A_4$. Usando que $A_1\widehat{A_2}O \cong O\widehat{A_3}A_4$ (provado anteriormente), $OA_2 = OA_3$ (raios) e $A_1A_2 = A_3A_4$ (os lados de um polígono regular são congruentes) então os triângulos, pelo caso LAL (REZENDE e QUEIROZ, 2008, Postulado 12[18]), OA_1A_2 e OA_3A_4 são congruentes.

Daí obtém-se que $OA_4 = OA_1$. Portanto, A_4 também é um ponto da circunferência.

Figura 41 – Teorema 2.4.2.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

O mesmo raciocínio agora pode ser repetido para provar que A_5 também pertence a circunferência e assim sucessivamente, concluindo que todos os pontos

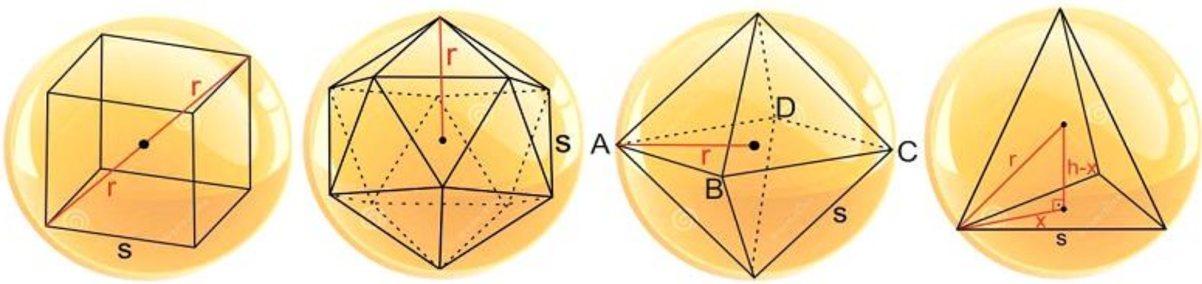
[17] Resultado citado na página 30.
[18] Postulado 12 (1º Caso de Congruência de Triângulos ou caso LAL.) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

do polígono pertencem a essa circunferência. Portanto o polígono regular é inscritível. ■

De maneira análoga, temos este conceito para o espaço.

Definição 2.4.3. Um poliedro é dito **inscritível** se existe uma esfera que contém todos os seus vértices. Neste caso dizemos o poliedro está **inscrito** nesta esfera.

Figura 42 – Poliedros inscritíveis.



Fonte: obtido no blog http://www.lislene.com/2013/06/inscricao-e-circunscricao-de.html.

Não é o intuito aprofundar este conceito neste trabalho e sim abordar a nomenclatura para o reconhecimento da situação-problema a ser abordada como aplicação.

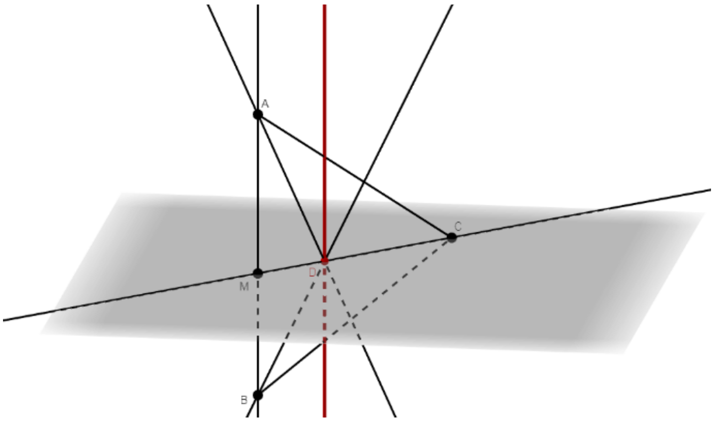
Segue apenas um resultado, de um caso particular de poliedro, que estende o Teorema 2.4.1 para o espaço. Antes disso, precisamos recordar dois conceitos e suas caracterizações, com o objetivo de demonstrar o resultado mencionado.

Definição 2.4.3. Sejam A, B, C pontos distintos não colineares.

Chamamos de **plano mediador** do segmento $\overline{AB}$ o plano perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ que passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$.

A **reta medial** dos pontos A, B, C (ou do triângulo ABC) é a reta perpendicular ao plano que passa por A, B, C e contém o circuncentro do triangulo ABC.

Figura 43 – Plano Mediador e Reta Medial.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Observação: Temos como caracterização destes objetos a equidistância de pontos: o plano mediador do segmento $\overline{AB}$ é o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A e B (MUNIZ NETO, 2013, Proposição 7.15[19]) e a **reta medial** é o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A, B e C (MUNIZ NETO, 2013, Proposição 7.16[20]).

Teorema 2.4.3. Todo tetraedro é inscritível.

Demonstração.

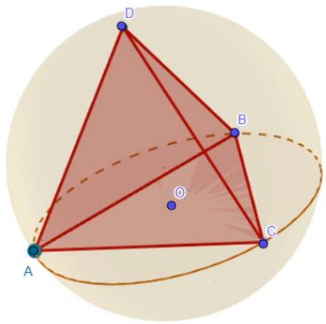
Seja $ABCD$ um tetraedro. Se r e s são, respectivamente, as retas mediais dos conjuntos de pontos $\{B, C, D\}$ e $\{A, C, D\}$, então r e s estão contidas no plano mediador de $\overline{CD}$ e não são paralelas (já que os planos definidos por B, C, D e por A, C, D são distintos pois contém faces distintas do tetraedro).

Portanto r e s se intersectam em um ponto O. Logo, O é equidistante de A, B, C e D, denotando por a esta medida. Assim, basta tomar a esfera de centro O e raio a. ■

[19] Proposição 7.15: Dados, no espaço, pontos distintos A e B, o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e de B é o plano $\propto$, perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e passando pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

[20] Proposição 7.16: Dados pontos não colineares A, B e C, o lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de A, B e C é a reta r, perpendicular ao plano que contém A, B, C e passando pelo circuncentro do triângulo ABC.

Figura 44 – Teorema 2.4.3.



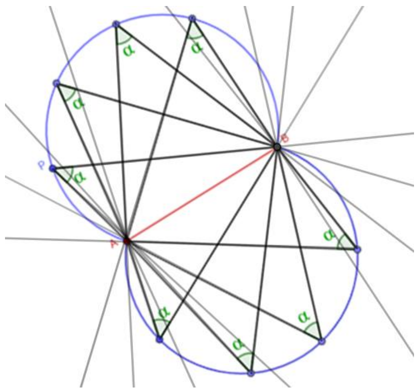
Fonte: elaborado pela professora/autora.

2.5 Arco Capaz

Aqui apresentamos uma figura geométrica (no plano) que é caracterizada pelo conceito de ângulo inscrito.

Definição 2.5.1. Sejam $\overline{AB}$ um segmento e α um número real positivo. O conjunto dos pontos V em um plano tais que $mA\hat{V}B = \alpha$ é chamado de **arco capaz** do ângulo de medida α sobre o segmento $\overline{AB}$. Neste caso, dizemos que o ponto V **vê o segmento $\overline{AB}$ sob o ângulo de medida α**.

Figura 45 – Arco Capaz.

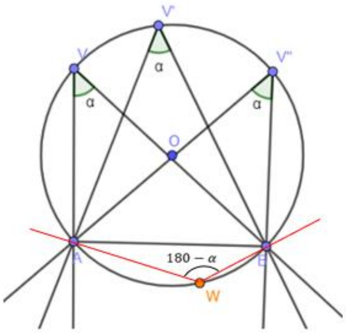


Fonte: elaborado pela professora/autora.

Observação: Dados dois pontos A e B distintos sobre uma circunferência e um dos arcos da circunferência determinados por esses dois pontos. Para todo ponto V sobre esse arco, com V distinto de A e de B, a medida do ângulo $A\hat{V}B$ é constante, pois são ângulos inscritos na circunferência que têm o mesmo arco correspondente.

Sendo α esta medida constante, este arco é parte do arco capaz do ângulo α sobre o segmento $\overline{AB}$. Por outro lado, seja W um ponto qualquer dessa circunferência, não pertencente ao arco $\widehat{AVB}$. Nesse caso $\widehat{AWB}$ é o arco capaz do ângulo $A\widehat{W}B$ e $mA\widehat{W}B = 180 - \alpha$.

Figura 46 – Ângulos inscritos com medida constante.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Admitindo conhecidas construções geométricas elementares (para detalhes ver REZENDE e QUEIROZ, 2008 – Capítulo 8), mostremos como obter o arco capaz do ângulo de medida α sobre o segmento $\overline{AB}$.

Construção do Arco Capaz

Sejam dados um segmento $\overline{AB}$ e um ângulo $C\hat{E}D$ com medida α.

Para construir o arco capaz do ângulo de medida α sobre o segmento $\overline{AB}$, siga os seguintes passos:

i) Traça-se a mediatriz de $\overline{AB}$;

ii) Transporta-se o ângulo $C\hat{E}D$ sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$ em qualquer posição, obtendo a semirreta $\overrightarrow{AX}$;

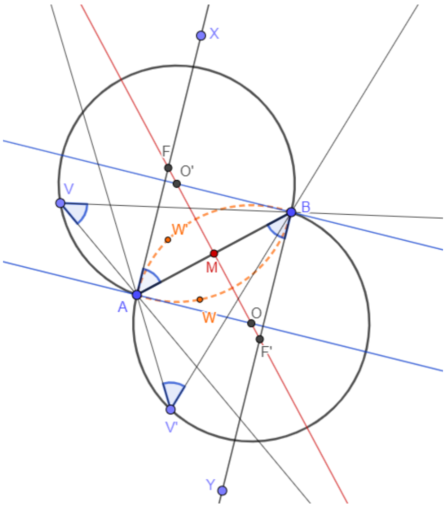
iii) Traça-se a perpendicular a $\overrightarrow{AX}$ pelo ponto A, que encontra a mediatriz $\overline{AB}$ em um ponto O e marca-se o ponto O', simétrico ao ponto O em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

iv) Traça-se as circunferências λ e λ' de centro O e O', respectivamente, e de mesmo raio AO.

v) Marque um ponto $V \in \lambda$ $(V \neq A, B)$ tal que V e O' estão em semiplanos opostos com relação à $\overleftrightarrow{AB}$ e $V' \in \lambda'$ $(V' \neq A, B)$ tal que V' e O estão em semiplanos opostos com relação à $\overleftrightarrow{AB}$.

O arco capaz do ângulo de medida α sobre o segmento $\overline{AB}$ é a união dos arcos $\widehat{AVB}$ e $\widehat{AV'B}$ das circunferências λ e λ', respectivamente.

Figura 47 – Construção do Arco Capaz.



Fonte: elaborado pela professora/autora.

Justificativa.

Denotemos por M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e por F a intersecção da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ com a semirreta $\overrightarrow{AX}$.

Comparando os triângulos OAF e AMF temos dois pares de ângulos congruentes:

- $A\hat{F}O \cong A\hat{F}M$ (mesmo ângulo)
- $O\hat{A}F \cong A\hat{M}F$ (ambos são retos)

Pelo Caso de Semelhança de Triângulos A.A. (para detalhes ver REZENDE e QUEIROZ, 2008, Corolário 5.3[21]), OAF e AMF são semelhantes e, com isso, $mA\hat{O}F = mM\hat{A}F = \alpha$.

Como o triangulo OAB é isósceles e a reta $\overleftrightarrow{OM}$ é a mediatriz da base, temos que $\overline{OM}$ é bissetriz de OAB (para detalhes ver REZENDE e QUEIROZ, 2008, Teoremas 2.2 e 4.10[22]) com $mA\hat{O}B = 2.mA\hat{O}M = 2\,\alpha$. Daí, pelo Teorema 2.3.1, temos que $mA\hat{V}B = \frac{1}{2}mA\hat{O}B = \alpha$. De maneira análoga, também podemos concluir que $mA\widehat{V'}B = \frac{1}{2}mA\widehat{O'}B = \alpha$.

[21] Resultado citado na página 40.
[22] Resultados citados nas páginas 30 e 34, respectivamente.

3 SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Este capítulo contém a proposta de uma sequência de atividades para o estudo de ângulos em uma circunferência, utilizando como ferramenta principal o Geoplano Circular. A proposta abordada conta com exercícios tradicionais e situações-problema que, em alguns casos, têm o auxílio do software matemático GeoGebra para algumas visualizações. Também são apresentados as observações e resultados obtidos da sua aplicação.

3.1 Ferramentas matemáticas

Neste trabalho é utilizado uma ferramenta lúdica, de fácil manuseio e criação, o **Geoplano**, que auxilia de forma simples e ampla nas estratégias de ensino, viabilizando a aprendizagem. A palavra Geoplano vem da união das sílabas “geo”, de geometria, e “plano” que faz referência a uma tábua plana, dando significado a Geoplano como instrumento para representar a geometria em um tabuleiro plano. O Geoplano foi apresentado pelo matemático Caleb Gattegno, em 1961, na primeira publicação da Comissão Internacional para a melhoria do ensino da matemática. Na confecção dos Geoplanos são utilizados materiais de baixo custo e eles podem ser manufaturados com facilidade.

O Geoplano consiste em um tabuleiro (de madeira, plástico, EVA ou outro material) de forma quadrada, com pinos (pregos, alfinetes, pinos) igualmente espaçados formando quadrados (Geoplano Quadrado) ou colocados um no centro e outros pinos igualmente espaçados formando uma ou mais circunferências (Geoplano Circular), ou podendo ter ambas as disposições de pinos (Geoplano Misto). Utiliza-se ligas, que podem ser de elásticos, barbante ou fios, que quando enlaçadas nos pinos representam figuras planas com vértices nesses pinos. Assim, existe uma variedade de Geoplanos, podendo variar o tamanho do tabuleiro, o número e a disposição dos pinos colocados no tabuleiro, o número de circunferências concêntricas e o tipo de material utilizado nas placas e nos pinos.

Mediante a necessidade do tema abordado nessa dissertação, utilizamos um Geoplano Circular, constituído por: um tabuleiro, formado por uma placa de E.V.A. colada junto a outra de madeira (para sustentação); uma folha impressa com uma circunferência com medidas em grau; pinos de metal, colocados um no centro da circunferência e doze pinos espaçados igualmente entre si nesta circunferência, confeccionados pela professora/autora, como mostra a figura a seguir. Também, foi enviado pinos extras, que serviram de apoio nas construções.

A folha de papel colocada sobre esse Geoplano teve a finalidade de localização, tanto para alunos quanto para a professora/autora, visto que o momento da aplicação foi de forma remota (online). Ela contém uma circunferência dividida em arcos congruentes de medida 10, onde cada ponto desta divisão continha um número que era a medida do arco com uma extremidade neste ponto e a outra em um ponto 0 fixo. Os pinos eram colocados sobre estes pontos e isso facilitou as correções feitas por videochamada (pela câmera) também para que os alunos que não estavam com o tabuleiro do Geoplano em mãos pudessem observar e executar as atividades propostas. Não houve confusão destes números com as medidas de ângulos construídos com vértices nestes pontos em nenhuma atividade proposta.

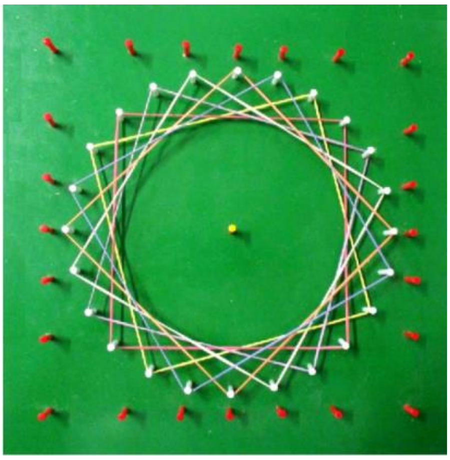
Ao mencionar Geoplano nessa dissertação, estamos nos referindo ao Geoplano Circular descrito aqui. Algumas vezes, vamos nos referir somente a folha impressa mencionada no Geoplano Circular, chamando-a de Geoplano de papel.

É importante salientar que a utilização do tabuleiro do Geoplano não se limita a trabalhar sobre uma única circunferência, podendo variar o raio e as divisões, quando o objetivo for concluir que os resultados encontrados não dependem da circunferência.

Figura 48 – Kit entregue aos alunos.

Fonte: confeccionado pela autora/professora.

Figura 49 – Geoplano Circular.

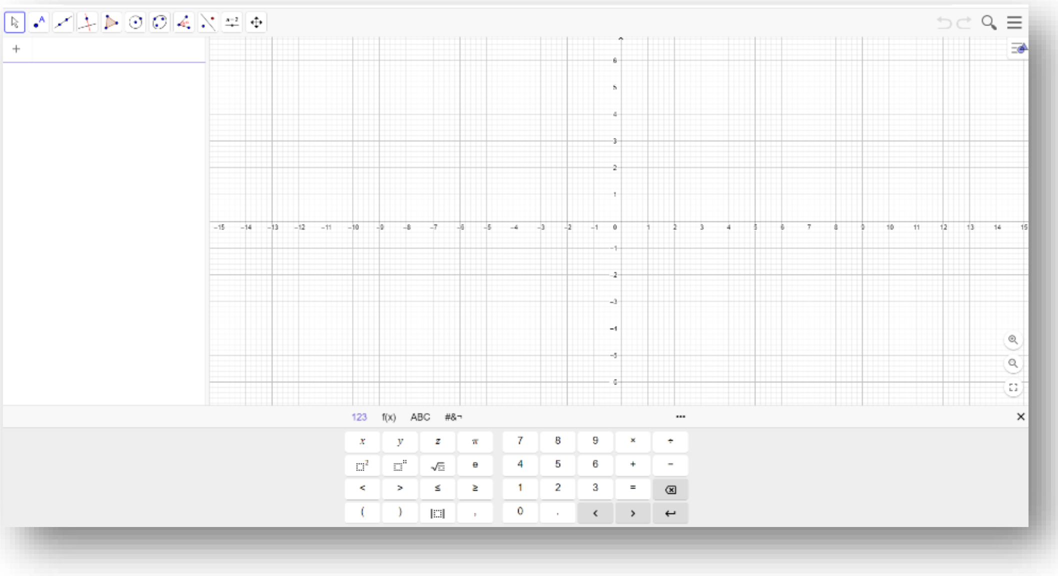


Fonte: figura retirada do site https://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/09/11APRESENTA%C3%87%C3%83O.pdf.

