Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

# *Stomachion:* Uma abordagem sobre a História da Análise Combinatória

Paula Francisca Gomes Rodrigues

**Uberaba - Minas Gerais**

Dezembro de 2020

# *Stomachion:* Uma abordagem sobre a História da Análise Combinatória

Paula Francisca Gomes Rodrigues

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador**: Prof. Dr. Heron Martins Félix.

**Uberaba - Minas Gerais**

Dezembro de 2020

**Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro**

R615s

Rodrigues, Paula Francisca Gomes
*Stomachion*: Uma abordagem sobre a história da análise combinatória / Paula Francisca Gomes Rodrigues. -- 2020.
116 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2020
Orientador: Prof. Dr. Heron Martins Félix

1. Matemática – História. 2. Jogos de probabilidade (Matemática) - Arquimedes. 3. Análise combinatória. 4. Matemática – Estudo e ensino. I. Félix, Heron Martins. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 519.1(09):376

Leila Aparecida Anastácio - CRB-6/2513

PAULA FRANCISCA GOMES RODRIGUES

**Stomachion: Uma abordagem sobre a História da Análise Combinatória**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração "Matemática" da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre

Uberaba, 18 de dezembro de 2020

**Banca Examinadora:**

Dr. Heron Martins Félix – Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Ma. Raquel Oliveira Bodart
Instittuto Federal do Triângulo Mineiro

assinatura eletrônica outubro de 2015 e no art. 14 da Resolução nº 34, de 28 de dezembro de 2017.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0452985** e o código CRC **3364CF6D**.

*Aos professores que além de ensinar,*
*inspiram seus alunos a seguirem o mesmo caminho.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e à Nossa Senhora da Medalha Milagrosa por toda proteção.

Agradeço à minha mãe, Aparecida, por todo amor do mundo, por todos os ensinamentos e por não medir esforços para que minha irmã e eu alcançássemos sempre novos horizontes.

Agradeço ao meu pai, Vanderli, por seu amor e força nas batalhas diárias pelas estradas do país.

Agradeço à minha irmã, Rafaela, por seu amor incondicional, compreensão, companheirismo na vida, estudos, trabalho e aventuras e por ler meus pensamentos.

Agradeço a Elida, meu amor, por caminhar e dividir a vida comigo, compreender minhas ausências, incentivar e apoiar muito essa conquista.

Agradeço à minha amiga e médica, Dra. Esthefânia, por toda amizade desde o Colégio Monteiro Lobato e por toda atenção com minha saúde.

Agradeço à professora Raquel Oliveira Bodart por reconhecer e acreditar em meu potencial, por ser minha inspiração no ensino de Matemática e pelas oportunidades que me apresentou.

Agradeço ao meu orientador, Heron Martins Félix, pelo compromisso, dedicação e paciência ao longo deste trabalho.

Agradeço aos colegas do PROFMAT das turmas 2017 e 2018 por compartilharem comigo esta etapa tão desafiadora. Especialmente agradeço ao Carlos, Érika, Guilherme, Olívia e Paloma pela amizade imensa, união e pelo grupo maravilhoso que formamos.

Aos professores do PROFMAT e àqueles que tive durante minha formação pelos ensinamentos que levo para a vida toda.

À secretária do PROFMAT, Fernanda, por sua dedicação no trabalho e auxílio imediato em nossos questionamentos e solicitações.

*"Muitas pessoas têm medo de dizer o que elas querem e é por isso que elas não conseguem o que querem."*

*Madonna*

# Resumo

Este trabalho objetiva explorar a História da Matemática no âmbito da Análise Combinatória e verificar que o *Stomachion* de Arquimedes é o primeiro registro de estudos sobre o tema. Desejamos aproximar a História da Matemática aos alunos de forma a mostrar que a Matemática é ciência em transformação e que pode ser utilizada como recurso didático. Assim, trazemos a resolução do *Stomachion* e, através de nossos estudos sobre o tratado, propomos sua utilização em atividades do Ensino Básico, haja vista ser uma fonte de estudos sobre Geometria, Análise Combinatória e Raciocínio Lógico. O trabalho foi desenvolvido através de pesquisas bibliográficas onde analisamos livros digitais e impressos, dissertações, artigos e obras publicadas em sites oficiais sobre a História da Combinatória e o Palimpsesto de Arquimedes. O livro Códex Arquimedes, de Reviel Netz e William Noel, é base para a investigação proposta. Finalizamos este trabalho desmistificando que o *Stomachion* seja apenas um jogo e que pode ser empregado como núcleo de desenvolvimento de outras áreas matemáticas.
**Palavras-chave:** Arquimedes. *Stomachion*. Análise Combinatória. Geometria. Ensino Básico.

# Abstract

This work aims exploring Mathematics History in the scope Combinatorics and verify that Archimedes' *Stomachion* is the first record of studies on the subject. We introduce the Stomachion resolution and propose its use in Basic Education activities, since it is a source of studies on Geometry, Combinatorial Analysis and Logic. We want to bring the History of Mathematics to students in order to show that Mathematics is a changing science and that it can be used as a didactic resource. The work was developed through bibliographic research where we analyzed books, dissertations, articles and works published on official websites on the History of Combinatorics and Archimedes' Palimpsest. The book The Codex Arquimedes, by Reviel Netz and William Noel, is the basis for the proposed investigation. We end this work by demystifying that Stomachion is just a game and that it can be used as a nucleus for the development of other mathematical areas.
**Keywords:** Archimedes, *Stomachion*, Combinatorial Analysis, Geometry, Basic Education.

# Lista de Figuras

# Sumário

# INTRODUÇÃO

Nos últimos trinta anos o interesse pela História da Matemática vem se consolidando como fonte investigativa e de conhecimento para o desenvolvimento da Educação Matemática, segundo Lopes e Alves (2014, p.321). Novas descobertas em documentos e textos antigos ajudam a constituir os passos que nos trouxeram até o que conhecemos hoje ou até mesmo modificar o que se acreditava correto além de introduzir novas ferramentas matemáticas.

> Com a evolução da matemática questões antigas e sofisticadas receberam soluções triviais (quanto mais avançado na matemática, mais ferramentas tornam fáceis algumas resoluções), em contraparte à suas antigas resoluções. Estudar as soluções dadas à época dos problemas faz parte da introdução de ferramentas novas ao ensino. Isto é, o uso das ferramentas e instrumentos pelos antigos estudiosos permite uma perspectiva diferente da forma como o problema foi originalmente abordado. (**??**, p.16)

O *Stomachion* de Arquimedes é um grande exemplo disso. Despretensiosamente era considerado apenas um jogo de quebra-cabeças semelhante ao Tangram Chinês mas teve seu nível de importância elevado ao de modificador da História da Matemática quando o perdido Palimpsesto de Arquimedes, conhecido como Códex C, reapareceu em 1998 e foi leiloado no mesmo ano. O comprador, que permanece anônimo, cedeu a obra ao Museu Walters no Estados Unidos para que a obra pudesse ser restaurada e lida.

> Quando a venda do Palimpsesto foi realizada, todos repetiam com entusiasmo que poderíamos encontrar novas leituras de O Método. Mas literalmente não se falava que poderíamos encontrar novas leituras do *Stomachion*. Esse tratado era o parente pobre, aquele de que todos se esqueciam – em parte porque havia sobrado pouco com que se pudesse trabalhar; mas mais importante, porque imaginava-se que, afinal de contas, não passava de um jogo. (NETZ; NOEL, 2009, p. 246)

Figura 1: Tabuleiro que representa o *Stomachion*

Fonte: https://culturacientifica.com/2019/10/23/el-puzzle-stomachion-y-el-palimpsesto-de-arquimedes-1/.

Apesar de todas as atenções estarem voltadas para o tratado de O Método contido no palimpsesto, quando finalmente o *Stomachion* pode ser lido e interpretado, descobriu-se que Arquimedes havia estudado Combinatória através dele e que aquele registro era o mais antigo estudo de Combinatória existente e remontava há mais de 2000 anos. Esta dissertação visa aplicar esse tratado tão importante em atividades do Ensino Básico de Matemática, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo Referência de Minas Gerais, bem como criar uma cronologia sobre os estudos em Análise Combinátoria, trazer a resolução do Stomachion e sua tradução da língua inglesa para a língua portuguesa.

No Capítulo 1, tratamos de uma história de vida de Arquimedes de Siracusa. Além de um breve histórico sobre suas contribuições para a Matemática e Física como O Método, A Quadratura da Parábola e Sobre A Esfera e O Cilindro e destacamos seus feitos como colaborador do rei na defesa de sua ilha, a Sicília.

No próximo capítulo abordamos o processo de produção do palimpsesto que abriga o texto de Arquimedes, destacamos a existência e destino dos Códices A e B que também continham tratados do matemático, os caminhos percorridos pelo Códex C até o Museu Walters, o estado em que se encontrava e as técnicas empenhadas para sua restauração e leitura. Nessa parte, trazemos a história do *Stomachion* e a descoberta de que se tratava de um tratado sobre Combinatória.

Já no Capítulo 3, o trabalho prossegue com uma revisão bibliográfica da história da Análise Combinatória de modo a investigar a teoria de que o tratado de Arquimedes foi o primeiro registro de estudos sobre o tema e produzir conteúdo para esse ramo tão pouco estudado. Assim, revisitamos registros chineses do século XVII a.E.C. até a formalização da teoria combinatória a partir do século XVI E.C. chegando ao século XIX E.C. com a Teoria das Gavetas.

Passando ao Capítulo 4, iniciamos os estudos para a resolução do problema do *Stomachion*: "De quantas maneiras o quadrado do *Stomachion* pode ser remontado a partir de suas 14 peças?". Para isso, com o auxílio do tratado traduzido e de informações contidas sobre ele num manuscrito árabe, estudamos as 14 peças, suas relações de semelhança e congruência, a relação de comensurabilidade com o quadrado e as interações entre as peças na formação do mesmo.

Neste sentido, propomos no capítulo seguinte, aplicações do Teorema de Pick e do cálculo de áreas a partir de determinantes como atividades enriquecedoras para o ensino do cálculo de áreas, aplicando ambos nas áreas das figuras do *Stomachion*. Apresentamos, também, uma sequência didática para estudo da Permutação Simpless através do *Stomachion*. Tais atividades sugeridas são baseadas na BNCC e no Currículo Referência, como desafios do *Stomachion*, aplicações do Stomachion e Tangrans via software gratuito *Peces*. De acordo com BRASIL (1998, p. 79), o uso de alguns *softwares* disponíveis também é uma forma de levar o aluno a raciocinar geometricamente.

Finalizamos destacando a riqueza de aplicações do tratado no processo de ensino-aprendizagem fornecendo novas sugestões didáticas aos professores e ressaltando importância da História da Matemática no desenvolvimento da disciplina, a fim de humanizá-la e aproximá-la dos estudantes do Ensino Básico.

> Consideramos importante que o futuro professor entenda a evolução da matemática como parte de um processo sócio cultural, entendendo como a matemática está ligada à cultura humana. Para que a matemática escolar seja compreendida como resultado da ação humana de entender e explicar o mundo e suas experiências nele, o ensino da matemática nas escolas teria que enfatizar a natureza contextual da disciplina. (D'AMBROSIO, 2007, p.400)

# 1 Arquimedes de Siracusa

Natural de Siracusa, na ilha da Sicília, Arquimedes nasceu em 287 a.C e faleceu em 212 a.C. quando da ocupação de sua cidade pelas tropas romanas comandadas pelo general Marcellus Claudius. Matemático, físico e inventor grego, Arquimedes estudou na Universidade de Alexandria onde conheceu e se tornou amigo de Eratóstenes [1] e outros matemáticos da época. (NETZ; NOEL, 2009, p. 75-78)

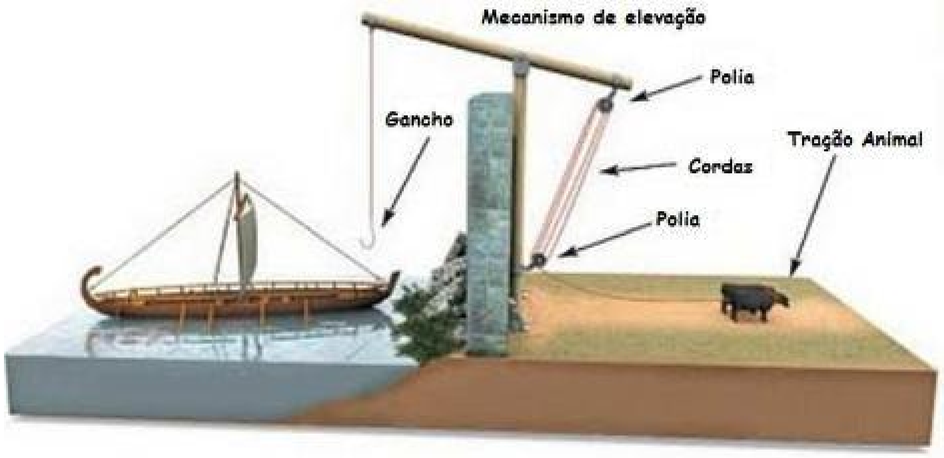
Figura 1.1: Imagem atribuída a Arquimedes

Fonte: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archimedes/pictdisplay/.

Arquimedes trabalhou diretamente para o rei Hierão de Siracusa tendo desenvolvido várias máquinas de guerra para a defesa de sua cidade durante o sítio romano. Dentre elas podemos citar as catapultas móveis com alcance ajustável e os grandes guindastes com garras para virar navios (Figura 1.2).

[1] Eratóstenes (276 a.C. - 194 a. C.) nasceu em Cirene (atual Líbia) e passou grande parte de sua vida em Alexandria, no Egito, onde foi diretor da grandiosa biblioteca daquela cidade. É conhecido como o pai da Geografia e ficou famoso em sua época por seu método de determinar o perímetro da Terra.

Figura 1.2: Guindaste de Arquimedes



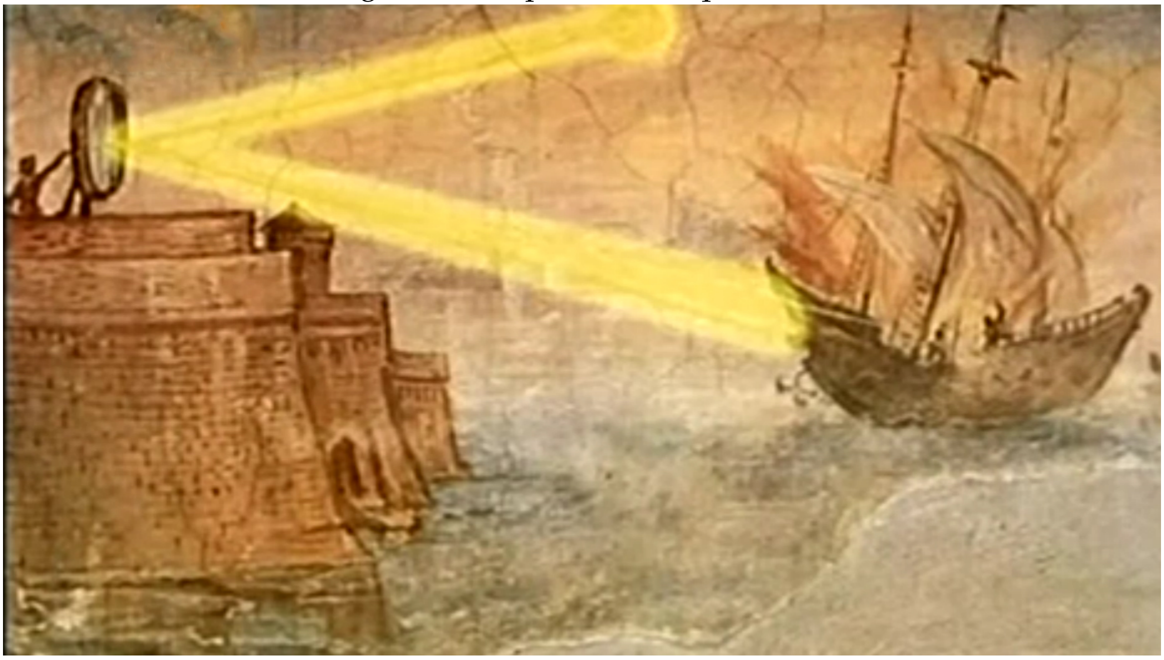

Fonte: http://fisicadario.blogspot.com/2015/11/la-garra-de-arquimedes.html.

Noel e Netz (2009, p. 68) contam o que Políbio, historiador grego da época, teria escrito sobre as surpresas que os romanos tiveram com as máquinas de guerra:

> "Mas Arquimedes, que havia preparado máquinas construídas para lançar a qualquer alcance, assim causou danos aos assaltantes a longa distância, à medida que suas embarcações se aproximavam [a primeira tentativa foi por mar], com suas catapultas mais potentes, para deixá-los em muita dificuldade e aflição; e tão logo essas máquinas atirassem longe demais e o alvo se tornasse mais próximo, e continuava usando máquinas de alcance cada vez menor, abalando assim completamnete a coragem deles até pôr um ponto final em seu avanço. . . [Os romanos desistiram do ataque, e assim resume Políbio:] Que coisa grande e maravilhosa mostrou ser a genialidade de um homem. . . Os romanos, fortes como eram tanto por mar como por terra, tinham toda esperança de capturar a cidade de imediato, tivesse um velho homem de Siracusa sido removido; mas uma vez estava presente, não se aventuraram nem sequer a tentar atacar..." (NETZ; NOEL, 2009, p.68)

Além disso, credita-se a ele a utilização de espelhos parabólicos para atear fogo aos navios inimigos através da convergência dos raios solares, conforme a Figura 1.3.

Figura 1.3: Espelho de Arquimedes



Fonte: https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/almanaque/historia-antiguidade-laser-arma-luz-arquimedes.phtml.

Netz e Noel (2009, p. 42-43) contam que várias lendas cercam a história de Arquimedes, uma delas é narrada por Vitrúvio (81 a.E.C - 15 a.E.C) cerca duzentos anos após a morte do matemático e diz que certa vez o rei Hierão disponibilizou determinado peso de ouro a seu ourives para que confeccionasse uma coroa mas, depois de pronto, suspeitou que ele poderia ter utilizado prata para guardar para si um pouco do ouro. Assim, solicitou a Arquimedes que solucionasse a questão sem desmanchar a coroa. Este, durante um de seus banhos, percebeu que a medida que entrava na banheira, a água contida nela transbordava. Daí vieram os conhecidos gritos de "Eureca! Eureca!" (Achei! Achei!) e a descoberta da Primeira Lei da Hidrostática:

> [...] um corpo, quando mergulhado num fluido, recebe um empuxo de intensidade igual ao peso do volume de água deslocado. [. . . ] Ele colocou a coroa num dos pratos de uma balança e um peso igual de ouro na outra e depois repetiu essa operação sob a água. O prato com a coroa ergueu-se, mostrando que ela continha algum material espúrio, menos denso que o ouro. (EVES, 2011, p.193)

Siracusa resistiu por quase três anos aos ataques de Roma. Com a invasão da cidade, o general Marcellus ordenou que Arquimedes fosse poupado graças ao respeito que adquiriu por sua engenhosidade. Todavia, foi morto por um soldado ao recusar-se a abandonar um problema matemático ao qual se dedicava. A história é narrada por Plutarco, segundo Netz e Noel:

> Ele estava sozinho, tentando resolver um problema com a ajuda de um diagrama, e tendo o pensamento e os olhos concentrados no objeto de estudo, não se deu conta da incursão dos romanos e nem da cidade sitiada. De repente, um soldado tomou-o de assalto e ordenou que o acompanhasse até Marcelo. Arquimedes se recusou a fazê-lo enquanto não terminasse de resolver e demonstrar o problema, enfurecendo o soldado que tirou a espada e o matou. (PLUTARCO apud NETZ; NOEL, 2009, p. 70)

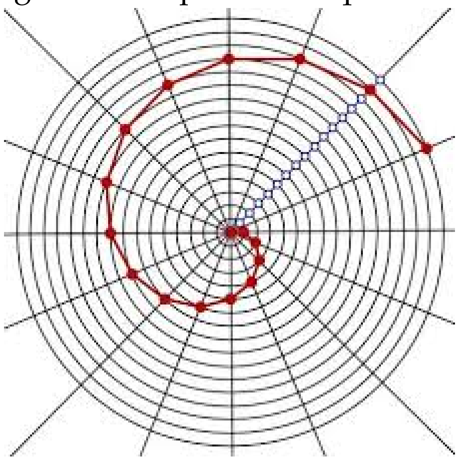
## 1.1 Alguns feitos de Arquimedes

Aaboe (2013, p.95) apresenta uma relação das obras escritas por Arquimedes que foram preservadas, em provável ordem cronológica:

- **Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas I** – Arquimedes explica a Lei das Alavancas e encontra os centros de gravidade de triângulos, trapézios e paralelogramos;
- **A Quadratura da Parábola** - Arquimedes encontra a área de um segmento de parábola formado pelo corte de uma corda qualquer;
- **Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas II** - Arquimedes encontra o centro de gravidade de um segmento de parábola;
- **Sobre a Esfera e o Cilindro** - Este é, aparentemente, o trabalho de que Arquimedes mais se orgulhava, tendo pedido para que em sua lápide fosse gravado o desenho de uma esfera inscrita em um cilindro. (MOL, 2013, p.53)
  Aqui é demonstrado que a razão entre os volumes da esfera e do cilindro é a mesma razão de suas áreas.
- **Sobre as Espirais** - De acordo com Heath et al.(2002, p.165), Arquimedes definiu:

> Se uma linha reta traçada em um plano gira com uma velocidade constante ao redor de uma extremidade que permanece fixa e retorna à posição de onde começou e se, no mesmo tempo em que a linha gira, um ponto desloca-se com uma velocidade constante ao longo da linha reta começando da extremidade que permanece fixa, o ponto vai descrever uma espiral no plano. (HEATH et al., 2002, p.165)

Figura 1.4: Espiral de Arquimedes



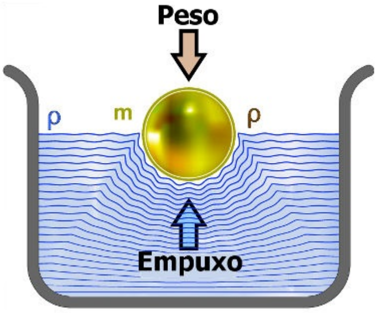
Fonte: https://www.obaricentrodamente.com/2012/01/construcao-geometrica-da-espiral-de.html.

- **Sobre os Cones e os Esferóides** - Arquimedes estuda os volumes de segmentos de paraboloides de revolução, elipsoides gerados pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos de rotação e hiperboloides de revolução.
- **Sobre os Corpos Flutuantes** - Pioneiro no estudo de hidrostática, neste trabalho Arquimedes estabeleceu os princípios da Hidrostástica com a lei do empuxo. A força que um fluido exerce sobre um corpo submerso ou parcialmente submerso nele recebe o nome de empuxo. Seu postulado fundamental diz:

> Supomos como princípio que o fluido possui uma natureza tal que, estando suas partes dispostas de modo uniforme e sendo contínuas, a parte que é menos pressionada é impelida de seu lugar pela parte que é mais pressionada; e que cada uma de suas partes é pressionada pelo fluido que está verticalmente acima dela, a menos que este fluido esteja encerrado em qualquer [recipiente] ou que seja comprimido por qualquer outra coisa. (MUGLER, 1971)

Observe a figura a seguir:

Figura 1.5: Empuxo de Arquimedes



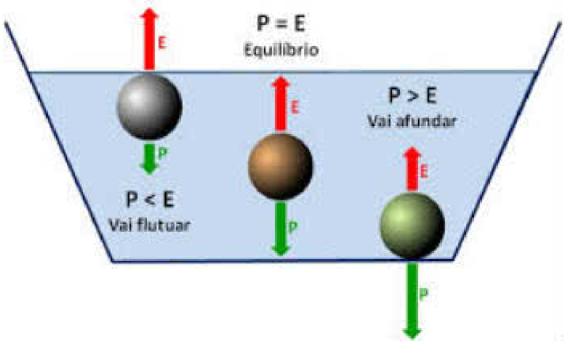

Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/empuxo.htm.

A partir deste postulado, Arquimedes demonstra o conhecido princípio fundamental da hidrostática nas seguintes proposições:

> – Qualquer sólido mais leve do que um fluido ficará, caso colocado no fluido, submerso de tal forma que o peso do sólido será igual ao peso do fluido deslocado;
>
> – Se um sólido mais leve do que um fluido for forçadamente submerso nele, o sólido será impelido para cima com uma força igual à diferença entre seu peso e o peso do fluido deslocado;
>
> – Um sólido mais pesado do que um fluido descerá, se colocado nele, ao fundo do fluido, e o sólido será, quando pesado no fluido, mais leve do que seu peso real pelo peso do fluido deslocado. (**??**, p.70)

Ao dizer que um sólido é mais ou menos pesado que um fluido, Arquimedes se refere ao sólido ser mais ou menos denso que o fluido. A figura 1.6 ilustra as proposições. Seja P o peso do sólido e E o peso do fluido deslocado.

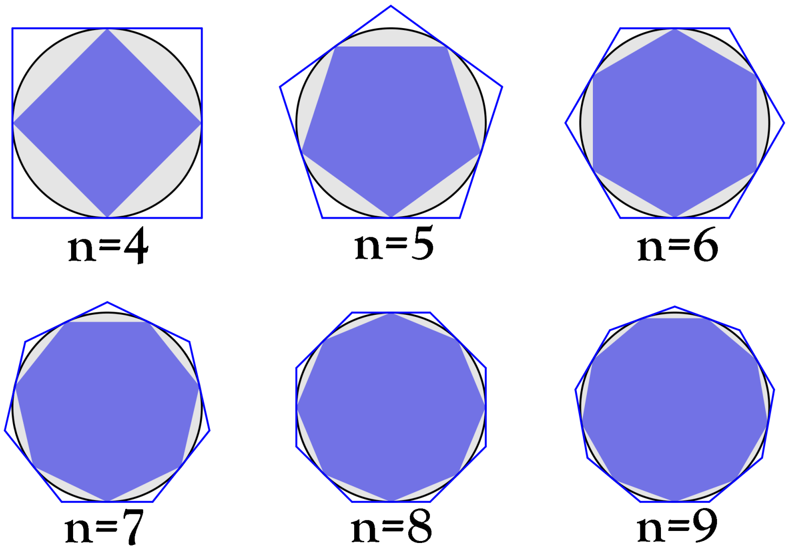
Figura 1.6: Princípio Fundamental da Hidrostática




Fonte: https://pt.slideshare.net/DIEGOBERWANGER1/aula-hidrostatica-profdiego.

- **Sobre a Medida do Círculo** - Neste tratado, Arquimedes avalia a relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro através do Método da Exaustão[2]. Partindo de um hexágono regular inscrito a circunferência e um hexágono regular circunscrito à mesma circunferência, passou a dobrar o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados. Assim, obteve uma aproximação para $\pi$ entre $\frac{310}{71}$ e $\frac{310}{70}$, ou seja, $3{,}1408 < \pi < 3{,}1428$.

Figura 1.7: Método da Exaustão




Fonte: https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/01/o-metodo-da-exaustao-e-o-surgimento-da-constante-pi-/.

- **O Método** - Em carta a Eratóstenes, Arquimedes explica como calcular a área, o volume e o centro de gravidade de figuras geométricas. De acordo com Eves (2011, p.422), a ideia fundamental de O Método é a seguinte:

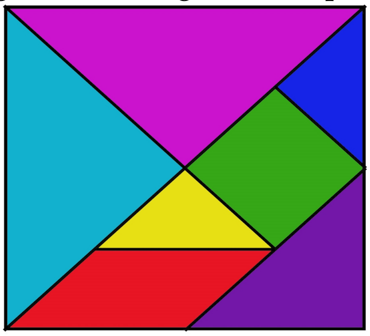
> Para determinar uma área ou um volume, corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos. (EVES, 2011, p.422)

- ***Stomachion*** - Semelhante ao tradicional tangram quadrado de 7 peças (figura 1.8), o *Stomachion* possui 14 peças que se juntam também formando um quadrado

[2]Método usado para encontrar a área de uma figura através da inscrição de n polígonos cujas somas das áreas convergem para a área da figura onde estão inscritos.Tal método fundamenta uma das bases principais do cálculo infinitesimal.

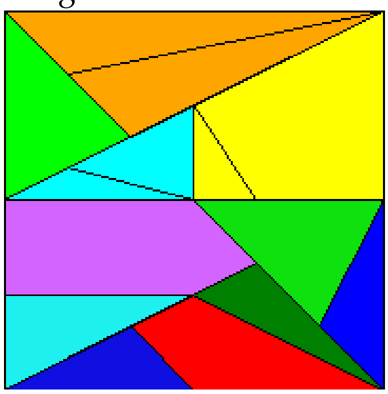
(figura 1.9). Arquimedes tinha grande interesse por enigmas e quebra-cabeças, seu interesse pelo *Stomachion* (dor de estômago em grego, pela sua dificuldade de ser resolvido) foi descoberto em sua obra intitulada na atualidade por Códex Arquimedes. Nela, Arquimedes se dispôs a encontrar de quantas formas as 14 peças podem ser combinadas para formar o quadrado original. Trataremos do *Stomachion* no Capítulo 4.

