UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO CIÊNCIA EXATA E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁICA MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

IAGO DE ANDRADE DANTAS

Cardinalidade dos conjuntos infinitos: Uma abordagem para o ensino básico

Orientador: Dr. Fagner Lemos de Santana

Natal/RN - 2021

IAGO DE ANDRADE DANTAS

Cardinalidade dos conjuntos infinitos: Uma abordagem para o ensino básico

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Profº. Dr. Fagner L. de Santana

Natal/RN - 2021

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Dantas, Iago de Andrade.
Cardinalidade dos conjuntos infinitos: uma abordagem para o ensino básico / Iago de Andrade Dantas. - 2021.
95f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, 2021.
Orientador: Dr. Fagner Lemos de Santana.

1. Matemática - Dissertação. 2. Cardinalidade - Dissertação. 3. Cantor - Dissertação. 4. Conjuntos finitos - Dissertação. 5. Conjuntos infinitos - Dissertação. I. Santana, Fagner Lemos de. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 51

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dissertação de Mestrado sob o título “Cardinalidade dos conjuntos infinitos: Uma abordagem para o ensino básico” apresentado por Iago de Andrade Dantas e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof°. Dr°. Fagner Lemos de Santana
Orientador
UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof°. Dr°. André Gustavo Campos Pereira
Examinador Interno
UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof°. Dr°. Rui Eduardo Brasileiro Paiva
Examinador Externo
IFCE - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Natal/RN - 2021

Dedicatória

A Deus por ter me dado capacidade para concluir este trabalho e aos meus pais que não mediram esforços para que eu chegasse a essa etapa de minha vida.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde, forças e capacidade para superar as dificuldades, sendo Ele meu mestre por excelência.

Aos meus pais pelo amor, cumplicidade e incentivo que sempre me proporcionaram. São por eles e para eles que me esforço e me inspiro.

Ao meu irmão Francisco Neto e sua esposa Juliana Saraiva que me acolherem em sua casa e me deram apoio ao longo dessa caminhada.

Ao meu orientador, Fagner Lemos, pela paciência, pelas inúmeras instruções e por ter contribuído de forma significativa, não só para a construção desse trabalho, mas também para minha formação acadêmica.

À Luana Carla, minha esposa, pelos momentos em que eu fraquejei e ela não me deixou desistir; pelas vezes em que nem mesmo eu acreditei, mas que ela me apoiou e, principalmente, pelo, carinho, amor e afeto que sempre me deu.

A João Victor, Lucylla, Rosângela, Alexandre, Gisalmir, Clayton e Adrino pela amizade e companheirismo contruídos ao longo do curso. Que nossa amizade possa durar para sempre.

Aos colegas do curso com quem tive a satisfação de estudar e compartilhar conhecimentos.

Aos professores que me aturaram e contribuíram para a minha formação com muita qualidade.

À Capes pelo apoio financeiro que me proporcionou, sem ele seria impossível concluir minha formação continuada.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar, de forma introdutória, o conceito de cardinalidade de conjuntos finitos e infinitos, com destaque para estes últimos. Além disso, mostrar alguns métodos de comparação entre as diferentes cardinalidades. Para embasar essa teoria, recordaremos o conceito e as classificações das funções. Ademais, será apresentado a construção e as propriedades do conjunto dos números naturais a partir dos axiomas de Peano. Dessa forma, teremos base para estabelecer os conceitos de conjuntos finitos, infinitos enumeráveis e não enumeráveis. O trabalho é finalizado com a exposição de uma sequência de atividades que tem como intuito permitir ao professor de matemática do ensino básico abordar o assunto de cardinalidade dos conjuntos em suas aulas.

PALAVRAS-CHAVE: Cardinalidade, Cantor, Conjuntos finitos, Conjuntos Infinitos.

Abstract

This work aims to present, in an introductory way, the concept of cardinality of finite and infinite sets, with emphasis on the latter. Additionally, showing some methods of comparison between the different cardinalities. To support this theory, we will recall the concept and classifications of functions. Moreover, the construction and properties of the set of natural numbers from Peano's axioms will be presented. Thereover, we will have a basis for establishing the concepts of finite, infinite, enumerable and non-enumerable sets. Finally, this work presents a sequence of activities that aims to support math teachers of basic education to approach the subject of cardinality of the sets in their classes.

KEYWORDS: Cardinality, Cantor, Finite Sets, Infinite Sets.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Vocês já pararam para pensar como o homem aprendeu a contar? Segundo alguns historiadores, isso se deu de maneira empírica e prática através de um artifício conhecido como “correspondência um a um”, o qual permitia comparar a quantidade de elementos de um conjunto a partir de outro, mesmo que de forma não abstrata. Os criadores de carneiros da antiguidade, por exemplo, necessitavam saber se seu rebanho havia voltado para o curral. Para isso, todas as noites eles ficavam na entrada do aprisco e sempre que um animal entrava eles colocavam uma pedra em um monte. Pela manhã, faziam o processo inverso e assim sabiam se todo o seu rebanho alí estava. Ou seja, para cada ovelha o pastor fazia corresponder uma pedra e dessa forma podia fazer a comparação entre esses dois conjuntos.

Após um longo processo de evolução da matemática, hoje temos a nossa disposição os números naturais, que, segundo Lima ([9]), constituem um modelo matemático criado pelo homem que formaliza o processo de contagem. Assim como na antiguidade, para sabermos quantos elementos possui um conjunto é necessário utilizarmos a ideia de correspondência biunívoca (correspondência um a um), ou bijeção. Na matemática moderna, trata-se de um caso particular do que chamamos de função, que abordaremos de forma breve no primeiro capítulo deste trabalho por se tratar de um tema de extrema importância para nosso estudo posterior sobre cardinalidade. Além disso, ainda nesse capítulo, faremos uma breve introdução do conjunto dos números naturais e, por fim, apresentaremos alguns resultados importantes sobre os conjuntos finitos.

Mas foram os conjuntos infinitos que sempre intrigaram os matemáticos. Não só eles, mas, ao longo da história, o homem sempre teve muita dificuldade em compreender e aceitar a ideia do infinito. Conforme Gonçalves ([6]), as primeiras referências ao termo se deram na religião, em expressões do tipo "Deus é infinitamente bom". Até hoje, questões como a infinitude do universo causam espanto, discussões e instigam pesquisadores a estudarem sobre o tema.

Na Matemática, o conceito formal, a estrutura e o comportamento dos conjuntos com infinitos elementos são estudados há anos e ainda assim causam certo desconforto por possuírem propriedades que, a princípio, são bastante contra intuitivas. A título de exemplo, mostraremos, no Capítulo 2, que nos conjuntos infinitos um subconjunto pode ser colocado em correspondência um a um com o conjunto do qual ele faz parte. Esse e outros resultados que definiram, classificaram e caracterizaram os conjuntos infinitos , os quais serão apresentados no capítulo 2 desse trabalho, foram estabelecidos pelo matemático Alemão Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, na segunda metade do século XIX. Ele mostrou que há diferentes tipos de conjuntos infinitos, não sendo possível, em alguns deles, colocar seus elementos em sucessão (na forma de lista). Surgiram assim os conceitos de conjunto enumerável e de conjunto não enumerável.

Foi também utilizando a ideia de correspondência biunívoca que Cantor estabeleceu uma hierarquia entre as cardinalidades dos conjuntos infinitos. O terceiro capítulo será dedicado à exposição do conceito de cardinalidade de conjuntos infinitos e de como Cantor conseguiu estabelecer tal ordenação através de comparações entre as cardinalidades desses conjuntos.

Mas será possível tratar sobre cardinalidade de conjuntos finitos e infinitos no ensino básico? É o que o Capítulo 4 desse trabalho propõe. Finalizaremos esse trabalho com a apresentação de uma série de atividades estratégicas que possibilitará ao professor de matemática expor esse assunto tão empolgante a turmas do ensino médio.

Capítulo 1

Conjuntos Finitos

Neste capítulo trataremos dos conjuntos finitos. Para isso, abordaremos o conceito de função, além de sua classificação em injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Também será feita uma breve construção do conjunto dos números naturais baseada nos chamados axiomas de Peano. Para tanto, utilizaremos as seguintes referências bibliográficas: [7], [8], [9], [10], [12].

1.1 Noção de Função

Definição 1.1.1. *Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função $f : A \to B$ (lê-se: uma função de A em B) é uma regra que nos diz como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$.*

O conjunto A, "conjunto de partida da função", é chamado domínio, enquanto que o "conjunto de chegada", B, é chamado contradomínio da função. Para cada elemento $x \in A$, a função f leva-o a um valor $f(x) \in B$ o qual é chamado de imagem de x.

É importante destacar que não é difícil confundirmos as notações "f" com "$f(x)$". Contudo enquanto "f" é a função, "$f(x)$" é o valor assumido pela função no elemento x do seu domínio.

A definição não restringe a função apenas àquelas formadas por sentenças polinomiais, exemplos mais usuais no ensino médio. Na verdade, a regra, ou o conjunto de instruções que nos faz obter o valor $f(x) \in B$ para dado $x \in A$ deve obedecer apenas à duas condições:

1^a. Para que f tenha A como domínio, a regra deve fornecer uma imagem para todo $x \in A$;

2^a. Para cada valor $x \in A$ a regra deve fazer corresponder um único valor em B.

Vejamos três exemplos em que faremos a análise se de fato as relações entre os conjuntos se tratam de funções.

Exemplo 1.1.1. *Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 6, 10, 14, 18, 20\}$ e a seguinte regra: façamos corresponder a cada elemento de A o seu dobro em B.*

Neste exemplo temos que $f(1) = 2$, $f(3) = 6$, $f(5) = 10$, $f(7) = 14$. Vejamos a representação da função através do diagrama de Venn (Figura 1.1).

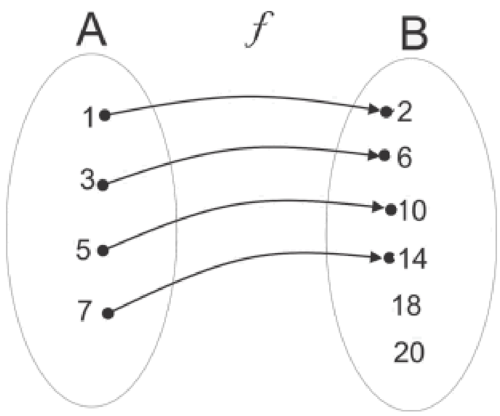


Figura 1.1: Diagrama da função $f : A \to B$.

Como cada elemento do conjunto A está associado apenas a um único elemento de B, temos uma função.

Exemplo 1.1.2. *Sejam P o conjunto dos retângulos no plano e $\mathbb{R}^*_+ = (0, +\infty)$ o conjunto dos números reais positivos. Vamos definir a relação $f : \mathbb{R}^*_+ \to P$ da seguinte maneira: façamos associar a cada número $x \in \mathbb{R}^*_+$ o retângulo $f(x)$, cujo perímetro é x.*

Note que nesse exemplo não temos uma função, já que, dado um número real positivo x, existem vários retângulos com o mesmo perímetro, ou seja, o exemplo não cumpre a segunda condição.

Exemplo 1.1.3. *Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 5\}$ e $B = \{1, 4, 10\}$. Defina $f : A \to B$ pela seguinte regra: a cada valor $x \in A$ faça corresponder o número $f(x) \in B$ tal que $f(x) = x^2$.*

É evidente que esta regra não define uma função, pois não cumpre nossa primeira condição, já que, não existe nenhum valor correspondente em B para $x = 5 \in A$.

A partir da definição e dos exemplos vistos anteriormente, percebemos que os elementos do contradomínio de uma função podem não receber correspondência de algum elemento do domínio ou ainda ter mais de um correspondente no conjunto de partida. Essas características subdividem as funções em injetivas, sobrejetivas e bijetivas. Essa classificação será muito importante ao longo do nosso trabalho, por isso, vamos às definições.

Definição 1.1.2. *Dada uma função $f : A \to B$, dizemos que ela é injetiva se para quaisquer x_1 e $x_2 \in A$ tais que $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Utilizando-se de uma linguagem não formal, podemos dizer que uma função é injetiva quando a cada elemento do contradomínio, a função faz corresponder no máximo um elemento do domínio.

Além disso, em diversas situações em que teremos de provar a injetividade de uma função, será de mais praticidade utilizar a contrapositiva da definição, ou seja, quando para quaisquer $x_1, x_2 \in A$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$, tivermos $x_1 = x_2$, então a função será injetiva.

Definição 1.1.3. *Dada uma função $f : A \to B$, dizemos que ela é sobrejetiva quando para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Em outras palavras, uma função é sobrejetiva quando todos os elementos do contradomínio tiverem pelo menos um valor correspondente no domínio.

Ademais, definiremos como *imagem* do subconjunto $X \subset A$ pela função $f : A \to B$ como sendo o subconjunto $f(X) \subset B$ formado pelas imagens dos elementos de X. Daí, poderemos afirmar que a função $f : A \to B$ será sobrejetiva quando $f(A) = B$, ou seja, quando a imagem da função for igual ao seu contradomínio. (Podemos ainda denotar a imagem de f como $Im(f)$). Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.1.4. *A função $f : A \to B$, com $A = \{2, -5, 8\}$ e $B = \{5, -2, 11, 15\}$, definida por $f(x) = x + 3$ representa uma função injetiva, pois cada elemento do conjunto B está associado a um único elemento do conjunto A, a saber: $f(2) = 5$,*

$f(-5) = -2$, $f(8) = 11$. *Contudo não é sobrejetiva, já que, não existe valor em* A *que faz correspondência com* $15 \in B$.

Exemplo 1.1.5. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, *definida por* $f(x) = x^2$ *é sobrejetiva, mas não injetiva. De fato, para todo* $y \in \mathbb{R}_+$ *existe um* x *real tal que* $y = x^2$, *a saber* $x = \sqrt{y}$, *logo é sobrejetiva. Agora, para mostrarmos que ela não é injetiva, basta tomarmos um contra exemplo. Temos que* $f(2) = 4 = f(-2)$ *e* $2 \neq -2$, *o que conclui a demonstração.*

Definição 1.1.4. *A função* $f : A \to B$ *é bijetiva quando ela é simultaneamente injetiva e sobrejetiva.*

Exemplo 1.1.6. *A função bijetiva mais elementar é aquela que leva um dado elemento nele mesmo. A ela damos o nome de função identidade. Em termos técnicos, escrevemos:*

Seja X *um conjunto, chamamos de função identidade a função*

$$I_X : X \to X$$

definida pela regra $I_X(x) = x$.

Exemplo 1.1.7. *Como vimos no exemplo 1.1.5, a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, *definida por* $f(x) = x^2$ *não é bijetiva por não ser injetiva, contudo se restringirmos o domínio ao conjunto* $\mathbb{R}_+$ *teremos um exemplo de função bijetiva.*

Esse exemplo nos sugere uma maneira de construirmos uma função apenas restringindo o domínio de uma outra função já existente a fim de obtermos uma certa propriedade desejada. Chamamos esse tipo de função de *função restrita*. Vamos à definição:

Definição 1.1.5. *Dada uma função* $f : A \to B$ *e* $X \subset A$, *definimos a função restrita de* f *a* X, *por* $f|_X : X \to B$, *com a seguinte regra* $f|_X(x) = f(x)$.

Note que a função $f : A \to B$ e a função restrita $f|_X : X \to B$ possuem o mesmo contradomínio e a mesma regra de formação, contudo têm domínios diferentes o que configura duas funções distintas.

1.1.1 Composição de Funções

Definição 1.1.6. *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções tais que o contradomínio de f é igual ao domínio de g. Então a função composta de f com g é a função $g \circ f : A \to C$, definida por:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A.$$

Exemplo 1.1.8. *Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + 2$, temos então que*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 + 2 = 4x^2 + 12x + 11.$$

Proposição 1.1.1. *Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são injetivas, então $g \circ f : A \to C$ também é injetiva.*

Demonstração. Tomemos $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, com $x_1, x_2 \in A$. Como g é injetiva, segue que $f(x_1) = f(x_2)$, mas f também é injetiva, portanto, $x_1 = x_2$. Logo $g \circ f$ é injetiva. □

Proposição 1.1.2. *Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são sobrejetivas, então $g \circ f : A \to C$ também é sobrejetiva.*

Demonstração. Tomemos $z \in C$. Como g é sobrejetiva, então $\exists y \in B$ tal que $g(y) = z$. Como f é sobrejetiva, então existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Portanto, temos que $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Isso nos diz que $g \circ f$ é sobrejetiva. □

Observação 1.1.1. *As duas proposições nos levam a concluir que a composição de funções bijetivas também será uma bijeção.*

1.1.2 Função Inversa

Definição 1.1.7. *Dada uma função $f : A \to B$ denomina-se função inversa de f a função $g : B \to A$ tal que $(f \circ g) = Id_B$, isto é, $f(g(y)) = y$, $\forall y \in B$, e $(g \circ f) = Id_A$, ou seja, $g(f(x)) = x$, $\forall x \in A$.*

Neste caso, denotamos $g = f^{-1}$.

Uma pergunta natural é a seguinte: Como determinamos na prática a inversa de uma dada função? Para encontrarmos a inversa de uma função bijetiva $f : A \to B$ definida pela sentença $y = f(x)$ procederemos da seguinte maneira:

(1°). Na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e vice-versa, obtendo $x = f(y)$;

(2°). Transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Uma outra pergunta que será respondida é: que funções possuem inversa?

Exemplo 1.1.9. *Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x + 1$. Vamos encontrar a sua inversa. Usando o método descrito, primeiro façamos a mudança de variável. Ficamos então com $x = 2y + 1$. Agora, expressemos y em função de x:*

$$x = 2y + 1 \Rightarrow 2y = x - 1 \Rightarrow y = \frac{x-1}{2}.$$

Portanto, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ é a inversa de f.

Exemplo 1.1.10. *Vamos tentar encontrar a inversa da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$. Neste caso isso não é possível, já que, a função dada não é invertível. De fato, suponha que f possua como inversa a função g. Assim, por definição, $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = 1$ e $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = -1$, mas $g(f(1)) = g(1)$ e $g(f(-1)) = g(1)$. Portanto, teríamos $g(1) = 1$ e $g(1) = -1$. O que é absurdo. Já a função $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definida pela mesma lei de formação de f, ou seja, $h(x) = x^2$, tem como inversa a função: $t : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $t(x) = \sqrt{x}$. (Note que $h = f|_{\mathbb{R}_+}$).*

De fato, as seguintes equações são válidas para qualquer $x \in \mathbb{R}_+$.

$$(h \circ t)(x) = h(t(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

De um modo similar, para qualquer $x \in \mathbb{R}_+$, temos que

$$(t \circ h)(x) = t(h(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

Logo, valem $t \circ h = I_{\mathbb{R}_+}$ e $h \circ t = I_{\mathbb{R}_+}$. Portanto, t é a função inversa de h .

Definição 1.1.8. *Uma função $g : B \to A$ é dita ser uma inversa à esquerda para uma função $f : A \to B$ se $g \circ f = Id_A$. Dizemos também neste caso que f possui uma inversa à esquerda.*

Exemplo 1.1.11. *A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$, tem como inversa à esquerda $g(x) = \frac{x}{3}$, porque a função composta $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{3x}{3} = x$, para todo $x \in \mathbb{N}$, a qual é a função identidade.*

Teorema 1.1.1. *Uma função $f : A \to B$ possui inversa à esquerda se, e somente se, é injetiva.*

Demonstração. Supondo $f : A \to B$ injetiva, queremos encontrar uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = Id_A$. Como f é injetiva, podemos definir uma função $g : f(A) \to A$ por $g(y) = x$, onde x é o único elemento de A tal que $f(x) = y$. Se $f(A) = B$, então g está definida. Se $f(A) \neq B$, para completarmos a definição da função $g : B \to A$, basta definirmos, por exemplo, $g(y) = x_0$, para todo $y \in B - f(A)$, onde x_0 é algum elemento fixado em A. Obtemos, assim, a função desejada. Reciprocamente, seja $g : B \to A$ uma inversa à esquerda para f. Dados $x_1, x_2 \in A$, com $f(x_1) = f(x_2)$, temos $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, mostrando que f é injetiva. $\square$

Definição 1.1.9. *Uma função $g : B \to A$ é dita ser uma inversa à direita para uma função $f : A \to B$ se $f \circ g = Id_B$. Dizemos, também neste caso, que f possui uma inversa à direita.*

Exemplo 1.1.12. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$, tem como inversa à direita a função $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \sqrt{y}$, pois, para todo $y \geq 0$, tem-se*

$$f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y,$$

mostrando assim que $f \circ g = Id_{\mathbb{R}_+}$.