Outra ferramenta utilizada é o GeoGebra, que é um software de matemática dinâmica gratuito, podendo ser usado de maneira online ou baixado como programa para computador ou aplicativo de celular e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo.

Não é o objetivo deste trabalho explorar esta ferramenta, mas sim somente utilizá-la para visualização de situações-problema. Detalhes de como acessar e usar esta ferramenta, estão disponíveis em https://www.geogebra.org/.

Figura 50 – GeoGebra.



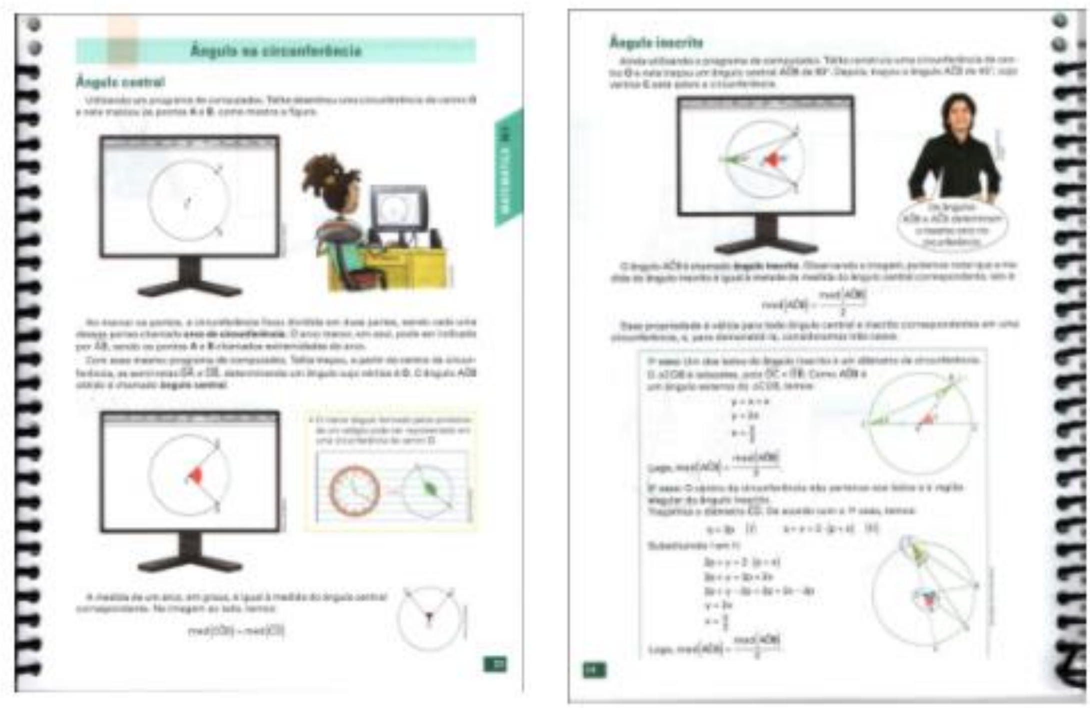
Fonte: print da tela do software GeoGebra.

3.2 Objetivo

Em seus anos de experiência didática, a professora/autora percebeu a enorme dificuldade dos alunos, já no Ensino Médio, em visualizar e entender as propriedades de ângulos em uma circunferência, sendo necessário algo diferente da proposta tradicional para o ensino de tal conteúdo.

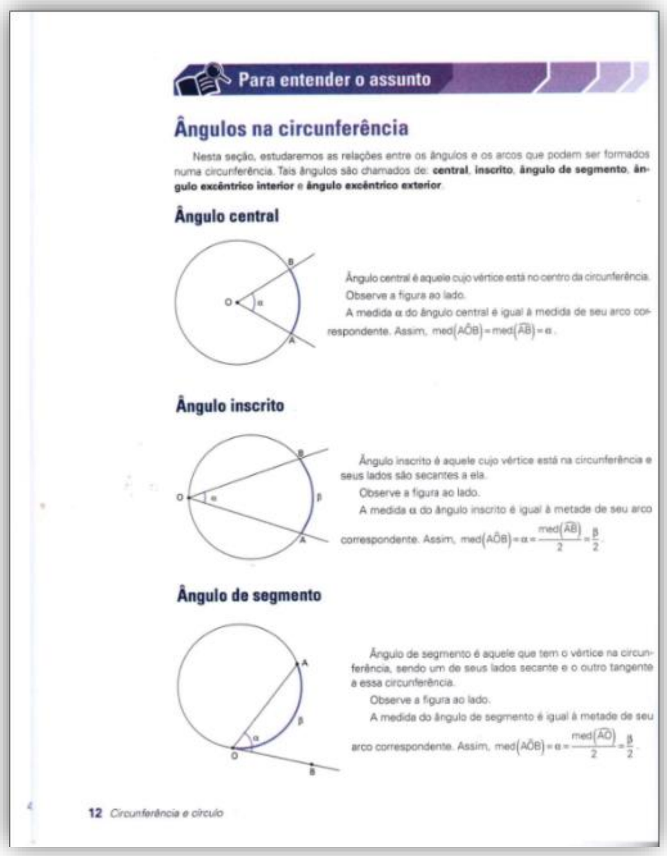
Uma das escolas na qual trabalha, da rede particular, situada na cidade de Catanduva-SP, o estudo de ângulos em uma circunferência integrava o currículo de Matemática da oitava série/nono ano do Ensino Fundamental e do primeiro ao terceiro ano do Ensino Médio. A unidade escolar faz uso do material apostilado da Coleção FTD Sistema de Ensino (2018), cujas figuras mostram a primeira abordagem deste conteúdo na oitava série/nono ano do Ensino Fundamental e depois no primeiro ano do Ensino Médio.

Figura 51 – Apostila do aluno: 8ª série/ 9º ano do Ensino Fundamental.



Fonte: material da 8ª série/ 9º ano do Ensino Fundamental da Coleção FTD Sistema de Ensino, 2018, p. 23 e 24

Figura 52– Apostila do aluno: 1º ano do Ensino Médio.



Para entender o assunto

Ângulos na circunferência

Nesta seção, estudaremos as relações entre os ângulos e os arcos que podem ser formados numa circunferência. Tais ângulos são chamados de: **central**, **inscrito**, **ângulo de segmento**, **ângulo excêntrico interior** e **ângulo excêntrico exterior**.

Ângulo central

Ângulo central é aquele cujo vértice está no centro da circunferência.

Observe a figura ao lado.

A medida α do ângulo central é igual à medida de seu arco correspondente. Assim, $med(A\hat{O}B) = med(\overset{\frown}{AB}) = \alpha$.

Ângulo inscrito

Ângulo inscrito é aquele cujo vértice está na circunferência e seus lados são secantes a ela.

Observe a figura ao lado.

A medida α do ângulo inscrito é igual à metade de seu arco correspondente. Assim, $med(A\hat{O}B) = \alpha = \frac{med(\overset{\frown}{AB})}{2} = \frac{\beta}{2}$.

Ângulo de segmento

Ângulo de segmento é aquele que tem o vértice na circunferência, sendo um de seus lados secante e o outro tangente a essa circunferência.

Observe a figura ao lado.

A medida do ângulo de segmento é igual à metade de seu arco correspondente. Assim, $med(A\hat{O}B) = \alpha = \frac{med(\overset{\frown}{AO})}{2} = \frac{\beta}{2}$.

12 *Circunferência e círculo*

Fonte: material do 1º ano do Ensino Médio da Coleção FTD Sistema de Ensino, 2018, p. 12.

Ambas as apostilas apresentam os conceitos de ângulos em uma circunferência e suas propriedades, acompanhados de uma sequência de muitos exercícios. Porém, quando os alunos vão resolver problemas com estes conceitos no último ano do Ensino Médio apresentam muita dificuldade.

Assim, foi elaborada uma sequência de atividades, com a finalidade de sanar os déficits deste conteúdo, tendo como público-alvo alunos da terceira série do Ensino Médio, que a professora/autora está lecionando neste ano de 2020.

As atividades começaram com a verificação do conhecimento do assunto mencionado, onde estes alunos foram submetidos a uma avaliação online, chamada de Atividade de Avaliação Inicial, através de um link postado na plataforma de estudo da escola (GOOGLE CLASSROOM). A atividade foi baseada nos conteúdos de ângulos em uma circunferência estudados nos anos anteriores. Como esperado, a professora/autora verificou um baixo índice de acertos. A atividade aplicada pode ser observada no Apêndice A.

Dos 46 alunos que realizaram a prova, 43% não obtiveram nota satisfatória, ou seja, acima de 50% de acertos, como pode-se observar no gráfico abaixo:

Gráfico 1 – Quantidade de acertos na atividade de Avaliação Inicial.

Fonte: elaborado pela professora/autora.

Logo após a aplicação desta atividade, a professora/autora permitiu comentários dos alunos com respeito as maiores dúvidas e dificuldades encontradas, que pelos relatos, mostraram não reconhecer as propriedades estudadas anteriormente sobre o conteúdo de ângulos em uma circunferência.

O próximo passo foi apresentar atividades com uma nova abordagem didática para a compreensão e a concretização do aprendizado, ressaltando que neste momento os exercícios ao qual estes alunos são submetidos, em relação ao conteúdo de ângulos em uma circunferência, teve a finalidade de construir a geometria, durante a sequência das atividades, de forma lúdica manuseando o tabuleiro do Geoplano e observando regularidades em cada situação de aprendizagem. Finalizando o trabalho, novamente os alunos foram submetidos a uma nova avaliação como o objetivo de comprovar a efetiva aprendizagem.

3.3 Descrição das atividades

A sequência de atividades foi realizada em 12 aulas, com duração de 50 minutos cada aula. As aulas foram ministradas no período de julho a setembro do ano de 2020, no turno vespertino de forma online GOOGLE MEET, mediante a pandemia COVID-19, com a utilização da plataforma GOOGLE CLASSROOM. Um kit de materiais foi montado e entregue aos alunos que se dispuseram a buscar na escola. Devido ao momento pandêmico somente 16 dos 46 alunos da turma tiveram acesso a este kit, os demais utilizaram somente o Geoplano de papel (Apêndice B), postado na plataforma do colégio para impressão. Os alunos que possuíam o kit faziam as atividades com a câmera aberta para que os demais pudessem observar as construções.

Kit de materiais:

- Tabuleiro do Geoplano (confeccionado de madeira e EVA);
- Pinos metálicos;
- Elásticos coloridos e barbantes;
- Geoplano de papel, Apêndice B (impresso), totalizando 6 folhas por kit (uma de apoio no tabuleiro e as outras para a execução das atividades);
- Roteiro de atividades, Apêndice D (impresso);
- Folha Suplementar da Atividade X, Apêndice C (impresso).
- Transferidor.

Além disso, era necessário usar: régua, compasso e lápis.

Vamos descrever, por aulas (sempre foram aulas duplas, num total de 100 min), as atividades desenvolvidas, descrevendo-as e mostrando como proceder, além da experiência e observações obtidas da sua aplicação.

Aulas 01 e 02.

As duas primeiras aulas foram para aplicação da Atividade de Avaliação Inicial (Apêndice A), de forma online, que foi elaborada pelo aplicativo Blank Quiz – Formulários Google, onde um link foi postado na plataforma de estudos do próprio colégio.

Durante a aplicação muitos alunos relataram que não estavam conseguindo resolver os exercícios, outros que nunca haviam visto o conteúdo pedido, porém foi solicitado que eles resolvessem sem a intervenção da professora e que posteriormente as dúvidas seriam sanadas. Foi ainda esclarecido que tal atividade não tinha valor avaliativo, mas que era parte do processo de aprendizagem utilizado pela professora/autora como ferramenta para medir o conhecimento sobre tal assunto.

Ao final da aplicação de todas as atividades propostas nessa dissertação, foi enviado aos alunos, de forma online, o gabarito dessas atividades, visto que algumas delas foram retomadas na Avaliação Final e os alunos, em grande parte a realizaram com êxito

Aulas 03 e 04.

Nestas aulas iniciou-se a estratégia de ensino prático do conteúdo proposto mencionado. O objetivo destas aulas foram trabalhar de maneira construtiva os conceitos de ângulos inscritos e centrais em uma circunferência, bem como a relação entre eles.

Primeiramente apresentou-se aos alunos os materiais contidos nos kits: o tabuleiro do Geoplano com seus elementos, o Geoplano de papel e o roteiro de atividades. Foi explicado aos alunos que todas as construções feitas no tabuleiro do Geoplano deveriam ser transferidas para o Geoplano de papel, com a finalidade de utilizar os materiais de desenho geométrico com maior facilidade e que os alunos que não possuíam o tabuleiro, fizessem as atividades no Geoplano de papel.

Nesta etapa, os alunos ainda estavam se familiarizando com o tabuleiro do Geoplano, mexendo nos fios, enlaçando os pinos. Em seguida a professora/autora, leu em voz alta a primeira atividade, item a item, à medida que cada aluno construísse a proposta no tabuleiro do Geoplano.

Atividade I

a) Com o auxílio do tabuleiro geoplano, barbante e/ou elásticos, construa um diâmetro $\overline{AB}$ da circunferência.

b) Com o auxílio do tabuleiro geoplano, barbante e/ou elásticos, construa um ângulo $A\hat{C}B$, onde C é qualquer ponto sobre a circunferência.

c) Transcreva o que você construiu nos itens a) e b) para o Geoplano de papel.

d) Sendo O o centro da circunferência, com o auxílio do transferidor, encontre o valor dos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{C}B$.

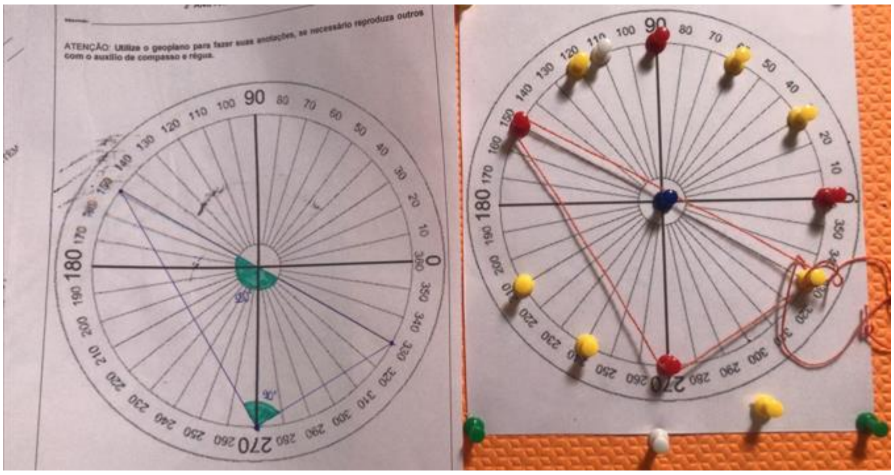
e) Qual a razão entre as medidas dos ângulos encontrados no item anterior?

f) Na sua opinião, existe alguma nomenclatura matemática específica para esses ângulos? Se sim, qual seria?

Após receberem o comando para dar início à atividade, pôde-se observar que a construção do item a) foi tranquila, bastava escolher dois pinos na circunferência tal que quando os ligavam com o barbante e/ou elástico, passava pelo centro O da circunferência, ou seja, dominavam o conceito de diâmetro. No item b), foi discutido o conceito de ângulo, onde primeiramente foi observado que C deveria ser distinto de A e B além do que na representação no Geoplano o ângulo seria a união dos segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ mas que a definição é a união das semirretas $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. A execução do item d) foi fácil, visto que os alunos tinham domínio do uso do transferidor. No item e), pôde-se observar que a palavra *razão* algumas vezes é mal interpretada, assim a professora/autora pediu para verificarem uma regularidade em cada caso, já que cada aluno fez a construção diferente um do outro, aí sim conseguiram encontrar a razão pedida. No item f) apenas dois alunos lembraram da nomenclatura correta, ângulos central e inscrito, respectivamente.

Algo importante que os alunos perceberam nesta atividade é que as medidas dos ângulos de todos os alunos foram 180 para o ângulo $A\hat{O}B$ e aproximadamente 90° para o ângulo $A\hat{C}B$, e que cada um escolheu os seus pontos, percebendo assim também uma regularidade das medidas destes objetos.

Figura 53 – Atividade I de um dos alunos.



Fonte: foto tirada por um dos alunos da execução da Atividade I.

Agora a próxima atividade tem também o objetivo de construir ângulos inscrito e central, considerando uma corda $\overline{AB}$ que não seja diâmetro e buscar as regularidades observadas na Atividade I. Novamente a professora/autora leu em voz alta cada item, pausando para as devidas construções.

Atividade II

a) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano, barbante e/ou elásticos, construa um ângulo na circunferência, nomeando de $A\hat{C}B$, onde o segmento $\overline{AB}$ não é diâmetro e C é qualquer ponto da circunferência.

b) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano, barbante e/ou elásticos, construa o ângulo $A\hat{O}B$, onde O é o centro da circunferência.

c) Transcreva suas construções para o Geoplano de papel nomeando como a descrição acima.

d) Com o auxílio do transferidor, encontre as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{C}B$.

e) Qual a razão entre as medidas dos ângulos encontrados no item anterior?

f) Refaça sua atividade (mais duas vezes) agora mudando de posição o ponto C.

g) Refaça sua atividade (mais duas vezes) agora mudando de posição dos pontos A e B

h) Qual a relação entre as medidas dos ângulos que você construiu?

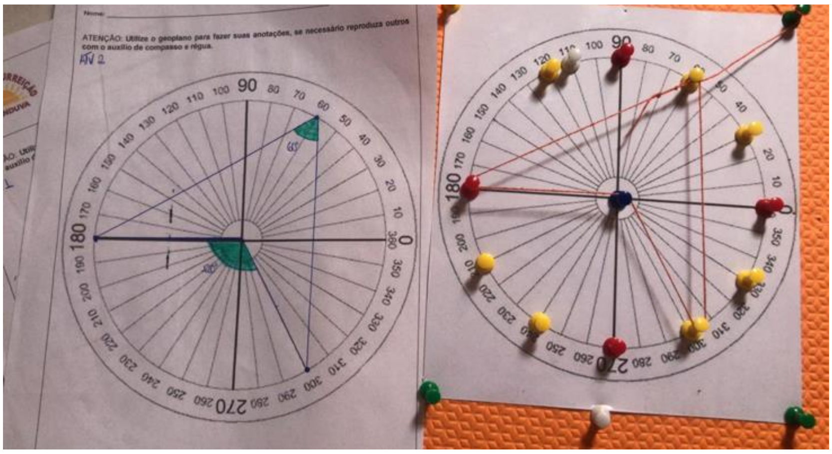
i) Qual a regularidade que você pode observar entre as Atividades I e II?

