



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Campus de São José do Rio Preto

Camila Facchini

**Uma Proposta de Atividades de Semelhança de Triângulos para o Ensino  
Fundamental**

São José do Rio Preto  
2021

Camila Facchini

**Uma Proposta de Atividades de Semelhança de Triângulos para o Ensino Fundamental**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rita de Cassia Pavan Lamas

São José do Rio Preto  
2021

F137p Facchini, Camila  
Uma Proposta de Atividades de Semelhança de Triângulos para o Ensino Fundamental / Camila Facchini. -- São José do Rio Preto, 2021  
78 f.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto  
Orientadora: Rita de Cassia Pavan Lamas

1. Congruência de Triângulos. 2. Semelhança de Triângulos. 3. Resolução de Problemas. 4. Polidiamantes. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Camila Facchini

**Uma Proposta de Atividades de Semelhança de Triângulos para o Ensino Fundamental**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Rita de Cassia Pavan Lamas  
UNESP – São José do Rio Preto  
Orientadora

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Flavia Sueli Fabiani Marcatto  
UNIFEI – Itajubá

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado  
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto  
5 de março de 2021

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos que colaboraram de alguma maneira para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Mariluci e João Paulo pelo apoio.

À minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rita de Cassia Pavan Lamas por sua dedicação, carinho e tempo dispensados a mim e a este trabalho.

Ao Ibilce e ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, o PROFMAT.

Agradeço ainda a todos os professores, amigos e pessoas queridas que me incentivaram e apoiaram a seguir sempre em frente, apesar das dificuldades.

Agradeço em especial a minha amiga Priscila, companheira de curso desde o primeiro dia e ao Bruno pelo apoio e auxílio, principalmente com as figuras deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

“[...] “Você poderia me dizer, por favor, qual o caminho para sair daqui?”

“Depende muito de onde você quer chegar”, disse o Gato.

“Não me importa muito onde...” foi dizendo Alice.

“Nesse caso não faz diferença por qual caminho você vá”, disse o Gato.

“...desde que eu chegue a *algum lugar*”, acrescentou Alice, explicando.

“Oh, esteja certa de que isso ocorrerá”, falou o Gato, “desde que você caminhe bastante.”

## RESUMO

Ao analisar a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), observa-se que devem ser enfatizadas as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações ou reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo assim os conceitos de congruência e semelhança, levando o aluno a ser capaz de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes e semelhantes. Conhecimento esse que se faz presente através do objeto de conhecimento semelhança de triângulos no 9º ano do Ensino Fundamental. Assim, esse trabalho se propõe a apresentar ao professor uma sequência de atividades com base na metodologia de Resolução de Problemas para aplicação em sala de aula, cujo objetivo é introduzir a semelhança de triângulos utilizando como material concreto os polidiamantes, os quais são poliformas compostas de triângulos equiláteros. Em particular, as atividades têm por objetivo conduzir os alunos às definições e propriedades de congruência e semelhança de triângulos. Desta forma, o trabalho apresenta uma proposta para as aulas de Matemática, Práticas Experimentais ou outras aulas dos currículos, cujo objetivo é a implementação da metodologia de Resolução de Problemas e a utilização de materiais concretos. Também se explora importantes publicações sobre os polidiamantes, seus problemas e desafios conhecidos.

**Palavras-chave:** Congruência de Triângulos. Semelhança de Triângulos. Resolução de Problemas. Polidiamantes.

## **ABSTRACT**

When analyzing the National Common Curricular Base (BNCC), it is observed that the tasks that analyze and produce transformations and enlargements or reductions of flat geometric figures must be emphasized, identifying their variant and invariant elements, thus developing the concepts of congruence and similarity, leading the student to be able to recognize the necessary and sufficient conditions to obtain congruent and similar triangles. Knowledge that is present through the object of knowledge similarity of triangles in the 9th grade of Elementary School. This work proposes to present a sequence of activities based on the Problem Solving methodology, whose objective is to introduce the similarity of triangles using polyiamonds as concrete material, which are polyforms composed of equilateral triangles. In particular, the activities aim to conduct students to the definitions and properties of congruence and similarity of triangles. The work presents a proposal for classes in Mathematics, Experimental Practices or other classes in the curricula, whose objective is the implementation of the Problem Solving methodology and the use of concrete materials. Important publications about polyiamonds, their known problems and challenges are also explored.

**Keywords:** Congruence of Triangles. Similarity of Triangles. Problem Solving. Polyiamonds.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Figuras semelhantes.....	16
Figura 2.2 – Triângulos congruentes.....	18
Figura 2.3 – 1º caso de congruência - LAL.....	19
Figura 2.4 – Ponto D da semirreta AC tal que $\overline{AD} = \overline{A'C'}$ .....	20
Figura 2.5 – 2º caso de congruência - ALA.....	20
Figura 2.6 – Caso de congruência - LAAo.....	21
Figura 2.7 – Triângulos ABC, A'B'C' e ABD.....	22
Figura 2.8 – 3º caso de congruência – LLL.....	22
Figura 2.9 – Triângulos semelhantes.....	23
Figura 2.10 – Triângulos ABC e A'B'C'.....	24
Figura 2.11 – Transitividade da semelhança de triângulos.....	25
Figura 2.12 – Triângulo ABC e reta r.....	26
Figura 2.13 – Triângulos ABC e A'B'C'.....	27
Figura 2.14 – 1º caso de semelhança – AA.....	28
Figura 2.15 – Triângulos ABC, A'B'C' e DEF.....	29
Figura 2.16 – 2º caso de semelhança – LAL.....	29
Figura 2.17 – Triângulos ABC, A'B'C' e DEF.....	30
Figura 2.18 – 3º caso de semelhança – LLL.....	31
Figura 2.19 – Polígonos $A_1A_2A_3A_4$ e $B_1B_2B_3B_4$ .....	32
Figura 2.20 – Polígonos $A_1A_2...A_{n+1}$ e $B_1B_2...B_{n+1}$ .....	33
Figura 2.21 – Triângulos ABC e A'B'C'.....	34
Figura 2.22 – Triângulos ABC e A'B'C'.....	35
Figura 2.23 – Triângulos ABC e A'B'C'.....	36
Figura 2.24 – Retângulos Semelhantes.....	37
Figura 2.25 – Figuras semelhantes.....	37
Figura 3.1 – Pentaminós.....	38
Figura 3.2 – <i>Diamond</i> .....	39
Figura 3.3 – Monodiamante, diamante e tridiamante, respectivamente.....	40
Figura 3.4 – Tetradiamantes.....	40
Figura 3.5 – Pentadiamantes.....	40
Figura 3.6 – Hexadiamantes e identificação.....	41

Figura 3.7 – Hexadiamante cobra (10) e (10) refletido.....	42
Figura 3.8 – Montagem sugerida por O’Beirne.....	42
Figura 3.9 – Padrão para o primeiro desafio de O’Beirne.....	43
Figura 3.10 – Soluções sugeridas para o primeiro desafio por O’Beirne.....	43
Figura 3.11 – Triângulos destacados nos hexadiamantes de acordo com sua orientação.	44
Figura 3.12 – Triângulo equilátero considerado.....	44
Figura 3.13 – Soluções sugeridas para o segundo desafio por O’Beirne.....	45
Figura 3.14 – Nomenclatura apresentada por Gardner.....	46
Figura 3.15 – Algumas sugestões de “montagem” para o paralelogramo 3x3.....	47
Figura 3.16 – Paralelogramos envolvendo todos os doze hexadiamantes.....	48
Figura 3.17 – Uma possível solução para o paralelogramo 3x11.....	48
Figura 3.18 – O único paralelogramo possível com lado dois.....	49
Figura 3.19 – Anel triangular (a) e anel hexagonal (b).....	50
Figura 3.20 – Solução para o problema dos “três gêmeos”.....	50
Figura 3.21 – Padrão da estrela de seis pontas do desafio de Gardner.....	51
Figura 3.22 – Solução conhecida para a estrela de seis pontas.....	51
Figura 3.23 – Padrões simétricos de hexadiamantes feito por Maurice J. Povah.....	52
Figura 3.24 – Padrões de hexadiamantes feito por Adrian Struyk.....	52
Figura 4.1 – Respostas da atividade 1.....	57
Figura 4.2 – Algumas possíveis respostas para a atividade 2.....	59
Figura 4.3 – Uma possível resposta para a atividade 3.....	59
Figura 4.4 – Uma possível resposta para a atividade 4 (a) e a atividade 5 (b).....	62
Figura 4.5 – Uma possível resposta para as figuras da atividade 7.....	64
Figura 4.6 – Uma possível resposta para as figuras da atividade 8a (a) e a atividade 9a (b).....	66
Figura 4.7 – Uma possível resposta para as duplicações da atividade 11.....	69
Figura 4.8 – Uma possível resposta para as triplicações da atividade 12.....	72

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>16</b>
<b>2.1</b>	<b>Congruência de Triângulos.....</b>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>Semelhança de Triângulos.....</b>	<b>23</b>
<b>2.3</b>	<b>Semelhança de Polígonos.....</b>	<b>31</b>
<b>2.4</b>	<b>Razão entre as Áreas de Figuras Semelhantes.....</b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>ASPECTOS HISTÓRICOS DAS POLIFORMAS.....</b>	<b>38</b>
<b>3.1</b>	<b>Polidiamantes.....</b>	<b>39</b>
<b>4</b>	<b>SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES SOBRE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Atividade – Parte 1.....</b>	<b>55</b>
<b>4.2</b>	<b>Atividades – Parte 2.....</b>	<b>57</b>
<b>4.3</b>	<b>Atividades – Parte 3.....</b>	<b>60</b>
<b>4.4</b>	<b>Atividades – Parte 4.....</b>	<b>64</b>
<b>4.5</b>	<b>Atividades – Parte 5.....</b>	<b>65</b>
<b>4.6</b>	<b>Atividades – Parte 6.....</b>	<b>67</b>
<b>4.7</b>	<b>Atividades – Parte 7.....</b>	<b>70</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>73</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>75</b>
	<b>ANEXO A – POLIDIAMANTES PARA IMPRESSÃO.....</b>	<b>77</b>

## 1. INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento de referência nacional para a formulação curricular de todos os sistemas e redes de ensino do país. O documento é de caráter normativo, ou seja, ele define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas ao longo das etapas e modalidades da educação básica de modo a assegurar o direito a aprendizagem e ao desenvolvimento dos alunos ao longo da fase escolar (BRASIL, 2018).

Sobre a área de Matemática, a BNCC (BRASIL, 2018) afirma que o conhecimento matemático não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos e de técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda os fenômenos de caráter aleatório, criando assim sistemas abstratos que inter-relacionam e organizam fenômenos do mundo físico ou não. Afirmando ainda que, o conhecimento matemático é necessário, tanto pela sua aplicação, quanto pela potencialidade na formação de cidadãos.

O Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) tem o papel de definir e explicitar as competências e as habilidades essenciais para o desenvolvimento cognitivo, social e emocional dos estudantes da rede estadual de São Paulo, considerando a formação integral na perspectiva do desenvolvimento humano. É contemplado no Currículo Paulista todas as competências gerais da BNCC, sendo o processo de reelaboração desse documento iniciado logo após a homologação da BNCC.

A Matemática é vista no Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) como parte do conhecimento humano e que assume um papel relevante na formação dos estudantes pela sua utilidade e sua compreensão como linguagem, afirmando que a Matemática deve ser vista como uma ciência e que seu estudo deve concorrer para o desenvolvimento de capacidades fundamentais de análise, compreensão e intervenção de diferentes contextos. O Currículo Paulista afirma ainda que, os conhecimentos matemáticos privilegiam tanto as especulações teóricas, quanto as aplicações práticas dos conhecimentos matemáticos.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018) e o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) nos anos finais do Ensino Fundamental devem ser enfatizadas, além da consolidação e ampliação das aprendizagens dos anos iniciais do Ensino Fundamental, as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações ou reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo assim os conceitos de congruência e semelhança, levando o aluno a ser capaz de reconhecer as condições necessárias e suficientes

para obter triângulos congruentes e semelhantes, sabendo aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples e contribuindo para o raciocínio hipotético-dedutivo.

No 9º ano do Ensino Fundamental esse conhecimento se traduz na unidade temática de Geometria através do objeto de conhecimento semelhança de triângulos e da habilidade EF09MA12 cujo objetivo é “Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes” (BRASIL, 2018, p.317; SÃO PAULO, 2019, p.359).

A habilidade anterior é apoiada por outras habilidades a serem desenvolvidas em anos anteriores. No 3º ano do Ensino Fundamental temos que a congruência de figuras geométricas planas se faz presente através da habilidade EF03MA16 com o objetivo de “Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p.288; SÃO PAULO, 2019, p.335).

Temos no 6º ano do Ensino do Fundamental a construção de figuras semelhantes através da ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas, habilidade EF06MA21, cujo objetivo é “Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano e tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p.303; SÃO PAULO, 2019, p.349).

Podemos observar no 8º ano do Ensino Fundamental que, assim como afirmado anteriormente, a aprendizagem sobre congruências de triângulos está atrelada a aprendizagem das propriedades de quadriláteros através da habilidade EF08MA14, onde o objetivo é “Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos” (BRASIL, 2018, p.315; SÃO PAULO, 2019, p.356).

Assim, ao longo dos anos temos as habilidades consideradas essenciais e que serão apoio para aprender as condições suficientes e necessárias para desenvolver o conhecimento sobre semelhança e congruência de triângulos. Conhecimento esse que será fundamental para demonstrar, por exemplo, as relações métricas no triângulo retângulo, objeto de conhecimento do último ano escolar do Ensino Fundamental.

Uma das competências específicas de Matemática no Ensino Fundamental, segundo a BNCC (BRASIL, 2018), é que o aluno desenvolva o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos. Outra competência específica é que o aluno enfrente situações-problema, inclusive situações imaginadas que podem não estar relacionadas ao aspecto prático-utilitário e que expresse suas respostas e conclusões utilizando diferentes registros e linguagens.

Ainda, segundo a BNCC, temos que

“Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental.” (BRASIL, 2018, p. 266).

Processos esses considerados potencialmente ricos para o desenvolvimento das habilidades fundamentais para o letramento matemático. Assim, a BNCC (BRASIL, 2018) se orienta pelo pressuposto que a aprendizagem em Matemática está relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos não deixando de lado suas aplicações. As conexões estabelecidas entre os alunos e os demais componentes curriculares, entre eles e o cotidiano, e entre eles e os diferentes temas matemáticos é o que resultam os significados dos objetos matemáticos.

No Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) a Resolução de Problemas é vista como uma atividade central no ensino e aprendizagem de Matemática por favorecer a percepção de diferentes perspectivas para enfrentamento de uma situação, bem como a articulação e refinamento de seus pensamentos. A Resolução de Problemas, segundo o Currículo Paulista, propicia a persistência, a reflexão, a investigação, o questionamento e a observação de maneira que as soluções propostas sejam as mais eficientes e precisas, o pensamento crítico. Assim, enfrentar um desafio promove a reflexão e a valorização de formas pessoais de resolução, a criatividade, diferentes pontos de vista e o ajuste consciente de suas próprias estratégias.

Segundo Allevato e Onuchic (2014) quando falamos sobre ensino de Matemática fundamentado na Resolução de Problemas, este pode se dar de três formas diferentes. A primeira é considerar o estudo da Resolução de Problemas como um novo conteúdo, incluindo o ensino de como se resolver problemas. Há também o ensino de Matemática para a Resolução de Problemas que ocorre quando ao final da aprendizagem de conceitos matemáticos é apresentado problemas para que sejam resolvidos aplicando o conceito aprendido. E por fim, o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. A este último, as autoras consideram que a expressão “através” enfatiza que ambas Resolução de Problemas e Matemática são construídas ao mesmo tempo e continuamente.

Allevato e Onuchic (2014) citam as recomendações de que a Resolução de Problemas seja trabalhada como ponto de partida das atividades matemáticas em sala de aula. Temos, então, o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. Assim, segundo as ideias que sustentam as orientações para o trabalho em sala de aula tomam como princípio que a

aprendizagem se realiza pelo próprio aluno através da construção de conceitos quando esse confronta suas concepções e constrói o conceito pretendido pelo professor.

Para que uma atividade se constitua como um problema, segundo Allevato e Onuchic (2014, p. 44), “[...] o professor não pode prescrever aos estudantes os métodos e/ou regras específicas para que obtenham a solução”. Dessa forma, a configuração da relação entre problema e resolvidor será a de que se o resolvidor já conhece ou memorizou os métodos de resolução, ou ainda, se não estiver interessado na atividade, essa não será para ele um problema.

Allevato e Onuchic (2014) apresentam dez etapas como forma de organização das atividades em sala de aula para que seja possível trabalhar a Matemática através da Resolução de Problemas. Na primeira etapa, o problema gerador que visa a construção de um novo conteúdo é proposto para os alunos ou até mesmo os próprios alunos propõe um problema. A seguir o aluno realiza a leitura individual e somente então os alunos se reúnem e fazem novamente uma leitura em conjunto para a discussão do problema. O professor apenas auxilia em dúvidas secundárias, incentivando e observando os alunos, atuando como mediador.

Ainda sobre as dez etapas propostas por Allevato e Onuchic (2014), a quarta etapa, o da resolução do problema gerador, é onde os alunos tentam resolver o problema em grupos e precisam registrar suas resoluções da maneira mais adequada, utilizando também a linguagem matemática. O professor ainda observa e incentiva a resolução do problema, lembrando que o conhecimento específico deve ser construído pelo aluno ao longo da resolução do problema.

Finalizada a etapa da resolução do problema pelo grupo de alunos, cada grupo registra na lousa sua resolução para a etapa seguinte, a plenária. Na plenária, os alunos são convidados a discutirem os meios, métodos, estratégias e resoluções de cada grupo, para que assim professor e alunos cheguem a um consenso sobre o resultado correto, sendo esse momento em que ocorre um grande aperfeiçoamento da leitura e escrita matemática, afirmam Allevato e Onuchic (2014).

Nesta etapa podem surgir erros nas soluções dos alunos e esses devem ser analisados. Ao analisar o erro podemos identificar o que o aluno conhece ou não, enquanto ao analisar o acerto, não é possível fazer essa identificação. Analisar as repostas dos alunos, para Cury (2013) é uma forma de auxiliar a construção do conhecimento básico necessário para transmitir conteúdos específicos. Para interpretar as produções ou respostas dos alunos é preciso refletir o que o aluno queria dizer com aquilo, o que sabem e o que não sabem.

Podemos aprender com as respostas dos alunos. Cury (2013) afirma que, ao observar a resposta correta, alguns erros ocultos podem nos levar a conclusões contraditórias. É necessário

que o aluno desenvolva uma atitude mental favorável à elaboração de hipóteses, à crítica e à criatividade.

Cury (2013, p. 82) afirma ainda que,

“Como base nas sugestões para uso dos erros, destaco a ideia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas.”.

Após a plenária e o consenso sobre a resposta da atividade, o conceito deve ser formalizado pelo professor, com uma linguagem formal, organizada e estruturada e, se necessário, introduzindo os conceitos, princípios e demonstrações.

Segundo o Currículo Paulista (SÃO PAULO, 2019) a Resolução de Problemas quando utilizada como estratégia metodológica pode tornar os estudantes ativos no processo de aprendizagem pois o problema é o ponto de partida para novos conhecimentos, além de proporcionar um trabalho coletivo de forma cooperativa. A Resolução de Problemas pode ainda ser associada à utilização das tecnologias, jogos ou materiais manipuláveis. No entanto, a forma de utilização desses materiais deve ser apropriada para auxiliar na aprendizagem.

“[...] recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.” (BRASIL, 2018, p.276).

Para Mendes (2009) o uso de materiais concretos para ensinar Matemática é uma alternativa didática que contribui para o professor realizar intervenções na sala de aula e proporciona ao aluno tornar-se um agente ativo na construção do próprio conhecimento matemático. Porém, para o autor, o material é usado de maneira inadequada quando utilizado ocasionalmente como peça motivadora ou quando o aluno é apenas um espectador das demonstrações. Ainda, conexões devem ser estabelecidas entre o material e os conceitos, princípios e propriedades matemáticas a serem ensinados através do material.