Teorema 1.1.2. *Uma função $f : A \to B$ possui inversa à direita se, e somente se, é sobrejetiva.*

Demonstração. Suponha $f : A \to B$ sobrejetiva. Vamos construir uma função $g : B \to A$ tal que $f(g(y)) = y$. Usando a hipótese de que f é sobrejetiva, temos que, para cada $y \in B$, o conjunto $f^{-1}(y) = \{x \in A; f(x) = y\}$, chamado imagem inversa de y, é não vazio. Agora, basta escolher, para cada $y \in B$, um elemento $x \in f^{-1}(y)$ e definirmos $g(y) = x$. Isso define a função g como queríamos. Reciprocamente, seja g tal que $f \circ g = Id_B$. Assim, para cada $y \in B$, escolhendo $x = g(y)$, temos $f(x) = f(g(y)) = y$, ou seja, f é sobrejetiva. □

Observação 1.1.2. *Ao provarmos o Teorema* 1.1.1 *e o Teorema* 1.1.2*, provamos também que uma função $f : A \to B$ possui inversa se, e somente se, é bijetiva. De fato, para que f seja inversível, ela deve ter inversa pela esquerda (ser injetiva) e pela direita (ser sobrejetiva). Reciprocamente, se f é bijetiva, então ela também é injetiva, logo possui uma inversa pela esquerda g e é sobrejetiva, possuindo assim uma inversa pela direita h. Dessa forma $g(f(x)) = x, \forall x \in A$ e $f(h(x)) = x, \forall x \in B$, logo $g(f(h(x))) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = h(x), \forall x \in B$, assim g é a inversa de f.*

1.2 Números Naturais

Nesta seção, faremos uma breve introdução do conjunto dos números naturais, o qual é crucial para o estudo dos conjuntos finitos.

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é descrito pelos seguintes axiomas, conhecidos como *axiomas de Peano*:

1. Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada $n \in \mathbb{N}$ é chamado de sucessor de n;

2. Existe um único número natural, representado pelo símbolo 1, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

3. *(axioma da indução)* Se $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ para cada $n \in X$, tem-se $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Em outras palavras, o primeiro axioma nos diz que todo número natural tem sucessor único, e este também é natural. Além disso, números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. O segundo axioma afirma que o único número natural que não é sucessor de nenhum natural é o número 1 (um). E o último nos diz que, se um subconjunto de números naturais contém o número 1 e além disso, contém cada um dos sucessores dos seus elementos, então esse conjunto é o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

Na verdade, o terceiro axioma, o axioma da indução, nos dá uma regra de como obtermos o conjunto dos números naturais. Basta tomarmos o 1, em seguida, tomarmos o sucessor de 1, depois, o sucessor do sucessor de 1 e assim por diante, ou seja, $\mathbb{N} = \{1, s(1), s(s(1)), ...\}$. Nessa construção axiomática de $\mathbb{N}$, $s(1) = 2$, $s(2) = 3$ e assim sucessivamente. Daí, temos o nosso conhecido conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..\}$.

Além disso, o axioma da indução fornece uma ferramenta prática para tratar do conjunto dos números naturais conhecida pelo nome de *princípio da indução* a qual é consequência imediata do terceiro axioma de Peano. Suponha que queremos demonstrar uma certa propriedade P sobre os números naturais. A ideia sobre a qual o princípio se baseia é a seguinte: basta provar que $P(1)$ é verdadeiro e que a implicação $P(n) \Rightarrow P(s(n))$ é verdadeira, para qualquer $n \in \mathbb{N}$; em outras palavras, a verdade da propriedade $P(n)$ deve ser verificada para $n = 1$ e, em seguida, a implicação $P(n) \Rightarrow P(s(n))$ deve ser demonstrada, ou seja, deve ser demonstrado que supondo que $P(n)$ é verdadeira, obtemos que $P(s(n))$ também é verdadeira.

Teorema 1.2.1. *(Princípio da Indução): Seja $P(n)$ uma propriedade de $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $P(1)$ seja verdadeira e que se $P(n)$ é verdadeira, então $P(s(n))$ também é, para cada n natural. Sendo assim, temos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$ é verdadeira. Então $A \subset \mathbb{N}$ e $1 \in A$, por hipótese. Além disso, por hipótese, $n \in A \Rightarrow s(n) \in A$. Conforme o terceiro axioma de Peano, temos $A = \mathbb{N}$, o que significa que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Neste momento o leitor deve estar se perguntando por que não definimos o sucessor de n como $s(n) = n + 1$. A resposta é simples, ainda não definimos operações com números naturais e é por isso que este será o tema da próxima seção.

1.2.1 Adição, Multiplicação e Ordem

Da mesma forma como tivemos o cuidado em definir o conjunto dos números naturais de maneira formal a partir de axiomas, devemos usar do mesmo formalismo ao definirmos o que se entende por adição e multiplicação entre números naturais. Para isso, utilizaremos o princípio da indução, como segue.

A adição é a operação que associa a cada par de números $n, m \in \mathbb{N}$ sua soma denotada por $m+n$. Para definí-la, primeiro vamos explicitar o que significa adicionar 1. Fixado $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$m + 1 = s(m),$$

ou seja, adicionar 1 ao número natural m é tomar o seu sucessor. Agora, suponha que já tenhamos definido para algum $n \in \mathbb{N}$ a soma $m + n$. Assim, definimos

$$m + s(n) = s(m + n),$$

isto é, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$. Portanto, assumindo que $2 = s(1)$, teremos, por exemplo, que $1 + 2 = 1 + s(1) = s(1 + 1) = s(2) = 3$.

Dessa forma, definindo $A = \{n \in \mathbb{N}; m + n \text{ está definido } \}$, o axioma da indução garante que $A = \mathbb{N}$, o que significa que $m + n$ está definido para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$, a adição possui as seguintes propriedades:

- *Associatividade*: $(m + n) + p = m + (n + p)$;
- *Comutatividade* : $m + n = n + m$;
- *Lei do corte*: $m + n = p + n \Rightarrow m = p$;

Vamos provar apenas a associatividade, as demais demonstrações podem ser encontradas em [9].

Fixando $m, n \in \mathbb{N}$, provaremos que, para todo p natural vale $(m + n) + p = m + (n + p)$. Para isso, vamos usar indução em p.

(i) Se $p = 1$, então $m + (n + 1) = m + s(n) = s(m + n) = (m + n) + 1$, como foi visto na definição da adição.

(ii) Supondo $(m + n) + p = m + (n + p)$ e utilizando a definição da adição, temos $(m+n)+s(p) = s([(m+n)+p])$, que por hipótese é igual a $s([m+(n+p)]) = m+s(n+p)$, que por sua vez é igual a $m+(n+s(p))$. Portanto, pelo Princípio da Indução, $(m + n) + p = m + (n + p), \forall p \in \mathbb{N}$.

Vamos agora definir a multiplicação entre números naturais utilizando o processo indutivo. Para isso, fixado $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$m \cdot 1 = m.$$

Isso nos diz que a multiplicação de um natural por 1 não o altera. Agora, assumindo conhecida a multiplicação $m \cdot n$, definimos

$$m \cdot s(n) = m \cdot n + m.$$

Como exemplo, vamos multiplicar $4 \cdot 2$. Já sabemos que $s(1) = 2$, então, temos que $4 \cdot 2 = 4 \cdot s(1) = (4 \cdot 1) + 4 = 4 + 4 = 8$. Note que usamos o fato de que $4 \cdot 1 = 4$, por definição, e que utilizamos o que aprendemos sobre soma ao operar $4 + 4$.

Usando o Princípio da Indução, como fizemos para o caso da associatividade da adição, podemos provar as seguintes propriedades bem conhecidas do produto de números naturais. Caso o leitor fique interessado, pode obter mais detalhes em [9]. Para todo $m, n, p \in \mathbb{N}$, tem-se que

- *Associatividade*: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$;
- *Comutatividade*: $m \cdot n = n \cdot m$;
- *Lei do corte*: $m \cdot n = p \cdot n \Rightarrow m = p$;
- *Distribuidade*: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.

Agora trataremos sobre um tema bastante relevante no estudo do conjunto dos números naturais: a ordem entre seus elementos.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que $m < n$ (lê-se: m é menor que n) quando existir um natural p tal que $n = m + p$. A notação $m \leq n$ significa que m é menor ou igual a n.

Proposição 1.2.1. *A relação $m < n$ nos naturais possui as seguintes propriedades:*

1. *Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$;*
2. *Tricotomia: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m < n$, $m > n$ ou $m = n$.*

3. *Monotonicidade: Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $m \cdot p < n \cdot p$.*

4. *Boa-ordenação: Se A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, então A possui um menor elemento.*

Aqui vamos provar apenas a quarta propriedade, a boa-ordenação, dada sua importância, já que, em alguns casos, pode substituir o princípio da indução de maneira vantajosa quando queremos demonstrar alguma propriedade dos números naturais. Sugerimos a leitura de [9] para as demais demonstrações.

Queremos provar que se $A \subset \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$, então $\exists n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n; \forall n \in A$. Para isso, vamos primeiro definir um conjunto auxiliar I_n, fazendo $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$, ou seja, I_n é o conjunto dos naturais menores ou iguais a n. Agora, se $1 \in A$, temos que $n_0 = 1$. Se $1 \notin A$, então considere o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A\}$. Note que, por hipótese, $A \neq \emptyset$, daí $X \neq \mathbb{N}$. Como $1 \in X$, pois $1 \notin A$, e $X \neq \mathbb{N}$, então deve existir $p \in X$ tal que $p + 1 \notin X$, pois caso contrário teríamos $X = \mathbb{N}$ devido ao axioma da indução. Logo $I_p \subset \mathbb{N} - A$, mas $n_0 = p + 1 \in A$. Dessa forma, como todos os números naturais menores do que $p + 1$ estão fora de A e $p + 1 \in A$, podemos concluir que de fato $n_0 = p + 1$ é o menor elemento de A.

1.3 Conjuntos Finitos

Na seção anterior nos dedicamos ao estudo dos números naturais e suas propriedades. Ao defini-lo a partir dos axiomas de Peano, os elementos do conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ representam apenas uma sequência de símbolos que, de início, não possuem nenhum significado e que ocupam apenas uma posição nesta sequência, sendo 1 o primeiro, 2 o segundo e assim sucessivamente. Nessa perspectiva, dizemos que os números naturais têm caracteríticas ordinais. Essa ideia aparece, por exemplo, quando estabelecemos uma ordem para os dias da semana em que o domingo é o primeiro dia, a segunda-feira o segundo e assim por diante.

Contudo, quando utilizamos os números em frases como: "tenho *um* carro", "uma semana tem *sete* dias", estamos fazendo uso de outra ideia associada aos números naturais, a de *cardinalidade*, ou seja, como resultado de contagens. Nesse caso, dizemos que os números naturais são *números cardinais*.

Nessa seção abordaremos, com certo rigor matemático, a cardinalidade de conjuntos a partir dos resultados previamente apresentados. Em particular, trataremos da cardinalidade dos conjuntos finitos. Para isso, iniciaremos revisando a definição do conjunto I_n. Vimos que, dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n o conjunto dos números naturais de 1 até n. Mais precisamente, $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$. Dessa forma, por exemplo, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$.

Diz-se que um conjunto X é *finito* quando existe um natural n de modo que seja possível estabelecer uma bijeção $f : I_n \to X$. Neste caso, diremos que o conjunto X possui n elementos, ou ainda, que sua cardinalidade, denotada por $card(X)$, é n, e, escrevemos $card(X) = n$. Para não haver contradições, convencionaremos que o conjunto vazio é finito e que sua cardinalidade é zero, ou seja, $card(\emptyset) = 0$.

De forma intuitiva, percebemos que a correspondência $f : I_n \to X$, de fato, significa a $contagem$ dos elementos do conjunto X. Para isso, podemos por $f(1) = x_1, f(2) = x_2, ..., f(n) = x_n$ de modo que teremos $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Com essa notação conseguimos estabelecer a representação ordinal de um conjunto finito. Mas será que tal função é única? Em outras palavras, será que se contarmos uma coleção de objetos de maneira diferente, utilizando uma ordem diferente, obteremos o mesmo resultado? A resposta nos parece óbvia: claro que sim. Mas na matemática não é possível estabelecer uma verdade apenas usando nossa intuição. É necessário demonstrar toda afirmação que for feita. Com isso, para que o número de elementos de um conjunto não seja uma noção ambígua devemos provar que se existirem duas bijeções $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to X$, então $m = n$. Em suma, iremos demonstrar que o número de elementos de um conjunto é o mesmo, seja qual for a contagem adotada.

Lema 1.3.1. *Se existe uma bijeção $f : X \to Y$ então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe uma bijeção $g : X \to Y$ com $g(a) = b$.*

Demonstração. Se ocorrer de $f(a) = b$, basta tomar $g = f$. Caso contrário, existem $c \in Y$ tal que $f(a) = c \neq b$ e $d \in X - \{a\}$ tal que $f(d) = b$. Agora, basta definirmos $g : X \to Y$ de modo que $g(a) = b$, $g(d) = c$ e $g(x) = f(x)$ para os demais elementos $x \in X$. É fácil notar que g é bijeção. $\square$

Lema 1.3.2. *Se A é um subconjunto próprio de I_n, então não pode existir uma bijeção $f : I_n \to A$.*

Demonstração. Seja $Y = \{n \in \mathbb{N}$; existem $A \subset I_n$, com $A \neq I_n$ e uma bijeção $f : I_n \to A\}$, devemos provar que $Y = \emptyset$. Supondo que $Y \neq \emptyset$, pelo princípio da boa-ordenacão, teríamos que Y possui um menor elemento c e, com isso, haveria um subconjunto próprio A de I_c e também uma bijeção $f : I_c \to A$. Consideremos agora dois casos:

$i.$ Se $c \in A$, pelo Lema 1.3.1, existe uma função bijetiva $g : I_c \to A$ com $g(c) = c$. Neste caso, a função g restrita ao conjunto $I_c - \{c\}$ é, claramente, uma bijeção de $I_{c-1} = I_c - \{c\}$ em $A - \{c\}$, o que contraria a minimalidade de c.

$ii.$ Se $c \notin A$, tomamos $a \in A$ tal que $f(c) = a$. Assim, a função f restrita ao conjunto $I_c - \{c\}$ também será uma bijeção de I_{c-1} em $A - \{a\}$, contrariando mais uma vez o fato de c ser o menor elemento de Y. Logo $Y = \emptyset$.

□

Com esse último resultado, agora é possível provar o que queríamos:

Teorema 1.3.1. *Se existirem n e m naturais tais que $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to X$ são bijeções, então $m = n$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $m \neq n$. Podemos então supor, sem perda de generalidade, que $m > n$. Agora, considere a função $h = g^{-1} \circ f : I_m \to I_n$. Note que, neste caso, temos que h é uma bijeção o que é um absurdo, pois como $m > n$, I_n é subconjunto próprio de I_m e, pelo lema anterior, não pode haver uma bijeção entre I_m e um subconjunto próprio seu. □

Corolário 1.3.1. *Sejam X e Y finitos. Dessa forma, existe uma bijeção entre X e Y se, e somente se, $card(X) = card(Y)$.*

Demonstração. Como X e Y são finitos, por definição, existem as funções bijetivas $\gamma : I_n \to X$ e $\delta : I_m \to Y$, onde $n = card(X)$ e $m = card(Y)$. Suponha que exista uma função $f : X \to Y$ bijetiva. Portanto, $f \circ \gamma : I_n \to Y$ é bijetiva, o que nos diz que $m = n$. Reciprocamente, se $card(X) = card(Y) = n$, existem bijeções $\gamma : I_n \to X$ e $\theta : I_n \to Y$. Logo, a composição $\theta \circ \gamma^{-1} : X \to Y$ é uma bijeção. □

A seguir, continuaremos apresentando alguns dos principais resultados que caracterizam os conjuntos finitos.

Corolário 1.3.2. *Não existe uma bijeção $f : Y \to X$ entre um conjunto finito X e um subconjunto próprio Y.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista $f : Y \to X$, bijeção. Como X é finito, existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $g : I_n \to X$. Então, o conjunto $A = g^{-1}(Y)$ é parte própria de I_n. Note que a função $g|_A : A \to Y$, isto é, a função g restrita ao conjunto A, é uma bijeção de A em Y. Assim, a composição $h = g_{|_A}^{-1} \circ f^{-1} \circ g : I_n \to A$ será uma bijeção de I_n em um subconjunto próprio A, contradizendo o Lema 1.3.2. □

Exemplo 1.3.1. *O conjunto $\mathbb{N}$ não é finito. De fato, seja P o conjuto dos números naturais pares. A função $f : \mathbb{N} \to P$, definida por $f(n) = 2n$ é uma bijeção. Logo, como P é subconjunto próprio de $\mathbb{N}$, do corolário anterior, segue que $\mathbb{N}$ não é finito.*

Intuitivamente, somos levados a pensar que a não existência de uma bijeção entre um conjunto e um subconjunto próprio se deve ao fato de que este possui menos elementos que aquele. Mas até agora não provamos esta afirmação, que, de fato, é intuitivamente trivial, mas deve ser demonstrada formalmente. E é o que vamos fazer agora. Além disso, nos aprofundaremos um pouco sobre a cardinalidade dos conjuntos finitos trazendo alguns resultados que julgamos mais importantes para o nosso contexto.

Teorema 1.3.2. *Se X é um conjunto finito, então todo subconjunto $Y \subset X$ também é finito. O número de elementos de Y não excede o de X, ou seja, $card(Y) \leq card(X)$.*

Demonstração. Se X é finito, então existe uma bijeção $\delta : I_n \to X$. Se $Y \subset X$, então $\delta^{-1}(Y) \subset I_n$ e $\delta|_{\delta^{-1}(Y)} : \delta^{-1}(Y) \to Y$ é uma bijeção. Portanto, podemos supor que $X = I_n$ e $Y \subset I_n$. Vamos então aplicar indução em n. O caso $n = 1$ é trivial, já que, os únicos subconjuntos do conjunto I_1 são o $\emptyset$ e ele próprio. Suponha o resultado válido para I_n e considere Y um subconjunto próprio de I_{n+1}. Vamos considerar dois casos:

1° Caso: Se tivermos $Y \subset I_n$, então não há o que provar, já que, por hipótese de indução, Y é finito e $card(Y) \leq card(I_n) = n < n + 1$.

2° Caso: Se $n + 1 \in Y$, tomemos o conjunto $Y' = Y - \{n + 1\}$. Note que $Y' \subset I_n$ e, por hipótese, existe uma bijeção $f : I_k \to Y'$, com $k \leq n$. Agora, defina a bijeção $g : I_{k+1} \to Y$ pondo $g(k + 1) = n + 1$ e $g(x) = f(x)$ para os elementos de I_k. Daí, temos que Y é finito e $card(Y) \leq k + 1$. Mas $k \leq n$ e, consequentemente, $k + 1 \leq n + 1$. □

Definição 1.3.1. *Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é limitado quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p$ para todo $x \in X$.*

Corolário 1.3.3. *Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.*

Demonstração. Com efeito, seja $X = \{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto finito, e seja

$$p = x_1 + ... + x_n.$$

Então $p > x_i$ para todo $i = 1, ..., n$, ou seja, X é limitado. Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{N}$ é limitado então $X \subset I_p$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Segue-se então, do Teorema 1.3.2, que X é finito. □

Corolário 1.3.4. *Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva. Se Y for finito, então X também será. Além disso, $card(X) \leq card(Y)$.*

Demonstração. Como f é injetiva, a função $f : X \to f(X)$ é uma bijeção. Sabe-se que $f(X)$ é finito, pois se trata de um subconjunto de Y que, por hipótese, é finito. Portanto, concluimos que X também é finito. Além disso, o número de elementos de $f(X)$ é igual ao número de elementos de X e, como $f(X) \subset Y$, pelo Teorema 1.3.2, concluimos que $card(X) = card(f(X)) \leq card(Y)$. □

Esse último corolário talvez tenha mais aplicabilidade se observarmos sua contrapositiva: Se $card(X) > card(Y)$, então não existe uma função injetiva $f : X \to Y$. Na verdade, este resultado é conhecido como o *princípio das casas dos pombos (ou das gavetas)* e pode ser redigido de modo mais compreensível da seguinte maneira: Se há mais pombos do que casas em um pombal, qualquer modo de alojar os pombos deverá colocar pelo menos dois deles na mesma casa.