Nesta atividade, as construções seguiram mais facilmente por serem análogas as da Atividade I. Os alunos perceberam que se tratava de ângulos inscritos e centrais também. Porém os resultados das medidas obtidas no item d) não foram iguais para todos os alunos, como tinha ocorrido na Atividade I. Assim, perceberam que estes dependiam da escolha dos pontos envolvidos. Agora no item seguinte, viram que a razão era a mesma, independente dos valores serem distintos.

Os itens f), g) e h), foram para fazer a análise das medidas onde o aluno olhando só para a sua construção e verificava que a medida do ângulo $A\hat{C}B$ independia do ponto C mas dependia de $\overline{AB}$ e sempre a razão entre os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{C}B$ era a mesma, independente dos pontos $A, B \; e \; C$, considerando as aproximações. Aqui a professora pôde observar que variando o ponto C, era obtidos ângulos $A\hat{C}B$ onde todos tinham o mesmo arco $\widehat{AB}$ associado.

Observaram que estas foram também as conclusões da Atividade I, então não importava se $\overline{AB}$ era diâmetro ou não, quanto à regularidade da razão destes ângulos.

Figura 54 – Atividade II de um dos alunos.



Fonte: foto tirada por um dos alunos da execução da Atividade II.

Nota-se que a dificuldade do manuseio dos materiais, leva o aluno a duvidar do resultado obtido, e para isso houve intervenção da professora/autora, onde foi explicado que o manuseio do material deveria ser feito de forma correta e precisa para que os resultados encontrados fossem satisfatórios para a conclusão da atividade.

Seguindo o roteiro, após consolidar as primeiras propriedades, os alunos deram continuidade com a terceira atividade.

Atividade III

Como base nas Atividades I e II propostas responda:

a) O que são ângulos centrais de uma circunferência?

b) O que são ângulos inscritos em uma circunferência?

c) Qual a relação entre ângulos inscritos e ângulos centrais, inscritos no mesmo arco?

Baseados nas atividades anteriores, facilmente os alunos realizaram essa, alguns alunos se manifestaram e disseram não terem mais dúvidas após a realização das atividades de construção dos ângulos inscrito e central.

Após a execução das três primeiras atividades, foi compartilhado com eles quatro slides no powerpoint (Apêndice E), através do compartilhamento de tela. Os slides apresentados abordaram as definições formais do conteúdo que haviam acabado de reproduzir, conjecturando as propriedades ao qual eles mesmos construíram, incluindo as definições básica sobre ângulos e arcos necessárias para toda execução do Roteiro de Atividades, dessa forma puderam posteriormente fazerem uso de tais propriedades para a resolução das próximas atividades.

Após a exibição dos slides, os alunos relataram lembrar de tal conteúdo ter sido ministrado, porém não lembravam das nomenclaturas e propriedades. Os slides ficaram disponíveis para utilização deles na plataforma (IONICA/FTD) da própria escola.

A aula se encerrou com a intervenção da professora, sugerindo que eles poderiam pesquisar mais sobre o conteúdo abordado nesse momento, e que registrassem quaisquer dúvidas que encontrassem posteriormente para esclarecimentos.

Aulas 05 e 06.

Estas aulas tiveram como objetivo trabalhar o conceito de polígonos inscritíveis através dos ângulos inscritos associados, um problema que envolvia ângulos central e inscrito na resolução e o conceito de ângulos de segmentos em uma circunferência.

Antes de iniciar a atividade IV, a professora/autora perguntou se alguém lembrava quando um polígono era inscritível. Um dos alunos disse que é quando o polígono está dentro de algo e, como estamos trabalhando com circunferência, devia ser dentro de uma delas. A professora/autora disse que o aluno estava na direção correta da resposta, que um polígono é dito inscritível se existir uma circunferência que contém todos os seus vértices. E deixou a seguinte pergunta “no ar”: todo polígono é inscritível? dizendo que a Atividade IV ajudaria na resposta.

Da mesma maneira que se realizou as atividades nas aulas anteriores, seguiu-se essa, a professora/autora fez a leitura de cada item, respeitando o tempo de execução e as intervenções dos alunos.

Atividade IV

a) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano, barbante e/ou elásticos, construa um triângulo ABC onde $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência e C é um ponto qualquer sobre a circunferência.

b) Refaça o item anterior (mais duas vezes) agora mudando de posição o ponto C.

c) Transfira suas construções para o Geoplano de papel.

d) Você observou algo em comum entre os triângulos obtidos nos itens anteriores?

e) Através de propriedades abordadas nas aulas 3 e 4, é possível mostrar que a soma das medidas dos ângulos internos do triangulo ABC é 180° ? Foi importante para isso que $\overline{AB}$ fosse diâmetro?

f) Construa um quadrilátero $ABCD$ com A, B, C e D na circunferência do tabuleiro do Geoplano.

g) Transfira o quadrilátero para o Geoplano de papel, e com o auxílio do transferidor encontre a medida de seus ângulos internos.

h) Qual o valor da soma das medidas dos ângulos opostos do quadrilátero?

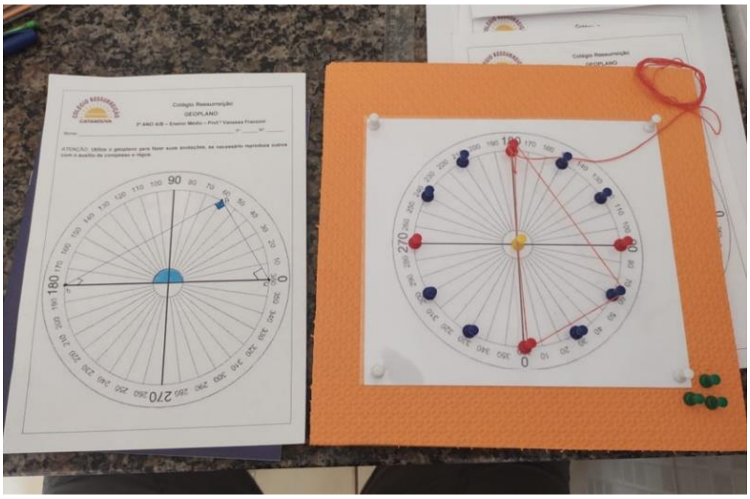
i) Repita do procedimento dos itens f), g) e h) mudando a posição dos pontos A, B, C e D na circunferência, ou seja, para um outro quadrilátero.

j) Houve alguma regularidade entre os dois quadriláteros?

k) Remova o ponto D da sua última construção no tabuleiro do Geoplano, ficando somente os pontos A, B e C. É possível obter um ponto D na circunferência formando um quadrilátero $ABCD$ com $mA\hat{D}C = 180 - mA\hat{B}C$?

Não houve dificuldade em executar os itens a), b), c) e d) pois já estavam familiarizados com os Geoplanos e demais instrumentos. Devido a Atividade I, muitos alunos perceberam que os triângulos eram retângulos com hipotenusa o diâmetro $\overline{AB}$.

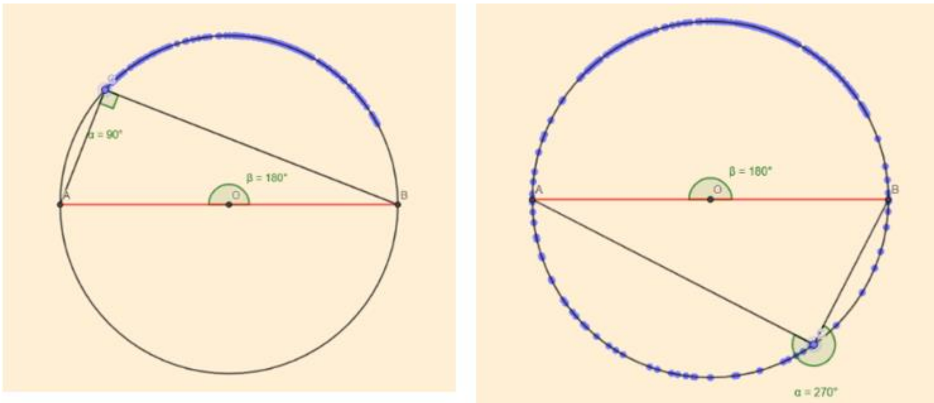
Figura 55 – Atividade IV - item a) de um dos alunos.



Fonte: foto tirada por um dos alunos da execução da Atividade IV - item a).

Antes do próximo item, também foi utilizado o link abaixo para observar o deslocamento do ponto C em torno da circunferência (use o cursor para fazer o deslocamento): https://www.geogebra.org/classic/bteruncj.

Figura 56 – Representação no GeoGebra do deslocamento do ponto C.

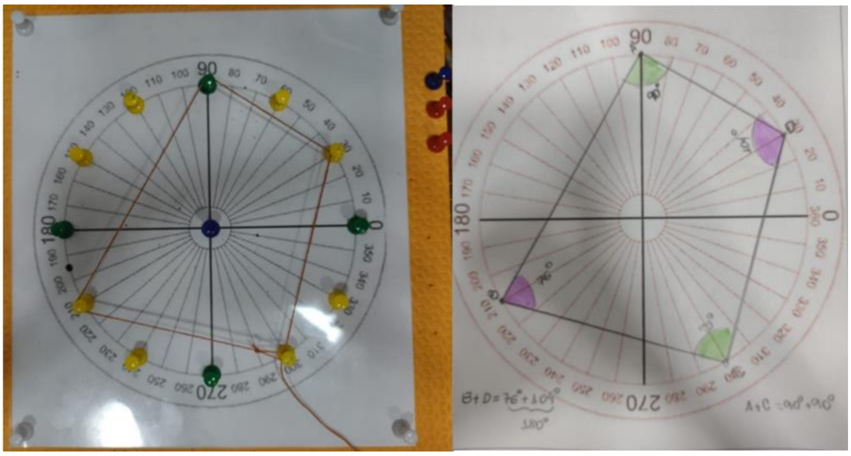


Fonte: prints do GeoGebra via o link https://www.geogebra.org/classic/bteruncj.

Quanto ao item e) tiveram um pouco de dificuldade de enxergar, então a professora/autora interveio perguntando se os ângulos do triângulo eram ângulos especiais da circunferência. Logo, os alunos disseram que eles eram ângulos inscritos na circunferência e a professora/autora lembrou que a medida de cada um destes ângulos está associada a medida do arco correspondente, sendo este a medida do ângulo central (vale metade). Como a união dos arcos relacionados a cada ângulo dava toda a circunferência cuja medida é 360, puderam concluir que a soma desejada era 180, e não foi usado o fato de $\overline{AB}$ ser diâmetro.

Seguindo o roteiro, no item f) para a obtenção do quadrilátero $ABCD$, os alunos perceberam que não poderiam escolher simplesmente quatro pontos na circunferência e nomeá-los com $A, B, C \; e \; D$ como quisessem, e sim seguir a ordem dos vértices para poder definir o quadrilátero desejado, para que na construção dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ eles não se cruzassem. Não foi problema encontrar as medidas dos ângulos desses quadriláteros, percebendo que a soma pedida (ângulos opostos) era sempre igual a 180, e que sendo assim eles eram suplementares. Depois que fizeram outro quadrilátero e observaram também os colegas, notaram que essa soma era 180 sempre.

Figura 57 – Atividade IV - item f) de um dos alunos.



Fonte: foto tirada por um dos alunos da execução da Atividade IV - item f).

Para a resolução do último item, primeiro foi importante perceber que como A, B, C estavam fixos, para formar um quadrilátero com um ponto D na circunferência, D só poderia estar no arco menor $\widehat{AC}$. Tomando um ponto D nesta situação, os alunos perceberam que caia na situação do item f) e, como no item h), chegava-se que $mA\hat{D}C = 180 - mA\hat{B}C$, não sendo possível o desejado no item k). Neste momento a professora então concluiu com os alunos que um quadrilátero é inscritível se, e somente se, os ângulos opostos forem suplementares.

A próxima atividade teve o propósito de mostrar aos alunos uma das aplicações do conteúdo que estavam estudando, mostrando a importância de saber aplicar as propriedades aprendidas na resolução de problemas do cotidiano.

Atividade V

"Embora não se saiba exatamente quando foi criado o primeiro globo de neve (SNOW GLOBES), eles começaram a ser vistos na França por volta de 1800, eram conhecidos como "cúpulas de neve" e usados como pesos de papel. Os "SNOW GLOBES" são objetos formados por uma esfera transparente, que pode ser de plástico ou de vidro. Dentro da esfera, há uma cena ou objeto em miniatura, que representa um momento ou lugar. Antigamente, os globos de neve eram fabricados para representar como ficavam as cidades ao nevar."

(http://blog.kukos.com.br/voce-conhece-a-historia-dos-snow-globes/#:~:text=Embora%20n%C3%A3o%20se%20saiba%20exatamente,usados%20como%20pesos%20de%20papel.)

Um globo de neve será confeccionado da seguinte maneira, será colocado em seu interior uma pirâmide sólida de altura FG igual a 8 cm e de base triangular, cujos vértices ficam sobre o globo bem como o topo dessa pirâmide, como mostra a figura em 3D abaixo.

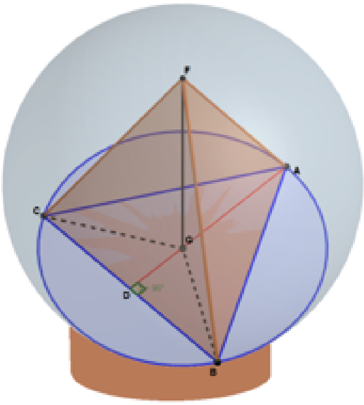
A esfera possui raio igual a 5 cm, e a secção da esfera onde se encontra a base da pirâmide possui centro G e raio igual a 4,04 cm. Sabe-se ainda que o ângulo $B\hat{A}C$ equivale a 60°, $AD = 6cm$ é a altura da base que contêm o ponto G e o volume total da esfera é de 523,6 cm^3.

Qual o volume de água que será necessário para preencher esse globo, considerando a pirâmide sólida e incluindo a parte abaixo da base dessa pirâmide? (use: $\sqrt{3} = 1{,}7$).

(Dica: veja a figura em 3D pelo link: https://www.geogebra.org/classic/gatrnbnx)

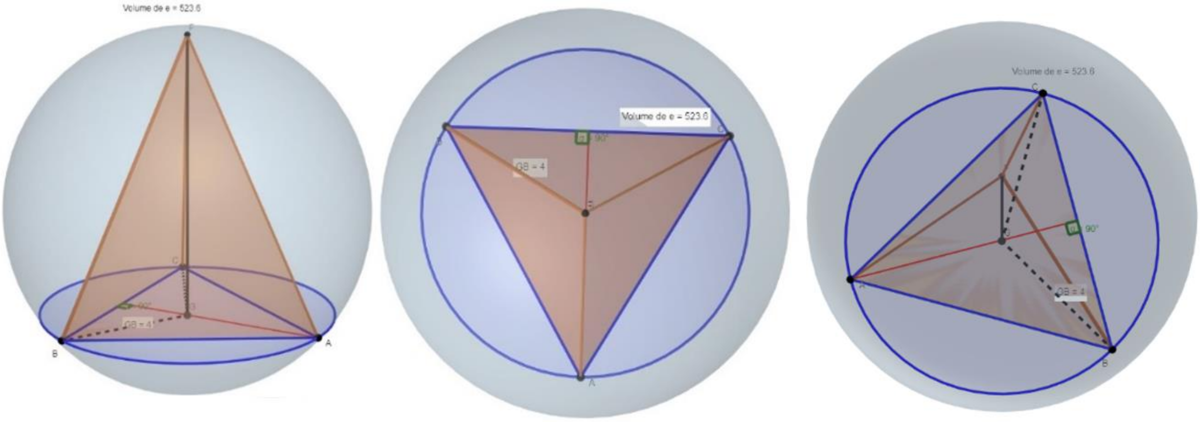
Lembrar que:

- volume de esfera é dado por: $Ve = \frac{4}{3}\pi r^3$ e o volume da pirâmide dado por $Vp = \frac{1}{3} \cdot Ab.h$.
- lei dos cossenos: $x^2 = y^2 + z^2 - 2.y.z.\cos\alpha$



Para compreensão da atividade foi feita a leitura do texto nela contido, em seguida como sugerido pela atividade os alunos acessaram o link proposto, de forma a enxergar melhor também analisar a figura espacial por outros ângulos e compreender melhor a situação-problema apresentada, visto que é uma figura em 3D.

Figura 58 – Visualização no GeoGebra da figura 3D por outros ângulos.



Fonte: prints da figura 3D no GeoGebra, link https://www.geogebra.org/classic/gatrnbnx.

Assim seguimos com a resolução da atividade, onde foi pedido para que os alunos fixassem a imagem de forma a enxergar o fundo da pirâmide inscrita em uma circunferência, e posteriormente que anotassem na própria folha de atividade (que foi entregue de forma impressa) o valor do ângulo $B\hat{A}C = 60°$ dado no exercício e que fizessem uma comparação em relação ao ângulo $B\hat{G}C$. Instantaneamente alguns alunos relataram:

- $B\hat{A}C$ é inscrito
- Se ângulo $B\hat{A}C$ mede $60°$, então $B\hat{G}C$ mede $120°$, pois $B\hat{A}C$ é inscrito e $B\hat{G}C$ é central.
- O ângulo inscrito é metade do seu central.

