UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS - UFGD
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - FACET

NAIARA FELIX TOLENTINO DE SOUZA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NO ENSINO MÉDIO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

DOURADOS - MS
FEVEREIRO - 2021

NAIARA FELIX TOLENTINO DE SOUZA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NO ENSINO MÉDIO

ORIENTADORA: PROFA. DRA. LAÍS CORRÊA

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

DOURADOS - MS

FEVEREIRO - 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

S729a Souza, Naiara Felix Tolentino De
APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NO ENSINO MÉDIO [recurso eletrônico] / Naiara Felix Tolentino De Souza. -- 2021.
Arquivo em formato pdf.

Orientadora: Laís Corrêa.
Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2021.
Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:
https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio

1. Ensino Médio.. 2. Método dos Mínimos Quadrados.. 3. Foguetes de ar comprimido.. I. Corrêa, Laís. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADA, para a dissertação intitulada: **"APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS NO ENSINO MÉDIO ",** de autoria de **Naiara Felix Tolentino de Souza**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Laís Corrêa
____
Profª. Drª. Laís Corrêa (Orientadora-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Ana Claudia M. M. Chagas
____
Profª. Drª. Ana Claudia Machado Mendonça Chagas
Membro Examinador (UFGD)

____
Prof. Dr. Cosme Eustaquio Rubio Mercedes
Membro Examinador Externo (UEMS)

Dourados/MS, 10 de março de 2021

Dedicatória

Dedico este trabalho a toda minha família, amigos e alunos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me amparado e dado força sempre!

À minha família, que sempre me incentivou, apoiou e também me ajudou nos momentos de dificuldade, em especial a Caroline Tolentino e ao Paulo Cesár Vianna por me ajudarem na realização do experimento.

Ao meu esposo, Eric, que esteve ao meu lado durante todo processo.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT pelo incentivo à conclusão do Mestrado Profissional em Matemática. Em especial, agradeço a minha orientadora Profa. Dra. Laís Corrêa pelas suas intervenções na construção desse trabalho e por toda a sua dedicação.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.

Galileu Galilei.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de aula de Matemática para o professor desenvolver com alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Esta proposta baseia-se no estudo de aproximação de funções através do Método dos Mínimos Quadrados utilizando os dados obtidos no experimento de lançamento de um foguete. A ideia é, a partir dos dados encontrados pelos alunos no experimento, determinar a função que melhor representa estes dados. Por se tratar de um experimento que envolve o lançamento de um foguete com ar comprimido (construído a partir de garrafas pets), este experimento pode ser desenvolvido em conjunto com o professor de Física, inserindo, desta forma, a interdisciplinaridade nas aulas. Após apresentar como desenvolver este experimento com os alunos, são apresentados alguns exemplos de aplicação do Método dos Mínimos Quadrados utilizando os dados obtidos no experimento, sendo descritas as orientações de como aplicar um método de nível superior de forma simples e acessível à alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Ensino Médio. Método dos Mínimos Quadrados. Foguetes de ar comprimido.

ABSTRACT

In this work, we present a proposal for a mathematics class for the teacher to develop with first-year high school students. This proposal is based on the study of approximation of functions using the Least Squares Method using the data obtained in the rocket launch experiment. The idea is, from the data found by the students in the experiment, determine the function that best represents these data. As it is an experiment that involves launch of a rocket with compressed air (built from pet bottles), this experiment can be developed in conjunction with the Physics teacher, thus inserting interdisciplinarity in classes. After presenting how to develop this experiment with the students, some examples of application of the Least Squares Method are presented using the data obtained in the experiment, describing the guidelines on how to apply a higher education method in a simple and accessible way to high school students.
Keywords: High School. Least Squares Method. Rockets with compressed air.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Considerando as dificuldades apresentadas pelos alunos em sala de aula para aprender Matemática, podemos observar que, em alguns casos, isso se deve ao fato do aluno não conseguir enxergar o sentido ou a aplicação do conteúdo estudado, tornando-se algo completamente abstrato para o mesmo. Surge, então, a necessidade de que o professor encontre maneiras de abordar os conteúdos de forma que os alunos consigam ver alguma aplicação do conceito numa situação real, motivando-o e despertando seu interesse acerca de tal conteúdo, o que levará mais facilmente ao aprendizado. Outro fato que percebe-se também é que há casos em que os alunos se sentem desmotivados nas aulas de Matemática. De fato, segundo Ávila (1993, p.3), "a linguagem não motiva ninguém, ideias sim. Nenhum aluno pode se interessar por qualquer coisa onde não veja algum elemento que lhe satisfaça ou aguce a curiosidade". Dessa forma, o professor deve estar sempre buscando novas metodologias para ensinar um conteúdo de maneira que atraia a atenção dos alunos e supra essa necessidade.

Considerando a importância do ensino do conteúdo de funções na formação do aluno, o PCN faz a seguinte reflexão:

> O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. [...] Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. PCN (2017, pag 43)

Refletindo sobre esta problemática, neste trabalho será abordado o conteúdo de funções, mais especificamente, aproximações de funções, em que será empregado o Método dos Mínimos Quadrados afim de obter uma estimação ótima para representar uma função qualquer, ou seja, que ofereça o melhor ajuste para a função de aproximação. Esta proposta pode ser aplicada a partir do 1° ano do Ensino Médio, pois é nesta etapa do ensino que o conteúdo de funções é estudado.

Diversos trabalhos foram desenvolvidos nos últimos anos abordando a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados no Ensino Básico. Dentre eles, destacam-se: Ferreira (2014) abordou o Método dos Mínimos Quadrados através da aplicação de atividades, visando apresentar ao professor uma nova ferramenta matemática, dando ênfase ao estudo das funções (mostrando aos alunos a importância de se modelar uma situação) e a necessidade de saber operar com matrizes para resolver as situações-problema propostas. Já Silva (2020) aborda o conceito de Método do Mínimos Quadrados envolvendo modelagem e previsão de valores a partir de dados já existentes, apresentando três aplicações em conjuntos de dados reais utilizando como ferramenta o Microsoft Excel. Souza (2018) tem como objetivo apresentar o método para resolver sistemas lineares sobredeterminados e como aplicação propor a solução de um problema de geoposicionamento. Silva (2015) apresenta uma proposta de aula para turmas de Ensino Médio através de uma situação problema utilizando Software Excel como ferramenta auxiliar. Almeida (2015) aborda estratégias para apresentação do Método dos Mínimos Quadrados a alunos do Ensino Médio e realiza a elaboração de atividades para demonstrar a abrangência do método. Souza (2014) apresenta uma aplicação para o produto matricial, trazendo o Método de Mínimos Quadrados para o Ensino Médio, utilizando na implementação o software GeoGebra. Já Gonçalves (2014) apresenta alguns exemplos do Método dos Mínimos Quadrados que podem ser trabalhados em sala de aula, com a exploração geométrica da função no Graph e seus ajustes.

Considerando, ainda, a importância da interdiciplinaridade no ensino de Matemática, tal assunto é abordado nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) e na BNCC (Base Nacional Comum Curricular), destacando que a interdisciplinaridade possibilita aos alunos a não verem o conteúdo de forma fragmentada, mas sim construir relações entre os conceitos estudados e os novos conceitos adquiridos, podendo conhecer o potencial que um conteúdo tem de permitir conexões entre aplicações dentro ou fora da Matemática. Ainda mais, segundo a PCN (2017, pag 42), "a Matemática, integrando a área das Ciências da Natureza e Tecnologia do Ensino Médio, tem caráter instrumental mais amplo."

Tomando a interdisciplinaridade como motivação, neste trabalho, diferentemente dos trabalhos citados, abordaremos o Método dos Mínimos Quadrados de maneira interdisciplinar com conteúdos de Física, buscando que os alunos estabeleçam uma conexão entre estas duas disciplinas.

A nossa proposta será então trabalhar aproximação de funções pelo Método dos Mínimos Quadrados através do experimento Físico de lançamento de foguetes de ar comprimido, em que o professor de Matemática utilizará os dados do experimento para realizar a aproximação de funções e o professor de Física abordará os conceitos físicos que envolvem o experimento.

Por fim, os capítulos deste trabalho estão organizados da seguinte forma: no capítulo 1 apresenta-se o Método dos Mínimos Quadrados, com exemplos de como utilizá-lo. O capítulo 2 tem como finalidade descrever como será realizado o experimento de lançamento de um foguete, bem como fazer a coleta de dados e análise dos lançamentos. No capítulo 3 são apresentados alguns exemplos de como aplicar o experimento utilizando o Método dos Mínimos Quadrados, afim de dar suporte ao professor, descrevendo passo a passo como será esta aplicação. Ao final, são feitas algumas considerações e conclusões acerca deste trabalho.

1 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Suponhamos que você deseja realizar um experimento em sua sala de aula e queira determinar uma função que represente os dados coletados e que possibilite analisar o comportamento desse experimento.

Um dos métodos mais utilizados para obter uma função que represente determinado fenômeno a partir de alguns pontos dados é a interpolação. No entanto, através desse método, a função obtida a partir de um conjunto de dados discretos só poderá representar uma aproximação para o valor da função em pontos dentro do intervalo de tabelamento.

Caso queira obter um valor aproximado da função em algum ponto fora do intervalo de tabelamento, ou seja, extrapolar, ou ainda, se os valores tabelados são provenientes de um experimento, onde estamos propensos a erros durante a obtenção dos dados para a análise, então neste caso não seria possível utilizar a interpolação. Por isso, precisamos de um método que além de obter uma função que represente os dados tabelados, nos possibilite extrapolar.

> O Método dos Quadrados Mínimos é provavelmente a técnica de aproximação mais usada na análise numérica e em problemas práticos. Isto se deve tanto à sua simplicidade quanto ao fato de que em geral, buscamos aproximações para dados que são medidas obtidas experimentalmente com um certo grau de incerteza. Veremos que o método dos quadrados mínimos contempla a possível existência de erros nos dados a serem aproximados. O critério de aproximação consiste em minimizar os resíduos. (SANCHES; JONILDO, 2007)

Portanto, o Método dos Mínimos Quadrados (ou Método dos Quadrados Mínimos) é o método que procuramos, pois realiza a aproximação de uma função $y = f(x)$ por uma função $\varphi(x)$ que seja uma combinação de funções lineares conhecidas, de modo que $\varphi(x)$ seja uma boa aproximação e que nos permita extrapolar com uma certa margem de segurança. Este método pode ser utilizado em duas situações distintas: **Caso Contínuo** ou **Caso Discreto**.

1.1 Caso Discreto

Suponha um conjunto finito de pontos $((x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $\ldots$,$(x_m, f(x_m))$ com $x_1, x_2, ..., x_m$ pertencentes a um intervalo $[a, b]$. Queremos encontrar uma função que melhor se ajuste a esse conjunto de pontos. Para isso, devemos escolher n funções $g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)$, contínuas em $[a, b]$, e obter n constantes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, tais que a função $\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + ... + \alpha_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Para escolher as funções contínuas $g_1(x), ..., g_n(x)$ devemos observar o gráfico dos pontos tabelados (diagrama de dispersão) ou basear-se nos fundamentos teóricos do experimento que gerou a tabela de pontos.

Exemplo 1. Considere a tabela a seguir:

Tabela 1.1: Dados referentes ao Exemplo 1

x	$-1{,}0$	$-0{,}75$	$-0{,}6$	$-0{,}5$	$-0{,}3$	0	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}5$	$0{,}7$	$1{,}0$
$f(x)$	$2{,}05$	$1{,}153$	$0{,}45$	$0{,}4$	$0{,}5$	0	$0{,}2$	$0{,}6$	$0{,}512$	$1{,}2$	$2{,}05$

O diagrama de dispersão para esses dados será:

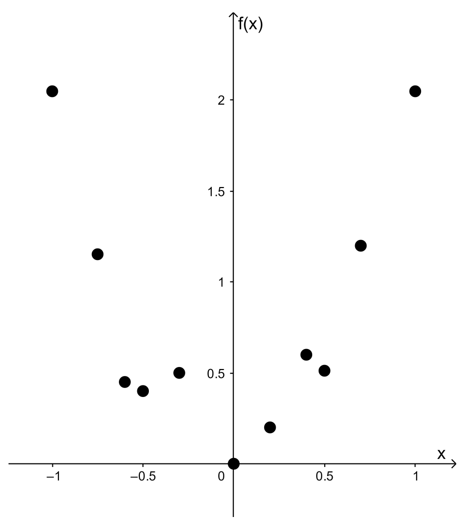

Figura 1.1: Diagrama de dispersão referente ao Exemplo 1

Neste caso, é natural escolhermos apenas uma função $g_1(x) = x^2$ para representar os dados tabelados e procuramos então $\varphi(x) = \alpha x^2$, que é a equação geral de uma reta que passa pela origem.

Assim, escolhidas as funções $g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x)$, temos de estabelecer o conceito de proximidade entre as funções $\varphi(x)$ e $f(x)$ para obter as constantes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Para isso, impõe-se que o desvio em x_k, dado por $d_k = f(x_k) - \varphi(x_k)$, seja mínimo para $k = 1, 2, ..., m$.

Uma forma de fazer isto, a qual será apresentada neste trabalho, consiste em escolher os $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima. Portanto, dentro dos critérios dos quadrados mínimos, os coeficientes α_k que fazem com que $\varphi(x)$ se aproxime o máximo de $f(x)$ são os que minimizam a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \sum_{k=1}^{m}[f(x_k) - \varphi(x_k)]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - ... - \alpha_n g_n(x_k)]^2.$$

Para encontrar um ponto de mínimo de $F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, temos que encontrar seus pontos críticos, ou seja, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, tais que

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\right|_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)} = 0, \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{1.1}$$

Em seguida, verificar se a função tem ponto de mínimo, ou seja,

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_j^2}\right|_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)} > 0, \qquad j = 1, 2, ..., n. \tag{1.2}$$

Calculando estas derivadas parciais para cada $j = 1, 2, ..., n$, temos:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\right|_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)} = 2\sum_{k=1}^{m}[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - ... - \alpha_n g_n(x_k)][-g_j(x_k)]$$

Impondo a condição (1.1), temos:

$$\sum_{k=1}^{m}[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - ... - \alpha_n g_n(x_k)][g_j(x_k)] = 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{1.3}$$

Em seguida, verificando a condição (1.2), temos que:

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_j^2}\right|_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} = 2\sum_{k=1}^{m}[-g_j(x_k)]^2 > 0$$

Assim, podemos reescrever a Eq.(1.3) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m}[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - \ldots - \alpha_n g_n(x_k)][g_1(x_k)] = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - \ldots - \alpha_n g_n(x_k)][g_2(x_k)] = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}[f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \alpha_2 g_2(x_k) - \ldots - \alpha_n g_n(x_k)][g_n(x_k)] = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)g_1(x_k)\right]\alpha_1 + \cdots + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_1(x_k)\right]\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_1(x_k) \\ \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)g_2(x_k)\right]\alpha_1 + \cdots + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_2(x_k)\right]\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_2(x_k) \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_1(x_k)g_n(x_k)\right]\alpha_1 + \cdots + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{m} g_n(x_k)g_n(x_k)\right]\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} f(x_k)g_n(x_k) \end{cases} \tag{1.4}$$

que é a fórmula geral do Método dos Mínimos Quadrados para o caso discreto, a qual é um sistema linear com n incógnitas, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, e com n equações. As equações dadas por este sistema são chamadas equações normais e o sistema linear pode ser escrito na forma matricial $A\alpha = b$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

em que

$$A = (a_{ij}), \text{ tal que } a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k) g_j(x_k) = a_{ji},$$

ou seja, a matriz A é simétrica. Ainda, temos que:

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^t$$

e

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^t,$$

tal que $b_i = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) g_i(x_k)$.

Utilizando a notação de produto escalar, o sistema normal $A\alpha = b$ pode ser escrito da forma:

$$A = (a_{ij}) = \langle \overline{g_i}, \overline{g_j} \rangle \quad \text{e} \quad b = (b_i) = \langle \overline{f}, \overline{g_i} \rangle,$$

onde $\overline{g_\ell}$ é o vetor $(g_\ell(x_1), g_\ell(x_2), \dots, g_\ell(x_m))^T$ e $\overline{f}$, o vetor $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m))^T$.

Demonstra-se que, se as funções $g_1(x), \dots, g_n(x)$ forem tais que os vetores $\overline{g_1}, \overline{g_2}, \dots, \overline{g_n}$, sejam linearmente independentes, então o determinante da matriz A é diferente de zero e, portanto, o sistema linear (1.4) admite solução única: $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \dots, \overline{\alpha_n}$.

Nota-se que, se os vetores $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \dots, \overline{g_n}\}$ tiverem uma propriedade suplementar de serem tais que

$$\langle \overline{g_i}, \overline{g_j} \rangle : \begin{cases} = 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases},$$

ou seja, se $\{\overline{g_1}, \overline{g_2}, \dots, \overline{g_n}\}$ é uma base ortonormal, então o sistema linear 1.4 se reduziria a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

isto é, a matriz A do sistema (1.4) será uma matriz diagonal, com $a_{ii} \neq 0$ e, portanto, o sistema (1.4) terá solução única, a qual é facilmente determinada.