Por mais simples que seja, o princípio das casas dos pombos é um instrumento de grande valia para a resolução de problemas de contagem. Vejamos um exemplo bastante famoso.

Exemplo 1.3.2. *Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos dois destes pontos estão a uma distância menor do que ou igual a* $\sqrt{2}$.

Solução: Vamos dividir o quadrado em outros quatro quadrados de lado 1, como mostra a figura abaixo:

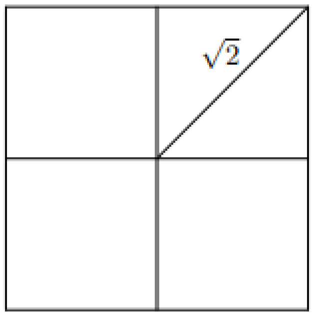


Figura 1.2: Quadrado de lado 2 e subquadrados de lado 1.

Como temos 5 pontos para serem distribuidos em 4 quadrados, pelo princípio das casas dos pombos, podemos afirmar que um dos quadrados terá pelo menos dois pontos. Como a distância entre dois pontos dentro de um quadrado não será maior do que a medida de sua diagonal, o resultado está provado.

Corolário 1.3.5. *Seja* $g : X \to Y$ *uma função sobrejetiva. Se* X *for finito, então* Y *também será. Além disso,* $card(Y) \leq card(X)$.

Demonstração. Como $g : X \to Y$ é sobrejetiva, então, pelo Teorema $1.1.2$, ela possui uma inversa à direita, ou seja, existe uma função $f : Y \to X$ tal que $g(f(y)) = y, \forall y \in Y$, logo g é uma inversa à esquerda para f, assim f é injetiva. Daí, pelo corolário anterior, Y é um conjunto finito e $card(Y) \leq card(X)$. □

Um outro resultado importante para nosso estudo dos conjuntos finitos, ainda relacionado às funções injetivas e sobrejetivas, é que:

Teorema 1.3.3. *Se* X *e* Y *são conjuntos finitos tais que* $card(X) = card(Y)$, *então uma função* $f : X \to Y$ *é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.*

Demonstração. Suponha que $f : X \to Y$ seja injetiva, mas não sobrejetiva. Com isso, $f(X)$ é um subconjuto próprio de Y. Note também que $g = f : X \to f(X)$ é uma bijeção, pois, como f é injetiva por hipótese, g também o é. E é sobrejetiva, já que seu conjunto imagem é o próprio contradomínio. Além disso, pelo Corolário $1.3.1$, existe uma bijeção $h : Y \to X$. Portanto a composição $g \circ h : Y \to f(X)$ é uma bijeção, mas, pelo Corolário $1.3.2$, isso é um absurdo. Reciprocamente, suponha que $f : X \to Y$ seja sobrejetiva, mas não injetiva. Como f é sobrejetiva, para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, por isso, podemos definir a função $\delta : Y \to X$ pondo para cada $y \in Y$, $\delta(y) = x$, onde x é tal que $f(x) = y$. Note que δ é injetiva, mas não sobrejetiva. É injetiva, porque, caso contrário, f não seria função. E não é sobrejetiva, já que, tomados a, $b \in X$ tais que $f(a) = f(b)$ teremos que um dos dois não estará na imagem de δ, pois, caso contrário, δ não seria função. Com isso, o resultado segue da primeira parte. $\square$

Ainda falando sobre cardinalidade, um problema a ser destacado é encontrar o número de subconjuntos distintos de um conjunto finito com cardinalidade n. Esse já é um resultado bastante conhecido e que pode ser proposto, sem maiores dificuldades, para um aluno do ensino médio como um problema de contagem. Contudo vamos dar a ele uma demonstração indutiva. Para isso, apresentaremos a definição do conjunto denotado por $\mathcal{P}(A)$, o qual chamaremos de conjunto das partes de A, onde A é um conjunto finito. Mas, antes disso, teremos que aprender como calcular a cardinalidade da união entre dois conjuntos finitos disjuntos. Como vocês já devem estar pensando, esse é um outro resultado já conhecido de todos, basta somarmos a cardinalidade dos dois conjuntos.

Teorema 1.3.4. *Considere dois conjuntos finitos e disjuntos X e Y, com $card(X) = m$ e $card(Y) = n$. Então, a união $X \cup Y$ é um conjunto finito e $card(X \cup Y) = m+n$.*

Demonstração. Considere bijeções $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to Y$, e defina a função $h : I_{m+n} \to X \cup Y$ pondo

$$h(k) = \begin{cases} f(k) & \text{, se } 1 \leq k \leq m \\ g(k-m) & \text{, se } m+1 \leq k \leq m+n \end{cases}$$

Como f e g são bijeções e $X \cap Y = \emptyset$, segue que h também é bijeção, mostrando que $X \cup Y$ é finito, com $card(X \cup Y) = m + n$. □

Definição 1.3.2. *Dado um conjunto finito A, denotamos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A. Tal conjunto é chamado de conjunto das partes de A.*

Exemplo 1.3.3. *Seja $A = \{0, 1, 2\}$, então*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

Vejamos agora qual a cardinalidade do conjunto $\mathcal{P}(A)$.

Teorema 1.3.5. *Seja A um conjunto finito, com $card(A) = n$, então*

$$card(\mathcal{P}(A)) = 2^n. \tag{1.1}$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução em n.

Para $n = 1$, digamos $A = \{a\}$, temos que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$, portanto $card(\mathcal{P}(A)) = 2 = 2^1$, logo a Igualdade (1.1) é válida para $n = 1$.

Suponha agora que (1.1) seja verdadeira para qualquer conjunto com cardinalidade n. Vamos provar que ela também é válida para $n + 1$. Para isso, considere o conjunto $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$, com $n + 1$ elementos. Defina $\mathcal{P}'(A)$ como sendo o subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formados por aqueles subconjuntos de A que possuem o elemento a_{n+1}. Portanto

$$\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}) \cap \mathcal{P}'(A) = \emptyset$$

e

$$\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}) = \mathcal{P}(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}) \cup \mathcal{P}'(A),$$

portanto, pelo teorema anterior, temos que

$$card(\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\})) = card(\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\})) + card(\mathcal{P}'(A)).$$

Note agora que os elementos de $\mathcal{P}'(A)$ são da forma $B \cup \{a_{n+1}\}$, para algum $B \in \mathcal{P}(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\})$, portanto $\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ e $\mathcal{P}'(A)$ têm o mesmo número de elementos.

Como $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ tem n elementos, por hipótese de indução,

$$card(\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}) = 2^n$$

e, portanto

$$card(\mathcal{P}(\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}) = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

E com isso concluímos a demonstração. $\square$

Com esse teorema, podemos comparar a cardinalidade de um conjunto finito A e a cardinalidade do conjunto formado pelos seus subconjuntos, isto é, $\mathcal{P}(A)$.

Teorema 1.3.6. *Dado um conjunto finito A, temos $card(\mathcal{P}(A)) > card(A)$.*

Demonstração. Se um conjunto finito A possui n elementos, provamos que a cardinalidade do conjunto $\mathcal{P}(A)$ é igual a $2^{card(A)} = 2^n$. Com isso, basta agora provarmos que $2^n > n$, para todo n natural. Considere

$$Q(n) : 2^n > n.$$

Vamos usar o princípio de indução em n.

Inicialmente, observe que $Q(1)$ é verdadeira, já que, $2^1 = 2 > 1$. Considere que $Q(n)$ seja verdadeira e provemos que $Q(n+1)$ também o é. De fato, por hipótese de indução, temos que $2^n > n$. Multiplicando 2 em ambos os membros, ficamos com $2^{n+1} > 2n$. Mas é fácil ver que $2n = n + n \geq n + 1$, para todo $n \geq 1$. Portanto, $2^{n+1} > 2n \geq n + 1 \Rightarrow 2^{n+1} > n + 1$ e, portanto, $Q(n+1)$ é verdadeira. Assim, pelo princípio de indução, $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow card(\mathcal{P}(A)) > card(A)$. $\square$

Capítulo 2

Conjuntos Infinitos

Neste capítulo falaremos sobre os conjuntos infinitos, dando destaque aos conjuntos infinitos enumeráveis. Apresentaremos alguns resultados interessantes sobre eles, os quais evidenciam suas diferenças em relação aos conjuntos finitos.

Este capítulo foi elaborado a partir das seguintes referências bibliográficas: [4], [6], [8], [11], [12], [15] e [18].

Definição 2.0.1. *Um conjunto X é dito infinito quando não é finito. Isto é, se X não é vazio e não importando qual seja $n \in \mathbb{N}$, não existe bijeção $f : I_n \to X$.*

Exemplo 2.0.1. *De posse de tal definição, nos é oportuno dar uma nova demonstração da infinitude do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. De fato, dada qualquer função $f : I_n \to \mathbb{N}$, não importa qual n se fixou, podemos tomar $k = f(1) + f(2) + ... + f(n)$ e observar que, para todo $x \in I_n$, tem-se que $f(x) < k$, logo não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$. Assim, f não pode ser sobrejetiva, logo, $f : I_n \to \mathbb{N}$ não é bijeção.*

Euclides (c.350-275 a.C.) também deu sua contribuição ao universo dos conjuntos infinitos quando provou que o conjunto dos números primos é infinito. O exemplo a seguir trata-se da demonstração parafraseada dada por ele em sua obra "OS ELEMENTOS".

Exemplo 2.0.2. *O conjunto dos números primos é infinito.*

De fato, tomemos $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um conjunto finito de números primos quaisquer. Consideremos então o número

$$N = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n + 1$$

que é um inteiro maior que 1, portanto, pelo Teorama Fundamental da Aritmética, ou é primo, ou é divisível por um primo. Como $x_1, x_2, ..., x_n$ não dividem N, pois, caso contrário, também dividiriam 1, temos que N é um número primo que não está em nossa lista, já que $N \neq x_i$, para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Logo, podemos concluir que um conjunto finito não pode conter todos os números primos e, portanto, não existe uma função bijetiva de I_n sobre o conjunto dos números primos, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Contudo nem sempre é fácil provar que um conjunto é infinito usando apenas a Definição $2.0.1$. Por isso, para nos ajudar nessa tarefa, apresentaremos alguns resultados que caracterizam esse tipo de conjunto.

Teorema 2.0.1. *Se X é um conjunto infinito, então existe uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

Demonstração. Vamos definir recursivamente uma função injetiva $f : \mathbb{N} \to X$. Fixado um elemento x_1, o que é possível, pois $X \neq \emptyset$, defina $f(1) = x_1$. Agora, suponha que já tenhamos definido $f(1), f(2), f(3), ..., f(n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Como X é infinito, temos que $A = X - \{f(1), f(2), f(3), ..., f(n)\} \neq \emptyset$. Assim, podemos escolher $y \in A$ tal que $f(n+1) = y$. Com isso, fica definida uma função $f : \mathbb{N} \to X$. Note que $f(n+1) \in A, \forall n \in \mathbb{N}$, o que garante a injetividade de f. $\square$

Corolário 2.0.1. *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\theta : X \to Y$ onde Y é um subconjunto próprio de X.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, se X é infinito existe uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \to X$. Escrevamos então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n$. Tomemos agora o subconjunto próprio de X, $Y = X - \{x_1\}$. Defina a função $\theta : X \to Y$ pondo $\theta(x) = x$ se x não for um dos x_n e $\theta(x_n) = x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que θ é uma bijeção. De fato, sejam $x, y \in X$. Se x for um dos x_n, digamos x_{n_1}, e o outro, no caso o y, não for, então $\theta(y) = y \notin \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \cdots\}$, logo $\theta(x) = x_{n_1+1} \neq y = \theta(y)$. Os outros casos, ou seja, $x, y \in \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ e $x, y \notin \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ são imediatos. Portanto, θ é uma função injetiva. Agora, seja $z \in Y$. Se $z \in \{x_2, x_3, x_4, \cdots\}$, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $z = x_{n_1+1}$, logo $z = \theta(n_1)$. Se $z \notin \{x_2, x_3, x_4, \cdots\}$, então $\theta(z) = z$. Com isso, θ também é sobrejetiva e, portanto, bijetiva. Reciprocamente, pelo Corolário 1.3.2, não pode existir uma bijeção entre um conjunto finito e um subconjunto próprio, portanto, se tomarmos como hipótese a existência da bijeção $\theta : X \to Y$, concluimos que X só pode ser infinito. $\square$

Note que, em virtude do corolário acima, um fato curioso que nos é imposto é que nos conjuntos infinitos não é verdade que o conjunto todo é "maior" que qualquer de suas partes própria. Segundo Pimentel ([15]), este fato intrigou grandes estudiosos antigos, a exemplo de Galileu (1564-1642) que não admitia, por exemplo, que seria possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais e o conjunto de todos os seus quadrados e, ao achar isso paradoxal e incompreensível, abandonou, por um certo período, o estudo sobre o tema. Entretanto, Cantor, em 1878, provou, de forma simples, que ele estava errado. É o que mostraremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.0.3. *A função $f : \mathbb{N} \to X = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$, definida como $f(n) = n^2$, é bijetiva. De fato, é injetiva, pois dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, com $f(n_1) = f(n_2)$, tem-se $f(n_1) = {n_1}^2$ e $f(n_2) = {n_2}^2$, assim, ${n_1}^2 = {n_2}^2$ e, portanto, $n_1 = n_2$, pois $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. E é sobrejetiva, pois dado $x \in X$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n = \sqrt{x}$, tal que $x = f(n)$. Portanto, apesar de X ser um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$, "há tantos elementos em X como em $\mathbb{N}$".*

Um outro aspecto curioso sobre os conjuntos infinitos diz respeito às funções $f : X \to X$ de um conjunto em si mesmo. No capítulo anterior, em decorrência do Teorema 1.3.3, vimos que se X é finito, f é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva. Isto não ocorre se X for infinito. A exemplo, se definirmos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) =$ "número de fatores primos distintos que ocorrem na decomposição de n", veremos que f é sobrejetiva, mas não é injetiva (para cada $b \in \mathbb{N}$ existe uma infinidade de números n tais que $f(n) = b$). Ademais, a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $g(n) = n + 1$, é injetiva, mas não é sobrejetiva, pois o 1 não pertence a imagem de g. Essa e outras funções fazem parte de uma curiosa história que nos deixará mais fascinados pelo mundo dos conjuntos infinitos.

O Hotel de Hilbert

O Grande Hotel de Hilbert, situado em Infinitópolis, tem um número infinito de quartos, um para cada número natural. Um dia, estando os quartos todos ocupados, chegou um viajante que pretendia passar o final de semana nesse hotel. Contudo, a recepcionista não quis hospedá-lo dizendo:

- Perdoe-me senhor, mas não há mais vagas.

O viajante então pediu para falar com o gerente do hotel para tentar arranjar uma solução, visto que não existia mais nenhum hotel em Infinitópolis. O gerente, muito esperto, então lhe respondeu :

-Claro que podemos abrigar o senhor.

Então ordena à recepcionista:

- Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante, de modo que, quem estiver no quarto n, mude para o quarto $n + 1$. Isto manterá todos alojados e deixará o quarto 1 vago para o viajante.

No dia seguinte, aparecere um ônibus com 50 alunos de uma excursão escolar para também se instalarem no hotel. A recepcionista, a exemplo do seu chefe, entendeu que bastava mudar os hóspedes de cada quarto para o quarto com um número superior em 50 unidades, ou seja, o hóspede de cada quarto n passou para o quarto $n + 50$ e acolheu assim todos os alunos do ônibus.

Logo em seguida, chegou uma excursão com um número infinito de turistas, tantos quantos os números naturais, pedindo alojamento. A recepcionista dessa vez não soube o que fazer e foi consultar o gerente:

-Sr. Gerente, já entendo como é que no Hotel Infinito se resolve o problema sempre que há um número finito de novos hóspedes, mas será possível arranjar espaço para um número infinito deles, isto é, tantos quantos os quartos que temos já ocupados?

Responde então o gerente:

- Claro! Mudamos os hóspedes de cada quarto para outro com um número duas vezes superior, isto é, passamos o hóspede do quarto n para o quarto $2n$.

Abismada, diz a recepcionista:

-Claro! Desse modo mudamos os hóspedes todos para os quartos com número par, o que deixa vagos todos os quartos com número ímpar, que são em número infinito, tantos quantos os turistas!

Percebam que, na última situação em que o gerente disponibiliza um número infinito de quartos, ele precisou encontrar uma correspondência biunívoca entre os números naturais e os números pares, o que se trata de uma ideia contra intuitiva, visto que, ao analisarmos, em vista ao senso comum, imaginamos, de forma equivocada, que a quantidade de números naturais é o dobro da dos números pares.

Além disso, notem ainda que, na primeira e na segunda situações, a história nos mostra que ao retirarmos uma quantidade finita de elementos de um conjunto infinito ainda encontramos um novo conjunto infinito. Este resultado segue do teorema a seguir:

Teorema 2.0.2. *Se um conjunto Z tem um subconjunto infinito X, então Z também é um conjunto infinito.*

Demonstração. Se Z fosse um conjunto finito, então, pelo Teorema $1.3.2$, todo subconjunto de Z seria finito, o que contradiz a hipótese de X ser infinito. Logo, Z não pode ser finito. $\square$

Segue imediatamente do teorema anterior, que a união entre um conjunto infinito com um conjunto finito e a união de conjuntos infinitos são ambos conjuntos infinitos.

Para mais, provemos que se caso retirarmos um número finito de elementos de um conjunto infinito, ainda obteremos um conjunto infinito. De fato, seja X um conjunto infinito e A um conjunto finito. Como

$$X = (X - A) \cup A,$$

$X - A$ é um conjunto infinito, pois do contrário X também seria finito, por ser a união de dois conjuntos finitos, o que contradiz a hipótese.

Exemplo 2.0.4. *Os conjuntos $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, $\mathbb{Q}$ dos números racionais, $\mathbb{R}$ dos números reais e $\mathbb{C}$ dos números complexos são todos infinitos, pois o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito e*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

2.0.1 Conjuntos Infinitos Enumeráveis

Intuitivamente, um conjunto é enumerável quando seus elementos podem ser "ordenados" em uma lista de modo que qualquer elemento do conjunto possa ser alcançado se avançarmos o suficiente nessa lista. Para entendermos melhor este conceito, vamos apresentar o seguinte exemplo bem simplista. Dado o conjunto $\{5, 7, 8\}$ podemos enumerar seus elementos colocando o 5 como o primeiro da lista, o 7 como o segundo e o 8 como o terceiro. De modo análogo, podemos estender este raciocínio para os conjuntos infinitos, por exemplo, se tomarmos o conjunto dos números inteiros negativos podemos enumerá-los pondo o -1 como o primeiro elemento, o -2 como o segundo e assim por diante. Note que, listar os elementos de um conjunto para caracterizá-lo como enumerável, significa que existe uma bijeção entre os elementos desse conjunto e o conjunto dos naturais que tomam nessa situação a função ordinal. Vamos a definição formal:

Definição 2.0.2. *Um conjunto X é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. No segundo caso, X é chamado de infinito enumerável e, pondo $x_1 = f(1)$, $x_2 = f(2)$,..., $x_n = f(n)$, ... temos $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$. Cada bijeção $f : \mathbb{N} \to X$ é chamado de uma enumeração (dos elementos) de X.*

Portanto, se um conjunto X for infinito e enumerável, podemos indexar os elementos de X usando os números naturais como índices.

Pelas propriedades das bijeções vistas na Seção 1.1, é claro que X é infinito enumerável se, e somente se, existe uma bijeção de X sobre $\mathbb{N}$. Outrossim, X é infinito enumerável se, e somente se, existe uma bijeção de X sobre um conjunto Y que é infinito enumerável. De modo mais geral, X é enumerável se, e somente se, existe uma bijeção de X sobre um conjunto Y enumerável.