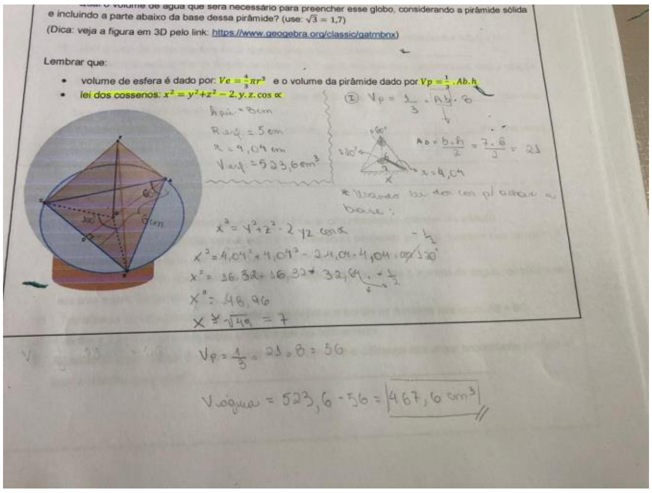
Como a finalidade dessa atividade era da aplicação de ângulos na circunferência, então as fórmulas de volume de pirâmides e de esferas bem como a Lei dos Cossenos foram dadas na atividade.

Os alunos foram questionados sobre o que deveriam fazer para dar continuidade no exercício e algumas sugestões foram relatadas:

- Encontrar o volume da pirâmide.
- Subtrair o volume da pirâmide do volume da esfera.
- Encontrar a área do triângulo ABC e depois descobrir o volume da pirâmide.

Após algumas discussões para estabelecer uma organização na resolução, os cálculos foram feitos pelos alunos e enviados à professora/autora, como mostra a figura a seguir.

Figura 59 – Atividade V de um dos alunos.



Fonte: foto tirada por um dos alunos da sua resolução da Atividade V.

Foi feito a correção no quadro branco e transmitido aos alunos, também foi postada uma foto dessa resolução na plataforma (IONICA/FTD) da própria escola. Após o término dessa atividade a professora/autora discutiu com os alunos a importância de reconhecer o conteúdo de ângulos na circunferência em problemas do cotidiano, bem como solucionar utilizando as propriedades que acabaram de estudar. Dando continuidade na aula, os alunos deram início à sexta atividade.

Atividade VI

a) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano, barbantes e/ou elásticos, construa um segmento $\overline{AC}$ onde A e C são pontos quaisquer da circunferência e construa os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OC}$.

b) Construa uma reta tangente à circunferência do Geoplano, onde o ponto de tangência seja C.

c) Transfira as construções para o Geoplano de papel.

d) o raio $\overline{OC}$ e a reta tangente a esse raio formaram um ângulo de medida _________________________.

e) Considerando o ângulo central $A\hat{O}C$ e o ângulo formado pela reta tangente ao raio $\overline{OC}$ e o segmento $\overline{AC}$, qual a relação entre suas medidas?____.

f) O ângulo formado pela reta tangente ao raio $\overline{OC}$ e o segmento $\overline{AC}$ é chamado de ___________________.

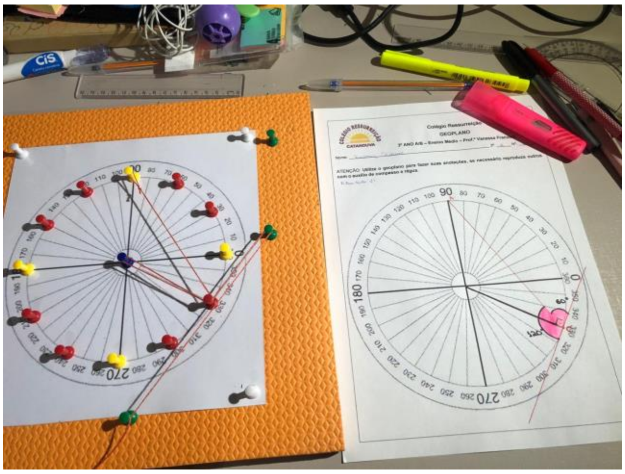
g) Podemos concluir que a medida do ângulo ____________________ é a metade do ângulo __________ _____________.

A principal dificuldade na execução dessa atividade foi a obtenção da reta tangente ao raio $\overline{OC}$ da circunferência. Não foi indicado no roteiro a maneira de obtê-la. Uma das maneiras era, usando um barbante esticado passando por C, buscar a posição dela de tal forma que o único ponto em comum com a circunferência era o ponto C, logo o barbante nesta posição seria a reta tangente desejada.

Uma outra maneira que surgiu, foi usar uma propriedade de reta tangente a circunferência que diz que essa reta deve ser perpendicular ao raio definido pelo ponto de tangência na circunferência. Com isso, pode-se usar um transferidor ou um compasso para obter a reta perpendicular à $\overleftrightarrow{OC}$ no ponto C. Contudo a utilização destes instrumentos para este fim foi algo muito dificultoso para os alunos. Se o aluno seguiu pela primeira maneira, não havendo muita precisão na construção, a medida do ângulo pedida no item d), medida com um transferidor, pode ter ficado diferente de 90°. Já quem utilizou a segunda maneira, já seguiu diretamente da propriedade utilizada e caso tenha sido feita a medida para conferência, esta deve ser sido mais precisa, ou seja, bem próxima de 90°.

Outra dúvida que surgiu foi com relação ao ângulo formado entre a reta e o segmento mencionado no item e). Foi lembrado que sempre é o ângulo de menor medida definido pelas semirretas associadas a estes objetos. Observando que os alunos não sabiam ou não se lembraram do nome dado para este ângulo, cuja resposta esperada é Ângulo de Segmento.

Figura 60 – Atividade VI de um dos alunos.



Fonte: foto tirada por um dos alunos da execução da Atividade VI.

Foi feito a intervenção pela professora e apresentado três slides, que se encontram no Apêndice F, onde os conceitos matemáticos abordados foram definidos formalmente, o nome Ângulo de Segmento foi mais uma vez reforçado, bem como a condição de inscrição de um quadrilátero em uma circunferência.

Aulas 07 e 08.

O objetivo aqui foi a construção de ângulos excêntricos interiores e exteriores, identificação de arcos da circunferência e suas medidas, bem como a verificação desses conteúdos no cotidiano.

Atividade VII

a) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano e barbantes/elásticos, construa um segmento $\overline{AC}$ e outro $\overline{BD}$, onde A, B, C *e* D são pontos da circunferência de centro O de modo que cruzem num ponto $P, (P \neq O)$.

b) Transfira o procedimento acima para o Geoplano de papel.

c) Utilizando o transferidor, encontre a medida do ângulo de vértice P definido pelas retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ e destaque com canetas marca texto os seus arcos correspondentes na circunferência.

d) Volte ao tabuleiro do Geoplano e construa o ângulo central correspondente de cada arco que foi destacado no item anterior.

e) Transfira a continuação do seu procedimento para o Geoplano de papel.

f) Utilizando o transferidor, encontre a medida de cada arco destacado, com a dica que elas estão associadas aos seus ângulos centrais correspondentes.

g) Qual o valor da soma das medidas destes arcos destacados? ________________________________.

h) Considerando o ângulo mencionado no item c) e a soma das medidas dos dois arcos destacados, verifica-se alguma relação? ____.

i) Os ângulos de menor medida formados pelos cruzamentos de $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$ com vértice em P são chamados de ____ cuja medida é igual a __________________ dos seus arcos correspondentes.

A primeira dificuldade encontrada na atividade VII foi identificar o ângulo pedido no item c), com seus arcos correspondentes. Com vértice P, os alunos mencionaram que foram obtidos 4 ângulos com os pontos A, B, C *e* D e não sabiam qual deles seria. A professora/autora lembrou novamente (já havia mencionado isso na Atividade VI) que o ângulo entre duas retas é o de menor medida dentre estes quatro, e que sempre haverá dois pois ângulos opostos pelo vértice são sempre congruentes. Assim, bastava usar o transferidor para achar o ângulo desejado e anotar a sua medida como foi pedido. Os arcos correspondentes são os pontos da circunferência que estão no interior destes ângulos opostos pelo vértice, podendo o professor lembrar o conceito de interior de um ângulo neste momento. Observando que é necessário considerar um deles (dos dois que tem a menor medida) mas para a obtenção dos arcos são considerados sempre os dois. Assim, os arcos não dependem do ângulo escolhido. A atividade foi momentaneamente pausada e foi feito de modo ilustrativo no quadro branco a mesma representação dessa atividade, de forma a ajudar na identificação dos elementos.

Dando continuidade na execução da atividade, o próximo ponto importante para a identificação da teoria era de lembrar que a medida do arco era obtida pela medida do seu arco central correspondente, que foi deixado como dica esta associação, mas não totalmente explícita, o que foi importante para que eles pensassem a respeito. Abriu-se uma discussão sobre o ângulo obtido do item c), e foi percebido que os ângulos de menor medida dependiam da escolha dos pontos na circunferência, ou seja, de alguns estes ângulos foram $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ e para outros foram $A\hat{P}D$ e $B\hat{P}C$. Mesmo os alunos em que os ângulos foram definidos pelos mesmos pontos, estes não tinham a mesma medida, nem seus arcos tinham a mesma medida. Porém notaram que independentemente da situação, como pedido no item h), a medida do ângulo entre as retas e a soma das medidas de seus arcos correspondentes (considerando aproximações, devido a precisão das medições) eram iguais para todos os alunos, o que levou eles a reconhecerem que esta configuração gerava ângulos especiais pois sempre tinham esta propriedade. Vale ressaltar que nos no item i) não houve nenhuma resposta satisfatória, os alunos relataram nunca terem visto tal conteúdo e sequer lembrar de algum nome que remetesse a essa situação, a resposta esperada era ângulo excêntrico interior.

Figura 61 – Atividade VII de um dos alunos.

Fonte: foto tirada por um dos alunos da execução da Atividade VII.

Seguiu-se então para a oitava atividade do roteiro.

Atividade VIII

a) No tabuleiro do Geoplano construa qualquer reta tangente á circunferência (sendo C o ponto de tangência), sobre essa reta marque um ponto P diferente do ponto de tangencia.

b) No tabuleiro do Geoplano construa qualquer reta secante á circunferência passando por P, marcando as intersecções da reta secante com a circunferência como sendo os pontos A e B.

c) Transfira as construções para o Geoplano de papel e destaque com caneta marca texto os arcos que estão no interior do ângulo definido pela reta tangente e a reta secante construída anteriormente cujos lados contém os pontos citados acima.

d) Volte ao Tabuleiro do Geoplano e construa o ângulo central correspondente a cada arco que foi destacado no item anterior.

e) Transfira suas novas construções para o Geoplano de papel.

f) Utilizando o transferidor, encontre a medida de cada arco destacado, com a dica que elas estão associadas aos seus ângulos centrais correspondentes.

g) Utilizando o transferidor, encontre a medida do ângulo definido pela reta tangente e a reta secante mencionado no item c).

h) Calcule a diferença entre as medidas dos arcos do item f) (pegando o de maior medida menos o de menor medida).

i) Analisando a medida do ângulo encontrado no item g) e a diferença dos arcos encontrados no item h), qual a relação entre elas? ____.

j) Qual o nome dado ao ângulo construído nesta atividade?

Como na Atividade VI, eles procederam na construção da reta tangente. Não houve dificuldades na construção da reta secante pois foi automático a todos, até pelo enunciado da atividade, que bastava traçar a reta por P interseccionando a circunferência em dois pontos. Novamente foi discutido que o ângulo definido por duas retas é o de menor medida, onde temos sempre duas possibilidades. Diferente da atividade anterior, nesta o aluno não poderia escolher o que desejava e sim o ângulo $A\hat{P}C$, notando que $A\hat{P}C = B\hat{P}C$, independente da posição do A e B.

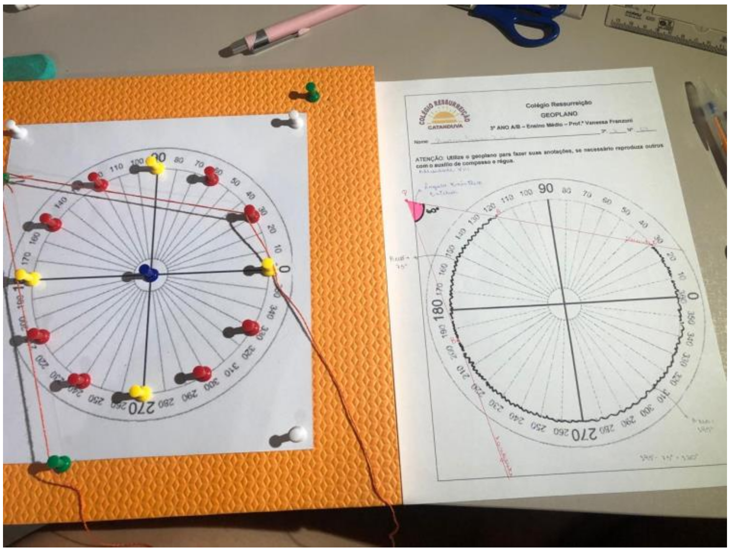
Destacaram os arcos sem dificuldades, pois já tinham estudado interior de ângulo na outra atividade. Como na atividade anterior observaram que cada aluno tomou retas distintas, obtendo ângulos distintos, arcos distintos, com medidas distintas, mas apesar disso tinham a mesma resposta para o item i), que a medida do ângulo encontrada no item g) era igual a diferença das medidas dos arcos encontradas no item h), o que levou os alunos a reconhecerem que esta configuração gerava ângulos especiais pois sempre tinham esta propriedade.

Novamente não lembravam o nome deste tipo de ângulo, porém tinham a intuição de serem ângulos excêntricos pois a ideia era análoga a da atividade anterior, notando que o vértice estava agora no exterior da circunferência e antes estava no interior. A professora/autora destacou que a mesma atividade poderia ser feita trocando a reta tangente por outra secante, ou a reta secante por outra reta tangente.

Para finalizar foi apresentada uma sequência de três slides, que se encontra no Apêndice G, para que os alunos pudessem compreender as propriedades matemáticas encontradas de uma maneira mais formalizada.

Ao final desta aula foram disponibilizados na plataforma (IONICA/FTD) todos os slides aplicados no roteiro de atividades realizado pelos alunos.

Figura 62 – Atividade VIII de um dos alunos.

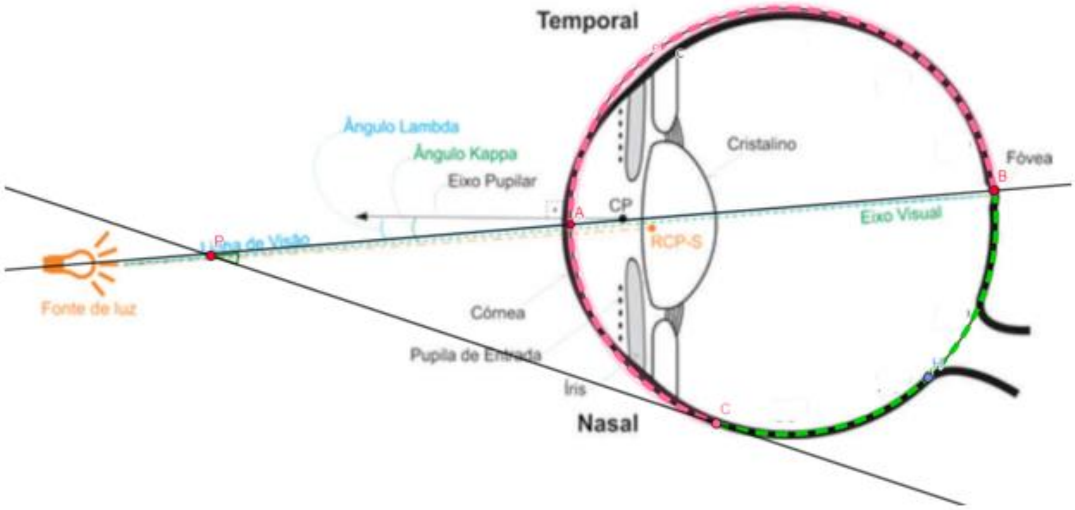


Fonte: foto tirada por um dos alunos da execução da Atividade VIII.

A próxima atividade do roteiro é uma aplicação de ângulos excêntricos no cotidiano, mostrando a importância da Matemática no âmbito da Medicina, levando o aluno a conscientização da necessidade da resolução de problemas utilizando recursos matemáticos para isso.

Atividade IX

A córnea é a estrutura mais anterior do globo ocular e por ser transparente desempenha duas funções principais: proteger as demais estruturas intraoculares e deixar passar as imagens até o seu destino, a retina. Desta forma, para entender melhor a função da córnea, comparamos a mesma com um vidro de relógio: tem que ser resistente para proteger as outras estruturas do relógio e, também, ser transparente para que possamos ver as horas. Se por alguma razão a córnea perder sua transparência, tornando-se opaca, o paciente não terá uma visão nítida, inclusive, podendo chegar à cegueira. Em estudos feitos sobre o pós operatório de transplante de córneas, observou-se as aplicações de ângulos excêntricos, como podemos observar na figura abaixo. O arco $\widehat{BC}$ corresponde a 120º e o arco $\widehat{AC}$ corresponde a 70°.



Descrição do ângulo lâmbda, ângulo kappa, eixo visual, linha de visão, eixo pupilar, centro pupilar (CP) e reflexo corneano de Purkinge- Sanso (RCP-S).

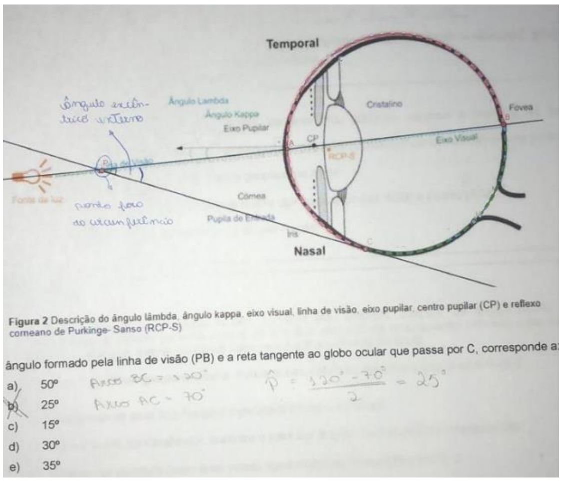
O ângulo formado pela linha de visão ($\overline{PB}$) e a reta tangente ao globo ocular que passa por C, corresponde a:

a) 50°
b) 25°
c) 15°
d) 30°
e) 35°

Primeiramente foi realizado a leitura do texto, solicitando que os alunos anotassem todos os dados matemático encontrados. Posteriormente os alunos tiveram um intervalo de tempo para tentar resolver esse exercício, baseando-se nas propriedades aprendidas até então.