Figura 1.8: Tangram de 7 peças



Fonte: https://www.indagacao.com.br/2019/04/modelos-de-tangram-para-imprimir-atividade-e-moldes.html.

Figura 1.9: Stomachion



Fonte: http://4umi.com/play/stomachion/.

Arquimedes tem outras inúmeras obras e estudos como O Problema Bovino, O Contador de Areia, em que calcula quantos grãos de areia são necessários para encher o universo de acordo com Noel (2009, p. 64), A Área do Triângulo e a Construção do Heptágono Regular. Este trabalho trouxe mais detalhes sobre as obras acima em virtude de estarem contidas no Códex de Arquimedes, tema do próximo capítulo, obra de grande valor histórico, científico e cultural.

# 2 Códex Arquimedes

Arquimedes costumava utilizar as areias de Siracusa para traçar seus diagramas e realizar seus cálculos e comparações. Comunicava-se com seus amigos estudiosos através de cartas onde lhes contava a respeito de suas descobertas e propunha reflexões. Graças a esses registros enviados a diversos locais do Mediterrâneo, os trabalhos de Arquimedes puderam sobreviver ao saque após a tomada de Siracusa. (NETZ; NOEL, 2009, p. 74-78) Em especial, Arquimedes enviou a seguinte carta a Eratóstenes:

> Arquimedes para Eratóstenes: cumprimentos! Como sei que você é aplicado, um excelente professor de filosofia, e muito interessado em toda investigação matemática que possa lhe chegar às mãos, pensei que seria apropriado escrever e lhe expor um certo método especial (...) Presumo que haverá alguns na geração atual, assim como nas futuras, que, por meio do método aqui explicado, estarão capacitados a encontrar outros teoremas que ainda não nos coube compartilhar. (NETZ; NOEL, 2009, p.74)

Esta carta, escrita em folhas de papiro (planta abundante no delta do Nilo, cujas fibras do caule eram retiradas, colocadas paralelamente umas às outras e ligeiramente sobrepostas formando uma camada. Tal camada era colocada perpendicularmente a uma igual e assim tinha-se a folha de papiro) e enrolada em um tubo de madeira, continha, entre outros trabalhos, seu O Método. A carta foi arquivada na Biblioteca de Alexandria. Acredita-se que Eratóstenes tenha mandado fazer cópias da mesma já que no século I, Hero (10 E.C - 70 E.C.), matemático e mecânico gredo, fez um registro sobre O Método em seus estudos. O último registro que seria feito até o início do século XX, quando o Códex C de Arquimedes ressurgiu em Constantinopla, na Turquia. (NETZ; NOEL, 2009, p. 74-78)

Figura 2.1: Papiro

Fonte: https://www.frutodearte.com.br/papel-papiro-egipcio-cru.html.

A História nos diz que existiram três códices com os trabalhos de Arquimedes, conhecidos como Códex A, Códex B e Códex C. Todavia, apenas o Códex C sobreviveu ao tempo e chegou até nós, além de ser a única fonte de O Método e *Stomachion*, contém, ainda, Corpos Flutuantes, é também o mais antigo manuscrito dos tratados de Arquimedes. O Códex C como o conhecemos hoje teve seu conteúdo manuscrito em 975 d.C. (século X) e foi convertido em códex no século XII. (NETZ; NOEL, 2009, p.137)

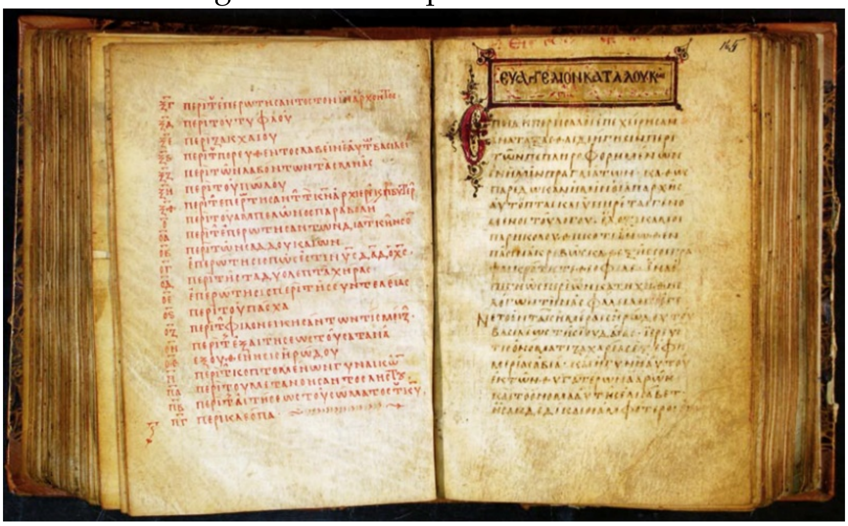
Perceba que o registro original foi escrito em rolos de papiro e o registro atual foi escrito em formato de códex, logo, ocorreu uma mudança de mídia para os dados contidos no primeiro. Os rolos de papiro armazenam conhecimento em duas dimensões: altura e largura. Nele, as informações são registradas de maneira que se necessite desenrolá-lo para conseguir ler todas as informações, ou seja, os olhos percorrem toda a dimensão de sua largura. O rolo tem que ser enrolado e desenrolado todas as vezes em que for consultado.

Figura 2.2: Rolo de Papiro

Fonte: https://noosfero.ufba.br/artes-visuais-2012/curiosidades/diferenca-entre-papiro-e-pergaminho.

Os códices armazenam conhecimento em três dimensões: altura, largura e profundidade. Seu conteúdo é acessado percorrendo-se a dimensão da profundidade, folheando-se suas páginas para acessar qualquer informação. Simbolizaram uma revolução na forma em que os dados eram armazenados e acessados.

Figura 2.3: Exemplo de um códex

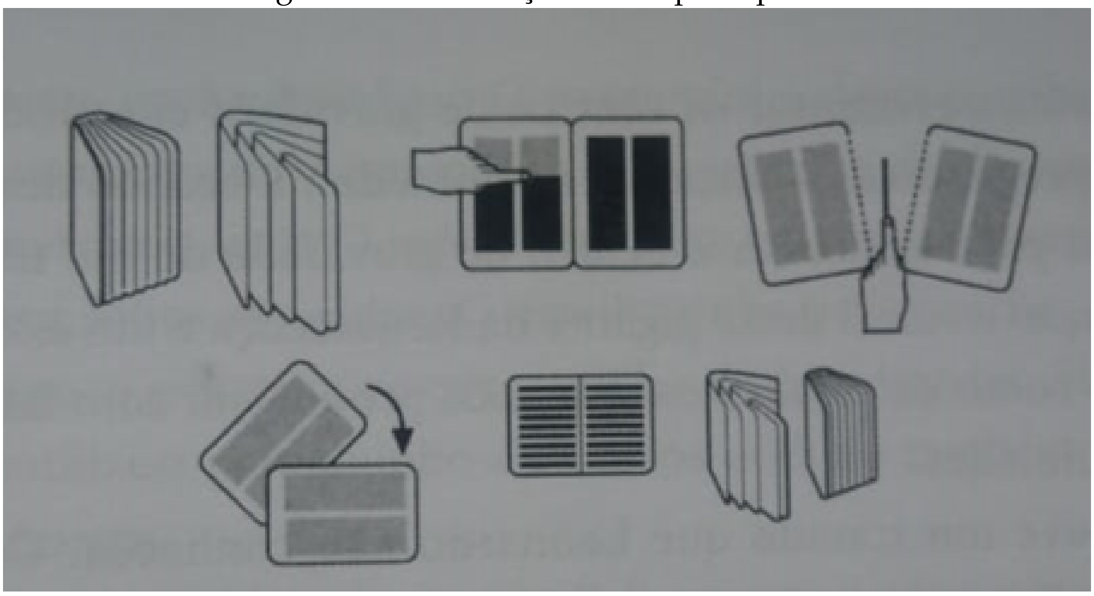


Fonte:
http://bibliateca.com.br/site/os-principais-codices-da-biblia/codex-petropolitanus.

## 2.1 De Pergaminho à Códex

Com o avanço da Igreja Católica, os livros de orações passaram a ser copiados e enviados a diversas partes da Europa e Oriente. A necessidade de folhas para escrita fez com que manuscritos de pergaminho fossem desmontados, as encadernações soltas e as costuras das folhas desfeitas. Passada essa etapa, os textos contidos nas folhas deveriam ser apagados, para isso, as mesmas eram esfregadas com um tipo de ácido natural, possivelmente suco de laranja, como Netz e Noel (2009, p. 131) contam que Téofilo relata em sua obra Sobre diversas artes. Em seguida, as folhas eram novamente esfregadas com pedra-pomes, pregadas em uma tábua para não encolherem ao secar, retiradas e empilhadas, prontas para receber um novo texto. Os escribas cortavam as folhas nas dobras onde haviam sido costuradas no manuscrito, dando origem a duas novas folhas que eram rotacionadas em 90° e dobradas ao meio. Assim, obtinham as novas folhas, exatamente da metade do tamanho das originais. Girar as folhas era prática padrão na época para se evitar que o novo texto competisse com qualquer resquício do antigo, já que ficaria perpendicular a ele. Observe a figura abaixo:

Figura 2.4: Confeccção de um palimpsesto



Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p.129)

Esse processo transforma um manuscrito num palimpsesto – do grego *palin* (novamente) e *psan* (esfregar), o que significa que o pergaminho foi raspado mais de uma vez. Assim surgiu o Códex C, o conhecido Palimpsesto de Arquimedes.

Figura 2.5: Página do Palimpsesto de Arquimedes

Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p. 195)

### 2.1.1 Códices A, B e C e seus destinos

O livro Códex Arquimedes, escrito por Reviel Netz e William Noel, traz toda a trajetória dos códices A, B e C através do tempo até aos registros que temos disponíveis pelas bibliotecas do mundo. Depois da queda de Constantinopla, inúmeros textos clássicos foram queimados e perdidos para sempre. Os códices A e B tiveram a sorte de terem sido traduzidos do grego para o latim e copiados por Guilherme de Moerbeke, capelão e confessor do Papa Clemente IV, em 1269. Assim, todos seus conteúdos chegaram a Itália. O Códex B não foi mais visto desde 1311, já o Códex A foi um dos códices mais desejados da Renascença Italiana, inclusive uma cópia sua fez parte da biblioteca de Lourenço de Médici e hoje está na magnífica Biblioteca Laurenciana – obra de Michelângelo – em Florença. O Códex A perdeu-se em 1564. (NETZ; NOEL, 2009, p. 125-128)

Os códices A e B continham os textos de Quadratura da párabola, Do equilíbrio dos planos, A esfera e o cilindro, Medida do círculo, Linhas Espirais, Corpos flutuantes, Sobre conóides e esferóides e O arenário. Nomes da Renascença como Galileu e Newton e do mundo moderno foram apresentadas a Arquimedes por essas duas obras. Leonardo da Vinci se interessou, particularmente, por Equilíbrio dos Planos por abordar a questão dos centros de gravidade. Usando os trabalhos de Arquimedes como base para seus próprios cálculos, Leonardo tentou encontrar os centros de gravidade em sólidos também e obteve sucesso ao desenvolver um teorema para encontrar o centro de gravidade de um tetraedro. (NETZ; NOEL, 2009, p. 129-130)

Leonardo não conheceu um dos mais importantes tratados de Arquimedes, O Método. 1700 anos antes, Arquimedes tinha ido além de Leonardo e

> [...] descoberto os centros de gravidade de sólidos muito mais complicados do que o tetraedro – sólidos com superfícies curvas. Em carta a Eratóstenes, havia calculado o centro de gravidade de um paraboloide, de um segmento esférico, do segmento de um elipsóide e até do segmento de um hiperbolóide.". (NETZ; NOEL, 2009, p.130)

O Método não era parte nem do Códex A nem do Códex B mas sim do Códex C, que passou despercebido pela Renascença por ter se tornado um palimpsesto. Podemos nos perguntar como teria sido o desenvolvimento da matemática, física e tecnologias se os códices não tivessem desaparecido.

A humanidade teve notícias da existência de um manuscrito com tratados de Arquimedes em 1907, quando a primeira página do New York Times estampou a descoberta que professor Johan Ludwig Heiberg, um filólogo de Copanhague, havia feito ao examinar um manuscrito na biblioteca do Metochion, em Constantinopla, e constatar um texto sobrescrito nele. (NETZ; NOEL, 2009, p. 138-139)

> Neste trecho de sua longa e peripatética existência o manuscrito viajou de uma biblioteca monástica na Terra Sagrada para o Metochion - "casa-filha" - da Igreja do Santo Sepulcro de Jerusalém, em Constantinopla. E lá, durante o verão de 1906, foi examinado pelo Professor Johan Ludwig Heiberg, o principal filólogo do mundo, que havia viajado com pressa de Copenhague para ler o velho documento. Com sua barba bíblica e olhar fixo, a própria presença de Heiberg lançou a biblioteca em uma confluência entre o mundo antigo e o moderno. (HIRSHFELD, 2009, p.103-104 *apud* MAGNAGHI; ASSIS, 2019, p. 13)

Seu trabalho sobre o manuscrito rendeu a publicação da carta de Arquimedes a Eratóstenes, O Método e a reedição dos trabalhos de Arquimedes acrescentando suas leituras do palimpsesto. Heiberg encontrou várias limitações em seus estudos do manuscrito, como era um livro amarrado, duas ou três linhas ficavam escondidas nas junções das margens internas, os recursos tecnológicos eram poucos, não se usava luz ultravioleta para se ler textos quase desaparecidos e sua especialidade era a filologia – estudo da linguagem – e não a matemática e física. Muito ainda deveria ser feito pelo Palimpsesto e por seu conteúdo.

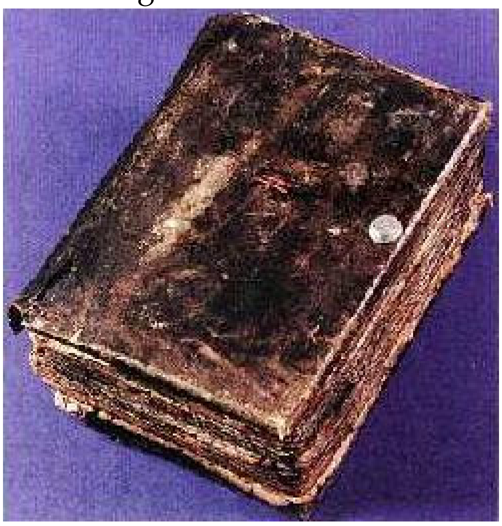
Figura 2.6: Página do palimpsesto fotograda por Heiberg

Fonte: (NADA, a, p.14)

Com o advento da Primeira e da Segunda Guerra Mundial e ocupações militares em Constantinopla, os livros do Metochion começaram a ser levados para Atenas e acabaram se espalhando por todo o mundo. O Palimpsesto foi um deles e acabou se perdendo novamente para ressurgir num leilão da Christie's em Nova York em 1998, tendo recebido nova capa e gravuras pintadas sobre as orações escritas e os tratados de Arquimedes quase apagados.

Desta vez, o último registro desconhecido dos trabalhos arquimedianos foi arrematado pelo valor de 2 milhões de dólares por um milionário anônimo e enviado ao Museu de Arte Walters, aos cuidados de seu curador William Noel, que reuniu uma equipe de especialistas em manutenção e recuperação de manuscritos antigos, entre eles o professor da Universidade de Stanford Reviel Netz, para trabalhar na tentativa de recuperar todo o seu conteúdo, dentre eles, a única página do Stomachion, alvo dos estudos desta dissertação. Ademais, na tentativa de recuperação dos textos foram aplicadas "técnicas modernas de fotografia digital, de iluminação com diferentes comprimentos de onda e até fluorescência de raios X no *Stanford Linear Accelerator Center, SLAC*."(NADA, a, p.13). No Apêndice A, podemos conferir algumas páginas do Palimpsesto antes e depois do tratamento de imagens.

Figura 2.7: Códex C



Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p.193)

Figura 2.8: Códex C aberto em uma de suas páginas

Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p.193)

## 2.2 O *Stomachion*

Em 1906, Heiberg fotografou 65 páginas do Palimpsesto para estudá-lo, uma delas é a única página disponível na obra sobre o Stomachion. (NETZ; NOEL, 2009, p.172)

Comparando a fotografia da época com o estado da página quando a obra ressurgiu em 1998, a página antes estava inteira e 92 anos depois não passava de um fragmento embolorado (figura 2.7). Um desafio aos técnicos que iriam extrair o máximo de informações do manuscrito.

Figura 2.9: Página do *Stomachion*

Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p.169)

O *Stomachion* era o último tratado do livro original de Arquimedes. O autor do Palimpsesto ao escolher quais folhas usar, provavelmente jogou fora as últimas folhas do original pois já deviam estar em mau estado de conservação no século XIII e não sobreviveriam a uma nova raspagem. Assim, perdeu-se quase tudo do *Stomachion*. (NETZ; NOEL, 2009, p. 243)

Até se analisar o último vestígio do *Stomachion*, sabia-se que Arquimedes trabalhou com um jogo composto por catorze peças que, juntas, formavam um quadrado e cujo objetivo seria construir certas formas geométricas a partir delas. Relatos da Antiguidade sobre o jogo sugerem que Arquimedes não o teria inventado mas que teria se interessado por ele e feito uma série de reflexões matemáticas a seu respeito. O *Stomachion* chegou a ser chamado de "Caixa de Arquimedes".

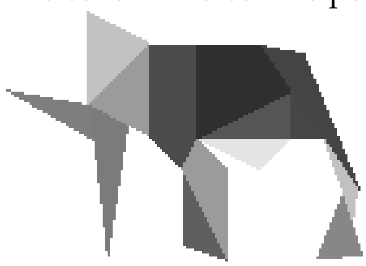
Em 1899, de acordo com Netz e Noel (2009, p.244) um acadêmico alemão chamado Suter deparou-se com um manuscrito em árabe do século XVII que citava um certo "*Stumashiun* de Arquimedes". Essa versão trazia um texto muito curto, contido em duas folhas, mas que foi fundamental para complementar a página restante no Palimpsesto. O manuscrito trazia a construção do *Stomachion*. Agora seria possível reconstruí-lo.

Apesar desse avanço, ainda era necessário descobrir o que Arquimedes discutiu em seu tratado. O primeiro parágrafo estava praticamente completo e Heiberg assim o traduziu, de acordo com Netz e Noel:

> Como o assim chamado *Stomachion* tem uma variada teoria de transposição das figuras com as quais é formado, achei necessário: primeiro, especificar, em minha investigação a respeito da magnitude da figura inteira, cada uma das figuras em que é dividido por qual [número] é medido; e posteriormente também quais são os ângulos, considerados pelas combinações e somados juntos; tudo isso dito com o propósito de descobrir a montagem das figuras que surgiriam, quer os lados resultantes das figuras estivessem em uma linha quer estivessem ligeiramente fora dela, mas de tal forma a passar despercebido aos olhos. Pois considerações como essas são intelectualmente desafiadoras; e, se estiver um pouco fora de linha, sendo ao mesmo tempo despercebido pela visão as figuras que são compostas não devem por essa razão ser rejeitadas. (NETZ; NOEL, 2009, 247-248)

Por esse parágrafo, podemos inferir que o tratado sobre o *Stomachion* estudará como suas peças podem ser juntadas. Heiberg imaginou que Arquimedes, em seu estudo, se referia à ilimitada quantidade de formas que podiam ser feitas a partir das catorze formas básicas iniciais. Isso fez com que quase ninguém se interessasse pelo o que se tinha do jogo, aparentemente Arquimedes analisando sobre a geometria de catorze peças e nas figuras que poderiam formar, como uma espécie de Tangram. Logo, apenas um jogo lúdico e de criatividade.

Figura 2.10: Elefante construído com as peças do *Stomachion*



Fonte: https://www.mat.uc.pt/ jaimecs/matelem/stomachion.html.

Noel estava intrigado com o enfoque dado ao jogo e se debruçou sobre o único registro a fim de desvendar o mistério que estava escondido na página do Palimpsesto. A partir das técnicas de recuperação de imagens, fotografias com luz ultravioleta e da ajuda de Reviel Netz, o segundo parágrafo da introdução do Stomachion veio à tona revelando um significado mais intrigante, seu possível estudo sobre Combinatória e um marco para a história da Matemática:

> Por isso então, não há um pequeno número de figuras compostas a partir delas, devo a ser possível rotacioná-las em um outro lugar de uma figura igual e equiangular, transposta para assumir uma outra posição; e novamente também com duas figuras, tomadas juntas sendo iguais e semelhantes a uma única figura, e duas figuras tomadas juntas sendo iguais e semelhantes a duas figuras tomadas juntas – então, como resultado da transposição, muitas figuras são criadas. (NETZ; NOEL, 2009, p.263)

Associando a leitura dos dois primeiros parágrafos da introdução do tratado do Stomachion e de sua construção no manuscrito árabe, Noel, Netz e uma equipe de matemáticos reunida por eles chegaram à conclusão de que os estudos de Arquimedes sobre a geometria das peças, suas rotações e transposições não objetivavam formar figuras mas sim, determinar o números de combinações possíveis das mesmas dentro do quadrado. Ou seja, de quantas maneiras podemos arranjar as peças do *Stomachion* de modo que sempre formem um quadrado. (NETZ; NOEL, 2009, p. 263-264) Uma luz sobre o *Stomachion* foi lançada e indicava que os cientistas estavam diante de um marco sobre os estudos sobre Análise Combinatória. A partir daí, iniciou-se uma corrida para encontrar a solução do problema com o auxílio do que mais estava surgindo da análise das imagens.

Antes de iniciarmos os estudos sobre o jogo em si, vejamos um breve histórico sobre Análise Combinatória.

# 3 História da Análise Combinatória

Neste capítulo buscamos gerar mais um conteúdo sobre a história da Análise Combinatória. Para Biggs (1979, p. 179),

> "A combinatória foi bastante negligenciada pelos historiadores da matemática. No entanto, existem boas razões para estudar as origens do assunto, uma vez que é um tipo de subcultura matemática, não exatamente paralela em seu desenvolvimento às grandes disciplinas de aritmética, álgebra e geometria."(BIGGS, 1979, p. 179)

Leibniz definiu a análise combinatória como "o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos" em 1666, já em 1818, Nicholson sentenciou-a como "o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si." (**??**, p.4)

Resumidamente, podemos definir a análise combinatória como a área da matemática que estuda os métodos associados à resolução de problemas de contagem. Assim sendo, busca analisar e encontrar o número de combinações que podemos obter a partir de $n$ objetos. Essas análises estão cada vez mais presentes na atualidade desde aplicações mais simples como senhas, placas de carros, números para o Cadastro de Pessoa Física (CPF) até tomadas de decisões em relação a aplicações financeiras, genética, probabilidades e estatísticas. Observe os exemplos abaixo:

1. As antigas placas brasileiras de automóveis eram compostas por três letras do alfabeto e quatro algarismos de 0 a 9, sem restrição de repetição de qualquer caractere. Sabe-se que nosso alfabeto dispõe de 26 letras e que de 0 a 9 temos 10 números. Assim, existem $26x26x26x10x10x10x10 = 175.760.000$ possíveis maneiras de se gerar placas no país.

Figura 3.1: Placa de automóvel


Fonte: https://www.carrosnaweb.com.br/dicasplacas.asp.

2. Imagine agora que as placas do exemplo anterior devessem ser compostas por caracteres distintos. O número possível de novas placas seria menor pois a letra utilizada na primeira posição não poderia mais ser utilizada para a segunda e terceira posições e as letras utilizadas na primeira e segunda posições não poderiam ser utilizadas na terceira. O mesmo raciocínio vale para os algarismos. Portanto, a nova configuração permite $26x25x24x10x9x8x7 = 78.624.000$ possíveis placas.

Estes são alguns exemplos de aplicações básicas da combinatória na atualidade.

## 3.1 História da Análise Combinatória do século XVI ao século XIX

A teoria da análise combinatória e sua formalização apenas ocorreram a partir do fim século XVI quando da necessidade de se calcular probabilidades em jogos de azar. Entre os matemáticos que se dedicaram ao assunto, temos Blaise Pascal (1623-1662), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Pierre Fermat (1607-1655), Abraham de Moivre (1667 – 1754), Jacob Bernoulli (1655-1705), Leonard Euler (170-1783) e Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859). (GONÇALVES, 2014, 15-18)

Pascal e Fermat trocaram várias cartas onde tratavam de reflexões sobre problemas dos jogos de azar e são considerados os criadores da Teoria das Probabilidades. Pascal é o autor do Tratado do Triângulo Aritmético, onde expõe as propriedades e combinações existentes entre os coeficientes binomiais.

> Foi fruto da minha primeira adolescência, e, todavia, a obra foi reimpressa depois de muito tempo, sem consultar-me e mesmo sem observar que se tratava de uma segunda edição. Isso levou alguns a crerem, a meu desfavor, que eu era capaz de publicar tal obra em idade avançada. Com efeito, embora existam ali teses que ainda aprovo, outras há que só podem convir a um jovem estudante. (LEIBNIZ; VON, 1998, p.309)

Nesta fala Leibniz se refere à sua obra *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Nos primeiros capítulos, trata dos princípios que hoje norteiam a Análise Combinatória, chamados por ele de Lógica Inventiva. No desenvolvimento da teoria, Leibniz começa estipulando diversas definições até chegar ao conceito de que à "Variabilidade de uma associação chamamos *'complexiones'*, por exemplo, quatro coisas podem ser juntadas de quinze maneiras diversas." (LEIBNIZ, 1880, p.31)

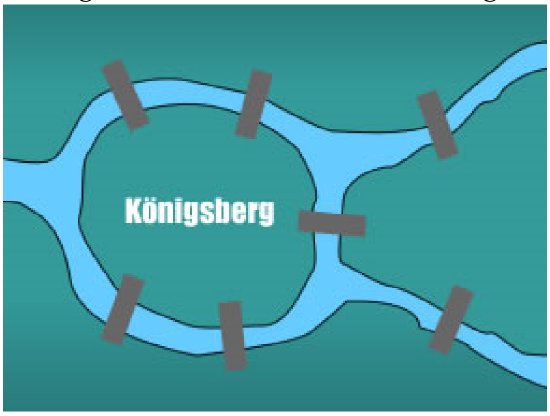
Podemos assumir por essa fala que Leibniz se refere ao que hoje conhecemos como combinações simples, mais especificamente a todos os subconjuntos que podem ser formados a partir de um conjunto de quatro elementos como no exemplo em sua dissertação. Observe que dado um conjunto com quatro elementos, podemos combiná-los um a um, dois a dois, três a três e quatro a quatro. Sejam $X$, $Y$, $Z$ e $W$ os elementos de tal conjunto, assim, temos os subconjuntos:

- Combinações um a um: $(X, Y, Z, W)$;
- Combinações dois a dois: $(XY, XZ, XW, YZ, YW, ZW)$;
- Combinações três a três: $(XYZ, XYW, XZW, YZW)$;
- Combinações quatro a quatro: $(XYZW)$.

Admirado por Newton, Abraham de Moivre dedicou-se aos problemas de contagens e às probabilidades, publicando em 1718 a obra A Doutrina de Chance, onde definiu a independência estatística, ou seja, dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não influencia a ocorrência do outro. Em probabilidade, temos que dois eventos são ditos independentes quando $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Moivre ainda tratou de problemas com dados e jogos de azar.

Já Bernoulli apresentou uma teoria geral sobre arranjos e combinações em sua obra A arte de Conjeturar (1713), além de estudar mais profundamente a Teoria das Probabilidades. Leonard Euler mostrou que não havia solução para o problema das Sete Pontes de Königsberg, que consistia em verificar se era possível cruzar as sete pontes da cidade sem passar por qualquer uma delas por duas vezes. Além do mais, Euler é o responsável pelo símbolo $\binom{n}{p}$ que representa as combinações binomiais e tem fórmula $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. (GONÇALVES, 2014, p.18)

Figura 3.2: Pontes de Könisberg




Fonte: http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-o-enigma-das-pontes-de-konigsberg-que-instigou-geometria.html.

Destacamos também o trabalho de Dirichlet, no século XIX, ao formular O Princípio das Gavetas (ou Princípio da Casa dos Pombos), ferramenta muito importante na solução de problemas de combinatória. O Princípio nos diz que se tivermos $n + 1$ objetos para serem colocados em $n$ gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá contar com dois ou mais objetos. A seguir, temos uma aplicação prática:

- Qual o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que duas entre elas fazem aniversário no mesmo mês?