Mendes (2009) afirma ainda que para a didática da Matemática, saber matemática não é apenas aprender teoremas e definições. Nesse processo, o trabalho do professor é desenvolver atividades que possibilitem à recontextualização da Matemática, ou seja, uma transposição didática, fomento a criação de um ambiente investigador, criativo e desafiador. A didática da Matemática é um dos polos de discussões que considera a necessidade de uma abordagem



didática para a Matemática que se centre no uso de sequências didáticas, para a melhoria do ensino, levando o aluno a se comportar como investigador do próprio conhecimento.

Com base principalmente nas orientações dos documentos oficiais, fundamentado na metodologia de Resolução de Problemas de Allevato e Onuchic (2014) e na indicação de Mendes (2009) de como usar materiais concretos como uma alternativa didática para ensinar matemática, no capítulo quatro deste trabalho é proposto ao professor uma sequência de atividades para o ensino de semelhança de triângulos para o 9º ano do Ensino Fundamental, conteúdo considerado fundamental e importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico. A sequência busca conduzir o aluno a reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, estendendo o conceito de semelhança para outras figuras, o conceito de razão de semelhança e a razão entre as áreas de figuras semelhantes.

O segundo capítulo trata da fundamentação teórica apresentando definições e teoremas sobre congruência e semelhança de triângulos, de polígonos e de figuras. O professor poderá adaptá-la para que seja viabilizada a formalização do conteúdo para seus alunos ou usá-la para aprofundamento teórico sobre congruências e semelhanças.

Os polidiamantes são apresentados no capítulo três, onde eles são definidos e é realizado um breve resumo histórico e uma análise das publicações e do conhecimento acumulado até o presente momento sobre estes, buscando mostrar a versatilidade da utilização deles como peças que compõe o material didático e lúdico.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo Lima (1991), a noção de semelhança corresponde à ideia natural de ampliação e redução de uma figura, alterando seu tamanho sem modificar sua forma. Ainda segundo o autor, o conceito estudado nas escolas sobre semelhança é definido principalmente para triângulos e, cuja definição, se estende para os demais polígonos. Porém, em algumas situações em que gostaríamos de comparar figuras semelhantes, não podemos aplicar as definições encontradas nos livros, pois envolvem figuras que não são polígonos. A definição geral de semelhança de figuras é apresentada a seguir, baseada em Lima (1991). Nas demais seções particularizaremos as definições e propriedades de congruência e semelhança para triângulos e polígonos, baseadas em Barbosa (1985).

Utilizaremos como notação  $AB$  para segmento de extremidades  $A$  e  $B$ ,  $\overline{AB}$  para medida do segmento  $AB$ , o símbolo  $=$  para representar congruente e o símbolo  $\sim$  para representar semelhante.

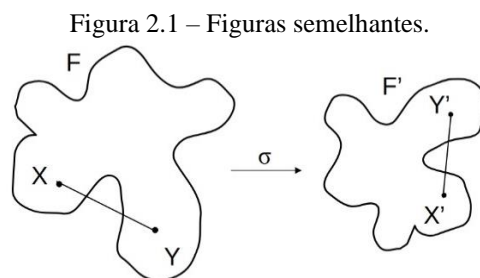
Sejam  $F$  e  $F'$  figuras no plano e  $r$  um número real positivo.

**Definição 2.1:** Diz-se que  $F$  e  $F'$  são semelhantes, com razão de semelhança  $r$ , quando existe uma correspondência biunívoca  $\sigma: F \rightarrow F'$ , entre os pontos de  $F$  e os pontos de  $F'$ , com a seguinte propriedade: se  $X, Y$  são pontos quaisquer de  $F$  e  $X' = \sigma(X), Y' = \sigma(Y)$  são seus correspondentes em  $F'$  então

$$\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}. \quad (1)$$

Os pontos  $X$  e  $X'$  são denominados **pontos homólogos** ou **pontos correspondentes**.

Podemos dizer que duas figuras  $F$  e  $F'$  são semelhantes quando existe uma **transformação de semelhança**, que preserva a forma das figuras (Figura 2.1).



Fonte: Elaborada pela autora.

A propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante  $r$ , chama-se semelhança de razão  $r$  entre  $F$  e  $F'$ .

Para toda transformação que satisfaz a igualdade (1) temos que, pontos colineares são transformados em pontos colineares, as medidas de ângulos e o paralelismo de retas são preservados. A demonstração destes resultados pode ser encontrada em Lima (1991).

Assim, a noção de semelhança corresponde a ideia de mudança de escala, pois, teremos uma ampliação quando a razão  $r$  satisfaz  $r > 1$  e uma redução quando  $0 < r < 1$ .

Temos que:

1. se  $F$  é semelhante a  $F'$  com razão  $r$  então  $F'$  é semelhante a  $F$  com razão  $\frac{1}{r}$ . De fato, da semelhança de  $F$  e  $F'$  existe uma correspondência biunívoca  $\sigma: F \rightarrow F'$ , tal que  $X' = \sigma(X)$  e  $Y' = \sigma(Y)$ , para todo  $X, Y$  com,  $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$ . Logo, existe a função inversa  $\sigma^{-1}: F' \rightarrow F$  biunívoca, tal que  $X = \sigma^{-1}(X')$  e  $Y = \sigma^{-1}(Y')$ . Ainda,

$$\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY} \Rightarrow \overline{XY} = \frac{1}{r} \cdot \overline{X'Y'}$$

Dizemos que a semelhança satisfaz a propriedade **simétrica**.

2. se  $F$  é semelhante a  $F'$  com razão  $r$  e  $F'$  é semelhante a  $F''$  com razão  $r'$  então  $F$  é semelhante a  $F''$  com razão  $r \cdot r'$ . De fato, da semelhança de  $F$  e  $F'$  existe uma correspondência biunívoca  $\sigma: F \rightarrow F'$ , tal que  $X' = \sigma(X)$  e  $Y' = \sigma(Y)$ , para todo  $X, Y$  com,  $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$ . Da semelhança de  $F'$  e  $F''$  existe uma correspondência biunívoca  $\sigma': F' \rightarrow F''$ , tal que  $X'' = \sigma'(X')$  e  $Y'' = \sigma'(Y')$ , para todo  $X', Y'$  com,  $\overline{X''Y''} = r' \cdot \overline{X'Y'}$ . Logo, existe a função composta  $\sigma \circ \sigma': F \rightarrow F''$  biunívoca, tal que  $X'' = \sigma'(\sigma(X))$  e  $Y'' = \sigma'(\sigma(Y))$ . Ainda,  $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$  e  $\overline{X''Y''} = r' \cdot \overline{X'Y'}$ . Assim,

$$\overline{X''Y''} = r' \cdot \overline{X'Y'} \Rightarrow \overline{X''Y''} = r \cdot r' \cdot \overline{XY}$$

Dizemos que a semelhança satisfaz a propriedade **transitiva**.

3. A figura  $F$  é semelhante a ela mesma, ou seja,  $\sigma: F \rightarrow F$  é uma semelhança de razão 1. Assim, a semelhança satisfaz a propriedade **reflexiva**. Uma semelhança de razão 1, chama-se isometria, pois para quaisquer pontos  $X, Y$  em  $F$ , a distância de  $X' = \sigma(X)$  a  $Y' = \sigma(Y)$  é igual a distância de  $X$  a  $Y$ .

**Definição 2.2:** Quando existe uma isometria entre as figuras  $F$  e  $F'$ , diz-se que estas são **congruentes**.

## 2.1 Congruência de Triângulos

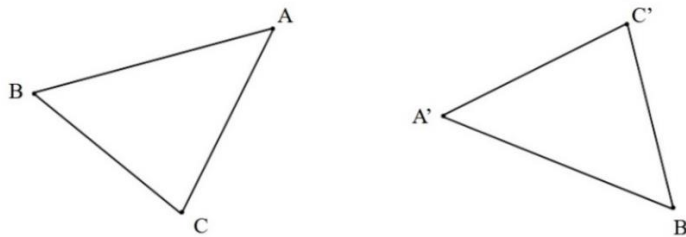
**Definição 2.1.1:** Diremos que dois segmentos  $AB$  e  $CD$  são congruentes quando  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e que dois ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são congruentes se eles têm a mesma medida.

**Definição 2.1.2:** Dois triângulos são congruentes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Podemos observar que essa definição satisfaz a definição 2.1 para  $r = 1$ .

Assim, dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no plano, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro. A Figura 2.2 mostra dois triângulos congruentes  $ABC$  e  $A'B'C'$  com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ;  $B \leftrightarrow B'$ ;  $C \leftrightarrow C'$ .

Figura 2.2 – Triângulos congruentes.



Fonte: Elaborada pela autora.

Temos então, que:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'}; \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \Leftrightarrow ABC = A'B'C'.$$

Desta forma, temos seis relações necessárias que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes.

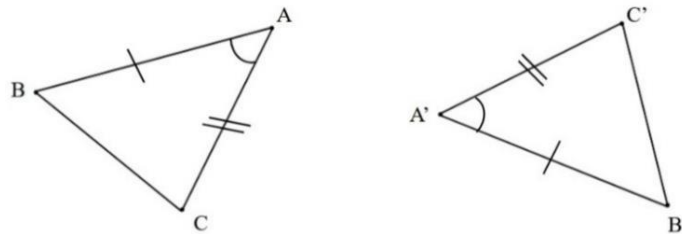
A congruência de triângulo satisfaz as propriedades **reflexiva**, onde um triângulo qualquer  $ABC$  é congruente a si mesmo, **simétrica**, se o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $A'B'C'$ , então o triângulo  $A'B'C'$  é congruente ao triângulo  $ABC$ , e a **transitiva**, se o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $A'B'C'$  e o triângulo  $A'B'C'$  é congruente ao triângulo  $A''B''C''$ , então o triângulo  $ABC$  é congruente ao triângulo  $A''B''C''$ .

Ao utilizar a definição 2.1.2 são necessárias seis hipóteses para verificar a congruência de dois triângulos. Utilizando os casos ou critérios de congruência a seguir reduzimos o número de hipóteses para três.

**Axioma 2.1.3 (1º caso de congruência - LAL):** Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente congruentes a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos tais que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$  e  $\hat{A} = \hat{A}'$  (Figura 2.3), temos que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes pelo axioma 2.1.3.

Figura 2.3 – 1º caso de congruência - LAL.



Fonte: Elaborada pela autora.

Simbolicamente,

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \end{cases} \xrightarrow{\text{LAL}} ABC = A'B'C'.$$

**Teorema 2.1.4 (2º caso de congruência – ALA):** Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

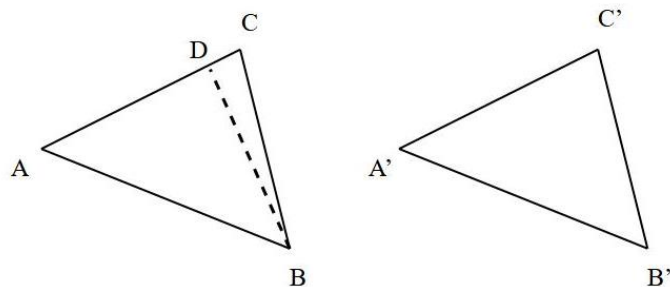
**Demonstração:**

Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos tais que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ,  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$ . Seja  $D$  um ponto da semirreta  $AC$  tal que  $\overline{AD} = \overline{A'C'}$  (Figura 2.4).

Considerando o triângulo  $ABD$  e comparando-o com o triângulo  $A'B'C'$ , como  $\overline{AD} = \overline{A'C'}$ ,  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  e  $\hat{A} = \hat{A}'$ , concluímos pelo axioma 2.1.3 que  $ABD = A'B'C'$ . Como consequência, tem-se que  $\hat{ABD} = \hat{B}'$ . Por hipótese  $\hat{B}' = \hat{ABC}$ , logo  $\hat{ABD} = \hat{ABC}$ .

Conseqüentemente as semirretas BD e BC coincidem. Assim o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABC e ABD. Como  $ABD = A'B'C'$  então,  $ABC = A'B'C'$ .

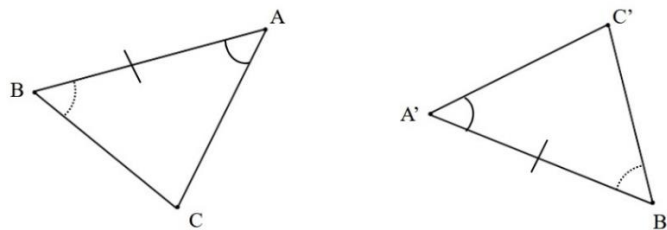
Figura 2.4 – Ponto D da semirreta AC tal que  $\overline{AD} = \overline{A'C'}$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos tais que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ,  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$  (Figura 2.5), temos que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes pelo teorema 2.1.4.

Figura 2.5 – 2º caso de congruência - ALA.



Fonte: Elaborada pela autora.

Simbolicamente,

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \xrightarrow{\text{ALA}} ABC = A'B'C'.$$

**Corolário 2.1.5 (caso de congruência – LAAo):** Se dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes, então os dois triângulos são congruentes.

**Demonstração:**

Sejam os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  tal que,  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ,  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{C} = \hat{C}'$  (Figura 2.6).

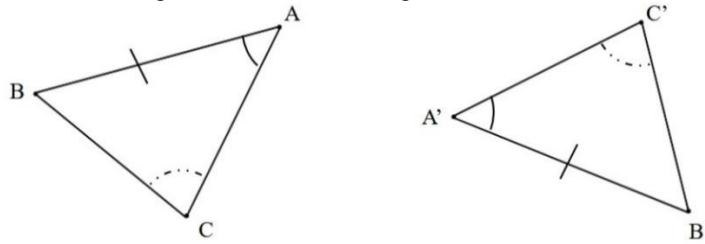
No triângulo  $ABC$ ,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ,$$

e portanto,

$$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C}. \quad (2)$$

Figura 2.6 – Caso de congruência - LAAo.



Fonte: Elaborada pela autora.

Analogamente, no triângulo  $A'B'C'$ ,

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180^\circ .$$

Assim,

$$\hat{B}' = 180^\circ - \hat{A}' - \hat{C}' . \quad (3)$$

Da hipótese,

$$\hat{A} = \hat{A}' , \quad (4)$$

$$\hat{C} = \hat{C}' . \quad (5)$$

Assim, substituindo (4) e (5) em (3),

$$\hat{B}' = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C} .$$

Comparando  $\hat{B}'$  com  $\hat{B}$  em (2), temos que:

$$\hat{B}' = \hat{B} .$$

Portanto,

$$\hat{A} = \hat{A}' ,$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \text{ e}$$

$$\hat{B} = \hat{B}' .$$

Logo, pelo Teorema 2.1.4 os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes.

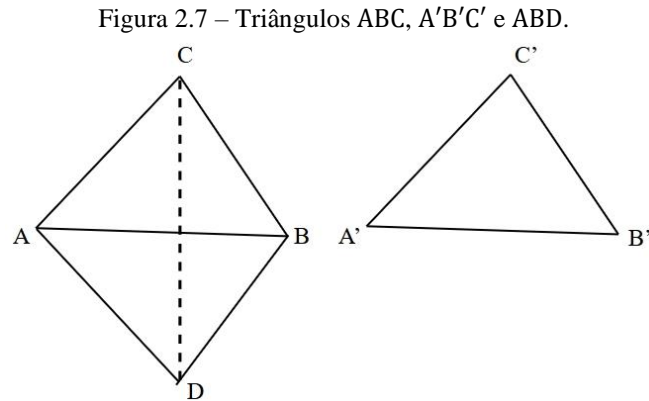
**Teorema 2.1.6 (3º caso de congruência – LLL):** Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados do outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

**Demonstração:**

Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos tais que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$  e  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ . Vamos provar que  $ABC = A'B'C'$ .

Para isto, construa, a partir da semirreta  $AB$  e no semiplano oposto ao que contém o ponto  $C$ , um ângulo igual ao ângulo  $\hat{A}'$ . No lado desse ângulo que não contém o ponto  $B$ , marque

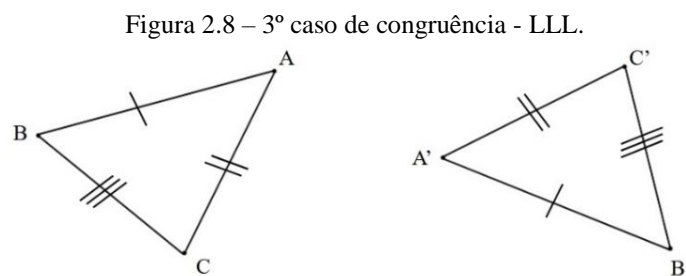
um ponto D tal que  $\overline{AD} = \overline{A'C'}$  e ligue D a B. Como  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AD} = \overline{A'C'}$  e  $\widehat{DAB} = \widehat{A'}$ , então  $\triangle ABD = \triangle A'B'C'$  (Figura 2.7), pelo axioma 2.1.3.



Fonte: Elaborada pela autora.

Vamos agora mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isto, trace CD. Como  $\overline{AD} = \overline{A'C'} = \overline{AC}$  e  $\overline{DB} = \overline{B'C'} = \overline{BC}$ , então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue-se que  $\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$  e  $\widehat{CDB} = \widehat{DCB}$ . Logo,  $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ . Portanto, pelo axioma 2.1.3,  $\triangle ABD = \triangle ABC$ . Pela propriedade transitiva,  $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ .

Seja ABC e A'B'C' dois triângulos tais que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$  e  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$  (Figura 2.8), temos que os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes pelo teorema 2.1.6.



Fonte: Elaborada pela autora.

Simbolicamente,

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{cases} \stackrel{\text{LLL}}{\implies} \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$

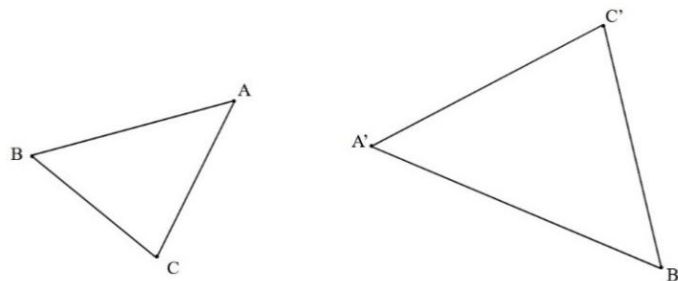


## 2.2 Semelhança de Triângulos

**Definição 2.2.1:** Dois triângulos são semelhantes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que seus ângulos correspondentes sejam congruentes e seus lados correspondentes sejam proporcionais, isto é, a razão entre as medidas dos lados correspondentes são iguais.

Assim, se  $ABC$  e  $A'B'C'$  são dois triângulos semelhantes (Figura 2.9) e  $A \leftrightarrow A'$ ;  $B \leftrightarrow B'$ ;  $C \leftrightarrow C'$  é a correspondência de vértices que estabelece a semelhança.

Figura 2.9 – Triângulos semelhantes.



Fonte: Elaborada pela autora.

Temos,

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}' \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = r \end{cases} \Leftrightarrow ABC \sim A'B'C'.$$

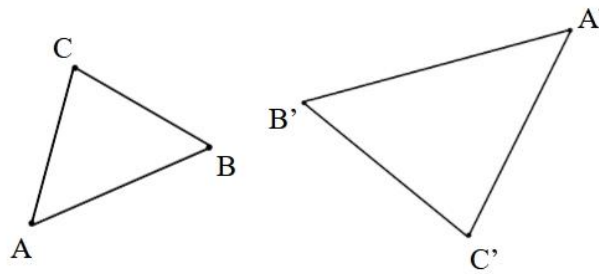
Neste caso o número  $r$ , tal que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = r$ , para  $r > 0$ , é chamado de **razão de semelhança** ou razão de proporcionalidade entre os dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  e os lados são ditos proporcionais.

Observamos que em dois triângulos congruentes essa razão de semelhança é igual a um e sua recíproca é verdadeira. Assim, dizemos que um triângulo é semelhante a ele mesmo e a semelhança de triângulo satisfaz a propriedade **reflexiva**.

A semelhança de triângulos também satisfaz a propriedade **simétrica**, isto é, se o triângulo  $ABC$  é semelhante ao triângulo  $A'B'C'$  com razão de semelhança  $r$ , então o triângulo  $A'B'C'$  é semelhante ao triângulo  $ABC$  com razão de semelhança  $\frac{1}{r}$ .

Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos tal que  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes com razão de semelhança  $r$  (Figura 2.10). Mostremos que a razão de semelhança entre os triângulos  $A'B'C'$  e  $ABC$  é  $\frac{1}{r}$ .

Figura 2.10 – Triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Observe que, sendo os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  semelhantes,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = r \Rightarrow \overline{AB} = r \cdot \overline{A'B'}. \quad (6)$$

Da equação (6),

$$\overline{A'B'} = \frac{1}{r} \cdot \overline{AB}.$$

De maneira análoga demonstra-se que,

$$\overline{A'C'} = \frac{1}{r} \cdot \overline{AC},$$

$$\overline{B'C'} = \frac{1}{r} \cdot \overline{BC}.$$

Desta forma, a razão de semelhança entre os triângulos  $A'B'C'$  e  $ABC$  é  $\frac{1}{r}$ .

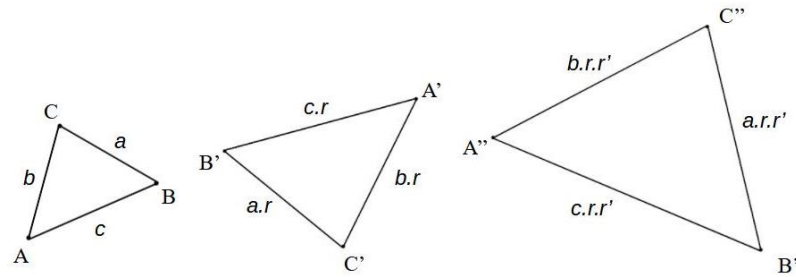
A semelhança de triângulos satisfaz a propriedade **transitiva**, se o triângulo  $ABC$  é semelhante ao triângulo  $A'B'C'$  com razão  $r$  e o triângulo  $A'B'C'$  é semelhante ao triângulo  $A''B''C''$  com razão  $r'$ , então o triângulo  $ABC$  é semelhante ao triângulo  $A''B''C''$  com razão de semelhança  $r \cdot r'$ .

Seja  $ABC$ ,  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  triângulos, tal que  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes com razão de semelhança  $r$ ,  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  são semelhantes com razão de semelhança  $r'$  (Figura 2.11). Mostremos que de fato, a razão de semelhança entre os triângulos  $ABC$  e  $A''B''C''$  é  $r \cdot r'$ .

Observe que, sendo os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  semelhantes,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = r \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot r. \quad (7)$$

Figura 2.11 – Transitividade da semelhança de triângulos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Sendo os triângulos  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  semelhantes,

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = r' \Rightarrow \overline{A''B''} = \overline{A'B'} \cdot r'. \quad (8)$$

Das equações (7) e (8),

$$\overline{A''B''} = \overline{A'B'} \cdot r' = \overline{AB} \cdot r \cdot r'.$$

De maneira análoga demonstra-se que,

$$\overline{A''C''} = \overline{AC} \cdot r \cdot r',$$

$$\overline{B''C''} = \overline{BC} \cdot r \cdot r'.$$

Desta forma, a razão de semelhança entre os triângulos  $ABC$  e  $A''B''C''$  é  $r \cdot r'$ .

Demonstraremos os teoremas 2.2.3 a 2.2.5 que estabelecem as condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, chamados de casos de semelhança de triângulos. Para isso, utilizaremos o próximo teorema.

**Teorema 2.2.2:** Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

**Demonstração:**

Seja  $ABC$  um triângulo e  $r$  uma reta paralela ao lado  $BC$  que corta os lados  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, nos pontos  $D$  e  $E$  (Figura 2.12). Vamos demonstrar que

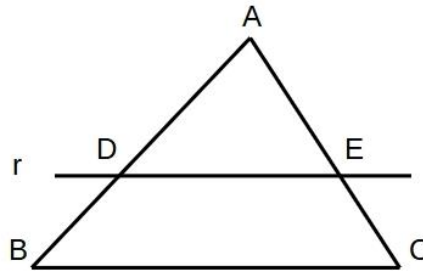
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Para isto, tome um segmento  $AP_1$  na semirreta  $AB$  de modo que as razões  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP_1}}$  e  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AP_1}}$  não sejam números inteiros. Consideremos na semirreta  $AB$  os pontos  $P_2, P_3, \dots, P_k, \dots$  tais que,

$$k \cdot \overline{AP_1} = \overline{AP_k},$$

para todo  $k \geq 2$ .

Figura 2.12 – Triângulo ABC e reta r.



Fonte: Elaborada pela autora.

Existem então dois números inteiros  $m$  e  $n$  tais que,

$D$  está entre  $P_m$  e  $P_{m+1}$  e

$B$  está entre  $P_n$  e  $P_{n+1}$ .

Tem-se, portanto,

$$m \cdot \overline{AP_1} < \overline{AD} < (m+1) \cdot \overline{AP_1} \Rightarrow \frac{m \cdot \overline{AP_1}}{\overline{AB}} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{(m+1) \cdot \overline{AP_1}}{\overline{AB}}, \quad (9)$$

$$n \cdot \overline{AP_1} < \overline{AB} < (n+1) \cdot \overline{AP_1} \Rightarrow \frac{1}{(n+1) \cdot \overline{AP_1}} < \frac{1}{\overline{AB}} < \frac{1}{n \cdot \overline{AP_1}}. \quad (10)$$

Das inequações (9) e (10),

$$\frac{m \cdot \overline{AP_1}}{\overline{AB}} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{(m+1) \cdot \overline{AP_1}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{m+1}{n}. \quad (11)$$

Tracemos pelos pontos  $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$  retas paralelas a  $BC$ . Estas retas cortam a semirreta  $AC$  em pontos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1}$ , os quais também satisfazem a

$$k \cdot \overline{AQ_1} = \overline{AQ_k},$$

para todo  $K, 2 \leq k \leq n+1$ . Além disso, o ponto  $E$  encontra-se entre  $Q_m$  e  $Q_{m+1}$  e o ponto  $C$  entre  $Q_n$  e  $Q_{n+1}$ . O mesmo raciocínio feito acima pode ser repetido aqui obtendo-se como resultado a desigualdade

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \frac{m+1}{n}. \quad (12)$$

Assim, da desigualdade (12),

$$-\left(\frac{m+1}{n}\right) < -\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < -\left(\frac{m}{n+1}\right). \quad (13)$$

Das desigualdades (11) e (13),

$$\frac{m}{n+1} - \left(\frac{m+1}{n}\right) < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \frac{m+1}{n} - \left(\frac{m}{n+1}\right). \quad (14)$$

Assim, podemos concluir da desigualdade (14) que

$$\left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}. \quad (15)$$

Observe que, como  $m \leq n$ , então

$$\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} = \frac{m+n+1}{n(n+1)} \leq \frac{2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n},$$

ou seja, as razões  $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$  e  $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$  diferem por não mais do que  $\frac{2}{n}$ . Quanto menor for o segmento  $AP_1$  tanto maior será o número  $n$  e tanto menor será o quociente  $\frac{2}{n}$ . Como o lado esquerdo da desigualdade (15) não depende de  $n$ , só podemos concluir que os quocientes  $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$  e  $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$  são iguais, como queríamos demonstrar.

**Teorema 2.2.3 (1º caso de semelhança – AA):** Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

**Demonstração:**

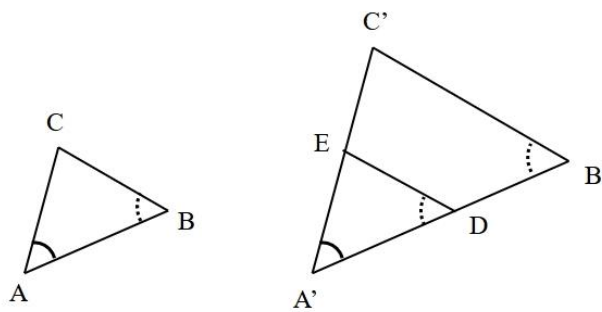
Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos tal que,  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$ .

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  e, por hipótese,  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$ , então  $\hat{C} = \hat{C}'$ .

Provemos agora a proporcionalidade dos lados.

Para isso, tome na semirreta  $A'B'$  o ponto  $D$  de modo que  $\overline{A'D} = \overline{AB}$  (Figura 2.13). Pelo ponto  $D$  trace uma reta paralela a  $B'C'$ , cortando a semirreta  $A'C'$  em um ponto  $E$  assim  $\hat{D} = \hat{B}' = \hat{B}$ . O triângulo  $A'DE$  é congruente ao triângulo  $ABC$  pelo teorema 2.1.4.

Figura 2.13 – Triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Do teorema 2.2.2 temos que

$$\frac{\overline{A'D}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'E}}{\overline{A'C'}} \quad (16)$$

Como  $\overline{A'D} = \overline{AB}$  e  $\overline{A'E} = \overline{AC}$ , então, da igualdade (16) temos que,

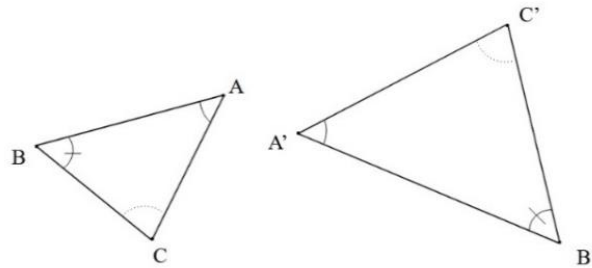
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

De maneira análoga se demonstra que  $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'}$ .

Assim,  $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{AC}}{A'C'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'}$  e, portanto, os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.

Seja ABC e A'B'C' dois triângulos tais que  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$  (Figura 2.14). Os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes pelo teorema 2.2.3.

Figura 2.14 – 1º caso de semelhança – AA.



Fonte: Elaborada pela autora.

Simbolicamente,

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \stackrel{AA}{\Rightarrow} ABC \sim A'B'C',$$

e em particular,

$$\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{AC}}{A'C'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} \text{ e } \hat{C} = \hat{C}'.$$

Observamos que em alguns livros esse caso de semelhança de triângulos é enunciado com três ângulos correspondentes congruentes, e não apenas dois. Porém, é suficiente conhecer a medida de dois ângulos correspondentes congruentes, conforme teorema 2.2.3, uma vez que a congruência do terceiro ângulo resulta da soma dos ângulos internos do triângulo ser  $180^\circ$ .

**Teorema 2.2.4 (2º caso de semelhança – LAL):** Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos correspondentes de outro triângulo e o ângulo compreendido é congruente, então os triângulos são semelhantes.

**Demonstração:**

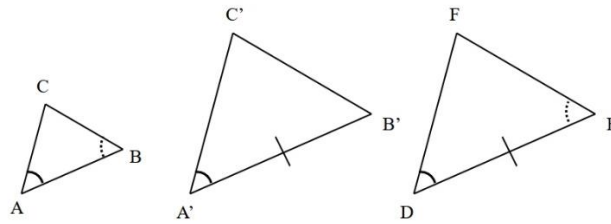
Considere os triângulos ABC e A'B'C', tal que  $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{AC}}{A'C'}$  e  $\hat{A} = \hat{A}'$ .

Construa um triângulo DEF, tal que  $\overline{DE} = \overline{A'B'}$ ,  $\hat{A} = \hat{D}$  e  $\hat{B} = \hat{E}$  (Figura 2.15).

De acordo com o teorema 2.2.3 os triângulos ABC e DEF são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}. \quad (17)$$

Figura 2.15 – Triângulos ABC, A'B'C' e DEF.



Fonte: Elaborada pela autora.

Sendo  $\overline{DE} = \overline{A'B'}$ , por construção, da igualdade (17), temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{DF}}.$$

Da hipótese, temos também que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ . Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}.$$

Então,

$$\overline{DF} = \overline{A'C'}.$$

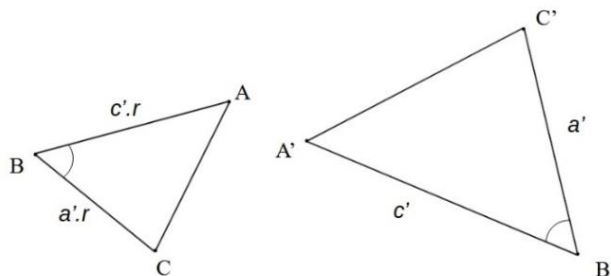
Logo,  $\overline{DE} = \overline{A'B'}$ ,  $\overline{DF} = \overline{A'C'}$  e  $\hat{D} = \hat{A} = \hat{A}'$ . Portanto, pelo axioma 2.1.3, os triângulos A'B'C' e DEF são congruentes.

Sendo ABC e DEF semelhantes, podemos concluir que ABC e A'B'C' são semelhantes, como queríamos demonstrar.

Sejam ABC e A'B'C' dois triângulos, tais que  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = r$  (Figura 2.16).

Temos que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes pelo teorema 2.2.4.

Figura 2.16 – 2º caso de semelhança – LAL.



Fonte: Elaborada pela autora.

Simbolicamente,

$$\begin{cases} \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = r \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \stackrel{\text{LAL}}{\implies} ABC \sim A'B'C',$$

e em particular,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = r, \hat{A} = \hat{A}' \text{ e } \hat{C} = \hat{C}'.$$

**Teorema 2.2.5 (3º caso de semelhança – LLL):** Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

**Demonstração:**

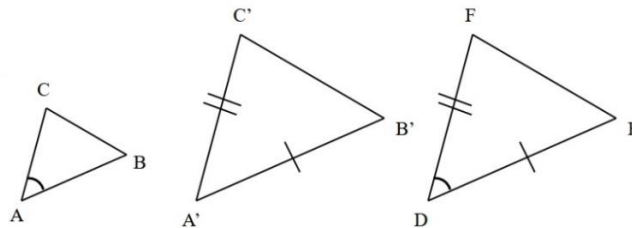
Considere os triângulos ABC e A'B'C', tal que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ .

Construa um triângulo DEF, tais que  $\hat{D} = \hat{A}$ ,  $\overline{DE} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{DF} = \overline{A'C'}$  (Figura 2.17).

Segue, então, da hipótese que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}.$$

Figura 2.17 – Triângulos ABC, A'B'C' e DEF.



Fonte: Elaborada pela autora.

Portanto, de acordo com o teorema 2.2.4, os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}.$$

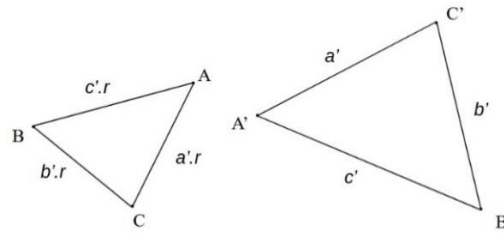
Segue da igualdade anterior e da hipótese que  $\overline{EF} = \overline{B'C'}$ . Como já tínhamos  $\overline{DE} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{DF} = \overline{A'C'}$ , então pelo teorema 2.1.6, os triângulos A'B'C' e DEF são congruentes.

Como DEF e ABC são semelhantes, podemos concluir que ABC e A'B'C' também são semelhantes.

Seja ABC e A'B'C' dois triângulos tais que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = r$  (Figura 2.18), temos que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes pelo teorema 2.2.5.



Figura 2.18 – 3º caso de semelhança – LLL.



Fonte: Elaborada pela autora.

Simbolicamente,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = r \stackrel{\text{LLL}}{\implies} ABC \sim A'B'C',$$

e em particular,

$$\hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}'.$$

### 2.3 Semelhança de Polígonos

**Definição 2.3.1:** Dois polígonos são semelhantes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que seus ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

Se  $A_1A_2\dots A_n$  e  $B_1B_2\dots B_n$  são dois polígonos semelhantes de  $n$  lados, com o vértice  $A_i$  homólogo ao vértice  $B_i$  (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ), ou seja,

$$A_1 \leftrightarrow B_1, A_2 \leftrightarrow B_2, \dots, A_{n-1} \leftrightarrow B_{n-1}, A_n \leftrightarrow B_n,$$

temos que  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1, \hat{A}_2 = \hat{B}_2, \dots, \hat{A}_{n-1} = \hat{B}_{n-1}, \hat{A}_n = \hat{B}_n$  e  $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = \dots = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{B_{n-1}B_n}} = r$ , onde  $r$  é a razão de semelhança. Se a razão de semelhança é  $r = 1$ , temos então **polígonos congruentes**.

**Proposição 2.3.2:** Se dois polígonos convexos de  $n$  lados,  $n \geq 4$  são divididos em  $n - 2$  triângulos semelhantes de mesma razão de semelhança a partir de um vértice então os polígonos são semelhantes.

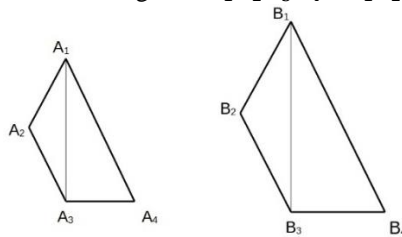
#### Demonstração:

Considere os polígonos convexos  $A_1A_2\dots A_n$  e  $B_1B_2\dots B_n$  de  $n$  lados, divididos em  $n - 2$  triângulos a partir dos vértices  $A_1$  e  $B_1$ , respectivamente, com os  $A_1A_2A_3, A_1A_3A_4, \dots, A_1A_{n-1}A_n$  semelhantes aos triângulos  $B_1B_2B_3, B_1B_3B_4, \dots, B_1B_{n-1}B_n$ , respectivamente. Mostraremos pelo Princípio de Indução Finita (LIMA, 2014) sobre  $n$  que se dois polígonos de

n lados são divididos em triângulos semelhantes de mesma razão de semelhança então esses polígonos são semelhantes, para todo  $n \geq 4$ .

Para  $n = 4$ , considere os polígonos convexos  $A_1A_2A_3A_4$  e  $B_1B_2B_3B_4$  divididos em 2 triângulos a partir dos vértices  $A_1$  e  $B_1$  (Figura 2.19) e pela hipótese os triângulos  $A_1A_2A_3$  e  $A_1A_3A_4$  são respectivamente semelhantes aos triângulos  $B_1B_2B_3$  e  $B_1B_3B_4$ .

Figura 2.19 – Polígonos  $A_1A_2A_3A_4$  e  $B_1B_2B_3B_4$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Considere que a razão de semelhança dos triângulos  $A_1A_2A_3$  e  $B_1B_2B_3$  seja  $r$ . Assim,

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{B_1B_3}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = r,$$

$$A_2\hat{A}_1A_3 = B_2\hat{B}_1B_3, \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \text{ e } A_2\hat{A}_3A_1 = B_2\hat{B}_3B_1.$$

Como os triângulos  $A_1A_3A_4$  e  $B_1B_3B_4$  são semelhantes e  $\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{B_1B_3}} = r$ , podemos escrever

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{B_1B_3}} = \frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{B_1B_4}} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{B_3B_4}} = r,$$

$$A_3\hat{A}_1A_4 = B_3\hat{B}_1B_4, A_1\hat{A}_3A_4 = B_1\hat{B}_3B_4 \text{ e } \hat{A}_4 = \hat{B}_4.$$

Desta forma,

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = \frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{B_1B_4}} = \frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{B_3B_4}} = r.$$

Temos ainda que  $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ ,  $\hat{A}_4 = \hat{B}_4$ ,

$$\hat{A}_1 = A_2\hat{A}_1A_3 + A_3\hat{A}_1A_4 = B_2\hat{B}_1B_3 + B_3\hat{B}_1B_4 = \hat{B}_1,$$

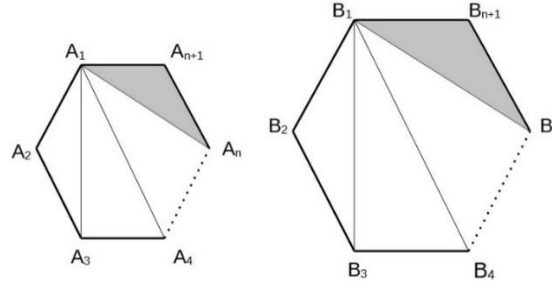
$$\hat{A}_3 = A_2\hat{A}_3A_1 + A_1\hat{A}_3A_4 = B_2\hat{B}_3B_1 + B_1\hat{B}_3B_4 = \hat{B}_3.$$

Logo, os polígonos  $A_1A_2A_3A_4$  e  $B_1B_2B_3B_4$  são semelhantes pela definição 2.3.1.