Algumas anotações foram relatadas por eles, como por exemplo a representação de um ângulo excêntrico exterior, retas secante e tangente. Uma resolução é apresentada a seguir:

Figura 63 – Atividade IX de um dos alunos.



Fonte: foto tirada por um dos alunos da sua resolução da Atividade IX.

Os alunos resolveram rapidamente a atividade proposta, fizeram interações, vários quiseram falar seus resultados e mencionaram que acharam o exercício fácil, porém não teriam conseguido chegar a um resultado satisfatório antes da aplicação do roteiro de atividades. Ainda alguns alunos mencionaram o fato de estarem em busca de uma faculdade de Medicina e que não imaginavam o uso de algo tão específico da Matemática nesta área, o que exalta a Matemática e coloca como fundamental no estudo de qualquer área.

Aulas 09 e 10.

O objetivo é trabalhar o conceito de arco capaz, através do reconhecimento do conjunto de pontos que o representam e uma situação-problema relacionado a isso.

Atividade X

Utilizando a folha impressa FOLHA SUPLEMENTAR, responda os itens a seguir:

a) Construa o segmento que liga os dois pontos de intersecção das circunferências, chamando-os de A e B.

b) Marque pontos V_1, V_2, ... , V_6 , três em cada arco maior definido por A e B em cada uma das circunferências.

c) Para cada ponto escolhido, construa o ângulo o tendo como vértice e lados contendo A e B (os pontos $A\widehat{V_1}B$, $A\widehat{V_2}B$, ... , $A\widehat{V_6}B$) e, com o auxílio do transferidor, encontre sua medida.

d) Qual a regularidade encontrada em relação a esses ângulos obtidos no item anterior?

e) A união dos dois arcos maiores das circunferências definidos por A e B representa uma figura matemática com um nome específico, qual seria?

Nestas aulas serão utilizadas uma das folhas entregues no kit, denominada Folha Suplementar da Atividade X que se encontra no Apêndice C. Primeiramente a professora/autora pede para que os alunos peguem a folha no kit e que cuidadosamente retirem os pinos do tabuleiro do Geoplano (deixando-o sem nenhum pino) e fixem com os pinos metálicos os cantos dessa nova folha para a execução dos itens da Atividade X.

Posteriormente inicia-se a aula fazendo algumas indagações:

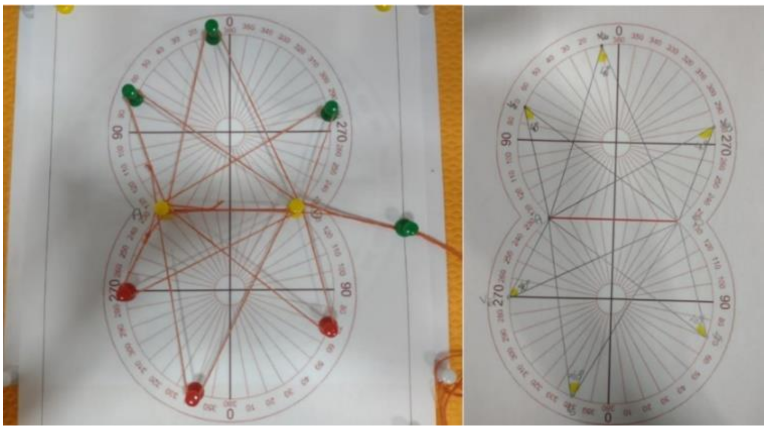
i) O que as circunferências têm em comum?

ii) Com o auxílio de régua verifique a medida dos raios.

iii) Os raios das circunferências são iguais?

Assim, percebem que são duas circunferências de mesmo raio e com dois pontos em comum. Em seguida a professora/autora seguiu a atividade como nas aulas anteriores, lendo em voz alta item por item e pausando para as devidas construções. Os alunos executaram os itens a), b) e c) sem nenhuma dificuldade. A menos de aproximações, perceberam que as medidas eram sempre as mesmas, que foi o perguntado no item d), porém ninguém sabia a nomenclatura do objeto formado.

Figura 64 –Atividade X de um dos alunos.



Fonte: Foto tirada pelo aluno da execução da Atividade X.

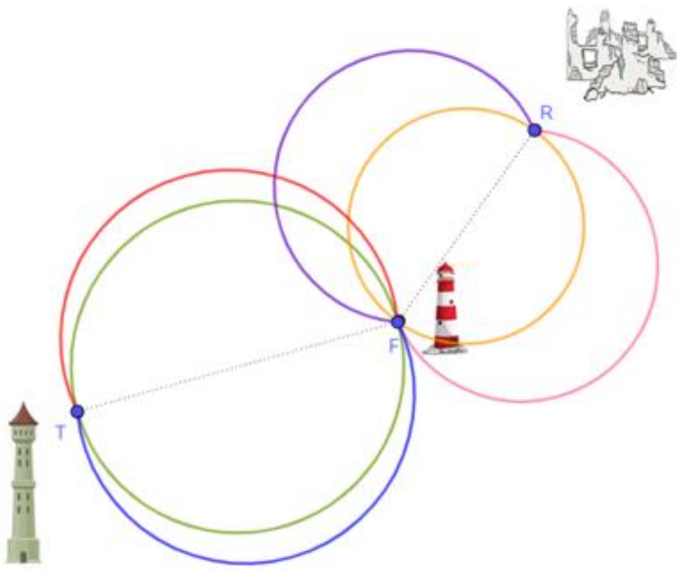
Depois disso, através do último slide do Apêndice G, a professora/autora deu a definição formal deste objeto, observando que tal conceito não faz parte do conteúdo abordado pelo material didático adotado pela escola, mas que é de suma importância para o aprendizado sobre ângulos na circunferência e que tinhas muitas aplicações, como na próxima atividade.

Atividade XI

SOCORRO!!!

ESTAMOS VENDO O FAROL **F** E AS RUÍNAS DO FORTE **R** SEGUNDO UM ÂNGULO DE 60° E AINDA PODEMOS VER O FALOR **F** E A TORRE DE PETRÓLEO **T** SEGUNDO UM ÂNGULO DE 90°.

Essa foi a mensagem que uma embarcação em dificuldades enviou a um faroleiro em vigília, que logo após perdeu o sinal de comunicação. Porém ao relatar a ocorrência o faroleiro prontamente prestou socorro e identificou o local exato da embarcação já que o marinheiro da tripulação havia passado todas as informações necessárias.



Olhou para seu mapa e marcou um “x” na localização da embarcação.

Se você fosse o faroleiro teria encontrado a embarcação perdida?

Esta atividade veio a desafiá-los em uma situação-problema, para que eles identificassem o conceito de arco capaz. O desafio proposto foi bastante interessante, pois mostrou a preocupação dos alunos em solucionar o problema, pois mesmo que sendo uma representação fictícia, poderia ser um fato real.

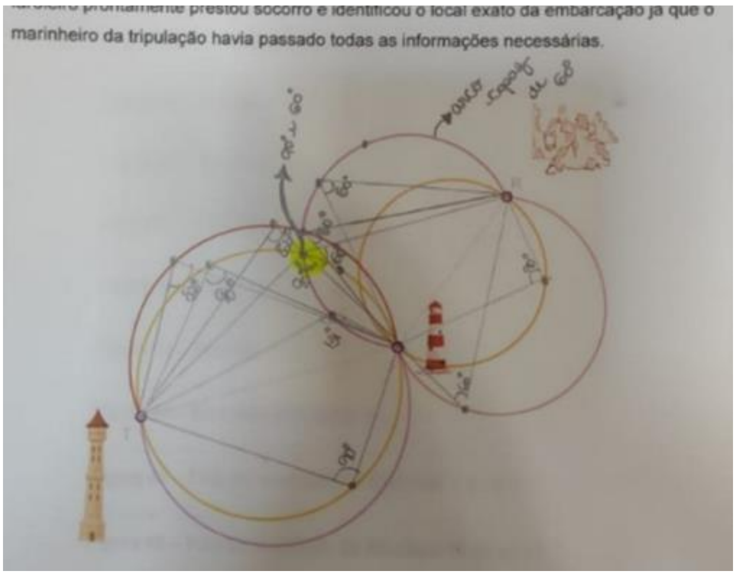
Foi dado um tempo para que eles observassem a situação, entendessem os dados fornecidos e a figura apresentada.

Os alunos sabiam que se tratava de um exercício de aplicação da atividade anterior, com isso perceberam que se tratava do conceito de arco capaz e, em discussão conjunta, identificaram que como o marinheiro via o farol F e as ruínas R sob um ângulo de 60°, ele deveria estar no arco capaz do segmento $\overline{FR}$ com ângulo 60° e, do mesmo modo, deveria estar no arco capaz do segmento $\overline{FT}$ com ângulo 90°, já que ele via o farol F e a torre T sob um ângulo de 90°.

Como já havia marcações no desenho, isso também ajudou a identificação do conceito e os alunos perceberam que para identificar os arcos capazes desejados bastaria fazer algumas medições de ângulos. Bastava apenas tomar um ponto em cada arco colorido, considerar o ângulo de vértice neste ponto com lados que continham as extremidades dos segmentos que definiam esse arco e fazer a medição usando o transferidor. Para o ângulo de 90, alguns alunos lembraram da propriedade que o arco capaz neste caso seria a circunferência que continha o segmento $\overline{FT}$ como diâmetro e não precisaram fazer medições neste caso. O ponto desejado foi a interseção dos arcos capazes identificados.

Ressaltando que não era o objetivo neste trabalho ensinar a construção do arco capaz, mas sim entender tal conceito geométrico e notá-lo como aplicação de ângulos inscritos em uma circunferência, por isso várias possibilidades de arcos foram dadas.

Figura 65 – Atividade XI de um dos alunos.



Fonte: Foto tirada pelo aluno da sua resolução da Atividade XI.

Ao final desta aula foi solicitado para que os alunos que receberam o kit, organizassem as folhas impressas das atividades realizadas juntamente com os outros itens do kit como o tabuleiro do Geoplano, pinos, barbante, elásticos e transferidor, colocando-os no envelope recebido, não esquecendo de preencher o envelope com suas respectivas identificações e que entregassem, assim que possível, no colégio em nome da professora/autora para arquivamento da atividade.

Aulas 11 e 12.

Para finalizar a aplicação das atividades propostas neste trabalho, os alunos foram submetidos a uma nova avaliação que possuía dez exercícios, chamada de Atividade de Avaliação Final, que se encontra no Apêndice H. Tal avaliação abordava as mesmas habilidades e competências propostas no Roteiro de Atividades que fizeram durante as aulas anteriores, assim como na Atividade de Avaliação Inicial.

Dessa vez os alunos mostraram-se mais apropriados do conteúdo e seguros em suas resoluções, fizeram os exercícios interagindo uns com os outros, também tiveram algumas dúvidas, porém não mais em relação ao conteúdo abordado, mas sim em interpretação de texto, esboço de desenhos e nomeação de objetos matemáticos, como ângulos, arcos e segmentos.

Essa atividade também não teve valor avaliativo, não acarretando prejuízo nas notas dos alunos, mas foi muito lembrado durante cada aula desenvolvida, que a participação durante as aulas bem como a execução das atividades e interações entre aluno e professor são de suma importância para o processo de ensino-aprendizado buscado por cada aluno, principalmente em fase preparatória para os vestibulares.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os conceitos envolvidos com ângulos em uma circunferência não são assuntos de fácil compreensão para os alunos, principalmente pela grande diversidade das posições dos ângulos na circunferência, gerando a necessidade de memorização de fórmulas para cada situação.

Tendo em vista que no terceiro ano do Ensino Médio os alunos estão se preparando para vestibulares e buscam um aperfeiçoamento de suas habilidades, é necessário saber então o quão cada aluno sabe sobre cada assunto, para que assim o professor possa garantir uma possibilidade de aperfeiçoamento sobre o domínio do conteúdo em questão, senão, retomar os conteúdos de forma que a aprendizagem seja garantida independentemente de qualquer outro fator.

Baseado em uma atividade avaliativa aplicada inicialmente para constatação do grau de aprendizagem nessa série, sobre ângulos em uma circunferência, pôde-se então constatar as diversas dificuldades bem como a falta da aprendizagem em alguns casos. Uma vez que foi aplicado para alunos do terceiro ano do Ensino Médio e observando que esse conteúdo é ministrado no primeiro ano do Ensino Médio, esperava-se que os estudantes apresentassem um maior domínio ou conhecimento sobre o tema. Logo a retomada do conteúdo se fez necessária e, desta vez a abordagem foi diferente, mais construtiva e atraente.

No decorrer da aplicação desse trabalho, durante o Roteiro de Atividades, os estudantes relataram por várias vezes não ter domínio algum sobre o conteúdo e que nem ao menos lembravam de definições básicas relativas a esse conteúdo, tornando-se imprescindível uma abordagem de ensino diferenciada por parte do professor, que não só facilite o entendimento do aluno, mas que contribua de forma significativa para a construção da sua aprendizagem.

Para tanto, se faz necessário ao ensinar matemática, o auxílio de materiais concretos, que auxiliem na construção do raciocínio, da organização do pensamento e que os tornem ativos na busca dos conhecimentos matemáticos.

Como todo processo de aprendizagem deve dar sentido ao que os estudantes estão aprendendo, o que acontece a partir de situações de suas próprias vivências, a aplicação da proposta apresentada nesse trabalho foi desenvolvida nesse contexto, onde o Roteiro de Atividades elaborado segue uma dinâmica de aplicações manuais no Geoplano, onde a cada interação do aluno, faz com que esse caminhe na descoberta de padrões e definições, formando conjecturas matemáticas, que também foram aplicadas nesse mesmo roteiro em forma de exercícios que envolviam os conteúdos de uma forma mais real e próxima do cotidiano dos alunos.

Nas primeiras atividades propostas do roteiro os alunos estavam receosos ao manusear o Geoplano com os fios e pinos, mas logo se acostumaram com os instrumentos e participaram de maneira significativa em toda atividade proposta.

O objetivo principal desta dissertação foi o de elaborar uma estratégia de ensino através de um roteiro de atividades que empregasse o uso do Geoplano para a construção dos conceitos básicos de ângulos em uma circunferência, que possibilitasse posteriormente a aplicação desses conteúdos em exercícios mais complexos.

A estratégia demonstrou-se satisfatória no decorrer da execução do Roteiro de Atividades e que pôde ser claramente notado nos resultados obtidos após a aplicação da Atividade de Avaliação Final, realizada no último momento da aplicação desse trabalho. Os alunos apresentaram uma melhora significativa na resolução dos problemas propostos, 42 de 45 alunos (94% dos alunos) conseguiram nota igual ou acima de 50% de acertos, onde os resultados podem ser observados a seguir:

Gráfico 2 – Quantidade de acertos na Atividade de Avaliação Final.

Fonte: elaborado pela professora/autora.

Considerando a necessidade de uma constante busca por estratégias de ensino na prática educativa, o professor deve agregar aos seus métodos de ensino práticas mais reflexivas, críticas e concretas, onde a própria busca por essas novas estratégias de ensino, devam ser alicerçadas no diálogo constante com os estudantes, fazendo com que a prática do docente não esteja vinculada em ensinar, mas em transcender a aprendizagem tornando-a significativa para o estudante e sua turma.

REFERÊNCIAS

BARBOZA, João L. M., Geometria Euclidiana Plana, coleção do Professor de Matemática, SBM, 10ª edição, Rio de Janeiro, 2006.

BRASIL, MEC. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Parâmetros Curriculares Nacionais, (Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental), Brasília.1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Última consulta em 16/03/2021.

BRASIL, MEC. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio – Ministério da Educação, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file. Última consulta em 12/11/2020.

HILBERT, David. Fundamentos da Geometria. Lisboa: Instituto para a Alta Cultura, 1952.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. Matemática: volume único – São Paulo: Atual, 2002.

LEMAT, Materiais Manipuláveis: Geoplano Circular. Laboratório de Ensino de Matemática, Departamento de Matemática – UNB. Disponível em: https://mat.unb.br/lemat/wp-content/uploads/2015/09/11APRESENTA%C3%87%C3%83O.pdf. Última consulta em 18/07/2020.

MITCHELMORE, Michael C.; WHITE, Paul. Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. Educational Studies in Mathematics, v. 41, n. 3, p. 209-238, 2000.

MUNIZ NETO, Antonio C. Geometria, Coleção PROFMAT – 1ª Edição – Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

OLIVEIRA, Edson B.; Estudo das relações entre cordas no círculo a partir do GeoGebra- PROFMAT/CCT/UFCG. p. 13-30, 2014. Disponível em: http://www.mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Edson.pdf. Última consulta em 12/10/2020.

PARENTE, João B. A.; Fundamentos da Geometria Euclidiana. Curso de Licenciatura em Matemática – UFPB/VIRTUAL, unidade VII, p. 179-188. Disponível em :http://biblioteca.virtual.ufpb.br/files/fundamentos_da_geometria_euclidiana_1361970502.pdf. Última consulta em 12/11/2020.

REZENDE, Eliane Q. F.; QUEIROZ, Maria Lúcia B.; Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas, 2ª Edição – Editora UNICAMP, 2008.

SAUER, Lisandra, Ângulos na Circunferência – Geometria Plana – UFPEL, 2018. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/sauer/files/2018/06/angulos-na-circunferencia.pdf. Última consulta em 06/08/2020.

APÊNDICE

APÊNDICE A - Atividade de Avaliação Inicial

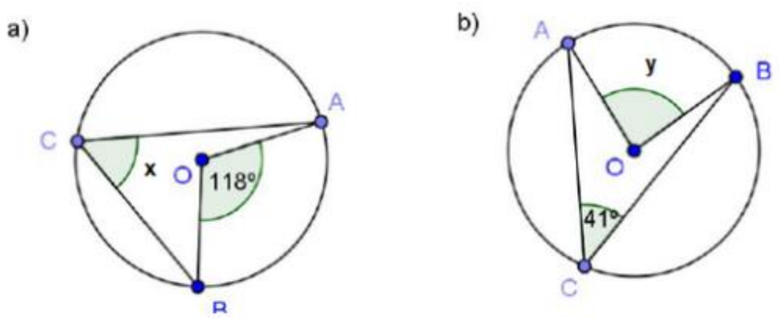
Disponível em: https://forms.gle/aai6c8iHCTc8Md84A.