  **Resposta:** O número mínimo de pessoas é 13.

  **Justificativa:** Para este problema temos:

1. Casas: número de meses do ano - 12 meses;
2. Pombos: número de pessoas - 13 pessoas;
3. Relação: associamos cada pessoa ao seu mês de nascimento. Pelo Princípio das Casas de Pombos, como temos 12 casas e 13 pombos, uma das casas receberá, pelo menos, 2 pombos, ou seja, um dos meses terá dois aniversariantes. (OBMEP, 2013)

## 3.2 Combinatória Antiga

Vimos que a Análise Combinatória desenvolveu-se e foi formalizada a partir do século XVI, todavia, os problemas de contagem sempre existiram. De acordo com Biggs (1979, p.109-110), há dois princípios básicos de contagem em que se baseia grande parte da aritmética, o primeiro diz respeito a contar determinado conjunto de objetos. Se desejamos fazê-lo, podemos separar o conjunto em duas partes, contá-las separadamente e adicionar os resultados. Este princípio é o Princípio Aditivo. Já o segundo, é conhecido como Princípio Multiplicativo, isto é, se uma decisão $D_1$ pode ser tomada de $n$ maneiras e uma decisão $D_2$ pode ser tomada de $m$ maneiras, então, o número total de maneiras de se tomar as decisões $D_1$ e $D_2$ é de $n.m$ maneiras.

Biggs (1979, p.110) ainda afirma que como tais princípios são bem evidentes e são fatos de experiências diárias, até pouco tempo não haviam recebido um status formal e não é possível rastrear o histórico de suas origens, no entanto, nos fornece alguns exemplos memoráveis que persistiram ao longo do tempo, numa tentativa de estabelecer onde os mais antigos surgiram.

Uma certa cantiga de ninar presente em livros infantis do século XX tem sua primeira referência datada em 1730 mas guarda semelhanças com enigmas mais antigos, como um problema contido no *Liber Abaci* de Fibonacci em 1202 e ao Problema 79 do Papiro Rhind de aproximadamente 1650 a.C. Vejamos o que dizem os três:

- Cantiga de Ninar – 1730

  "Quando estava indo a Saint Ives,
  Eu encontrei um homem com sete esposas
  Cada esposa tinha sete sacos,
  Cada sacos tinha sete gatos,
  Cada gato tinha sete gatinhos,
  Gatinhos, gatos, sacos e esposas,
  Quantos estavam indo a Saint Ives?" (BIGGS, 1979, p.110)

- Problema do *Liber Abaci* – 1202

  "Sete velhas mulheres estão indo a Roma;
  Cada uma tem sete mulas;
  Cada mula carrega sete sacos;
  Cada saco tem sete pães;
  Cada pão tem sete facas;
  E cada faca tem sete bainhas.
  Qual o número total de coisas?" (BIGGS, 1979, p.111)

- Papiro Rhind - Problema 79 – 1650 a.C.

| | |
|---|---|
| Casas | 7 |
| Gatos | 49 |
| Ratos | 343 |
| Trigo | 2401 |
| Hekat[1] | 16807 |
| | 19607 |

Mais tarde o Problema 79 recebeu do matemático francês Leon Rodet (BIGGS, 1979, p.111) o seguinte enunciado:

"Há sete casas,
Cada uma com sete gatos;
Cada gato mata sete ratos;
Cada rato teria comido sete cabeças de trigo;
Cada uma teria produzido sete hekat de grãos.
Qual o total de itens?"

A similaridade dos problemas indica que as regras básicas de contagem estavam presentes desde as antigas civilizações.

Materiais datados do século XVII a.C. compilados no famoso Livro Chinês das Mutações ou *I Ching*, descrevem um sistema baseado em dois símbolos: o *Yang* (-) e o *Ying* (–). Tais símbolos eram combinados em trigramas (conjuntos de três símbolos) ou hexagramas (conjuntos de seis símbolos). Ao descrevê-los, os chineses verificaram a validade da regra $2^n$, onde $n$ corresponde a quantidade de símbolos para formar um novo, na determinação de quantos trigramas ou hexagramas poderiam ser obtidos a partir do *Yang* e do *Ying*. Assim, é possível gerar $2^3 = 8$ trigramas e $2^6 = 64$ hexagramas distintos. Cada novo trigrama ou hexagrama gerado tem um significado na filosofia chinesa do *Tai Chi*.

[1]Hekat é uma unidade de medida de grãos utilizada no Egito Antigo que equivale a 4,8 litros.

Figura 3.3: Trigramas e seus significados

| | |
|---|---|
| ☰ | **Céu**: Criador; forte, ativo; é o pai.<br>Parte do corpo: cabeça. Animal: cavalo. |
| ☷ | **Terra**: Receptivo, maleável, dedicado; é a mãe.<br>Parte do corpo: ventre. Animal: vaca. |
| ☳ | **Trovão**: Desperta, movimenta; é o filho mais velho.<br>Parte do corpo: pé. Animal: dragão. |
| ☵ | **Água**: Nuvens; abismo, perigo; é o filho do meio.<br>Parte do corpo: ouvido. Animal: porco. |
| ☶ | **Montanha**: Quietude, imobilidade; é o filho mais novo.<br>Parte do corpo: mão. Animal: cão. |
| ☴ | **Vento**: Madeira; suave, penetrante; é a filha mais velha.<br>Parte do corpo: coxa. Animal: galo. |
| ☲ | **Fogo**: Sol; o que se liga, luminoso; é a filha do meio.<br>Parte do corpo: olho. Animal: faisão. |
| ☱ | **Lago**: Alegria, jovialidade; é a filha mais nova.<br>Parte do corpo: boca. Animal: carneiro. |

Fonte: https://iching.com.br/trigramas/.

Ao analisar o *I Ching* e os hexagramas, Leibniz creditou aos chineses a criação do sistema binário. Ao tomar o *Yang* como 1 e o *Yin* como 0 e ordenar os hexagramas em ordem crescente, teríamos as representações binárias dos números de 0 a 63.

Ainda na Ásia, por volta do século VI a. C., o Tratado Médico de *Susruta*, de origem hindu, traz um exemplo envolvendo combinatória ao discutir sobre os sabores que poderiam ser obtidos ao combinar os sabores doce, ácido, salgado, pungente, amargo e adstringente. Este tratado lista as combinações dos sabores tomados um a um (seis combinações), dois a dois (quinze combinações), três a três (vinte combinações), quatro a quatro (quinze combinações), cinco a cinco (seis combinações) e os seis tomados juntamente (uma combinação).

Na mesma época, o matemático e astrônomo Varahamihira registrou em seu trabalho chamado *Brihatsamhita* vários conhecimentos hindus, entre eles, evidências que nos levam a crer que a fórmula para o cálculo de combinações já era de conhecimento de seu povo. No capítulo sobre perfumes, há uma declaração de que o número de maneiras de escolher quatro dentre dezesseis ingredientes é 1820. O número correto! Para Biggs (1979, p.116) parece improvável que Varahamihira tenha obtido a resposta ao listar todos os casos, uma vez que o resultado é dado sem mais comentários e, uma lista deste tamanho, certamente receberia algum.

Avançando aos anos de 1150, a obra *Lilavati* do matemático indiano Bhaskara nos presenteia com duas evidências do conhecimento da fórmula para combinações:

- Em um agradável, espaçoso e elegante palácio, com oito portas, construído por um habilidoso arquiteto para o senhor deste terra, conte-me as combinações de aberturas tomadas a uma a uma, duas a duas, três a três etc.
  Resposta :

  | | | | | | | | |
  |---|---|---|---|---|---|---|---|
  | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |
  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

  As maneiras de se abrir as portas do palácio somam 255. (BHASKARA, 1150 *apud* BIGGS, 1979, p. 116)

- Diga-me matemático, quantas são as combinações em uma composição, com ingredientes de seis sabores diferentes, doce, pungente, adstringente, ácido, salgado e amargo, tomados um a um, dois a dois, três a três, etc.
  Resposta:

  | | | | | | |
  |---|---|---|---|---|---|
  | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

  Esses são os números das diversas preparações para seis ingredientes. (BHASKARA, 1150 *apud* BIGGS, 1979, p. 116)

Parece conclusivo que Bhaskara conhecia a fórmula das combinações dada sua breve solução para os problemas, inclusive, no último exemplo, se comparado à solução apresentada por Susruta em sua lista.

Retornemos ao continente europeu. As contribuições do velho mundo para a combinatória vieram a partir do século XVI conforme início do capítulo. Poucos registros gregos traziam algum comentário sobre o assunto. A principal teoria é a de que a ciência grega evoluiu no campo visual, concreto, ou seja, na geometria. Calcular combinações não é algo visual, é abstrato. (NETZ; NOEL, 2009, p. 254) Por conseguinte, o arquivo mais conhecido, até a descoberta do Palimpsesto, era uma passagem no trabalho de Plutarco (46 – 126 d.C.) *Quaestiones Conviviales*:

> Crisipo diz que o número de maneiras que se pode combinar dez asserções excede um milhão. Hiparco, por sua vez, refutou a ideia e afirmou que se as asserções fossem apenas afirmativas, haveriam 103.049 composições. Se tomadas pela negativa, haveriam 310.952. (PLUTARCHUS et al., 1961)

De acordo com Noel e Netz (2009, p. 255-256), os historiadores da matemática nunca se interessaram em entender tais números dada à parca informação disponível.

Somente em 1994 quando um aluno da Universidade George Washington se deparou com os números de Hiparco (190 – 120 a.C.) enquanto folheava um livro de combinatória e ao mesmo tempo examinava um livro de importantes números matemáticos. Ao verificar a parte dos números de Schröder, notou que o décimo número (103.049) coincidia com o menor número de Hiparco. Mais tarde, Fabio Acerbi, da equipe de William Noel, se interessou pelo assunto ao ler o artigo publicado com esse assunto e criou uma teoria de como Hiparco teria chegado aos dois números e a demonstrou utilizando apenas as ferramentas disponíveis ao antigo matemático.

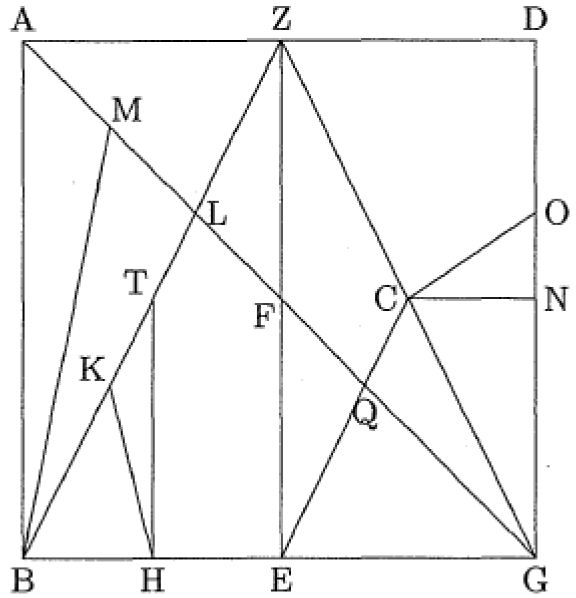
> Em essência, uma das possíveis interpretações de um número de Schröder é o número de maneiras em que uma sequência de letras pode ser colocada dentro de parênteses: ou seja, os quatro caracteres abcd podem ser colocados dentro de parênteses de várias maneiras: (a(bcd)), (ab(cd)), ((a)(b)(cd)) etc ... O terceiro número de Schröeder é 11, isto é, há 11 diferentes maneiras pelas quais os quatro caracteres abcd podem ser colocados dentro de parênteses. (Esse número é surpreendentemente alto – como tão frequente é o caso dos problemas de combinatória.) Acerbi mostrou que, de acordo com a lógica estoica (fazer nota), o problema de combinar dez asserções poderia ser visto como análogo àquele de colocar dez caracteres dentro de parênteses. E ele então desenvolveu um método para solucionar esse problema dentro dos meios de que Hiparco dispunha. Ele demonstrou, finalmente, que com uma condição extra (isto é, quando é admitido não somente "afirmar" asserções, mas também negá-las), o número se torna 310.954, confirmando o segundo número reportado por Plutarco. (NETZ; NOEL, 2009, p.256)

Este estudo prova que, de fato, a combinatória antiga existiu e, era no mínimo refinada. Concordamos com a conclusão de Netz e Noel (2009, p. 257) de que como Hiparco nasceu por volta de 22 anos após a morte de Arquimedes, é bem provável e possível que Arquimedes tenha estudado combinatória e, assim, o Stomachion poderia ser o primeiro registro de um estudo sobre o tema na História. Acerbi, inclusive, foi consultado por Noel e atestou que ninguém havia pensado na possibilidade do Stomachion não passar de apenas um jogo. Com o auxílio das imagens e informações do Palimpsesto no livro Códex Arquimedes e o artigo de Noel, Acerbi e Wilson *"Towards a Reconstruction of Archimedes' Stomachion"*, nos próximos capítulos apresentaremos um estudo completo sobre o Stomachion: suas peças, propriedades e Análise Combinatória envolvida. Finalizamos com a aplicação de teoremas e ferramentas digitais para mostrar a riqueza de conteúdos envolvidos no tema.

# 4 Desvendando o *Stomachion*

A forma de um quadrado para o *Stomachion* não pôde ser definida apenas com as consultas ao Palimpsesto, as páginas que, provavelmente, continham o diagrama foram perdidas. A única representação do diagrama está contida no manuscrito árabe encontrado por Suter e, por ele, o *Stomachion* é um quadrado e sua imagem está na figura abaixo:

Figura 4.1: Diagrama do manuscrito árabe



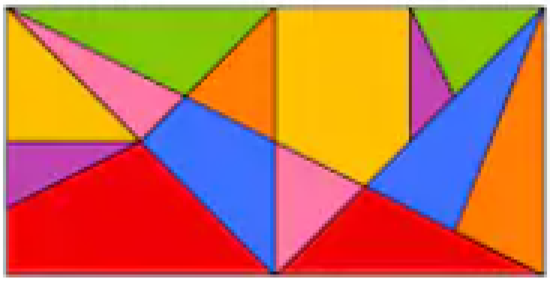

Fonte: (NETZ; ACERBI; WILSON, 2004, p.80)

Além disso, Suter traduziu o início do manuscrito: "Nós desenhamos uma figura cujos quatro lados são paralelos dois a dois, os quais são ABGD, onde AD é igual a AB." (ARCHIMEDES; SUTER, 1899, p.2)

Segundo o artigo de Noel, os matemáticos Lucretius e Caesius Bassus fortalecem a ideia de o Stomachion ser um quadrado ao declararem que o jogo é composto por 14 peças que podem ser organizadas para formar um quadrado. (NETZ; ACERBI; WILSON, 2004, p.70)

Noel ainda destaca que a incerteza sobre a forma reside no fato de que nos textos extraídos do Palimpsesto, Arquimedes usa uma determinada palavra para se referir a um retângulo e outra para um quadrado e usa ambas quando se trata do *Stomachion*. Daí, a dúvida se o diagrama se refere a um quadrado ou a um retângulo (quadrado duplo). (NETZ; ACERBI; WILSON, 2004, p.79)

Figura 4.2: Quadrado duplo



Fonte: https://www.shutterstock.com/pt/search/stomachion.

Neste trabalho seguiremos o que a equipe que trabalhou no *Stomachion* tomou como padrão para seus estudos, o quadrado para o jogo e para as atividades e o quadrado duplo para os demais tratamentos:

> Claro, a menção de *quadratum* em nossas fontes Latinas, tanto quanto o desejo de ter um quebra-cabeças elegante, sugerem um quadrado ao invés de um retângulo. No entanto, não há o que impeça a construção de ser definida como um quadrado duplo (quando realizada dilatação lateral por um fator de dois), enquanto o jogo se refere a construir um quadrado. Dito isto, devemos perceber que, quando a figura árabe é estendida para combinar com as figuras gregas, ela não coincide com qualquer uma delas: ambas figuras gregas têm linhas extras que não representam divisões reais do jogo (na primeira figura, é a ΓZ; na segunda figura grega, referimos a pelo menos as linhas misteriosas KΛ, XΞ). Aqui nós tomamos a posição de nos referir às divisões da figura árabe (possivelmente esticada para um quadrado duplo) como as divisões do *Stomachion*. (NETZ; ACERBI; WILSON, 2004, p.81)

As menções às linhas do *Stomachion* na figura grega se referem ao texto da próxima seção, a primeira tradução da língua inglesa (tradução do grego contida no artigo *Towards a Reconstruction of Archimedes' Stomachion*) para a portuguesa do tratado do *Stomachion*. Notemos na seção seguinte que as palavras entre colchetes ([]) são palavras que não são legíveis no texto mas que acreditamos completar o mesmo, o símbolo "(?)" corresponde a trechos que não puderam ser recuperados com as tecnologias de imagem e, as reticências dizem respeito a trechos que foram destruídos pelo tempo.

Em seguida, o trabalho se concentra no estudo das formas do Stomachion, das interações entre elas e da combinatória.

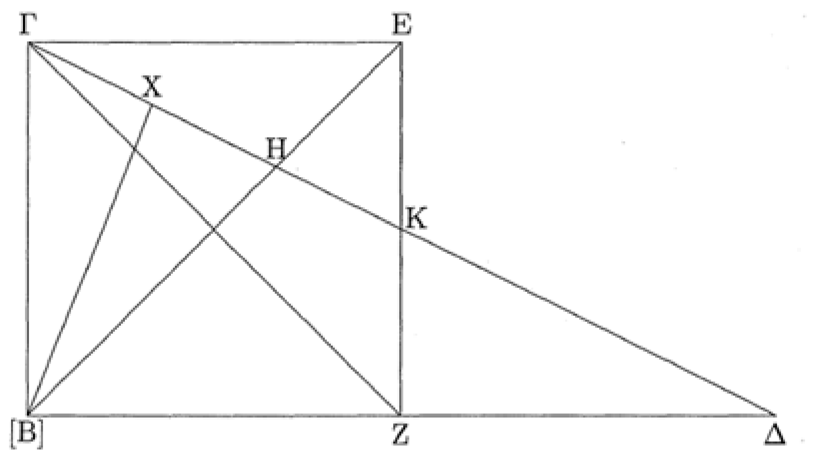
## 4.1 Tradução do Palimpsesto – Fragmento do *Stomachion*

Como o assim chamado *Stomachion* tem uma variada teoria de transposição das figuras com as quais é formado, achei necessário: primeiro, especificar, em minha investigação a respeito da magnitude da figura inteira, cada uma das figuras em que é dividido por qual [número] é medido; e posteriormente também quais são os ângulos, considerados pelas combinações e somados juntos; tudo isso dito com o propósito de descobrir a montagem das figuras que surgiriam, quer os lados resultantes das figuras estivessem em uma linha quer estivessem ligeiramente fora dela, mas de tal forma a passar despercebido aos olhos. Pois considerações como essas são intelectualmente desafiadoras; e, se estiver um pouco fora de linha, sendo ao mesmo tempo despercebido pela visão as figuras que são compostas não devem por essa razão ser rejeitadas.

Por isso então, não há um pequeno número de figuras compostas a partir delas, devido a ser possível rotacioná-las em um outro lugar de uma figura igual e equiangular, transposta para assumir uma outra posição; e novamente também com duas figuras, tomadas juntas sendo iguais e semelhantes a uma única figura, e duas figuras tomadas juntas sendo iguais e semelhantes a duas figuras tomadas juntas – então, como resultado da transposição, muitas figuras são criadas. Então, nós escrevemos um pequeno teorema sobre este [fim].

Para que haja um quadrado ZΓ e que EΓ seja bisseccionado por [ponto] K e sejam ΓK e BE unidos a partir de Γ e E; [deve-se] provar [que] ΓB é maior que BH.

Figura 4.3: Análise do Stomachion




Fonte: (NETZ; ACERBI; WILSON, 2004, p.94)

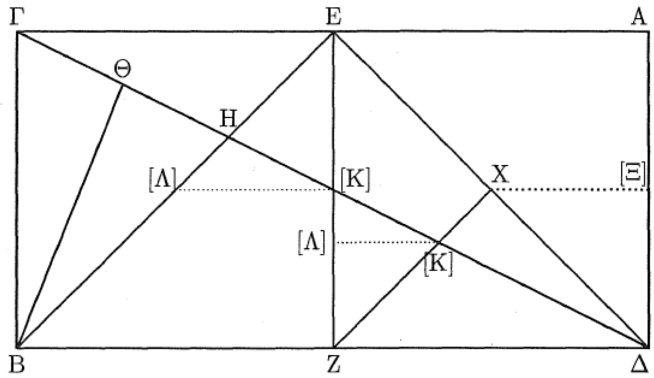
Sejam produzidos ΓK e BZ e se encontrem em Δ, originando ΓZ. Sendo EK igual a KZ e ΓE igual a BZ e a ZΔ, então ΓZ é maior que ZΔ: portanto, [o] ângulo, também, [contido] por ZΔΓ é maior que o [ângulo contido] por ZΓΔ. Mas os [ângulos contidos] por HBΔ e BΓZ são iguais; ambos são a metade de um [ângulo] reto: portanto, o [ângulo contido] por ΓHB é maior; também – o [ângulo contido] por ΓHB é igual a soma dos [ângulos contidos] por HBΔ e HΔB – que o [ângulo contido] por HΓB: de modo que, ΓB é maior que BH. Por esse motivo, se ΓH for bisseccionado em X, o [ângulo contido] por ΓXB deverá ser obtuso; desde que ΓX é igual a XH, e XB é comum, os dois são iguais aos dois (ângulos ΓBX e XBH); e a base ΓB é maior que BH: portanto o ângulo, também, é maior que o ângulo. Assim, o [ângulo contido] por ΓXB é obtuso; e o [ângulo] adjacente é agudo. E o [ângulo contido] por ΓBH [é] metade de um [ângulo] reto dado o paralelogramo ser definido [como] equiangular; e o [ângulo contido] por BXH é agudo; e novamente, nenhum dos remanescentes [lados? ângulos?] são iguais a ΓBH e isto é definido e dividido pela parte anexa [scilicet (latim: vale dizer) apenas por este arranjo?].

... feito (?) um .... de ângulos retos e lados dobrados, AB, tendo ΓA o dobro de ΓB, tendo o diâmetro [AB], tendo a espessura (?) não (?)...

nisto? ... encaixando juntos ?...

... (é/ não é) possível encaixar juntas ao longo das linhas, com as partes tendo uma ordem.[1]

Figura 4.4: Construção a partir do Palimpsesto




Fonte: (NETZ; ACERBI; WILSON, 2004, p.95)

E seja ΓA bisseccionado em E, e seja EZ desenhado através de E paralelo a BΓ. Então, ΓZ e ZA são quadrados. Sejam desenhados os diâmetros ΓΔ, BE e EΔ e sejam ΓH e EΔ bisseccionados em Θ e X e sejam ligados BΘ e XZ, e sejam KΛ, XΞ desenhados através de X e K, paralelos a BΔ. Portanto através do teorema estabelecido o ângulo em Θ do triângulo BΓΘ é obtuso, enquanto é óbvio que o restante é agudo. É óbvio que ... é maior...

[1]O diagrama é uma reconstrução e não está contido no palimpsesto sobrevivente. As letras nos colchetes não são univocamente determinadas pelo texto. As duas linhas pontilhadas são posições alternativas da linha KΛ. (NETZ; ACERBI; WILSON, 2004, p.94)

## 4.2 As peças do *Stomachion*

Figura 4.5: Peças do *Stomachion*

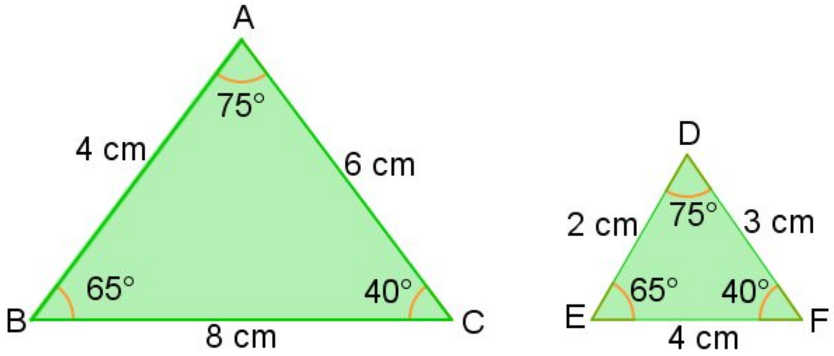
Fonte: https://www.shutterstock.com/pt/image-vector/ostomachion-game-puzzle-archimedes-key-isolated-359523074.

Baseados no texto do *Stomachion* traduzido na seção anterior e na figura encontrada no manuscrito árabe, temos que as quatorze peças se resumem a: onze triângulos, dois quadriláteros e um polígono de cinco lados. Existem algumas relações de semelhança e congruência entre algumas das figuras e de comensurabilidade entre cada figura e o quadrado.

Em Geometria, duas figuras são ditas congruentes quando os lados e ângulos da primeira estão em correspondência com os lados e ângulos da segunda, de modo que as medidas dos lados em correspondência sejam iguais, assim como os ângulos.

Dizemos que duas figuras são semelhantes quando possuem ângulos correspondentes iguais e lados correspondentes proporcionais, essa proporcionalidade entre os lados é chamada razão de semelhança e deve ser a mesma para todos os lados correspondentes. Os triângulos ABC e DEF são um exemplo de triângulos semelhantes, observe que $\hat{A}$ e $\hat{D}$, $\hat{B}$ e $\hat{E}$ e $\hat{C}$ e $\hat{F}$ são correspondentes e que os lados correspondentes são proporcionais entre si numa razão de semelhança de $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$

Figura 4.6: Triângulos Semelhantes - Caso LLL

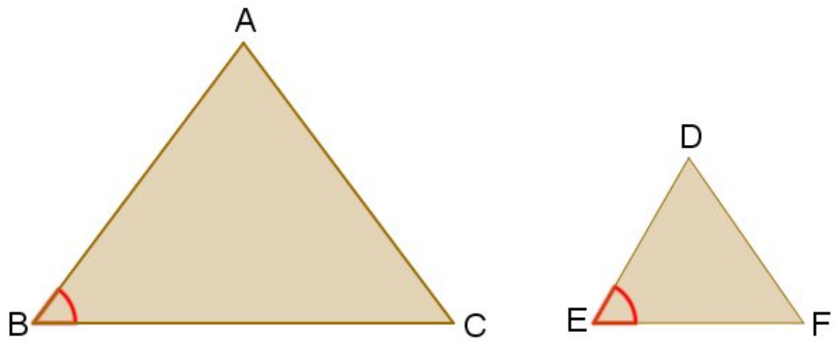



Fonte: https://www.infoescola.com/matematica/semelhanca-de-triangulos/.

Dizemos que estes triângulos são semelhantes pelo Caso Lado Lado Lado (LLL), pois seus lados são proporcionais. Há ainda dois outros casos em que podemos determinar a semelhança entre triângulos: Caso Lado Ângulo Lado (LAL) e Caso Ângulo Ângulo (AA).

Pelo Caso LAL, os triângulos são semelhantes quando dois de seus lados correspondentes são proporcionais e o ângulo entre eles é igual.

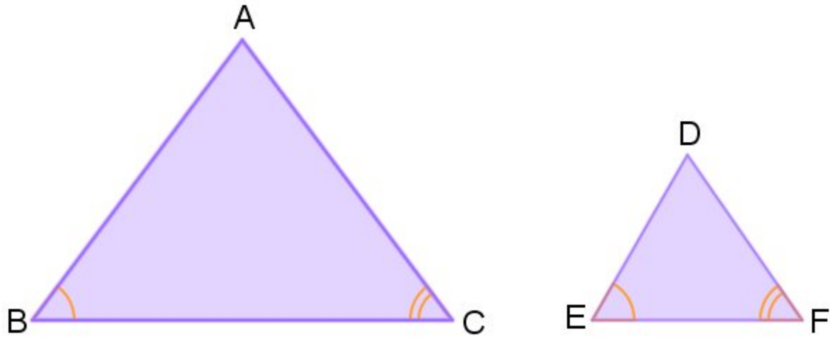
Figura 4.7: Triângulos Semelhantes - Caso LAL




https://www.infoescola.com/matematica/semelhanca-de-triangulos/

Quando dois triângulos tem dois de seus ângulos correspondentes congruentes, temos o caso de semelhança Ângulo Ângulo (AA).

Figura 4.8: Triângulos Semelhantes - Caso AA




https://www.infoescola.com/matematica/semelhanca-de-triangulos/

Elon Lages Lima (2012, p. 7 - Unidade 4) definiu no livro Números e Funções Reais:

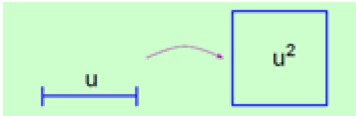
> Sejam $AB$ e $CD$ dois segmentos. Se existe um segmento $u$ e dois números naturais $m$ e $n$ tais que $AB = m.u$ e $CD = n.u$, dizemos que $AB$ e $CD$ são **comensuráveis**. Caso contrário, dizemos que $AB$ e $CD$ são **incomensuráveis**.

Ainda segundo Lima, os gregos descobriram a incomensurabilidade por volta do século IV a.C. quando demonstraram a incomensurabilidade do lado e da diagonal do quadrado. Os gregos antigos consideravam números apenas o que hoje conhecemos como números naturais, assim, podemos interpretar como grandezas comensuráveis àquelas que cuja razão pode ser representada como uma razão entre números naturais. Destacamos que essa descoberta é anterior a Arquimedes, portanto, ferramenta útil em seus tratados e estudos.