Felizmente, dado um conjunto de pontos $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, facilmente constrói-se polinômios de grau $0, 1, ..., n$ que são ortogonais, em relação ao produto escalar

$$\langle \overline{g_i}, \overline{g_j} \rangle = \sum_{k=1}^{m} g_i(x_k) g_j(x_k).$$

Exemplo 2. Determinar a função que melhor aproxima a função tabelada no Exemplo 1.

Como queremos ajustar os pontos dados a uma parábola passando pela origem, temos que

$$f(x) \approx \varphi(x) = \alpha g(x),$$

com $g(x) = x^2$. Com isso, temos que resolver apenas a equação (ver sistema de equações (1.4)):

$$\left[\sum_{k=1}^{11} g(x_k) g(x_k)\right] \alpha = \sum_{k=1}^{11} f(x_k) g(x_k)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{11} g(x_k)^2\right] \alpha = \sum_{k=1}^{11} f(x_k) g(x_k)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{11} (x_k^2)^2\right] \alpha = \sum_{k=1}^{11} (x_k^2) f(x_k) \tag{1.5}$$

Para calcular os valores dos somatórios presentes na Eq. (1.5) utilizaremos a tabela a seguir:

Tabela 1.2: Somatórios da Eq. (1.5) referentes ao Exemplo 2

k	x_k	$f(x_k)$	$(x_k)^2$	$(x_k)^4$	$f(x_k)(x_k)^2$
1	-1	2,05	1	1	2,05
2	$-0{,}75$	1,153	0,5625	0,31640625	0,6485625
3	$-0{,}6$	0,45	0,36	0,1296	0,162
4	$-0{,}5$	0,4	0,25	0,0625	0,1
5	$-0{,}3$	0,5	0,9	0,0081	0,045
6	0	0	0	0	0
7	0,2	0,2	0,4	0,0016	0,00032
8	0,4	0,6	0,16	0,0256	0,96
9	0,5	0,512	0,25	0,0625	0,128
10	0,7	1,2	0,49	0,2401	0,588
11	1	2,05	1	1	2,05
$\sum$	0,65	9,115	4,2025	2,84640625	5,8755625

Assim, os valores dos somatórios são dados por:

$$\sum_{k=1}^{11}(x_k)^2 \approx 2{,}8464,$$
$$\sum_{k=1}^{11}(x_k^2)f(x_k) \approx 5{,}8756.$$

Substituindo na Eq. (1.5) os valores obtidos para os somatórios, obtemos:

$$2{,}8464\alpha = 5{,}8756 \Rightarrow \alpha = \frac{5{,}8756}{2{,}8464} \approx 2{,}0642$$

Assim, $\varphi(x) = 2{,}0642x^2$ é a parábola que melhor se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função tabelada, cujo gráfico segue representado na Figura 1.2.

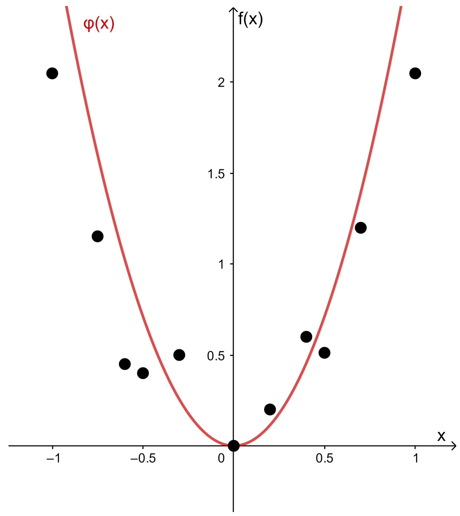

Figura 1.2: Gráfico referente ao Exemplo 2

A partir da Figura 1.2 podemos observar que a parábola com vértice na origem representa satisfatoriamente bem os pontos dados na Tabela 1.1.

Exemplo 3. Ajuste os dados tabelados a seguir pelo Método dos Mínimos Quadrados utilizando uma reta.

Tabela 1.3: Dados referentes ao Exemplo 3

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0,5	0,6	0,9	0,8	$1,2$	1,5	1,7	2,0

Teremos, então, que a função aproximadora será:

$$f(x) \approx \varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x), \tag{1.6}$$

com $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$.

Portanto, teremos que resolver, o sistema de equações a seguir (ver sistema de equações (1.4)):

$$\begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)g_1(x_k)\right]\alpha_1 + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)g_1(x_k)\right]\alpha_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} f(x_k)g_1(x_k) \\ \\ \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)g_2(x_k)\right]\alpha_1 + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)g_2(x_k)\right]\alpha_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} f(x_k)g_2(x_k) \end{cases}$$

Substituindo os valores de g_1 e g_2 neste sistema, obtemos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{8} 1\right]\alpha_1 + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(x_k)\right]\alpha_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} f(x_k) \\ \\ \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(x_k)\right]\alpha_1 + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(x_k)^2\right]\alpha_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} f(x_k)(x_k) \end{cases} \tag{1.7}$$

Para calcular os valores dos somatórios utilizaremos a tabela a seguir:

Tabela 1.4: Somatórios do sistema de equação (1.7) referentes ao Exemplo 3

k	x_k	$f(x_k)$	$(x_k)^2$	$f(x_k)(x_k)$
1	1	0,5	1	0,5
2	2	0,6	4	1,2
3	3	0,9	9	2,7
4	4	0,8	16	3,2
5	5	1,2	25	6
6	6	1,5	36	9
7	7	1,7	49	11,9
8	8	2	64	16
$\sum$	36	9,2	204	50,5

Logo, os valores dos somatórios presentes no sistema (1.7) são dados por:

$$\sum_{k=1}^{8} 1 = 8$$
$$\sum_{k=1}^{8} (x_k) = 36$$
$$\sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)^2 = 204$$

$$\sum_{k=1}^{8} f(x_k) = 9{,}2$$
$$\sum_{k=1}^{8} f(x_k)(x_k) = 50{,}5$$

Substituindo os valores dos somatórios em (1.7), obtemos:

$$\begin{cases} 8\alpha_1 + 36\alpha_2 = 9{,}2 \\ 36\alpha_1 + 204\alpha_2 = 50{,}5 \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha_1 = 0{,}176 \text{ e } \alpha_2 = 0{,}214.$$

Logo, $\varphi(x) = 0{,}176 + 0{,}214x$ é a reta que melhor aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função tabelada, cujo gráfico segue apresentado na Figura 1.3 .

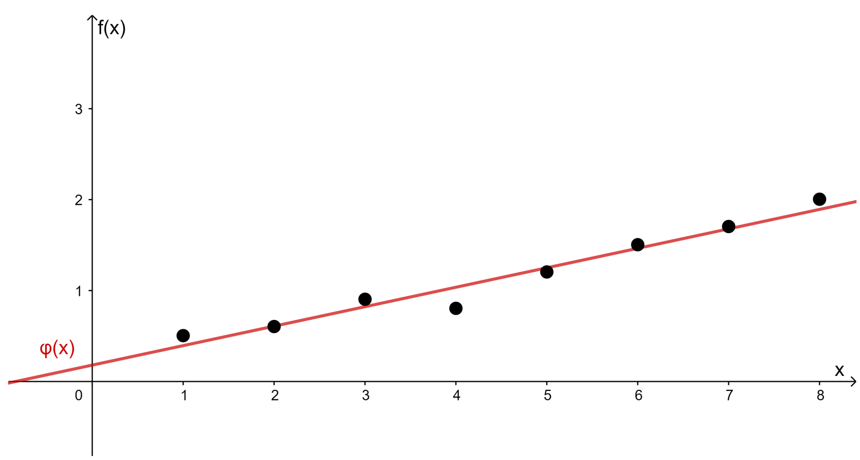

Figura 1.3: Gráfico referente à aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 3

A partir da Figura 1.3 podemos perceber que neste caso a função do 1º grau representa satisfatoriamente bem aos pontos dados na Tabela 1.3.

1.2 Caso Contínuo

Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$. Escolhidas as funções $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$, todas contínuas em $[a, b]$, precisamos determinar n constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, de modo que a função $\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_n g_n(x)$ melhor aproxime f em $[a, b]$.

Para estabelecer o conceito de proximidade seguindo os critérios dos quadrados mínimos, devemos escolher uma função de tal forma que:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

seja mínimo, ou seja, que a área entre as curvas $\varphi(x)$ e $f(x)$ seja mínima.

Para encontrar o ponto de mínimo de $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, temos que encontrar seus pontos críticos, ou seja, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tais que

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\right|_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, n \tag{1.8}$$

Calculando a derivada parcial dada pela Eq. (1.8) para cada $j = 1, 2, ..., n$, temos

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\right|_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} = 2 \int_a^b [f(x) - \alpha_1 g_1(x) - \alpha_2 g_2(x) - \dots - \alpha_n g_n(x)][-g_j(x)] dx$$

Impondo a condição (1.8), temos que

$$\int_a^b [f(x) - \alpha_1 g_1(x) - \alpha_2 g_2(x) - \dots - \alpha_n g_n(x)][-g_j(x)] dx = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, n. \tag{1.9}$$

Assim, podemos reescrever a Eq. (1.9) na forma de sistema, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \int_a^b [f(x) - \alpha_1 g_1(x) - \alpha_2 g_2(x) - \dots - \alpha_n g_n(x)][g_1(x)] dx = 0 \\ \int_a^b [f(x) - \alpha_1 g_1(x) - \alpha_2 g_2(x) - \dots - \alpha_n g_n(x)][g_2(x)] dx = 0 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \int_a^b [f(x) - \alpha_1 g_1(x) - \alpha_2 g_2(x) - \dots - \alpha_n g_n(x)][g_n(x)] dx = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
\left[\int_a^b g_1(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \cdots + \left[\int_a^b g_1(x)g_n(x)dx\right]\alpha_n = \int_a^b f(x)g_1(x)dx \\
\\
\left[\int_a^b g_2(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \cdots + \left[\int_a^b g_2(x)g_n(x)dx\right]\alpha_n = \int_a^b f(x)g_2(x)dx \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\left[\int_a^b g_1(x)g_n(x)dx\right]\alpha_1 + \cdots + [\int_a^b g_n(x)g_n(x)dx]\alpha_n = \int_a^b f(x)g_n(x)dx
\end{cases} \tag{1.10}
$$

que é a fórmula geral do Método dos Mínimos Quadrados para o caso contínuo.

Considerando

$$
a_{nn} = \int_a^b g_n(x)g_n(x)dx \qquad \text{e} \qquad b_n = \int_a^b f(x)g_n(x)dx,
$$

podemos escrever o sistema linear (1.10) da seguinte forma:

$$
\begin{cases}
a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\
a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = b_n
\end{cases}
$$

ou ainda, na forma matricial $A\alpha = b$, em que:

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

Demonstra-se que, se as funções $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ forem linearmente independentes, então o determinante da matriz A é diferente de zero e, portanto, o sistema linear (1.10) admite solução única: $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_n}$. Além disso, pode-se demonstrar também que esta solução é o ponto que a função $F(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ atinge seu valor de mínimo. Para mais detalhes, ver **[5]**.

Exemplo 4. Vamos aproximar $f(x) = 4x^3$, no intervalo $[a, b] = [0, 1]$, por um polinômio:

a) do primeiro grau.

b) do segundo grau.

Item a) No caso em que queremos realizar a aproximação por uma função do primeiro grau, a função aproximadora será

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

com $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$.

Com isso, temos que resolver o seguinte sistema (ver sistema de equações (1.10)):

$$\begin{cases} \left[\int_0^1 g_1(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \left[\int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx\right]\alpha_2 = \int_0^1 f(x)g_1(x)dx \\ \\ \left[\int_0^1 g_2(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \left[\int_0^1 g_2(x)g_2(x)dx\right]\alpha_2 = \int_0^1 f(x)g_2(x)dx \end{cases} \tag{1.11}$$

Calculando o valor das integrais em (1.11), obtemos:

$$\int_0^1 g_1(x)g_1(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$$

$$\int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx = \int_0^1 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 g_2^2(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 f(x)g_1(x)dx = \int_0^1 4x^3dx = \left.\frac{4x^4}{4}\right|_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 f(x)g_2(x)dx = \int_0^1 4x^4dx = \left.\frac{4x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{4}{5}$$

Substituindo o valor destas integrais em (1.11), obtemos:

$$\begin{cases} 1\alpha_1 + \dfrac{1}{2}\alpha_2 = 1 \\ \dfrac{1}{2}\alpha_1 + \dfrac{1}{3}\alpha_2 = \dfrac{4}{5} \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{4}{5} \text{ e } \alpha_2 = \frac{18}{5}$$

Logo, $\varphi(x) = \dfrac{18}{5}x - \dfrac{4}{5}$ no intervalo [0,1] é a reta que melhor aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, a função $f(x) = 4x^3$, cujo gráfico segue apresentado na Figura 1.4.

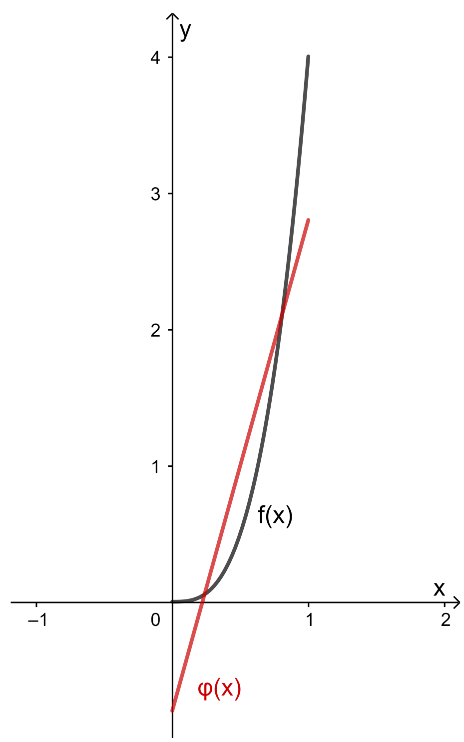

Figura 1.4: Gráfico referente a aproximação por mínimos quadrados do Exemplo 4 item a.

Podemos perceber que, neste caso, como a função $f(x)$ é uma curva, o ajuste linear não é uma boa representação para a função dada.

Item b) Para realizar a aproximação da função $f(x) = 4x^3$ por um polinômio do 2º grau, a função aproximadora será

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

com $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$.

Assim, temos que resolver o seguinte sistema (ver sistema de equações (1.10)):

$$\begin{cases} \left[\int_0^1 g_1(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \left[\int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx\right]\alpha_2 + \left[\int_0^1 g_1(x)g_3(x)dx\right]\alpha_3 = \int_0^1 f(x)g_1(x)dx \\ \\ \left[\int_0^1 g_2(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \left[\int_0^1 g_2(x)g_2(x)dx\right]\alpha_2 + \left[\int_0^1 g_2(x)g_3(x)dx\right]\alpha_3 = \int_0^1 f(x)g_2(x)dx \\ \\ \left[\int_0^1 g_3(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \left[\int_0^1 g_3(x)g_2(x)dx\right]\alpha_2 + \left[\int_0^1 g_3(x)g_3(x)dx\right]\alpha_3 = \int_0^1 f(x)g_3(x)dx \end{cases} \tag{1.12}$$

Calculando o valor das integrais presentes em (1.12), obtemos:

$$\int_0^1 g_1(x)g_1(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$$

$$\int_0^1 g_1(x)g_2(x)dx = \int_0^1 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 g_1(x)g_3(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 g_2(x)g_2(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 g_2(x)g_3(x)dx = \int_0^1 x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 g_3(x)g_3(x)dx = \int_0^1 x^4dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}$$

$$\int_0^1 f(x)g_1(x)dx = \int_0^1 4x^3dx = x^4\Big|_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 f(x)g_2(x)dx = \int_0^1 4x^4dx = \frac{4x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{4}{5}$$

$$\int_0^1 f(x)g_3(x)dx = \int_0^1 4x^5dx = \frac{4x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Substituindo os valores destas integrais em (1.12), obtemos:

$$\begin{cases} 1\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 = 1 \\ \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 = \frac{4}{5} \\ \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{5}\alpha_3 = \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{5}, \quad \alpha_2 = -\frac{12}{5} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = 6.$$

Logo, $\varphi(x) = \frac{1}{5} - \frac{12}{5}x + 6x^2$ no intervalo [0,1] é a parábola que melhor se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função $f(x) = 4x^3$, cujo gráfico segue apresentado na Figura 1.5.