AVALIAÇÃO INICIAL - REVISÃO DE GEOMETRIA - PROFESSORA VANESSA FRANZONI

Com base em seus conhecimentos anteriores sobre ângulos centrais e inscritos em uma circunferência, responda as questões a seguir.

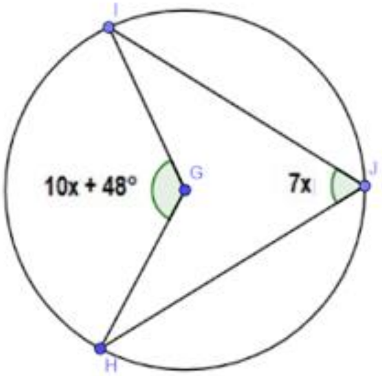
*Obrigatório

Nas duas circunferências abaixo, temos que os valores de x e y valem respectivamente; * 1 ponto



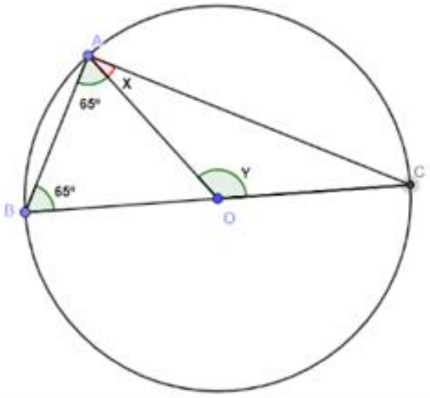
- 69º e 20º
- 54ºe 95º
- 59º e 80º
- 59º e 82º
- 62º e 139º

Carlos é fanático por aeromobilismo, e comprou um adesivo para seu aeromodelo, porém o adesivo não veio no molde que ele precisava. Carlos precisa recortar o adesivo delimitado pela região GHJI da figura abaixo, mas para isso precisa calcular o valor da medida x afim de conferir com o compasso se o adesivo será adequado para seu aeromodelo. O valor de x encontrado por Carlos é de: * 1 ponto



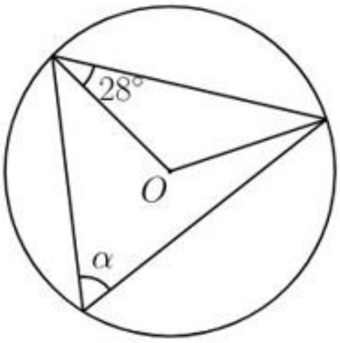
- 10°
- 12°
- 14°
- 16°
- 20°

Sabendo que o diâmetro da circunferência abaixo é o segmento BC, encontre o valor dos ângulos x e y respectivamente. * 1 ponto



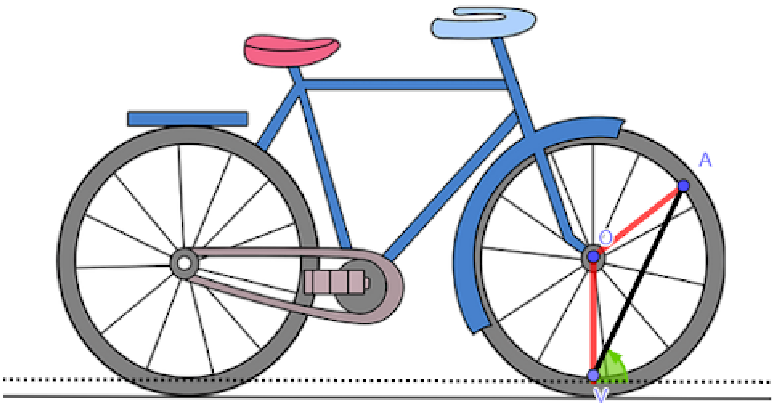
- 35° e 110°
- 50° e 130°
- 50° e 150°
- 25° e 125°
- 25° e 130°

Determine o ângulo α(alfa) na figura abaixo, sabendo que O é o centro da circunferência. * 1 ponto



- 72°
- 62°
- 64°
- 124°
- 56°

Uma bicicleta está apoiada perpendicularmente sobre o solo. Os aros dos pneus das bicicletas estão representados no desenho abaixo. Do centro do aro até sua borda foram colocados dois pinos de apoio, A e V, que serão as extremidades de uma vareta metálica que serve de sustentação para a bicicleta. Sendo OV perpendicular ao solo, β (beta) o ângulo formado vareta metálica e a reta pontilhada paralela ao solo, igual a 60° e o raio desse aro igual 20 qual o tamanho da vareta metálica? * 1 ponto



- ◯ 24 cm
- ◯ 40 cm
- ◯ 20 cm
- ◯ $20\sqrt{3}$ cm
- ◯ $22\sqrt{3}$ cm

Enviar

Página 1 de 1

APÊNDICE B - Geoplano Circular para impressão

COLÉGIO RESSURREIÇÃO
CATANDUVA

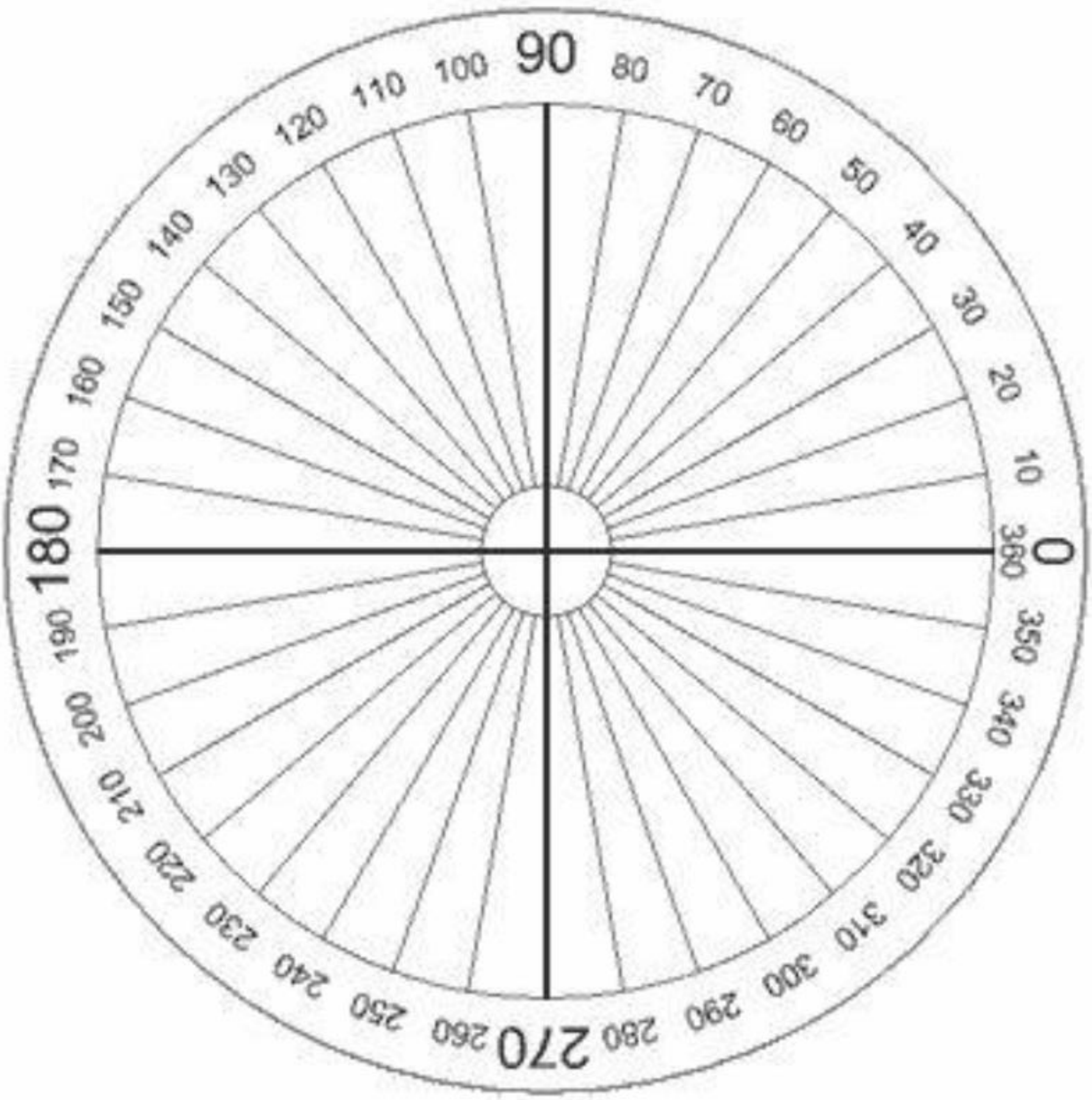
Colégio Ressurreição

GEOPLANO

3º ANO A/B – Ensino Médio – Prof.ª Vanessa Franzoni

Nome: ____ 3ª. ______ Nº. _______

ATENÇÃO: **Utilize o geoplano para fazer suas anotações, se necessário reproduza outros com o auxílio de compasso e régua.**

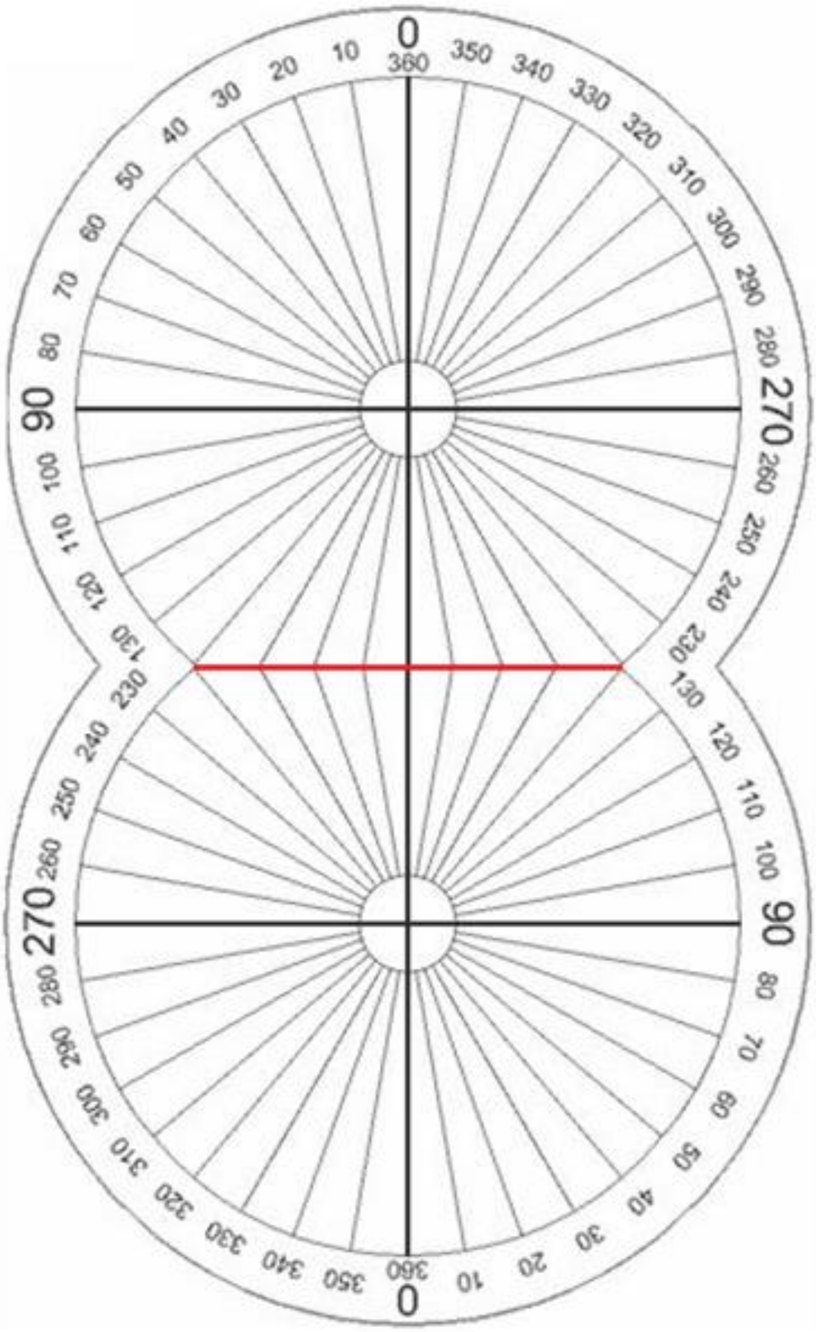


APÊNDICE C - Folha suplementar da Atividade IX para impressão.

Colégio Ressurreição

FOLHA SUPLEMENTAR DA ATIVIDADE X

3º ANO A/B – Ensino Médio – Prof.ª Vanessa Franzoni



APÊNDICE D - Roteiro de Atividades

Colégio Ressurreição

ROTEIRO DE ATIVIDADES - ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

3º ANO A/B – Ensino Médio – Prof.ª Vanessa Franzoni

Nome: ____ 3ª. ______ Nº. _______

ATENÇÃO: **Para a realização das atividades utilize o tabuleiro do Geoplano, com os elásticos (ou barbantes), pinos extras, Geoplano de papel impresso, Folha Suplementar (Atividade X), lápis, transferidor, compasso e régua.**

Atividade I

a) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano, barbante e/ou elásticos, construa um diâmetro $\overline{AB}$ da circunferência.

b) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano, barbante e/ou elásticos, construa um ângulo $A\hat{C}B$, onde C é qualquer ponto sobre a circunferência.

c) Transcreva o que você construiu nos itens a) e b) para o Geoplano de papel.

d) Com o auxílio do transferidor, encontre a medida dos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{C}B$.

e) Qual a razão entre as medidas dos ângulos encontrados no item anterior?

f) Na sua opinião, existe alguma nomenclatura matemática específica para esses ângulos? Se sim, qual seria?

Atividade II

a) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano, barbante e/ou elásticos, construa um ângulo na circunferência, nomeando de $A\hat{C}B$, onde o segmento $\overline{AB}$ não é diâmetro e C é qualquer ponto da circunferência.

b) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano, barbante e/ou elásticos, construa o ângulo $A\hat{O}B$, onde O é o centro da circunferência.

c) Transcreva suas construções para o Geoplano de papel nomeando como a descrição acima.

d) Com o auxílio do transferidor, encontre as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{C}B$.

e) Qual a razão entre as medidas dos ângulos encontrados no item anterior?

f) Refaça sua atividade (mais duas vezes) agora mudando de posição o ponto C.

g) Refaça sua atividade (mais duas vezes) agora mudando de posição dos pontos A e B

h) Qual a relação entre as medidas dos ângulos que você construiu?

i) Qual a regularidade que você pode observar entre as Atividades I e II?

Atividade III

Como base nas Atividades I e II propostas responda:

a) O que são ângulos centrais de uma circunferência?

b) O que são ângulos inscritos em uma circunferência?

c) Qual a relação entre ângulos inscritos e ângulos centrais, inscritos no mesmo arco?

Atividade IV

a) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano, barbante e/ou elásticos, construa um triângulo ABC onde $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência e C é um ponto qualquer sobre a circunferência.

b) Refaça o item anterior (mais duas vezes) agora mudando de posição o ponto C.

c) Transfira suas construções para o Geoplano de papel.

d) Você observou algo em comum entre os triângulos obtidos nos itens anteriores?

e) Através de propriedades abordadas nas aulas 3 e 4, é possível mostrar que a soma das medidas dos ângulos internos do triangulo ABC é $180°$? Foi importante para isso que $\overline{AB}$ fosse diâmetro?

f) Construa um quadrilátero $ABCD$ com A, B, C e D na circunferência do tabuleiro do Geoplano.

g) Transfira o quadrilátero para o Geoplano de papel, e com o auxílio do transferidor encontre a medida de seus ângulos internos.

h) Qual o valor da soma das medidas dos ângulos opostos do quadrilátero?

i) Repita do procedimento dos itens f), g) e h) mudando a posição dos pontos A, B, C e D na circunferência, ou seja, para um outro quadrilátero.

j) Houve alguma regularidade entre os dois quadriláteros?

k) Remova o ponto D da sua última construção no tabuleiro do Geoplano, ficando somente os pontos A, B e C. É possível obter um ponto D na circunferência formando um quadrilátero $ABCD$ com $m\widehat{ADC} = 180 - m\widehat{ABC}$?

Atividade V

"Embora não se saiba exatamente quando foi criado o primeiro globo de neve (SNOW GLOBES), eles começaram a ser vistos na França por volta de 1800, eram conhecidos como "cúpulas de neve" e usados como pesos de papel. Os "SNOW GLOBES" são objetos formados por uma esfera transparente, que pode ser de plástico ou de vidro. Dentro da esfera, há uma cena ou objeto em miniatura, que representa um momento ou lugar. Antigamente, os globos de neve eram fabricados para representar como ficavam as cidades ao nevar."

(http://blog.kukos.com.br/voce-conhece-a-historia-dos-snow-globes/#:~:text=Embora%20n%C3%A3o%20se%20saiba%20exatamente,usados%20como%20pesos%20de%20papel.)

Um globo de neve será confeccionado da seguinte maneira, será colocado em seu interior uma pirâmide sólida de altura FG igual a $8\ cm$ e de base triangular, cujos vértices ficam sobre o globo bem como o topo dessa pirâmide, como mostra a figura em 3D abaixo.

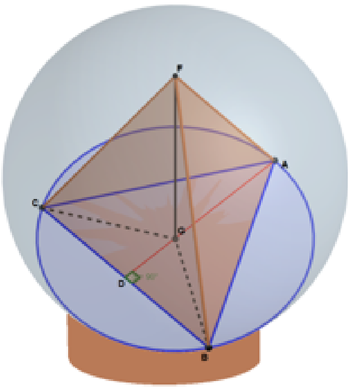
A esfera possui raio igual a $5\ cm$, e a secção da esfera onde se encontra a base da pirâmide possui centro G e raio igual a $4{,}04\ cm$. Sabe-se ainda que o ângulo $B\hat{A}C$ equivale a $60°$, $AD = 6cm$ é a altura da base que contêm o ponto G e o volume total da esfera é de $523{,}6\ cm^3$.

Qual o volume de água que será necessário para preencher esse globo, considerando a pirâmide sólida e incluindo a parte abaixo da base dessa pirâmide? (use: $\sqrt{3} = 1{,}7$).