Em se tratando de medição de áreas, foco da comensurabilidade entre as figuras e o quadrado do Stomachion, o exemplo utilizado por Lima ao final da Unidade 4 garante-nos uma boa compreensão sobre o assunto, vejamos:

"... uma unidade de medida de comprimento $u$ determina uma unidade de medida de área $u^2$, representada pelo quadrado de lado $u$, chamado quadrado unitário.

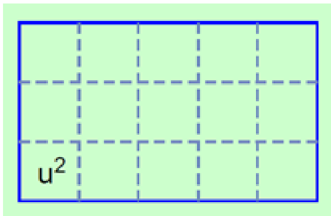
Figura 4.9: Quadrado unitário




Fonte: (LIMA, 2012, p.21)

Se queremos medir a área de um retângulo cujos lados são ambos múltiplos inteiros de $u$, basta preenchê-lo com quadrados unitários e contar esses quadrados. A medida da área do retângulo, em relação à unidade $u^2$, será dada pelo número $m$ de quadrados unitários que cabem no retângulo. Neste caso, a medida da área é um número natural. No exemplo abaixo, a medida da área é $S = 15u^2$." (LIMA, 2012, p.21-Unidade 4)

Figura 4.10: Comensurabilidade de figuras




Fonte: (LIMA, 2012, p.21)

Para este caso, a razão entre as áreas é 15.

## 4.3 Propriedades das peças do *Stomachion*

Seguindo a tradução do tratado na seção 4.1 e o diagrama árabe (Figura 4.1), temos o quadrado $ADGB$, onde $Z$, $N$, $E$, $F$ e $M$ são pontos médios de $AD$, $DG$, $BG$, $ZE$ e $AL$, respectivamente. Ainda, $AG$ é diagonal do quadrado, $BZ$ e $ZG$ são diagonais dos respectivos retângulos $AZEB$ e $ZDGE$. $C$ é ponto médio de $ZG$, logo, $CN \equiv \frac{1}{2}EG$, como o texto no palimpsesto fala em desenhar um segmento $FT$ a partir de $F$, paralelamente a $BG$, temos, então que $T$ é ponto médio de $BZ$. $TH$ é perpendicular a $BG$, logo $H$ é ponto médio de $BE$.

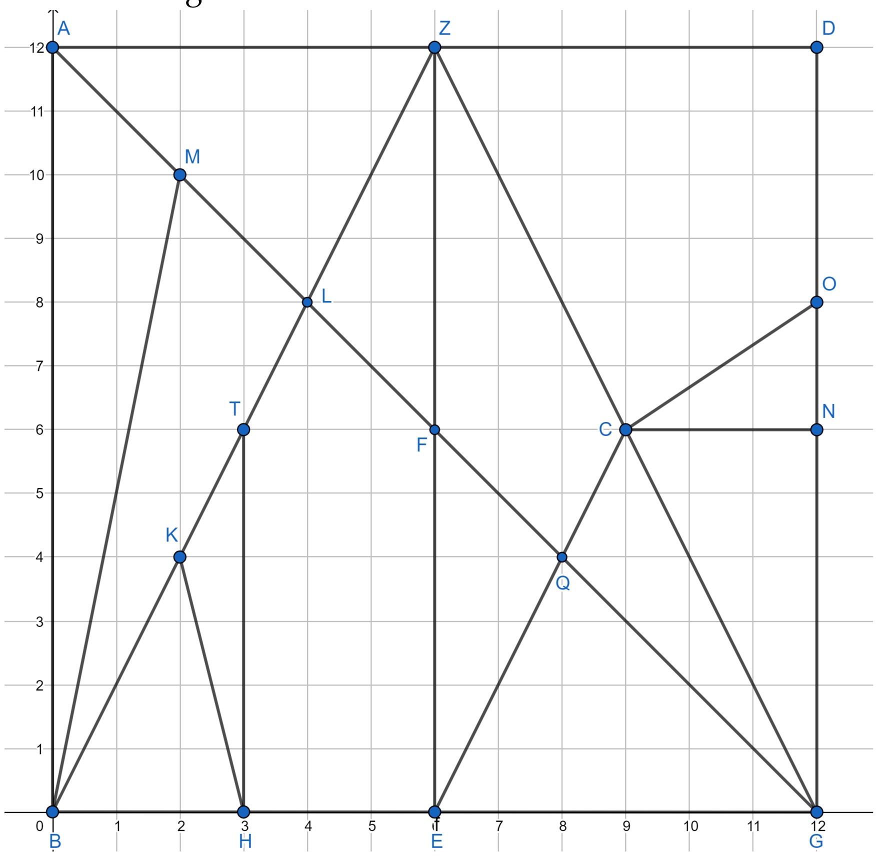
Ora, podemos inferir que os triângulos $AZB$, $BZE$, $ZEG$, $ZDG$, $CNG$, $CNO$, $FEG$, $AZF$ e $BTH$ são retângulos. Pelo caso LAL, os triângulos $AZB$, $BZE$, $ZEG$ e $ZDG$ são congruentes entre si e o mesmo vale para os triângulos $FEG$ e $AZF$. Consequentemente, pelo mesmo caso, temos que $\triangle AZL \equiv \triangle EQG$ e $\triangle ZLF \equiv \triangle FQE$.

O texto sobrevivente no Palimpsesto não menciona as posições dos pontos $K$ e $O$ constantes no diagrama árabe, conseguiremos a seguir determiná-las a partir da informação sobre a comensurabilidade das áreas das peças com a área do quadrado e da descoberta de Bill Cutler. (NETZ; NOEL, 2009, p. 65)

## 4.4 As áreas

O manuscrito árabe, segundo Archimedes e Suter (1899), traz os cálculos das frações de cada peça em relação ao quadrado todo. São elas: $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{24}$, $(\frac{1}{2})(\frac{1}{6}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{8})$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$. A partir de tal informação, Bill Cutler, um cientista da computação de Illinois, que se interessou pelo desafio da solução do Stomachion, observou que o mesmo poderia ser visto como um quadrado com lado medindo 12 unidades de comprimento e que os vértices das peças têm sempre coordenadas inteiras. (SILVA, 2017, p.42)
Podemos visualizar o Stomachion através de uma malha quadriculada 12x12:

Figura 4.11: *Stomachion* em malha 12x12




Fonte: Autoria própria.

Seja $u$ a unidade de comprimento utilizada para a construção do quadrado e suas peças, assim, a área do quadrado $ADGB$ corresponde a $144u^2$. Seja a área $S$ do triângulo a metade do produto de sua base por sua altura. Assim,

- $S_{\triangle CNG} = \frac{6.3}{2} = 9u^2$;
- $S_{\triangle AZL} = S_{\triangle EQG} = \frac{6.4}{2} = 12u^2$;
- $S_{\triangle CQG} = S_{\triangle CEG} - S_{\triangle EQG} = \frac{6.6}{2} - 12 = 6u^2$;
- $S_{\triangle ZLF} = S_{\triangle FQE} = \frac{6.2}{2} = 6u^2$;
- $S_{\triangle AMB} = \frac{12.2}{2} = 12u^2$;
- $S_{\triangle MLB} = S_{\triangle ALB} - S_{\triangle AMB} = \frac{12.4}{2} - 12 = 12u^2$;
- $S_{\triangle BKH} = \frac{3.4}{2} = 6u^2$;
- $S_{\triangle KTH} = S_{\triangle TBH} - S_{\triangle BKH} = \frac{3.6}{2} - 6 = 3u^2$;
- $S_{\triangle CNO} = \frac{3.2}{2} = 3u^2$;

A partir destes cálculos, podemos determinar as áreas das peças restantes:

- $S_{ZDOC} = S_{\triangle ZDG} - S_{\triangle CNO} - S_{\triangle CNG} = \frac{6.12}{2} - 3 - 9 = 24u^2$;
- $S_{ZCQF} = S_{\triangle ZEG} - S_{\triangle FQE} - S_{\triangle CQG - S_{\triangle EQG}} = \frac{6.12}{2} - 6 - 6 - 12 = 12u^2$;
- $S_{TLFEH} = S_{\triangle ZBE} - S_{\triangle ZLF} - S_{\triangle TBH} = \frac{6.12}{2} - 6 - 9 = 21u^2$;

As áreas também podem ser calculadas facilmente valendo-nos do Teorema de Pick e do cálculo de áreas por determinantes, conforme veremos adiante.

Verificamos as frações das áreas de cada peça em relação ao quadrado todo e confirmamos os cálculos contidos no documento árabe:

- $\frac{S_{\triangle CNG}}{S_{ADGB}} = \frac{9}{144} = \frac{1}{16}$;
- $\frac{S_{\triangle AZL}}{S_{ADGB}} = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$;
- $\frac{S_{\triangle EQG}}{S_{ADGB}} = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$;
- $\frac{S_{\triangle CQG}}{S_{ADGB}} = \frac{6}{144} = \frac{1}{24}$;
- $\frac{S_{\triangle ZLF}}{S_{ADGB}} = \frac{6}{144} = \frac{1}{24}$;
- $\frac{S_{\triangle FQE}}{S_{ADGB}} = \frac{6}{144} = \frac{1}{24}$;
- $\frac{S_{\triangle AMB}}{S_{ADGB}} = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$;

- $\frac{S_{\triangle MLB}}{S_{ADGB}} = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$;
- $\frac{S_{\triangle BKH}}{S_{ADGB}} = \frac{6}{144} = \frac{1}{24}$;
- $\frac{S_{\triangle KTH}}{S_{ADGB}} = \frac{3}{144} = \frac{1}{48}$;
- $\frac{S_{\triangle CNO}}{S_{ADGB}} = \frac{3}{144} = \frac{1}{48}$;
- $\frac{S_{ZDOC}}{S_{ADGB}} = \frac{6}{144} = \frac{1}{24}$;
- $\frac{S_{ZCQF}}{S_{ADGB}} = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$;
- $\frac{S_{TLFEH}}{S_{ADGB}} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}$.

Aparentemente, a última fração não coincide com o resultado, entretanto, a fração $\frac{7}{48}$ é equivalente à fração $(\frac{1}{2})(\frac{1}{6}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{8})$. Os gregos e os árabes eram acostumados a calcular com frações unitárias, ou seja, frações de numeradores 1 e denominadores podendo assumir qualquer inteiro maior do que zero. Os árabes eram ainda mais específicos e apenas lidavam com frações de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{10}$ pois são frações que possuem um nome particular (um meio, um terço, ..., um décimo), enquanto frações com denominadores maiores requerem uma frase maior como, por exemplo, $\frac{5}{32}$ (cinco trinta e dois avos). (HØYRUP1 *, 1990, p.293–324)

Consequentemente, $\frac{7}{48} = (\frac{1}{2})(\frac{1}{6}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{8})$ no manuscrito árabe e seria equivalente a $(\frac{1}{12}) + (\frac{1}{16})$ para os gregos.

Neste sentido, Noel, Wilson e Acerbi lançam uma hipótese de que a inspiração para a combinatória no *Stomachion* sejam as frações unitárias:

> Gregos praticantes de cálculos seriam intimamente familiarizados com a rica estrutura de expressões equivalentes – que é como Arquimedes teria operado com os resultados das frações existentes no fragmento árabe. Em outras palavras, o cálculo combinatório que Arquimedes efetuou no quadrado do Stomachion provalmente teria suas raízes numa experiência prática com um padrão de equivalência. (NETZ; ACERBI; WILSON, 2004, p.86)

Observe que, todas as frações do manuscrito podem ser escritas com um denominador comum, ou sejam, são todas múltiplas de uma medida comum – são comensuráveis. Esta medida comum é $\frac{7}{48}$, logo, os múltiplos equivalentes são 3, 4, 4, 2, 2, 2, 4, 4, 2, 1, 1, 8, 4 e 7. Baseado nisto, Arquimedes pode ter pensando em combinar peças que substituíssem uma ou mais através das áreas. Perceba que 3=2+1, 4=2+2 e 4=3+1, e assim por diante. O estudo dessas combinações não é suficiente para que se mantenha a forma do quadrado, assim, passemos à parte em que, de acordo com o texto do Palimpsesto, Arquimedes verifica as combinações dos ângulos internos das peças e os tamanhos de seus lados.

## 4.5 Interações entre as peças

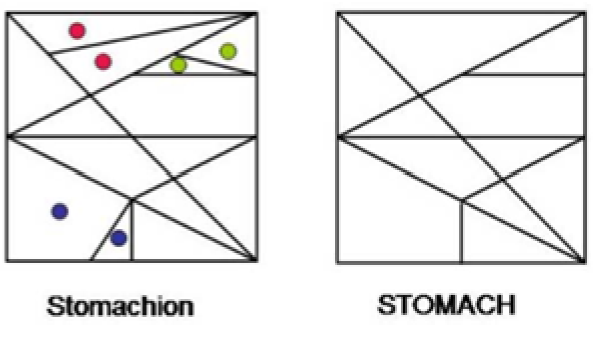
No primeiro parágrafo do *Stomachion*, Arquimedes fala em

> [...] quais são os ângulos, considerados pelas combinações e somados juntos; tudo isso dito com o propósito de descobrir a montagem das figuras que surgiriam, quer os lados resultantes das figuras estivessem em uma linha quer estivessem ligeiramente fora dela, mas de tal forma a passar despercebido aos olhos. (NETZ; NOEL, 2009, p. 248)

Logo, na montagem do quadrado, devemos nos atentar à quais peças têm a capacidade de serem montadas juntas e somarem 180º internamente ao quadrado e 90º nos vértices do quadrado.

Observemos que os $\triangle AMB$ e $\triangle MLB$ devem sempre permanecer juntos e, portanto, podem ser tratados como uma única figura pois $B\hat{A}M = 45^{\circ}$, $BA$ é lado do quadrado e $A\hat{M}B$ é o único suplementar de $B\hat{M}L$. Da mesma forma, concluímos que os $\triangle BKH$ e $\triangle KTH$ serão tratados como uma única figura e o $\triangle CNO$ e o quadrilátero $ZDOC$ também. Por consequência, o *Stomachion* passa de 14 para 11 peças. Tal configuração é conhecida como *Stomach*. Essas conclusões foram feitas, primeiramente, pelos matemáticos Fan Chung e Ron Graham. (CHUNG; GRAHAM, 2007)

Figura 4.12: Descoberta de Chung e Graham - Stomach




Fonte: (CHUNG; GRAHAM, 2007)

## 4.6 Combinatória no *Stomachion*

O segundo parágrafo do fragmento do *Stomachion* indica o interesse de Arquimedes na substituição de umas peças por outras e em suas rotações de maneira a encontrar novas figuras:

> "Por isso então, não há um pequeno número de figuras compostas a partir delas, devido a ser possível rotacioná-las em um outro lugar de uma figura igual e equiangular, transposta para assumir uma outra posição; e novamente também com duas figuras, tomadas juntas sendo iguais e semelhantes a uma única figura, e duas figuras tomadas juntas sendo iguais e semelhantes a duas figuras tomadas juntas – então, como resultado da transposição, muitas figuras são criadas."(NETZ; NOEL, 2009, p.263)

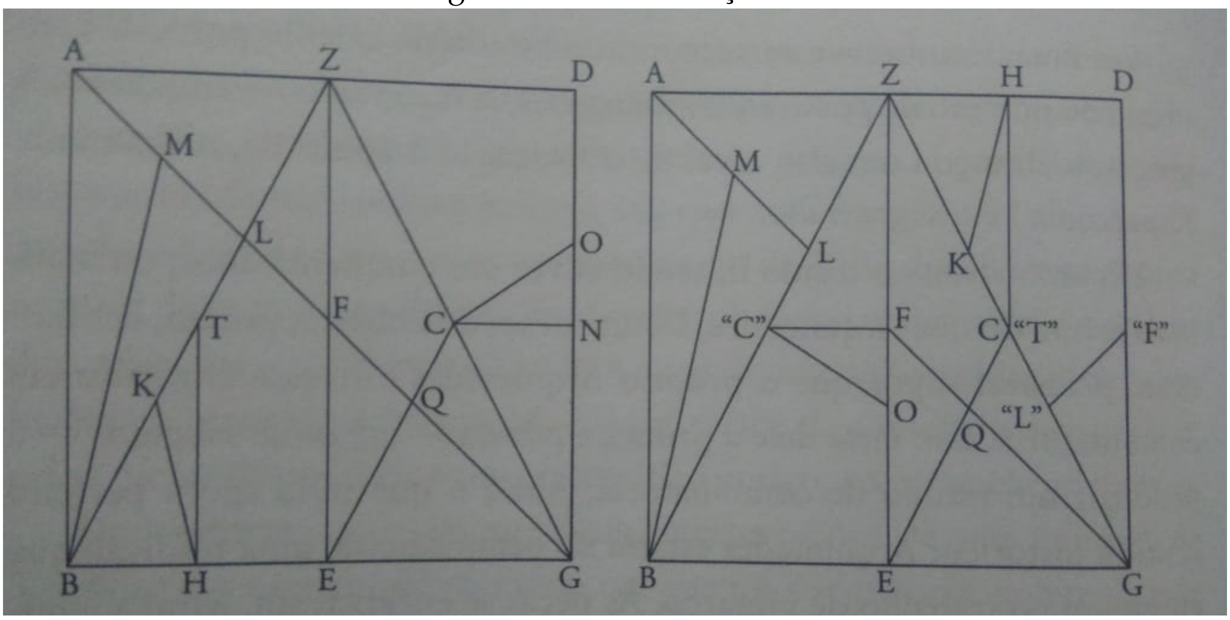
A substituição de uma peça por outra ou de duas peças por uma, por exemplo, é possível graças a análise feita anteriormente sobre a congruência das figuras. Como ilustração, observemos que os $\triangle BKH$ e $\triangle KTH$ juntos formam o $\triangle BTH$ que é congruente ao $\triangle CNG$.

Os matemáticos começaram as tentativas de solucionar o desafio do Stomachion por essa abordagem e, paralelamente, Bill Cutler partiu para a solução computacional do problema através de um software. Cutler e o casal de combinatorialistas Fan Chung e Ron Graham foram bem sucedidos e chegaram ao mesmo resultado quase simultaneamente em meados de 2003. (NETZ; NOEL, 2009, p.266–267)

### 4.6.1 A solução - De quantas maneiras as 14 peças do Stomachion podem ser organizadas para formar um quadrado?

Comecemos analisando se simples substituições e rotações podem ser suficientes para solução do problema como fazem Netz e Noel (2009, p. 258).

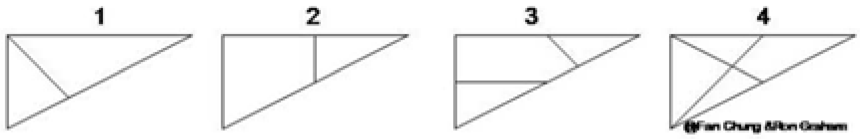
Figura 4.13: Substituição $S$




Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p. 258)

Tomando o triângulo *BZE*, podemos substituí-lo pelo triângulo *ZDG*, conforme figura acima (Substituição *S*). Como alternativa, poderíamos tê-lo substituído pelos triângulos *AZB* ou *ZEG*. Chung e Graham apelidaram esses triângulos de **triângulos básicos** do *Stomach*, aqui enumerados por 1,2,3 e 4.

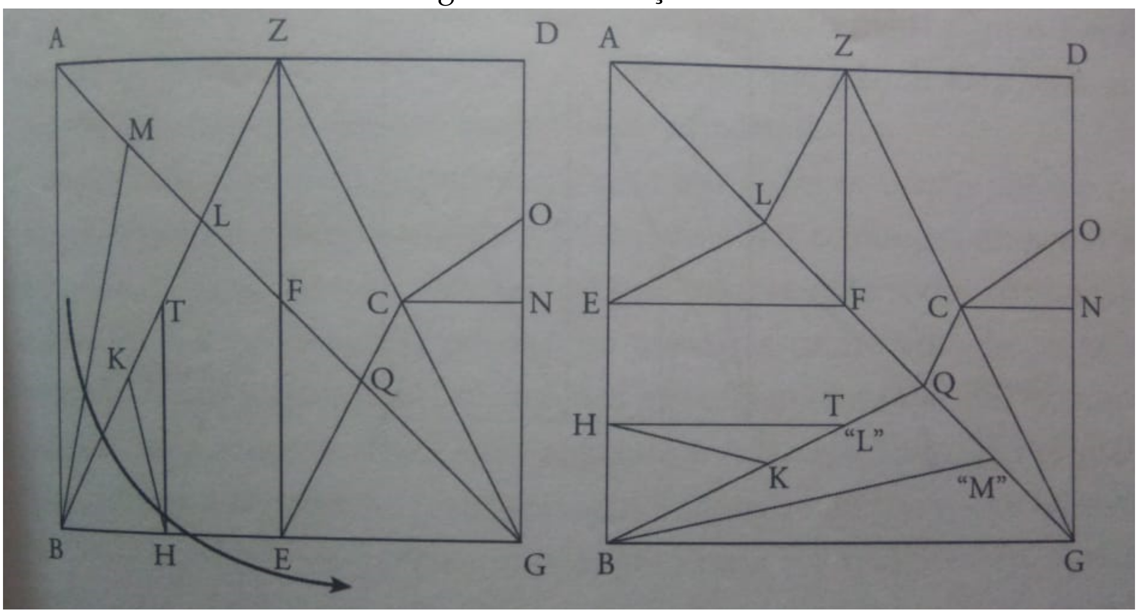
Figura 4.14: Triângulos Básicos




Fonte: (CHUNG; GRAHAM, 2007)

Uma outra opção seria tomar o triângulo *ABG* e rotacioná-lo em relação a um eixo imaginário passando por *F* e *B*. Chamemos esta rotação de *R* (Figura 4.15). (NETZ; NOEL, 2009, p. 259)

Figura 4.15: Rotação *R*



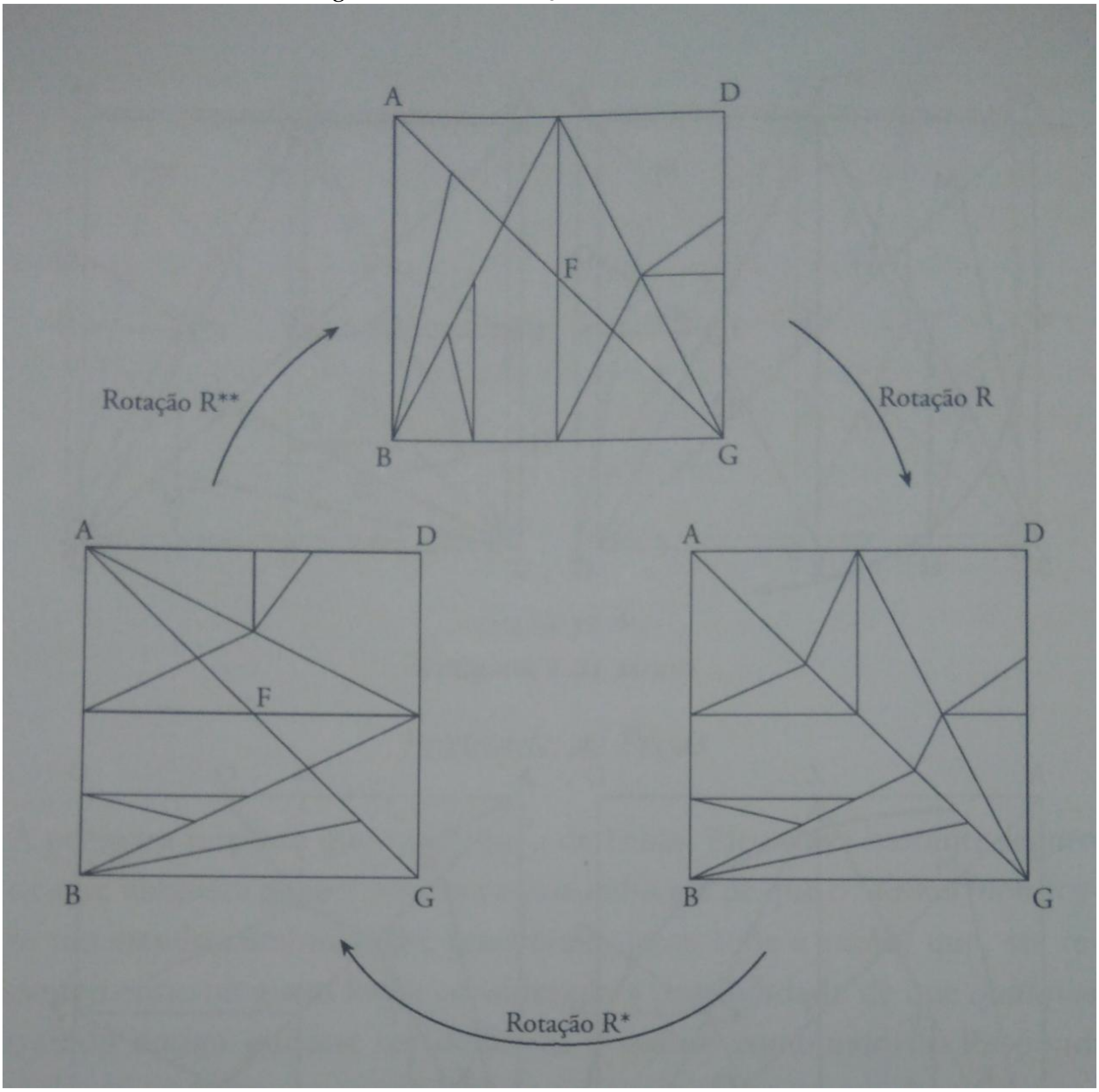

Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p.259)

Seria simples se pudéssemos trabalhar dessa forma e apenas contar as substituições e rotações possíveis e multiplicá-las para chegarmos ao resultado desejado. Como bem ilustrou Noel em seu livro, muitas vezes rotações e substituições interagem e impedem que uma ou outra aconteça:

> Uma vez que tenha sido aplicada a substituição $S$, não se pode mais aplicar a rotação $R$. A substituição $S$ destrói a linha $A$ no triângulo $ABG$, deixando de existir um triângulo para ser rotacionado. E vice-versa: uma vez que seja aplicada a rotação $R$, não pode mais ser aplicada a substituição $S$, porque a rotação $R$ acaba destruindo o triângulo $ZBE$: não existe mais ali um triângulo congruente com o de $ZDG$. (NETZ; NOEL, 2009, p.261)

Ademais, algumas substituições e rotações podem anular umas às outras. Observemos a figura abaixo:

Figura 4.16: As rotações $R$, $R^*$ e $R^{**}$

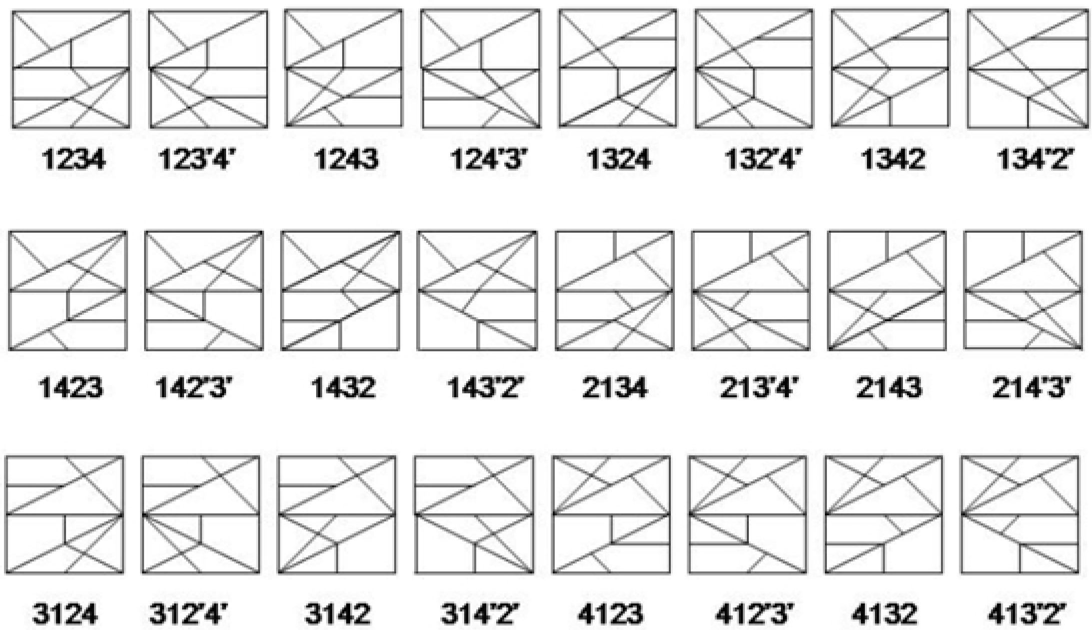



Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p. 260)

A rotação R é obtida rotacionando o triângulo ABG em torno de um eixo imaginário passando por FB. Tomando o triângulo ADG e girando-o em relação ao eixo imaginário FD temos a rotação R*. Aplicando ambas as rotações obtemos, na verdade, o quadrado ADBG rotacionado 90º à direita. Seu arranjo interno não foi alterado. As rotações se anularam. Se acrescentarmos uma nova rotação R**, em que rotacionamos o quadrado em torno do eixo imaginário DFB, retornamos ao quadrado em sua posição inicial. Temos, então, que as rotações R, R* e R** combinadas, se anulam. Nesse sentido, Noel e Netz (2009, p.262) nos chamam a atenção para a Teoria de Grupos que é a demonstrada pelo cubo de Rubik e, em resumo, trata "das várias maneiras pelas quais as permutações se somam ou se anulam umas às outras". Nesse sentido, acreditam que o *Stomachion* também possa demonstrá-la.