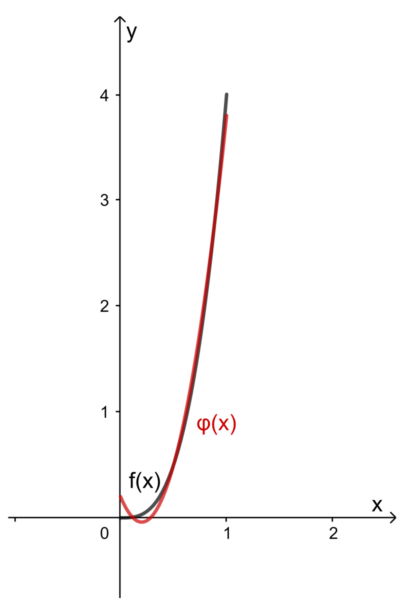

Figura 1.5: Gráfico referente à aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 4 item b

Podemos perceber que, neste caso, a função do segundo grau é uma boa aproximação para $f(x) = 4x^3$. Podemos notar também que, comparada à representação por uma função polinomial do 1º grau (item a), a função do segundo grau é a que melhor se aproxima da função original $f(x)$, como mostra o gráfico da Figura 1.6.

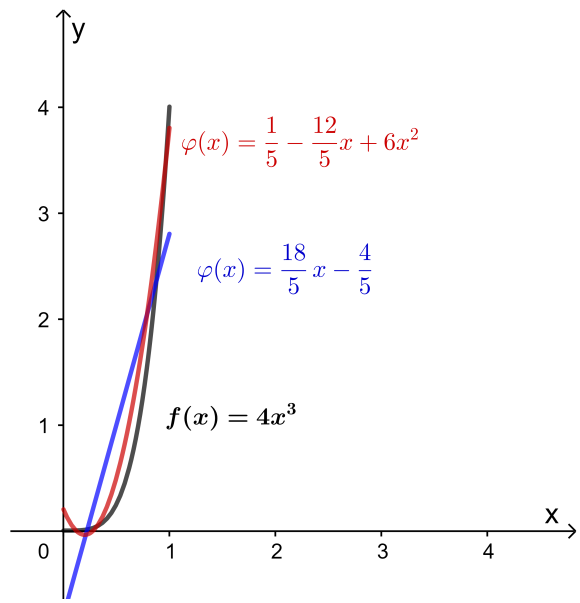

Figura 1.6: Gráfico referente à aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 4 item b

Exemplo 5. Seja $f(x) = x^4 - 5x$, $x \in [-1, 1]$. Através do Método dos Mínimos Quadrados, aproximar $f(x)$ por:

a) um polinômio do 1º grau.

b) um polinômio do 2º grau.

Item a) No caso em queremos realizar a aproximação por uma função do primeiro grau, a função aproximadora será

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x), \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

com $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$.

Assim, temos que resolver o seguinte sistema:

$$
\begin{cases}
\left[\int_{-1}^{1} g_1(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \left[\int_{-1}^{1} g_1(x)g_2(x)dx\right]\alpha_2 = \int_{-1}^{1} f(x)g_1(x)dx \\
\\
\left[\int_{-1}^{1} g_2(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \left[\int_{-1}^{1} g_2(x)g_2(x)dx\right]\alpha_2 = \int_{-1}^{1} f(x)g_2(x)dx
\end{cases}
\tag{1.13}
$$

Calculando o valor das integrais presentes em (1.13), obtemos:

$$\int_{-1}^{1} g_1(x)g_1(x)dx = \int_{0}^{1} 1dx = 2$$

$$\int_{1}^{1} g_1(x)g_2(x)dx = \int_{-1}^{1} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} g_2^2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)g_1(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^4 - 5x)dx = \left.\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^2}{2}\right)\right|_{-1}^{1} = -\frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)g_2(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^5 - 5x^2)dx = \left.\left(\frac{x^6}{6} - \frac{5x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1} = -\frac{10}{3}$$

Substituindo o valor destas integrais em (1.13), obtemos:

$$
\begin{cases}
2\alpha_1 + 0\alpha_2 = -\dfrac{2}{5} \\
\\
0\alpha_1 + \dfrac{2}{3}\alpha_2 = -\dfrac{10}{3}
\end{cases}
\qquad \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{5} \text{ e } \alpha_2 = -5.
$$

Logo, $\varphi(x) = -\dfrac{1}{5} - 5x$ no intervalo [-1,1] é a reta que melhor aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, a função $f(x) = x^4 - 5x$, cujo gráfico segue apresentado na Figura 1.7.

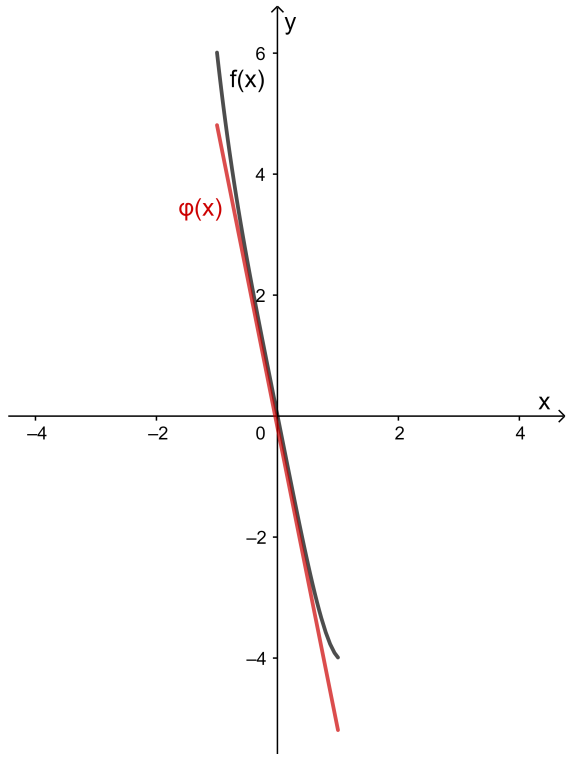

Figura 1.7: Gráfico referente à aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 5 item a

A partir da Figura 1.7, podemos observar que a função do primeiro grau no intevalo $[-1, 1]$, se mostrou uma boa aproximação para a função $f(x) = x^4 - 5x$.

Item b) Neste caso, temos que a função aproximadora dada por um polinômio do 2º grau será

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

com $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$ e $g_3(x) = x^2$.

Portanto, temos que resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left[\int_{-1}^{1} g_1(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \left[\int_{-1}^{1} g_1(x)g_2(x)dx\right]\alpha_2 + \left[\int_{-1}^{1} g_1(x)g_3(x)dx\right]\alpha_3 = \int_{-1}^{1} f(x)g_1(x)dx \\ \\ \left[\int_{-1}^{1} g_2(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \left[\int_{-1}^{1} g_2(x)g_2(x)dx\right]\alpha_2 + \left[\int_{-1}^{1} g_2(x)g_3(x)dx\right]\alpha_3 = \int_{-1}^{1} f(x)g_2(x)dx \\ \\ \left[\int_{-1}^{1} g_3(x)g_1(x)dx\right]\alpha_1 + \left[\int_{-1}^{1} g_3(x)g_2(x)dx\right]\alpha_2 + \left[\int_{-1}^{1} g_3(x)g_3(x)dx\right]\alpha_3 = \int_{-1}^{1} f(x)g_3(x)dx \end{cases} \tag{1.14}$$

Calculando o valor das integrais presentes em (1.14), obtemos:

$$\int_{-1}^{1} g_1(x)g_1(x)dx = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

$$\int_{-1}^{1} g_1(x)g_2(x)dx = \int_{-}^{1} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} g_1(x)g_3(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} g_2(x)g_2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} g_2(x)g_3(x)dx = \int_{-1}^{1} x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} g_3(x)g_3(x)dx = \int_{-1}^{1} x^4dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)g_1(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^4 - 5x)dx = \left.\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5x^2}{2}\right)\right|_{-1}^{1} = -\frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)g_2(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^5 - 5x^2)dx = \left.\left(\frac{x^6}{6} - \frac{5x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1} = -\frac{10}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)g_3(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^6 - 5x^3)dx = \left.\left(\frac{x^7}{7} - \frac{5x^4}{4}\right)\right|_{-1}^{1} = -\frac{2}{7}$$

Substituindo os valores destas integrais em (1.14), obtemos:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dfrac{2}{3}\alpha_3 = -\dfrac{2}{5} \\ 0\alpha_1 + \dfrac{2}{3}\alpha_2 + 0\alpha_3 = -\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{2}{3}\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dfrac{2}{5}\alpha_3 = -\dfrac{2}{7} \end{cases} \qquad \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{3}{35}, \quad \alpha_2 = -5 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{6}{7}$$

Portanto, $\varphi(x) = -\dfrac{3}{35} - 5x + \dfrac{6}{7}x^2$, no intervalo [-1,1], é a parábola que melhor se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função $f(x) = x^4 - 5x$, cujo gráfico segue apresentado na Figura 1.8.

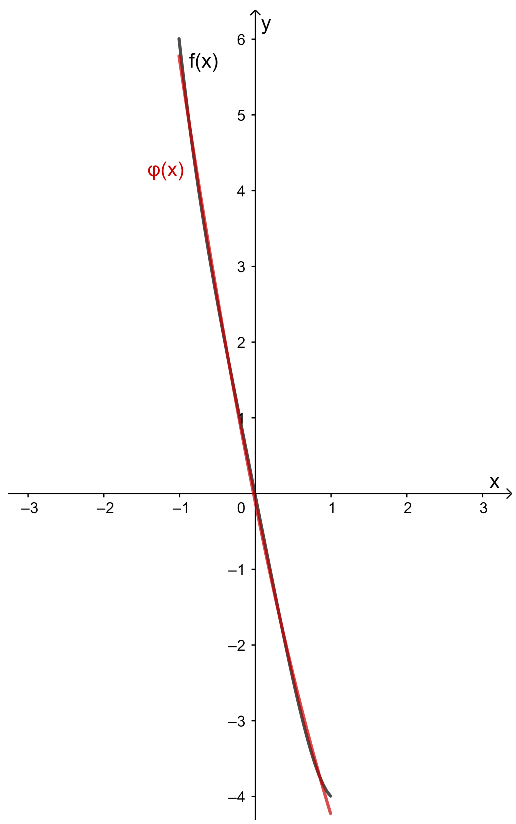

Figura 1.8: Gráfico referente à aproximação por mínimos quadrados do Exemplo 5 item b

Analisando os itens a e b do Exemplo 5, podemos concluir que, mesmo que a função do 1º grau tenha se mostrado uma boa aproximação para a função original $f(x)$ no intervalo $[-1, 1]$, a função aproximadora do 2º grau foi a que melhor se ajustou a função dada $f(x)$, conforme esperado, como mostra a Figura 1.9.

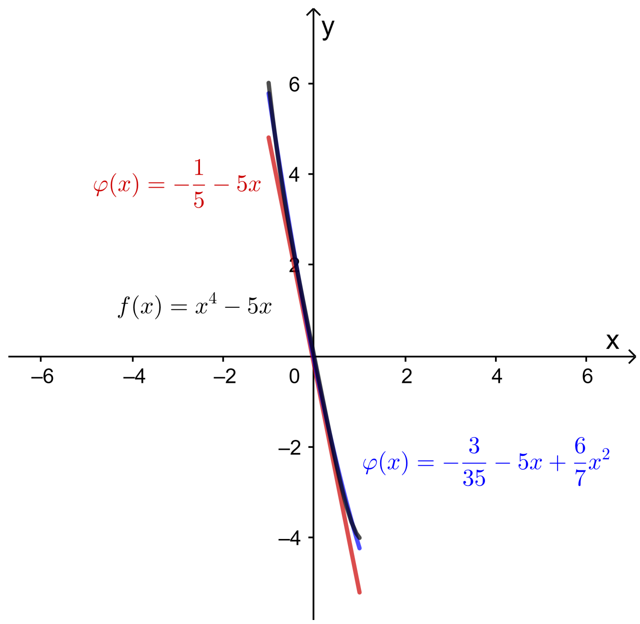

Figura 1.9: Gráfico referente à aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 5

1.3 Caso não linear

Em alguns casos, a função escolhida pode ser não linear nos parâmetros, como por exemplo, $f(x) \approx \varphi(x) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 x}$, com α_1 e α_2 positivos. Neste caso, é necessário que se efetue a linearização do problema através de alguma transformação conveniente para se aplicar o Método dos Mínimos Quadrados. Após realizar a linearização encontraremos novos parâmetros, obtidos os parâmetros dessa função linearizada, usaremos estes valores para calcular os parâmetros originais.

Exemplo 6. Suponhamos que, num laboratório, obtivemos experimentalmente os seguintes valores para uma função $f(x)$ nos dados pontos x:

Tabela 1.5: Dados referentes ao Exemplo 6

x	$-1{,}0$	$-0{,}7$	$-0{,}4$	$-0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}5$	$0{,}8$	$1{,}0$
$f(x)$	$36{,}547$	$17{,}264$	$8{,}155$	$3{,}852$	$1{,}820$	$0{,}860$	$0{,}406$	$0{,}246$

Construindo o diagrama de dispersão dos dados apresentados na Tabela 1.5, obtemos:

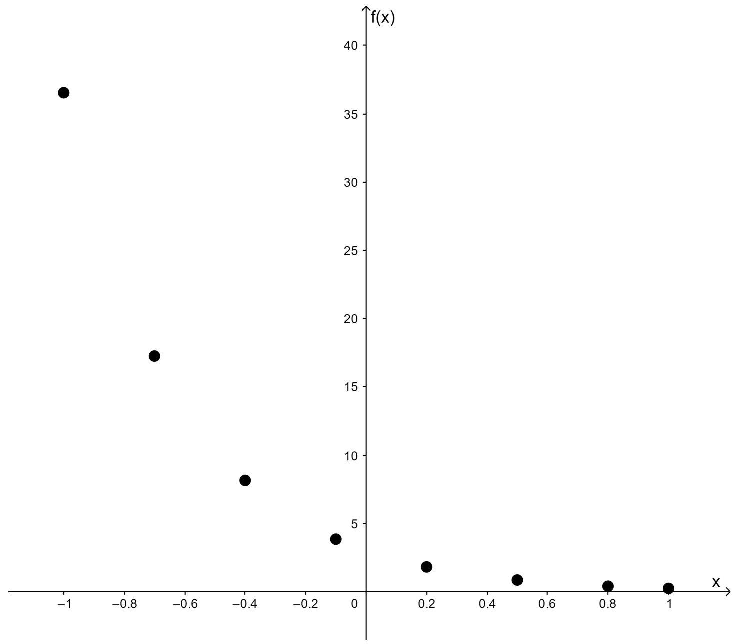

Figura 1.10: Gráfico que apresenta o diagrama de dispersão dos pontos dados na Tabela 1.5

Analisando o gráfico apresentado na Figura (1.10), podemos observar que este nos sugere um ajuste por uma curva exponencial, ou seja, $y \approx \varphi(x) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 x}$. Logo, a linearização a ser realizada é:

$$z = \ln(y) \approx \ln(\alpha_1) - \alpha_2 x = \phi(x).$$

Assim, ao invés de ajustar y por quadrados mínimos, iremos ajustar $z = \ln(y)$, encontrando

$$\phi(x) = a_1 + a_2 x,$$

onde $a_1 = \ln(\alpha_1)$ e $a_2 = -\alpha_2$, com $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$.

Obtidos os valores de a_1 e a_2, usaremos estes valores para encontrar os parâmetros originais tomando $\alpha_1 = e^{a_1}$ e $\alpha_2 = -a_2$.

Com isso, a nova tabela de dados será dada por:

Tabela 1.6: Dados referentes ao Exemplo 6 para a função de linearização

x	$-1{,}0$	$-0{,}7$	$-0{,}4$	$-0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}5$	$0{,}8$	$1{,}0$
$z = \ln(y)$	$3{,}599$	$2{,}849$	$2{,}099$	$1{,}349$	$0{,}599$	$-0{,}151$	$-0{,}901$	$-1{,}402$

Para calcular a_1 e a_2 devemos, então, resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)g_1(x_k)\right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)g_1(x_k)\right] a_2 = \sum_{k=1}^{8} z(x_k)g_1(x_k) \\ \\ \left[\sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)g_2(x_k)\right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)g_2(x_k)\right] a_2 = \sum_{k=1}^{8} z(x_k)g_2(x_k) \end{cases} \tag{1.15}$$

Calculando os valores dos somatórios presentes no sistema (1.15), obtemos:

$$\sum_{k=1}^{8} g_1(x_k)g_1(x_k) = 8$$
$$\sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)g_1(x_k) = 0{,}3$$
$$\sum_{k=1}^{8} g_2(x_k)g_2(x_k) = 3{,}59$$
$$\sum_{k=1}^{8} z(x_k)g_1(x_k) = 8{,}401$$
$$\sum_{k=1}^{8} z(x_k)g_2(x_k) = -8{,}646$$

Substituindo o resultado de cada somatório em (1.15), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 8a_a + 0{,}3a_2 = 8{,}041 \\ \\ 0{,}3a_1 + 3{,}59a_2 = -8{,}646 \end{cases} \qquad \Rightarrow a_1 = 1{,}099 \quad \text{e} \quad a_2 = -2{,}5$$

Utilizaremos agora esses parâmetros para calcular os parâmetros originais:

$\alpha_1 = e^{a_1} \Rightarrow \alpha_1 = e^{1{,}099} = 3{,}001$

$\alpha_2 = -a_2 \Rightarrow \alpha_2 = 2{,}5$

Assim, a função $\varphi(x) = \alpha_1 e^{\alpha_2 x} = 3{,}001e^{-2{,}5x}$ é a função que melhor aproxima $f(x)$ pelo método dos mínimos quadrados, cujo gráfico segue apresentado na Figura 1.11.