Para ilustrar a ideia desse tipo de conjunto, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.0.5. *O conjunto dos números naturais ímpares $I = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ é infinito enumerável.*

De fato, é imediato que a função $f : \mathbb{N} \to I$, definida por $f(n) = 2n - 1$, é uma bijeção.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots \end{array}$$

Figura 2.1: Enumeração do conjunto dos números ímpares.

De forma análoga, se P denota o conjunto constituído dos números pares, a função $f : \mathbb{N} \to P$, dada por f$(n) = 2n$ é bijetiva. Logo o conjunto P é enumerável.

Exemplo 2.0.6. *O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável.*

Primeiro, é interessante vermos uma maneira intuitiva de como enumerar os elementos de $\mathbb{Z}$. Podemos dispor todos os números inteiros iniciando com o número zero, em seguida o número 1, depois o -1, 2, -2, e assim sucessivamente, sempre alternando um número positivo e um negativo como mostra lista abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & 5 & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \end{array}$$

Figura 2.2: Enumeração do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

Deste modo, qualquer número inteiro, positivo ou negativo, será alcançado se avançarmos o suficiente nessa lista.

A enumeração acima é formalizada pela função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, se } n \text{ for par} \\ \frac{1-n}{2} & \text{, se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Vamos provar primeiro que f é injetiva. Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, com $n_1 \neq n_2$. Devemos analisar três casos distintos:

1º Caso: Suponha n_1 ímpar e n_2 par. Pela definição de f, $f(n_1) \leq 0$ e $f(n_2) > 0$. Portanto, $f(n_1) \neq f(n_2)$.

2º Caso: Suponha n_1 e n_2 pares. Segue que

$$\frac{n_1}{2} \neq \frac{n_2}{2} \Leftrightarrow f(n_1) \neq f(n_2).$$

3º Caso: Suponha n_1 e n_2 ímpares. Segue que

$$\frac{1-n_1}{2} \neq \frac{1-n_2}{2} \Leftrightarrow f(n_1) \neq f(n_2).$$

Portanto, como em todos os casos temos $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$, mostramos que f é injetiva. Agora vamos provar a sobrejetividade de f. Seja $a \in \mathbb{Z}$ qualquer. Vamos demonstrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = a$. Vamos dividir essa tarefa em dois casos:

1º Caso: Se $a > 0$, então $2a \in \mathbb{N}$, e

$$f(2a) = \frac{2a}{2} = a.$$

2º Caso: Se $a \leq 0$, então $-2a \geq 0$ e $1 - 2a$ é um número natural ímpar. Segue que

$$f(1-2a) = \frac{1-(1-2a)}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

Portanto, f é sobrejetiva.

Logo, como f é injetiva e sobrejetiva, provamos que f é bijetiva.

Podemos também verificar que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável, mas para isso precisamos de outros resultados que serão mostrados a seguir.

Teorema 2.0.3. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Se X é finito então não há nada a mostrar, pois, por definição, ele é enumerável. Se X é infinito, definimos uma bijeção f de $\mathbb{N}$ sobre X pondo $f(1) = x_1$, onde x_1 é o menor elemento de X, $f(2) = x_2$, sendo x_2 o menor elemento de $X - \{x_1\}$, e assim por diante. Isto é, supondo que $f(1) = x_1, ..., f(n) = x_n$ tenham sido definidos, com $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$, definimos $f(n+1) = x_{n+1}$, onde x_{n+1} é o menor elemento de $X - \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Vamos provar que $f : \mathbb{N} \to X$, assim definida, é uma bijeção. Note que, f é injetiva, pois $f(m) < f(n)$, se $m < n$. Em particular, $f(\mathbb{N})$ é um conjunto infinito enumerável, pois f é uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre $f(\mathbb{N})$. Por outro lado, se houvesse $x \in X$ tal que $x \notin f(\mathbb{N})$, então x seria necessariamente maior que todos os elementos de $f(\mathbb{N})$ e, portanto, o conjunto infinito $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ seria limitado, uma contradição, em vista do Corolário 1.3.3. $\square$

Exemplo 2.0.7. *O conjunto dos números primos é infinito (fato já demonstrado) e enumerável, pois é um subconjunto dos naturais.*

Corolário 2.0.2. *Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável, ou ainda: se $f : X \to Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável.*

Demonstração. Se Y é enumerável, por definição, existe uma bijeção $g : \mathbb{N} \to Y$. Consideremos a função $h = g^{-1} \circ f : X \to \mathbb{N}$. Como f e g são injetivas, a composição $h = g^{-1} \circ f$ também o será. Portanto, a função

$$h' : X \to h(X) \subset \mathbb{N}$$

é uma bijeção.

Como $h(X) \subset \mathbb{N}$, ele é enumerável. Logo, X é enumerável. □

Corolário 2.0.3. *Seja X um conjunto enumerável. Se $f : X \to Y$ é sobrejetiva, então Y é enumerável.*

Demonstração. Como $f : X \to Y$ é sobrejetiva, f possui uma inversa à direita, ou seja, existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = Id_Y$. Portanto, dados $y_1, y_2 \in Y$, com $y_1 \neq y_2$, teremos $g(y_1) \neq g(y_2)$. De fato, caso fosse $g(y_1) = g(y_2)$, então

$$y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2,$$

o que contradiz a hipótese $y_1 \neq y_2$. Portanto, g é injetiva, e como X é enumerável, segue, do Corolário 2.0.2, que Y é enumerável. □

Exemplo 2.0.8. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *é enumerável.*

Daremos aqui duas demonstrações diferentes desse fato.

A primeira consiste na ideia intuitiva de como enumerar o conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados (a, b), com $a, b \in \mathbb{N}$. Para isso, disponha os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ da forma abaixo (na n-ésima linha colocamos todos os elementos do produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cuja primeira coordenada é n, ou seja, elementos da forma (n, j), onde $j = 1, 2, \cdots$):

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(1,1) & \rightarrow & (1,2) & & (1,3) & \rightarrow & (1,4) & & (1,5) & & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \ldots \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (2,5) & & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \ldots \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & & (3,5) & & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \ldots \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & & (4,5) & & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \ldots \\
(5,1) & & (5,2) & & (5,3) & & (5,4) & & (5,5) & & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Figura 2.3: Enumeração do conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

A partir do elemento $(1,1)$ seguimos as setas para obter o elemento seguinte de modo a seguir a lista abaixo:

$$(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(2,2),(1,3),(1,4),(2,3),\cdots. \tag{2.1}$$

Com isso, definimos uma função $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que leva o n-ésimo elemento de (2.1) no número inteiro positivo n. A construção da função nos indica que ela é injetiva, portanto, pelo Corolário 2.0.2, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. É claro que falta um pouco de formalismo devido a dificuldade de descrever formalmente a sequência (2.1).

A outra maneira de provarmos esse resultado é a seguinte:

Seja $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $\phi(m,n) = 2^m.3^n$. Temos que

$$\phi(m_1,n_1) = \phi(m_2,n_2) \Rightarrow 2^{m_1}3^{n_1} = 2^{m_2}3^{n_2}.$$

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, a decomposição em fatores primos de um número natural é única, logo, de $2^{m_1}3^{n_1} = 2^{m_2}3^{n_2}$, segue que $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$, isto é,

$$\phi(m_1,n_1) = \phi(m_2,n_2) \Rightarrow (m_1,n_1) = (m_2,n_2).$$

Logo, ϕ é injetiva e, pelo Corolário 2.0.2, concluimos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Note que na definição de ϕ poderíamos ter tomado dois primos quaisquer, ao invés de 2 e 3.

Teorema 2.0.4. *Se X e Y são enumeráveis, então o produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Demonstração. Se X e Y são enumeráveis, então existem as bijeções $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$. Defina a função $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$, dada por $\phi(m, n) = (f(m), g(n))$. Como f e g são sobrejetivas, então ϕ também será. Portanto, visto que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, pelo Corolário 2.0.3, $X \times Y$ é enumerável. $\square$

Temos ainda um outro resultado bastante significativo a respeito dos conjuntos infinitos enumeráveis.

Corolário 2.0.4. *Sejam X_1, X_2, $X_3, \cdots, X_n, \cdots$ conjuntos enumeráveis. A união $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \cdots \cup X_n \cup \cdots = \cup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ é enumerável.*

Demonstração. Em vista do Corolário 2.0.3, precisamos apenas mostrar que existe uma função sobrejetiva de um conjunto enumerável sobre X. Como X_1, X_2, $X_3, \cdots$, $X_n, \cdots$ são conjuntos enumeráveis, então existem bijeções $f_1 : \mathbb{N} \to X_1$, $f_2 : \mathbb{N} \to X_2, \cdots$, $f_n : \mathbb{N} \to X_n, \cdots$. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ fazendo

$$f(m, n) = f_n(m).$$

Note que f é sobrejetiva, pois dado $x \in X$, então $x \in X_n$ para algum n, portanto, como f_n é sobrejetiva, $x = f_n(m) = f(m, n)$, para algum m. Sendo f sobrejetiva e como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, concluimos que X é enumerável. $\square$

Exemplo 2.0.9. *O conjunto*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

dos números racionais é enumerável.

De fato, como $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ são enumeráveis, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, em consequência do Teorema 2.0.4, é também enumerável. A função $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, definida por

$$\phi(m, n) = \frac{m}{n}$$

é claramente sobrejetiva, logo, pelo Corolário 2.0.3, concluimos que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Agora, vamos dar uma justificativa intuitiva para a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$.

Resgatando a ideia intuitiva de conjunto enumerável, você pode se perguntar: Como listar os elementos de $\mathbb{Q}$?

A figura abaixo vai nos ajudar a responder essa pergunta. Ela foi mencionada nos estudos do matemático Cantor e, por isso, ganhou o nome de "O passeio de Cantor".

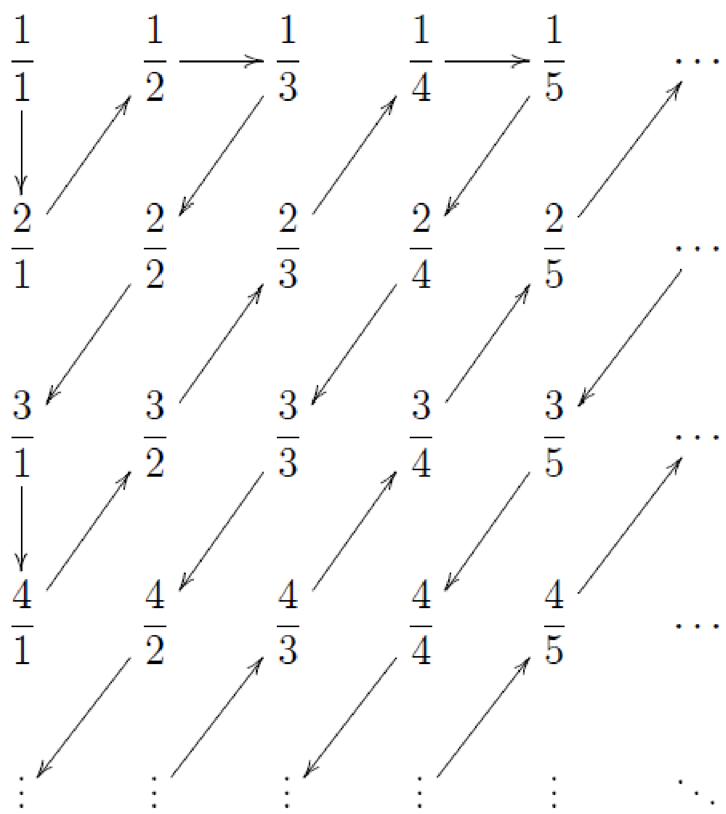


Figura 2.4: O passeio de Cantor.

Note que, como mostra a figura, Cantor conseguiu "ordenar" todos os elementos positivos de $\mathbb{Q}$, representados aqui por $\mathbb{Q}_+$. Ao fazer isso ele pôde estabelecer uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ tal que: $f(1) = \frac{1}{1}$, $f(2) = \frac{2}{1}$, $f(3) = \frac{1}{2}$, $f(4) = \frac{1}{3}$, $\cdots$ e assim por diante. Deste modo, pelo Corolário 2.0.3, Cantor concluiu que $\mathbb{Q}_+$ é enumerável. Mas ainda não finalizamos nossa demonstração. Queremos provar que $\mathbb{Q}$ é enumerável e não apenas $\mathbb{Q}_+$. Entra em cena o Corolário 2.0.4. Podemos, de forma semelhante, provar que $\mathbb{Q}_-$ é enumerável. Como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$ e a união entre conjuntos enumeráveis é enumerável, concluimos que o conjunto dos números racionais é enumerável.

A esse ponto alguns leitores devem estar pensando que todos os conjuntos são enumeráveis. Contudo Cantor provou que existem outros conjuntos infinitos que não podem ser indexados com os elementos do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. A esses deu o nome de conjuntos não enumeráveis. Mas esse é um tema para o próximo capítulo.

Capítulo 3

Comparando a Cardinalidade dos Conjuntos Infinitos

O conceito de cardinalidade de conjuntos, em primeira análise, trata-se de algo muito simples. Como vimos, no primeiro capítulo, para descobrirmos a cardinalidade de um conjunto finito utilizamos a noção de bijeção. Em particular, dizemos que um conjunto finito A tem cardinalidade igual a n se, e somente se, houver uma função bijetiva $f : I_n \to A$, com $n \in \mathbb{N}$. Em suma, caso queiramos comparar a cardinalidade entre dois conjuntos finitos, basta analisarmos a quantidade de elementos de cada um deles. Por exemplo, se tomarmos os conjutos $A = \{x, y, w, z\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}; 5 \leq x \leq 10\}$ diremos que $card(A) = 4$ e $card(B) = 6$. Neste caso, temos $card(A) < card(B)$.

Na verdade, a noção de cardinalidade torna-se um pouco mais complexa quando estamos nos referindo aos conjuntos infinitos, já que não podemos "contar" todos os seus elementos. Então como mensurar o "tamanho" de um conjunto infinito? Será que existem conjuntos infinitos "maiores" que outros? Como comparar a "quantidade de elementos" entre esses tipos de conjuntos? É isso que responderemos neste capítulo. As referências bibliográficas deste capítulo são: [1], [4], [5] [8], [13], [17].

3.0.1 Cardinalidade dos Conjuntos Enumeráveis

Nosso ponto de partida será estabelecer uma definição formal de cardinalidade para um conjunto qualquer. Ela é devida a Cantor (1845-1918) que a empregou com o objetivo de classificar os conjuntos infinitos.

Definição 3.0.1. *Sejam X e Y dois conjuntos.*

1. *Diz-se que X e Y têm a mesma cardinalidade, escrevemos $card(X) = card(Y)$, se existir uma bijeção $f : X \to Y$.*

2. *Indica-se*
$$card(X) \leq card(Y)$$
quando existir uma função injetiva $f : X \to Y$, ou, equivalentemente, quando existir uma função sobrejetiva $f : Y \to X$.

3. *Indica-se*
$$card(X) < card(Y)$$
quando existir uma função injetiva $f : X \to Y$, mas nenhuma função sobrejetiva $g : X \to Y$, ou, equivalentemente, quando existir uma função sobrejetiva $f : Y \to X$, mas nenhuma injetiva.

Teorema 3.0.1. *A relação, denotada por $\approx$, dada por $X \approx Y \Leftrightarrow card(X) = card(Y)$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Devemos demonstrar que essa relação possui as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

1°. Como para todo conjunto X, a aplicação $I_X : X \to X$ dada por $I_X(x) = x$, para todo $x \in X$, é bijetiva, então $X \approx X$. Logo, $\approx$ é reflexiva.

2°. Se $X \approx Y$, isto é, se existe uma função bijetiva $f : X \to Y$, então, como $f^{-1} : Y \to X$ é também uma função bijetiva, então $Y \approx X$. Logo, $\approx$ é simétrica.

3°. Se $X \approx Y$ e $Y \approx Z$, então existem funções bijetivas $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Daí $g \circ f : X \to Z$ também é bijetiva e, portanto, $X \approx Z$. Logo, $\approx$ é transitiva.

□

De posse desses resultados, podemos então afirmar que todos os conjuntos enumeráveis têm a mesma cardinalidade, em particular, sabemos agora que
$$card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Z}) = card(\mathbb{Q}).$$

Neste caso, dizemos que esses conjuntos são equipotentes ou ainda, que pertencem a mesma classe de equipotência. Uma classe de equivalência dessa relação é o conjunto de todos os conjuntos com a mesma cardinalidade, e qualquer um desses conjuntos é um representante dessa classe.

Os números cardinais dos conjuntos infinitos recebem o nome de *números transfinitos*. Cantor denotou por $\aleph_0$ (lê-se: álefe zero) a classe de equivalência dos conjuntos infinitos enumeráveis. Na verdade, o símbolo $\aleph$ é a primeira letra do alfabeto hebraico, e o motivo pelo qual ele o reservou para representar essa classe de equivalência, talvez esteja no fato dela possuir a menor das cardinalidades infinitas. É o que nos mostra o Teorema $2.0.1$ do capítulo anterior. Vamos recapitulá-lo: Esse teorema nos diz que se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicacão injetiva $f : \mathbb{N} \to X$. Portanto, pelo ítem 2 da Definição $3.0.1$, concluimos que $card(\mathbb{N}) \leq card(X)$, ou seja, a cardinalidade dos conjuntos dos números naturais não excederá a cardinalidade de nenhum conjunto infinito.

3.0.2 Cardinalidade dos Conjuntos Não Enumeváveis

Além dos conjuntos infinitos enumeráveis, há também os conjuntos não enumeráveis, os quais são assim definidos:

Definição 3.0.2. *Um conjunto infinito X é não enumerável quando não existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.*

A existência de um conjunto não enumerável já indica que existem "infinitos diferentes". O mais famoso deles é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Para mostrarmos que, de fato, $\mathbb{R}$ é não enumerável, devemos provar que não existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Esse resultado foi reconhecido pela primeira vez por Cantor. Para prová-lo, Cantor desenvolveu um argumento bastante criativo para mostrar que não existe uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, o que por sua vez, implica que não existe função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ou seja, pela Definição $3.0.1$, que $card(\mathbb{N}) \neq card(\mathbb{R})$.

Inicialmente, apresentaremos o argumento intuitivo dado por ele.

Tome qualquer função arbitrária $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Provemos que f não pode ser sobrejetiva.

Para isso, vamos construir a seguinte tabela: Na primeira coluna, tome todos os números naturais n em ordem crescente. Na segunda coluna, para cada $n \in \mathbb{N}$, escreva sua imagem pela função f com todas as suas casas decimais. Por exemplo, $f(1) = 0,4$, devemos escrevê-lo como $0,40000000\cdots$. Vejamos uma ilustração:

n	$f(n)$											
1	0,	**4**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
2	4,	0	**8**	2	4	9	0	0	0	0	0	$\cdots$
3	1,	0	4	**5**	7	1	0	3	4	0	8	$\cdots$
4	5,	3	0	0	**4**	2	0	5	8	9	2	$\cdots$
5	6,	3	8	4	6	**9**	9	6	5	4	3	$\cdots$
6	9,	4	5	9	0	0	**0**	0	0	0	0	$\cdots$
7	2,	8	3	3	4	0	0	**0**	5	6	0	$\cdots$
8	1,	5	4	3	4	3	4	4	**8**	9	0	$\cdots$
9	0,	6	8	4	3	2	0	7	0	**5**	0	$\cdots$
10	3,	5	4	6	6	7	0	0	7	4	**0**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$											$\cdots$

Figura 3.1: Diagonal de Cantor.

Na figura, destacamos uma das diagonais da tabela. Note que, o primeiro elemento dessa diagonal é também a primeira casa decimal de $f(1)$. O segundo elemento da diagonal corresponde à segunda casa decimal de $f(2)$ e assim por diante. Ou seja, o $n-$ésimo elemento da diagonal é também a $n-$ésima casa decimal de $f(n)$.

Para provarmos que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, basta encontrarmos um $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \neq f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observando nossa tabela, podemos construir tal número de maneira muito fácil. Defina y como sendo um número real positivo menor que 1 de modo que sua $n-$ésima casa decimal seja 1, se a $n-$ésima casa decimal de $f(n)$ for igual a 0 e 0, se a $n-$ésima casa decimal de $f(n)$ for diferente de 0. Assim, para o nosso exemplo, temos

$$y = 0,0000011001\cdots.$$

Note que, assim definido, $y \neq f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, provando assim que, de fato, f não é sobrejetiva.