Por hipótese de indução temos que dois polígonos convexos de  $n$  lados divididos em  $n - 2$  triângulos semelhantes de mesma razão de semelhança a partir de um vértice são semelhantes entre si. Mostremos que a proposição é válida para dois polígonos convexos de  $n + 1$  lados.

Considere os polígonos convexos  $A_1A_2\dots A_{n+1}$  e  $B_1B_2\dots B_{n+1}$  de  $n + 1$  lados divididos em  $n - 1$  triângulos semelhantes a partir dos vértices  $A_1$  e  $B_1$ , respectivamente com razão de semelhança  $r$  (Figura 2.20).

Figura 2.20 – Polígonos  $A_1A_2\dots A_{n+1}$  e  $B_1B_2\dots B_{n+1}$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Da hipótese de indução os polígonos convexos  $A_1A_2\dots A_n$  e  $B_1B_2\dots B_n$  são semelhantes de razão  $r$ . Logo  $\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = \dots = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{B_{n-1}B_n}} = \frac{\overline{A_1A_n}}{\overline{B_1B_n}} = r$  e  $A_2\hat{A}_1A_n = B_2\hat{B}_1B_n$ ,  $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ , ...,  $\hat{A}_{n-1} = \hat{B}_{n-1}$ ,  $A_2\hat{A}_nA_1 = B_2\hat{B}_nB_1$ . Como os triângulos  $A_1A_nA_{n+1}$  e  $B_1B_nB_{n+1}$  são semelhantes, podemos escrever

$$\frac{\overline{A_1A_{n+1}}}{\overline{B_1B_{n+1}}} = \frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{\overline{B_nB_{n+1}}} = \frac{\overline{A_1A_n}}{\overline{B_1B_n}} = r,$$

$$A_n\hat{A}_1A_{n+1} = B_n\hat{B}_1B_{n+1}, \quad A_1\hat{A}_nA_{n+1} = B_1\hat{B}_nB_{n+1} \text{ e } \hat{A}_{n+1} = \hat{B}_{n+1}.$$

Desta forma,

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = \dots = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{B_{n-1}B_n}} = \frac{\overline{A_nA_{n+1}}}{\overline{B_nB_{n+1}}} = \frac{\overline{A_1A_{n+1}}}{\overline{B_1B_{n+1}}} = r.$$

Temos ainda que,

$$\hat{A}_1 = A_2\hat{A}_1A_n + A_n\hat{A}_1A_{n+1} = B_2\hat{B}_1B_n + B_n\hat{B}_1B_{n+1} = \hat{B}_1,$$

$$\hat{A}_2 = \hat{B}_2,$$

⋮

$$\hat{A}_{n-1} = \hat{B}_{n-1},$$

$$\hat{A}_n = A_2\hat{A}_nA_1 + A_1\hat{A}_nA_{n+1} = B_2\hat{B}_nB_1 + B_1\hat{B}_nB_{n+1} = \hat{B}_n,$$

$$\hat{A}_{n+1} = \hat{B}_{n+1}.$$

Logo, os polígonos  $A_1A_2\dots A_{n+1}$  e  $B_1B_2\dots B_{n+1}$  são semelhantes pela definição 2.3.1.

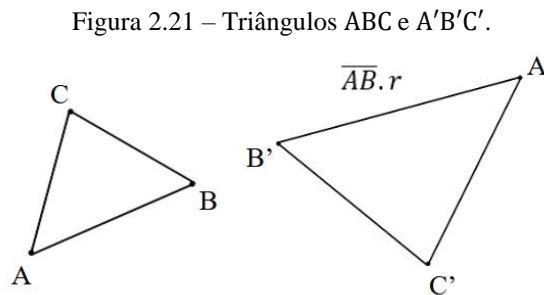
Portanto, pelo Princípio da Indução Finita se dois polígonos convexos de  $n$  lados,  $n \geq 4$  são divididos em  $n - 2$  triângulos semelhantes a partir de um vértice então os polígonos são semelhantes.

## 2.4 Razão entre as Áreas de Figuras Semelhantes

**Proposição 2.4.1:** Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos semelhantes com razão de semelhança  $r$ , então a razão entre seus perímetros é  $r$ .

**Demonstração:**

Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos semelhantes (Figura 2.21).



Fonte: Elaborada pela autora.

Assim,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = r. \quad (18)$$

Da igualdade (18), podemos escrever que

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cdot r, \quad (19)$$

$$\overline{A'C'} = \overline{AC} \cdot r, \quad (20)$$

$$\overline{B'C'} = \overline{BC} \cdot r. \quad (21)$$

O perímetro  $P_1$  do triângulo  $ABC$  é

$$P_1 = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}.$$

O perímetro  $P_2$  do triângulo  $A'B'C'$  é

$$P_2 = \overline{A'B'} + \overline{A'C'} + \overline{B'C'}.$$

Substituindo (19), (20) e (21) em  $P_2$ , temos

$$P_2 = \overline{AB} \cdot r + \overline{AC} \cdot r + \overline{BC} \cdot r = (\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}) \cdot r = P_1 \cdot r$$

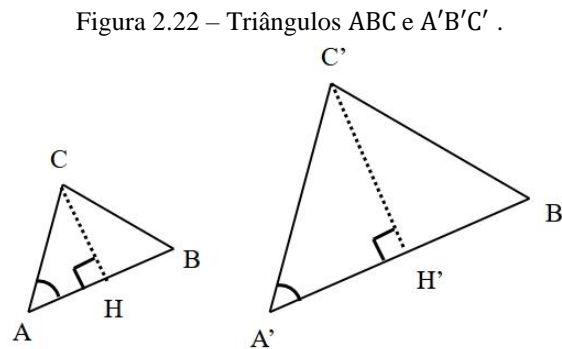
Portanto, a razão entre  $P_2$  e  $P_1$  é  $r$ .

Na proposição 2.4.2 mostraremos que a razão entre as alturas correspondentes desses triângulos também é  $r$ .

**Proposição 2.4.2:** Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos semelhantes com razão de semelhança  $r$ , então a razão entre as alturas correspondentes é  $r$ .

**Demonstração:**

Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  triângulos semelhantes, cujas correspondência de vértice seja  $A \leftrightarrow A'$ ;  $B \leftrightarrow B'$ ;  $C \leftrightarrow C'$ . Seja, ainda,  $CH$  a altura relativa ao lado  $AB$  no triângulo  $ABC$  e  $C'H'$  a altura relativa ao lado  $A'B'$  no triângulo  $A'B'C'$  (Figura 2.22).



Fonte: Elaborada pela autora.

Como  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, podemos escrever que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = r. \quad (22)$$

Da hipótese,  $\hat{A} = \hat{A}'$ . Ainda,  $\hat{A}HC = \hat{A}'H'C' = 90^\circ$ . Assim, os triângulos  $AHC$  e  $A'H'C'$  são semelhantes pelo teorema 2.2.3.

Sendo os triângulos  $AHC$  e  $A'H'C'$  semelhantes

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{C'H'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Assim, da igualdade (22),

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{C'H'}} = r.$$

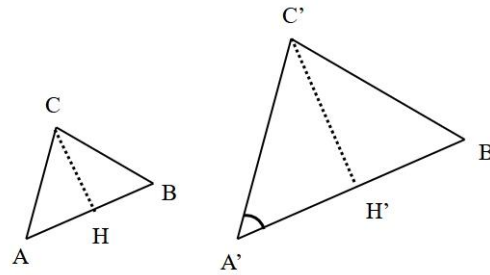
O caso em que os pés das alturas não pertencem aos lados  $AB$  e  $A'B'$  e sim às retas suporte dos mesmos, a demonstração é análoga.

**Proposição 2.4.3:** Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos semelhantes com razão de semelhança  $r$ , então a razão entre suas áreas é  $r^2$ .

**Demonstração:**

Seja  $ABC$  e  $A'B'C'$  triângulos semelhantes, cujas correspondência de vértice seja  $A \leftrightarrow A'$ ;  $B \leftrightarrow B'$ ;  $C \leftrightarrow C'$ . Seja, ainda,  $CH$  a altura relativa ao lado  $AB$  no triângulo  $ABC$  e  $C'H'$  a altura relativa ao lado  $A'B'$  no triângulo  $A'B'C'$  (Figura 2.23).

Figura 2.23 – Triângulos ABC e A'B'C'.



Fonte: Elaborada pela autora.

Considerando ABC e A'B'C' semelhantes com razão r,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = r. \quad (23)$$

Da proposição 2.4.2,

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{C'H'}} = r. \quad (24)$$

A área  $A_1$  do triângulo ABC é

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2},$$

e a área  $A_2$  do triângulo A'B'C' é

$$A_2 = \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{C'H'}}{2}.$$

Assim, a razão entre  $A_1$  e  $A_2$  é

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{\overline{A'B'} \cdot \overline{C'H'}}.$$

De (23) e (24), temos que

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{\overline{A'B'} \cdot \overline{C'H'}} = r \cdot r = r^2.$$

Essa relação é válida para duas figuras semelhantes quaisquer conforme será apresentado no teorema 2.4.6.

**Proposição 2.4.4:** Se os retângulos F e F' são semelhantes e com razão de semelhança r, com A(F) a área do retângulo F, e A(F') a área do retângulo F' então  $A(F') = A(F) \cdot r^2$ .

**Demonstração:**

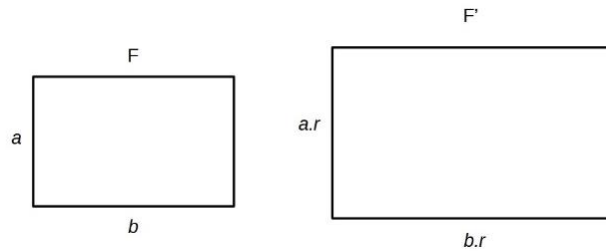
Sejam os retângulos F e F' semelhantes (Figura 2.24), com razão de semelhança r. Seja ainda A(F) a área do retângulo F e A(F') a área do retângulo F'.

Temos que:

$$A(F) = a \cdot b,$$

$$A(F') = (a \cdot r) \cdot (b \cdot r) = (a \cdot b) \cdot r^2.$$

Figura 2.24 – Retângulos Semelhantes.



Fonte: Elaborada pela autora.

Substituindo  $A(F) = a \cdot b$  em  $A(F')$ ,

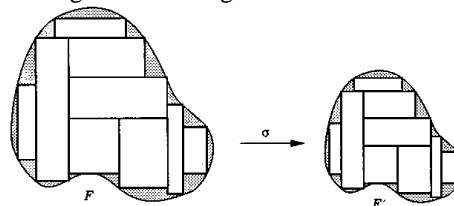
$$A(F') = A(F) \cdot r^2$$

**Definição 2.4.5:** Considere como polígono retangular a reunião de vários retângulos justapostos. Define-se a área da figura  $F$  como o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em  $F$ .

**Teorema 2.4.6:** As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança, ou seja, a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

**Demonstração:** Seja  $\sigma: F \rightarrow F'$  uma semelhança de razão  $r$  entre as figuras  $F$  e  $F'$  (Figura 2.25).

Figura 2.25 – Figuras semelhantes.



Fonte: Lima, 1991, p.49

Mostremos que a área de  $F'$  é igual a  $r^2$  vezes a área de  $F$ . Pela proposição 2.4.4, isto é verdade quando  $F$  e  $F'$  são retângulos. Assim, todo polígono retangular  $P$ , contido em  $F$ , é transformado pela semelhança  $\sigma: F \rightarrow F'$  num polígono retangular  $P'$  contido em  $F'$ , tal que a área de  $P'$  é igual a  $r^2$  vezes a área de  $P$ , sendo válida a relação também para  $\sigma(-1)$ . Dessa forma, considerando a definição 2.4.5 e sendo  $F$  e  $F'$  figuras semelhantes, a área de  $F' = (\text{área de } F) \cdot r^2$ .

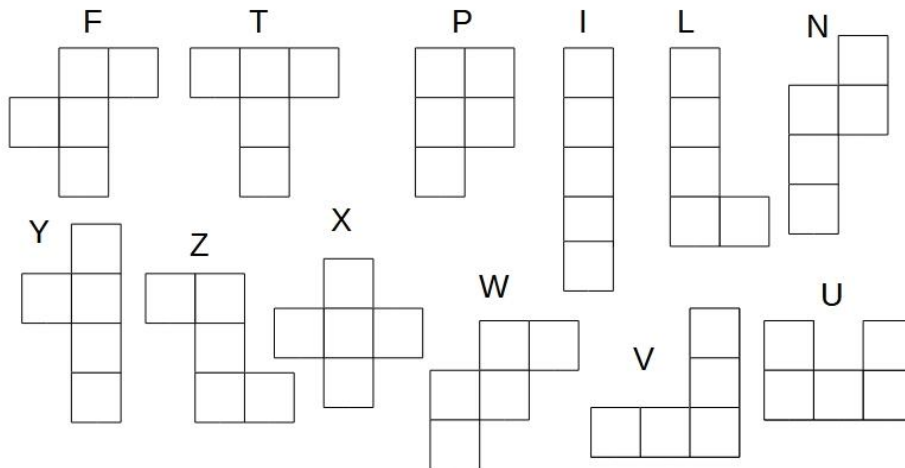
### 3. ASPECTOS HISTÓRICOS DAS POLIFORMAS

Poliformas são figuras planas diferentes entre si formadas pela união de dois ou mais polígonos congruentes, cuja interseção de dois polígonos é um lado. São consideradas as mesmas poliformas as congruentes por rotação ou reflexão. Algumas poliformas recebem nomes especiais, como é o caso das poliformas conhecidas como poliminós e os polidiamantes.

Poliminós são figuras planas diferentes entre si formadas por quadrados. Sabe-se que os poliminós foram nomeados e popularizados como passatempo matemático por Solomon W. Golomb, principalmente através dos artigos escritos para as revistas *American Mathematical Monthly* e *Scientific American*. Uma figura formada por dois quadrados é denominada dominó. A nomenclatura dos poliminós proposta por Golomb para figuras formadas por  $n$  quadrados foi  $n$ -minós (O'BEIRNE, 1961b).

De todos os poliminós possíveis, os que mais se popularizaram foram os pentaminós. Na Figura 3.1 apresentamos os doze possíveis pentaminós que são nomeadas de acordo com as letras as quais se assemelham (GARDNER, 1989). Muitos jogos lúdicos e desafios foram criados com os pentaminós e sua popularidade se deu a versatilidade e variedade que ofereciam.

Figura 3.1 – Pentaminós.



Fonte: Elaborada pela autora.

Além do quadrado, há também poliformas formadas com triângulos e hexágonos. As poliformas compostas de hexágonos regulares são denominadas como polihexes. São variadas as formas que podem ser obtidas e figuras que podem ser formadas a partir destas poliformas. Neste trabalho utilizaremos as poliformas compostas por triângulos equiláteros.



### 3.1 Polidiamantes

Polidiamantes são as poliformas compostas de triângulos equiláteros.

Ao final de 1961, T. H. O’Beirne publicou em sua coluna *Puzzle and Paradoxes*, na revista *New Scientist* uma série de desafios aos leitores onde introduzia as peças denominadas *hexiamonds*, figuras planas produzidas pela junção de seis triângulos equiláteros.

A justificativa de O’Beirne (1961c) para o uso do termo é que se dois triângulos equiláteros formavam um paralelogramo denominado *diamond* então uma figura plana composta por seis triângulos seria um *hexiamond*, seguindo o mesmo argumento utilizado para nomear os poliminós de Solomon W. Golomb. O’Beirne (1961d) argumenta ainda que *di* seria o prefixo correspondente a dois e *iamond* seria o radical da palavra. Então, a nomenclatura seria *n-iamond* para figuras formadas por *n* triângulos equiláteros.

De acordo com o dicionário Oxford (2005, p. 183, tradução nossa) *diamond* é “[...]uma figura plana que tem quatro lados de igual tamanho e pontas nas duas extremidades [...]”<sup>1</sup>, um losango (Figura 3.2).

Figura 3.2 – *Diamond*.



Fonte: Elaborada pela autora.

O nome polidiamante deriva do termo em inglês *polyiamond*, porém encontramos termos como: poliamantes, polimantes, politriângulos ou polideltas. Esses cinco termos são utilizados para se referir as poliformas compostas por triângulos equiláteros, tanto no português, como no espanhol.

Santos (2016) refere-se as figuras formadas por triângulos equiláteros como politriângulos ou poliamantes, nomeando então a figura formada por um único triângulo equilátero de monotriz ou monoamante, formada por dois triângulos equiláteros de diatriz ou diamante, a figura formada por três triângulos equiláteros de tritriz ou triamante e assim, uma figura composta por *n* triângulos equiláteros, um *n*-triz ou *n*-amante.

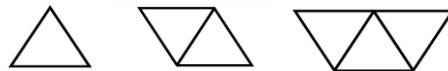
<sup>1</sup>[...] a flat shape that has four sides of equal length and points at two ends [...]

Em Boaler, Munson e Williams (2018), o termo utilizado na tradução para as figuras formadas pela tesselação de triângulos equiláteros é polidiamante. Temos então que, a figura formada por um único triângulo equilátero é denominada monodiamante, por dois, diamante, por três tridiamante e por  $n$  triângulos,  $n$ -diamante.

Nesse trabalho utilizaremos o termo polidiamantes para nos referir as poliformas formadas por triângulos equiláteros e a nomenclatura  $n$ -diamante para as figuras formadas por  $n$  triângulos equiláteros, buscando evitar assim a confusão com alguns termos já existentes no português. Incluiremos a nomenclatura monodiamante para denominar o polidiamante composto por apenas um triângulo equilátero.

Utilizando a definição dos polidiamantes é possível apenas um monodiamante, um diamante e um tridiamante (Figura 3.3). Os triângulos estão destacados nas figuras deste trabalho para uma melhor compreensão da formação de cada polidiamante utilizando triângulos equiláteros.

Figura 3.3 – Monodiamante, diamante e tridiamante, respectivamente.



Fonte: Elaborada pela autora.

São possíveis três tetradiamantes (Figura 3.4) e apenas quatro pentadiamantes, (Figura 3.5).

Figura 3.4 – Tetradiamantes.



Fonte: Elaborada pela autora.

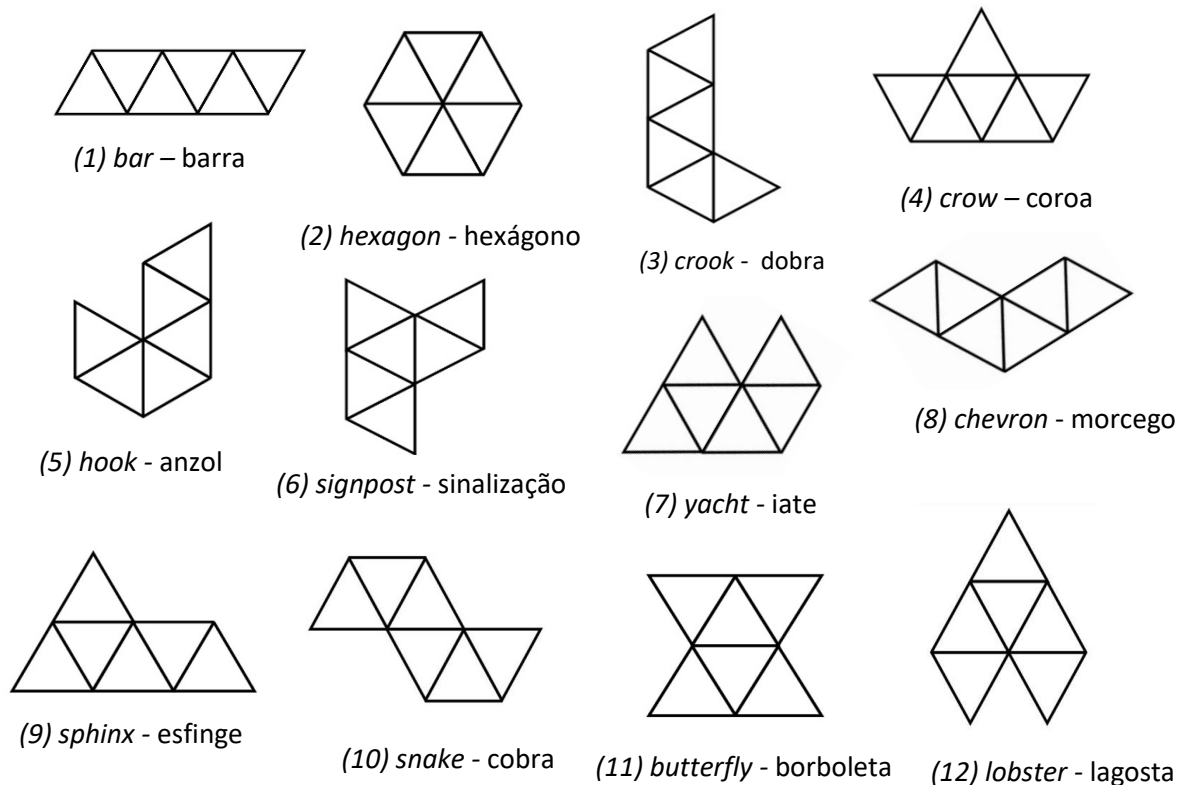
Figura 3.5 – Pentadiamantes.