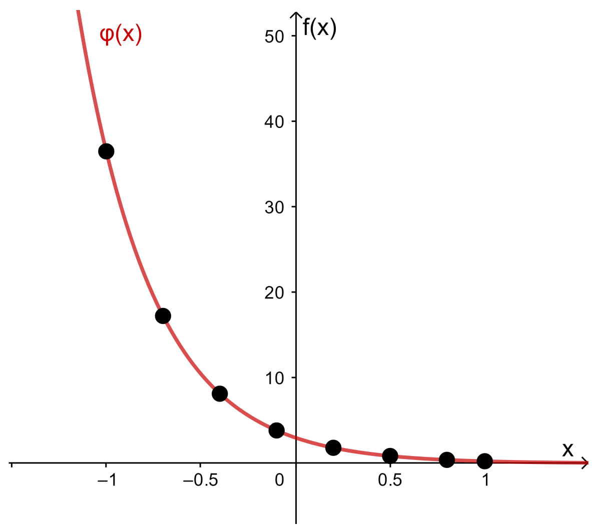

Figura 1.11: Gráfico referente a aproximação por mínimos quadrados do Exemplo 6

Analisando o gráfico apresentado na Figura 1.11 podemos verificar que a curva obtida pelo método dos mínimos quadrados está bem ajustada aos pontos dados, mostrando-se uma excelente aproximação.

Exemplo 7. Considere a função dada pela tabela a seguir:

Tabela 1.7: Dados referentes ao Exemplo 7

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	30	10	9	6	5	4	4

Obtenha uma aproximação da função tabelada pela função:

$$y \approx \varphi(x) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 x}.$$

Realizando a linearização da função y, obtemos:

$$z = \frac{1}{y} \approx \alpha_1 + \alpha_2 x.$$

Logo, ajustaremos por mínimos quadrados a função $z = \dfrac{1}{y}$, encontrando $\phi(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x)$, com $a_1 = \alpha_1$ e $a_2 = \alpha_2$, $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$.

Obtidos os valores de a_1 e a_2, usaremos estes valores para encontrar os parâmetros originais tomando $\alpha_1 = a_1$ e $\alpha_2 = a_2$.

Iremos então trabalhar com os seguintes dados:

Tabela 1.8: Dados referentes ao Exemplo 7 para a função de linearização

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4
y	30	10	9	6	5	4	4
$z = \frac{1}{y}$	$0{,}033$	$0{,}1$	$0{,}111$	$0{,}166$	$0{,}2$	$0{,}25$	$0{,}25$

Portanto, a_1 e a_2 serão solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{7} g_1(x_k) g_1(x_k)\right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^{7} g_2(x_k) g_1(x_k)\right] a_2 = \sum_{k=1}^{7} z(x_k) g_1(x_k) \\ \\ \left[\sum_{k=1}^{7} g_1(x_k) g_2(x_k)\right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^{7} g_2(x_k) g_2(x_k)\right] a_2 = \sum_{k=1}^{7} z(x_k) g_2(x_k) \end{cases} \tag{1.16}$$

Calculando, os valores dos somatórios presentes em (1.16), obtemos:

$$\sum_{k=1}^{7} g_1(x_k) g_1(x_k) = 7$$
$$\sum_{k=1}^{7} g_2(x_k) g_1(x_k) = -14$$
$$\sum_{k=1}^{7} g_2(x_k) g_2(x_k) = 140$$

$$\sum_{k=1}^{7} z(x_k)g_1(x_k) = 1{,}11$$
$$\sum_{k=1}^{7} z(x_k)g_2(x_k) = -0{,}14$$

Substituindo em (1.16) o resultado de cada somatório, obtemos:

$$\begin{cases} 7a_1 - 14a_2 = 1{,}11 \\ -14a_1 + 140a_2 = -0{,}14 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 0{,}195 \quad \text{e} \quad a_2 = 0{,}0185$$

Utilizaremos esses parâmetros para encontrar os parâmetros originais:

$$\alpha_1 = a_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0{,}195 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = a_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}0185.$$

Assim, a função $\varphi(x) = \dfrac{1}{0{,}195 + 0{,}0185x}$ é a função que aproxima $f(x)$ pelo método dos mínimos quadrados, cujo gráfico segue apresentado na Figura 1.12.

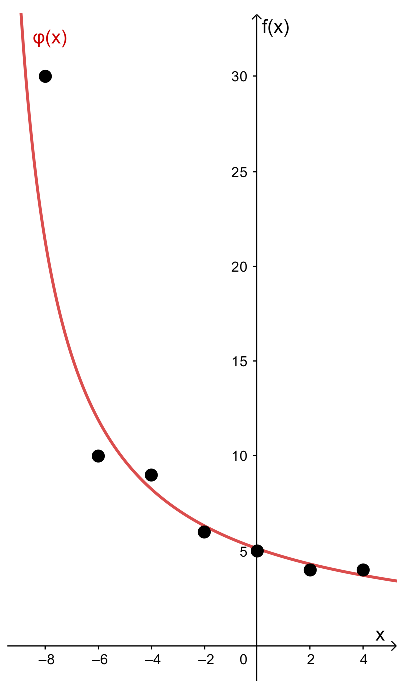

Figura 1.12: Gráfico referente à aproximação por mínimos quadrados do Exemplo 7

A partir da Figura 1.12, podemos observar que foi feita uma boa escolha para a função aproximadora $\varphi(x)$, a qual representa satisfatoriamente bem os valores tabelados, mostrando-se uma boa aproximação.

Quando vamos realizar o ajuste de uma função, podemos encontrar casos em que os dados tabelados, feito o diagrama de dispersão, devem ser ajustados por:

1) Uma hipérbole: $y \approx \dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 x} = \varphi(x)$

$$z = \frac{1}{y} \approx \alpha_1 + \alpha_x$$

2) Uma curva exponencial: $y \approx \alpha_1 \alpha_2^x = \varphi(x)$ se $y > 0$,

$$z = \ln(y) \approx \ln(\alpha_1) + x \ln(\alpha_2)$$

3) Uma curva geométrica: $y \approx \alpha_1 x^{\alpha_2} = \varphi(x)$ se $x > 0$ e $y > 0$,

$$z = \ln(y) \approx \ln(\alpha_1) + \alpha_2 \ln(x)$$

4) Uma curva trigonométrica: $y \approx \alpha_1 + \alpha_2 \cos(wx) = \varphi(x)$, tomando $t = \cos(wx)$:

$$\varphi(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t$$

Então como realizar a escolha da melhor função aproximadora?

Para isso temos que analisar os dados da função $f(x)$ e ver quais funções representariam melhor esses dados. Feito isso, deve-se realizar o teste de alinhamento (processo este que será descrito a seguir) com as funções escolhidas e comparar os resultados obtidos para escolher a "melhor" função aproximadora.

1.3.1 Teste de alinhamento

Uma vez escolhida uma função não linear em $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ para ajustar uma função, uma forma de verificar se a escolha foi razoável é aplicar o teste de alinhamento através dos seguintes passos:

1) Fazer a linearização da função não linear escolhida;

2) Fazer o diagrama de dispersão dos novos dados;

3) Se os pontos do diagrama estiverem alinhados, isto significará que a função não linear escolhida foi uma boa escolha.

Exemplo 8. Utilizando os dados da linearização do Exemplo 6, temos a seguinte tabela:

Tabela 1.9: Dados referentes ao Exemplo 6 para a função de linearização

x	$-1{,}0$	$-0{,}7$	$-0{,}4$	$-0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}5$	$0{,}8$	$1{,}0$
y	$36{,}547$	$17{,}264$	$8{,}155$	$3{,}852$	$1{,}820$	$0{,}860$	$0{,}406$	$0{,}246$
$z = \ln(y)$	$3{,}599$	$2{,}849$	$2{,}099$	$1{,}349$	$0{,}599$	$-0{,}151$	$-0{,}901$	$-1{,}402$

Construindo o diagrama de dispersão para os novos dados, obtemos:

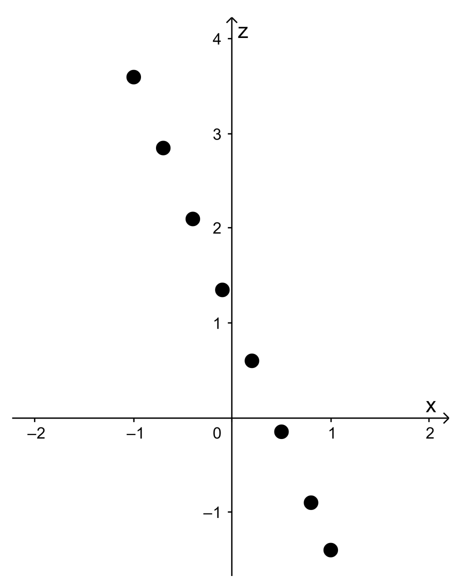

Figura 1.13: Gráfico referente ao Exemplo 8

Devido aos erros de observação e cálculos aproximados, consideramos satisfatório o diagrama de dispersão onde os pontos se distribuem aleatoriamente em torno de uma reta média, isto é, a função não linear escolhida mostrou-se uma boa escolha de acordo com o teste de alinhamento.

Exemplo 9. Utilizando os dados da linearização do Exemplo 7, temos:

Tabela 1.10: Dados referentes ao Exemplo 7 para a função de linearização

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4
y	30	10	9	6	5	4	4
$z = \dfrac{1}{y}$	$0{,}033$	$0{,}1$	$0{,}111$	$0{,}166$	$0{,}2$	$0{,}25$	$0{,}25$

Construindo o diagrama de dispersão para os novos dados, obtemos:

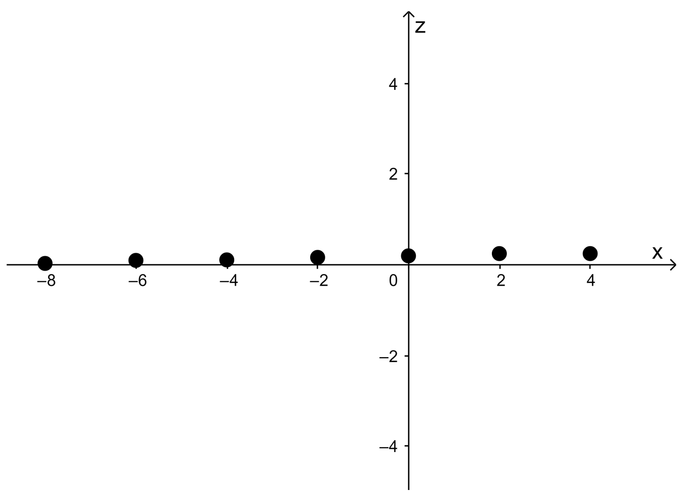

Figura 1.14: Gráfico referente ao Exemplo 9

Devido aos erros de observação e cálculos aproximados, consideramos satisfatório o diagrama de dispersão onde os pontos se distribuem aleatoriamente em torno de uma reta média, isto é, a função não linear escolhida mostrou-se uma boa escolha de acordo com o teste de alinhamento.

2 EXPERIMENTO DO LANÇAMENTO DE UM FOGUETE PROPULSIONADO A AR COMPRIMIDO

Este capítulo destina-se a uma sugestão de aula para trabalhar o Método dos Mínimos Quadrados em uma turma do 1º ano do Ensino Médio através de um experimento. Descreve-se todos os procedimentos necessários para que o professor desenvolva tal experimento com sucesso.

A proposta é trabalhar aproximação de funções através do Método dos Mínimos Quadrados utilizando dados que serão obtidos pelos próprios alunos durante o experimento de lançamento de foguetes construídos a partir de garrafas pet.

Segundo Souza (2017), "O foguete de garrafa PET aborda uma grande quantidade de fenômenos físicos, e assim destacamos que o professor nunca deve desprezar a simplicidade e a importância de um experimento". Visando a interdisciplinaridade, observa-se que essa proposta pode ser trabalhada juntamente com o professor de Física, pois aborda o conceito de Pressão, Dinâmica e Lançamento Oblíquo, conteúdos também trabalhados no 1º ano do Ensino Médio.

Tal proposta se divide em 4 partes, a saber: montagem do foguete, montagem da base de lançamento, lançamento do foguete e análise dos lançamentos e coleta de dados, as quais são descritas nas seções a seguir.

2.1 Montagem do foguete

Para a construção do foguete você precisará dos seguintes materiais:

Figura 2.1: Materiais necessários para a construção do foguete

- Fita adesiva;
- Balão de aniversário;
- Folha de acetato de papelaria (folha de capa de encadernação);
- 1 Garrafa com tampa (garrafa 1);
- 1 Garrafa sem a tampa (garrafa 2);
- Tesoura.

Para montar o foguete deve-se seguir os seguintes passos:

Figura 2.2: Passo 1 da montagem do foguete

Passo 1. Para fazer o nariz do foguete, utilize a garrafa pet com tampa (garrafa 1), cortando aproximadamente 15 cm abaixo da boca da garrafa.

Para que o foguete tenha estabilidade, encha o balão até que obtenha o tamanho aproximado de um ovo de galinha e encaixe-o na boca da garrafa, usando a tampa para fixar, conforme a Figura 2.2.

Passo 2. As aletas são fundamentais para a estabilidade do foguete durante o vôo. Faça 4 unidades de aletas utilizando a folha de acetato, seguindo o molde da Figura 2.3. Corte cada aleta nas linhas retas.

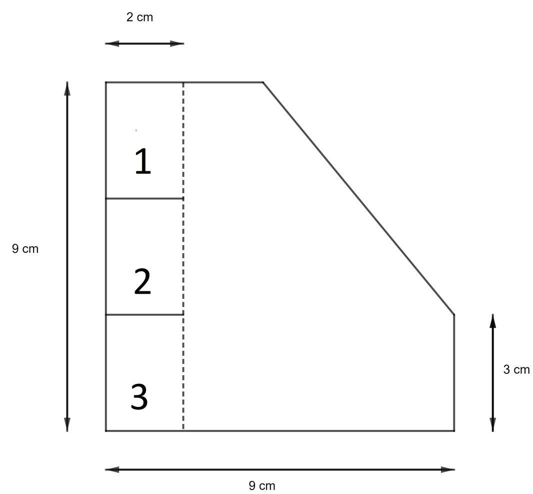

Figura 2.3: Passo 2 da montagem do foguete

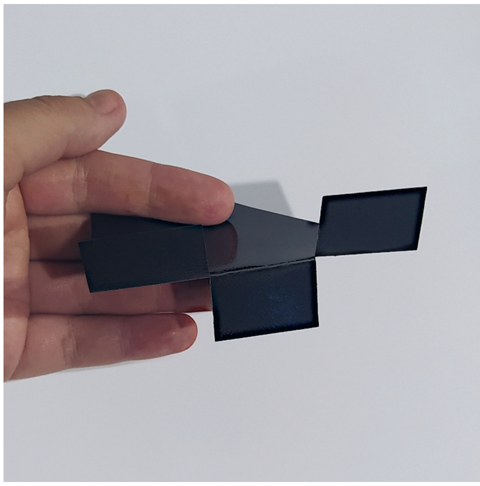

Figura 2.4: Passo 3 da montagem do foguete

Passo 3. Dobre as abas das aletas nas linhas pontilhadas da seguinte maneira:
Dobre a aba 1 para o lado esquerdo;
em seguida, dobre a aba 2 para o lado direito;
por fim, dobre aba 3 para o lado esquerdo,
conforme mostra a Figura 2.4.
Estas abas servirão para fixar a aleta no corpo do foguete.

Passo 4. Fixe as aletas próximo ao bocal da garrafa 2, dispostas 90º uma da outra, com fita adesiva, seguindo o modelo da Figura 2.5. As aletas precisam estar muito bem fixadas no corpo do foguete.