Como esse argumento é válido para qualquer função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, concluímos que não existe a função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ou ainda, que

$$card(\mathbb{N}) \neq card(\mathbb{R}),$$

devido à Definição 3.0.1.

É prudente apresentemos uma prova mais formal para esse resultado, o qual será enunciado como um teorema adicional ao nosso texto logo adiante. Para isso, utilizaremos a ideia apresentada anteriormente como um guia para nossa demonstração. Mas primeiro, devemos considerar a seguinte definição:

Definição 3.0.3. *Seja $r \in \mathbb{R}$, define-se $r[n]$ como segue:*

(i) $r[0]$ *é a parte inteira de r;*

(ii) $r[n]$ *é o n-ésimo algarismo decimal de r.*

Por exemplo, se tomarmos $r = 12,847$, então

$$r[0] = 12, r[1] = 8, r[2] = 4, r[3] = 7.$$

Teorema 3.0.2. *Não existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ou ainda, $card(\mathbb{N}) \neq card(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Vamos mostrar que não existe função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobrejetiva. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Considere o número real y definido pela seguinte representação decimal: $y[0] = 0$ e

$$y[n] = \begin{cases} 1 & , \text{se } f(n)[n] = 0 \\ 0 & , \text{se } f(n)[n] \neq 0. \end{cases}$$

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos:
1º caso: Se $f(n)[n] = 0$, logo, pela construção de y, $y[n] = 1$, então $f(n) \neq y$.
2º caso: Se $f(n)[n] \neq 0$, logo, pela construção de y, $y[n] = 0$, então $f(n) \neq y$.

Em ambos os casos, temos $f(n) \neq y$. Portanto, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = y$. Logo, não existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobrejetiva , ou seja,

$$card(\mathbb{N}) \neq card(\mathbb{R}).$$

$\square$

Com este resultado, Cantor já provara que existem diferentes tipos de infinitos. O nosso próximo exemplo mostrará que a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é menor que a cardinalidade do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Exemplo 3.0.1. $card(\mathbb{N}) = \aleph_0 < card(\mathbb{R})$.

Note que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $f(n) = n$ é claramente injetiva. Portanto, vimos que existe uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ injetiva e que, pelo Teorema 3.0.2, não existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sobrejetiva . Logo, pela Definição 3.0.1, temos que

$$card(\mathbb{N}) = \aleph_0 < card(\mathbb{R}).$$

Usa-se a notação $\aleph_1$ para $card(\mathbb{R})$.

Esse talvez seja um resultado um pouco mais tangível para nosso entendimento, já que, geometricamente o conjunto dos números naturais são representados por pontos igualmente espaçados na reta, já os números reais compreendem toda a reta.

Nosso objetivo agora é comparar a cardinalidade entre os intervalos reais $(0, 1)$ e $(0, \infty)$.

Exemplo 3.0.2. $card\big((0, 1)\big) = card\big((0, \infty)\big)$.

Por mais estranho que pareça, veremos que, de fato, $card\big((0, 1)\big) = card\big((0, \infty)\big)$. Para isso, devemos mostrar que existe uma função bijetiva entre esses conjuntos. Iremos construir essa função utilizando o argumento geométrico descrito a seguir. Considere o intervalo $(0, \infty)$ como sendo o eixo das abscissas positivo do plano de coordenadas cartesianas e escreva o intervalo $(0, 1)$ no eixo das ordenadas. Considere ainda o ponto $P = (-1, 1)$. Defina a função $f : (0, 1) \to (0, \infty)$ associando a cada número $x \in (0, 1)$ o número $f(x)$ tal que $\big(f(x), 0\big)$ é o ponto no qual a reta que passa pelos ponto P e $(0, x)$ intersecta o eixo x, como mostra a Figura 3.2.

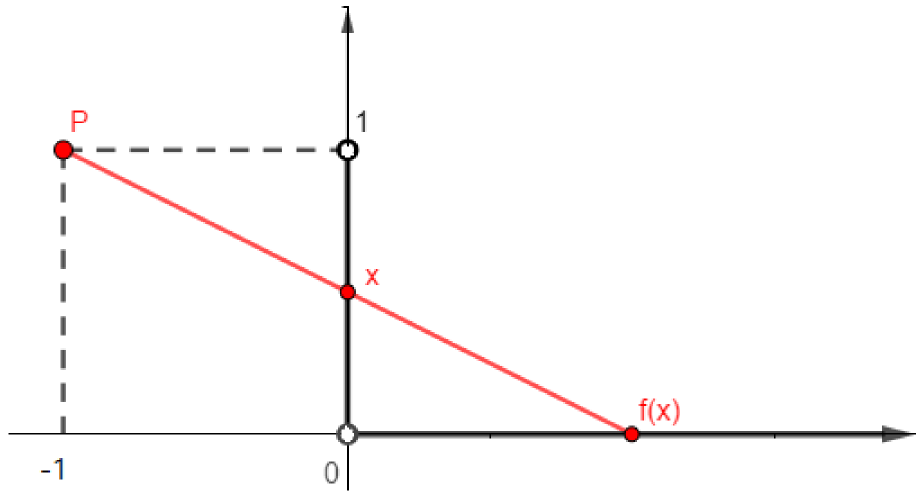


Figura 3.2: Representação geométrica da função $f : (0, 1) \to (0, \infty)$.

Note que, se destacarmos os triângulos PFG e XFO (assim denotados a fim de facilitar nosso entendimento), como mostra a figura abaixo, veremos que eles são semelhantes.

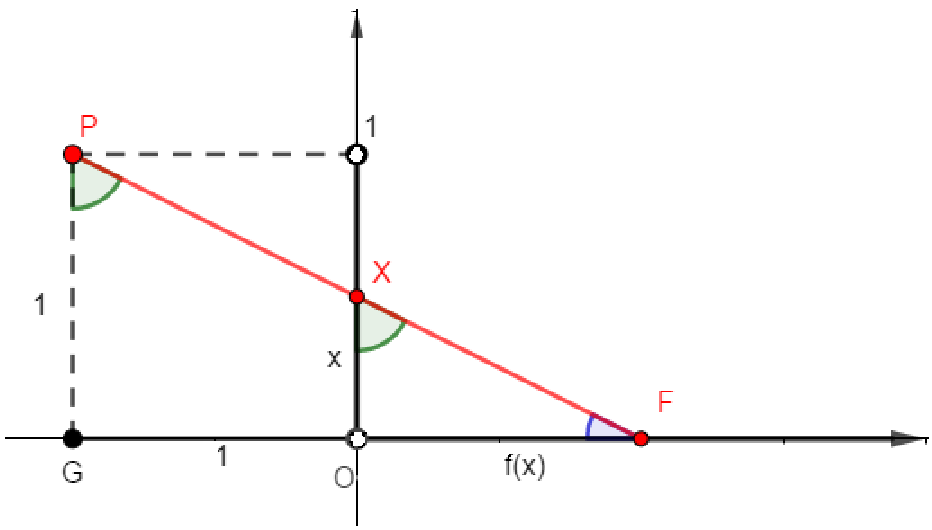


Figura 3.3: Semelhança dos triângulos PFG e XFO.

Portanto, por semelhança de triângulos, temos que

$$\frac{1}{x} = \frac{f(x) + 1}{f(x)},$$

portanto

$$f(x) = \frac{x}{1 - x}.$$

Se essa construção não foi tão convincente para provar a bijetividade da função $f : (0, 1) \to (0, \infty)$, definida por $f(x) = \frac{x}{1-x}$, podemos ainda apresentar uma prova mais formal. Primeiro vamos demonstrar sua sobrejetividade. De fato, para todo $y \in (0, \infty)$, tome $x = \frac{y}{1+y} \in (0, 1)$. Temos

$$f(x) = \frac{\frac{y}{1+y}}{1 - \left(\frac{y}{1+y}\right)} = \frac{\frac{y}{1+y}}{\frac{1}{1+y}} = \frac{y}{1+y} \cdot (1+y) = y.$$

Logo, f é sobrejetiva. Para mostarmos que f também é injetiva, tome dois pontos quaisquer x_1 e x_2 em $(0, 1)$, com $f(x_1) = f(x_2)$. Assim:

$$\frac{x_1}{1 - x_1} = \frac{x_2}{1 - x_2} \Rightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Logo, f é injetiva e, portanto, bijetiva. Com isso, temos que os intervalos são equipotentes, ou seja,

$$card\big((0, 1)\big) = card\big((0, \infty)\big).$$

Uma pergunta inevitável agora é: será então que $card\big((0, 1)\big) = card(\mathbb{R})$? O exemplo a seguir traz a resposta para esse questionamento.

Exemplo 3.0.3. $card\big((0, 1)\big) = card(\mathbb{R})$.

Demonstraremos esse exemplo construindo uma função bijetiva $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$. Para isso, podemos, primeiramente, de modo análogo, construir, geometricamente, duas funções $g : \left(0, \frac{1}{2}\right) \to (-\infty, 0)$ e $f : \left(\frac{1}{2}, 1\right) \to (0, \infty)$. Para a função g, considere o intervalo $(-\infty, 0)$ como sendo a semirreta $y = \frac{1}{2}$, com $x < 0$, descrita no plano cartesiano e escreva o intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ no eixo das ordenadas de modo que esses intervalos sejam perpendiculares entre si. Tome também o ponto $P = (1, 0)$. Defina $g : \left(0, \frac{1}{2}\right) \to (-\infty, 0)$ associando a cada número $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ o número $g(x)$ tal que $\left(g(x), \frac{1}{2}\right)$ é o ponto no qual a reta que passa pelos ponto P e $(0, x)$ intersecta a semirreta construída anteriormente, como mostra a figura abaixo.

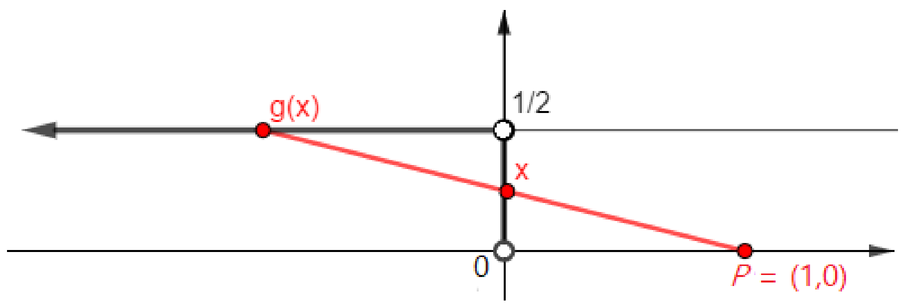


Figura 3.4: Representação geométrica da função $g : \left(0, \frac{1}{2}\right) \to (-\infty, 0)$.

Novamente, podemos utilizar as propriedades de semelhança, agora entre os triângulos GPH e XPO destacados na figura abaixo:

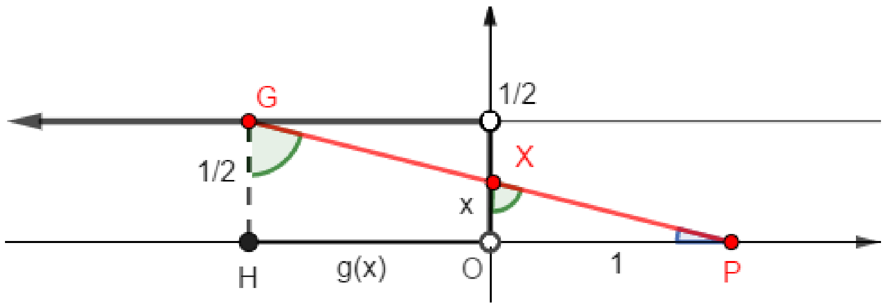


Figura 3.5: Semelhaça entre os triângulos GPH e XPO.

Portanto, temos

$$\frac{\frac{1}{2}}{x} = \frac{1 - g(x)}{1}$$

e, com isso,

$$g(x) = \frac{2x - 1}{2x}.$$

Para a função f, considere o intervalo $(0, \infty)$ como sendo a semirreta $y = \frac{1}{2}$, com $x > 0$, descrita no plano cartesiano e escreva o intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ no eixo das ordenadas. Tome agora o ponto $Q = (-1, 1)$. Defina $f : \left(\frac{1}{2}, 1\right) \to (0, \infty)$ associando a cada número $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ o número $f(x)$ tal que $\left(f(x), \frac{1}{2}\right)$ é o ponto no qual a reta que passa pelos ponto Q e $(0, x)$ intersecta a simirreta construída anteriormente. Vejamos a figura a seguir:

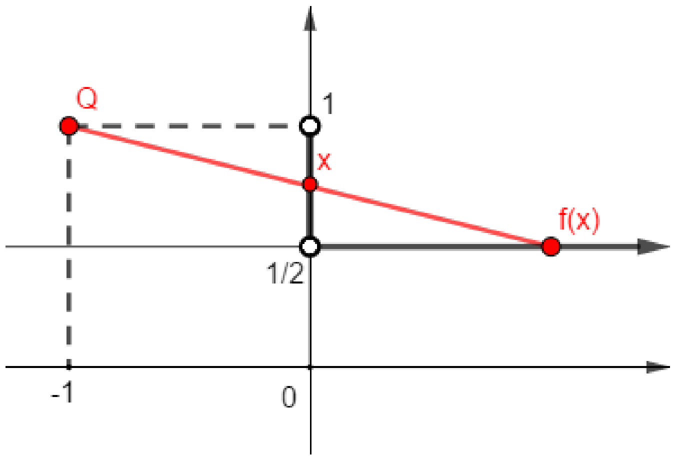


Figura 3.6: Representação geométrica da função $f : \left(\frac{1}{2}, 1\right) \to (0, \infty)$.

É possivel ver, na Figura 3.7, que os triângulos QFR e XFS são semelhantes.

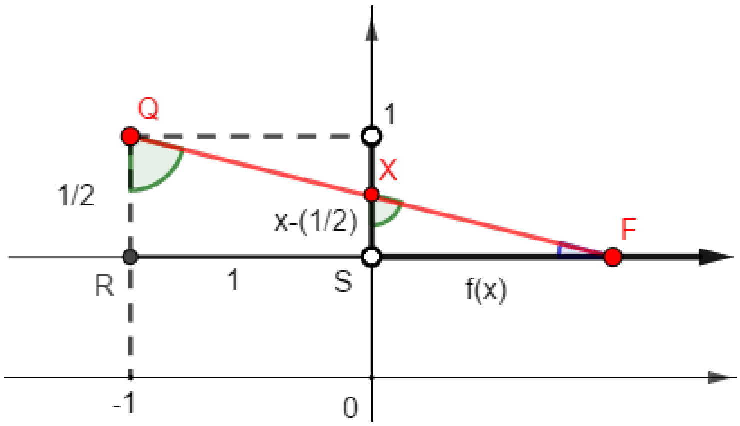


Figura 3.7: Semelhança entre os triângulos QFR e XFS.

Logo,

$$\frac{\frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{f(x) + 1}{f(x)}$$

e, portanto

$$f(x) = \frac{2x - 1}{2 - 2x}.$$

Agora, defina $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{2x} & , \text{ se } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{2x-1}{2-2x} & , \text{ se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ 0 & , \text{ se } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Da maneira que construimos, é possível ver que, de fato, h é uma função bijetiva de $(0,1)$ em $\mathbb{R}$. Contudo vamos provar esse fato de forma mais rigorosa.

Provemos que h é injetiva. Sejam $x_1, x_2, x_3 \in (0,1)$. Temos três casos para serem analisados:

1º Caso: Tome $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, com $h(x_1) = h(x_2)$. Assim:

$$\begin{aligned}\frac{2x_1 - 1}{2x_1} = \frac{2x_2 - 1}{2x_2} &\Rightarrow 4x_1x_2 - 2x_1 = 4x_1x_2 - 2x_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2.\end{aligned}$$

2º Caso: Tome $x_1, x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, com $h(x_1) = h(x_2)$. Assim:

$$\begin{aligned}\frac{2x_1 - 1}{2 - 2x_1} = \frac{2x_2 - 1}{2 - 2x_2} &\Rightarrow 4x_2 - 2 - 4x_1x_2 + 2x_1 = 4x_1 - 2 - 4x_1x_2 + 2x_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2.\end{aligned}$$

3º Caso: Tome $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $x_3 = \frac{1}{2}$. Então, como esses conjuntos são disjuntos, temos que $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. Daí,

$$h(x_1) = \frac{2x_1 - 1}{2x_1} < 0,$$

pois

$$0 < x_1 < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 2x_1 < 1 \Rightarrow -1 < 2x_1 - 1 < 0$$

e

$$h(x_2) = \frac{2x_2 - 1}{2 - 2x_2} > 0,$$

pois

$$\frac{1}{2} < x_2 < 1 \Rightarrow 1 < 2x_2 < 2 \Rightarrow 0 < 2x_2 - 1 < 1$$

e

$$\frac{1}{2} < x_2 < 1 \Rightarrow -1 > -2x_2 > -2 \Rightarrow 1 > 2 - x_2 > 0.$$

Portanto, $h(x_1) \neq h(x_2) \neq h(x_3)$. Logo, h é injetiva.

Provemos agora que h é sobrejetiva. Analisemos três possíveis situações:

1º Caso: Para $y = 0$, por definição, temos que, para $x = \frac{1}{2} \in (0,1)$, $h\big(\frac{1}{2}\big) = 0$.
2º Caso: Para $y < 0$, tome $x = \frac{1}{2(1-y)} \in (\frac{1}{2}, 1)$. Temos

$$h(x) = \frac{2\Big(\frac{1}{2(1-y)}\Big) - 1}{2\Big(\frac{1}{2(1-y)}\Big)} = \frac{\frac{1}{1-y} - 1}{\frac{1}{1-y}} = \frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{1}{1-y}} = y.$$

3º Caso: Para $y > 0$, tome $x = \frac{2y+1}{2(y+1)} \in (0, \frac{1}{2})$. Temos

$$h(x) = \frac{2\Big(\frac{2y+1}{2(y+1)}\Big) - 1}{2 - 2\Big(\frac{2y+1}{2(y+1)}\Big)} = \frac{\frac{2y+1}{y+1} - 1}{2 - \frac{2y+1}{y+1}} = \frac{y}{1} = y.$$

Portanto, para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in (0,1)$ tal que $h(x) = y$. Provando assim que h é sobrejetiva. Logo, h é bijetiva e portanto $card\big((0,1)\big) = card(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.0.4. *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, dado o intervalo (a, b),*

$$card\big((a,b)\big) = card(\mathbb{R}).$$

Nossa estratégia argumentativa será provar que $card\big((0,1)\big) = card\big((a,b)\big)$ e, por transitividade, concluir que $card\big((a,b)\big) = card(\mathbb{R})$. Para isso, basta exibirmos uma bijeção $f : (0,1) \to (a,b)$. Por exemplo, para demonstrarmos que $card\big((0,1)\big) = card\big((-4,4)\big)$, podemos tomar a função $f : (0,1) \to (-4,4)$, onde $f(x) = 8x - 4$. Observando o gráfico de f na figura abaixo, percebemos que f é bijetiva:

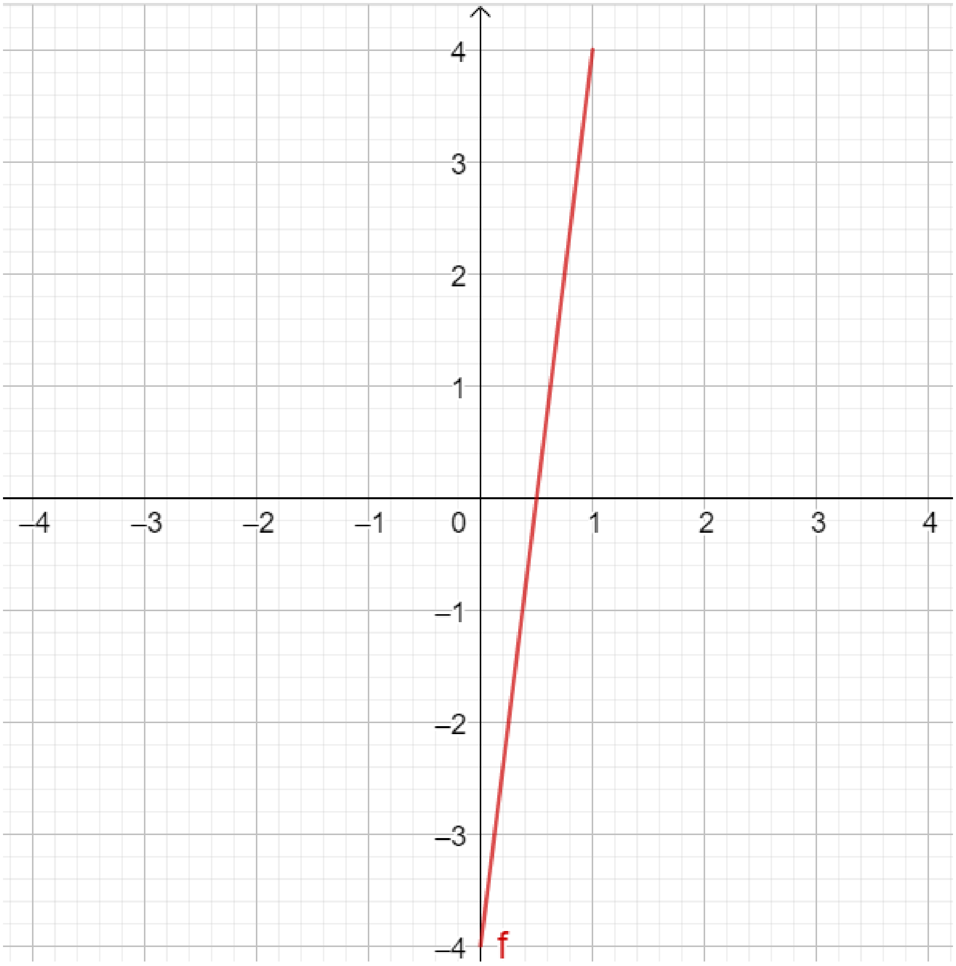


Figura 3.8: Representação gráfica da função $f : (0, 1) \to (-4, 4)$.