A partir disso, Chung e Graham definiram 24 **quadrados base** para a contagem. Essa definição advém de rotações simples dos triângulos básicos. Na figura abaixo eles estão inicialmente ordenados de cima a baixo na sequência numérica e $x'$ denota que o triângulo $x$ foi virado de alguma forma em relação ao quadrado 1234. Esses movimentos foram chamados **movimentos globais**.

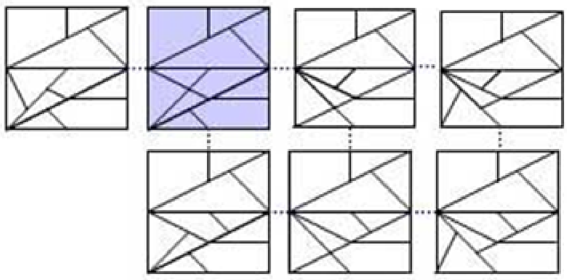
Figura 4.17: Quadrados base




Fonte: (CHUNG; GRAHAM, 2007)

Tomando cada uma dessas configurações, geram-se novas através de movimentos locais, ou seja, alterando a posição de peças vizinhas. A figura abaixo representa todos os movimentos locais relacionados ao quadrado base 2143:

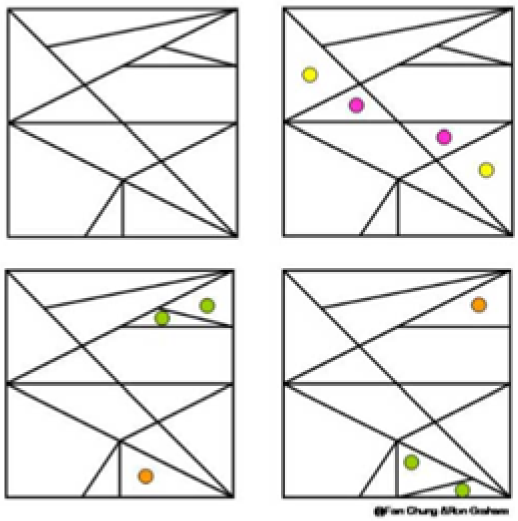
Figura 4.18: Movimentos locais - quadrado base 2143



Fonte: (CHUNG; GRAHAM, 2007)

Os quadrados base geram números diferentes de configurações após a realização dos possíveis movimentos locais que podem ser verificadas no apêndice B. Consequentemente, somam-se 268 arranjos distintos na formação do *Stomach*. Todavia, precisamos ainda considerar o fato de existirem dois pares de peças congruentes, totalizando quatro modificações entre elas e um par de peças que é congruente a uma única peça. Resultando em mais dois arranjos distintos.

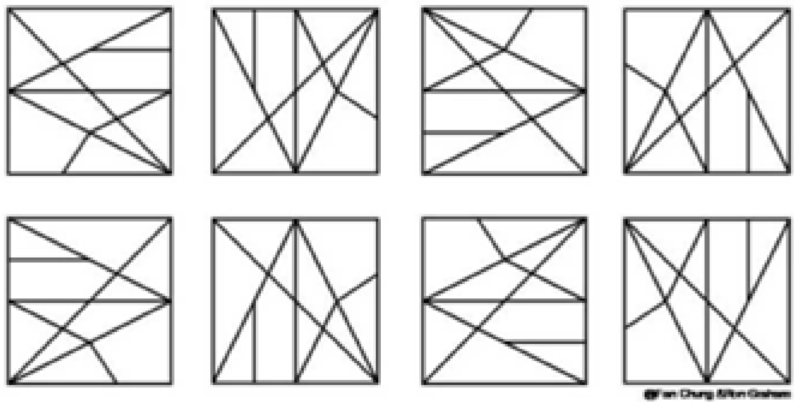
Figura 4.19: Configurações das peças congruentes



Fonte: (CHUNG; GRAHAM, 2007)

Finalmente, vejamos que o quadrado possui oito simetrias:

Figura 4.20: Simetrias do quadrado



Fonte: (CHUNG; GRAHAM, 2007)

Concluímos, então, que o número buscado por Arquimedes é 268 x 4 x 2 x 8 = 17152. O *Stomachion* pode ser montado de 17152 maneiras distintas a partir das 14 peças que o compõem. O primeiro registro de combinatória da história acaba de ser solucionado utilizando-se ferramentas que Arquimedes poderia dispor na época.

# 5 O *Stomachion* no Ensino Básico

## 5.1 A História da Matemática como ferramenta pedagógica

Segundo Castanha (2004, p.1),

> As fontes ou documentos são requisitos fundamentais para a produção e sistematização do conhecimento histórico. O trabalho de levantamento, catalogação, identificação e interpretação das fontes são elementos constituintes da pesquisa histórica e representam o alicerce para a preservação da memória histórica. Dessa forma, a compreensão do conhecimento acumulado historicamente e da própria História são condições indispensáveis tanto para a produção de novos conhecimentos, quanto para evitar a sua mera reprodução, ou até mesmo sua manipulação em favor de determinados segmentos da sociedade. (CASTANHA, 2004, p. 1)

Ainda neste tema, Ubiratan A. D'Ambrosio (2000, p.5) define quatro finalidades para a História da Matemática:

> - para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução;
> - para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
> - para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio;
> - para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as consequências sócio-culturais dessa incorporação. (D'AMBROSIO, 2000, p. 5)

Apoiando-nos nessas concepções, buscamos neste trabalho reunir bibliografias que nos permitam contar a história da Análise Combinatória adicionando sua mais recente descoberta: o *Stomachion*. Ademais, reforçamos a ideia de que a Matemática se desenvolve ao longo do tempo, em muitas culturas e é feita através de descobertas, até mesmo do dia a dia dos estudiosos tentando responder às questões e problemas que lhes surgiam. Dessa maneira, podemos levar os alunos a se aproximarem da disciplina e ao conceito de que a Matemática não é uma ciência pronta e apenas baseada em fórmulas e conceitos muitas vezes não entendidos por eles. A Matemática é ciência em transformação.

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como uma ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. Além disso, conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos é de grande utilidade para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos. (**??**, p.26)

## 5.2 Análise Documental do Currículo Referência de Minas Gerais, do CBC e da BNCC

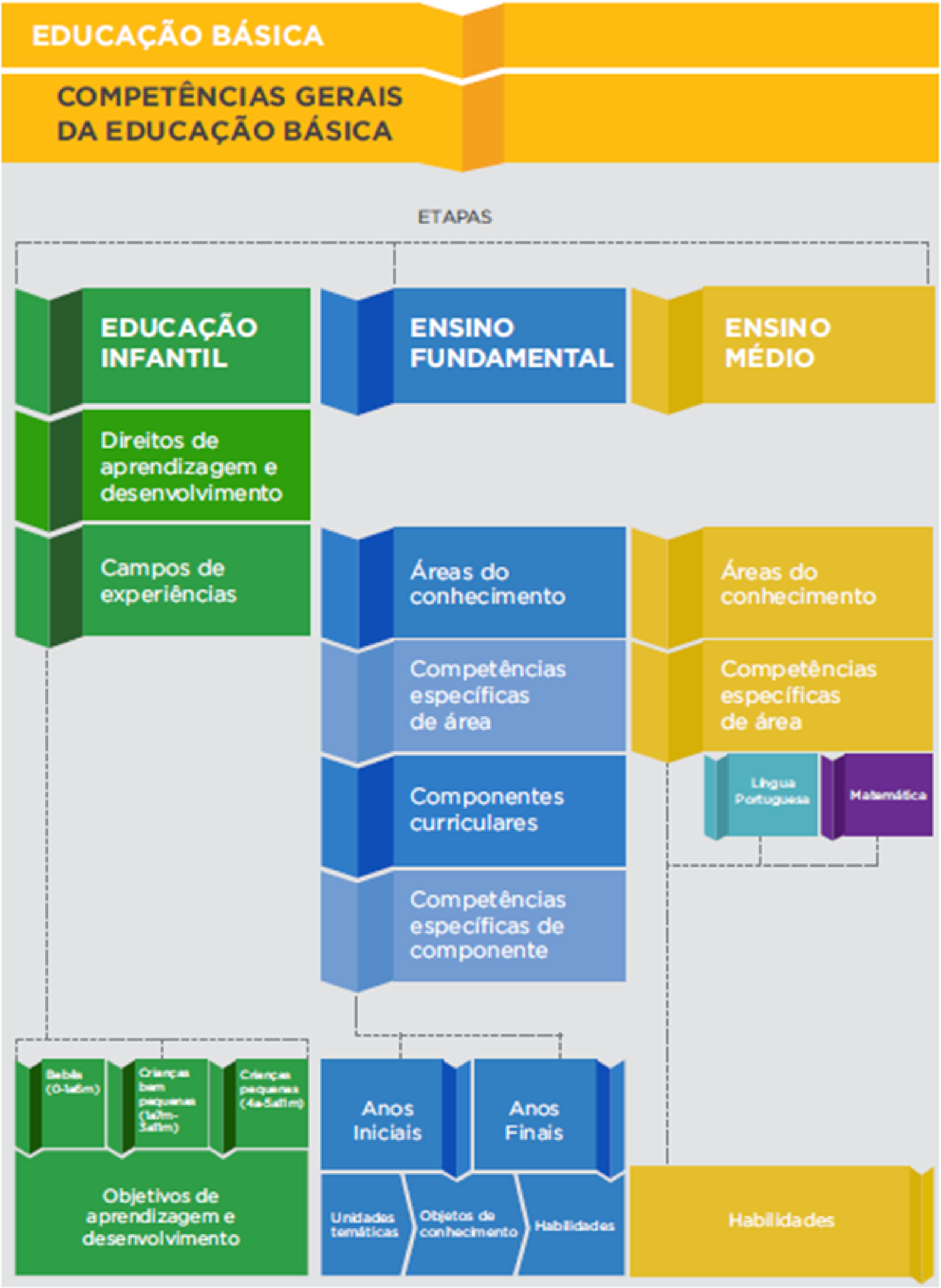
### 5.2.1 Os temas Geometria, Análise Combinatória e Raciocínio Lógico na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Analisamos a documentação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de maneira a justificar a pertinência da escolha dos temas onde o Stomachion pode ser utilizado.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). (BRASIL, 2018, p. 7)

A BNCC está estruturada de acordo com as três etapas da Educação Básica: Ensino Infantil (0 a 5 anos e 11 meses), Ensino Fundamental (Anos Iniciais do 1º ao 5º ano e Anos Finais do 6º ao 9º ano) e Ensino Médio (1ª a 3ª série). Vejamos a figura a seguir que ilustra as divisões:

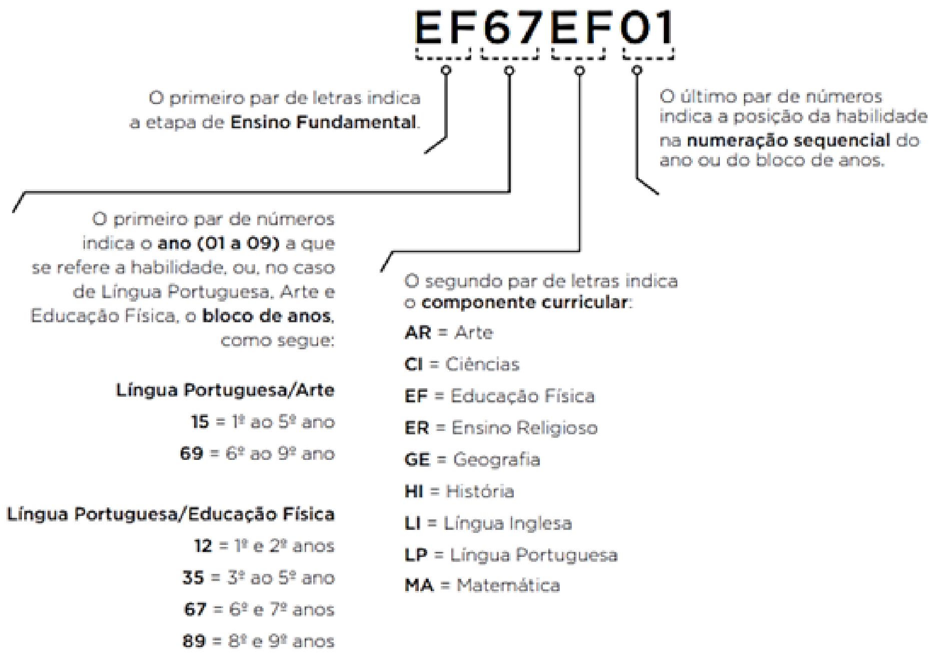
Figura 5.1: Estrutura BNCC




Fonte: (BRASIL, 2018, p. 24)

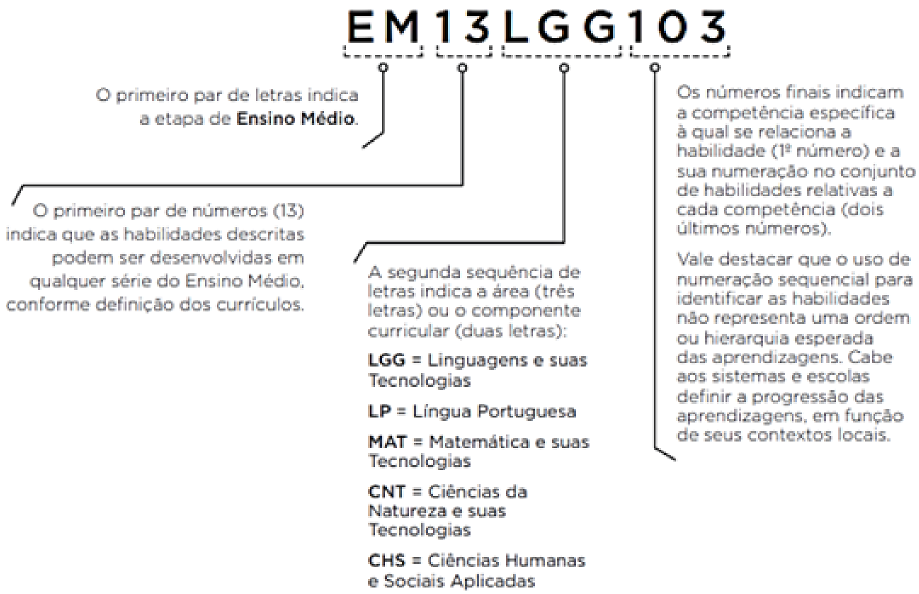
Na BNCC cada objetivo de aprendizagem e habilidade está estruturado de acordo com um código que é interpretado das seguintes maneiras para o Ensino Fundamental e para o Médio:

Figura 5.2: Código alfanumérico BNCC para o Ensino Fundamental




Fonte: (BRASIL, 2018, p. 30)

Figura 5.3: Código alfanumérico BNCC para o Ensino Médio




Fonte: (BRASIL, 2018, p. 34)

O componente curricular de Matemática para o Ensino Fundamental da BNCC estabelece que os alunos devem ter desenvolvido as seguintes competências específicas:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2018, p. 267)

Ainda nesse tema, a BNCC propõe a divisão dos conteúdos em cinco unidades temáticas cada uma contemplando habilidades específicas para cada ano do Ensino Fundamental: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. (BRASIL, 2018, p. 268–275)

Uma das habilidades específicas para Geometria no 9º ano é a "**(EF09MA12)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes." (BRASIL, 2018, p. 317)

Passando ao que é proposto para o Ensino Médio na BNCC, encontramos uma divisão diferente da contida no Ensino Fundamental, agora as habilidades específicas estão distribuídas dentro do que propõem cinco competências específicas. Destacamos as cincos e alguns exemplos de habilidades relacionadas ao *Stomachion*:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> **(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)
> 2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
> **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
> **(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
> **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.
> **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. (BRASIL, 2018, p. 531–541)

Observamos que o conteúdo de Geometria e de Princípios de Contagem são trabalhados desde os anos inicias do Ensino Fundamental até o fim do Ensino Médio.

### 5.2.2 Os temas Geometria, Análise Combinatória e Raciocínio Lógico no Estado de Minas Gerais

Como justificativa para os conteúdos escolhidos, analisamos o Conteúdo Básico Comum (CBC) e o Currículo Referência de Minas Gerais, que regem o currículo de ensino do estado. O Currículo Referência já substitui o CBC no Ensino Infantil e no Ensino Fundamental. De acordo com o site Agência Minas (2021), está previsto para ser implementado no Ensino Médio em 2022 . Assim, optamos por destacar o que objetiva o Currículo e suas diretrizes para o Ensino Fundamental e, em seguida, fazemos o mesmo para o CBC e no que diz respeito ao Ensino Médio.

#### Currículo Referência de Minas Gerais

O documento foi elaborado a partir do reconhecimento de que o estado mineiro é diverso em seus povos, territórios, costumes e tradições e que estas características devem ser valorizadas. Assim, seus princípios e fundamentos educacionais são baseados na Constituição Federal (CF/1988), na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9394/96), no Plano Nacional de Educação (PNE/2014), na Base Nacional Comum Curricular (BNCC/2017). (GERAIS, 2018, p. 13)

Destacamos os objetivos do Currículo:

> A construção, portanto, deste Currículo Referência de Minas Gerais de forma dialogada entre o Estado e os Municípios é uma oportunidade singular para o fortalecimento do regime de colaboração – previsto desde a Constituição Federal (1988) – e para avançarmos na consolidação de um Sistema Integrado de Educação Pública - SIEP, como vem sendo debatido em nosso estado. A defesa de um sistema de educação único fundase na integralidade do atendimento e no reconhecimento conjunto da oferta de uma educação pública inclusiva, com qualidade e equidade. Em outras palavras, trata-se de não distinguir a qual rede um estudante se vincula ao longo da trajetória escolar. O que se deve garantir é a oferta de um ensino de qualidade e de oportunidades de formação e transformação social diversificadas, que zelem pelo direito à aprendizagem – como destacaremos ao longo de todo o documento. Compreendemos, assim, que é necessário vencer as amarras institucionais e culturais existentes e avançar no fortalecimento da democracia, na colaboração entre as redes e nas oportunidades aos nossos estudantes. Ter um currículo referência para o Estado materializa esta proposta e potencializa as relações entre as secretarias, escolas, professores e estudantes. (GERAIS, 2018, p. 202)

A BNCC é a base para o Currículo Referência, assim, os objetivos de aprendizagem e habilidades também estão estruturados por meio dos mesmos códigos modificados no que concerne às diversidades regionaise e contextualizações. (GERAIS, 2018, p. 213)

Observemos que as habilidades modificadas foram classificadas em quatro tipos:

- **Objetivo/Habilidade Alterada:** Habilidade alterada da BNCC dentro das possibilidades estabelecidas pelo MEC. Seguem o código alfanumérico definido na BNCC, seguido pela letra **X**. Exemplo: (EF07HI09) Analisar os diferentes impactos da conquista europeia da América para as populações ameríndias e identificar as formas de resistência (Original BNCC); (EF07HI09**X**) Analisar os diferentes impactos da conquista europeia da América para as populações ameríndias e identificar as formas de resistência, **observando as diferentes estratégias de resistência dos distintos grupos indígenas que povoavam Minas Gerais**. (Modificada MG).

- **Objetivo/Habilidade Criada:** Habilidade que não existia na BNCC, mas prevista no novo currículo. Seguem o código alfanumérico estabelecido pelo MEC, seguidas pelas letras **MG**. Exemplo: (EF08CI17**MG**) Descrever fenômenos e processos em termos de transformações e transferência de energia. (Habilidade criada MG).

- **Objetivo/Habilidade Desmembrada:** Habilidade que possui grande número de verbos, tornando-a complexa para ser avaliada e desenvolvida. Segue o código alfanumérico estabelecido pela BNCC, complementada pelas letras A B, C, etc. dependendo do grau de desmembramento. Exemplo: (EF15**AR23**) **Reconhecer e experimentar**, em projetos temáticos, as relações processuais entre diversas linguagens artísticas (Original BNCC). (EF15**AR23A**) **Reconhecer**, em projetos temáticos, as relações processuais entre diversas linguagens artísticas. (EF15**AR23B**) **Experimentar**, em projetos temáticos, as relações processuais entre diversas linguagens artísticas (Desmembrada MG).

- **Objetivo/Habilidade com Progressão:** Habilidade que, na BNCC, era a mesma para diversos anos de escolaridade. No Currículo, a opção foi alterar estas habilidades ano a ano, de formar a graduar a complexidade de acordo com o desenvolvimento dos estudantes. Exemplo: **(EF12EF01)** Experimentar, fruir e recriar diferentes brincadeiras e jogos da cultura popular presentes no contexto comunitário e regional, reconhecendo e respeitando as diferenças individuais de desempenho dos colegas **(Original BNCC)**. (EF12EF01P1) Experimentar e fruir diferentes brincadeiras e jogos da cultura popular presentes no contexto comunitário e regional, valorizando os saberes e vivências produzidos, reproduzidos e perpetuados nos contextos familiares e comunitários. (Progressão **1º ano**) **(EF12EF01P2)** Experimentar, fruir **e recriar** diferentes brincadeiras e jogos da cultura popular presentes no contexto do estado de Minas Gerais, valorizando os saberes e vivências produzidos, reproduzidos e recriados nos contextos familiares e sociais (Progressão **2º ano**). (GERAIS, 2018, p. 202-203)

Ainda sobre o componente curricular de Matemática e a divisão dos conteúdos, temos que o Currículo Referência também segue a BNCC. Dentre as habilidades que cada conteúdo especifica, separamos aqui algumas que podem ser trabalhadas em atividades do *Stomachion*:

- **6º ano: Geometria - (EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos;
- **7º ano: Números - (EF07MA12A)** Resolver problemas que envolvam as operações com números racionais;
- **8º ano: Grandezas e medidas - (EF08MA38MG)** Calcular área de figuras planas: triângulos, quadriláteros e círculos ou figuras compostas por algumas dessas;
- **9º ano: Álgebra - (EF09MA08A)** Resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas. (GERAIS, 2018, p. 699-726)

**Conteúdo Básico Comum de Minas Gerais**

Vejamos o que objetiva o CBC:

> Estabelecer os conhecimentos, as habilidades e competências a serem adquiridos pelos alunos na educação básica, bem como as metas a serem alcançadas pelo professor a cada ano, é uma condição indispensável para o sucesso de todo sistema escolar que pretenda oferecer serviços educacionais de qualidade à população. A definição dos conteúdos básicos comuns (CBC) para os anos finais do ensino fundamental e para o ensino médio constitui um passo importante no sentido de tornar a rede estadual de ensino de Minas num sistema de alto desempenho. (GERAIS, 2005, p. 9)

Quanto ao CBC para o Ensino Médio,

> Este documento está fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) e nas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ : Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias) e tem como objetivo tornar operacionais alguns princípios esboçados naquele documento, especificando e detalhando mais as unidades temáticas e sugerindo estratégias de ensino. [...] Os PCN+ estabelecem que: "No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. (GERAIS, 2005, p.31)

Os três anos do Ensino Médio estão subdivididos de forma que "o primeiro ano é o ano da formação básica, quando são apresentados conceitos e métodos que constam de todos os temas estruturadores do CBC de Matemática", "o segundo ano é o ano de aprofundamento, quando são apresentadas situações com maior grau de complexidade, introduzidos novos tópicos e novos con-ceitos" e "terceiro ano é o ano da complementação de formação, quando a escola poderá eleger tópi-cos complementares, dentre os quais, os sugeridos no CBC". (GERAIS, 2005, p. 44–60)

- Primeiro Ano do Ensino Médio:
  - **Eixo Temático I: Números, Contagem e Análise de Dados**:
    - **Tema 1: Números**;
    - **Tema 2: Contagem**;
    - Tema 3: Probabilidade;
    - Tema 4: Estatística.
  - Eixo Temático II: Funções Elementares e Modelagem:
    - Tema 5: Funções;
    - Tema 6: Matemática Financeira.
  - **Eixo Temático III: Geometria e Medidas**:
    - **Tema 7: Semelhança e Trigonometria**;
    - Tema 8: Geometria Analítica. (GERAIS, 2005, p. 44–48)

- Segundo Ano do Ensino Médio:
  - **Eixo Temático IV: Números, Contagem e Análise de Dados**:
    - **Tema 9: Contagem**;
    - Tema10: Probabilidade.
  - Eixo Temático V: Funções Elementares e Modelagem:
    - Tema 11: Funções.
  - **Eixo Temático VI: Geometria e Medidas**:
    - **Tema 12: Semelhança e Trigonometria**;
    - Tema 13: Geometria Analítica;
    - Tema 14: Geometria Métrica e de Posição. (GERAIS, 2005, p.50–54)
- Terceiro Ano do Ensino Médio:
  - **Eixo Temático VII: Números, Contagem e Análise de Dados**:
    - **Tema 15: Números**;
    - **Tema 16: Contagem**;
    - Tema 17: Probabilidade;
    - Tema 18: Estatística.
  - Eixo Temático VIII: Funções Elementares e Modelagem:
    - Tema 19: Funções;
    - Tema 20: Matemática Financeira.
  - **Eixo Temático IX: Geometria e Medidas**:
    - **Tema 21: Semelhança e Trigonometria**;
    - **Tema 22: Construções Geométricas**;
    - Tema 23: Geometria Analítica;
    - Tema 24: Geometria de Posição no Espaço;
    - Tema 25: Geometria Métrica. (GERAIS, 2005, p.56–60)

## 5.3 Atividades do *Stomachion* para o Ensino Básico

Nesta seção reunimos atividades baseadas no *Stomachion* a serem desenvolvidas no Ensino Básico. Relacionaremos nossa interpretação do tratado ao ensino da geometria, ao uso do software *Peces* e a alguns desafios.

### 5.3.1 O Teorema de Pick

O matemático vienense Georg Alexander Pick nasceu em 1859 e ingressou na Universidade de sua cidade natal aos dezesseis anos. No ano seguinte publicou o primeiro de vários artigos que viria a escrever nas áreas de Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculos de Integrais e Geometria.

Figura 5.4: Georg Alexander Pick

Fonte: https://pt.slideshare.net/vinamorais/teorema-de-pick.

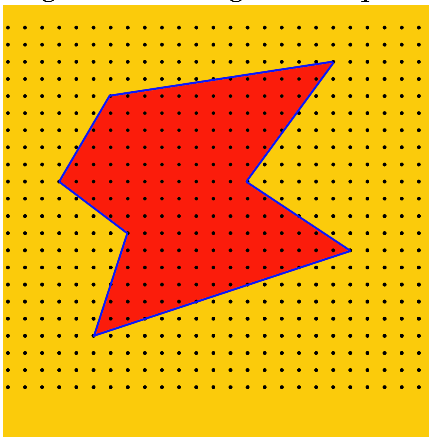
Entretanto, seu trabalho mais conhecido faz parte do artigo *Geometrisches zur Zahlenlehre*, publicado em 1899 na cidade de Praga, capital da República Tcheca. Trata-se do simples e elegante Teorema de Pick, que nos apresenta uma nova maneira para o cálculo de áreas, substituindo o processo habitual que envolve medições de grandezas contínuas por uma contagem de grandezas discretas.

Antes de apresentarmos o teorema, duas definições são necessárias:

**Definição 1.** *Uma rede no plano é um conjunto infinito de pontos uniformemente distribuídos ao longo de retas perpendiculares, de tal maneira que a distância entre cada um desses pontos aos pontos mais próximos na horizontal ou vertical seja igual a 1.*

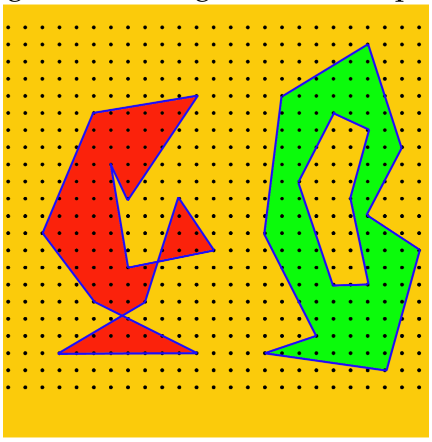
**Definição 2.** *Um polígono é chamado simples quando "sua fronteira é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice." (HERMES, 2015, p. 204)*

Figura 5.5: Polígono Simples



Fonte: https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.htmlSECTION00040000000000000000.

Figura 5.6: Polígono Não Simples



Fonte: https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.htmlSECTION00040000000000000000.