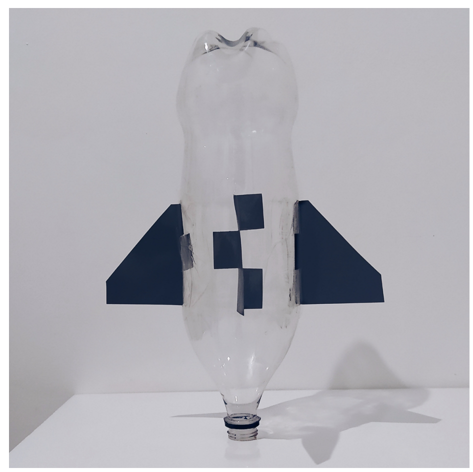

Figura 2.5: Passo 4 da montagem do foguete

Passo 5. Una as duas garrafas, encaixando o fundo de ambas, como mostra a Figura 2.6, utilizando fita adesiva.
As duas partes precisam estar bem fixadas para que não se soltem durante o experimento.

Figura 2.6: Passo 5 da montagem do foguete

2.2 Montagem da base de lançamento

Para a construção da base de lançamento do foguete você precisará dos seguintes itens:

Figura 2.7: Materiais necessários para a construção da base foguete

- Fita esparadrapo;

- 2 canos de 10 cm de comprimento e 20 mm de diâmetro;
- 1 balão de festa 6,5 liso;
- 1 caps de 20 mm de diâmetro;
- Fita dupla face ou fita adesiva;
- 2 joelhos ou cotovelos de 20 mm de diâmetro;
- Pedaço de câmara de ar de pneu de bicicleta;
- 1 T de 20 mm de diâmetro;
- Lixa para cano;
- 4 abraçadeiras de náilon pequena de cabeça de 3,6 mm;
- Luva de correr de esgoto de 40 mm de diâmetro;
- 3 canos de pvc de 20 mm de diâmetro e 20 cm de comprimento;
- 1 válvula de pneu de bicicleta;
- 1 tubo de cola para cano;
- Abraçadeira de metal para tubo de diâmetro de 20 mm;
- 1 registo de 20 mm de diâmetro;
- 3 metros de barbante;
- Bomba de ar de pneu de bicicleta.

Para realizar a montagem, deve-se realizar os seguintes passos:

Figura 2.8: Passo 1 da montagem da base do foguete

Passo 1. Primeiramente, faça um furo no caps com o mesmo diâmetro da válvula de pneu de bicicleta.
Você pode fazer este furo utilizando uma chave de fenda aquecida ou um prego, depois vá alargando lentamente o furo até que o bico da válvula passe apertado pelo furo. Para a vedação do ar, cole dentro do caps um quadradinho de 2 cm $\times$ 2 cm de câmara de ar de pneu de bicicleta, e atravesse pela válvula, como mostra a Figura 2.8.

Passo 2. Cole os cotovelos, o caps com a válvula e o registro nos canos de 20 cm de comprimento, como mostra a Figura 2.9. Coloque cola na parte interna das conexões e cole-as firmemente para que durante o experimento não haja escape de ar.

Figura 2.9: Passo 2 da montagem da base do foguete

Figura 2.10: Passo 3 da montagem da base do foguete

Passo 3. Cole o T com os canos de 10 cm nas laterais, e com o cano de 20 cm na parte central, como mostra a Figura 2.10.

Passo 4. Corte o bico do balão para utilizar apenas o anel.
Insira o anel do balão no tubo de 20 cm, posicionando-o a uma distância de 8,5 cm do T, como mostra a Figura 2.11.

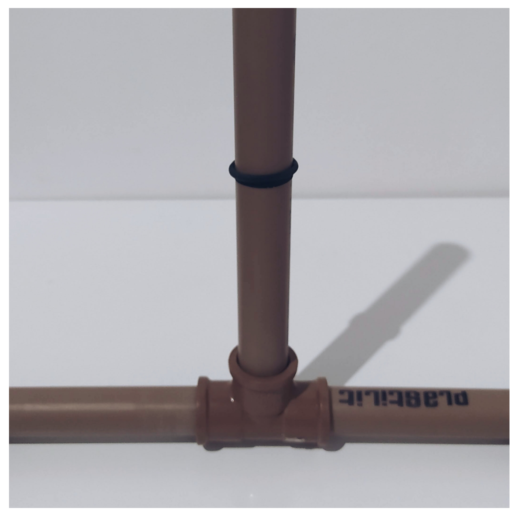

Figura 2.11: Passo 4 da montagem da base do foguete

Figura 2.12: Passo 5 da montagem da base do foguete

Passo 5. Passe uma volta de fita esparadrapo deixando o anel do balão centralizada na marca de 8,5 cm, como mostra a Figura 2.12.

Deixe o esparadrapo totalmente liso para não dificultar o lançamento do foguete.

Passe a fita dupla face no cano, abaixo do esparadrapo, ou a fita adesiva ao contrário, de forma que a parte colante fique para fora.

Passo 6. Para construir o gatilho, coloque uma garrafa pet na posição de lançamento (no tubo central de 20 cm), deixando o anel do balão no meio da boca da garrafa.

Em seguida, alinhe as 4 abraçadeiras de náilon conforme a posição de lançamento, como mostra a Figura 2.13, usando a fita adesiva colocada no Passo 5, para ajudar a posicioná-las no local.

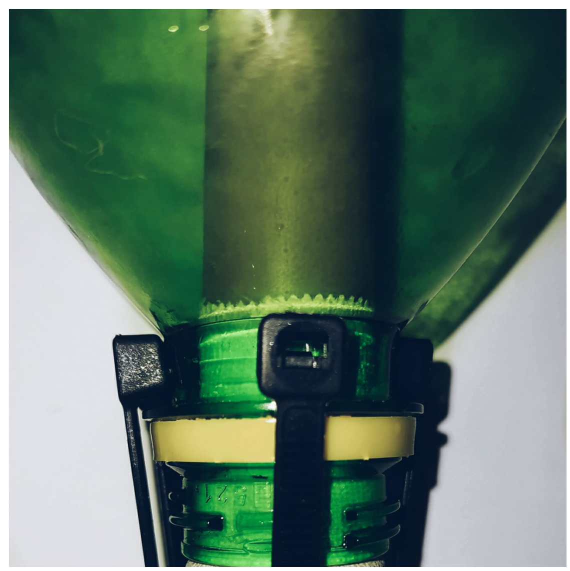

Figura 2.13: Passo 6 da montagem da base do foguete

Figura 2.14: Passo 7 da montagem da base do foguete

Passo 7. Use a abraçadeira de metal para fixar as abraçadeiras de náilon, como mostra a Figura 2.14.

Passo 8. Para construir o gatilho de liberação do foguete, faça dois furos na luva de correr de esgoto e amarre 3 m de barbante, conforme mostra a Figura 2.15.

Figura 2.15: Passo 8 da montagem da base do foguete

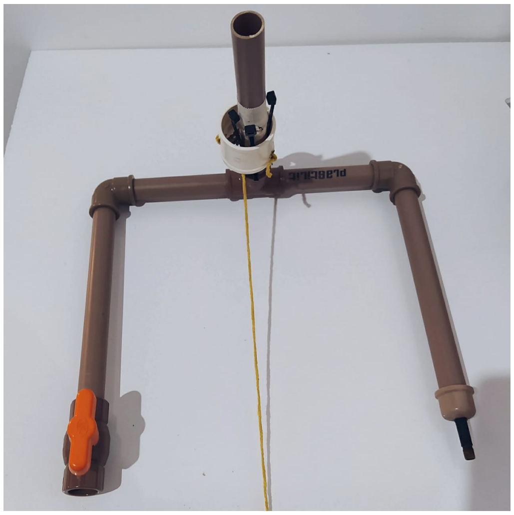

Figura 2.16: Passo 9 da montagem da base do foguete

Passo 9. Em seguida, una a parte central com as laterais da base (feitas no Passo 2), ajustando a angulação que deseja no experimento (neste caso foi usado o ângulo de 90°). Encaixe o gatilho de liberação na parte central com a amarração voltada para baixo como mostra a Figura 2.16.

Passo 10. Finalmente, você deverá utilizar a bomba de pneu de bicicleta encaixando-a na válvula de pneu de bicicleta, como mostra a Figura 2.17.

Figura 2.17: Passo 10 da montagem da base do foguete

2.3 Lançamento do foguete

Finalizada a construção do foguete e de sua base, o próximo passo é o lançamento do foguete.

Segundo Souza (2007), “O vôo de um foguete real se dá pela queima de combustível. A explosão faz com que haja ejeção dos gases provenientes da combustão em sentido contrário ao do movimento do foguete, impulsionando-o para frente.”

Nos lançamentos que iremos fazer, o combustível do foguete será água e ar comprimido, em que a água substitui os gases e a ejeção acontece pela compressão do ar ao invés de explosão.

Antes de explicar como realizar o lançamento, gostaríamos de ressaltar a extrema importância do registro, que foi montado no Passo 2 da construção da base do foguete. É importante observar que este registro funciona como uma espécie de dispositivo de segurança. Caso você bombeie ar comprimido dentro da base e, por alguma razão, desista de fazer o lançamento, deve-se abrir o registro antes de fazer qualquer movimento com a base ou com o foguete, ou seja, este dispositivo serve para retirar todo ar da base com segurança para evitar acidentes.

A Figura 2.18 mostra como será a montagem para o lançamento do foguete.

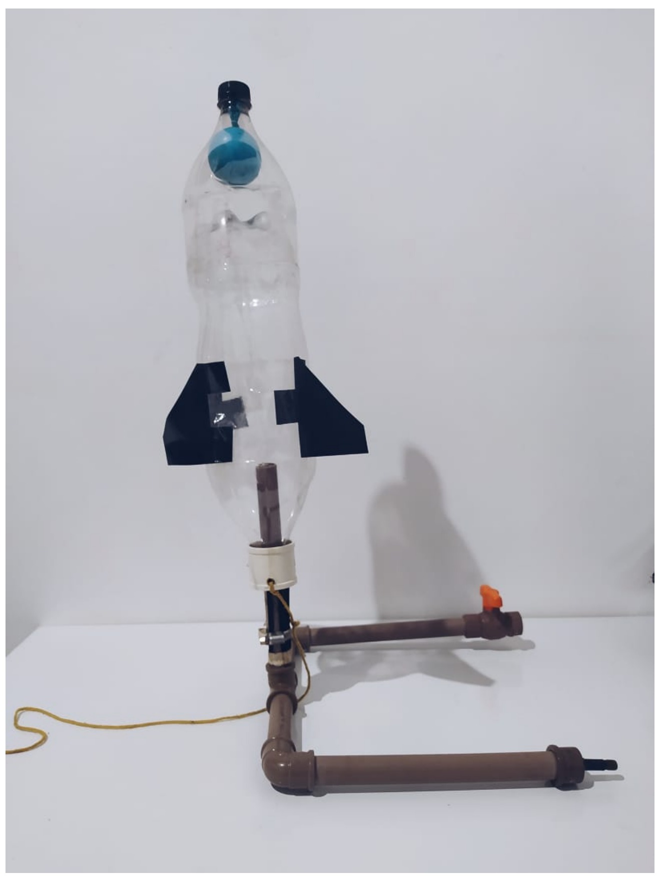

Figura 2.18: Foguete na base em posição para o lançamento

Assim, para que consiga fazer o lançamento do foguete com sucesso, deve-se seguir os seguintes passos:

Passo 1. Inicialmente, deve-se introduzir água dentro do foguete pela boca da garrafa sem tampa. A quantidade de água pode variar de acordo com o experimento, falaremos sobre isso na seção seguinte.

Passo 2. Encaixe o foguete na parte central da base, como mostra a Figura 2.18, encaixando a boca da garrafa nas abraçadeiras de náilon, conforme mostra a Figura 2.19.

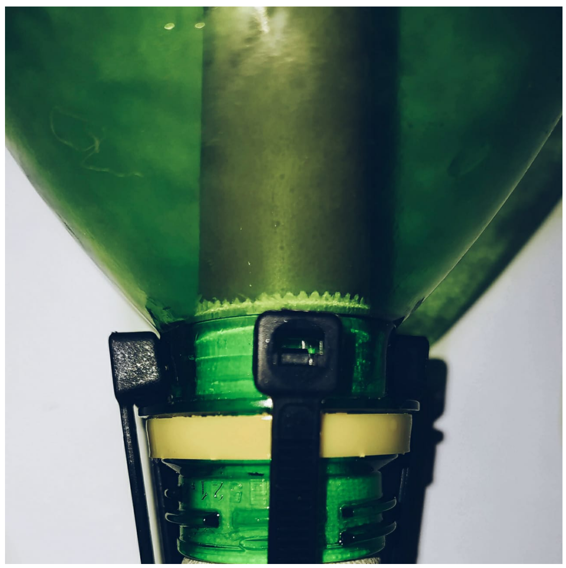

Figura 2.19: Encaixe do foguete na base de lançamento

Passo 3. Conforme mostra a Figura 2.20, levante o gatilho de liberação até tampar a boca da garrafa. Este gatilho ativa o lançamento da garrafa, enquanto ele estiver levantado, o foguete permanecerá travado e não se soltará da base enquanto não for liberado. Posicione o barbante de modo que ele passe por baixo da base e fique no sentido contrário ao lançamento, principalmente nos casos em que o ajuste do lançamento for diferente de 90º, para que não haja o risco de ser atingido pelo foguete.

Figura 2.20: Encaixe do gatilho de liberação para o lançamento

Passo 4. Encaixe a bomba de ar na válvula de pneu de bicicleta e bombeie a quantidade de ar desejada, conforme mostra a Figura 2.21.

Figura 2.21: Encaixe da bomba de ar na base de lançamento

Passo 5. Quando estiver pronto para lançar, segure a ponta do barbante preso ao gatilho, tomando o máximo de distância da base de lançamento. Em seguida, puxe o barbante, soltando o gatilho e liberando assim o foguete da base, conforme mostra a Figura 2.22.

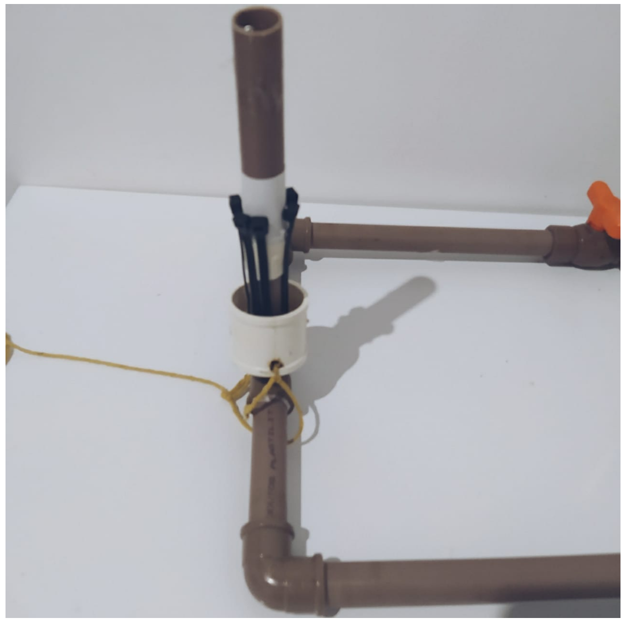

Figura 2.22: Posição do gatilho após o lançamento do foguete

2.4 Análise dos lançamentos e coleta de dados

Nesta seção discorreremos sobre como podem ser coletados e analisados os dados do experimento para, em seguida, serem utilizados na aplicação do Método dos Mínimos Quadrados.

Primeiramente, deve-se decidir se a análise será feita considerando a distância horizontal ou distância vertical percorrida na trajetória do foguete. No primeiro caso, você pode optar por colocar a base de lançamento na posição de 90º para obter maior altura, e no segundo caso posicionar a uma angulação de 45º para obter maior distância, conforme mostra a Figura 2.23.

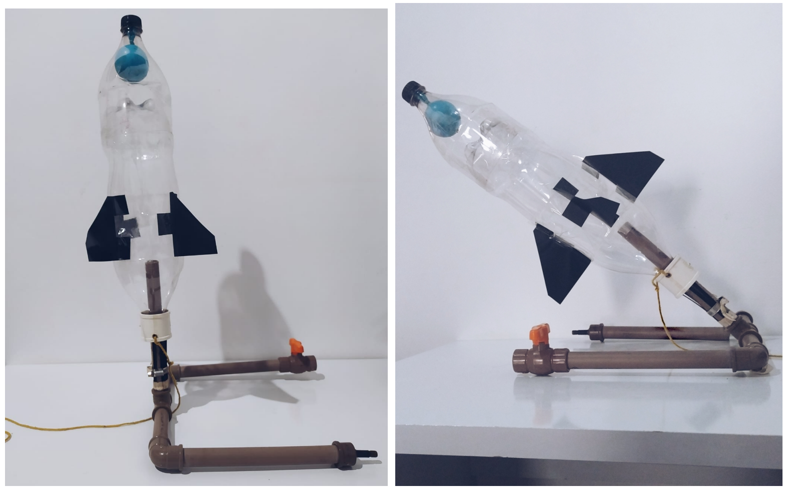

Figura 2.23: Ajuste de ângulo da base de lançamento

Tomada esta decisão, deve-se levar em consideração o desempenho do foguete, o que é determinado pela medida da distância horizontal ou vertical percorrida na trajetória do foguete.