De modo geral, sempre podemos construir uma função bijetiva $f : (0, 1) \to (a, b)$. Basta tomarmos f como a função afim tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$, isto é, $f(x) = (b - a)x + a$. Portanto, concluimos que

$$card\big((0, 1)\big) = card\big((a, b)\big),$$

ou seja, qualquer intervalo (a, b) tem a mesma cardinalidade que o intervalo $(0, 1)$ e, portanto, a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$.

De modo análogo, mostra-se que, para $a < b$, temos:

- $card\big((0, 1]\big) = card\big((a, b]\big)$.
- $card\big([0, 1)\big) = card\big([a, b)\big)$.
- $card\big([0, 1]\big) = card\big([a, b]\big)$.

Vejamos agora que qualquer intervalo não degenerado limitado (fechado, aberto ou semiaberto) tem o mesmo "tamanho" do conjunto dos números reais.

Teorema 3.0.3. $card\big([0,1)\big) = card\big((0,1)\big)$.

Demonstração. A função $f : [0,1) \to (0,1)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{, se } x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & \text{, se } x = \frac{1}{n}, \text{ com } n \geq 2 \\ x & \text{, se } x \notin \{\frac{1}{n}; n \geq 2\} \cup \{0\} \end{cases}$$

é uma bijeção. De fato, f é injetiva, pois, se tomarmos $x_1, x_2, \in [0,1)$, temos que

1º Caso: Se $x_1 = \frac{1}{n_1}$, $x_2 = \frac{1}{n_2}$, com $n_1, n_2 \geq 2$, e $f(x_1) = f(x_2)$, temos

$$\frac{1}{n_1+1} = \frac{1}{n_2+1} \Rightarrow n_1 + 1 = n_2 + 1 \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

2º Caso: Se $x_1, x_2 \notin \{\frac{1}{n}; n \geq 2\} \cup \{0\}$, com $f(x_1) = f(x_2)$, temos

$$x_1 = x_2.$$

3º Caso: Se $x_1 = \frac{1}{n_1} \in \{\frac{1}{n}; n \geq 2\}$, $x_2 \notin \{\frac{1}{n}; n \geq 2\} \cup \{0\}$ e $x_3 = 0$, então $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. Daí,

$$f(x_1) = \frac{1}{n_1+1} < \frac{1}{2},$$

pois $n_1 + 1 \geq 3$ e

$$f(x_2) = x_2 \neq \frac{1}{2}.$$

Portanto, $f(x_1) \neq f(x_3)$ e $f(x_2) \neq f(x_3)$.

Além disso, suponha, por absurdo, que $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. Temos que

$$x_2 = \frac{1}{n_1+1}.$$

O que é contradição, pois $x_2 \neq \frac{1}{n}$, para todo $n \geq 2$.

Ademais, f é sobrejetiva. De fato, consideremos três casos:

1º Caso: Para $y = \frac{1}{2} \in (0,1)$, temos que $f(0) = \frac{1}{2}$.

2º Caso: Primeiro, perceba que, para $x = \frac{1}{n}$, com $n \geq 2$, temos que $f(x) = \frac{1}{n+1} = \frac{x}{x+1}$. Portanto, para $y \in \{\frac{1}{n+1}; n \geq 2\}$, tome $x = \frac{y}{y-1} \in [0,1)$. Temos

$$f(x) = \frac{\frac{y}{1-y}}{\left(\frac{y}{1-y}\right)+1} = \frac{\frac{y}{y-1}}{\frac{1}{1-y}} = \frac{y}{y-1} \cdot \frac{1-y}{1} = y.$$

3º Caso: Para $y \notin \{\frac{1}{n+1}; n \geq 2\}$, tome $x = y \in [0,1)$. Temos

$$f(x) = y.$$

Portanto, para todo $y \in (0,1)$, existe $x \in [0,1)$ tal que $f(x) = y$, provando assim que h é sobrejetiva. Logo, f é uma função bijetiva, o que mostra que $card\big([0,1)\big) = card\big((0,1)\big)$.

□

Teorema 3.0.4. $card\big((0,1])\big) = card\big((0,1)\big)$.

Demonstração. A função $g : (0,1] \to (0,1)$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{, se } x = \frac{1}{n}, \text{ com } n \geq 1 \\ x & \text{, se } x \notin \{\frac{1}{n}; n \geq 1\} \end{cases}$$

é bijetiva. A demonstração é feita de forma análoga a do Teorema 3.0.3. □

Teorema 3.0.5. $card\big([0,1]\big) = card\big((0,1)\big)$.

Demonstração. A função $h : [0,1] \to (0,1)$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{, se } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{, se } x = \frac{1}{n}, \text{ com } n \geq 1 \\ x & \text{, se } x \notin \{\frac{1}{n}; n \geq 1\} \cup \{0\}. \end{cases}$$

é bijetiva. Novamente, a demonstração é feita de forma análoga a do Teorema 3.0.3. □

Para darmos sequência às comparações entre cardinalidades dos conjuntos não enumeráveis, veremos agora o teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder.

3.0.3 Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder

Dados dois números reais x e y, é um fato que se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$. É natural nos questionarmos se isso também ocorre com a cardinalidade dos conjuntos, ou seja, dados dois conjuntos X e Y quaisquer, é verdade que se $card(X) \leq card(Y)$ e $card(Y) \leq card(X)$, então $card(X) = card(Y)$? Veremos nesta seção que, de fato, este resutado é verdadeiro e isso nos dará uma forma mais simples e eficiente de compararmos a cardinalidade entre dois conjuntos.

Lembre-se que, pela Definição 3.0.1, $card(X) \leq card(Y)$ significa que há uma função $f : X \to Y$ injetiva. Pretendemos mostrar que, se houverem funções injetivas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$, então existe uma bijeção $h : X \to Y$.

Antes de apresentarmos a prova desse resultado encontrada em [1], precisaremos de um lema.

Lema 3.0.1. *Sejam $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}$ conjuntos tais que $X \cap \tilde{X} = Y \cap \tilde{Y} = \emptyset$. Se existem bijeções $\phi : X \to Y, \theta : \tilde{X} \to \tilde{Y}$, então existe uma função bijetiva $f : X \cup \tilde{X} \to Y \cup \tilde{Y}$.*

Demonstração. Defina a função $f : X \cup \tilde{X} \to Y \cup \tilde{Y}$ da seguinte maneira:

$$f(x) = \begin{cases} \phi(x) & , \text{se } x \in X \\ \theta(x) & , \text{se } x \in \tilde{X}. \end{cases}$$

Note que f é bijetiva. Para provarmos que f é injetiva, consideremos três casos:

1° Caso: Tomando $x_1, x_2 \in X$, com $f(x_1) = f(x_2)$ temos que

$$\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

pois ϕ é injetiva.

2° Caso: Tomando $x_1, x_2 \in \tilde{X}$, com $f(x_1) = f(x_2)$ temos que

$$\theta(x_1) = \theta(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

pois θ é injetiva.

3° Caso: Tomando $x_1 \in X$ e $x_2 \in \tilde{X}$, como $X \cap \tilde{X} = \emptyset$, temos que $x_1 \neq x_2$. Daí, vale

$$f(x_1) \neq f(x_2),$$

pois $f(x_1) \in Y$ e $f(x_2) \in \tilde{Y}$ e, por hipótese, $Y \cap \tilde{Y} = \emptyset$.

Por outro lado, a sobrejetividade vem do fato que $\phi(X) = Y$ e $\theta(\tilde{X}) = \tilde{Y}$, e

$$f(X \cup \tilde{X}) = f(X) \cup f(\tilde{X}) = \phi(X) \cup \theta(\tilde{X}) = Y \cup \tilde{Y}.$$

$\square$

Teorema 3.0.6. ***(Cantor-Bernstein-Schröeder).*** *Dados dois conjuntos X e Y, se $card(X) \leq card(Y)$ e $card(Y) \leq card(X)$, então $card(X) = card(Y)$, ou seja, se existem $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ injetivas, então existe uma bijeção $h : X \to Y$.*

Demonstração. Temos, por hipótese, que existem funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ injetivas. Queremos encontrar uma função $h : X \to Y$ bijetiva. A ideia para essa demonstração é inspirada no Lema $3.0.1$, isto é, particionar o conjunto X em dois conjuntos disjuntos de modo que estes estejam em bijeção com outros dois conjuntos complementares de Y.

Como f é injetiva, para qualquer conjunto não vazio $U \subset X$, temos que $f|_U : U \to f(U)$ é uma bijeção de U sobre sua imagem. Note também que, os conjuntos $f(U)$ e $Y - f(U)$ são complementares em Y. Além disso, como g é injetiva, é fato que $g|_{Y-f(U)}$ é uma bijeção entre $Y - f(U)$ e $g(Y - f(U))$. O desafio agora é encontrar um conjunto U de modo que U e $g(Y - f(U))$ sejam complementares em X, pois, nesse caso, pelo Lema $3.0.1$, teremos a bijeção $h : X \to Y$, donde $X = U \cup g(Y - f(U))$ e $Y = f(U) \cup (Y - f(U))$, já que temos bijeções entre U e $f(U)$ e entre $Y - f(U)$ e $g(Y - f(U))$.

A imagem abaixo sintetiza essa ideia.

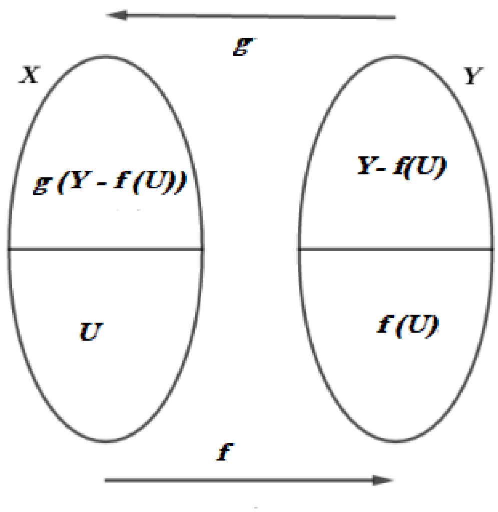


Figura 3.9: Diagrama do Teorema 3.0.6.

Pela Figura 3.9, vemos que U deve ser tal que $X - g(Y - f(U)) = U$. Para encontrar esse conjunto, defina a função $\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, dada por $\phi(U) = X - g(Y - f(U))$. Se provarmos que existe $U \subset X$ tal que $\phi(U) = U$, concluiremos nossa demonstração.

Defina o conjunto

$$\mathcal{A} = \{B \subset X / B \subset \phi(B)\}.$$

Tome o conjunto

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B.$$

Vamos verificar que $\phi(U) = U$. De fato, tem-se que

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{A}} \phi(B) = \phi\Big(\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B\Big) = \phi(U),$$

portanto, $U \subset \phi(U)$.

Note também que, se $A \subset B$, então $\phi(A) \subset \phi(B)$. De fato, usando alguns resultados básicos da teoria dos conjuntos, temos

$$\begin{aligned} A \subset B &\Rightarrow f(A) \subset f(B) \\ &\Rightarrow Y - f(A) \supset Y - f(B) \\ &\Rightarrow g\big(Y - f(A)\big) \supset g\big(Y - f(B)\big) \\ &\Rightarrow X - g\big(Y - f(A)\big) \subset X - g\big(Y - f(B)\big) \\ &\Leftrightarrow \phi(A) \subset \phi(B). \end{aligned}$$

Assim, se $U \subset \phi(U)$, então

$$\phi(U) \subset \phi(\phi(U)),$$

portanto, $\phi(U) \in \mathcal{A}$, logo,

$$\phi(U) \subset \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B = U.$$

Portanto,

$$\phi(U) = U.$$

□

Até aqui, vimos que há pelos menos dois tipos de conjuntos infinitos: aqueles cuja cardinalidade é $\aleph_0$, a exemplo de $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$, e aqueles cuja cardinalidade é $\aleph_1$, por exemplo, o conjuntos dos números reais e os intervalos não degenerados. Vimos também que

$$\aleph_0 < \aleph_1.$$

Será então que há cardinalidades maiores que a dos números reais? A resposta é sim. Um candidato para isso seria o plano, já que, geometricamente, ele possui duas dimensões, enquanto que a reta apenas uma. Melhor, para que não haja dúvidas, vamos considerar o conjunto $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Apesar da nossa intuição nos levar a conjecturar que estes conjuntos possuem cardinalidades maiores que a dos números reais, somos interseptados pela genialidade de Cantor, o qual provou que, na verdade, esses conjuntos têm a mesma cardinalidade. Esse resultado surpreendeu o próprio Cantor. "Vejo que é assim, mas não acredito", disse ele em uma carta ao matemático alemão Richard Dedekind em 1877, conforme escreveu Morris ([14]). A demonstração de Cantor está expressa no exemplo a seguir.

Exemplo 3.0.5. *Para* $S = (0,1) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$ *e* $Q = (0,1)^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1$ *e* $0 < y < 1\}$*, temos* $card(S) = card(Q)$.

Inicialmente vamos exibir uma função injetiva $f : S \to Q$. Defina a função $f(x) = (0,x)$ que certamente é injetiva. Portanto, $card(S) \leq card(Q)$.

Agora, basta exibirmos uma função injetiva $g : Q \to S$. Para isso, note que cada coordenada de $(x,y) \in Q$ pode ser representada, por $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$ e $y = 0.b_1b_2b_3\cdots$, por exemplo, se tomarmos o ponto $(x,y) = (0.01, 0.09)$, temos que $x = 0.01\overline{0}$ e $y = 0.09\overline{0}$.

Antes de prosseguirmos com a demonstração, lembremos o fato de que qualquer número $x \in (0,1)$ tem uma representação decimal única $x = 0.a_1a_2a_3a_4\cdots$, com $a_i \in \{1,2,3,\cdots,9\}$, na qual não há uma sequência infinita de algarismos 9 repetidos no final, pois, por exemplo,

$$0.102399999\cdots = 0.1024\overline{0}.$$

Retomando a demonstração, defina a função g que associa cada par (x,y), com $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$ e $y = 0.b_1b_2b_3\cdots$, ao número $r = 0.a_1b_1a_2b_2\cdots a_ib_i\cdots \in S$, $i \in \mathbb{N}$ e $a_i, b_i \in \{1,2,3,\ldots,9\}$, isto é,

$$g(x,y) = 0.a_1b_1a_2b_2\cdots a_ib_i\cdots .$$

Por exemplo,

$$g(0.01, 0.09) = 0.0019\overline{0}.$$

Note que g é injetiva, pois, tomando $(x,y) = (0.a_1a_2\cdots, 0.b_1b_2\cdots)$ e $(z,w) = (0.c_1c_2\cdots, 0.d_1d_2\cdots)$ e $g(x,y) = g(z,w)$, temos

$$0.a_1b_1a_2b_2\cdots = 0.c_1d_1c_2d_2\cdots .$$

Pela unicidade da representação decimal dos números racionais, temos que $a_k = c_k$ e $b_k = d_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto, $x = z$ e $y = w$, logo, $(x,y) = (z,w)$. Concluindo assim que g é injetiva. Logo, pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schöreder, temos

$$card(S) = card(Q).$$

Com esse último resultado, concluimos que

$$card(\mathbb{R}) = card(S) = card(Q).$$

Como $card(S) = card(\mathbb{R})$, existe uma bijeção $f : S \to \mathbb{R}$. Defina $g : Q \to \mathbb{R}^2$ por $g(x, y) = (f(x), f(y))$. Temos que g é uma bijeção. De fato, tomando $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ com $g(x, y) = g(z, w)$, temos

$$(f(x), f(y)) = (f(z), f(w)) \Rightarrow f(x) = f(z) \text{ e } f(y) = f(w).$$

Como f é injetiva, temos $x = z$ e $y = w$, portanto $(x, y) = (z, w)$. Logo, g é injetiva.

Além disso, como f é sobrejetiva, para todo α e $\beta \in \mathbb{R}$, existem θ e $\phi \in S$ tal que $f(\theta) = \alpha$ e $f(\phi) = \beta$. Logo, para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tome $(\theta, \phi) \in Q$. Temos

$$g(\theta, \phi) = (f(\theta), f(\phi)) = (\alpha, \beta).$$

Logo, g é sobrejetiva.

Sendo assim,

$$card(Q) = card(\mathbb{R}^2),$$

portanto, da transitividade da relação de equipotência, segue que

$$card(\mathbb{R}) = card(\mathbb{R}^2).$$

De modo análogo, podemos provar que a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é igual a cardinalidade de $\mathbb{R}^n$.

No próximo exemplo, conheceremos um outro conjunto com a cardinalidade dos reais.

Exemplo 3.0.6. $card\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big) = card(\mathbb{R})$.

Como vimos, $card\big([0, 1)\big) = card(\mathbb{R})$. Dessa forma, para provarmos que $card\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big) = card(\mathbb{R})$, basta mostrarmos que $card\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big) = card\big([0, 1)\big)$.

Vamos primeiro definir uma função injetiva f de $[0, 1)$ em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Novamente, usaremos a unicidade da representação decimal de qualquer número $x \in [0, 1)$ descrita no exemplo anterior. Definamos $f : [0, 1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ pela seguinte regra:

$$f(x) = f(0.b_1b_2b_3b_4\cdots) = \{10b_1, 10^2b_2, 10^3b_3, \cdots, 10^kb_k\},$$

em que b_k é o último algarismo não nulo na representação decimal de x. Por exemplo, para $x = 0.234\overline{0}$, temos que

$$f(x) = \{20, 300, 4000\}.$$

Note também que, por exemplo, $f(0.3) = f(0.3\overline{0}) = \{30\}$.

Provaremos agora que f, assim definida, é injetiva. De fato, tome $x_1 = 0.a_1a_2a_3\cdots$ e $x_2 = 0.b_1b_2b_3\cdots$, com $x_1 \neq x_2$, ou seja, $a_i \neq b_i$ para algum índice i. Pela definição de f, temos que $a_i10^i \in f(x_1) = f(0, a_1a_2a_3\cdots)$, contudo $a_i10^i \notin f(x_2) = f(0.b_1b_2b_3\cdots)$, portanto, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, f é injetiva.