(Dica: veja a figura em 3D pelo link: https://www.geogebra.org/classic/gatrnbnx)

Lembrar que:

- volume de esfera é dado por: $Ve = \frac{4}{3}\pi r^3$ e o volume da pirâmide dado por $Vp = \frac{1}{3} . Ab . h$.
- lei dos cossenos: $x^2 = y^2 + z^2 - 2 . y . z . \cos \alpha$



Atividade VI

a) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano, barbantes e/ou elásticos, construa um segmento $\overline{AC}$ onde A e C são pontos quaisquer da circunferência e construa os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OC}$.

b) Construa uma reta tangente à circunferência do Geoplano, onde o ponto de tangência seja C.

c) Transfira as construções para o Geoplano de papel.

d) o raio $\overline{OC}$ e a reta tangente a esse raio formaram um ângulo de medida __________________________.

e) Considerando o ângulo central $A\hat{O}C$ e o ângulo formado pela reta tangente ao raio $\overline{OC}$ e o segmento $\overline{AC}$, qual a relação entre suas medidas?____.

f) O ângulo formado pela reta tangente ao raio $\overline{OC}$ e o segmento $\overline{AC}$ é chamado de ____________________.

g) Podemos concluir que a medida do ângulo ____________________ é a metade do ângulo __________ ______________.

Atividade VII

a) Com o auxílio do tabuleiro do Geoplano e barbantes/elásticos, construa um segmento $\overline{AC}$ e outro $\overline{BD}$, onde A, B, C e D são pontos da circunferência de centro O de modo que cruzem num ponto $P, (P \neq O)$.

b) Transfira o procedimento acima para o Geoplano de papel.

c) Utilizando o transferidor, encontre a medida do ângulo de vértice P definido pelas retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ e destaque com canetas marca texto os seus arcos correspondentes na circunferência.

d) Volte ao tabuleiro do Geoplano e construa o ângulo central correspondente de cada arco que foi destacado no item anterior.

e) Transfira a continuação do seu procedimento para o Geoplano de papel.

f) Utilizando o transferidor, encontre a medida de cada arco destacado, com a dica que elas estão associadas aos seus ângulos centrais correspondentes.

g) Qual o valor da soma das medidas destes arcos destacados? ________________________________.

h) Considerando o ângulo mencionado no item c) e a soma das medidas dos dois arcos destacados, verifica-se alguma relação? ____.

i) Os ângulos de menor medida formados pelos cruzamentos de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ com vértice em P são chamados de ____ cuja medida é igual a __________________ dos seus arcos correspondentes.

Atividade VIII

a) No tabuleiro do Geoplano construa qualquer reta tangente á circunferência (sendo C o ponto de tangência), sobre essa reta marque um ponto P diferente do ponto de tangencia.

b) No tabuleiro do Geoplano construa qualquer reta secante á circunferência passando por P, marcando as intersecções da reta secante com a circunferência como sendo os pontos A e B.

c) Transfira as construções para o Geoplano de papel e destaque com caneta marca texto os arcos que estão no interior do ângulo definido pela reta tangente e a reta secante construída anteriormente cujos lados contém os pontos citados acima.

d) Volte ao Tabuleiro do Geoplano e construa o ângulo central correspondente a cada arco que foi destacado no item anterior.

e) Transfira suas novas construções para o Geoplano de papel.

f) Utilizando o transferidor, encontre a medida de cada arco destacado, com a dica que elas estão associadas aos seus ângulos centrais correspondentes.

g) Utilizando o transferidor, encontre a medida do ângulo definido pela reta tangente e a reta secante mencionado no item c).

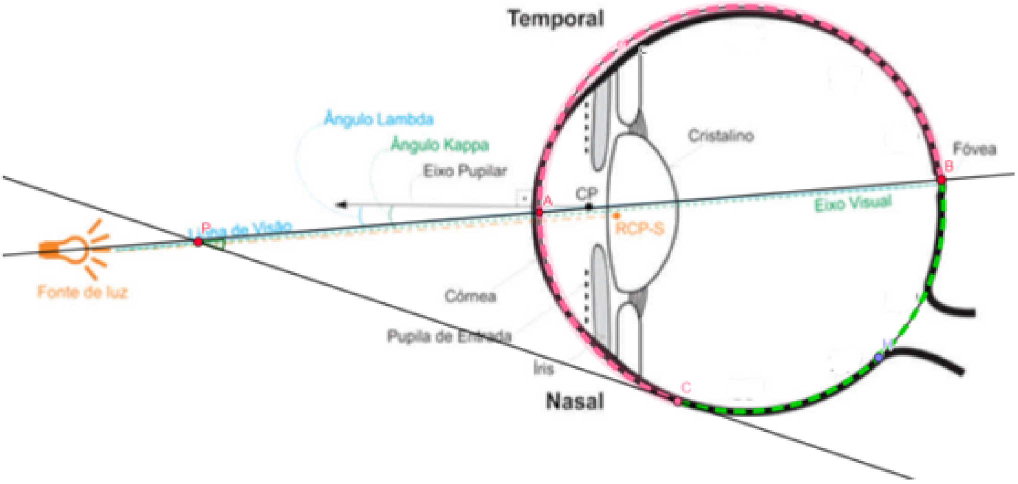
h) Calcule a diferença entre as medidas dos arcos do item f) (pegando o de maior medida menos o de menor medida).

i) Analisando a medida do ângulo encontrado no item g) e a diferença dos arcos encontrados no item h), qual a relação entre elas? ____.

j) Qual o nome dado ao ângulo construído nesta atividade?

Atividade IX

A córnea é a estrutura mais anterior do globo ocular e por ser transparente desempenha duas funções principais: proteger as demais estruturas intraoculares e deixar passar as imagens até o seu destino, a retina. Desta forma, para entender melhor a função da córnea, comparamos a mesma com um vidro de relógio: tem que ser resistente para proteger as outras estruturas do relógio e, também, ser transparente para que possamos ver as horas. Se por alguma razão a córnea perder sua transparência, tornando-se opaca, o paciente não terá uma visão nítida, inclusive, podendo chegar à cegueira. Em estudos feitos sobre o pós operatório de transplante de córneas, observou-se as aplicações de ângulos excêntricos, como podemos observar na figura abaixo. O arco $\widehat{BC}$ corresponde a $120º$ e o arco $\widehat{AC}$ corresponde a $70°$.



Descrição do ângulo lâmbda, ângulo kappa, eixo visual, linha de visão, eixo pupilar, centro pupilar (CP) e reflexo corneano de Purkinge- Sanso (RCP-S).

O ângulo formado pela linha de visão ($\overline{PB}$) e a reta tangente ao globo ocular que passa por C, corresponde a:

a) $50°$

b) $25°$

c) $15°$

d) $30°$

e) $35°$

Atividade X

Utilizando a folha impressa FOLHA SUPLEMENTAR, responda os itens a seguir:

a) Construa o segmento que liga os dois pontos de intersecção das circunferências, chamando-os de A e B.

b) Marque pontos V_1, V_2, ... , V_6 , três em cada arco maior definido por A e B em cada uma das circunferências.

c) Para cada ponto escolhido, construa o ângulo o tendo como vértice e lados contendo A e B (os pontos $A\widehat{V_1}B$, $A\widehat{V_2}B$, ... , $A\widehat{V_6}B$) e, com o auxílio do transferidor, encontre sua medida.

d) Qual a regularidade encontrada em relação a esses ângulos obtidos no item anterior?

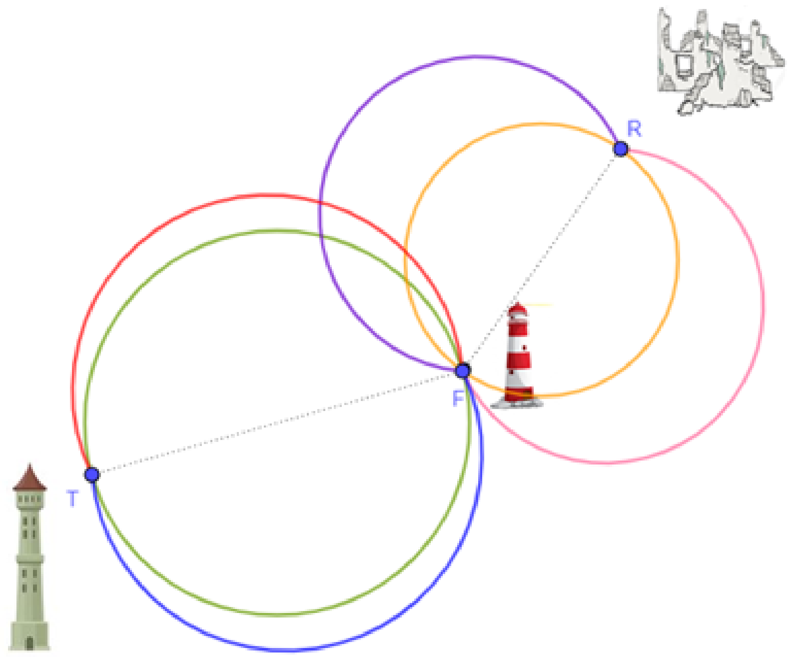
e) A união dos dois arcos maiores das circunferências definidos por A e B representa uma figura matemática com um nome específico, qual seria?

Atividade XI

SOCORRO!!!

ESTAMOS VENDO O FAROL **F** E AS RUÍNAS DO FORTE **R** SEGUNDO UM ÂNGULO DE 60° E AINDA PODEMOS VER O FALOR **F** E A TORRE DE PETRÓLEO **T** SEGUNDO UM ÂNGULO DE 90°.

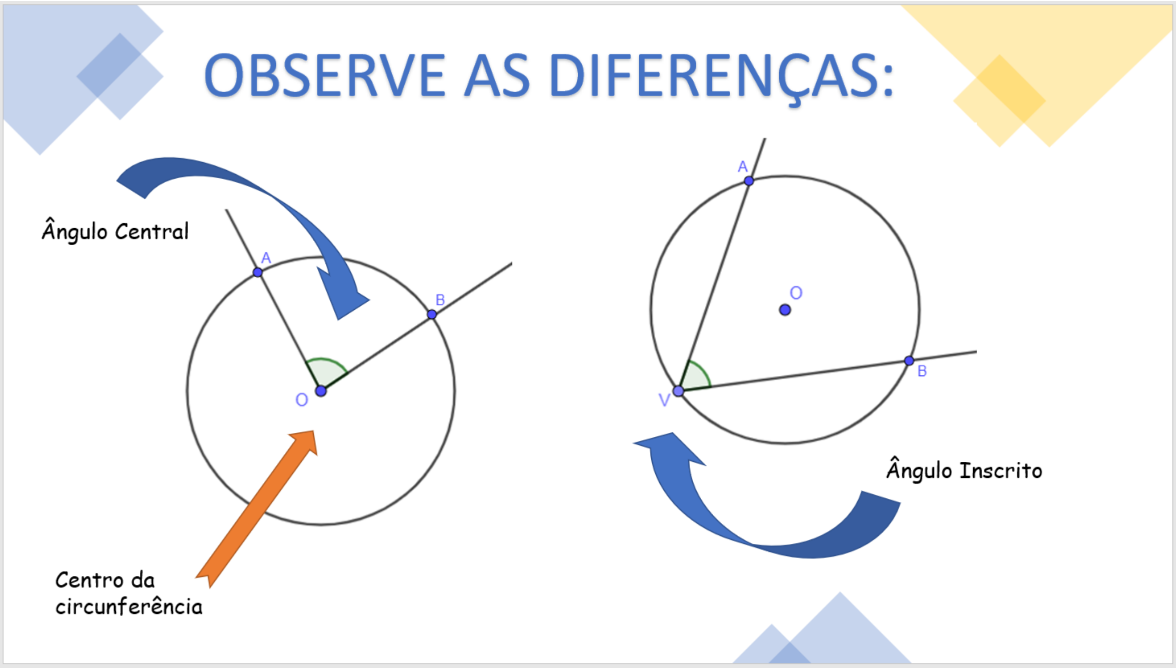
Essa foi a mensagem que uma embarcação em dificuldades enviou a um faroleiro em vigília, que logo após perdeu o sinal de comunicação. Porém ao relatar a ocorrência o faroleiro prontamente prestou socorro e identificou o local exato da embarcação já que o marinheiro da tripulação havia passado todas as informações necessárias.

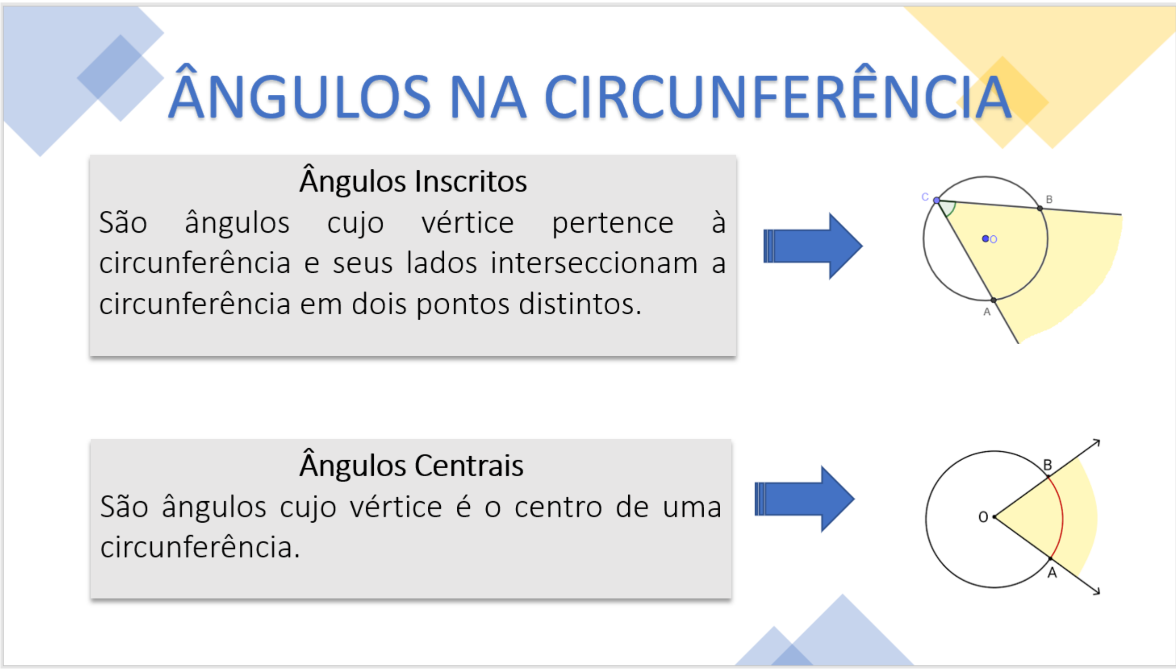


Olhou para seu mapa e marcou um “x” na localização da embarcação.

Se você fosse o faroleiro teria encontrado a embarcação perdida?

APÊNDICE E - Slides de Apresentação (1)

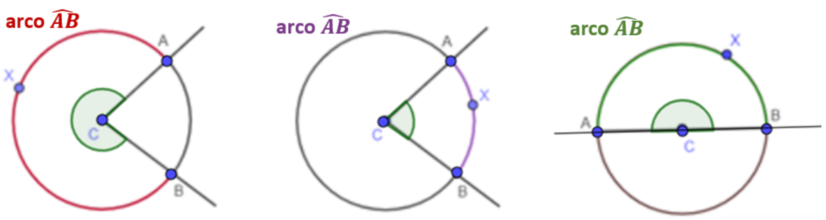




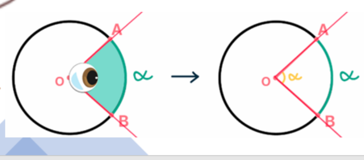
ARCOS NA CIRCUNFERÊNCIA

A medida de um **arco** na circunferência é igual a medida do ângulo central correspondente.