Temos, então, que o objetivo do experimento é determinar, a partir dos dados coletados pelos alunos, uma relação entre a distância percorrida pelo foguete ao longo da trajetória e o número de bombeadas aplicadas para propulsioná-lo, de modo que possamos elaborar um modelo para fazer previsões de desempenho dado um número qualquer de bombeadas.

Podemos também analisar a variação de altura do foguete em relação a quantidade de água colocada na garrafa, ou seja, analisar o desempenho do foguete variando a quantidade de água, mas mantendo a mesma quantidade de bombeadas, podendo assim obter a quantidade ótima de água que deve-se utilizar no experimento em relação à altura alcançada pelo foguete.

Tomadas estas decisões, o professor deverá realizar os lançamentos com os alunos e coletar os dados desses lançamentos juntamente com eles. Sugere-se que o lançamento seja feito em conjunto com o professor de Física e num local aberto, como por exemplo, numa quadra não coberta.

3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS ATRAVÉS DO EXPERIMENTO DE LANÇAMENTO DE UM FOGUETE

Nesta seção, serão apresentados alguns exemplos de aplicação do Método dos Mínimos Quadrados no 1º ano do Ensino Médio utilizando os dados obtidos no experimento de lançamento de um foguete descrito no Capítulo 2. Nestas aplicações, os dados coletados no experimento serão ajustados por três diferentes tipos de funções aproximadoras, a saber:

- Função polinomial do 1º grau;
- Função polinomial do 2º grau;
- Função exponencial.

O objetivo desta seção é mostrar, de forma objetiva, como a proposta da atividade pode ser desenvolvida em sala de aula, descrevendo cada etapa que deve ser realizada ao longo da aplicação do método.

3.1 Exemplo 1

Primeiramente, o professor deve auxiliar os alunos na construção de uma tabela e um diagrama de dispersão com os dados encontrados durante o experimento de lançamento do foguete, levando em consideração o desempenho do foguete.

Neste exemplo foi utilizada a análise do desempenho vertical do foguete, em que para o experimento utilizou-se uma quantidade de água de 250 ml, variando a quantidade de bombeadas.

Os resultados obtidos neste experimento estão apresentados na Tabela 3.1, onde a variável x representa a quantidade de bombeadas e $f(x)$ representa a altura alcançada pelo foguete em metros.

Tabela 3.1: Dados referentes ao Exemplo 1

$bombeadas$	10	20	30	40	60
$altura$	6,66	6,95	19,83	21,16	29,88

Construindo o diagrama de dispersão para os dados da Tabela 3.1, obtemos:

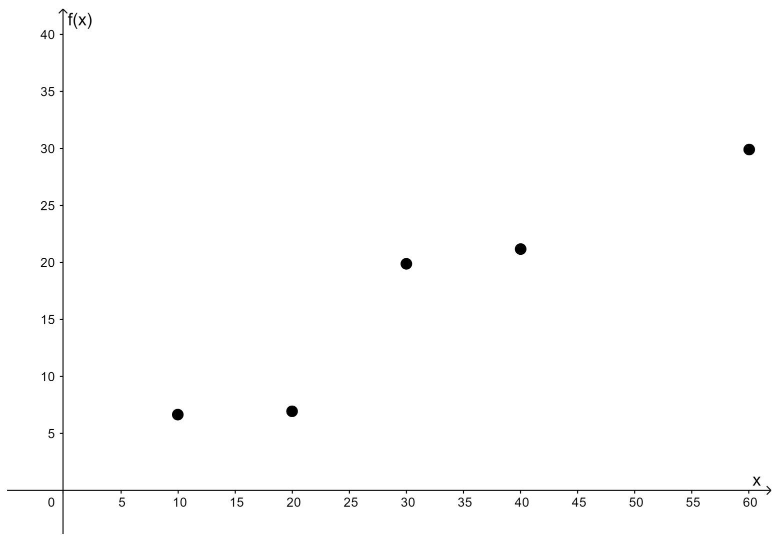

Figura 3.1: Diagrama de dispersão para os dados da Tabela 3.1

Neste momento, o professor deve questionar os alunos se, a partir do diagrama construído por eles, é possível estimar a altura do foguete com uma quantidade de bombeadas diferente daquelas utilizadas nos lançamentos do experimento.

Após a discussão, o professor deve questionar os alunos sobre o fato de que, se houvesse uma função que representasse os dados obtidos pelo experimento, eles conseguiriam estimar este valor com mais facilidade e com certa margem de segurança. É neste momento que o professor deve introduzir o conceito do Método dos Mínimos Quadrados, ressaltando a importância de utilizar este método (assunto já abordado no início do Capítulo 1).

Em seguida, para iniciar a aplicação do método, deve-se analisar o diagrama de dispersão juntamente com os alunos, para que possam definir qual tipo de função melhor se adequa aos dados ali representados. Por fim, feita tal escolha, deve-se aplicar o Método dos Mínimos Quadrados para determinar esta função.

A seguir, são apresentados diferentes ajustes de curvas para o experimento realizado no Exemplo 1, ou seja, para o diagrama de dispersão da Figura 3.1.

3.1.1 Aproximação por uma função polinomial do 1º grau

No caso em que os alunos sugerirem o ajuste de curva para o diagrama de dispersão da função por uma reta (caso eles não façam essa sugestão, ela pode ser apresentada pelo professor), deve-se, neste caso, considerar uma reta passando pela origem. Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, temos que a função aproximadora será:

$$\varphi(x) = \alpha x, \tag{3.1}$$

com $g_1(x) = x$.

Para encontrar tal função, o professor deve apresentar aos alunos a fórmula do método a seguir (note que, neste caso não há um sistema para resolver, pois temos apenas uma incógnita para determinar, logo, apenas uma equação para resolver):

$$\left[\sum_{k=1}^{n} g(x_k)g(x_k)\right]\alpha = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} g(x_k)^2\right]\alpha = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(x_k)$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2\right]\alpha = \sum_{k=1}^{n} (x_k)f(x_k), \tag{3.2}$$

onde:

n - representa o número de pontos (no caso, lançamentos);

x_k - representa a quantidade de bombeadas;

$f(x_k)$ - representa a altura do foguete.

Em seguida, deve-se explicar ao aluno que o objetivo através desta fórmula é encontrar o valor de α e, com isso, encontrar a reta que melhor se ajusta ao diagrama de dispersão, ou seja, determinar a Eq. (3.1).

Para calcular os valores dos somatórios presentes na Eq. (3.2), o professor pode utilizar a tabela a seguir, a qual facilita o cálculo do somátorio para alunos do Ensino Médio.

Tabela 3.2: Modelo de tabela para o cálculo dos somatórios presentes na Eq. (3.2)

k	x_k	$f(x_k)$	$(x_k)^2$	$f(x_k)(x_k)$
1				
2				
3				
$\vdots$				
n				
$\sum$				

Feito isso, os alunos devem, em seguida, substituir os valores dos somatórios encontrados na Tabela 3.2 na Eq. (3.2) encontrando assim o valor de α. Por fim, basta substituir o valor de α na Eq. (3.1) para obter a equação da reta que representa uma aproximação para a função dada pelo diagrama de dispersão da Figura 3.1.

Após determinar a função aproximadora, seria interessante propor aos alunos que construam o gráfico da função encontrada, ou até mesmo utilizar um software para construir o gráfico juntamente com eles.

Para exemplificar este caso, vamos apresentar a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para os dados obtidos no Exemplo 1 (ver Tabela 3.1). Calculando o valor dos somatórios presentes na Equação (3.2), obtemos:

Tabela 3.3: Somatórios presentes na Eq. (3.2)

k	x_k	$f(x_k)$	$(x_k)^2$	$f(x_k)(x_k)$
1	10	6,66	100	66,6
2	20	6,95	400	139
3	30	19,83	900	594,9
4	40	21,16	1600	846,4
5	60	29,88	3600	1792,8
$\sum$	160	84,48	6600	3439,7

Portanto, o valor dos somatórios presentes na equação (3.2) são dados por:

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)^2 = 6600$$

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)f(x_k) = 3439{,}7.$$

Substituindo os valores destes somatórios na Equação (3.2), obtemos:

$$6600\alpha = 3439{,}7 \Rightarrow \alpha = \frac{3439{,}7}{6600} \approx 0{,}52$$

Portanto, $\varphi(x) = 0{,}52x$ é a reta que melhor se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função dada pela Tabela 3.1, a qual representa a altura atingida pelo foguete em função do número de bombeadas, cujo gráfico segue apresentado na Figura 3.2.

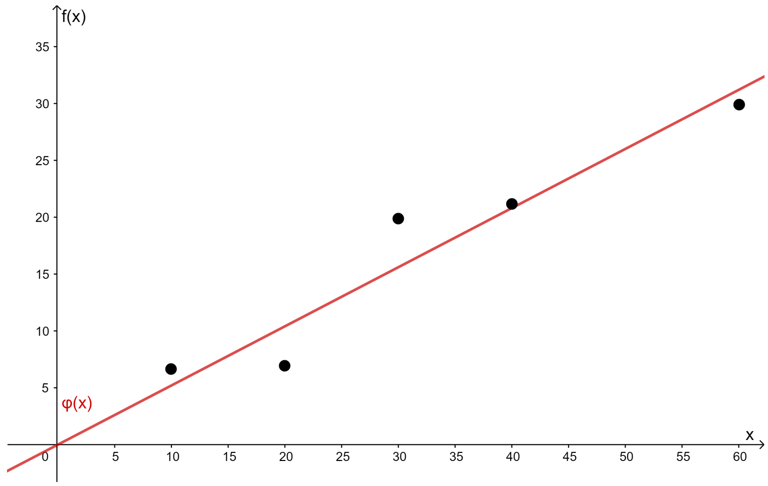

Figura 3.2: Gráfico referente à aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 1 utilizando uma reta

3.1.2 Aproximação por uma função polinomial do 2º grau

No caso em que os alunos sugerirem o ajuste de curva para o diagrama de dispersão da função por uma parábola (caso eles não façam essa sugestão, ela pode ser apresentada pelo professor), deve-se, neste caso, fazer o ajuste usando uma parábola que passe pela origem. Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, temos que a função aproximadora será:

$$\varphi(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x, \tag{3.3}$$

com $g_1(x) = x^2$ e $g_2(x) = x$.

Para encontrar tal função, o professor deve apresentar aos alunos a fórmula do método a seguir:

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{n} g_1(x_k)g_1(x_k)\right]\alpha_1 + \left[\sum_{k=1}^{n} g_2(x_k)g_1(x_k)\right]\alpha_2 = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)g_1(x_k) \\ \\ \left[\sum_{k=1}^{n} g_1(x_k)g_2(x_k)\right]\alpha_1 + \left[\sum_{k=1}^{n} g_2(x_k)g_2(x_k)\right]\alpha_2 = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)g_2(x_k) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k)^4\right]\alpha_1 + \left[\sum_{k=1}^{n}(x_k)^3\right]\alpha_2 = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k)^2 \\
\\
\left[\sum_{k=1}^{n}(x_k)^3\right]\alpha_1 + \left[\sum_{k=1}^{n}(x_k)^2\right]\alpha_2 = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k)
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

onde:

n - representa o número de pontos;

x_k - representa a quantidade de bombeadas;

$f(x_k)$ - representa a altura do foguete.

A priori, pode ser que os alunos se assustem com tal sistema envolvendo somatórios. No entanto, ao verem o quão simples é calcular os somatórios através das tabelas, essa percepção por parte deles provavelmente mudará.

Em seguida, deve-se explicar ao aluno que o objetivo através desta fórmula é encontrar o valor de α_1 e α_2, e com isso, encontrar a parábola que melhor se ajusta ao diagrama de dispersão, ou seja, determinar a Eq. (3.3).

Para calcular os valores dos somatórios presentes no sistema (3.4), o professor pode utilizar a tabela a seguir, a qual facilita o cálculo do somátorio para alunos do Ensino Médio.

Tabela 3.4: Modelo de tabela para o cálculo dos somatórios presentes no sistema (3.4)

k	x_k	$f(x_k)$	$(x_k)^2$	$(x_k)^3$	$(x_k)^4$	$f(x_k)(x_k)$	$f(x_k)(x_k)^2$
1							
2							
3							
$\vdots$							
$\sum$							

Feito isso, os alunos devem, em seguida, substituir os valores encontrados na Tabela 3.4 no sistema de equações (3.4), determinando, assim o valor de α_1 e α_2. Por fim, basta substituir os valores de α_1 e α_2 na Eq. (3.3) para obter a equação da parábola que representa uma aproximação para a função dada pelo diagrama de dispersão da Figura 3.1.

Após determinar a função aproximadora, seria interessante propor aos alunos que construam o gráfico da função encontrada.

Para exemplificar este caso, vamos apresentar a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para os dados obtidos no Exemplo 1 (ver Tabela 3.1).

Calculando o valor dos somatórios presentes no sistema de equação (3.4), obtemos:

Tabela 3.5: Somatórios presentes no sistema de equações (3.4)

k	x_k	$f(x_k)$	$(x_k)^2$	$(x_k)^3$	$(x_k)^4$	$f(x_k)(x_k)$	$f(x_k)(x_k)^2$
1	10	6,66	100	1000	10000	66,6	666
2	20	6,95	400	8000	160000	139	2780
3	30	19,83	900	27000	810000	549,9	17847
4	40	21,16	1600	64000	2560000	846,4	33856
5	60	29,88	3600	216000	12960000	1792,8	107568
$\sum$	160	84,48	6600	316000	16500000	3439,7	162717

Portanto, o valor dos somatórios presentes na Eq. (3.4) são dados por:

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)^4 = 16500000$$

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)^3 = 316000$$

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)^2 = 6600$$

$$\sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k)^2 = 162717$$

$$\sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k) = 3439{,}7.$$

Substituindo os valores destes somatórios no sistema (3.4), obtemos:

$$\begin{cases} 16500000\alpha_1 + 316000\alpha_2 = 162717 \\ 316000\alpha_1 + 6600\alpha_2 = 3439{,}7 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0{,}000146 \text{ e } \alpha_2 = 0{,}514163$$

Então, $\varphi(x) = 0{,}000146x^2 + 0{,}514163x$ é a parábola que melhor se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função dada pela Tabela 3.1, a qual representa a altura atingida pelo foguete em função do número de bombeadas, cujo gráfico segue apresentado na Figura 3.3.

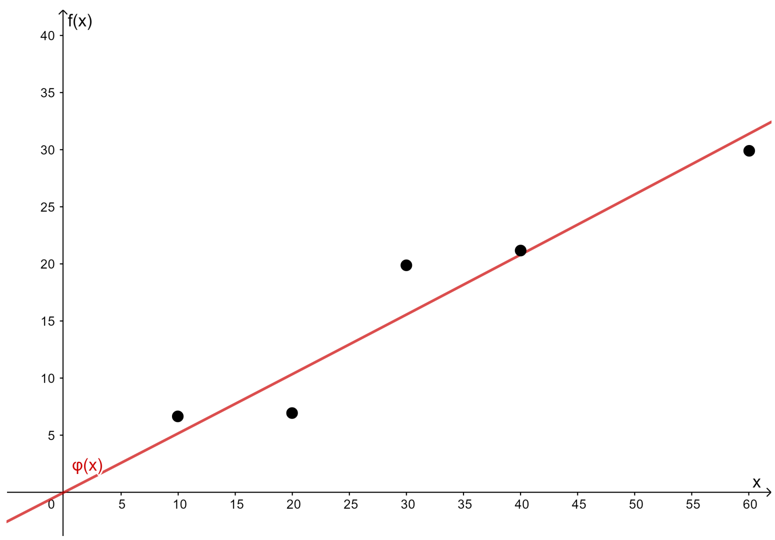

Figura 3.3: Gráfico referente à aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 1 utilizando uma parábola

3.1.3 Aproximação por uma função exponencial

Considere, agora, o caso em que os alunos sugiram o ajuste de curva para o diagrama de dispersão por uma curva exponencial (caso eles não façam essa sugestão, ela pode ser apresentada pelo professor). Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, a função aproximadora será:

$$y \approx \alpha_1 x^{\alpha_2} = \varphi(x) \tag{3.5}$$

Neste caso teremos que realizar a linearização, então a linearização a ser realizada é (ver descrição do processo de linearização na Seção 1.3):

$$z = \ln(y) \approx \ln(\alpha_1) + \alpha_2 \ln(x) = a_1 + a_2 \ln(x),$$

ou seja, minimizamos a soma dos quadrados dos desvios nos logaritmos de y, para os logaritmos de x. Assim, ao invés de ajustar y por quadrados mínimos, iremos ajustar $z = \ln(y)$, encontrando

$$\phi(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x), \tag{3.6}$$

onde $a_1 = \ln(\alpha_1)$ e $a_2 = \alpha_2$, com $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = ln(x)$.