Fonte: Elaborada pela autora.

O fato que mais chama atenção com relação as possibilidades de formação dos polidiamantes é que são possíveis doze hexadiamantes (Figura 3.6) assim como são possíveis doze pentaminós (O'BEIRNE, 1961b; GARDNER, 1964).

Figura 3.6 – Hexadiamantes e identificação.



Fonte: Elaborada pela autora.

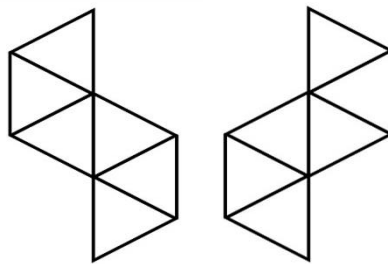
Sobre a história do surgimento dos polidiamantes, podemos citar Golomb (1954). Após discorrer sobre o problema do ladrilhamento de um tabuleiro de xadrez utilizando poliminós, sugere uma possível modificação fundamental seria utilizar a forma hexagonal ao invés da forma quadrada para o tabuleiro e os objetos que o cobriam.

Em 1961, temos uma sequência de quatro artigos publicados na revista *New Scientist* na coluna *Puzzles and Paradoxes* por T. H. O'Beirne, mencionada anteriormente. O'Beirne (1961b) traz a nomenclatura dos hexadiamantes associando as figuras a objetos e animais ao qual se “assemelhavam”. A Figura 3.6 traz essa nomenclatura em inglês e nossa sugestão de tradução. Ao longo da confecção e do manuseio das peças outras nomenclaturas podem surgir. Utilizaremos os nomes e números da Figura 3.6 para nos referenciar quando necessitarmos apontar um determinado hexadiamante.

Um dos pontos observáveis sobre os hexadiamantes é que, com exceção do hexágono (2) que possui perímetro igual a seis unidades de lado do triângulo, todas as outras figuras possuem perímetro igual a oito unidades do triângulo.

Embora o número de poliformas que podem ser formadas com seis triângulos equiláteros seja doze, O'Beirne utilizou dezenove hexadiamantes em seus desafios. Ele incluiu mais sete figuras, considerando também algumas imagens espelhadas. Como exemplo, pode ser observada a Figura 3.7.

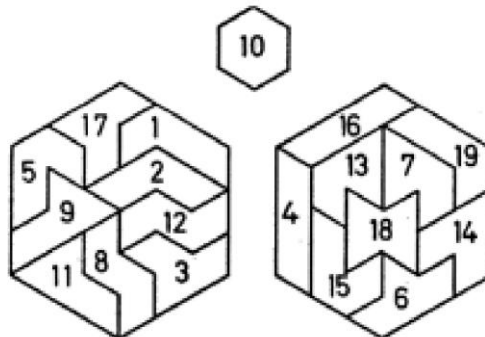
Figura 3.7 – Hexadiamante cobra (10) e (10) refletido.



Fonte: Elaborada pela autora.

Os hexadiamantes que foram considerados como uma peça e seu espelhado como outra peça, compondo assim as dezenove peças utilizadas nos desafios proposto por O'Beirne, foram: a barra (1), a dobra (3), o anzol (5), a sinalização (6), o iate (7), a esfinge (9) e a cobra (10). O'Beirne (1961c) sugeriu que as figuras tenham uma face frontal distinguível da face traseira para o manuseio das peças e manteve a sugestão dos nomes anteriores para ambas as peças.

Figura 3.8 – Montagem sugerida por O'Beirne.



Fonte: *New Scientist*, 1961b, p.316 (números da própria figura).

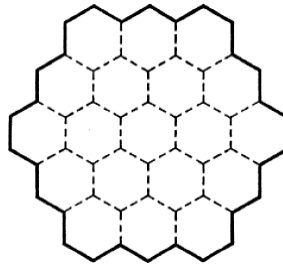
Segundo O'Beirne (1961b), há duas razões para a utilização dos dezenove hexadiamantes e não somente doze. A primeira razão é por fornecer uma forma de montagem

mais simétrica, como ilustrada na Figura 3.8 e onde podemos observar os dezenove hexadramantes utilizados.

Outra razão é por causa do jogo *Maestro*, muito popular na época. No entanto, esse jogo trazia as doze peças do pentaminó organizadas em uma caixa retangular, cujo desafio era tirar e colocar novamente as peças na caixa. O'Beirne afirma que o jogo tinha um total de trinta e duas peças, não apenas doze, pois estas doze poderiam ser movimentadas por reflexão e rotação, formando assim peças diferentes.

O'Beirne (1961a) elaborou um padrão com dezenove hexágonos (2) e propôs como primeiro desafio aos seus leitores a solução desse padrão (Figura 3.9) utilizando os dezenove hexadramantes.

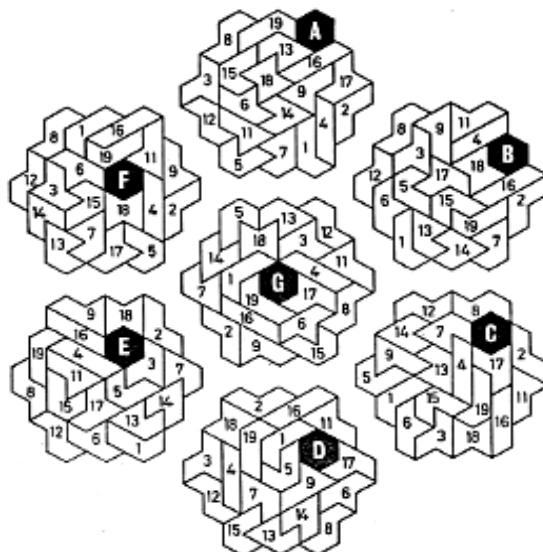
Figura 3.9 – Padrão para o primeiro desafio de O'Beirne.



Fonte: *New Scientist*, 1961a, p. 261.

A solução para o primeiro desafio proposto por O'Beirne pode ser encontrado na edição seguinte e é apresentada na Figura 3.10.

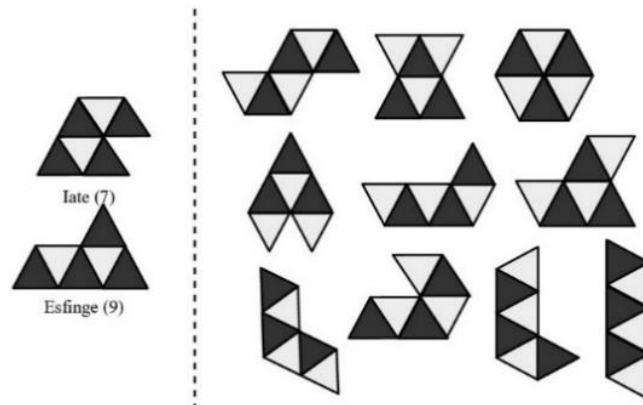
Figura 3.10 – Soluções sugeridas para o primeiro desafio por O'Beirne.



Fonte: *New Scientist*, 1961b, p. 317.

Um ponto muito importante sobre os hexadiamantes é que, com exceção do iate (7) e da esfinge (9), os demais hexadiamantes são compostos por três triângulos em uma orientação e três triângulos em orientação contrária (O'BEIRNE, 1961c). A Figura 3.11 exemplifica o fato observado sobre a orientação dos triângulos para uma melhor compreensão.

Figura 3.11 – Triângulos destacados nos hexadiamantes de acordo com sua orientação.

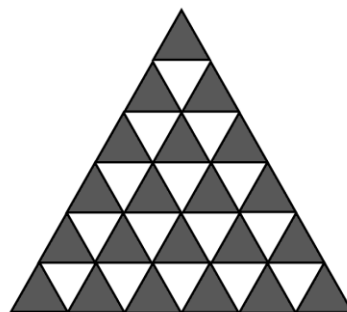


Fonte: Elaborada pela autora.

Baseado no fato que com seis triângulos equiláteros se faz um hexadiamante, O'Beirne propõe como segundo desafio ao leitor encontrar seis hexadiamantes que fazem um triângulo.

O'Beirne (1961c) observa que, sobre o segundo desafio proposto, os triângulos pequenos podem ter duas orientações e a quantidade dos dois triângulos pequenos são diferentes (Figura 3.12), havendo 15 de uma orientação (brancos) e 21 de outra (pretos). Temos aqui dois números triangulares consecutivos, pois  $1+2+3+4+5 = 15$  e  $1+2+3+4+5+6 = 21$  e cuja soma é um número quadrado, 36.

Figura 3.12 – Triângulo equilátero considerado.

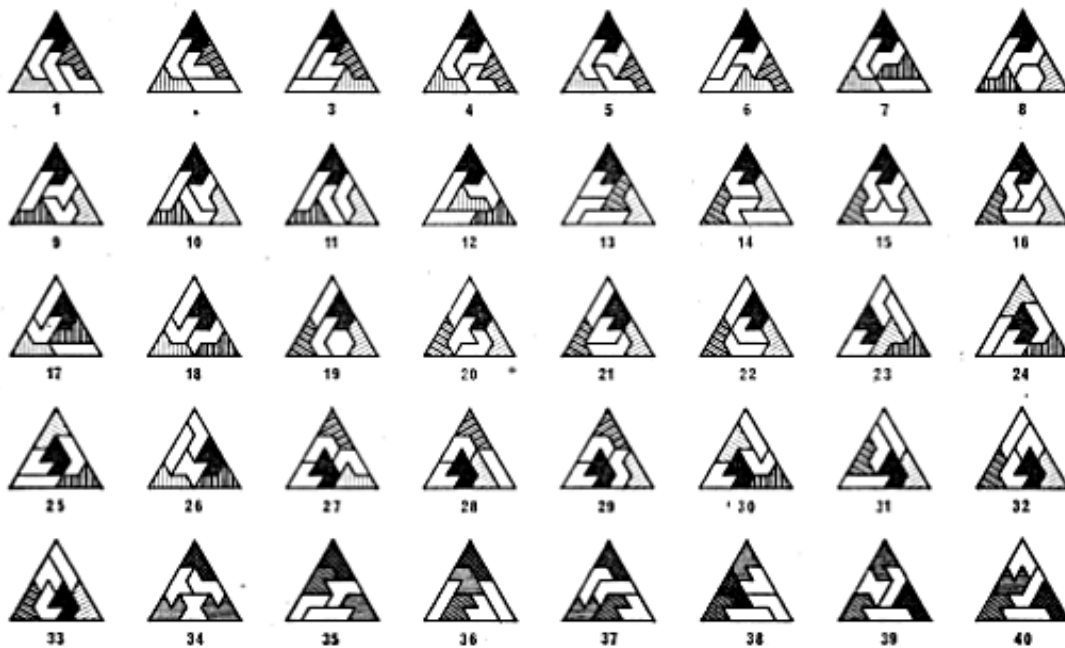


Fonte: Elaborada pela autora

Assim qualquer solução para o segundo desafio precisa utilizar três hexadiamantes cuja orientação dos triângulos pequenos seja desigual, ou seja, as figuras iate (7) ou esfinge (9).

Considerando que para os desafios O'Beirne propunha o trabalho com dezenove hexadramantes, como descrito anteriormente e não somente doze, possibilitando assim a repetição de peças e a utilização de três hexadramantes do tipo iate ou esfinge. As possíveis soluções apresentadas para o segundo problema de O'Beirne estão na Figura 3.13.

Figura 3.13 – Soluções sugeridas para o segundo desafio por O'Beirne.

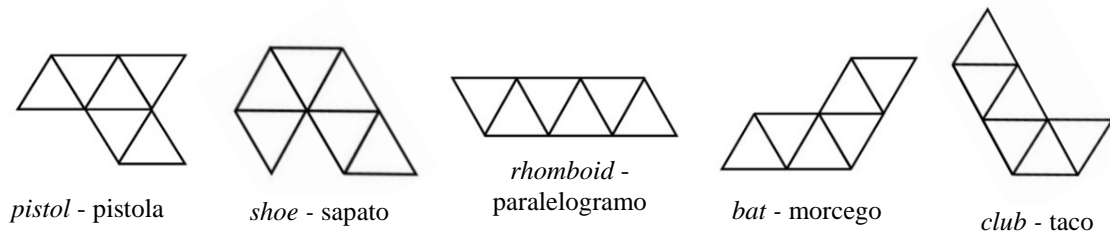


Fonte: *New Scientist*, 1961d, p. 707.

Após as publicações de T. H. O'Beirne em 1961, voltamos a ter outra publicação de expressão que se referia especificamente aos polidramantes em 1964 na coluna de Martin Gardner, *Mathematical Games*, para a revista *Scientific American*. O artigo se inicia com Gardner (1964) anunciando a publicação do livro de Golomb sobre poliminós e sobre a popularização dos pentaminós como atividade recreacional, assim o artigo é escrito sobre o que Gardner considera os primos triangulares, brevemente mencionados no livro de Golomb e em algumas revistas.

As nomenclaturas das figuras utilizadas por T.H. O'Beirne são descritas por Gardner (1964) que mantém algumas para os hexadramantes e sugere apenas cinco modificações, apresentadas na Figura 3.14, dentre elas apenas a troca da palavra *chevron* para *bat*, mas ambas significam morcego, em português.

Figura 3.14 – Nomenclatura apresentada por Gardner.



Fonte: Elaborada pela autora.

Gardner (1964) chama atenção para a orientação dos triângulos equiláteros que compõe os hexadiamantes, classificando as figuras que possuem três triângulos de cada orientação de “balanceadas” e as que possuem quatro e dois triângulos de “desbalanceadas”. Assim, o iate e a esfinge são classificados como “desbalanceados”, enquanto as demais figuras são “balanceadas” (figura 3.11).

Essa observação se torna relevante para a utilização dos hexadiamantes, pois a partir dela podemos descartar ou não as figuras ou ampliações que são ou não possíveis de serem montadas utilizando somente os hexadiamantes.

Gardner (1964) observa que o triângulo equilátero de lado medindo seis unidades do lado do triângulo pequeno (Figura 3.12), proposto como desafio por O’Beirne em 1954, é impossível de ser solucionado utilizando apenas peças escolhidas entre os doze hexadiamantes, pois é “desbalanceado”, embora sua quantidade de triângulos pequenos seja um número múltiplo de seis.

Em seu artigo, Gardner (1964) apresenta a seus leitores alguns desafios e soluções conhecidas, descartando eventualmente as figuras que já são “desbalanceadas”, pois ao analisar os triângulos pequenos que compõe a figura, já percebe um número desigual de triângulos em orientações distintas. Além de observar a orientação dos triângulos nas figuras, Gardner chama atenção para observar se a quantidade de triângulos é um número múltiplo de seis, descartando assim algumas vezes em que as peças a dividem a figura em regiões cujo número de triângulos não é múltiplo de seis.

A observação dessas informações auxilia na utilização dos hexadiamantes, inclusive o posicionamento de alguns hexadiamantes dentro das figuras a serem montadas. Deve ser considerado ainda que, o autor cita apenas o uso dos doze hexadiamantes e não dezenove, como proposto por O’Beirne. Pois, ao considerar a utilização dos dezenove hexadiamantes, as resoluções de alguns desafios se tornam possíveis.

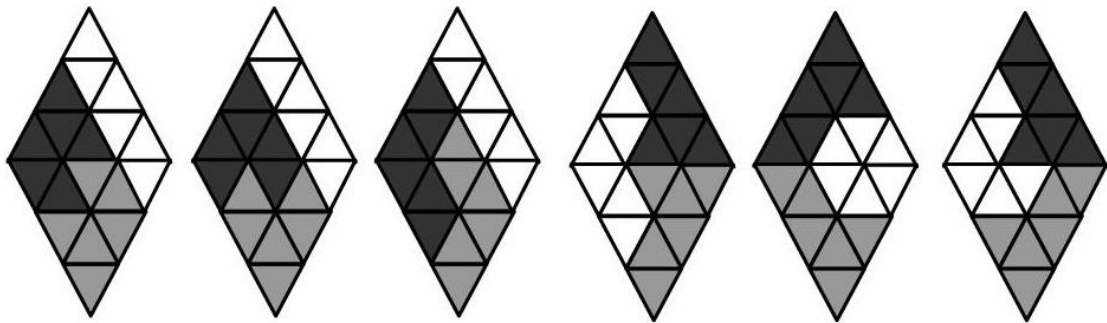


As figuras mencionadas por Gardner levam em consideração a utilização do lado do triângulo equilátero como unidade de comprimento. Assim, ao se referir a um paralelogramo 3x3, por exemplo, o autor se refere a um paralelogramo de lados três unidades de comprimento do lado do triângulo por três unidades do lado do triângulo. Ou, então, um paralelogramo 6x6 como sendo um paralelogramo com lados seis unidades de comprimento do lado do triângulo, por exemplo.

É impossível montar um paralelogramo 3x3 ou um paralelogramo 2x3 com hexadramantes distintos, segundo Gardner (1964), embora possamos verificar que a figura tenha uma quantidade de triângulos múltiplos de seis e seja “balanceada”.

Quando manipulamos os hexadramantes para formar o paralelogramo 3x3 podemos observar que das combinações possíveis, aparece a necessidade da utilização de figuras repetidas, como na Figura 3.15.

Figura 3.15 – Algumas sugestões de “montagem” para o paralelogramo 3x3.

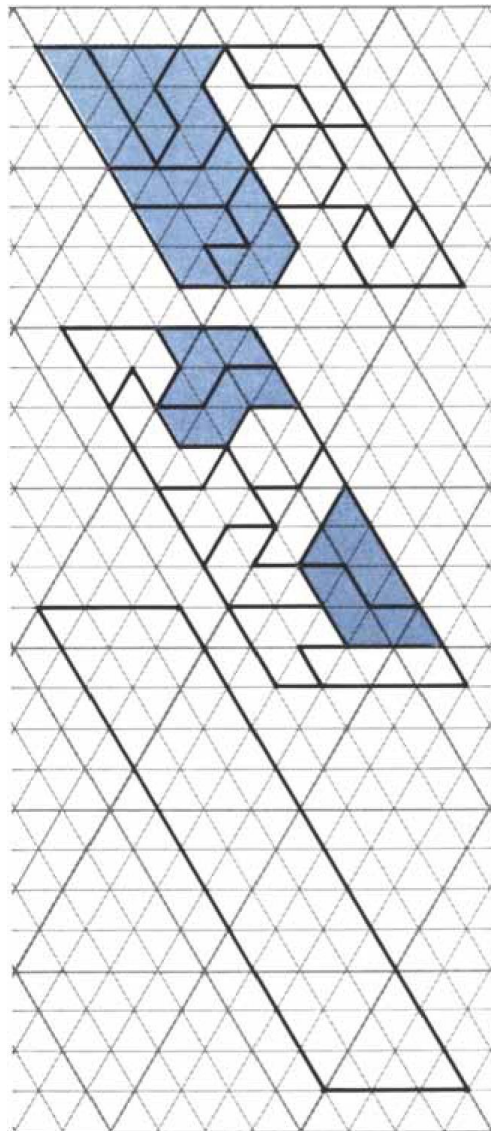


Fonte: Elaborada pela autora

Na Figura 3.16 estão três paralelogramos, que poderiam ser construídos utilizando todos os doze hexadramantes, apresentados por Gardner (1964). O paralelogramo 6x6 é uma figura possível de ser construída e uma solução é apresentada no artigo de Gardner. Utilizando as doze peças, podemos construir um paralelogramo 4x9, que possui várias soluções. A Figura 3.16 apresenta uma solução do paralelogramo 6x6 e 4x9. Outro paralelogramo que utiliza todos hexadramantes é 3x12, porém sem solução ainda. Gardner deixa o paralelogramo 3x12 como um desafio aos leitores, assim como o paralelogramo 3x11, este último utilizando apenas onze hexadramantes.