Definamos agora a função $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1)$ da seguinte maneira, $g(X) = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots$ é o número tal que

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{, se } i \in X \\ 0 & \text{, se } i \notin X. \end{cases}$$

Por exemplo, para $X = \{2, 4, 5\}$, temos que

$$g(X) = g(\{2, 4, 5\}) = 0.01011\overline{0}.$$

Note que g é injetiva, pois tomando $X \neq Y$, digamos $X \not\subset Y$, existe algum $i \in X$ tal que $i \notin Y$, o que nos garante que $g(X) \neq g(Y)$.

Como provamos a existência das duas funções injetivas $f : [0, 1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, 1)$, pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder, existe uma bijeção $h : [0, 1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e, portanto, $card\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big) = card\big([0, 1)\big)$. Logo,

$$card\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big) = card\big([0, 1)\big) = card(\mathbb{R}).$$

Vimos, no Teorema 1.3.5 do capítulo anterior, que dado um conjunto X finito com n elementos, então $card(\mathcal{P}(X)) = 2^n$. Portanto, podemos fazer alusão a este resultado e denotar que $card(\mathbb{R}) = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Já mencionamos que existem conjuntos infinitos com cardinalidades maiores que a dos números reais, mas ainda não exibimos nenhum exemplo. Vamos mostrar agora não apenas um, mas infinitos conjuntos com tal propriedade. Novamente, Cantor é o responsável por esse resultado.

Teorema 3.0.7. *Para qualquer conjunto X, temos $card(X) < card(\mathcal{P}(X))$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que para qualquer conjunto X não existe função sobrejetiva $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Seja $f : X \to \mathcal{P}(X)$ uma função (qualquer). Vamos mostrar que f não é sobrejetiva. Defina o conjunto $D = \{x \in X | x \notin f(x)\}$. Note que $D \subset X$. Assim, $D \in \mathcal{P}(X)$. Dado $y \in X$, ou $y \in f(y)$ ou $y \notin f(y)$. Vamos analisar estes casos separadamente:

1° caso: $y \notin f(y)$. Por nossa definição de D, temos $y \in D$. Como $y \notin f(y)$ e $y \in D$, então $f(y) \neq D$.

2° caso: $y \in f(y)$. Por nossa definição de D, temos $y \notin D$. Como $y \in f(y)$ e $y \notin D$, então $f(y) \neq D$.

Em ambos os casos encontramos $f(y) \neq D$, logo f não é sobrejetiva. Assim, para todo conjunto X, não existe função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ sobrejetiva.

Para finalizarmos nossa demonstração, basta apresentar uma função injetiva $g : X \to \mathcal{P}(X)$. Note que a função $g : X \to \mathcal{P}(X)$, definida por $g(x) = \{x\}$ é injetiva. De fato,

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \{x_1\} = \{x_2\} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Logo, pelo ítem 3 da Definição 3.0.1, temos que

$$card(X) < card(\mathcal{P}(X)).$$

□

Note então que, com esse resultado, Cantor estabeleceu um método para construção de infinitos conjuntos infinitos, todos com cardinalidades distintas. Para isso, tome um conjunto infinito X qualquer. Se tomarmos o conjunto das partes de X, encontraremos um novo conjunto com cardinalidade maior que o anterior. Tomando o conjunto das partes deste novo conjunto, encontraremos um outro com cardinalidade maior que a dos outros dois anteriores. E assim por diante, de modo que podemos realizar esse processo quantas vezes quisermos. A título de exemplo, temos que

$$card(\mathbb{N}) < card(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = card(\mathbb{R}) < card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) < \cdots .$$

3.0.4 Hipótese do Contínuo

Ao provar que a cardinalidade do conjunto das partes de qualquer conjunto, incluindo qualquer conjunto infinito, é sempre maior que a cardinalidade do conjunto original, Cantor chegou em uma hierarquia de números que se estendiam aos números transfinitos, isto é, sendo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$1 < 2 < 3 < \cdots < n < \cdots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots < \aleph_n < \cdots ,$$

onde, $\aleph_0 = card(\mathbb{N}), \aleph_1 = card(\mathbb{R})$, $\aleph_2 = card(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, $\aleph_3 = card(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})))$ e assim por diante. Porém, uma pergunta que intrigou Cantor, e que o rendeu muito tempo de dedicação em busca da resposta, foi a seguinte: Será que a cardinalidade dos números reais é, em sua hierarquia, aquela imediatamente maior que a cardinalidade $\aleph_0$, ou seja, será que há algum outro conjunto intermediário entre esses dois conjuntos? Em outras palavras: Existe algum conjunto X tal que $card(\mathbb{N}) < card(X) < card(\mathbb{R})$?

Cantor estava convencido de que não, e a afirmação da inexistência de um conjunto X cuja cardinalidade fosse maior que $card(\mathbb{N})$ e menor que $card(\mathbb{R})$ foi chamada de "*hipótese do contínuo*". Ele, no entanto não conseguiu demonstrar sua afirmação, que se manteve por muito tempo como um problema em aberto.

Contudo o que Cantor não sabia era que a teoria "informal" dos conjuntos como era desenvolvida no século 19 não o permitia um estudo aprofundado sobre o assunto. Foi então que, no início do século 20, a teoria dos conjuntos tornou-se uma teoria axiomática formal, inicialmente, influenciada pelos estudos de Ernst Zermelo (1871-1953), em 1908. Como parte da teoria sistemática dos conjuntos, Kurt Gödel (1906-1978), em 1940, demonstrou que a hipótese do contínuo não pode ser provada como falsa usando o sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel. Por outro lado, em 1963, Paul Cohen (1934-2007) demonstrou que a hipótese do contínuo não pode ser provada como verdadeira a partir desses mesmos axiomas. Portanto, a hipótese do contínuo é o que chamamos na matemática de "proposição formalmente indecidível". Isso significa que pode-se escolher assumir sua validade ou falsidade como um axioma adicional da teoria dos conjuntos.

Mas esse é um assunto bastante complexo para o que nos propomos apresentar neste trabalho, tanto que os estudos de Cohen foram contemplados com a medalha Fields que, para os matemáticos, é o similar ao Prêmio Nobel.

Capítulo 4

Proposta de Sequência Didática

Apesar de ser um assunto complexo, é possível tratar sobre cardinalidade de conjuntos no ensino básico, desde que o adequemos ao nível esperado para esse púlblico. Assim, diante dos resultados expostos ao longo deste trabalho, este capítulo trará uma sequência didática para auxiliar professores de matemática nessa tarefa.

Apresentaremos quatro atividades, sendo que a primeira trata da noção de contagem, a segunda sobre o conceito e classificação das funções, a terceira diz respeito à classificação dos conjuntos quanto sua finitude ou infinitude e do conceito de cardinalidade de conjuntos finitos e infinitos, por fim, a quarta abordará as comparações entre as cardinalidades de alguns conjuntos infinitos.

4.1 Atividade 1

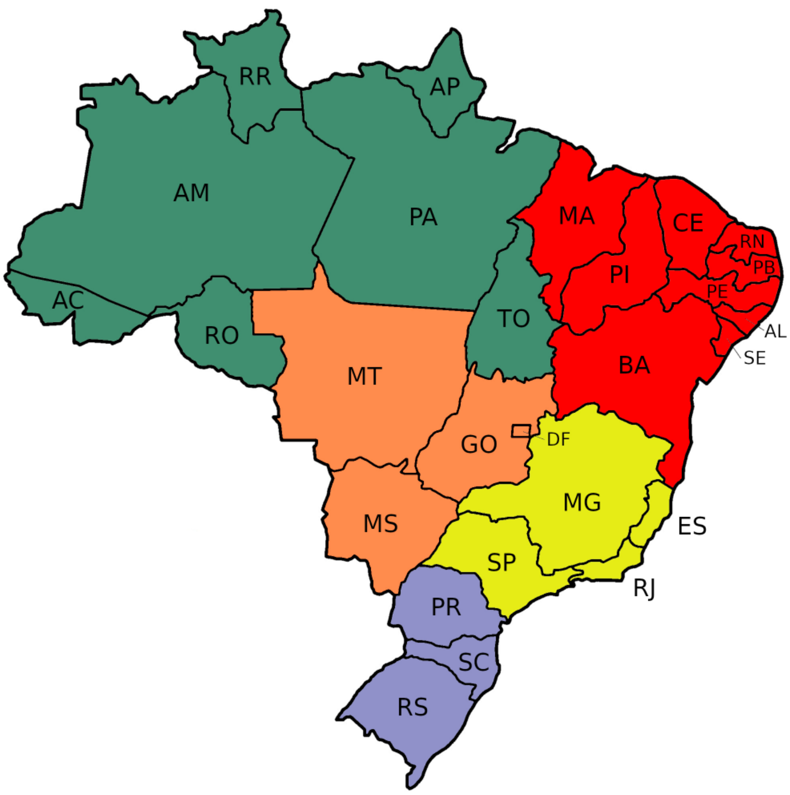
A primeira atividade propõe embasar os discentes sobre o contexto histórico da noção de contagem. Ela será aplicada em três aulas de 50 minutos.

Na primeira aula, o docente pode introduzir o assunto disponibilizando o documentário *"Números, a linguagem universal"* produzido pela TV escola e que pode ser facilmente acessado no youtube através do link: https://www.youtube.com/watch?v=-9uW-D48dXY. Esse vídeo possibilitará aos alunos entenderem que, o que hoje tratamos como algo natural, o surgimento dos números como forma de registrar o resultado de uma contagem foi na verdade um processo evolutivo bastante criativo da humanidade. Após a apresentação do vídeo, na segunda aula, o professor pode discutir com os alunos, de modo a recaptular o que assistiram, que, no início, os homens utilizavam objetos como pedras, gravetos, cordas para saber, por exemplo, quantas ovelhas possuiam. Isso era feito através do processo de *correspondência biunívoca*. Mais tarde, começaram a escrever essas quantidades através de símbolos, os quais eram gravados em pedras ou em tábuas de argila. O professor pode ainda destacar que, por muitos anos, cada povo usava seus próprios símbolos, mas, com o crescimento do comércio e das navegações, várias culturas distintas se cruzavam e era necessário a criação de símbolos para unificar a ideia dos números. Surgia assim o conjunto dos números naturais.

Vejamos alguns exemplos de questões que podem ser aplicadas para ilustrar a ideia de contagem através da correspodência um a um.

Exemplo 4.1.1. *Observando o mapa do Brasil, quantas Regiões há no nosso país? Preencha a tabela abaixo para facilitar a resolução da questão.*

Figura 4.1: Mapa do Brasil.



Fonte: Domínio Público.

Númeração	Regiões
1	
2	
3	
4	
4	
5	

Tabela 4.1: Tabela do Exemplo 4.1.1.

Apesar de bastante simples, esta primeira questão explora o processo de contagem através da correspondência biunívoca de um conjunto com um subconjunto dos números naturais. Além disso, o professor pode pedir para que os alunos esbocem suas respostas para os colegas a fim de instigá-los a perceberem que há diferentes maneiras de fazer uma contagem. Uma pergunta interessante que pode ser abordada é: Qual o total de maneiras possíveis que podemos contar essas regiões?

Exemplo 4.1.2. *Em um evento realizado pela turma do 3° ano para arrecadar fundos para sua formatura, o aluno Pedro ficou responsável por contar todos as senhas vendidas na portaria. Contudo, por um descuido, ele as perdeu, ficando bastante preocupado. Raciocinando um pouco, Pedro verificou que a turma havia arrecadado* $R\$3000,00$ *em bilheteria. Se o valor da entrada era de* $R\$5,00$*, quantas pessoas pagantes estavam prestigiando o evento?*

Após cada aluno solucionar a questão, o professor pode enfatizar que, neste caso, estamos associando um a um os elementos de um conjunto em outro. Como já sabemos a quantidade de elementos de um deles, podemos descobrir a quantidade de elementos do outro. Para ser mais específico, consideremos que cada valor de $R\$5,00$ seja um elemento do conjunto que chamaremos de A. Chamemos de B o conjunto formado pelas pessoas que compraram ingressos na bilheteria do evento. Sabendo que há 600 valores de $R\$5,00$ no conjunto A e que podemos associar cada um desses elementos em uma única pessoa do conjunto B de modo que não sobre nenhum elemento em nenhum dos dois conjuntos, podemos afirmar que esses conjuntos têm o mesmo número de elementos, ou seja, há 600 pagantes no evento.

Exemplo 4.1.3. *O professor deve levar* $1kg$ *de arroz e pedir para que os alunos* *pensem como podem estimar a quantidade de grãos de arroz utilizando apenas uma balança de precisão.*

A resposta para esse exemplo não será exata, mas é importante que os discentes percebam que eles podem verificar a massa m de uma certa quantidade a de grãos de arroz e depois calcular quantos "$m's$" se tem em $1kg$ de arroz. Com esse resultado, basta multiplica-lo por a para encontrar a resposta. Ressalte que o que está por trás desse resultado é, mais uma vez, o processo de correspondência biunivoca entre dois conjuntos que possuem o mesmo número de elementos. O docente pode também questionar como é possível estimar a quantidade de pessoas em um evento ou em uma manifestação, como calcular a quantidade de grãos de areia de uma praia, entre outros exemplos possíveis.

4.2 Atividade 2

Como vimos durante todo o trabalho, o aluno deve ter uma ótima base no que diz respeito às funções para só assim conseguir compreeder o conceito de conjuntos finitos e infinitos, assim como, ser capaz de comparar as cardinalidades desses conjuntos. Por isso, é importante, mesmo que o professor já tenha lecionado tal assunto, relembrar, de maneira formal, o conceito de função e sua classificação quanto injetiva, sobrejetiva e bijetiva. Abaixo estão elencados alguns exemplos de como o professor pode explorar esse tema. Para resolução e explicação das questões abaixo, são previstas duas aulas de 50 minutos.

Exemplo 4.2.1. *As irmãs Paula e Júlia são novas na escola e acabaram de conhecer três meninas: Aline, cujo signo é Áries; as irmãs Beatriz e Cláudia, cujos signos são, respectivamente, Leão e Capricórnio. Paula e Júlia são gêmeas e nasceram em agosto, ou seja, são leoninas. Considere o conjunto A das cinco novas amigas, o conjunto B dos 12 signos do zodíaco e as seguintes relações:*

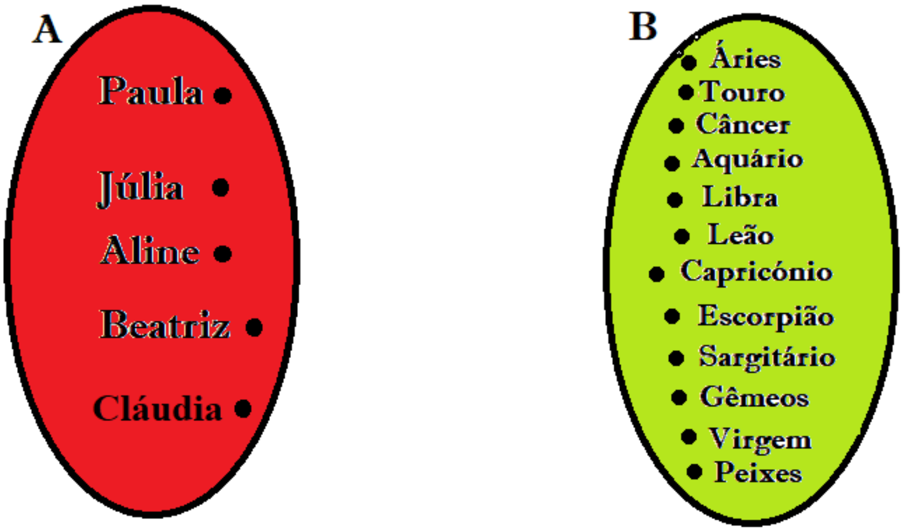


Figura 4.2: Conjuntos A e B do Exemplo 4.2.1.

a) a que associa a cada amiga a sua irmã.

b) a que associa a cada amiga o seu signo.

c) a que associa a cada signo uma amiga que o possui.

Qual(is) é (são) função (ões)?

Aqui o objetivo é fazer com que os discentes distingam quais relações podem ser classificadas como funções. No nosso caso, apenas a relação da letra $b)$ é uma função. Ademais, no momento em que for corrigir essa atividade, o professor pode conceituar domínio, contradomínio e imagem de uma função.

Os próximos três exemplos têm como propósito reforçar o conceito de funções e discutir suas classificações quanto injetiva, sobrejetiva e bijetiva. É necessário que o professor relembre aos alunos tais conceitos e só depois realize os exemplos a seguir:

Exemplo 4.2.2. *(OBMEP- Adaptada) Um professor resolve distribuir uma pesquisa, colocando no quadro três imagens de pontos turísticos de Natal: Morro do Careca, Dunas de Genipabu e as Falésias de Pipa. Em seguida, pediu para que cada um dos 30 alunos escolhesse sua paisagem preferida. Sejam A o conjunto formado pelos alunos e B o conjunto formado pelas três paisagens, determine, em cada situação abaixo, se a relação $f : A \to B$ é uma função e, caso seja, classifique-a em injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.*

a) dez alunos escolheram o Morro do Careca, dez alunos escolheram as Dunas de Genipabu e dez alunos escolheram as Falésias Pipa.

b) todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de Joãozinho que disse não gostar de nenhuma.

c) todos os alunos escolheram sua paisagem preferida, com exceção de Rafael que disse gostar das três de maneira igual.

Exemplo 4.2.3. *O IMC (Índice de Massa Corporal) é uma ferramenta usada para detectar casos de obesidade ou desnutrição. É possível encontrar o resultado do índice de uma pessoa fazendo a divisão da massa corporal pelo quadrado de sua altura. A tabela abaixo mostra uma classificação que leva em conta o valor do IMC:*

IMC	Resultado
Menos do que $18,5$	Abaixo do Peso
Entre $18,5$ e $24,9$	Peso Normal
Entre 25 e $29,9$	Sobrepeso
Entre 30 e $34,9$	Obesidade Grau 1
Entre 35 e $39,9$	Obesidade Grau 2
Mais do que 40	Obesidade Grau 3

Tabela 4.2: Tabela do Exemplo 4.2.3.

a) Observe os diagramas abaixo e associe cada valor do IMC do conjunto A a sua respectiva classificação no conjunto B.

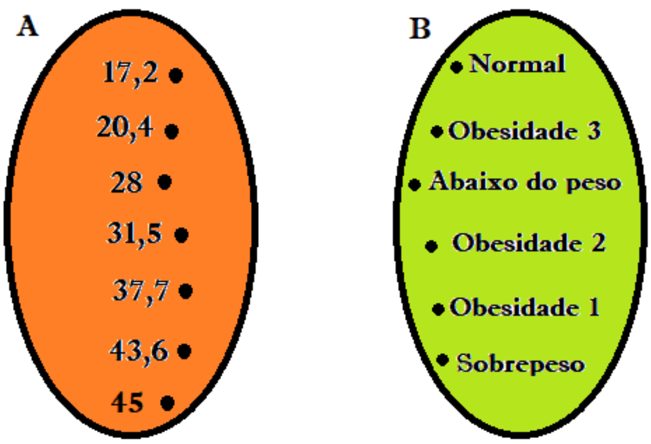


Figura 4.3: Conjuntos A e B do Exemplo 4.2.3.

b) A relação anterior é uma função? Se sim, classifique-a como injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

Exemplo 4.2.4. *Uma fábrica de canetas tem um custo diário de produção de* $R\$180,00$*, mais* $R\$0,30$ *por caneta. Cada caneta é vendida por* $R\$1,20$*.*

a) Encontre a lei de associção do lucro diário $L(x)$ *após a venda de* x *canetas.*

b) Associe o diagrama abaixo que representa o lucro total dessa fábrica em função do número de canetas vendidas.