**Teorema 1.** *(Teorema de Pick). Sejam $P$ um polígono simples, $f$ a quantidade de pontos da rede situados em sua fronteira e $I$ o número de pontos da rede em seu interior.*

*Então, a área $A(P)$ do polígono é dada por:*

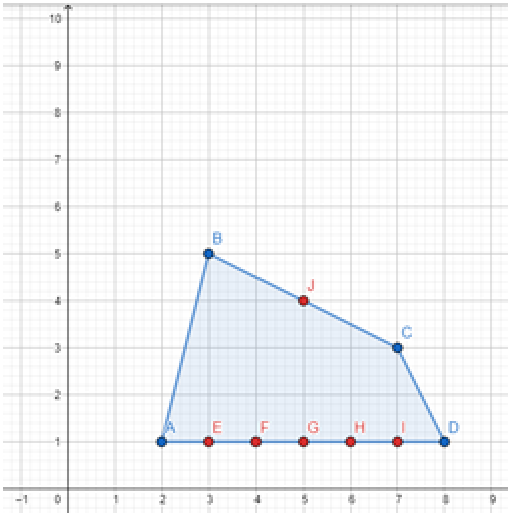
$$A_P = \frac{f}{2} + I - 1. \tag{5.1}$$

*Demonstração.* Ver Hermes (2015, p. 207-208). □

Os exemplos a seguir são uma aplicação do Teorema de Pick.

**Exemplo 1.** *Seja o polígono ABCD (Figura 5.7), determinemos sua área a partir do Teorema 1.*

Figura 5.7: Exemplo 1 - Polígono $ABCD$




Fonte: Autoria própria.

*Observemos que os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I e J são os pontos de fronteira do polígono e os pontos interiores são (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4), (5,2), (5,3), (6,2), (6,3) e (7,2). Logo,* $f = 10$ *e* $I = 11$. *Segue que,*

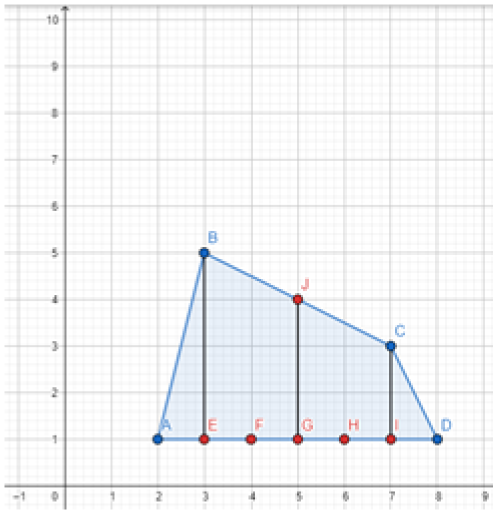
$$A_{ABCD}=\frac{10}{2} + 11 - 1 = 15.$$

Verifiquemos o resultado aplicando um método tradicional que consiste em dividir o polígono em polígonos menores, calcular suas áreas e somá-las para obter a área do polígono original. Agora temos os triângulos retângulos $ABE$ e $ICD$ e os trapézios retângulos $EBJG$ e $GJCI$.

$A_{ABE} = \frac{1.4}{2} = 2$, $A_{ICD} = \frac{1.2}{2} = 1$, $A_{EBJG} = \frac{(4+3)2}{2} = 7$, $A_{GJCI} = \frac{(3+2)2}{2} = 5$.

Temos que, $A_{ABCDEF} = 2 + 1 + 7 + 5 = 15.\blacksquare$

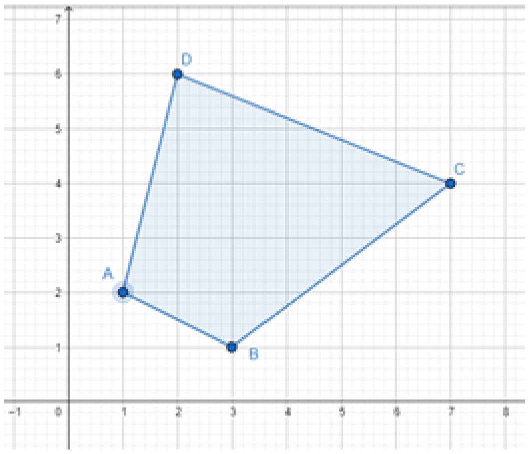
Figura 5.8: Divisão do polígono *ABCD*




Fonte: Autoria própria.

**Exemplo 2.** *Seja o polígono ABCD (Figura 5.9), determinemos sua área a partir do Teorema 1.*

Figura 5.9: Exemplo 2 - Polígono *ABCD*




Fonte: Autoria própria.

*Observemos que os pontos A, B, C e D são os pontos de fronteira do polígono e os pontos interiores são (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4) e (6,4). Logo,* $f = 4$ *e* $I = 15$*. Segue que,*

$$A_{ABCD}=\frac{4}{2}+15-1=16.$$

Ainda sobre o Teorema de Pick,

> "É importante observar que o Teorema de Pick pode ser aplicado em polígonos não convexos. Além disso, se a unidade for diferente de 1, a área será dada por $u^2A$ onde $u^2$ é igual a área de cada quadrado da rede. Notamos, ainda, que a área do polígono sempre será um múltiplo de 0,5, pois $f$ é natural." (SILVA, 2017, p. 51).

### 5.3.2 Cálculo de áreas por determinantes

Sugerimos como atividade do *Stomachion* aplicada ao Ensino Básico, o cálculo das áreas de cada peça por determinantes, para isso, apresentamos algumas definições, teoremas e demonstrações que nos levarão às formulas necessárias.

#### Área do triângulo com um dos vértices na origem

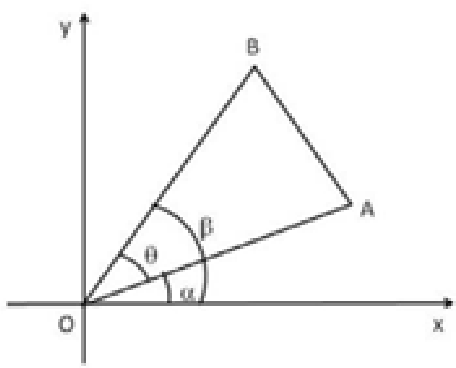
**Definição 3.** *Definimos a orientação anti-horária dos vértices de um polígono como o caminho pelo qual percorremos os lados e passamos pelos vértices de maneira que o interior do polígono está sempre à esquerda.*

**Teorema 2.** *Seja um triângulo ABO de vértices* $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ *e* $O = (0, 0)$, *sua área S é dada por:*

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix}.$$

*Demonstração.* Considere o triângulo $ABO$ do Teorema em questão e observe o esquema abaixo.

Figura 5.10: Área de triângulo com vértice na origem




Fonte: (**??**, p. 46)

Temos que:

$$x_A = OA.\cos\alpha;$$
$$y_A = OA.\sin\alpha;$$
$$x_B = OB.\cos\beta;$$
$$y_B = OB.\sin\beta.$$

Pelo Teorema das Áreas: "A área do triângulo é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo formado por estes lados". Logo, escrevemos:

$$S = \tfrac{1}{2}.OA.OB.\sin\theta \Leftrightarrow$$
$$S = \tfrac{1}{2}.OA.OB.\sin(\beta - \alpha) \Leftrightarrow$$
$$S = \tfrac{1}{2}.OA.OB.(\sin\beta.\cos\alpha - \sin\alpha.\cos\beta) \Leftrightarrow$$
$$S = \tfrac{1}{2}.(OA.\cos\alpha.OB.\sin\beta - OA.\sin\alpha.OB.\cos\beta) \Leftrightarrow$$
$$S = \tfrac{1}{2}(x_A.y_B - y_A.x_B) \Leftrightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix}.$$

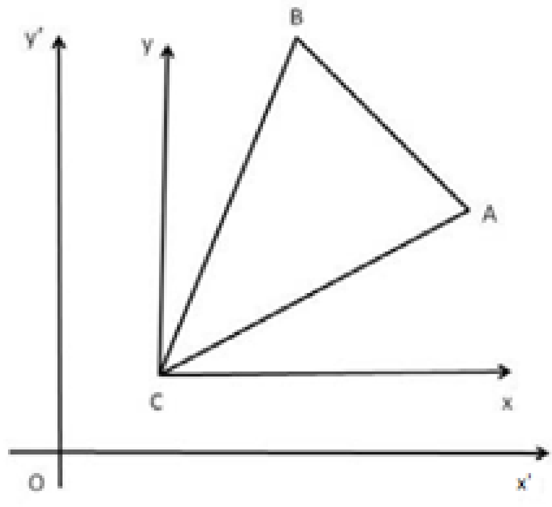
□

**Área de um triângulo qualquer**

**Teorema 3.** *Seja um triângulo ABC de vértices $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, sua área S, desde que seus vértices obedeçam à orientação anti-horária, é dada por:*

$$S = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix}\right].$$

Figura 5.11: Área de um triângulo qualquer




Fonte: (**??**, p. 47)

*Demonstração.* Consideremos que o vértice $C$ passa pela origem de um novo sistema cartesiano $xCy$ com eixos paralelos aos originais, de acordo com a figura acima. Assim, $A$ e $B$ passam a ter as seguintes coordenadas: $A = (x_A - x_C, y_A - y_C)$ e $B = (x_B - x_C, y_B - y_C)$. Aplicando o **Teorema 2**, segue:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A - x_C & x_B - x_C \\ y_A - y_C & y_B - y_C \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$S = \tfrac{1}{2}(x_A.y_B - x_A.y_C - x_C.y_B + x_C.y_C - x_B.y_A + x_B.y_C + x_C.y_A - x_C.y_C) \Leftrightarrow$$

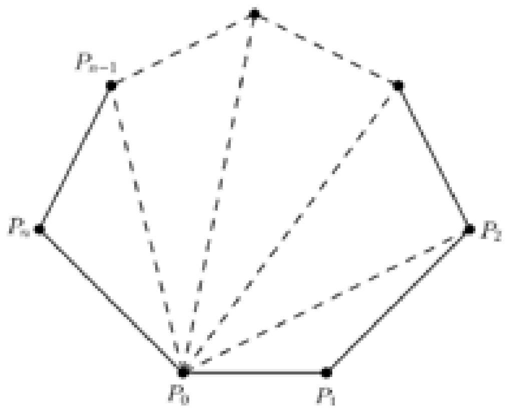
$$S = \tfrac{1}{2}.(x_A.y_B - x_B.y_A + x_B.y_C - x_C.y_B + x_C.y_A - x_A.y_C + x_C.y_C - x_C.y_C) \Leftrightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix}\right].$$

□

**Área de um polígono convexo**

Figura 5.12: Polígono convexo com n+1 vértices




Fonte: (SILVA, 2017, p. 48)

**Proposição 1.** *A área A de um polígono convexo de vértices $P_0$, $P_1$, $P_2$, ..., $P_{n-1}$, $P_n$ percorridos no sentido anti-horário é dada por:*

$$A = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_0 \\ y_n & y_0 \end{vmatrix}\right].$$

*Ou ainda,*

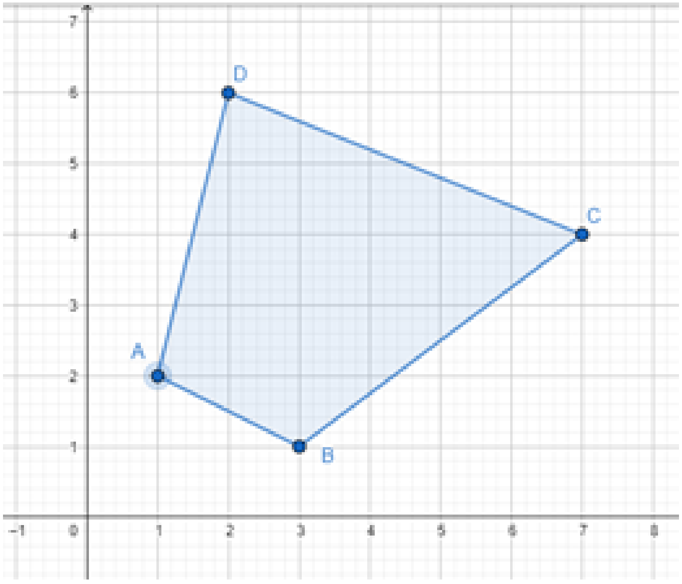
$$A = \frac{1}{2}.\sum_{i=0}^{\infty}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

*Demonstração.* Ver SILVA (2017, p.49).

□

**Exemplo 3.** *Vamos determinar a área do polígono ABCD utilizando a proposição.*

Figura 5.13: Polígono *ABCD*




Fonte: Autoria própria.

*Solução.*

$$A_{ABCD} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B & x_C \\ y_B & y_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & x_D \\ y_C & y_D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_D & x_A \\ y_D & y_A \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}\right]$$

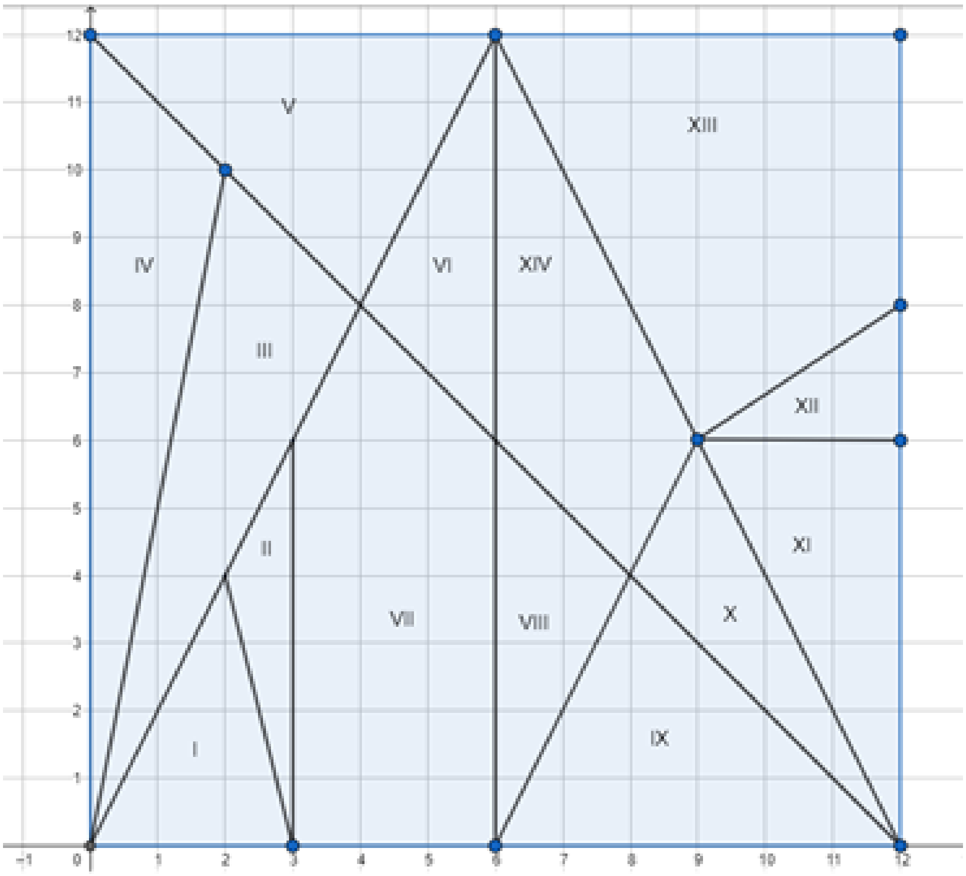
$$= \tfrac{1}{2}.[(-5) + 5 + 34 + (-2)] = 16.$$

Concluímos que a área do polígono *ABCD* é igual a 16, a mesma encontrada aplicando o Teorema de Pick.

### 5.3.3 Áreas das peças do *Stomachion*

Sugerimos como atividade do *Stomachion* aplicada ao Ensino Básico, o cálculo das áreas de cada peça a partir do Teorema de Pick e dos determinantes.

Figura 5.14: *Stomachion* em malha quadriculada




Fonte: Autoria própria.

Pelo Teorema de Pick:

$$A_I = \tfrac{6}{2} + 4 - 1 = 6$$
$$A_{II} = \tfrac{8}{2} + 0 - 1 = 3$$
$$A_{III} = \tfrac{8}{2} + 9 - 1 = 12$$
$$A_{IV} = \tfrac{16}{2} + 5 - 1 = 12$$
$$A_V = \tfrac{12}{2} + 7 - 1 = 12$$
$$A_{VI} = \tfrac{10}{2} + 2 - 1 = 6$$
$$A_{VII} = \tfrac{18}{2} + 13 - 1 = 21$$
$$A_{VIII} = \tfrac{10}{2} + 2 - 1 = 6$$
$$A_{IX} = \tfrac{12}{2} + 7 - 1 = 12$$
$$A_X = \tfrac{8}{2} + 3 - 1 = 6$$
$$A_{XI} = \tfrac{12}{2} + 4 - 1 = 9$$
$$A_{XII} = \tfrac{6}{2} + 1 - 1 = 3$$
$$A_{XIII} = \tfrac{14}{2} + 18 - 1 = 24$$
$$A_{XIV} = \tfrac{12}{2} + 7 - 1 = 12$$

Por determinantes:

$$A_I = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right] = 6$$

$$A_{II} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right] = 3$$

$$A_{III} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 0 \end{vmatrix}\right] = 12$$

$$A_{IV} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 0 \end{vmatrix}\right] = 12$$

$$A_V = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 0 \end{vmatrix}\right] = 12$$

$$A_{VI} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}\right] = 6$$

$$A_{VII} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}\right] = 21$$

$$A_{VIII} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}\right] = 6$$

$$A_{IX} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right] = 12$$

$$A_X = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right] = 6$$

$$A_{XI} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}\right] = 9$$

$$A_{XII} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}\right] = 3$$

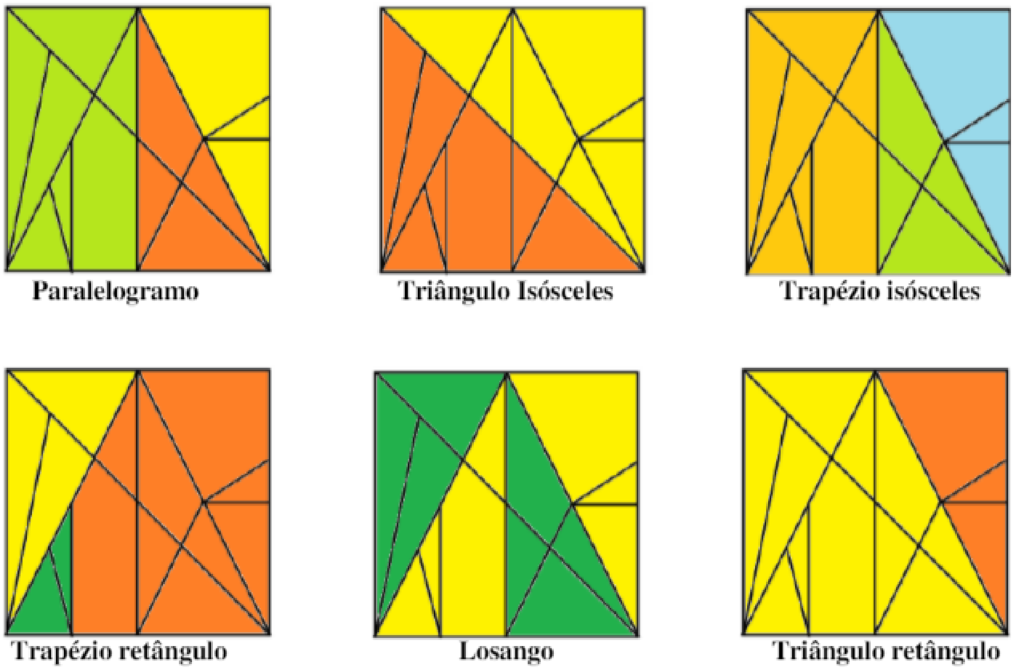
$$A_{XIII} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 12 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}\right] = 24$$

$$A_{XIV} = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\right] = 12$$

### 5.3.4 Desafios com as Peças do *Stomachion*

Propomos como atividade de criatividade e raciocínio lógico a montagem de um paralelogramo, um triângulo isósceles, um trapézio isósceles, um trapézio retângulo, um losango e um triângulo retângulo utilizando todas as quatorze peças do *Stomachion*:

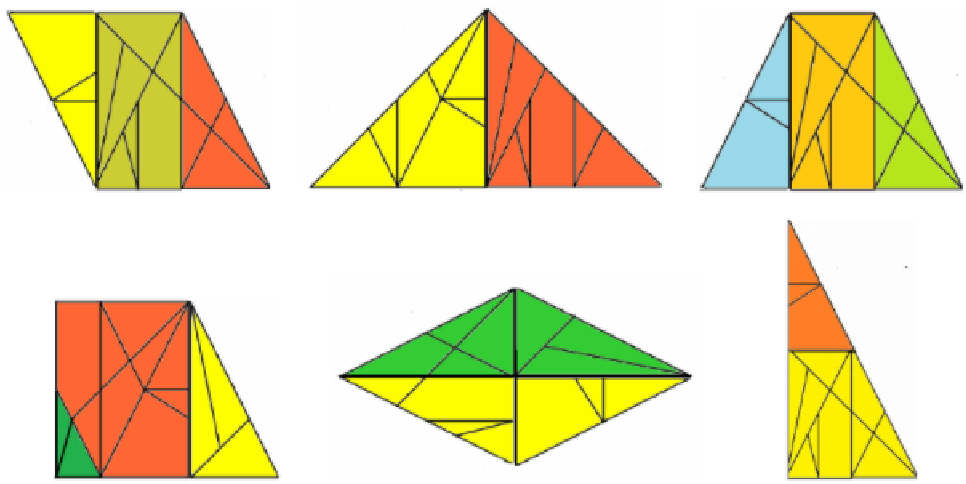
Figura 5.15: Desafio




Fonte:
https://www.passeidireto.com/arquivo/79722406/cliqueapostilas-com-br-jogos-20.

Solução do desafio:

Figura 5.16: Solução do desafio



Fonte:
https://www.passeidireto.com/arquivo/79722406/cliqueapostilas-com-br-jogos-20.

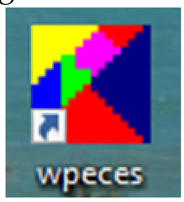
### 5.3.5 O software *Peces*

O uso de softwares na educação tem sido cada vez mais frequente frente à disseminação do acesso à Internet, às novas tecnologias e a ferramentas gratuitas de ensino. Para Chaves e Setzer (1987) a utilização do computador nas escolas quando bem orientada pelo professor favorece o desenvolvimento intelectual e do raciocínio lógico do aluno. Brasil (1998) corrobora a ideia:

> "O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as."(**??**, p.35)

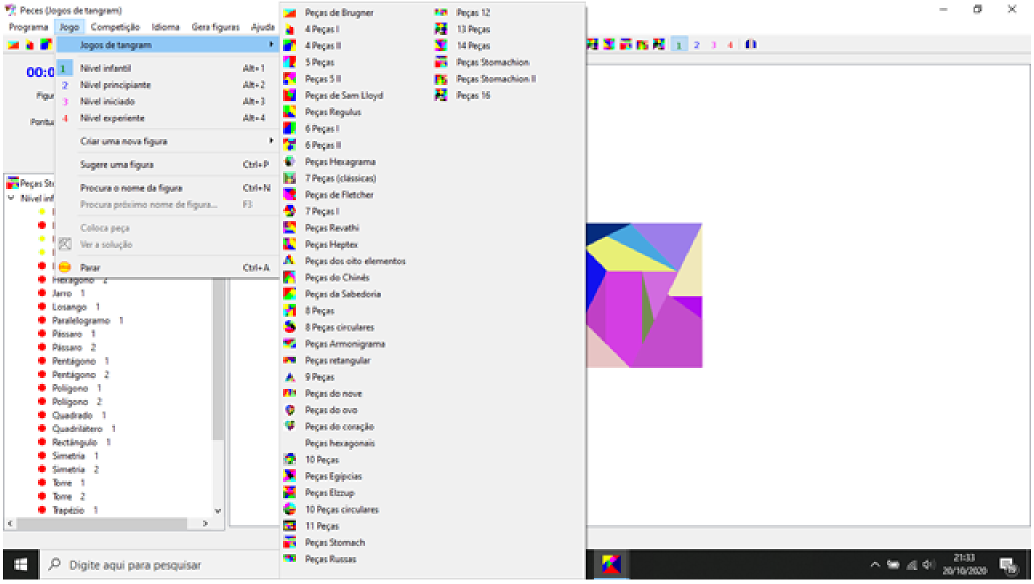
No contexto do *Stomachion*, buscamos um software que permitisse aos alunos utilizar a tecnologia quando trabalhassem com o jogo no contexto de formar figuras com suas peças, fugindo da atividade comum nas escolas de se fazer isso utilizando recortes de papel, como no caso do Tangram de 7 peças. Encontramos o software *Peces*, disponível gratuitamente no site ⟨http://pecesjocdetangr.sourceforge.net/⟩, portanto sendo possível instalá-lo em computadores da rede pública de ensino. O programa conta com 40 padrões distintos de Tangrans, dentre eles, *Stomachion* e o *Stomach*. O usuário pode criar suas próprias figuras ou buscar a solução daquelas sugeridas pelo *Peces*. Pode-se jogar nos níveis Infantil, Principiante, Iniciado e Experiente, além de medir o tempo gasto para concluir a montagem do modelo e verificar sua pontuação.

Figura 5.17: *Peces*



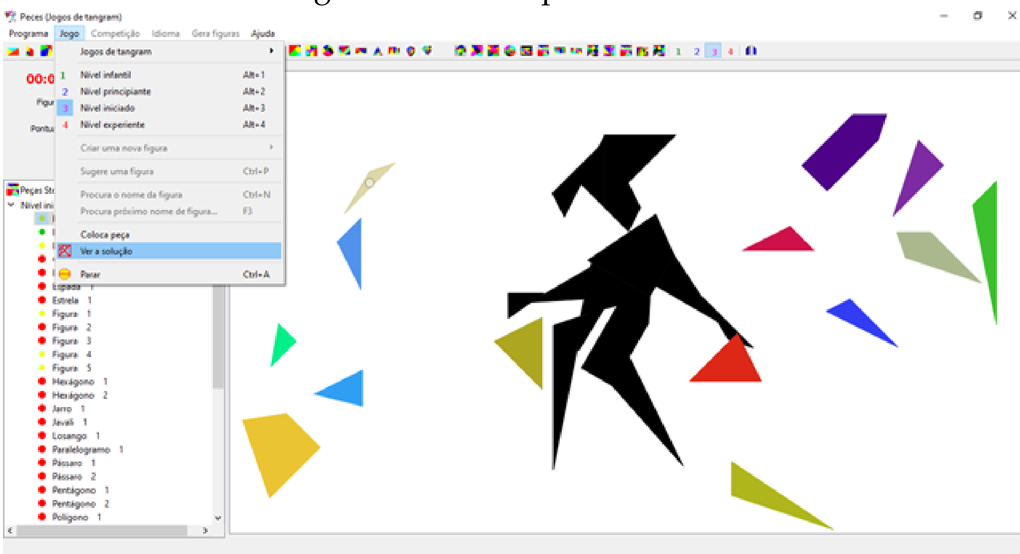

Fonte: (PECES, 2020).

Figura 5.18: Configurando o software *Peces*



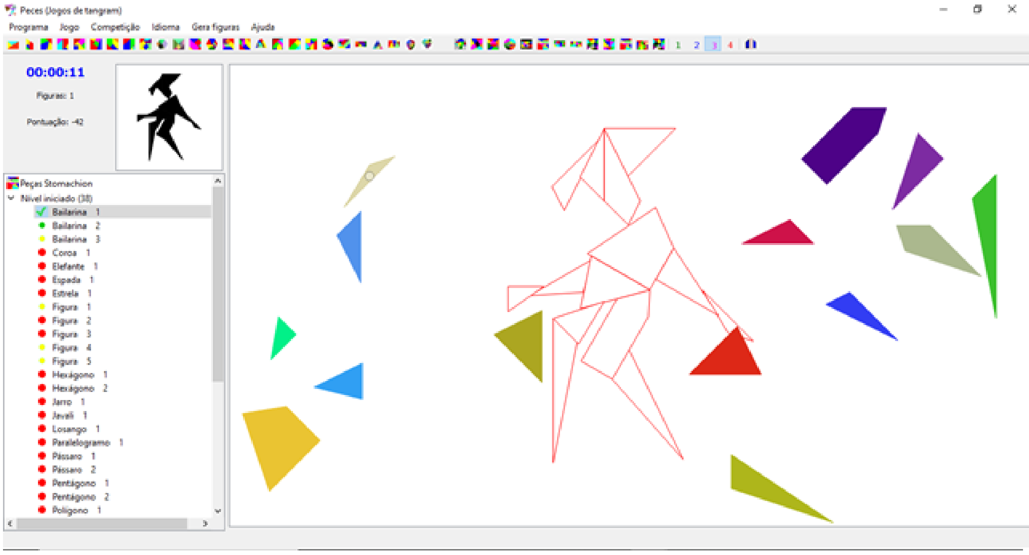
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.19: Exemplo de desafio



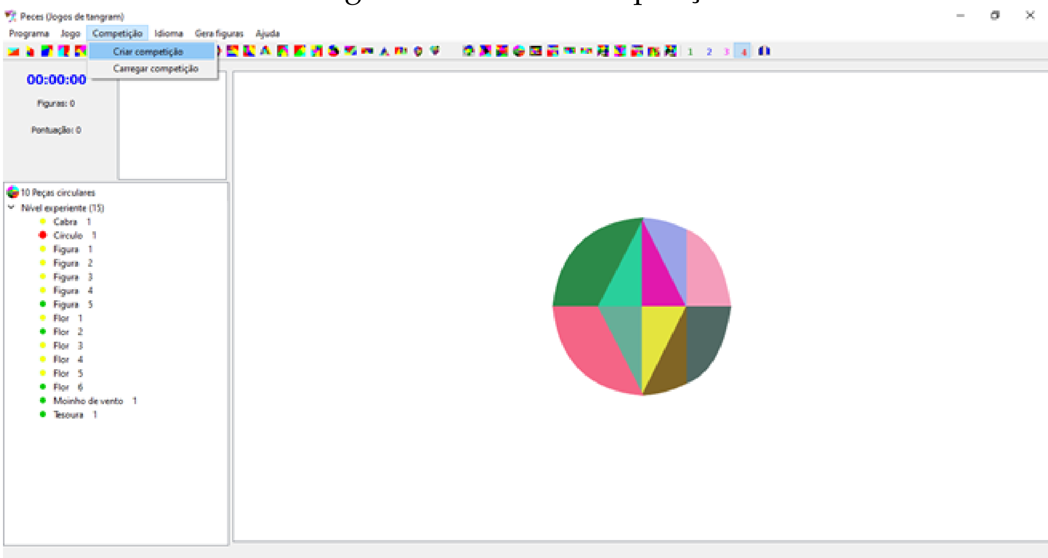
Fonte: Autoria própria.