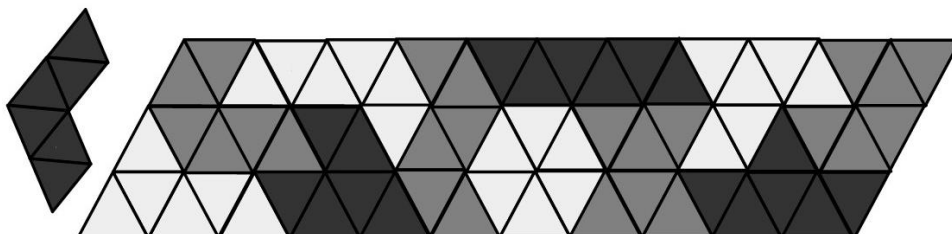
Gardner (1964) sugere que uma solução possível para o paralelogramo 3x11 é conhecida e o único hexadramante não utilizado é o morcego (8). A Figura 3.17 apresenta uma solução para esse paralelogramo.

Figura 3.16 – Paralelogramos envolvendo todos os doze hexadiamantes.



Fonte: *Scientific American*, 1964, p.126

Figura 3.17 – Uma possível solução para o paralelogramo 3x11.

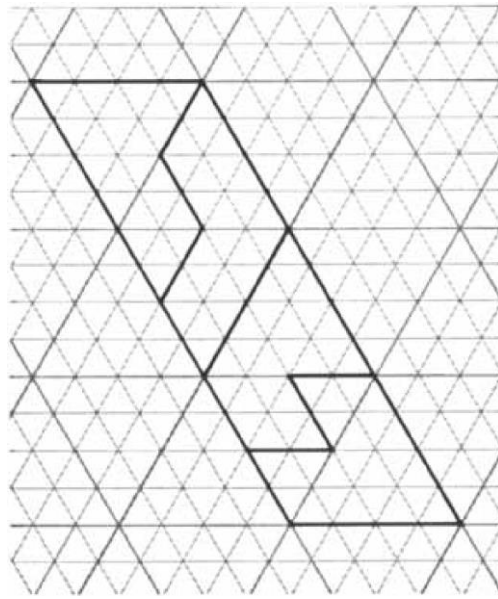


Fonte: Elaborada pela autora

Gadner (1964) discorre sobre todos os paralelogramos possíveis ou não, porém deve-se especial atenção para o único paralelogramo possível de lado duas unidades de comprimento

do lado triângulo, um paralelogramo  $2 \times 6$ , cuja solução ampliada (razão 2) está na Figura 3.18. As quatro peças utilizadas da Figura 3.18 formam dois trapézios congruentes que são facilmente utilizados para resolver o problema de duplicação dos hexadiamantes utilizando quatro peças, com exceção da coroa (4), da sinalização (6) e da lagosta (12). O objetivo do problema é duplicar o comprimento de cada uma das doze peças, obtendo assim uma figura semelhante. Uma solução para o problema da duplicação será apresentada no capítulo 4.

Figura 3.18 – O único paralelogramo possível com lado dois.

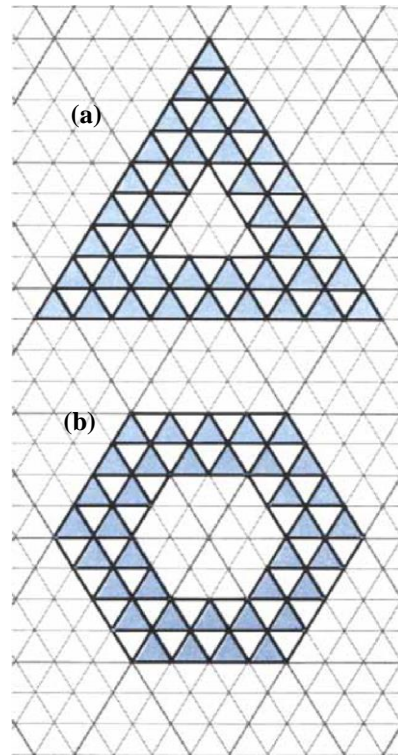


Fonte: *Scientific American*, 1964, p. 126

Para o problema de triplicação o objetivo é triplicar o comprimento de cada uma das doze peças, obtendo uma figura semelhante. É necessário utilizar nove dos doze hexadiamantes para montar a figura. Porém, o problema não pode ser resolvido para a o iate (7) e a esfinge (9), pois como observado por Gardner (1964), estas figuras se tornam “desbalanceadas” quando seu comprimento é triplicado. Segundo Gardner, triplicações para as demais figuras foram encontradas, com exceção da borboleta (11), o que Gardner acreditava ser impossível, mas ainda não havia sido provado. Esse problema foi proposto na atividade 12 do capítulo 4.

Segundo Gardner (1964) o anel triangular (Figura 3.19 (a)) é impossível de ser montado com hexadiamantes por ser “desbalanceado” e o anel hexagonal (Figura 3.19 (b)), apesar de ser “balanceado,” foi provado impossível de ser resolvido apenas com hexadiamantes.

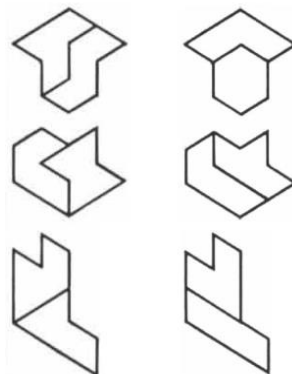
Figura 3.19 – Anel triangular (a) e anel hexagonal (b).



Fonte: *Scientific American*, 1964, p.126.

A solução para o denominado problema “três gêmeos”, cujo objetivo era agrupar três pares de hexadramantes de modo que o par tenha a mesma forma, foi apresentada por Gardner (1964) e está na Figura 3.20.

Figura 3.20 – Solução para o problema dos “três gêmeos”.

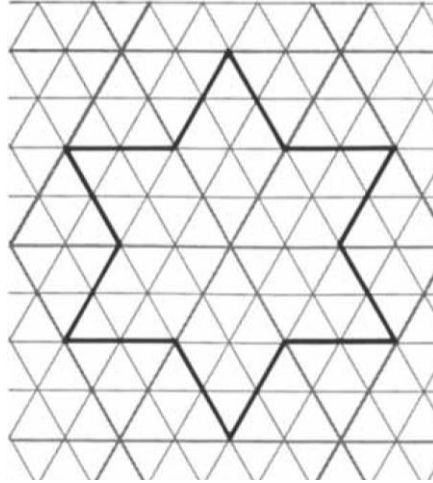


Fonte: *Scientific American*, 1964, p. 130.

Gardner (1964) propõe aos leitores o desafio de montar a estrela de seis pontas utilizando oito peças (Figura 3.21) dizendo que acreditava que era conhecida uma solução única

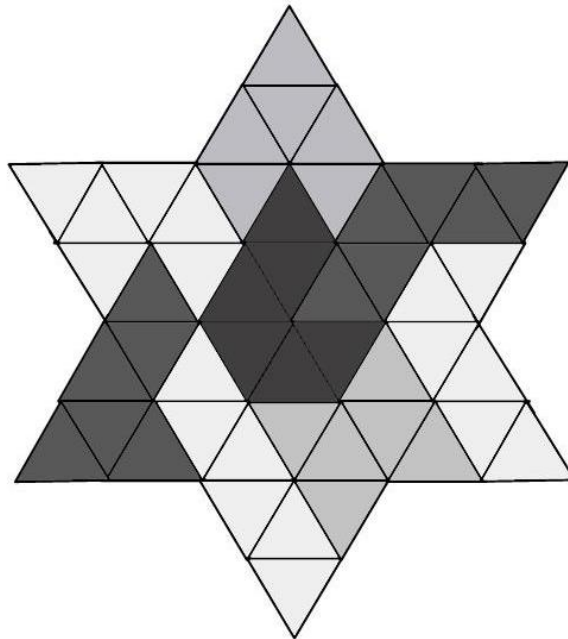
e que como pista a cobra, o hexágono e a coroa não poderiam contribuir para o perímetro da estrela. A solução conhecida é apresentada na Figura 3.22.

Figura 3.21 – Padrão da estrela de seis pontas do desafio de Gardner.



Fonte: *Scientific American*, 1964, p. 130.

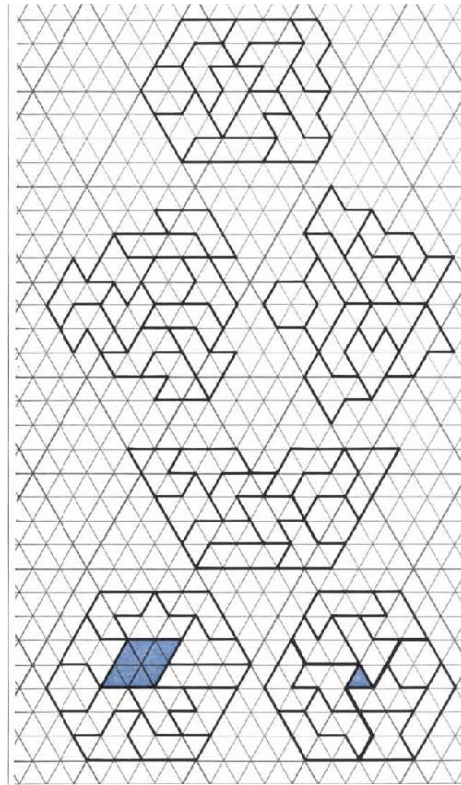
Figura 3.22 – Solução conhecida para a estrela de seis pontas.



Fonte: Elaborada pela autora.

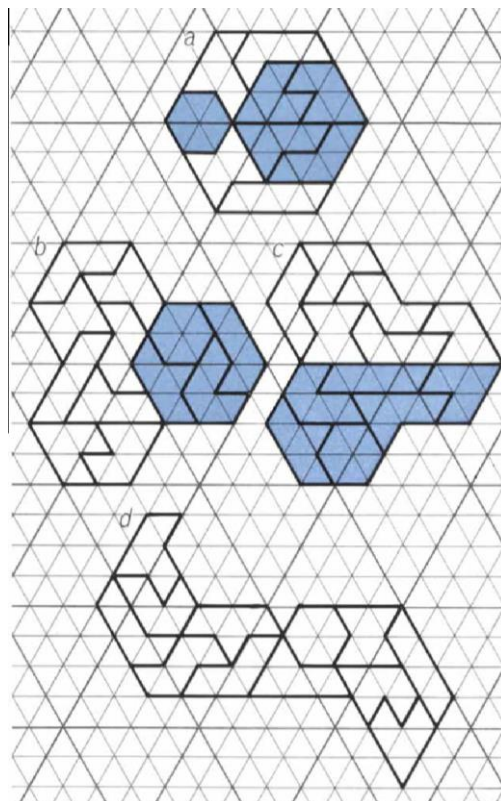
Gardner (1964) apresenta também algumas formas (Figura 3.23 e Figura 3.24) que podem ser utilizadas como peças de um passatempo.

Figura 3.23 – Padrões simétricos de hexadimantes feito por Maurice J. Povah.



Fonte: *Scientific American*, 1964, p. 128.

Figura 3.24 – Padrões de hexadimantes feito por Adrian Struyk.



Fonte: *Scientific American*, 1964, p. 127

#### 4. SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES SOBRE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nesse capítulo é proposta uma sequência de atividades para o ensino de semelhança de triângulos, fundamentada na metodologia de Resolução de Problemas de Allevato e Onuchic (2014) e com o uso dos polidiamantes, cujo objetivo é levar o aluno a reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, estendendo o conceito de semelhança para outras figuras, a compreender o conceito de razão de semelhança e a razão entre as áreas de figuras semelhantes.

A sequência de atividades está dividida em sete partes e foram pensadas para que os professores a utilizem com o 9º ano do Ensino Fundamental durante as aulas de Matemática, Práticas Experimentais ou outras aulas dos currículos, cujo objetivo é a implementação da metodologia de Resolução de Problemas matemáticos, a utilização de materiais concretos e o agrupamento dos alunos para a realização das etapas.

As atividades sugeridas e o uso dos polidiamantes oferecem grande versatilidade e podem ser adaptados e utilizados para os anos anteriores ou anos seguintes. As duas últimas partes da sequência podem ser desenvolvidas como atividades no Laboratório de Matemática da escola, assim como os desafios apresentados no capítulo 3.

Inicialmente a sequência de atividades proposta neste trabalho seria aplicada nas aulas de Práticas Experimentais, com a etapa de formalização nas aulas de Matemática, uma vez que essa autora é professora em uma escola do Programa de Ensino Integral do Estado São Paulo, do 9º ano do Ensino Fundamental, o que possibilitaria a aplicação e coleta de dados para análise ao longo do desenvolvimento do trabalho.

As intenções ao elaborar a sequência eram de que, os alunos pudessem atingir o objetivo principal de desenvolver a habilidade necessária para reconhecer as condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. A sequência de atividades foi desenvolvida como uma forma de auxiliar o estudo de semelhança de triângulos e o uso da mesma em demonstrações futuras. Planejamos então, aplicar a atividades durante as aulas de Práticas Experimentais, onde era possível trabalhar com alunos em duplas ou trios e atuar como mediadora das atividades e nas aulas de Matemática subsequentes formalizar e associar todos os aprendizados da atividade utilizando o material didático, exercícios e avaliações externas disponíveis para os próprios alunos.

Em cada seção que define as partes da sequência de atividades são sugeridas soluções pela própria autora, uma vez que após o Decreto Nº 64.862, de 13 de março de 2020 houve a suspensão das aulas de forma presencial e não foi possível a aplicação das atividades em sala

de aula. Da mesma forma, são sugeridas algumas definições conforme apresentadas no capítulo 2 para auxiliar o professor durante o preparo para as atividades.

Buscamos considerar ao longo da sequência oportunidades para que o professor que a aplique possa realizar as dez etapas de metodologia sugeridas por Allevato e Onuchic (2014) que são, a proposição do problema, a leitura individual, a leitura em conjunto, a resolução de problemas, o observar e incentivar (do professor), o registro das resoluções na lousa, a plenária, a busca do consenso (da resposta adequada), formalização do conteúdo e a proposição de novos problemas.

É necessário observar que, durante a realização das atividades em sala de aula é importante analisar as produções feitas pelos alunos, não apenas classificá-las entre certo ou errado, considerando Cury (2013) que afirma que alguns erros ocultos podem nos levar a conclusões contraditórias e que as vezes é preciso refletir sobre o que o aluno queria dizer com sua resposta.

Em muitos casos os erros são apenas considerados como um esquema cognitivo errado e uma aprendizagem deficiente, que podem ter acontecido por diversos fatores. A correção sistemática dos erros não favorece sua eliminação, segundo Pochulu (2004). Uma estratégia oferecida pelo autor, seria os próprios alunos perceberem seus erros, levando-os a descobrir quais hipóteses foram falhas e as concepções válidas, comparando-as e escolhendo a melhor estratégia. Assim os alunos deixarão suas estratégias de lado, verificando que há outras melhores, ou seja, deixarão de lado o que os levou ao erro e poderão encontrar a resposta correta.

Pochulu (2004) sugere que uma boa estratégia é a utilização de sequências didáticas que promovam a oportunidade de que os alunos avaliem seus próprios erros e métodos utilizados por ele e pelos colegas. Podemos explorar os erros para compreender o processo cognitivo do aluno e para corrigir as sequências didáticas e atividades em sala de aula, segundo o autor.

Na primeira parte da atividade o objetivo é encontrar todos os possíveis monodiamantes, diamantes, tridiamantes, tetradiamantes, pentadiamantes e hexadiamantes que são utilizados nas atividades seguintes. Assim, na segunda parte, são propostas atividades que oportunizam a familiarização com as peças dos polidiamantes encontrados na primeira parte da sequência e em seguida, atividades para retomar o conceito e condições de congruência de triângulos. Na sequência, a próxima parte, sugere atividades que busquem levar o aluno a reconhecer as condições necessárias para que dois triângulos sejam classificados como semelhantes, a razão de semelhança e a razão entre as áreas dos triângulos semelhantes, finalizando aqui o principal objetivo da sequência.



Na quarta parte, buscamos levar o aluno através das atividades a verificar se as relações aprendidas com as atividades da terceira parte são verificadas apenas para triângulos equiláteros ou são válidas para qualquer triângulo e para outros polígonos na quinta parte. Assim encerramos a sequência de atividades com a sexta e sétima partes cujo objetivo é aplicar de forma lúdica o conteúdo pretendido com as atividades anteriores, utilizando os problemas de duplicação e triplicação dos hexadramantes.

Cada parte da sequência de atividades é um “passo” a ser percorrido pelo aluno para que o professor atinja o objetivo principal, desenvolver a habilidade EF09MA12 cujo objeto de conhecimento é semelhança de triângulos (BRASIL, 2018, p.316; SÃO PAULO, 2019, p.359).

Todos os objetos de conhecimento e habilidades aqui apresentados são extraídos da BNCC (BRASIL, 2018), sendo essas as habilidades necessárias, em sua totalidade ou parcialmente, para a realização das atividades. Buscamos assim, auxiliar o professor que fará uso da sequência didática durante aplicação da atividade.

#### 4.1. Atividade - Parte 1

##### Objetivo

Encontrar todos os possíveis monodramantes, diamantes, tridramantes, tetradramantes, pentadramantes e hexadramantes.

##### Objeto de Conhecimento/Habilidade da BNCC:

- Congruência de figuras geométricas planas - (EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

**Materiais:** papel isométrico (malha de triângulos equiláteros).

**Atividade 1:** Usando a malha de triângulos equiláteros, forme figuras planas diferentes entre si. Em cada figura só é permitida a conexão de lados inteiros dos triângulos.

- Quantas figuras podem ser formadas com um triângulo?
- Quantas figuras podem ser formadas com dois triângulos?
- Quantas figuras podem ser formadas com três triângulos?
- Quantas figuras podem ser formadas com quatro triângulos?

e) Quantas figuras podem ser formadas com cinco triângulos?

f) Podem ser formadas 12 figuras planas diferentes entre si com seis triângulos. Quais são elas?

**Veja as figuras, fez todas?**

Importante! Devem ser consideradas as figuras iguais, figuras congruentes por rotação (giro) ou reflexão (espelhamento). Isso pode ser verificado sobrepondo uma na outra.

### Formalização

Na atividade 1 é sugerido a construção de algumas figuras, chamadas polidiamantes. O polidiamante é uma forma particular de poliforma. Como visto no capítulo 3, as poliformas são figuras planas diferentes entre si formadas pela união de dois ou mais polígonos congruentes, cuja interseção de dois polígonos é um lado.

Polidiamantes podem ser definidos como poliformas compostas de triângulos equiláteros. O polidiamante formado por apenas um triângulo é denominado monodiamante, por dois triângulos é denominado diamante, por três triângulos é denominado tridiamante, por quatro triângulos é denominado tetradiamante, por cinco triângulos é denominado pentadiamante e por seis triângulos hexadiamantes.

Para as questões em a), b) e c) é esperado que o aluno consiga identificar apenas um monodiamante (Figura 4.1 (a)), um diamante (Figura 4.1 (b)), e um tridiamante (Figura 4.1 (c)). Na questão em d) é esperado que ele identifique os três tetradiamantes (Figura 4.1 (d)) e na questão e), os quatro pentadiamantes (Figura 4.1 (e)). As figuras possíveis para a questão em f), os hexadiamantes, podem ser encontrados na Figura 4.1 (f).