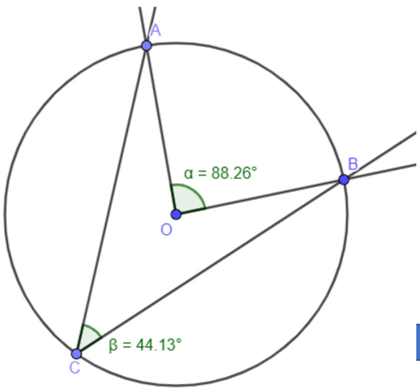
ARCO MAIOR **ARCO MENOR** **SEMICIRCUNFERÊNCIA**



"o ângulo central está sempre **de olho** no seu arco correspondente"

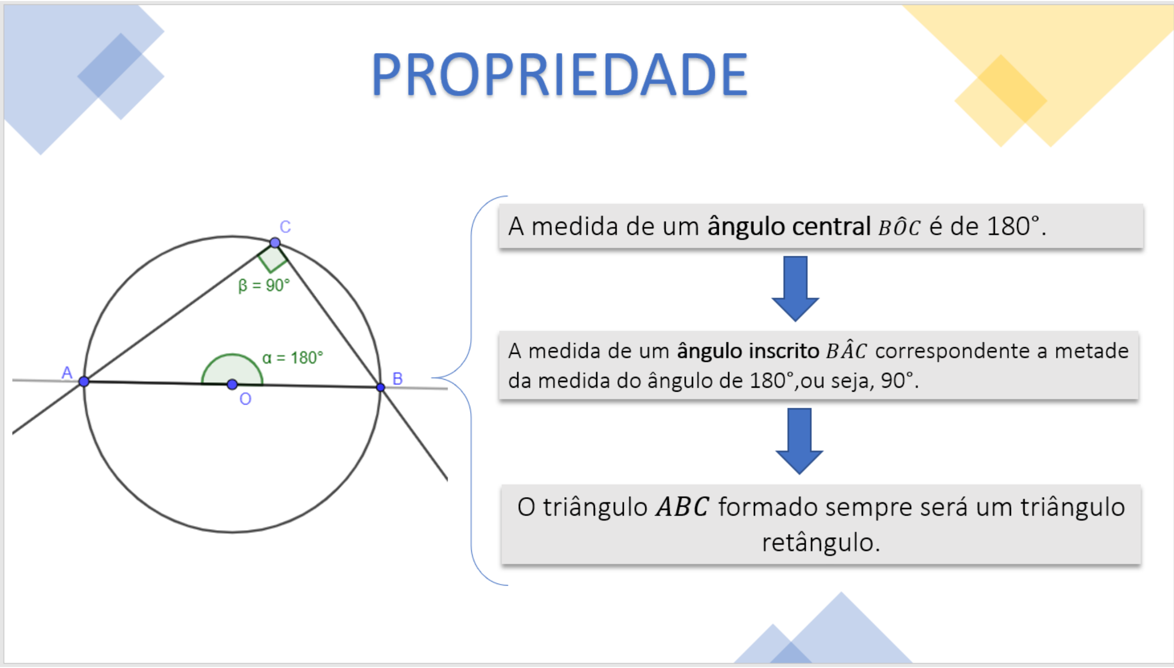


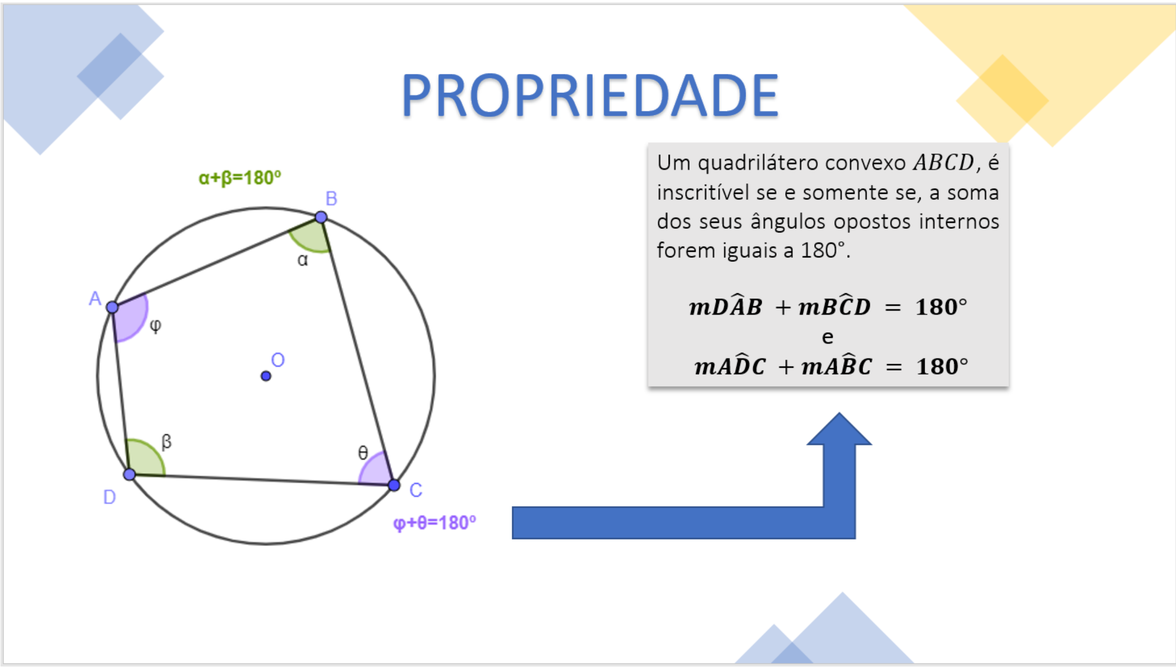
PROPRIEDADE

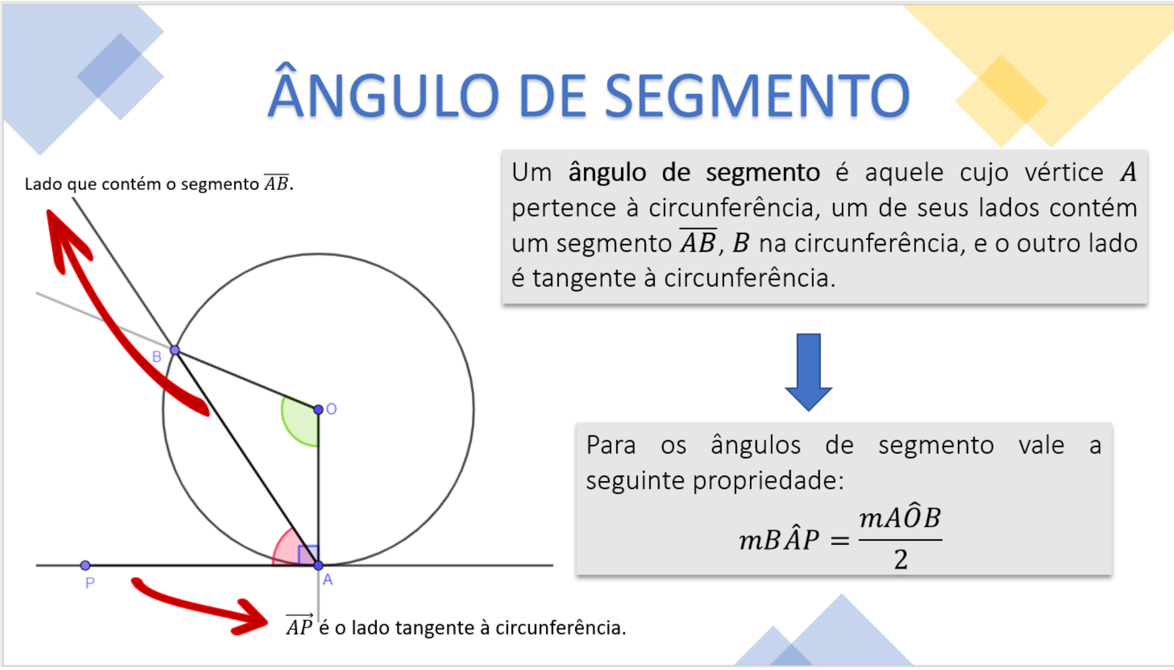


A **medida de um ângulo inscrito** é a metade da **medida do ângulo central** que tem o mesmo arco correspondente.

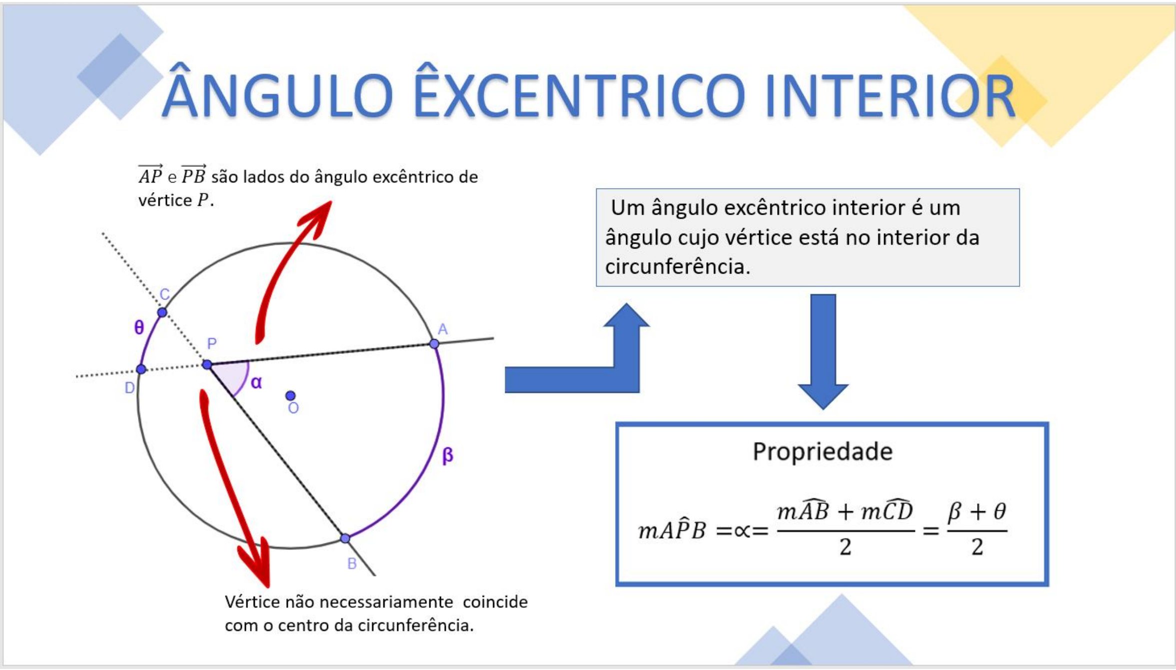
APÊNDICE F - Slides de Apresentação (2)







Apêndice G - Slides de Apresentação (3)

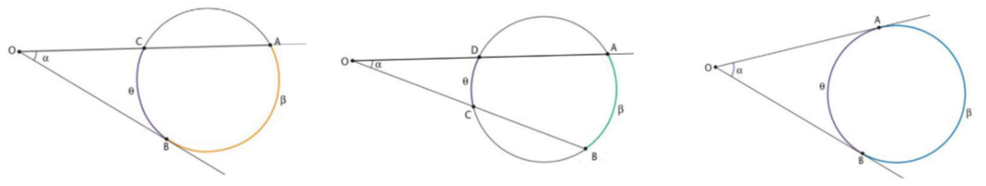


ÂNGULO ÊXCENTRICO EXTERIOR

Um ângulo excêntrico interior é um ângulo cujo vértice está no exterior da circunferência e seus lados são secantes ou tangentes a essa circunferência.

Propriedade

$$mA\hat{O}B = \alpha = \frac{\beta + \theta}{2}$$

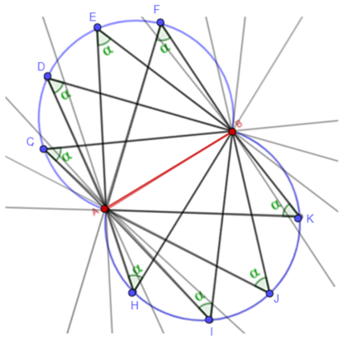


Formado por uma secante e uma tangente à circunferência

Formado por duas secantes à circunferência

Formado por duas tangentes à circunferência

ARCO CAPAZ



O conjunto dos pontos V em um plano tais que $mA\hat{V}B = \alpha$ é chamado de arco capaz do ângulo de medida $\propto$ sobre o segmento $\overline{AB}$. Neste caso, dizemos que V vê o segmento $\overline{AB}$ sob o ângulo de medida $\propto$.

Dizemos ainda que todo ponto desse lugar geométrico é *capaz* de ver o segmento $\overline{AB}$ sob ângulo $\propto$.

Note que é a união de dois arcos de circunferência, simétricos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e tendo os pontos A e B em comum.

APÊNDICE H - Atividade de Avaliação Final

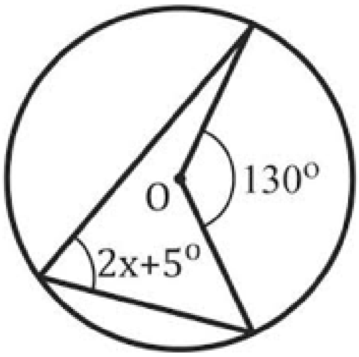
Disponível em: https://forms.gle/uD4G9rRozJFzuUDJA.

AVALIAÇÃO FINAL - REVISÃO DE GEOMETRIA

COM BASE EM SEUS CONHECIMENTO SOBRE ÂNGULOS CENTRAIS E INSCRITOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA, RESPONDA AS QUESTÕES A SEGUIR.

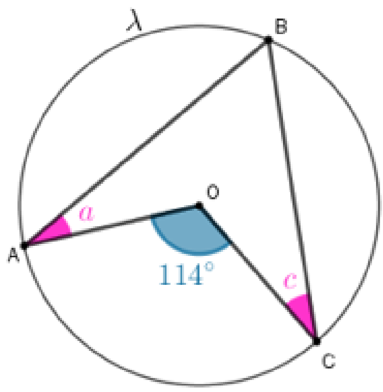
*Obrigatório

Na circunferência de centro O abaixo, encontre o valor de x. * 1 ponto



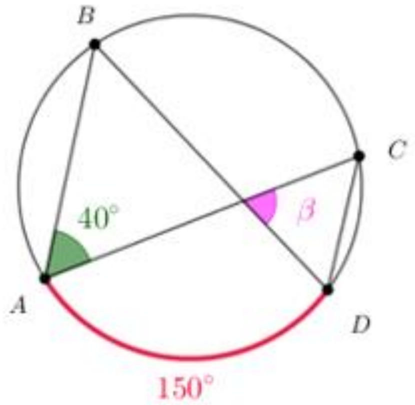
- 25°
- 30°
- 45°
- 65°
- 70°

Na figura, A,B e C são pontos da circunferência λ de centro em O e a e c são as medidas dos ângulos com vértices em A e C, respectivamente. Determine, em graus, a soma a+c. * 1 ponto



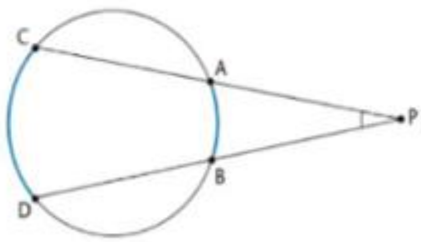
- 57°
- 66°
- 67°
- 54°
- 64°

Determine a medida em graus β indicada na figura abaixo: * 1 ponto



- 55°
- 50°
- 70°
- 65°
- 60°

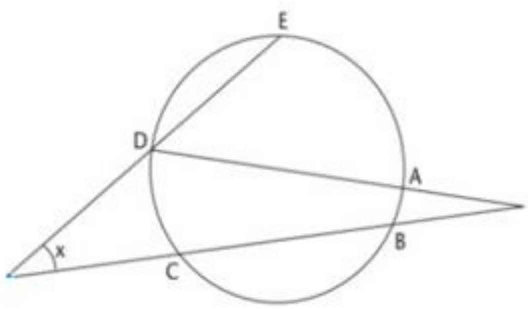
Calcule a medida do ângulo $A\hat{P}B$, mostrado na figura a seguir, sabendo que o menor arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 25° e o menor arco $\overset{\frown}{DC}$ mede 55°. * 1 ponto



- 15°
- 25°
- 40°
- 80°
- 30°

1 ponto

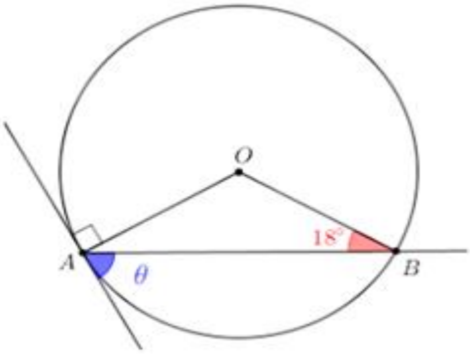
Na figura a seguir, as medidas dos menores arcos AB, AC, CD e DE são, respectivamente, 10°, 120°, 50°, e 80°. Com base nessas informações, a medida do arco AE e a de x correspondem a: *



- 120° e 15°
- 110° e 25°
- 115° e 40°
- 110° e 35°
- 120° e 30°

Determine a medida θ indicada na figura abaixo: *

1 ponto



- 90°
- 84°
- 45°
- 144°
- 72°

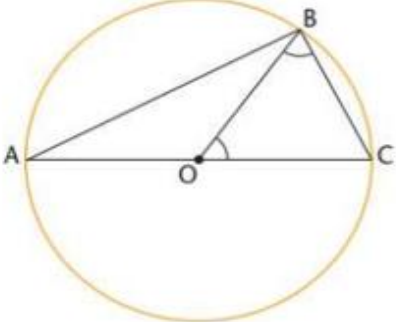
A foto a seguir mostra parte da decoração de uma grade, na China. Nela podemos ver um pentágono regular estrelado inscrito em uma circunferência. Um designer deseja fazer a ilustração desse padrão. Nessa ilustração, quanto devem medir, respectivamente, o menor ângulo agudo da ponta da estrela e o ângulo entre duas dessas pontas? *

1 ponto

- 40° e 144°
- 54° e 120°
- 72° e 108°
- 36° e 108°
- 48° e 132°

Um artista pretende construir uma escultura de base circular. Serão elevadas sobre essa base duas hastes triangulares, conforme a figura abaixo, em que o ponto O é o centro do círculo de raio 4 m e as medidas dos ângulos BOC (ângulo em O) e OBC (ângulo em B) são iguais. Nessas condições, calcule a medida do contorno que servirá de apoio às hastes. *

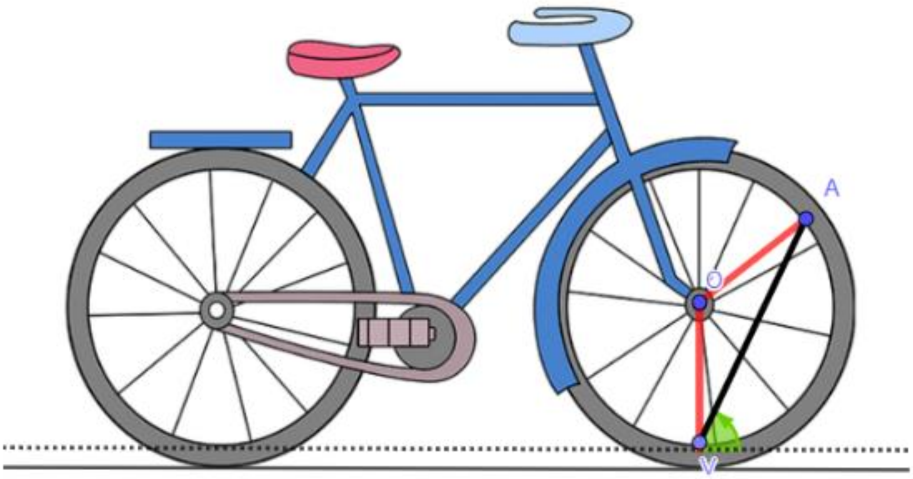
1 ponto



- $4(3+\sqrt{3})$
- $4(2+\sqrt{3})$
- $4\sqrt{3}$
- 12
- $12\sqrt{3}$

Uma bicicleta está apoiada perpendicularmente sobre o solo. Os aros dos pneus das bicicletas estão representados no desenho abaixo. Do centro do aro até sua borda foram colocados dois pinos de apoio, A e V, que serão as extremidades de uma vareta metálica que serve de sustentação para a bicicleta. Sendo OV perpendicular ao solo, β (beta) o ângulo formado vareta metálica e a reta pontilhada paralela ao solo, igual a 60° e o raio desse aro igual 20 qual o tamanho da vareta metálica? *

1 ponto



- 24 cm
- 40 cm
- 20 cm
- $20\sqrt{3}$ cm
- $22\sqrt{3}$ cm