Figura 5.20: Solução de um desafio



Fonte: Autoria própria.

Figura 5.21: Criar competição



Fonte: Autoria própria.

### 5.3.6 Uma atividade de Análise Combinatória

Nesta parte apresentamos uma proposta de atividade voltada ao ensino da Análise Combinatória que pode ser trabalhada por professores de Ensino Médio. Trata-se de uma abordagem sobre o tema da Permutação Simples e Fatorial onde o uso de fórmulas não é necessário para a resolução do exercício. Objetivamos que os alunos reconheçam o problema como um problema de contagem e sejam capacitados a resolver problemas elementares que envolvam Permutação Simples. Trata-se de uma atividade que poderá ser realizada em quatro módulos (aulas de cinquenta minutos).

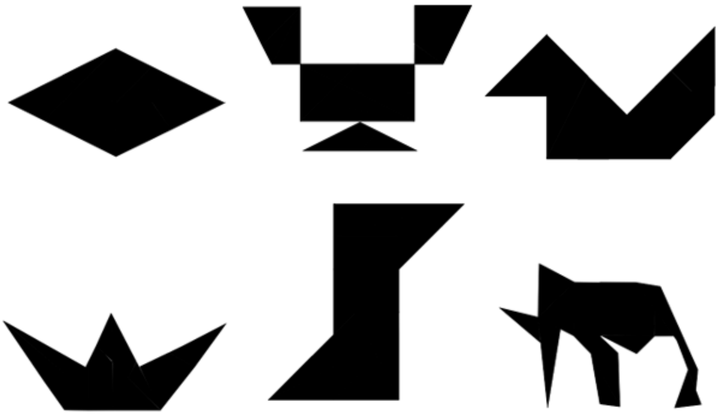
No primeiro momento da atividade, apresentamos a história do *Stomachion* Arquimedes enfatizando que inicialmente era visto com um jogo, apresentamos seu diagrama e suas 14 peças. Aproveitamos para propor alguns desafios para montagem de figuras a partir das peças. Para isso, cada aluno é incentivado a construir sua própria réplica do *Stomachion* em um material de fácil manuseio, emborrachado e de boa durabilidade, o E.V.A. (Espuma Vinílica Acetinada).

Figura 5.22: Material para confecção do *Stomachion*

Fonte: https://www.fragmaq.com.br/blog/reciclar-borracha-eva/.

Sugerimos como forma de se familiarizem com as peças e de interação entre os colegas, a construção das seguintes figuras e registrar as configurações das construções em papel quadrliculado.

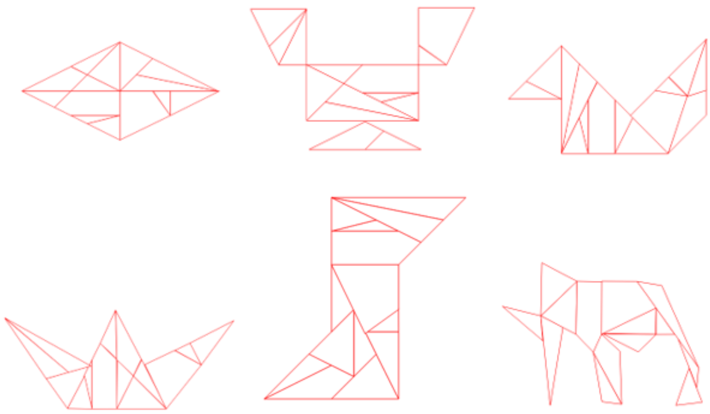
Figura 5.23: Sugestão para construções



Fonte: Autoria própria.

Deixamos um sugestão de gabarito para auxílio dos professores:

Figura 5.24: Gabarito



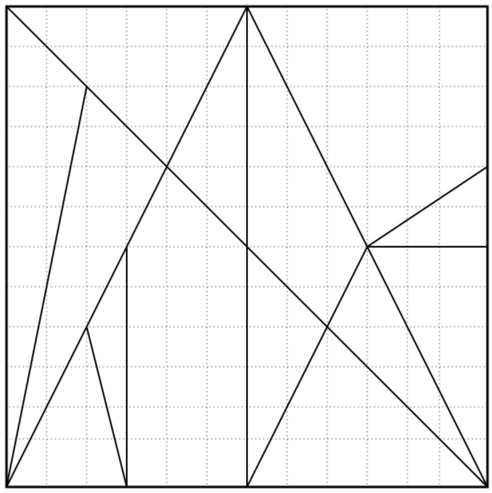
Fonte: Autoria própria.

Após esse momento, os alunos são requisitados a comparar suas montagens com nossa sugestão de gabarito e com as de seus colegas. Esta interação é importante para perceberem o que Arquimedes percebeu em seu trabalho, a existência de semelhança e congruência entre uma ou mais peças. Sugerimos aos professores que apresentem a tradução do segundo paragráfo do tratado do *Stomachion*:

> Por isso então, não há um pequeno número de figuras compostas a partir delas, devido a ser possível rotacioná-las em um outro lugar de uma figura igual e equiangular, transposta para assumir uma outra posição; e novamente também com duas figuras, tomadas juntas sendo iguais e semelhantes a uma única figura, e duas figuras tomadas juntas sendo iguais e semelhantes a duas figuras tomadas juntas – então, como resultado da transposição, muitas figuras são criadas. (NETZ; NOEL, 2009, p. 263)

Em seguida, a atividade prossegue a partir do diagrama do **Stomachion** nesta configuração:

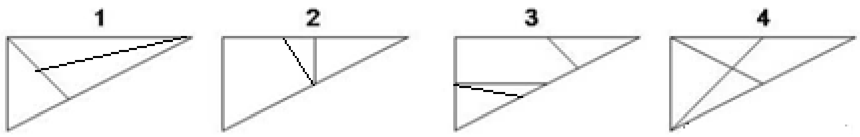
Figura 5.25: Diagrama para atividade



Fonte:
https://siciliangodmother.com/2014/07/21/archimedes-and-his-terrible-stomach-ache/.

O professor apresenta este diagrama e sua formação a partir de quatro triângulos retângulos, os triângulos básicos. O professor pode ressaltar a característica do quadrado que é ter os quatro ângulos internos retos.

Figura 5.26: Triângulos Básicos




Fonte: Autoria prória e (CHUNG; GRAHAM, 2007).

Os alunos são solicitados a formarem os quatro triângulos básicos e, posteriormente, determinar a quantidade de quadrados possíveis que podem ser construídos a partir dos triângulos, de modo que os triângulos tenham o cateto maior sempre na vertical, conforme no diagrama, sempre registrando seus resultados em papel quadriculado.

Assim que o professor verificar que a atividade foi concluída, é interessante que cada discente compare seus resultados com os demais. É esperado que, pelos menos uma parte da turma chegue às vinte e quatro configurações possíveis.

O professor conclui com os alunos que esta atividade requer tempo e solicita que seja repetida de outra forma, desta vez considerando os triângulos básicos apenas pelos números de 1 a 4 que os representam. Ao final, serão apresentadas as configurações: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Logo depois o professor apresenta a seguintes questões: É sempre necessário descrever todas as configurações? Existe um método mais rápido de se determinar todas as possibilidades de construção de um quadrado com as quatorze peças?

Solução: Sim, como são 4 triângulo para quatro posições distintas, temos que para a primeira posição há 4 opções de triângulos, para a segunda posição há 3 opções, para a terceira há duas opções e para a quarta apenas uma opção. Logo, teremos 4.3.2.1 = 24 possibilidades.

Nesta atividade, os alunos trabalharam com permutação simples, mais especificamente com o fatorial de 4, sem a menção de tais termos e fórmulas.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Constatamos com base no levantamento bibliográfico que as antigas civilizações árabe, chinesa e egípcia deixaram alguns registros que indicavam a utilização dos princípios básicos de contagem mas nenhum estudo sobre. Acreditava-se que apenas a partir do século XVI de nossa era é que os estudos sobre Combinatória se iniciaram. Com o reaparecimendo do Códex C de Arquimedes ao fim dos anos 90, seu contéudo pode ser recuperado a partir de modernas técnicas de restauração e de análise digital de imagens. A última página da obra reservava um trecho de um estudo sobre o *Stomachion* que se revelou agente de mudança da História: o *Stomachion* é o registro mais antigo conhecido de Análise Combinatória, datando do século II a.C.

De acordo com Nobre (2004 p. 537),

> [...] historiadores coletam e confrontam informações oriundas de diferentes fontes e escrevem a versão da história a partir delas. Enquanto não aparecer algum dado contraditório ao que fora escrito, essa história é aceita pelo meio acadêmico. Em Historiografia da Ciência, o caso o da falta de informações precisas sobre a ocorrência de determinado evento é apenas um entre outros tantos que estão sempre na mira de historiadores em busca de novos elementos para o confronto com a história estabelecida."

Com esta dissertação pudemos investigar a validade desta afirmação sobre o *Stomachion* e que a matemática empregada neste por Arquimedes é facilmente reproduzível atualmente e concorda com as diretrizes do CBC e da BNCC para o ensino básico da disciplina e sua vertente de História da Matemática.

Por meio da pesquisa desenvolvida durante a elaboração do trabalho podemos verificar como a História da Matemática é rica e explica o surgimento de todo o conteúdo estudado por alunos do Ensino Básico e agrega valor à obra de pesquisadores, mostrando que o conhecimento é construído através de experimentos e teorias pela humanidade. Ainda, a História da Matemática é um importante recurso pedagógico e metodológico a ser utilizado pelos professores aos traçarem suas estratégias de ensino.

Ademais, os estudos confirmam que o Stomachion é mais que um jogo e pode também ser empregado como núcleo de desenvolvimento de outras áreas matemáticas, além da lúdica, verificando a polivalência das obras de Arquimedes.

Ao final do trabalho, buscamos enfatizar tais aplicações a partir de propostas para atividades e problemas a fim de agregar mais valor às estratégias de ensino-aprendizagem, além de produzir mais conteúdo sobre tão importante tratado de Arquimedes. Aproveitamos e sugerimos para trabalhos futuros o estudo do *Stomachion* em relação às suas simetrias para a demonstração da Teoria de Grupos.

# Referências Bibliográficas


SICILIAN Godmother. [S.l.: s.n.].

AABOE, A. ***Episódios da história antiga da matemática***. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 177 p.

ARCHIMEDES; SUTER, H. ***Der Loculus Archimedius oder Das Syntemachion des Archimedes: zum ersten Mal nach zwei arabischen Manuskripten der Königlichen Bibliothek in Berlin***. [S.l.]: Teubner, 1899.

ARQUIMEDES. Acesso em: 17/11/2020. Disponível em: ⟨https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archimedes/pictdisplay/⟩.

BIGGS, N. L. ***The roots of combinatorics***. [S.l.]: Elsevier, 1979. v. 6. 109–136 p.

BRASIL. ***Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação e a Base.*** MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Acesso em: 28/10/2020. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.⟩

CASTANHA, A. P. **As fontes e a problemática da pesquisa em história da educação**. *Colegiado de Pedagogia da Unioeste–Campus de Cascavel. Pesquisa*, 2004.

CHAVES, E. O. C. de; SETZER, V. W. ***O uso de computadores em escolas: fundamentos e críticas***. [S.l.]: Scipione Autores e Editores, 1988.

CHUNG, F.; GRAHAM, R. ***A tour of Archimedes' Stomachion***. UCSD, 2007. Acesso em: 08/09/2020. Disponível em: ⟨http://www.math.ucsd.edu/~fan/stomach/⟩.

CÓDEX. Acesso em: 01/06/2020. Disponível em: ⟨http://bibliateca.com.br/site/os-principais-codices-da-biblia/codex-petropolitanus⟩.

DESAFIO. Acesso em: 18/11/2020. Disponível em: ⟨https://www.passeidireto.com/arquivo/79722406/cliqueapostilas-com-br-jogos-20⟩.

D'AMBROSIO, B. S. **Reflexões sobre a História da Matemática na Formação de Professores**. *Revista Brasileira de História da Matemática. Especial*, n. 1, p. 399–406, 2007.

D'AMBROSIO, U. **A interface entre História e Matemática: uma visão histórico-pedagógica**. *Facetas do diamante. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática*, 2000.

ELEFANTE. Acesso em: 13/07/2020. Disponível em: ⟨https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/matelem/stomachion.html⟩.

EMPUXO. Acesso em: 31/01/2020. Disponível em: ⟨https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/empuxo.htm⟩.

ESPELHO. Acesso em: 24/01/2020. Disponível em: ⟨https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/almanaque/historia-antiguidade-laser-arma-luz-arquimedes.phtml⟩.

ESPIRAL. Acesso em: 27/01/2020. Disponível em: ⟨https://www.obaricentrodamente.com/2012/01/construcao-geometrica-da-espiral-de.html⟩.

E.V.A. Acesso em: 16/01/2021. Disponível em: ⟨https://www.fragmaq.com.br/blog/reciclar-borracha-eva/⟩.

EVES, H. ***Introdução à História da Matemática, tradução: Hygino H***. 5. ed. [S.l.]: Editora UNICAMP, 2011. 193 p.

EXAUSTÃO. Acesso em: 17/11/2020. Disponível em: ⟨https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/12/01/o-metodo-da-exaustao-e-o-surgimento-da-constante-pi-/⟩.

GERAIS, G. d. E. S. d. E. d. M. G. M. ***Currículo Básico Comum - Matemática. Educação Básica - Ensino Fundamental e Ensino Médio.*** [S.l.]: SEMG, 2005.

GERAIS, M. **Currículo Referência de Minas Gerais**. *Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais-SEE/MG*, p. 918, 2018.

GODMOTHER, S. Acesso em: 16/01/2021. Disponível em: ⟨https://siciliangodmother.com/2014/07/21/archimedes-and-his-terrible-stomach-ache/⟩.

GONÇALVES, R. R. S. **UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO.** 2014.

GUINDASTE. Acesso em: 24/01/2020. Disponível em: ⟨http://fisicadario.blogspot.com/2015/11/la-garra-de-arquimedes.html⟩.

HEATH, T. L. et al. ***The works of Archimedes***. [S.l.]: Dover Publications, 2002.

HERMES, J. D. V. **O Teorema de Pick**. *Ciência e Natura*, Universidade Federal de Santa Maria, v. 37, n. 3, p. 203–213, 2015.

HIDROSTÁTICA. Acesso em: 31/01/2020. Disponível em: ⟨https://pt.slideshare.net/DIEGOBERWANGER1/aula-hidrostatica-profdiego⟩.

HØYRUP1 *, J. **On parts of parts and ascending continued fractions an investigation of the origins and spread of a peculiar system**. *Centaurus*, Wiley Online Library, v. 33, n. 3, p. 293–324, 1990.

KONIGSBERG. Acesso em: 17/07/2020. Disponível em: ⟨http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/entenda-o-enigma-das-pontes-de-konigsberg-que-instigou-geometria.html⟩.

LEIBNIZ, G. W. **Dissertatio de arte combinatoria (1666)**. *Die philosophishe Schriften. Berlin*, p. 27–102, 1880.

LEIBNIZ, G. W.; VON, F. **Novos ensaios sobre o entendimento humano correspondencia com clarke Gottfried Wilhelm Leibniz**. *Tradução Luís João Baraúna*, Nova Cultural, p. 202, 1998.

LIMA, E. L. ***Números e funções reais***. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

LOPES, L. S.; ALVES, A. M. M. **A História da Matemática em sala de aula: propostas de atividades para a Educação Básica**. *XX EREMAT, Bagé, P*, p. 320–330, 2014.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. *Belo Horizonte: CAED-UFMG*, p. 8, 2013.

MUGLER, C. **Les Oeuvres d'Archimède, volume 3: Des Corps Flottants, Stomachion, La Méthode, Le Livre des Lemmes, Le Problème des Boeufs**. *Budé, Paris*, 1971.

NETZ, R.; ACERBI, F.; WILSON, N. **Towards a Reconstruction of Archimedes' Stomachion**. *Sciamvs*, SCIAMVS, Kyoto, v. 5, p. 67, 2004.

NETZ, R.; NOEL, W. ***Códex Arquimedes***. [S.l.]: Record, 2009.

NOBRE, S. R. **Leitura crítica da história: reflexões sobre a história da matemática**. *Ciência & Educação (Bauru)*, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, p. 531–543, 2004.

OBMEP, C. de Matemática da. ***Princípio das Casas dos Pombos***. 2013. Acesso em: 17/07/2020. Disponível em: ⟨https://clubes.obmep.org.br/blog/texto_002-principio-das-casas-dos-pombos⟩.

PAPIRO. Acesso em: 28/05/2020. Disponível em: ⟨https://www.frutodearte.com.br/papel-papiro-egipcio-cru.html⟩.

PEÇAS. Acesso em: 07/09/2020. Disponível em: ⟨https://www.shutterstock.com/pt/image-vector/ostomachion-game-puzzle-archimedes-key-isolated-359523074⟩.

PECES. Acesso em: 18/11/2020. Disponível em: ⟨http://pecesjocdetangr.sourceforge.net/⟩.

PICK, G. A. Acesso em: 05/09/2020. Disponível em: ⟨https://pt.slideshare.net/vinamorais/teorema-de-pick⟩.

PLACA. Acesso em: 15/07/2020. Disponível em: ⟨https://www.carrosnaweb.com.br/dicasplacas.asp⟩.

PLUTARCHUS et al. ***Plutarch's Moralia: in sixteen volumes. 697 C-771 E***. [S.l.]: Harvard University Press, 1961.

POLÍGONOS. Acesso em: 22/10/2020. Disponível em: ⟨https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html\#SECTION00040000000000000000⟩.

QUADRADO-DUPLO. Acesso em: 07/09/2020. Disponível em: ⟨https://www.shutterstock.com/pt/search/stomachion⟩.

ROLO. Acesso em: 01/06/2020. Disponível em: ⟨https://noosfero.ufba.br/artes-visuais-2012/curiosidades/diferenca-entre-papiro-e-pergaminho⟩.

SEMELHANÇA. Acesso em: 05/09/2020. Disponível em: ⟨https://www.infoescola.com/matematica/semelhanca-de-triangulos/⟩.

SILVA, F. H. **Simetrias e grafos: uma abordagem inspirada no Stomachion de Arquimedes e nos poliominós**. Universidade Estadual de Campinas, 2017.

STOMACHION. Acesso em: 31/01/2020. Disponível em: ⟨http://4umi.com/play/stomachion/⟩.

TABULEIRO. Acesso em: 18/11/2020. Disponível em: ⟨https://culturacientifica.com/2019/10/23/el-puzzle-stomachion-y-el-palimpsesto-de-arquimedes-1/⟩.

TANGRAM. Acesso em: 31/01/2020. Disponível em: ⟨https://www.indagacao.com.br/2019/04/modelos-de-tangram-para-imprimir-atividade-e-moldes.html⟩.

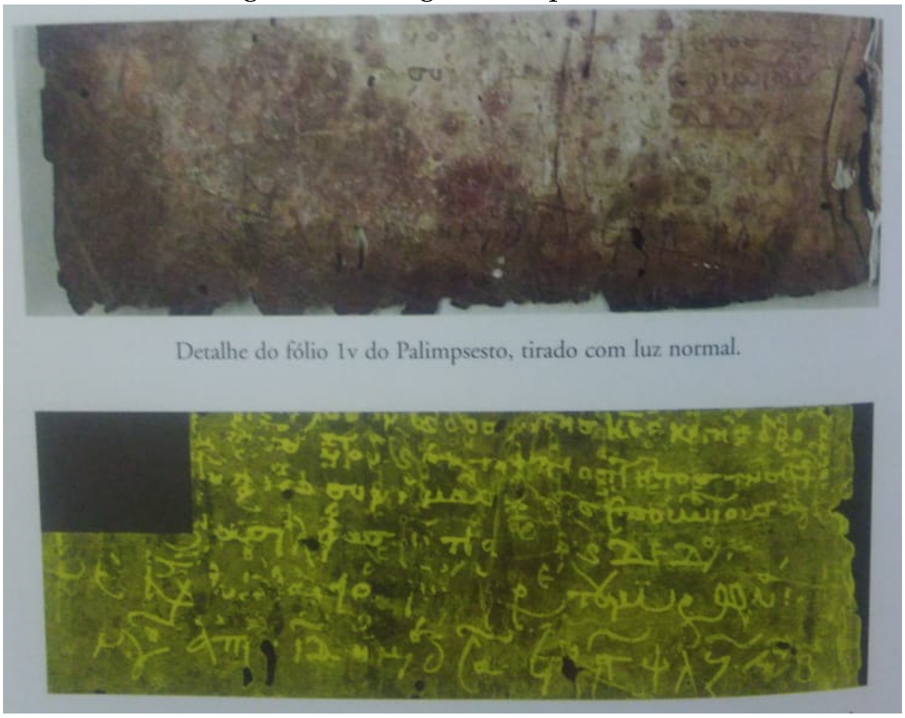
# A Algumas páginas recuperadas

Destacamos neste apêndice algumas imagens de páginas recuperadas atráves de várias técnicas tratamentos de imagens empregadas no Palimpsesto. Temos as fotografias tiradas em luz natural e a comparação após o tratamento

Figura A.1: Página recuperada - 1

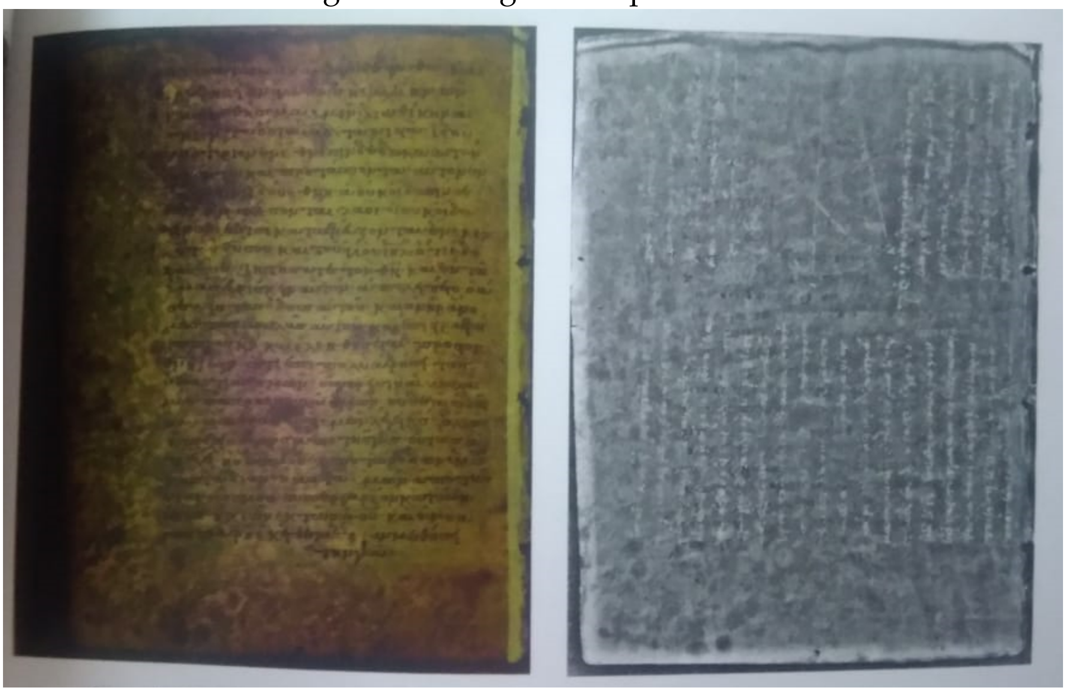
Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p. 192-193)

Figura A.2: Página recuperada - 2



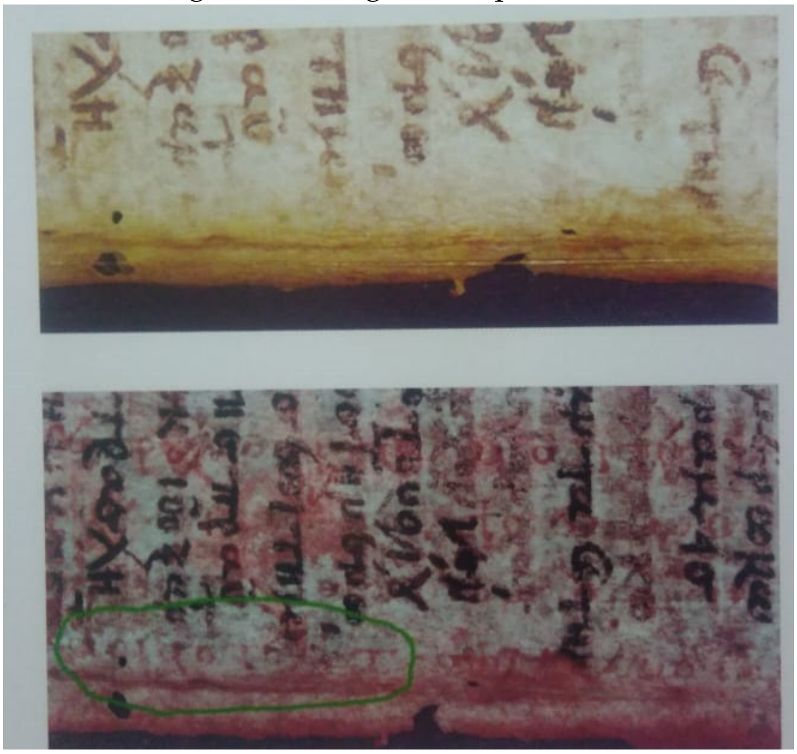

Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p. 192-193)

Figura A.3: Página recuperada - 3



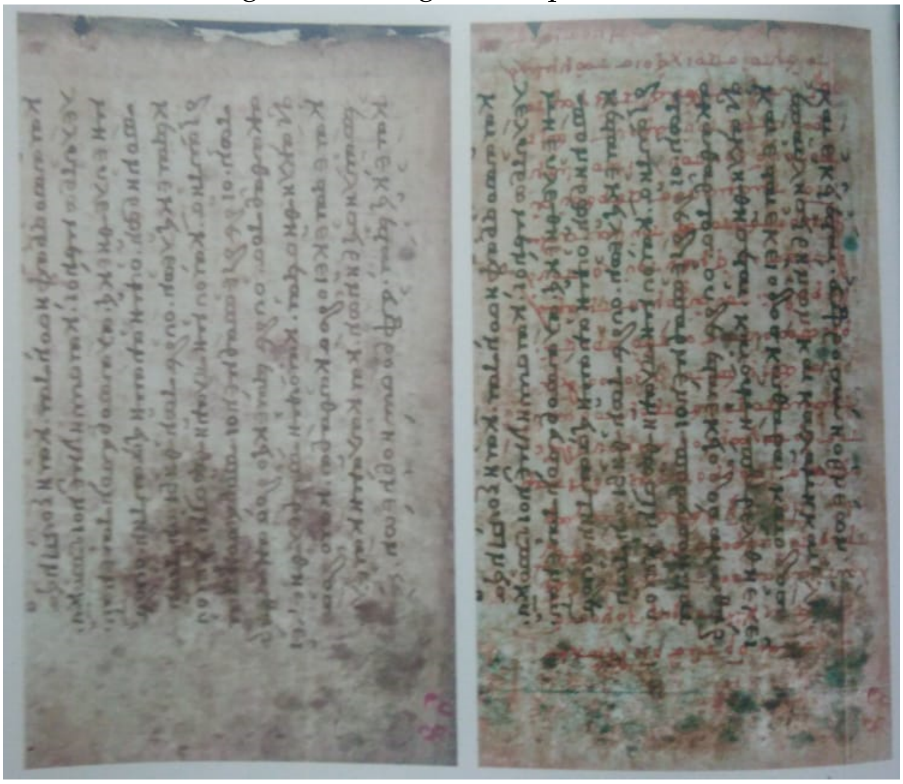
Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p. 192-193)