Para encontrar tal função, o professor deve apresentar aos alunos a fórmula do método a seguir:

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{n} g_1(x_k)g_1(x_k)\right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^{n} g_2(x_k)g_1(x_k)\right] a_2 = \sum_{k=1}^{n} z(x_k)g_1(x_k) \\ \\ \left[\sum_{k=1}^{n} g_1(x_k)g_2(x_k)\right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^{n} g_2(x_k)g_2(x_k)\right] a_2 = \sum_{k=1}^{n} z(x_k)g_2(x_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{n} 1\right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)\right] a_2 = \sum_{k=1}^{n} \ln(y_k) \\ \\ \left[\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)\right] a_1 + \left[\sum_{k=1}^{n} \ln^2(x_k)\right] a_2 = \sum_{k=1}^{n} \ln(y_k)\ln(x_k) \end{cases} \tag{3.7}$$

onde:

n - representa o número de pontos;

x_k - representa a quantidade de bombeadas;

Em seguida, explicar que, neste caso, após terem resolvido o sistema de equação, deve-se calcular os valores de α_1 e α_2, tomando $\alpha_1 = e^{a_1}$ e $\alpha_2 = a_2$.

Para calcular os valores dos somatórios presentes no sistema (3.7), o professor pode utilizar a tabela a seguir, a qual facilita o cálculo do somatório para alunos do Ensino Médio.

Tabela 3.6: Modelo de tabela para o cálculo dos somatórios presentes no sistema (3.7)

k	x_k	$\ln(y_k)$	$\ln(x_k)$	$\ln^2(x_k)$	$\ln(y_k)\ln(x_k)$
1					
2					
$\vdots$					
n					
$\sum$					

Feito isso, os alunos devem, em seguida, substituir os valores encontrados na Tabela 3.6 no sistema de equações (3.7) calculando, assim, os valores de a_1 e a_2 para, em seguida, calcularem o valor de α_1 e α_2. Por fim, basta substituir, estes valores na Eq.(3.5) para obter a função exponencial que representa uma aproximação para a função dada pelo diagrama de dispersão da Figura 3.1.

Após determinar a função aproximadora, seria interessante propor aos alunos que construam o gráfico da função.

Para exemplificar este caso, vamos apresentar a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para os dados obtidos no Exemplo 1 (ver tabela 3.1).

Calculando o valor dos somatórios presentes no sistema de equações (3.7), obtemos:

Tabela 3.7: Somatórios presentes no sistema de equações (3.7)

k	x_k	$\ln(y_k)$	$\ln(x_k)$	$\ln^2(x_k)$	$\ln(y_k)\ln(x_k)$
1	10	1,8961	2,3026	5,3020	4,3660
2	20	1,9387	2,9957	8,9742	5,8078
3	30	2,9892	3,4012	11,5682	10,1669
4	40	3,0521	3,6889	13,6080	11,2589
5	60	3,3972	4,0943	16,7636	13,9093
$\sum$	160	13,2733	16,48274	56,2160	45,5089

Portanto, os valores dos somatórios serão:

$$\sum_{k=1}^{5} 1 = 5$$
$$\sum_{k=1}^{5} \ln(x_k) = 16{,}48274$$
$$\sum_{k=1}^{5} \ln^2(x_k) = 56{,}2160$$
$$\sum_{k=1}^{5} \ln(y_k) = 13{,}2733$$
$$\sum_{k=1}^{5} \ln(y_k)\ln(x_k) = 45{,}5089.$$

Substituindo o valor de cada somatório em (3.7), obtemos:

$$\begin{cases} 5a_1 + 16{,}48274a_2 = 13{,}2733 \\ 16{,}48274a_1 + 56{,}2160a_2 = 45{,}5089 \end{cases} \Rightarrow a_1 \approx -0{,}42 \quad \text{e} \quad a_2 \approx 0{,}9324.$$

Calculando os valores de α_1 e α_2, temos que:

$\alpha_1 = e^{a_1} \Rightarrow \alpha_1 = e^{-0{,}42} \approx 0{,}6570$

$\alpha_2 = a_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}9324$

Assim, a função $\varphi(x) = \alpha_1 x^{\alpha_2} = 0{,}6570x^{0{,}9324}$ é a função exponencial que melhor aproxima $f(x)$, no sentido dos mínimos quadrados, cujo gráfico segue apresentado na Figura 3.4.

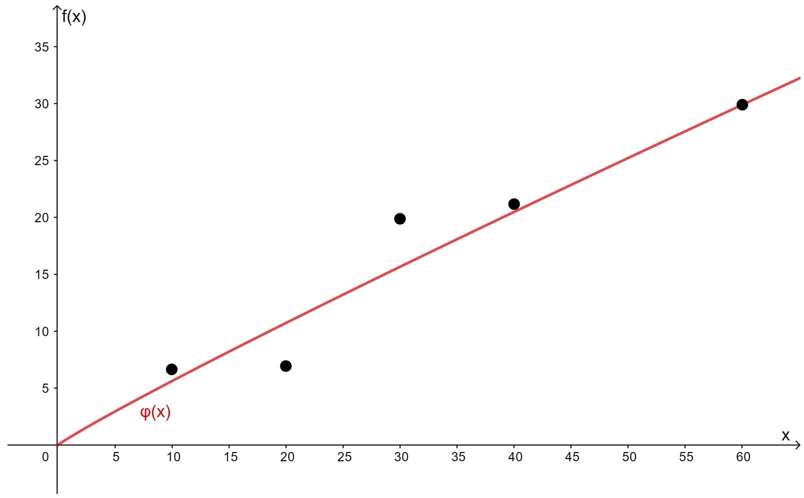

Figura 3.4: Gráfico referente a aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 1 utilizando uma função exponencial

Analisando os gráficos das funções aproximadoras encontrada nesta seção, podemos perceber que, mesmo que as funções do 1º e 2º grau tenham se mostrado uma boa aproximação, a função exponencial realizou o melhor ajuste, como mostra a Figura 3.5.

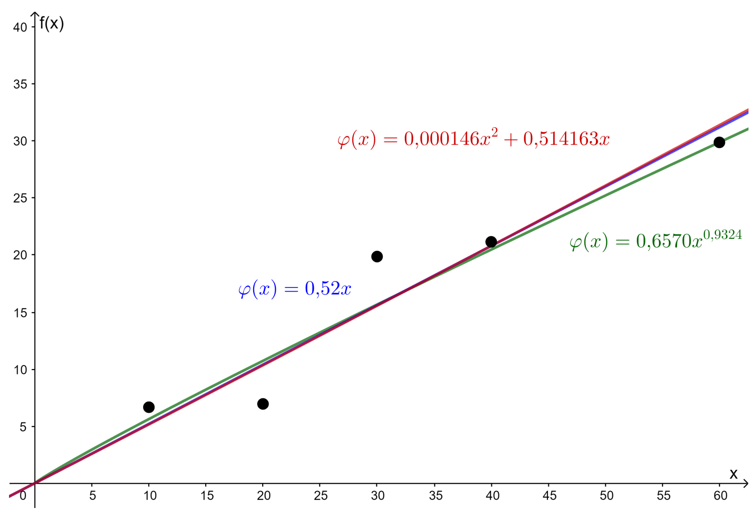

Figura 3.5: Gráfico referente às aproximações por Mínimos Quadrados do Exemplo 1

3.2 Exemplo 2

Neste exemplo foi utilizada a análise do desempenho vertical do foguete, em que para o experimento utilizou-se uma quantidade de água de 500 ml, variando a quantidade de bombeadas.

Os resultados obtidos neste experimento estão apresentados na Tabela 3.8, onde a variável x representa a quantidade de bombeadas e $f(x)$ representa a altura alcançada pelo foguete em metros.

Tabela 3.8: Dados referentes ao Exemplo 2

$bombeadas$	8	10	20	30	40
$altura$	10,4	12,6	14	22,63	34,6

Construindo o diagrama de dispersão para os dados da Tabela 3.8, obtemos:

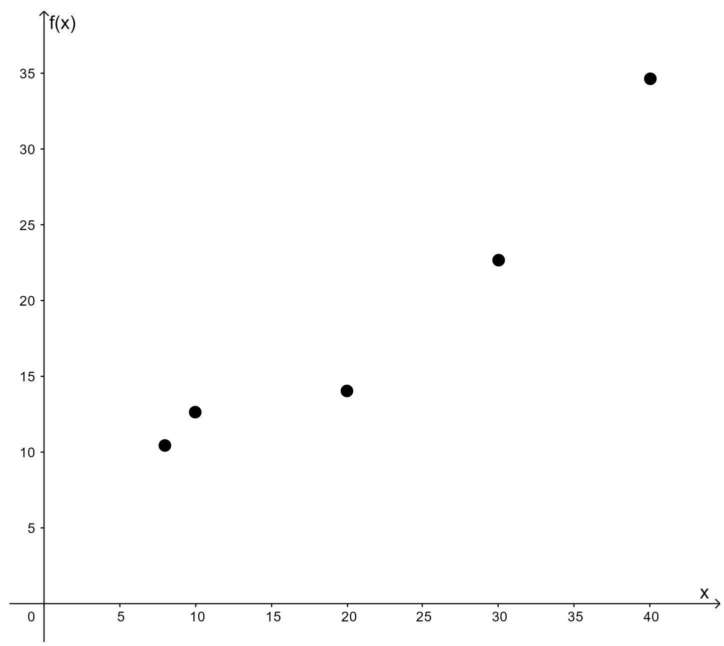

Figura 3.6: Diagrama de dispersão para os dados da Tabela 3.8

A seguir, são apresentados diferentes ajustes de curvas para o experimento realizado no Exemplo 2, ou seja, para o diagrama de dispersão da Figura 3.6.

3.2.1 Aproximação por uma função polinomial do 1º grau

Neste caso, assim como no Exemplo 1, deve-se considerar uma reta passando pela origem. Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, temos que a função aproximadora será:

$$\varphi(x) = \alpha x.$$

Para determinar o valor de α, a seguinte equação deve ser resolvida:

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)^2\alpha = \sum_{k=1}^{5}(x_k)f(x_k). \tag{3.8}$$

Calculando o valor dos somatórios presentes na Eq. (3.8) através da Tabela modelo, obtemos:

Tabela 3.9: Somatórios presentes na Eq. (3.8)

k	x_k	$f(x_k)$	$(x_k)^2$	$f(x_k)(x_k)$
1	8	10,4	64	83,2
2	10	12,6	100	126
3	20	14	400	280
4	30	$22,63$	900	678,9
5	40	34,6	1600	1384
$\sum$	108	94,23	3064	2552,1

Portanto, o valor dos somatórios presentes na Eq. (3.8), são dados por:

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)^2 = 3064$$

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)f(x_k) = 2.552{,}1$$

Substituindo estes valores na equação (3.8), temos então que

$$3.064\alpha = 2.552{,}1 \Rightarrow \alpha = \frac{2.552{,}1}{3.064} \approx 0{,}8329$$

Então, $\varphi(x) = 0{,}8329x$ é a reta que melhor se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função dada pela Tabela 3.8, a qual representa a altura atingida pelo foguete em função do número de bombeadas, cujo gráfico está representado na Figura 3.7.

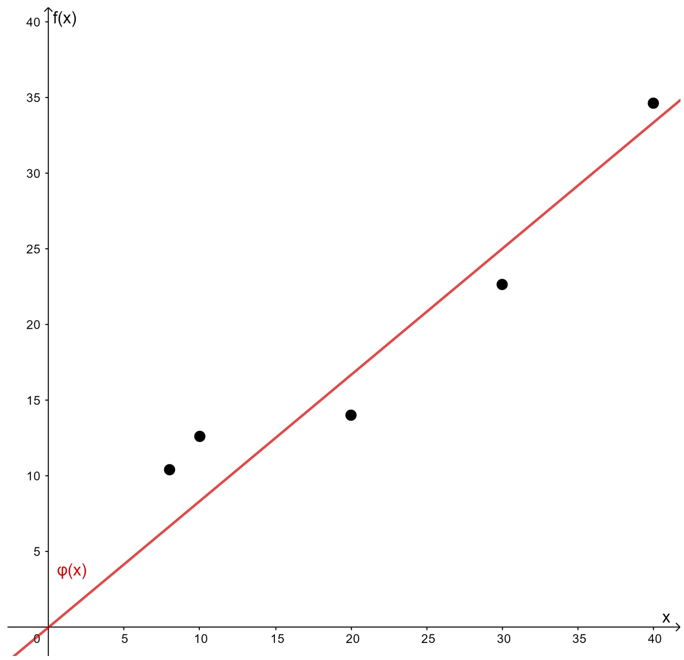

Figura 3.7: Gráfico referente a aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 2 utilizando uma reta

3.2.2 Aproximação por uma função polinomial do 2º grau

Neste caso, assim como no Exemplo 1, deve-se considerar uma parábola passando pela origem. Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, temos que a função aproximadora será:

$$f(x) \approx \varphi(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x. \tag{3.9}$$

Para calcular os valores de α_1 e α_2, temos que resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(x_k)^4\right]\alpha_1 + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(x_k)^3\right]\alpha_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k) \\ \\ \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(x_k)^3\right]\alpha_1 + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(x_k)^4\right]\alpha_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k)^2 \end{cases} \tag{3.10}$$

Para calcular o valor dos somatórios utilizaremos a tabela a seguir:

Tabela 3.10: Somatórios presentes no sistema de equações (3.10)

k	x_k	$f(x_k)$	$(x_k)^2$	$(x_k)^3$	$(x_k)^4$	$f(x_k)(x_k)$	$f(x_k)(x_k)^2$
1	8	10,4	64	512	4096	83,2	665,6
2	10	$12,6$	100	1000	10000	126	1260
3	20	14	400	8000	160000	280	5600
4	30	22,63	900	27000	810000	678,9	20367
5	40	34,6	1600	64000	2560000	1384	55,360
$\sum$	108	94,23	3064	100512	3544096	2552,1	83252,6

Portanto, os valores dos somatórios presentes no sistema de equação (3.10), são dados por:

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)^4 = 3544096$$
$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)^3 = 100512$$
$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)^2 = 6600$$
$$\sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k) = 2552{,}1$$
$$\sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k)^2 = 83252{,}6$$

Substituindo os valores destes somatórios no sistema (3.10), obtemos:

$$\begin{cases} 3064\alpha_1 + 100512\alpha_2 = 2552{,}6 \\ 100512\alpha_1 + 3544096\alpha_2 = 83252{,}6 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 \approx 0{,}8950 \text{ e } \alpha_2 = -0{,}00189$$

Então, $\varphi(x) = 0{,}8950x - 0{,}00189x^2$ é a parábola que melhor se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função tabelada, cujo gráfico segue apresentado na Figura 3.8.

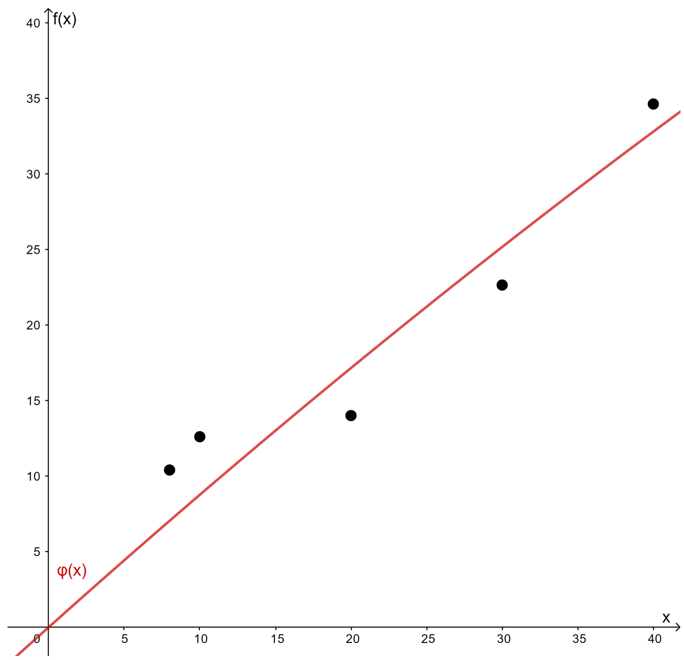

Figura 3.8: Gráfico referente a aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 2 utilizando uma parábola

3.2.3 Aproximação por uma função exponencial

Considere, agora, o caso em que iremos realizar o ajuste por uma função exponencial. Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, a função aproximadora será:

$$\varphi(x) = \alpha_1 e^{\alpha_2 x}. \tag{3.11}$$

Como a função é não linear nos parâmetros deve-se, inicialmente, encontrar o valor dos parâmetros a_1 e a_2, que serão solução do seguinte sistema (ver descrição do processo de linearização na Seção 1.3):

$$\begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 1\right] a_1 + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (x_k)\right] a_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} \ln(y_k) \\ \\ \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (x_k)\right] a_1 + \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2\right] a_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} (x_k)\ln(y_k) \end{cases} \tag{3.12}$$

Em seguida, obtidos os valores de a_1 e a_2, usaremos estes valores para encontrar os parâmetros originais tomando $\alpha_1 = e^{a_1}$ e $\alpha_2 = a_2$.