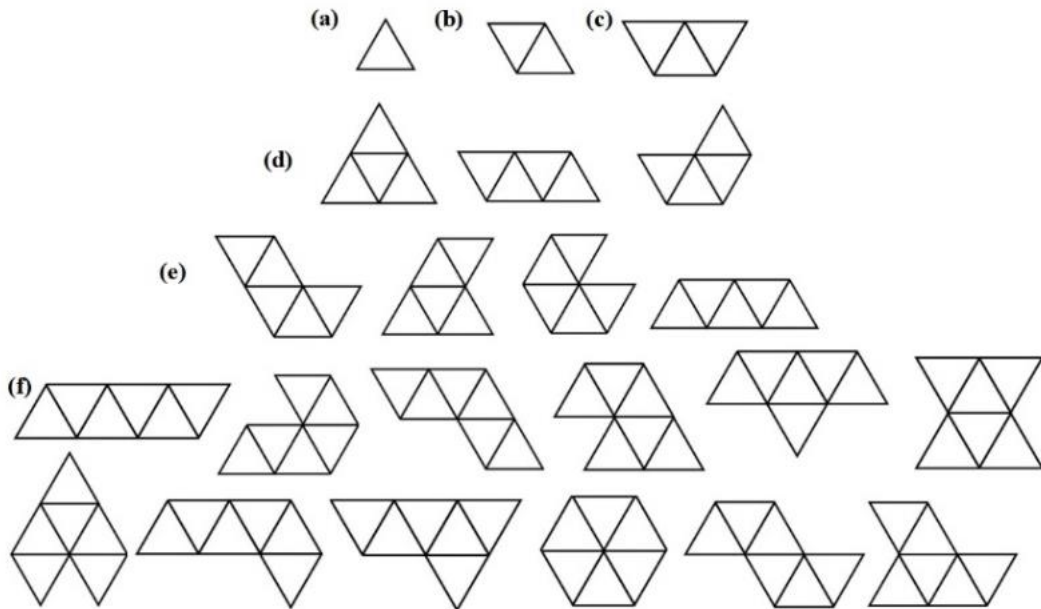
### Comentários

Durante a realização da atividade é importante observar a forma como o aluno registra as respostas, fazendo por escrito ou com figuras, pois é fundamental desenvolver a leitura e a escrita em Matemática, de modo que fique claro a maneira como expressa suas ideias no papel.

Nessa atividade o aluno pode ter dificuldades em encontrar todas as figuras sozinho, porém o trabalho em grupo possibilita a cooperação, tornando a atividade mais dinâmica e colaborativa. Assim como O'Beirne (1961b) e Gardner (1964) sugeriram nomes para cada hexadiamante, os alunos podem sugerir nomes para facilitar a comunicação entre eles, ficando a cargo do professor decidir apresentar a sugestão de nomes utilizados pelos autores ou utilizar uma nomenclatura própria entre ele e os alunos.

Enquanto procura os polidiamantes da atividade 1 o aluno pode girar a folha para verificar se as figuras obtidas são ou não as mesmas. Pode também recortá-las e tentar sobrepor para auxiliar na comparação.

Figura 4.1 – Respostas da atividade 1.



Fonte: Elaborada pela autora.

## 4.2 Atividades - Parte 2

### Objetivo

Familiarização com as peças dos polidiamantes (dos monodiamantes aos hexadiamantes) encontradas nas atividades e retomar o conceito e condições de congruência de triângulos.

### Objeto de Conhecimento/Habilidades da BNCC

- Congruência de triângulos;
- Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação - (EF08MA18)  
Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica;
- Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos - (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição

de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ ;

- Simetria de reflexão - (EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria;
- Congruência de figuras geométricas planas - (EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

**Materiais:** peças dos políamantes da atividade da primeira parte confeccionadas em papel cartão, E.V.A ou papel sulfite.

Considere como **peças** as figuras obtidas na Atividade 1, em papel cartão, E.V.A. ou papel sulfite.

Para as Atividades 2 e 3 considere o lado do triângulo equilátero, utilizado na composição de cada peça da Atividade 1, como unidade de comprimento (uc) e a sua área como unidade de área (ua).

**Atividade 2:** Utilize as peças e:

- monte um triângulo equilátero de lado 3 uc;
- monte um triângulo equilátero de lado 4 uc;
- monte um triângulo equilátero de lado 5 uc;
- monte um triângulo equilátero de lado 6 uc;
- monte um triângulo equilátero de lado 7 uc.

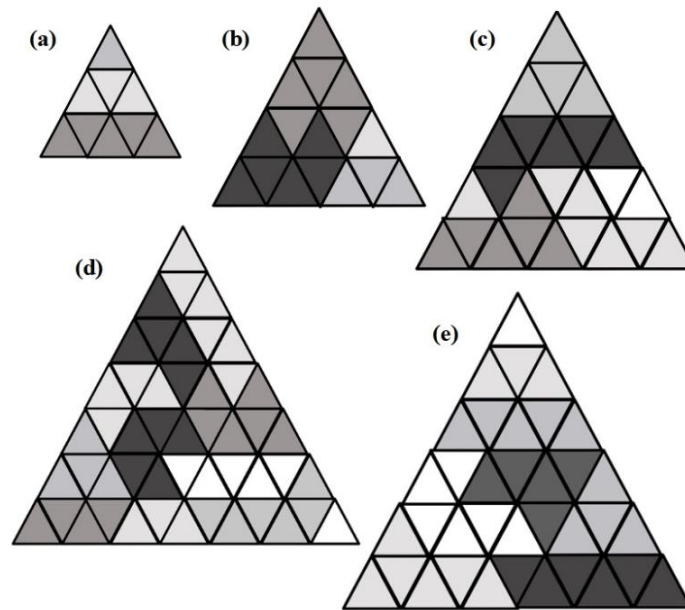
**Atividade 3:** Utilizando as peças monte dois triângulos equiláteros de lado 3 uc.

- Compare os dois triângulos.
- Cite três características que são iguais nos dois triângulos.

### Formalização

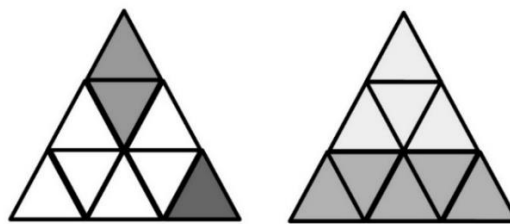
Uma possível resposta para cada item da atividade 2 encontra-se na Figura 4.2 e para os dois triângulos da atividade 3 na Figura 4.3.

Figura 4.2 – Algumas possíveis respostas para a atividade 2.



Fonte: Elaborada pela autora.

Figura 4.3 – Uma possível resposta para a atividade 3.



Fonte: Elaborada pela autora.

Na questão a) da atividade 3 espera-se que os alunos comparem os triângulos dizendo, por exemplo, se um é maior que o outro ou são de mesmo tamanho, ou ainda que os triângulos são congruentes. Na questão b), as respostas esperadas são: medida dos lados, altura, área e ângulos.

Espera-se que com essas perguntas que o aluno observe o que é variável ou invariável nos triângulos para que depois possa (re)estabelecer as condições necessárias para classificar dois triângulos como congruentes. Na parte sugerida por Allevato e Onuchic (2014) como sendo a formalização, se faz necessário definir as condições de congruência para dois triângulos, por exemplo, conforme definição 2.1.2 onde se afirma que dois triângulos são congruentes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes, adaptada para o 9º ano.

### **Comentários**

De acordo com o capítulo 3 não é possível construir triângulos utilizando somente hexadramantes, pois triângulos são figuras “desbalanceadas”. Dessa forma, na atividade 2 se faz necessário possibilitar a utilização de todas as peças dos polidramantes da atividade 1.

A atividade 3 proporciona ao aluno um modo diferente de trabalhar com os elementos do triângulo, pois os elementos não possuem medidas. O aluno conhece a medida dos ângulos internos do triângulo equilátero, porém precisa relacionar que ao montar triângulos distintos esses valores podem não se alterar. Ele pode relacionar a unidade de comprimento (uc) e a unidade de área (ua) dos triângulos construídos considerando apenas o triângulo equilátero da atividade 1, o que não é usual, pois está habituado a encontrar tais medidas quando tem números expressos nas imagens. Busca-se então que o aluno se concentre em outras informações, como a congruência dos ângulos e a correspondência entre os lados do triângulo.

Quanto a confecção dos polidramantes em papel cartão, E.V.A. ou papel sulfite para as atividades, não é necessário a distinção das faces de cada uma das peças. Porém é recomendável que os triângulos que os compõe estejam destacados, pois auxilia na realização das atividades. Também é recomendável que os alunos tenham um papel isométrico para desenhar a delimitação das figuras a serem construídas, auxiliando na visualização das peças que podem ou não ser utilizadas.

### **4.3 Atividades - Parte 3**

#### **Objetivo**

Reconhecer as condições necessárias para que dois triângulos sejam classificados como semelhantes, a razão de semelhança e a razão entre as áreas dos triângulos semelhantes.

#### **Objeto de Conhecimento/Habilidade da BNCC**

- Semelhança de triângulos - (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes;
- Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação - (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica;
- Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas - (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de

ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

Observamos que nas atividades será utilizada a malha de triângulos equiláteros.

**Materiais:** peças dos polidiamantes da segunda parte.

Para as Atividades 4 e 5, vamos chamar o triângulo equilátero de lado 1 uc de **triângulo unidade**.

**Atividade 4:** Utilizando as peças, monte um triângulo equilátero de lado 3 uc e um triângulo equilátero de lado 6 uc.

- a) É possível sobrepor o triângulo unidade no triângulo de lado 3 uc? Eles são congruentes?
- b) Cite uma característica que é igual nos dois triângulos.
- c) Qual é a razão entre as medidas dos lados do triângulo 3 uc e o do triângulo unidade?
- d) É possível sobrepor o triângulo unidade no triângulo de lado 6 uc? Eles são congruentes?
- e) Cite uma característica que é igual nos dois triângulos.
- f) Qual é a razão entre as medidas dos lados do triângulo 6 uc e do triângulo unidade?
- g) Qual é a área do triângulo de lado 3 uc?
- h) Qual é a razão entre as áreas do triângulo de lado 3 uc e do triângulo unidade?
- i) Qual é área do triângulo de lado 6 uc?
- j) Qual é a razão entre as áreas do triângulo de lado 6 uc e do triângulo unidade?

**Atividade 5:** Mantenha o triângulo de lado 6 uc (triângulo maior) da Atividade 4 e monte um triângulo equilátero de lado 2 uc (triângulo menor).

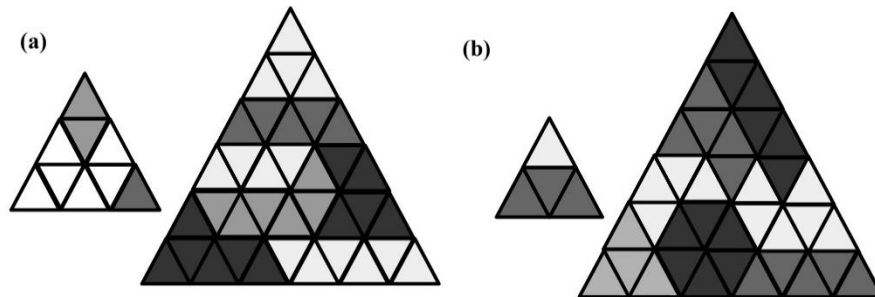
- a) É possível sobrepor um triângulo no outro de forma a coincidirem? Eles são congruentes?
- b) Quantos triângulos menores foram usados para fazer o triângulo maior?
- c) Qual é a razão entre as medidas dos lados do triângulo maior e o do triângulo menor?
- d) Qual é a razão entre as áreas do triângulo maior e do triângulo menor?

**Atividade 6:** O que podemos concluir com relação as respostas da Atividade 4 nos itens c) e h), f) e j) e da Atividade 5? Justifique sua resposta.

### Formalização

A Figura 4.4 traz sugestões de soluções para os triângulos solicitados das atividades 4 (Figura 4.4 (a)) e 5 (Figura 4.4 (b)). Como se pode observar é necessário que os dois triângulos em cada atividade permaneçam com todas as peças utilizadas para montá-los, ou seja, não é possível utilizar a mesma peça nos dois triângulos.

Figura 4.4 – Uma possível resposta para a atividade 4 (a) e a atividade 5 (b).



Fonte: Elaborada pela autora.

Abaixo, segue algumas respostas esperadas para cada questão da atividade 4, 5 e 6.

Atividade 4:

a) É possível sobrepor o triângulo unidade no triângulo 3 uc? Eles são congruentes?

*R: Não, pois eles não são congruentes.*

b) Cite uma característica que é igual nos dois triângulos.

*R: Os ângulos.*

c) Qual é a razão entre as medidas dos lados do triângulo 3 uc e o do triângulo unidade?

*R: A razão é 3.*

d) É possível sobrepor o triângulo unidade no triângulo de lado 6 uc? Eles são congruentes?

*R: Não, pois eles não são congruentes.*

e) Cite uma característica que é igual nos dois triângulos.

*R: Os ângulos.*

f) Qual é a razão entre as medidas dos lados do triângulo 6 uc e o do triângulo unidade?

*R: A razão é 6.*

Essas questões permitem levar o aluno a compreender que dois triângulos são semelhantes quando for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que seus ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais, assim conforme definição 2.2.1. É possível explorar através da questão c), por



exemplo, que o quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de semelhança.

Continuação da Atividade 4:

g) Qual é a área do triângulo de lado 3 uc?

*R: 9 ua.*

h) Qual é a razão entre as áreas do triângulo de lado 3 uc e do triângulo unidade?

*R: A razão é 9.*

i) Qual é área do triângulo de lado 6 uc?

*R: 36 ua.*

j) Qual é a razão entre as áreas do triângulo de lado 6 uc e do triângulo unidade?

*R: A razão é 36.*

Atividade 5:

a) É possível sobrepor um triângulo no outro? Eles são congruentes?

*R: Não, pois eles não são congruentes.*

b) Quantos triângulos menores foram usados para fazer o triângulo maior?

*R: 9 triângulos menores.*

c) Qual é a razão entre as medidas dos lados do triângulo maior e o do triângulo menor?

*R: A razão é 3.*

d) Qual é a razão entre as áreas do triângulo maior e do triângulo menor?

*R: A razão é 9.*

Atividade 6: O que podemos concluir com relação as respostas da Atividade 4 nos itens c) e h), f) e j) e da Atividade 5?

*R: A razão entre as áreas dos triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre os triângulos.*

Busca-se com as questões acima fomentar a discussão acerca do que foi demonstrado na proposição 2.4.3 e no teorema 2.4.6, onde temos que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes ou de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

### Comentários

O aluno a princípio não conhece o conceito de semelhança de triângulos e a relação entre suas áreas. O objetivo das atividades é justamente que eles construam esses conceitos e compreendam as condições necessárias para que eles ocorram. Portanto, é importante lembrar

que o papel do professor é atuar como mediador (ALLEVATO e ONUCHIC, 2014), fazendo as perguntas necessárias e auxiliando os estudantes na busca das informações e construções.

#### 4.4 Atividades - Parte 4

##### Objetivo

Verificar se as relações da atividade anterior são válidas para qualquer triângulo.

##### Objeto de Conhecimento/Habilidade da BNCC

- todas as habilidades já mencionadas na Parte 3.

**Materiais:** papel cartão ou cartolina, régua e tesoura.

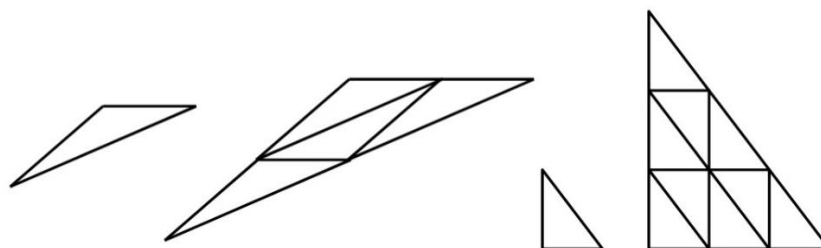
Na Atividade 4 trabalhamos com triângulos equiláteros. Vamos verificar o que ocorre ao substituímos o triângulo equilátero por um triângulo qualquer.

**Atividade 7:** Faça um triângulo qualquer e, em seguida, mais algumas cópias deste triângulo e responda novamente as questões da Atividade 4.

##### Formalização

Na atividade 7, uma possível resposta é a de que a relação entre razão de semelhança e área do triângulo independe do formato dos triângulos menores utilizados para montar o maior. É interessante instigar o aluno a observar que a quantidade de triângulos menores necessárias para montar o triângulo maior é sempre a mesma. Por exemplo, se o aluno optar por montar um triângulo de lado 2 uc, serão necessários quatro triângulos menores, para um triângulo de lado 3 uc, serão necessários nove triângulos menores (Figura 4.5).

Figura 4.5 – Uma possível resposta para as figuras da atividade 7.



Fonte: Elaborada pela autora.

## Comentários

Busca-se com essa atividade mostrar ao aluno que as propriedades observadas nas atividades anteriores independem do formato do triângulo. Essa atividade pode ser considerada como um “ir além”, assim como sugere Allevato e Onuchic (2014) na décima etapa de organização das atividades em sala de aula e que pode ser utilizada depois da formalização do conteúdo pretendido até a atividade 6.

Ao iniciar a atividade o aluno pode pensar que a propriedade entre a razão de semelhança e a área do triângulo não se manterá ou que ao unir os triângulos menores, será formado outro triângulo que não é semelhante ao primeiro. Ou ainda, não saber ao certo quantas cópias dos triângulos menores, feito por ele, serão necessárias. Porém, a atividade tem caráter experimental e investigativo, assim é fundamental o papel mediador que assumirá o professor, sem oferecer respostas prontas e deixar o aluno levantar, experimentar e testar hipóteses.

## 4.5 Atividades - Parte 5

### Objetivo

Verificar se as relações e condições de semelhanças são válidas para qualquer polígono.

### Objeto de Conhecimento/Habilidade da BNCC:

- Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas - (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

**Materiais:** peças dos polidiamantes da segunda parte.

Vamos verificar qual é a relação entre as áreas de outros polígonos semelhantes, de modo similar ao que foi proposto para o triângulo. A relação será a mesma?

**Atividade 8:** Separe a peça formada por três triângulos equiláteros. Ela é um trapézio isósceles de lado 1 uc e bases 1 uc e 2 uc. Vamos chamar esse trapézio de **trapézio unidade**.

a) Sem utilizar o trapézio unidade, monte um trapézio de lado 3 uc e bases 3 uc e 6 uc.

b) É possível sobrepor um trapézio no outro? Eles são congruentes?

- c) Qual é a razão entre a medida dos lados do trapézio maior e o do trapézio unidade?  
 d) Qual é a razão entre as áreas do trapézio maior e do trapézio unidade?  
 e) Os dois trapézios podem ser classificados como semelhantes? Justifique sua resposta.

**Atividade 9:** Considere o triângulo equilátero de lado 1 uc como o **triângulo unidade**.

Separe a peça formada por seis triângulos unidade da Atividade 1 f), o hexágono regular de lado 1 uc. Vamos chamar esse hexágono de **hexágono unidade**.

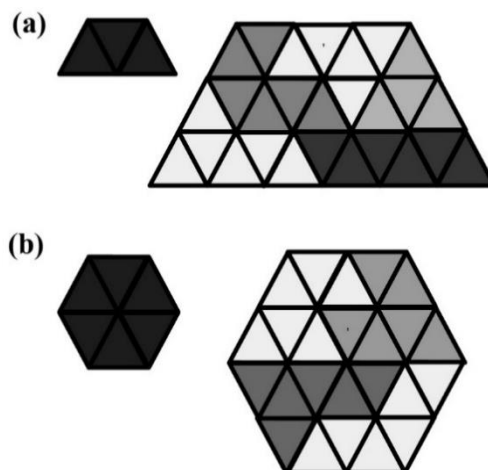
- a) Sem utilizar o hexágono unidade, monte um hexágono de lado 2uc.  
 b) É possível sobrepor um hexágono no outro? Eles são congruentes?  
 c) Qual é a razão entre as medidas dos lados do hexágono maior e do hexágono unidade?  
 d) Qual é a razão entre as áreas do hexágono maior e do hexágono unidade?  
 e) Os dois hexágonos podem ser classificados como semelhantes? Justifique sua resposta.

**Atividade 10:** Qual a definição de polígonos semelhantes?

### Formalização

A Figura 4.6 traz sugestões de soluções para o trapézio da questão 8 a) (Figura 4.6 (a)) e o hexágono da atividade 9 a) (Figura 4.6 (b)).

Figura 4.6 – Uma possível resposta para as figuras da atividade 8a (a) e a atividade 9a (b).



Fonte: Elaborada pela autora.

A seguir, segue possíveis respostas para cada questão da atividade 8 e 9.

Atividade 8:

b) É possível sobrepor um trapézio no outro? Eles são congruentes?