Figura A.4: Página recuperada - 4



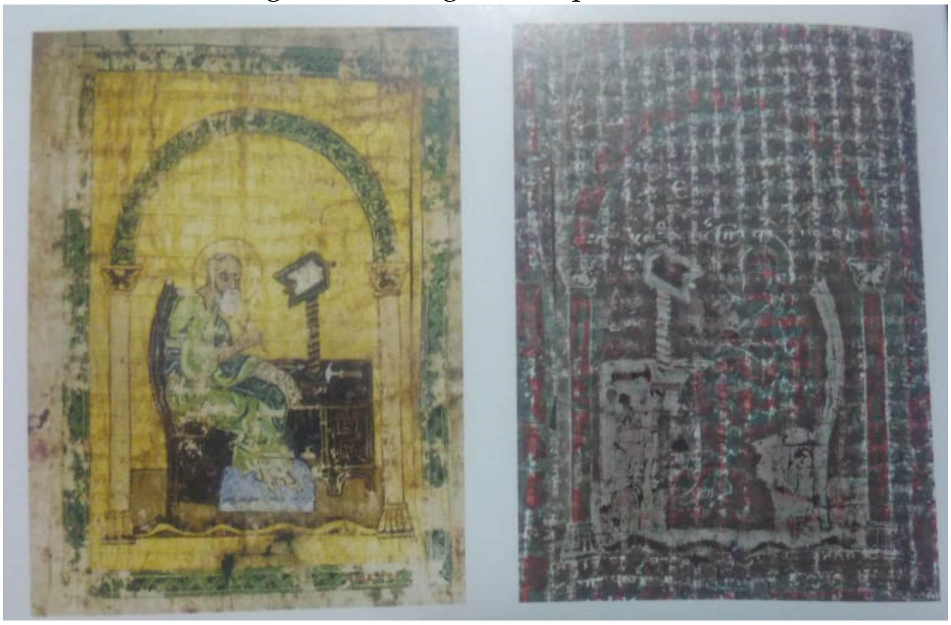
Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p. 192-193)

Figura A.5: Página recuperada - 5



Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p. 192-193)

Figura A.6: Página recuperada - 6



Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p. 192-193)

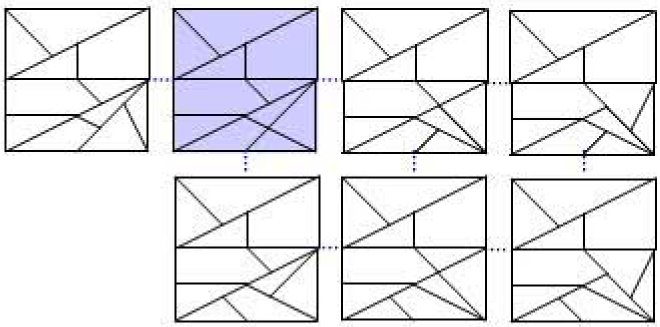
Figura A.7: Página recuperada - 7 - Espiral de Arquimedes

Fonte: (NETZ; NOEL, 2009, p. 192-193)

# B Quadrados locais

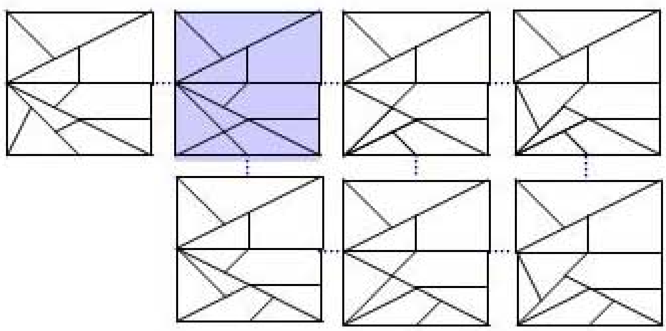
Apresentamos os quadrados locais do *Stomachion*:

Figura B.1: Quadrado local 1234



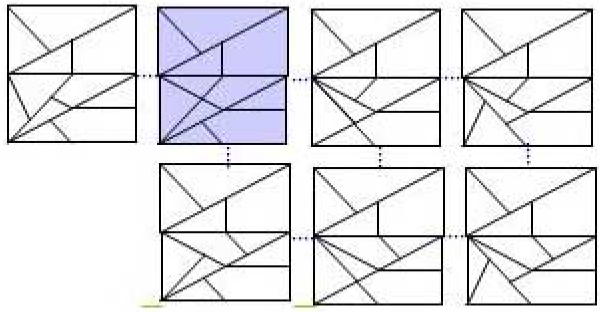
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.2: Quadrado local 123'4'



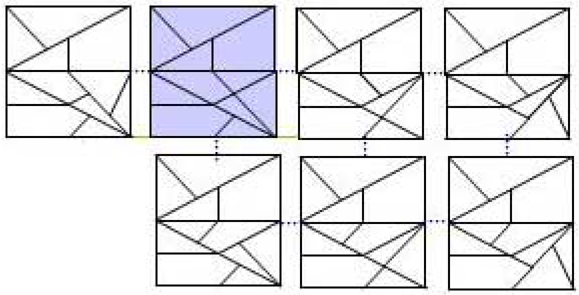
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.3: Quadrado local 1243



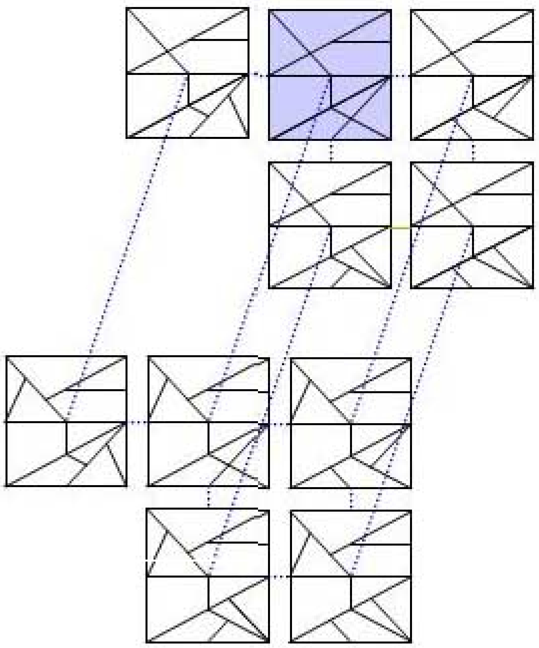
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.4: Quadrado local 124′3′



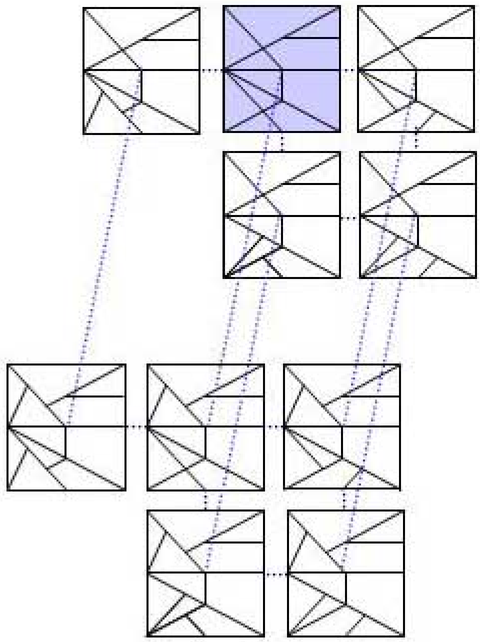
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.5: Quadrado local 1324



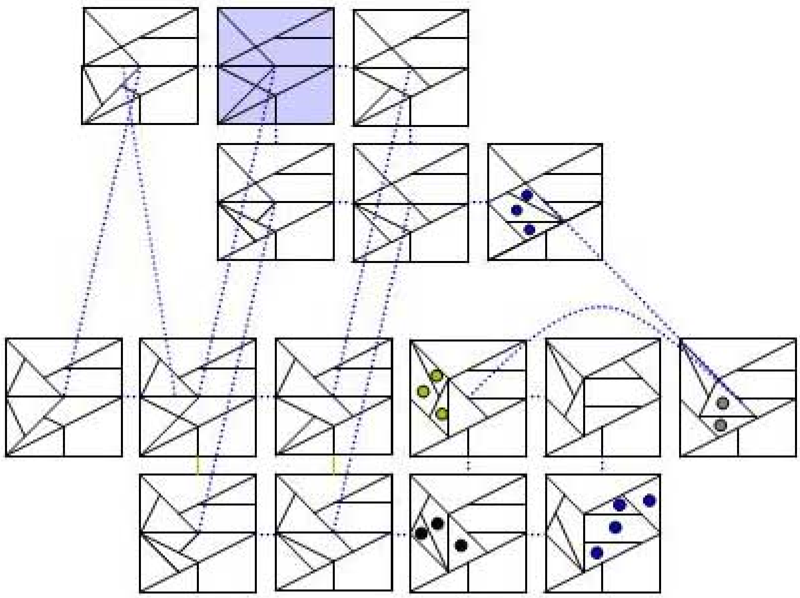
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.6: Quadrado local 132′4′



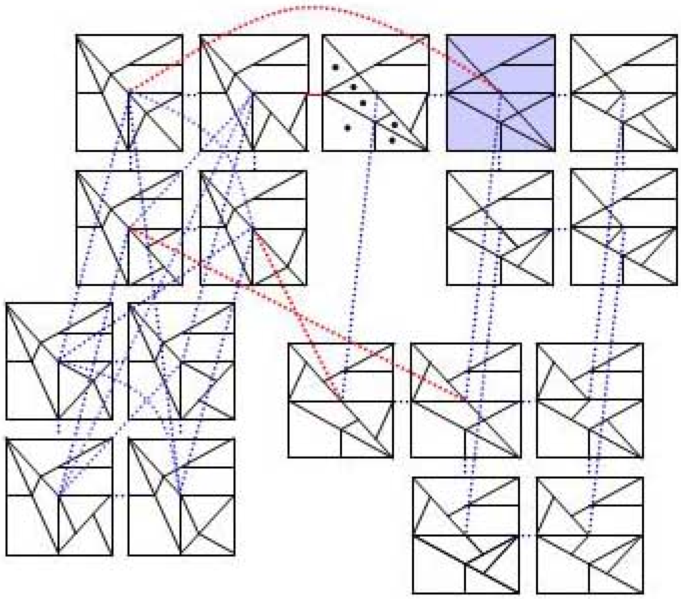
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.7: Quadrado local 1342



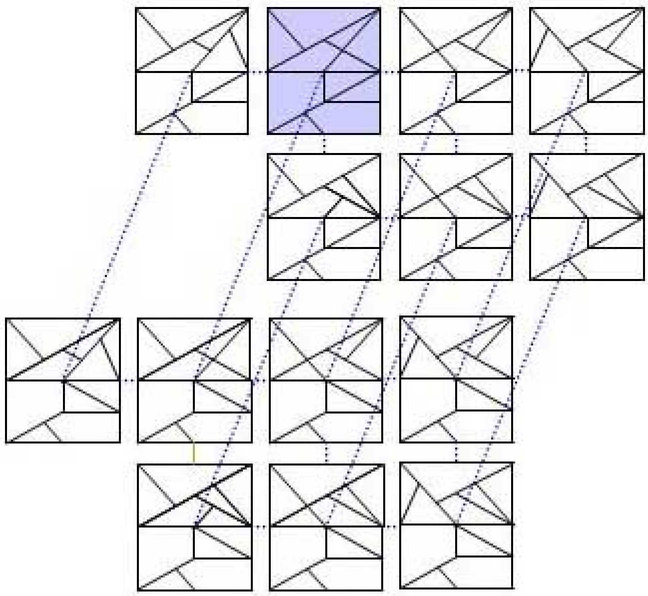
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.8: Quadrado local 134′2′



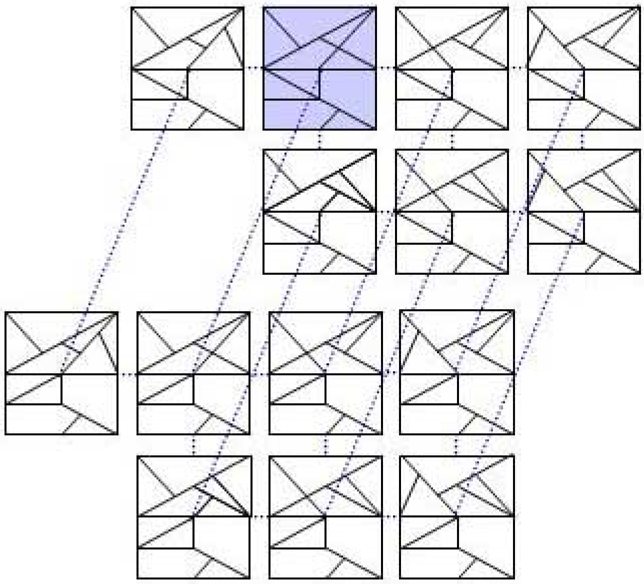
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.9: Quadrado local 1423



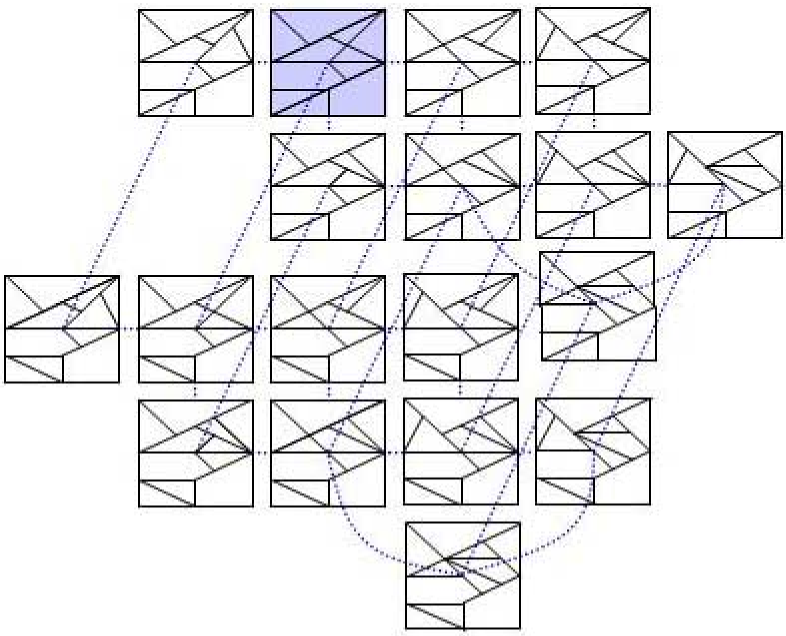
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.10: Quadrado local 142′3′



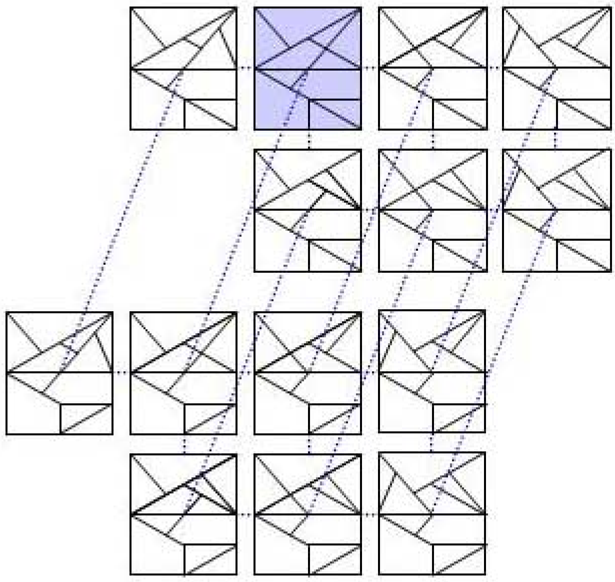
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.11: Quadrado local 1432



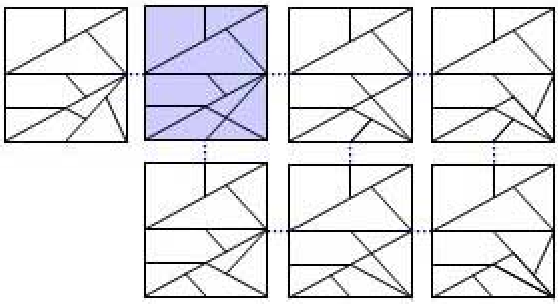
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.12: Quadrado local 143′2′



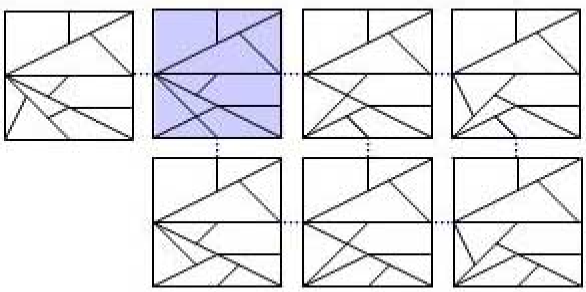
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.13: Quadrado local 2134



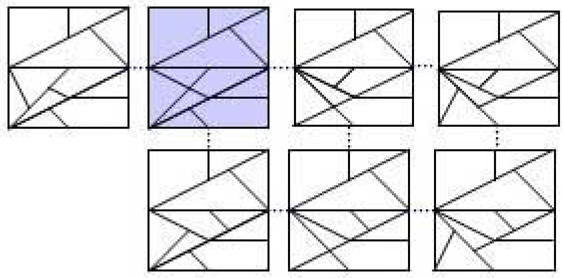
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.14: Quadrado local 213′4′



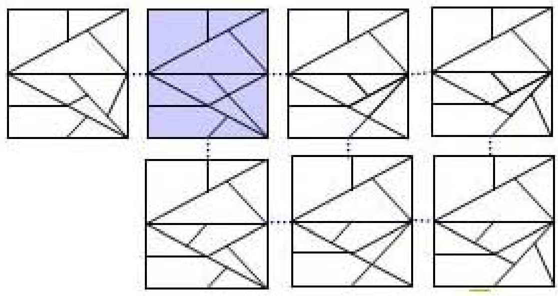
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.15: Quadrado local 2143



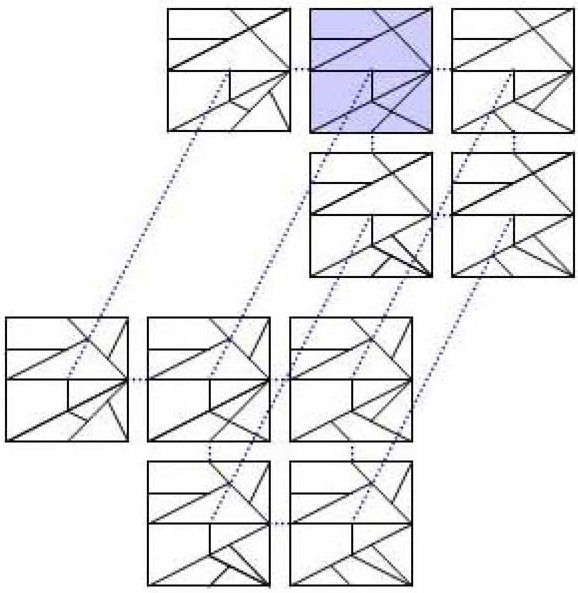
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.16: Quadrado local 214′3′



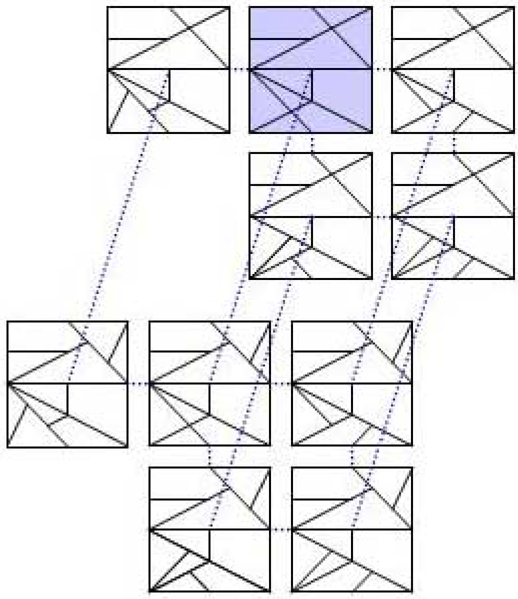
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.17: Quadrado local 3124



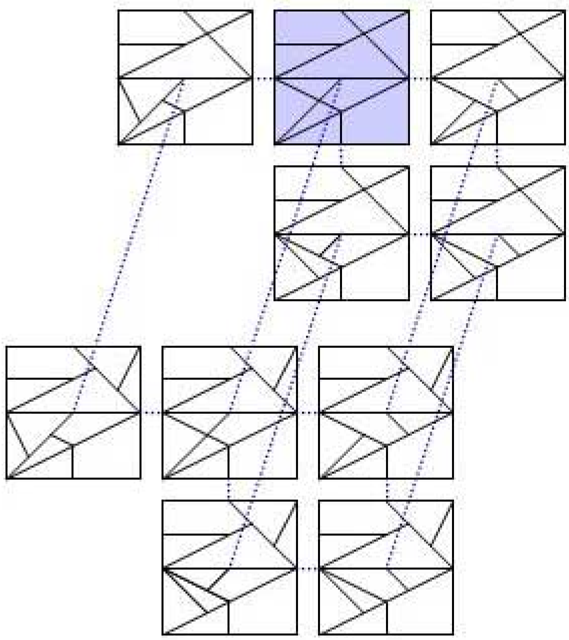
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.18: Quadrado local 312′4′



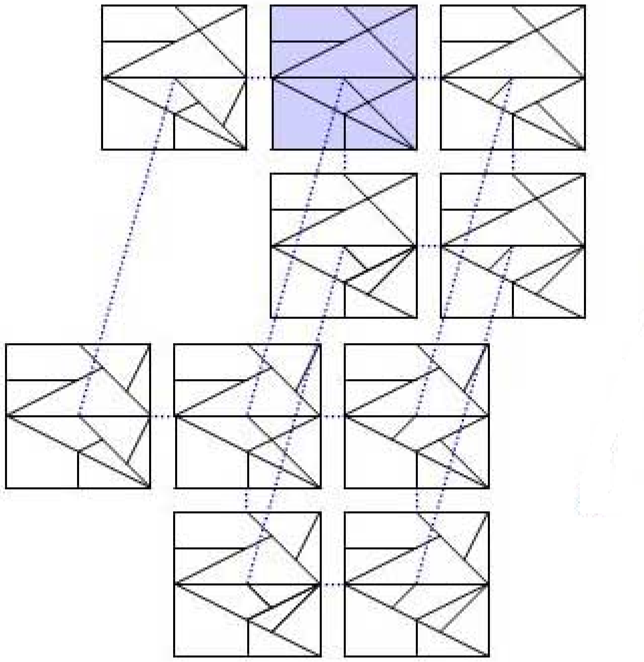
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.19: Quadrado local 3142



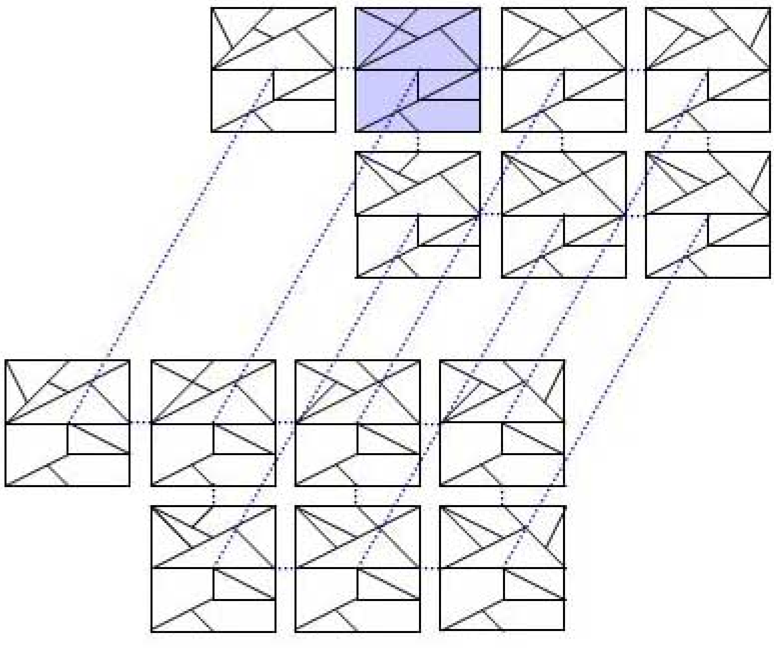
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.20: Quadrado local 314′2′



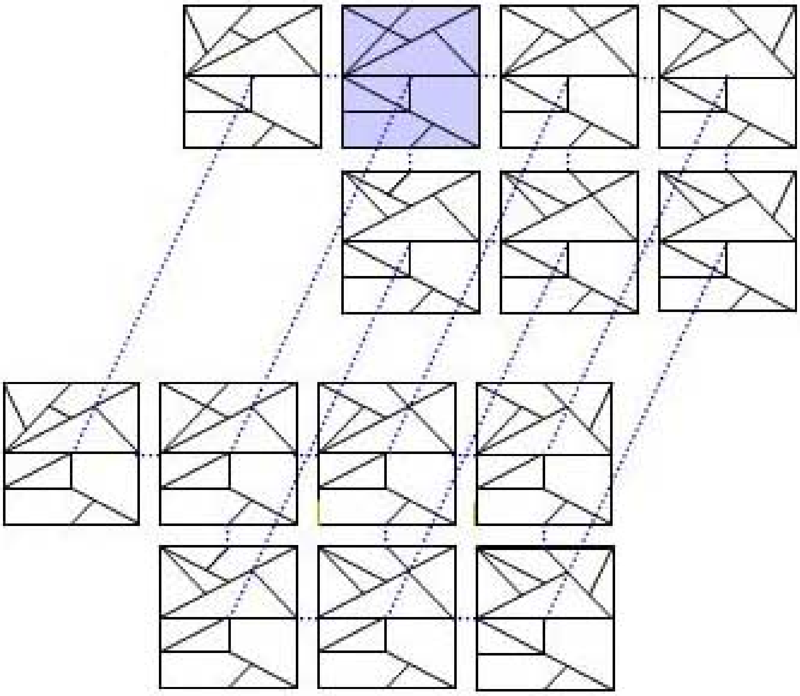
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.21: Quadrado local 4123



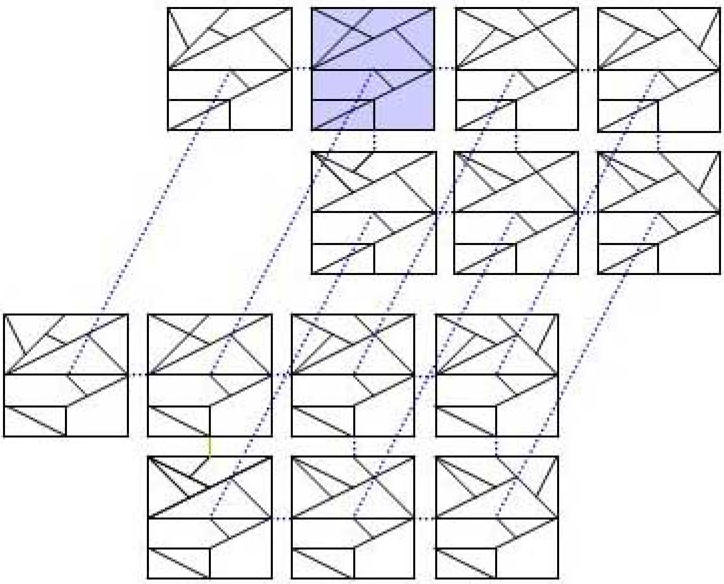
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.22: Quadrado local 412′3′



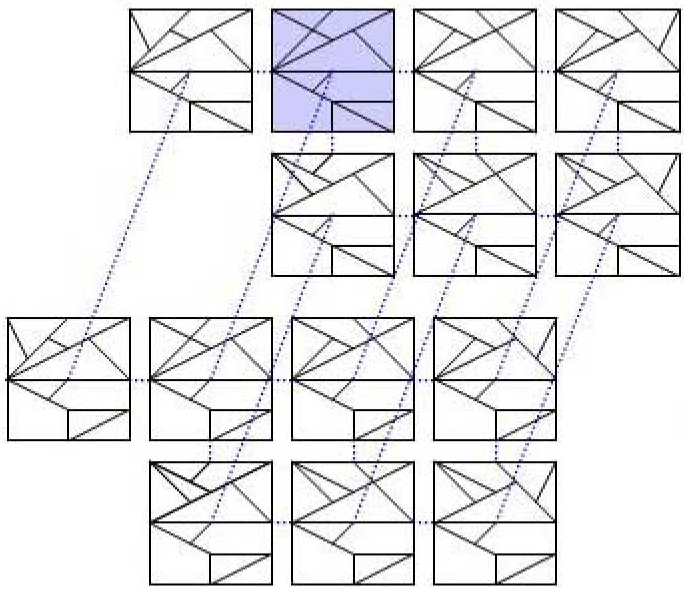
Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.23: Quadrado local 4132



Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.

Figura B.24: Quadrado local 413′2′



Fonte: http://www.math.ucsd.edu/ fan/stomach/.