Calculando o valor dos somatórios presentes no sistema de equação (3.12), obtemos:

Tabela 3.11: Somatórios presentes no sistema de equações (3.12)

k	x_k	$\ln(y_k)$	$(x_k)^2$	$(x_k)\ln(y_k)$
1	8	2,3418	64	18,7344
2	10	2,5337	100	25,337
3	20	2,6391	900	93,579
4	30	3,1193	900	93,579
5	40	3,5439	1.600	141,756
$\sum$	108	14,1778	3.604	332,1884

Portanto, os valores dos somatórios serão:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 1 = 5$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (x_k) = 108$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \ln(y_k) = 14{,}1778$

$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)^2 = 3.064$$
$$\sum_{k=1}^{5}(x_k)\ln(y_k) = 332{,}1884$$

Substituindo o resultado de cada somatório em (3.12), obtemos:

$$\begin{cases} 5a_1 + 108a_2 = 114{,}1778 \\ \\ 108a_1 + 3.064a_2 = 332{,}1884 \end{cases} \qquad \Rightarrow a_1 \approx 2{,}0690 \qquad \text{e} \qquad a_2 \approx 0{,}0354$$

Calculando os valores de α_1 e α_2, temos que:

$\alpha_1 = e^{a_1} \Rightarrow \alpha_1 = e^{2{,}069} \approx 7{,}9169$

$\alpha_2 = a_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}0354$

Assim, a função $\varphi(x) = \alpha_1 e^{\alpha_2 x} = 7{,}9169e^{0{,}0354x}$ é a função exponencial que melhor aproxima $f(x)$ pelo Método dos Mínimos Quadrados da função tabelada, cujo gráfico segue apresentado na Figura 3.9.

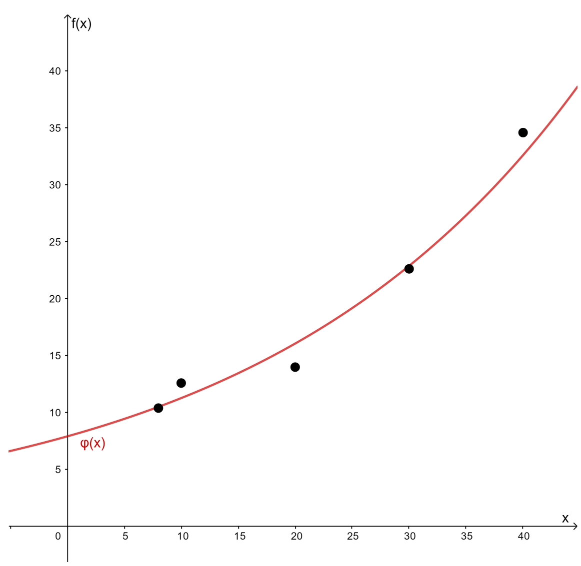

Figura 3.9: Gráfico referente a aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 2 utilizando uma função exponencial

Analisando os gráficos das funções aproximadoras encontradas nesta seção, podemos perceber que, mesmo que as funções do 1º e 2º grau tenham se mostrado uma boa aproximação, a função exponencial realizou o melhor ajuste, como mostra a Figura 3.10.

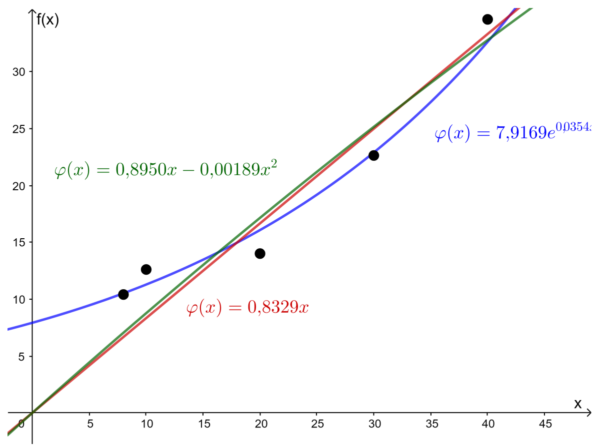

Figura 3.10: Gráfico referente a aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 2

3.3 Exemplo 3

Neste exemplo foi utilizada a análise de desempenho vertical do foguete com 30 bombeadas, em que agora, diferentemente dos exemplos anteriores, varia-se a quantidade de água.

Os resultados obtidos neste experimento estão apresentados na Tabela 3.12, onde a variável x representa a quantidade de água em litros e $f(x)$ representa a altura alcançada pelo foguete em metros:

Tabela 3.12: Dados referentes ao Exemplo 3

$litros$	0,250	0,500	0,750	1	1,250
$altura$	19,83	22,63	24,23	23,5	19,95

Construindo o diagrama de dispersão para os dados da Tabela 3.12, obtemos:

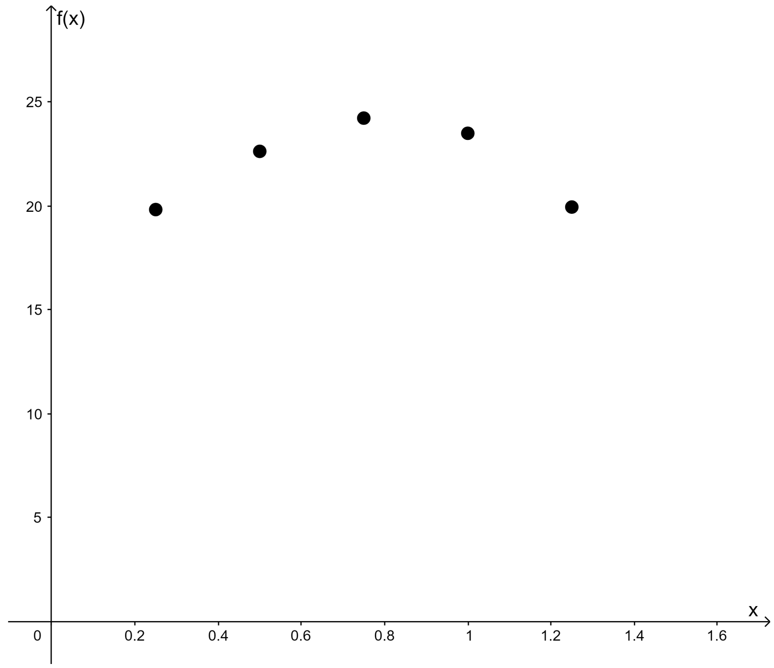

Figura 3.11: Diagrama de dispersão para os dados da Tabela 3.12

Analisando o gráfico da Figura 3.11 pode-se observar que o melhor ajuste de curva para este caso será dado por uma parábola côncava para baixo. Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, temos que a função aproximadora será:

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2.$$

Neste caso, como temos três incógnitas para determinar, α_1, α_2 e α_3, teremos que resolver o seguinte sistema de três equações:

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{5} 1\right] \alpha_1 + \left[\sum_{k=1}^{5} (x_k)\right] \alpha_2 + \left[\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2\right] \alpha_3 = \sum_{k=1}^{5} f(x_k) \\ \\ \left[\sum_{k=1}^{5} (x_k)\right] \alpha_1 + \left[\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2\right] \alpha_2 + \left[\sum_{k=1}^{5} (x_k)^3\right] \alpha_3 = \sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k) \\ \\ \left[\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2\right] \alpha_1 + \left[\sum_{k=1}^{5} (x_k)^3\right] \alpha_2 + \left[\sum_{k=1}^{5} (x_k)^4\right] \alpha_3 = \sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k)^2 \end{cases} \tag{3.13}$$

Calculando o valor dos somatórios presentes no sistema de equações (3.13), obtemos:

Tabela 3.13: Somatórios presentes no sistema de equações (3.13)

k	x_k	$f(x_k)$	$(x_k)^2$	$(x_k)^3$	$(x_k)^4$	$f(x_k)(x_k)$	$f(x_k)(x_k)^2$
1	0,25	19,83	0,0625	0,01563	0,003906	4,9575	1,239375
2	0,5	22,63	0,25	0,125	0,0625	11,315	5,6575
3	0,75	24,23	0,5625	0,42188	0,316406	18,1725	3,62938
4	1	23,6	1	1	1	23,6	23,6
5	1,25	13,95	1,5625	1,95313	2,441406	24,9375	31,17188
$\sum$	3,75	110,24	3,4375	3,51563	3,82429	82,9825	75,29813

Portanto, o valor dos somatórios são dados por:

$$\sum_{k=1}^{5} 1 = 5$$

$$\sum_{k=1}^{5} (x_k) = 3{,}75$$

$$\sum_{k=1}^{5} (x_k)^2 = 3{,}4375$$

$$\sum_{k=1}^{5} f(x_k) = 110{,}24$$

$$\sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k)^3 = 3{,}51563$$

$$\sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k)^4 = 82{,}9825$$

$$\sum_{k=1}^{5} f(x_k)(x_k)^2 = 75{,}29813.$$

Substituindo o valor destes somatórios no sistema de equação (3.13), obtemos:

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + 3{,}75\alpha_2 + 3{,}4375\alpha_3 = 110{,}24 \\ 3{,}75\alpha_1 + 3{,}4375\alpha_2 + 3{,}51563\alpha_3 = 83.252,6 \\ 3{,}4375\alpha_1 + 3{,}51563\alpha_2 + 3{,}824219\alpha_3 = 75{,}29813 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos:

$\alpha_1 \approx 14{,}1178$, $\alpha_2 \approx 26{,}4282$ e $\alpha_3 \approx -17{,}2960$.

Portanto, $\varphi(x) = 14{,}1178 + 26{,}4282x - 17{,}2960x^2$ é a parábola que melhor se aproxima, no sentido dos quadrados mínimos, da função tabelada, a qual representa a altura obtida pelo foguete em função da quantidade de água, cujo gráfico segue apresentado na Figura 3.12.

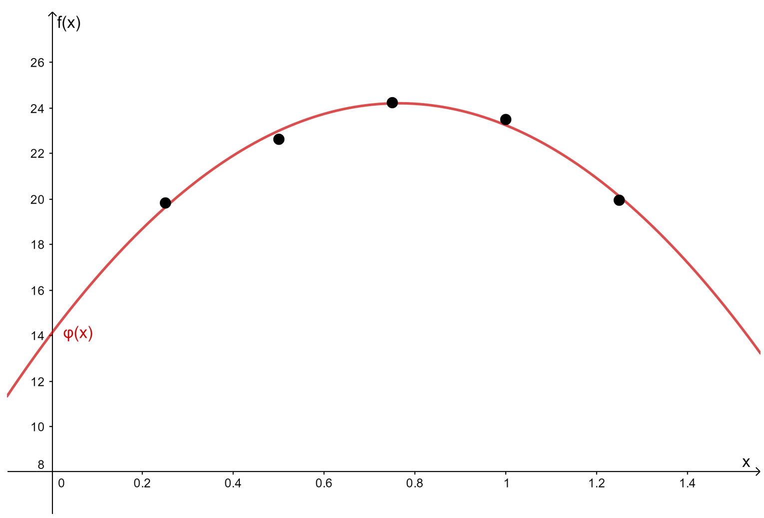

Figura 3.12: Gráfico referente a aproximação por Mínimos Quadrados do Exemplo 3

A partir do gráfico apresentado na Figura 3.12, podemos perceber que, neste caso, a função do segundo grau mostrou-se uma boa aproximação, para os pontos tabelados, como esperávamos.

Podemos determinar também, a partir deste gráfico, a quantidade ótima de água a ser utilizada no experimento para obter maior altura com 30 bombeadas, utilizando a coordenada x do vértice da parábola (posição em que o foguete atinge a maior altura), que é dada por:

$$x_v = \frac{-\alpha_2}{2\alpha_3} = \frac{-26{,}4282}{2 \cdot (-17{,}2960)} \approx 0{,}7638 \text{ litros}$$

Portanto, a quantidade ótima de água a ser utilizada neste experimento é de aproximadamente 764 ml.

Note que, neste exemplo, aproveitamos para incluir também outro conteúdo estudado pelos alunos, que é o vértice da parábola.

CONCLUSÕES

A prática em sala de aula nos faz refletir sobre a necessidade do professor buscar novas metodologias para serem aplicadas no ensino da Educação Básica, dando sentido e aplicabilidade aos conteúdos estudados. Portanto, este trabalho teve como objetivo apresentar para o professor uma nova ferramenta, que pode ser utilizada no ensino de funções.

O Método dos Mínimos Quadrados se mostrou uma excelente ferramenta para realizar o ajuste de curva para a função de aproximação. Através do estudo realizado neste trabalho, podemos concluir que é viável a aplicação do mesmo na Educação Básica, especificamente no Ensino Médio, pois os conteúdos estudados pelos alunos até esta etapa dão suporte para a utilização do método.

Através do uso do Método dos Mínimos Quadrados, podemos também mostrar aos alunos, o uso significativo de conteúdos matemáticos por ele já estudados, como: funções, sistema de equações, interpretação de gráficos, entre outros.

Sugerimos que o professor aborde o estudo das funções durante a aplicação desta proposta, como por exemplo, os seguintes conteúdos: Interpretação de gráficos; Estudo da variação de funções polinomiais de 1º grau: crescimento, decrescimento, taxa de variação da função; Estudo do comportamento da função quadrática (intervalos de crescimento/decrescimento, ponto de máximo/mínimo e variação da função); Estudo do crescimento e análise do comportamento das funções exponencial e logarítmica em intervalos numéricos.

Inicialmente, tínhamos como planejamento realizar a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados em sala de aula, cuja experiência seria de grande contribuição para a construção deste trabalho. No entanto, devido a suspensão das aulas presenciais em decorrência da pandemia do COVID-19, esta aplicação ficou inviável. Portanto, este trabalho restringiu-se à apresentação da proposta para a realização desta atividade em sala de aula.

Por fim, esperamos que, através deste trabalho, possamos contribuir de maneira significativa com a prática do professor de Matemática em sala de aula, apresentando uma proposta que faça o professor refletir sobre esta prática e o impulsione a encontrar novas maneiras de aperfeiçoar suas aulas e consequentemente, o ensino de Matemática.

REFERÊNCIAS

[1] ALMEIDA, R. N. **O método dos mínimos quadrados: estudo e aplicações para o ensino médio.** 2015. Dissertação (PROFMAT) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes.

[2] ÁVILA, Geraldo. **O ensino da matemática.** Revista do Professor de Matemática. São Paulo, BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. A reforma curricular e a organização do Ensino Médio. Brasília -DF: MEC/SEF, 2000.

[3] FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo Numérico.** São Paulo: Pearson, 2006.

[4] GONÇALVES, L. D. **Aproximação usando o método dos mínimos quadrados.** Dissertação (PROFMAT) - Campus Alto Paraopeba, Universidade Federal de São João del-Rei, Alto Paraopeba.

[5] RUGGIERO M. A. G; Lopes V. L. R. **Cálculo Númérico: aspéctos teóricos e computacionais.** 2ª ed. São Paulo - SP. Editora MAKRON Books, 1996, pp. 211 - 294.

[6] SANCHES, J. S.; JORDAN, D. L. **Métodos Numéricos.** Curitiba-PR: [s.n.], 2007. Universidade Federal do Paraná. Disponível em: <http://www.ionildo.cjb.net/metodos/>.

[7] SANTANA, T. P. **Ajuste polinomial de dados pelo método dos mínimos quadrados: um estudo sobre tensão × deformação.** 2017. Dissertação (PROFMAT) - Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana.

[8] SILVA, A. E. S. **O ajuste de retas pelo método dos mínimos quadrados e secções didáticas de solução lsq para o ensino médio.** 2015. Dissertação (PROFMAT) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte.

[9] SILVA, A. W. J. **O Método Dos Mínimos Quadrados como Ferramenta na Modelagem Matemática no Primeiro Ano do Ensino Médio.** 2020. Dissertação (PROFMAT) - Campus Universitário de Castanhal, Universidade Federal Do Pará, Castanhal.

[10] SILVA, F. F. **O Método dos Mínimos Quadrados: uma proposta ao Ensino Médio**

para o ajuste por parábolas. 2014. Dissertação (PROFMAT) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

[11] SOUZA, James Alves de. **Um foguete de garrafas PET.** Disponível em <http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol8/Num2/v08n02a02.pdf> Acesso em: 23 fev. 2020

[12] SOUZA, S. A. **Estudo Do Produto Matricial Por Meio Do Método Dos Mínimos Quadrados: Uma Abordagem Destinada Ao Ensino Médio.** 2014. Dissertação (PROFMAT) - Centro De Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.

[13] SOUZA, W. B. **Método dos mínimos quadrados aplicado a um problema de geoposicionamento.** 2018. Dissertação (PROFMAT) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba. v.23, p.1-7, 1993.