*R: Não, pois eles não são congruentes.*

c) Qual é a razão entre as medidas dos lados do trapézio maior e o do trapézio unidade?

*R: A razão é 3 para os quatro lados do trapézio.*

d) Qual é a razão entre as áreas do trapézio maior e do trapézio unidade?

*R: A razão é 9.*

e) Os dois trapézios podem ser classificados como semelhantes?

*R: Sim, pois os ângulos em vértices correspondentes são congruentes e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes é sempre a mesma.*

Atividade 9

b) É possível sobrepor um hexágono no outro? Eles são congruentes?

*R: Não, pois eles não são congruentes.*

c) Qual é a razão entre as medidas dos lados do hexágono maior e o do hexágono unidade?

*R: A razão é 2.*

d) Qual é a razão entre as áreas do hexágono maior e do hexágono unidade?

*R: A razão é 4.*

e) Os dois hexágonos podem ser classificados como semelhantes?

*R: Sim, pois os ângulos e vértices correspondentes são congruentes e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes é sempre a mesma.*

Atividade 10: Qual a definição de polígonos semelhantes?

*R: Dois polígonos são semelhantes quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que seus ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.*

Com essas atividades busca-se explorar o conceito de semelhança de polígonos, pois os polidiamantes permitem explorar o conceito a partir do triângulo e estendê-lo para outros polígonos.

#### 4.6 Atividades - Parte 6

##### Objetivo

Aplicar de forma lúdica o conteúdo relativo as atividades anteriores.

### Objeto de Conhecimento/Habilidade da BNCC

- Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas - (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

**Materiais:** peças dos polidiamantes da segunda parte.

**Atividade 11:** Usar apenas os 12 hexadiamantes para duplicar os comprimentos dos lados de cada uma das 12 peças, uma de cada vez.

Quais são as características das figuras duplicadas obtidas comparando com os hexadiamantes correspondentes? Justifique sua resposta.

### Formalização

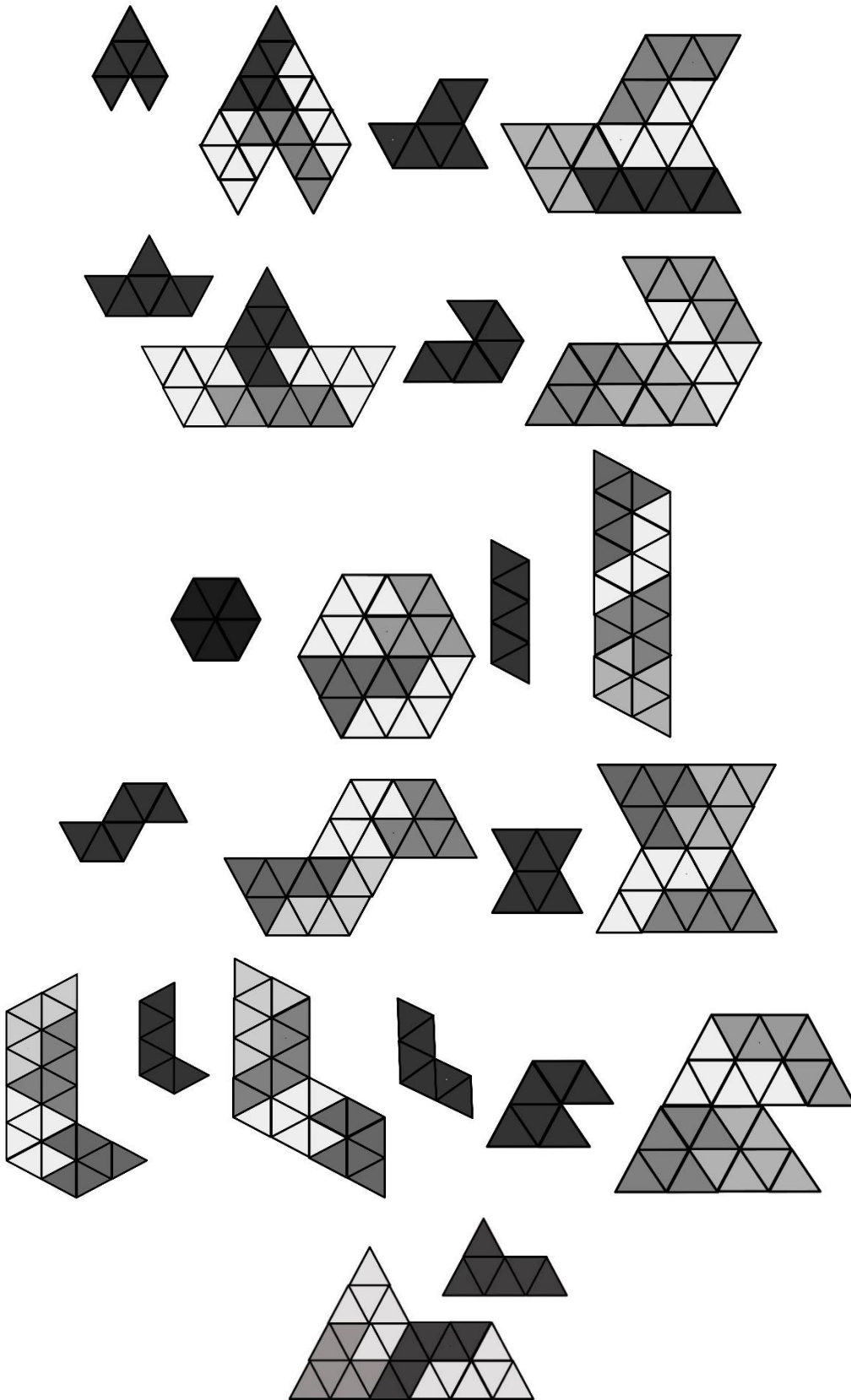
Temos nessa atividade o problema de duplicação onde o objetivo é, utilizando somente os doze hexadiamantes, duplicar o comprimento de cada uma das doze peças, obtendo assim uma figura semelhante a escolhida. O problema foi mencionado por Gardner (1964) e a solução é possível para todos os hexadiamantes. Uma solução possível para cada hexadiamante está na Figura 4.7.

Através dessa atividade é possível observar que qualquer peça do hexadiamante é composta por seis triângulos menores, assim ao duplicar a medida do lado, a quantidade de triângulos menores utilizados para montar uma figura com razão de semelhança dois é:  $2^2 \cdot 6 = 4 \cdot 6 = 24$  triângulos menores. Para compor uma figura com 24 triângulos menores, são necessários 4 hexadiamantes, pois  $24:6 = 4$ . Logo, o aluno utilizará sempre 4 peças para montar cada um dos hexadiamantes “duplicados”.

### Comentários

Essa atividade pode ser utilizada independente do conhecimento do aluno sobre semelhança de triângulos ou sobre razão de semelhança, porém é interessante que ele compreenda os conceitos de forma lúdica e concreta. A atividade pode ser explorada com outras poliformas, como os poliminós ou os polihexes.

Figura 4.7 – Uma possível resposta para as duplicações da atividade 11.



Fonte: Elaborada pela autora.

## 4.7 Atividades - Parte 7

### Objetivo

Aplicar de forma lúdica o conteúdo relativo as atividades anteriores.

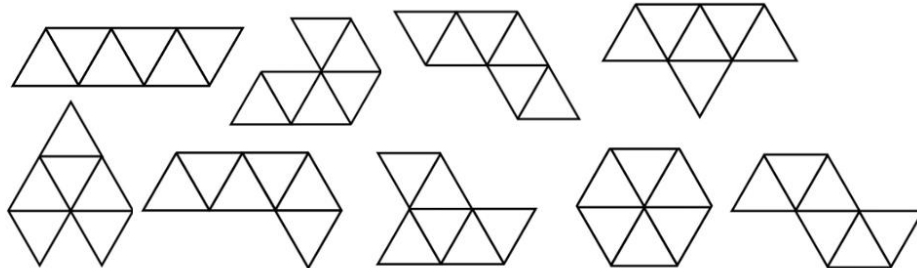
### Objeto de Conhecimento/Habilidade da BNCC

- Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas - (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

**Materiais:** peças dos polidiamantes da segunda parte.

**Atividade 12:** Usar apenas as 12 peças dos hexadiamantes para triplicar os comprimentos dos lados de cada uma das 9 peças ilustradas abaixo.

Quais são as características das figuras triplicadas obtidas comparando com os hexadiamantes correspondentes? Justifique sua resposta.



### Atenção!

Existem duas peças que não são possíveis triplicar os comprimentos e uma peça cuja triplicação ainda não possui solução conhecida.

### Formalização

Como já mencionado no capítulo 3, no problema de triplicação o objetivo é triplicar o comprimento de cada uma das doze peças, obtendo assim uma figura semelhante a escolhida, utilizando os hexadiamantes. Porém, como afirmou Gardner (1964), o problema não pode ser resolvido para a o iate (7) e a esfinge (9). É necessário observar que estas figuras se tornam



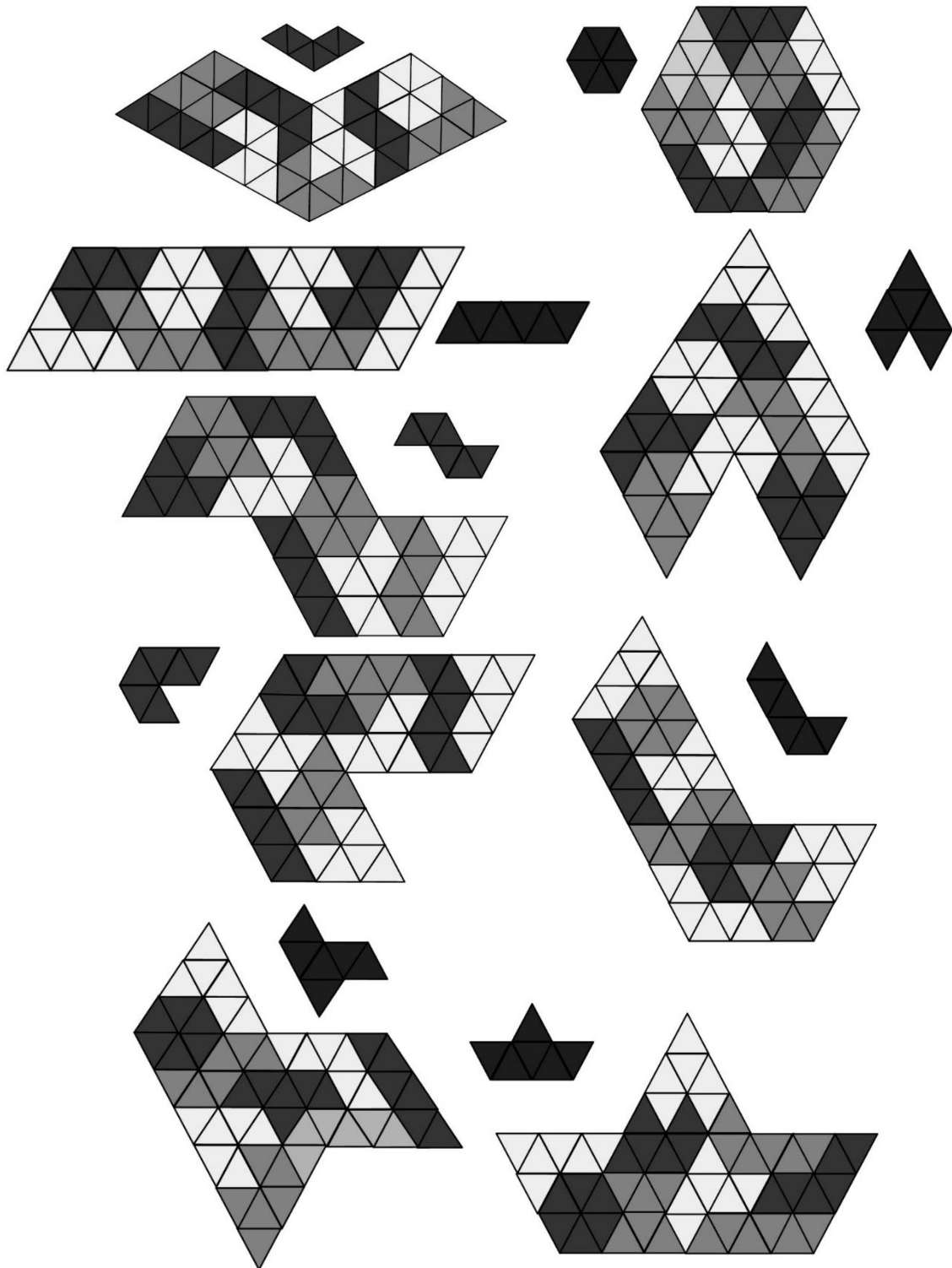
“desbalanceadas” quando seu comprimento é triplicado. E ainda segundo Gardner, não havia sido encontrado uma “triplicação” da borboleta (11). Algumas possibilidades de resolução para os hexadiamantes que podem ser triplicados estão na Figura 4.8.

Através dessa atividade é possível observar que, assim como na atividade anterior, temos que qualquer peça do hexadiamante é composta por seis triângulos menores, assim ao triplicar a medida do lado, a quantidade de triângulos menores utilizados para montar uma figura com razão de semelhança três é:  $3^2 \cdot 6 = 9 \cdot 6 = 54$  triângulos menores. Para compor uma figura com 54 triângulos menores, são necessários 9 hexadiamantes, pois  $54:6 = 9$ . Logo, o aluno utilizará sempre 9 peças para montar cada um dos hexadiamantes “triplicados”.

**Comentários:**

A “triplicação” dos hexadiamantes é um problema desafiador exigindo tempo para sua realização. Utilizar um papel isométrico e desenhar a figura com lados de comprimento triplicados pode ser uma melhor estratégia para colaborar na resolução da atividade.

Figura 4.8 – Uma possível resposta para as triplicações da atividade 12.



Fonte: Elaborada pela autora.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho apresenta uma proposta de sequência de atividades para as aulas de Matemática ou outras aulas (Práticas Experimentais, Orientação de Estudos, Disciplina Eletiva, etc.) que visam a implementação da metodologia de Resolução de Problemas e a utilização de materiais concretos, em particular os polidiamantes, para a construção do conceito de semelhança de triângulos, razão entre as áreas de figuras semelhantes e semelhança de outros polígonos.

Com a suspensão das atividades presenciais devido ao Decreto nº 64.862 e a impossibilidade da aplicação das atividades de forma remota, a sequência se formalizou em uma proposta com comentários para que o professor que a aplique possa conduzir cada atividade de modo a utilizar as dez etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2014).

Buscamos com esse trabalho, oportunizar uma sequência de atividades que possibilita ao professor a criação desse momento de construção de conhecimento, de questionamentos e discussões. Baseados na sugestão de Cury (2013) para uso dos erros, que afirma que a ideia de que esse se constitui como um conhecimento, construído de alguma forma, mesmo que não seja aplicável naquele momento, se faz necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas e levem o estudante a um questionamento sobre as suas respostas.

As atividades partem das hipóteses e respostas produzidas pelos alunos e busca auxiliá-los a construir o conhecimento pretendido sob a mediação do professor, para depois aplicar os conhecimentos adquiridos ao longo dos problemas de duplicação e triplicação dos hexadramantes.

Com as atividades os alunos podem associar o conteúdo às relações e características observadas, trabalhando diretamente com os polidramantes e com o uso da metodologia de Resolução de Problemas (ALLEVATO e ONUCHIC, 2014). Usualmente os alunos estão habituados a trabalhar com a malha quadriculada, incluindo os poliminós. Os polidramantes propiciam trabalhar com malha e formas triangulares, explorando a criatividade do aluno.

Sobre a utilização da Resolução de Problemas para o ensino da Matemática como proposto neste trabalho, concordamos com Lorenzato (2010, p.81) que,

“A descoberta pode não ser o caminho mais curto ou rápido para o ensino, mas é o mais eficiente para a aprendizagem. É interessante notar que a descoberta possibilita a reconstrução do conhecimento, quando necessário, porque valoriza a compreensão.”

Ainda, segundo Allevato e Onuchic (2014), quando a resolução de problema é considerada como metodologia de ensino, esta faz da compreensão seu o foco central e objetivo.

Esperamos que esse trabalho possa contribuir integral ou parcialmente com atividades que possam ser desenvolvidas durante as aulas oportunizando o aprendizado através da metodologia de Resolução de Problemas. Assim, como esperamos que os polidiamantes sejam objeto de curiosidade para aqueles que tenha contato com esse trabalho, pois são um campo fértil e ainda pouco explorado.

A análise das respostas produzidas pelos alunos ao longo das atividades da sequência continua sendo objeto de interesse de estudo para a autora. Como futuros objetos de estudos, também estão as resoluções dos problemas de triplicação do hexadiamante borboleta e do paralelogramo  $3 \times 12$ , sugeridos por Gardner (1964).

## REFERÊNCIAS

- ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 17-52
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM 1985.
- BOALER, J.; MUNSON J.; WILLIAMS C. **Mentalidades Matemáticas na Sala de Aula: Ensino Fundamental**. Porto Alegre: Penso, 2018.
- BRASIL, Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular, BNCC**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: < [http://basenacionalcomum.mec.gov.br /images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518-versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf) > Acesso em: 01 de set. de 2020.
- CARROLL, L. **Alice no País das Maravilhas**. 2ª ed. São Paulo: São Paulo, 2000.
- CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
- DICIONÁRIO **Oxford Student's Dictionary of English**. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- GARDNER, M. On polyiamonds: shapes that are made out of equilateral triangles. **Scientific American**. Nova Iorque: Scientific American, Inc. v. 211, nº 6, 1964. p. 124-130.
- GARDNER, M. **Mathematical Magic Show**. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1989.
- GOLOMB, S. W. Checker Boards and Polyminoes. **The American Mathematical Monthly**. Oxfordshire: Taylor & Francis, Ltd. v. 61, nº 10, 1954. p. 675-682.
- LIMA, E. L. **Números e funções reais**. SBM, 2014 (Coleção PROFMAT).
- LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria. Comprimento, Área, Volume e Semelhança**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3ª ed. Ver.- Campinas, SP: Autores Associados, 2010.
- MENDES, I. A. **Matemática e investigações em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. 2ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- O'BEIRNE, T. H.43: Pell's equation in two popular problems. **New Scientist**. Londres: New Scientist. v. 12, nº 258, 1961a. p. 260-261.
- O'BEIRNE, T. H. 44: Pentominoes and Hexiamonds. **New Scientist**. Londres: New Scientist. v. 12, nº 259, 1961b. p. 316-317.

O'BEIRNE, T. H. 45: Some Hexiamond solutions: and an introduction to a set of 25 remarkable points. **New Scientist**. Londres: New Scientist. v. 12, nº 260, 1961c. p. 379-380.

O'BEIRNE, T. H. 50: Thirty-six triangles make six hexiamonds make one triangle. **New Scientist**. Londres: New Scientist. v. 12, nº 265, 1961d. p. 706-707.

POCHULU, M. D. Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. **Revista Ibero-Americana de Educación**, v. 35, n.4, 2004. Disponível em: < <https://rieoei.org/historico/deloslectores/849Pochulu.pdf> > Acesso em: 01 de set. de 2020.

SANTOS, N. L. **Poliminós e seu Curioso Universo**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Disponível em: <[https://www.sbm.org.br/wpcontent/uploads/2017/07/Simposio\\_ Nordeste \\_Oiliminos-e-seu-curioso-universo.pdf](https://www.sbm.org.br/wpcontent/uploads/2017/07/Simposio_Nordeste_Oiliminos-e-seu-curioso-universo.pdf)> Acesso em: 25 jul. 2020.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**. São Paulo: SEE-SP. v.1, 2019. Disponível em: <[https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculo paulista/wp-content/uploads/sites/7/2019/09/curriculo-paulista-26-07.pdf](https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculo_paulista/wp-content/uploads/sites/7/2019/09/curriculo-paulista-26-07.pdf) > Acesso em: 01 de set. de 2020.

SÃO PAULO (Estado), **Decreto nº 64.862, de 13 de março de 2020**. Disponível em: <<https://www.al.sp.gov.br/repositorio/legislacao/decreto/2020/decreto-64862-13.03.2020.htm> l> Acesso em: 13 de mar. de 2021.

**ANEXO A - POLIDIAMANTES PARA IMPRESSÃO**