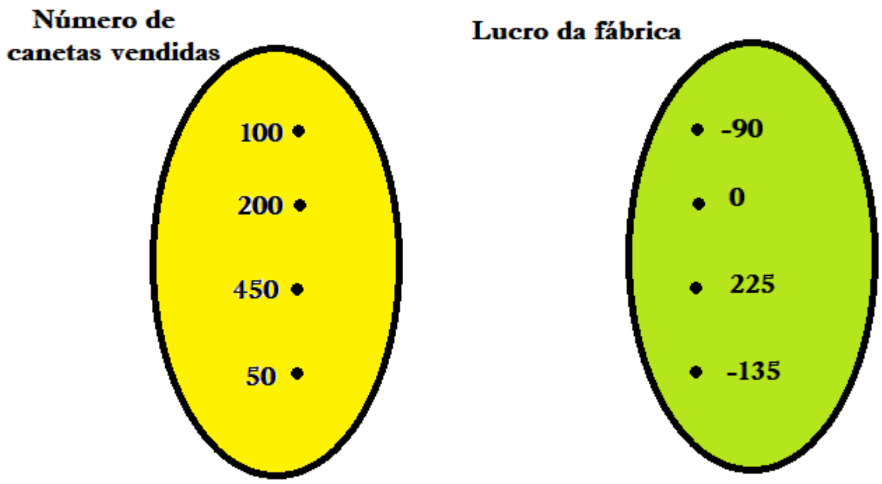


Figura 4.4: Diagrama do Exemplo 4.2.4.

b) A relação anterior é uma função? Se sim, classifique-a como injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

O objetivo da próxima questão é apresentar aos alunos como é possível provar que uma função é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva. A linguagem usada por eles não necessariamente deverá ser precisamente formal, mas é importante que, antes de solucionar essas atividades, o professor resolva um exemplo para eles. Pode-se provar, por exemplo, que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$ é injetiva, sobrejetiva e bijetiva. Para isso, mencione que é injetiva, pois faz corresponder a cada número real x um outro número real obtido pela soma dele por 1, e não existem dois números reais diferentes que quando somados a 1 resulte em números iguais. Simbolicamente: Para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Pode-se também verificar que essa é uma função injetiva apenas observando seu gráfico.

Sabemos que, se a função é injetiva, não há elemento do conjunto imagem que seja imagem de mais de um elemento do domínio. Assim, imaginando linhas horizontais cortando o seu gráfico, essas linhas só cruzam o gráfico uma única vez para cada valor de y, como mostra a figura abaixo:

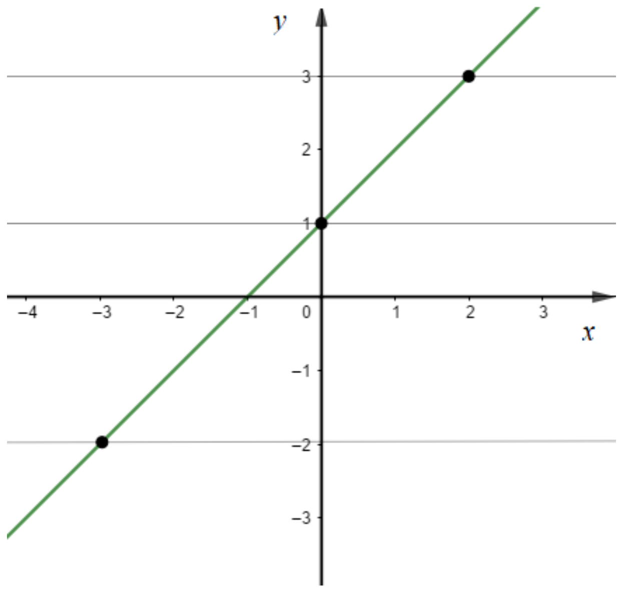


Figura 4.5: Representação gráfica da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$.

Além disso, essa função é sobrejetiva, pois todo elemento de $\mathbb{R}$ é imagem de um elemento de $\mathbb{R}$ pela função $x = f(x) - 1$. Veja:

• $f(x) = 5$ é imagem de $x = 4$, pois $5 - 1 = 4$;

• $f(x) = 0$ é imagem de $x = -1$, pois $0 - 1 = -1$.

Portanto, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$ é injetiva e sobrejetiva, logo é bijetiva.

Exemplo 4.2.5. *Verifique se as funções abaixo são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:*

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$.

b) $f : \{-1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$.

c) $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$.

4.3 Atividade 3

Essa atividade tem como objetivo apresentar alguns resultados importantes que caracterizam os conjuntos finitos e infinitos vistos nos Capítulos 1 e 2 deste trabalho. É importante destacar que a abordagem proposta não será demasiadamente formal, pois, para o público a quem ela é destinada, não seria adequado. Portanto, utilizaremos, como metodologia, a aplicação de exemplos que levem o discente a conjecturar esses resultados. A atividade terá duração de uma aula de 50 minutos.

Exemplo 4.3.1. *Professor, peça para que cinco alunos formem uma fila. Relembre-lhes que, como viram na Atividade* 1*, uma maneira de contar a quantidade de alunos na fila é estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto das pessoas que estão na fila com o sobconjunto dos números naturais* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$*, como mostra o diagrama abaixo: (Usamos nomes fictícios como exemplo)*

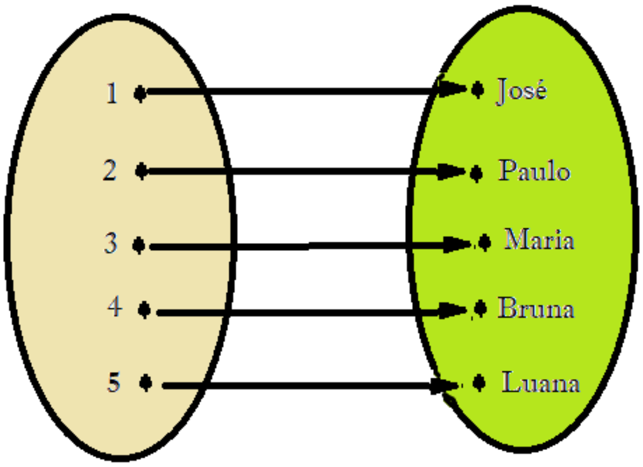


Figura 4.6: Diagrama do Exemplo 4.3.1.

Agora, peça para que os alunos respondam as seguintes questões:

1. *Como podemos classificar essa função?*
2. *O conjunto formado pelos alunos é finito ou infinito?*

Depois da discussão do exemplo, o professor deve apresentar o conceito formal de um conjunto finito: Um conjunto X é *finito* quando existe um natural n de modo que seja possível estabelecer uma bijeção $f : I_n \to X$. Neste caso, diremos que o conjunto X possui n elementos, ou ainda, que sua cardinalidade, denotada por $card(X)$, é n, e, escrevemos $card(X) = n$. Onde, I_n é o conjunto dos números naturais de 1 até n. Por exemplo, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, e, no nosso exemplo, $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Os próximos exemplos trarão algumas questões que podem ser entregues impressas para os discentes responderem e discutirem durante a aula.

Exemplo 4.3.2. *Considere os conjuntos* $A = \{2, 3, 4, 5\}$ *e* $B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$.

a) É possível estabelecer uma bijeção entre eles?

b) Tomando C *e* D*, dois conjuntos finitos quaisquer, sendo* $C \subset D$ *e* $C \neq D$*, é possível estabelecer uma bijeção entre eles? O que poderíamos afirmar sobre suas cardinalidades?*

c) Você consegue pensar na relação que existe entre a quantidade de elementos de dois conjuntos finitos e a possibilidade de estabelecer uma bijeção entre eles?

Com esse exemplo, o professor pode discutir com os alunos, de maneira informal, os seguintes resultados apresentados nos capítulos anteriores: Corolário 1.3.1, Corolário 1.3.2, Teorema 1.3.2.

O próximo exemplo é uma aplicação do princípio das casas do pombos.

Exemplo 4.3.3. *Em uma turma há* 13 *alunos. Posso garantir que há pelo menos duas pessoas que fazem aniversário no mesmo mês? Justifique sua resposta.*

O docente pode mencionar que para solucionar esse exemplo basta utilizarmos um princípio matemático bastante simples chamado de princípio das casas dos pombos. Ele nos diz que, se há mais pombos do que casas em um pombal, qualquer modo de alojar os pombos deverá colocar pelo menos dois deles na mesma casa. Nesse exemplo, podemos considerar que os 12 meses são as casas e que os 13 alunos são os pombos. Como há mais alunos que meses, afirmamos que pelo menos dois alunos serão “alojados” no mesmo mês, ou seja, completam ano no mesmo mês.

Exemplo 4.3.4. *O conjunto* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ *é finito ou infinito? Explique sua resposta.*

Com esse exemplo espera-se justificar, sem tanta formalidade, que o conjunto dos números naturais é infinito. O professor pode mencionar que um conjunto é infinito quando não é finito, ou seja, quando não é possível estabelecer uma bijeção entre ele e o conjunto I_n, não importa qual seja o $n \in \mathbb{N}$. Mas, para a justificativa do exemplo, acreditamos ser necessário apenas argumentar que o conjunto dos números naturais é infinito porque não importa o número tomado, sempre haverá o seu sucessor. De modo que podemos escrever a sequência dos números naturais indefinidamente.

O próximo exemplo foi inspirado pelo texto *O Hotel de Hilbert*.

Exemplo 4.3.5. *Em um estádio de futebol, situado na cidade de Infinitópoles, há infinitas poltronas numeradas da seguinte maneira:* $1, 2, 3, 4, 5, ...$*, isto é, para cada poltrona é associado um número natural. Certo dia, em um jogo disputado entre as equipes do "semfim futebol clube"e "never ends esportes", as torcidas dos dois times, que também possuiam infinitas pessoas, estavam todas acomodadas nas poltronas do estádio, de modo que não havia nenhuma poltrona vazia. Considere as situações abaixo:*

a) Após o início da partida, eis que chega um torcedor do " semfim futebol clube" querendo entrar no estádio. Vocês conseguiriam acomodá-lo em uma das poltronas do estádio? Explique sua resposta.

b) Para assistir o segundo tempo do jogo, chegou uma caravana com um número infinito de torcedores, tantos quantos os números naturais. Vocês conseguiriam alocá-los nas poltronas do estádio? Explique sua resposta.

Com o ítem a), o professor pode discutir que, a princípio, é natural imaginar que o estádio não comportaria mais um torcedor, pois todas as poltronas já estariam ocupadas. Mas se a primeira pessoa se sentar na poltrona de número dois, a segunda pessoa se sentar na poltrona de número três, a terceira pessoa se sentar na poltrona de número quatro, e assim por diante, ou seja, cada pessoa que estiver na poltrona n passar para a poltrona $n + 1$, teremos acomodado todos os torcedores.

No ítem b), o docente pode explicar que para alocar os infinitos torcedores basta passar o torcedor que está na poltrona 1 para a poltrona de número 2, o torcedor da poltrona 2 para a de número 4, o torcedor da poltrona 3 para a de número 6 e assim por diante, ou seja, a pessoa que está na poltrona de número n deverá se sentar na poltrona $2n$. Desse modo, passaríamos todos os torcedores do estádio para as poltronas numerada com números pares, sobrando assim todas as poltronas numeradas com os números ímpares. O docente deve ainda mencionar que, como não podemos contar todos os elementos dos conjuntos infinitos, o que fazemos é comparar "a quantidade de elementos" deles, definindo funções entre eles. Quando for possível encontrar uma função bijetiva entre os elementos de dois conjuntos infinitos, diremos que eles possuem a mesma cardinalidade. No nosso exemplo, no ítem b), ao passarmos todos os torcedores que estavam na poltrona n para a poltrona $2n$, encontramos uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares, logo, concluimos que esses conjuntos possuem a mesma cardinalidade. Podemos escrever isso em linguagem matemática: $card(\mathbb{N}) = card(P)$, em que $P = \{2, 4, 6, 8, ...\}$. O que pode ser uma surpresa para os alunos é que, com esse exemplo, percebemos que, diferente dos conjuntos finitos, os conjuntos infinitos podem se relacionar de forma biunívoca com um subconjunto próprio. O próximo exemplo enfatizará essa característica dos conjuntos infinitos. Trata-se do dicionário infinito (hyperwebster) proposto pelo famoso divulgador da matemática Ian Stewart (ver [3]):

Exemplo 4.3.6. ***(O Dicionário Infinito)***

Uma editora decide imprimir um dicionário contendo todas as palavras que podem ser criadas a partir do alfabeto português, mesmo aquelas que não tenham sentido.

De modo a não deixar nenhuma palavra de fora, a editora organizou esse dicionário da seguinte maneira:

A, AA, AAA, ..., AB, ABA, ABAA, ..., AC, ..., AZ, AZA, ...

B, BA, BAA, ..., BB, BBA, BBAA, ..., BC, ..., BZ, BZA, ...

C, CA, CAA, ..., CB, CBA, CBAA, ..., CC, ..., CZ, CZA, ...

Z, ZA, ZAA, ..., ZB, ZBA, ZBAA, ..., ZC, ..., ZZ, ZZA, ...

A equipe da editora então percebeu que podia dividir as palavras em 26 volumes, cada um contendo as palavras que começam com uma mesma letra:

***Volume A**: A, AA, AAA, ..., AB, ABA, ABAA, ..., AC, ..., AZ, AZA, ...*

***Volume B**: B, BA, BAA, ..., BB, BBA, BBAA, ..., BC, ..., BZ, BZA, ...*

***Volume C**: C, CA, CAA, ..., CB, CBA, CBAA, ..., CC, ..., CZ, CZA, ...*

$\vdots$

***Volume Z**: Z, ZA, ZAA, ..., ZB, ZBA, ZBAA, ..., ZC, ..., ZZ, ZZA, ...*

Ao eliminar a primeira letra de todas as palavras de um dos volumes, digamos do volume A, como ficou esse volume em relação ao dicionário por completo? O que podemos concluir com isso?

O professor pode explicar que a “quantidade de elementos” de cada volume (subconjuntos próprios do dicionário) é a mesma do dicionário e esse exemplo mostra uma forma quase que concreta de ver isso.

Exemplo 4.3.7. *Verifique se as funções $f : A \to B$ abaixo são bijetivas e conclua que $card(A) = card(B)$ ou $card(A) \neq card(B)$.*

a) $f(x) = 2x - 1$, sendo $A = \mathbb{N}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$.

b) $f(x) = x^2$, sendo $A = \mathbb{N}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} |\ x$ é um quadrado perfeito$\}$.

c) $f(x) = x + 1$, sendo $A = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $B = \mathbb{N}$

O objetivo dessa atividade é fazer os alunos provarem que as funções apresentadas são ou não bijetivas. Caso sejam, eles deverão concluir que $card(A) = card(B)$, caso contrário, cocluirão que $card(A) \neq card(B)$.

4.4 Atividade 4

A atividade 4 tem como objetivo comparar a cardinalidade dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Ademais, mostrar, algebricamente e, quando possível, geometricamente, que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $card\big((0,1)\big) = card\big((a,b)\big) = card\big((0,\infty)\big) = card(\mathbb{R})$. Relembre aos alunos que para encontrar a cardinalidade de um conjunto finito basta contarmos quantos elementos os mesmos possuem, por exemplo, o conjuto $A = \{2, 3, 4, 6\}$ tem $card(A) = 4$. Para os conjuntos infinitos isso não é possível. Daí, um matemático chamado Georg Cantor estabeleceu uma estratégia de comparação entre esses conjuntos. Basicamente, quando for possível estabelecer uma bijeção entre dois conjuntos infinitos A e B diremos que eles possuem a mesma cardinalidade e denotamos $card(A) = card(B)$. Cantor descobriu que a menor das cardinalidades dos conjuntos infinitos é a do conjunto dos números naturais. Ele a denotou pelo símbolo $\aleph_0$ (lê-se: álefe zero), isto é, $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Portanto, todo conjunto que possuir uma correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$ também terá cardinalidade $\aleph_0$.

À princípio, a ideia de cardinalidade dos conjuntos infinitos é um pouco difícil de ser compreendida, mas notem que quando falamos que ambos os conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{a, b, c\}$ têm cardinalidade três, usamos o simbolo 3 para representar essa quantidade. Da mesma maneira utilizamos o símbolo $\aleph_0$ para representar a cardinalidade dos conjuntos que têm a "mesma quantidade de elementos" de $\mathbb{N}$. Além disso, Cantor classificou esses conjuntos como enumeráveis.

Essa atividade tem previsão de 2 aulas de 50 minutos para ser aplicada.

Exemplo 4.4.1. *Dados os conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros. Verifique se eles possuem a mesma cardinalidade.*

O professor deve explicar que para verificar se a cardinalidade desses conjuntos são iguais, os discentes devem buscar um método lógico de relacionar cada um dos números naturais a um único número inteiro de modo que não sobre nenhum elemento nos dois conjuntos, ou ainda, apresentar uma função bijetiva que os relacionem. É aconselhável deixá-los pensar um tempo por si mesmos. Em seguida, o professor pode mostrar a estratégia utilizada por Cantor para provar que $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Z})$, a qual se encontra no Exemplo $2.0.6$, na página 40 deste trabalho, mais precisamente na Figura 2.2. Além disso, mostrar a função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ apresentada também no Exemplo $2.0.6$ e pedir para que os alunos testem alguns valores de modo a fazer eles perceberem que, de fato, ela é bijetiva. Portanto, $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

Exemplo 4.4.2. *Dados os conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto $\mathbb{Q}_+$ dos números racionais positivos. Qual a relação entre suas cardinalidades?*

O objetivo dessa questão é fazer os alunos raciocinarem se é possível estabelecer uma bijeção entre esses conjuntos. Para o nível do púplico-alvo, o professor pode apresentar a estratégia utilizada por Cantor, também já apresentada nesse trabalho, contudo um pouco diferente da metodologia que iremos utilizar aqui.

Cantor considerou uma tabela com infinitas linhas e infinitas colunas. Na primeira linha ele colocou, em ordem decrescente, todas as frações positivas com numeradores iguais 1, na segunda linha, todas as frações positivas com numeradores iguais a 2 e assim sucessivamente. Notem que todas as frações aparecem nessa lista. Em seguida, Cantor estabeleceu uma ordem para essas frações indicada pelas flechas, como mostra a figura abaixo:

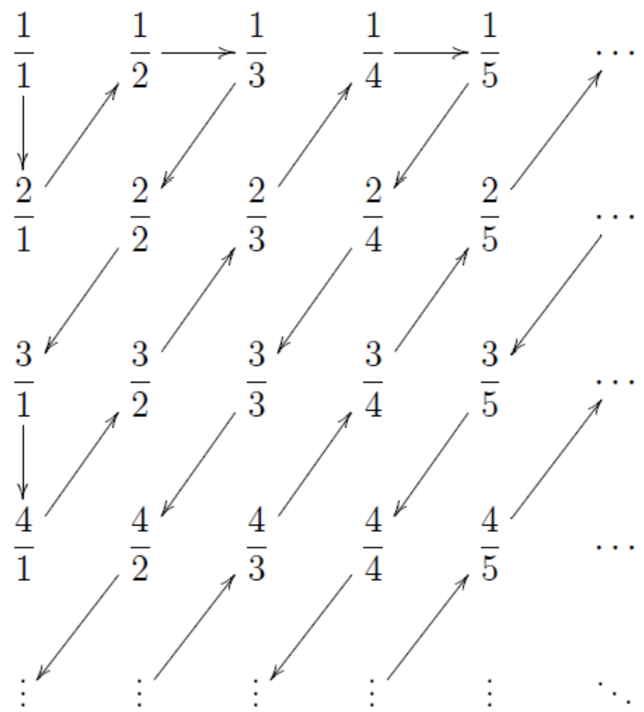


Figura 4.7: O passeio de Cantor.

Ao ordenar todas as frações positivas, Cantor conseguiu encontrar uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$. Essa função é tal que $f(1) = \frac{1}{1}$, $f(2) = \frac{2}{1}$, $f(3) = \frac{1}{2}$, $f(4) = \frac{1}{3}$, $f(5) = \frac{3}{1} \cdots$ e assim por diante, de modo que cada número natural seja associado a uma única fração diferente. Percebam que, para isso, Cantor desconsiderou as frações repetidas, por exemplo, $f(5) = \frac{3}{1}$ e não $f(5) = \frac{2}{2}$, pois, caso contrário, a função não seria injetiva, já que $f(1) = f(5) = 1$. Como conseguimos estabelecer uma bijeção entre esses conjuntos, diremos então que $card(\mathbb{N}) = card(\mathbb{Q}_+)$.

Exemplo 4.4.3. *Dados os conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. É possível estabelecer uma correspodência biunívoca entre eles?*

O objetivo é mostrar para os alunos que não é possível encontrar uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. O professor pode utilizar o argumento intuitivo apresentado nesse trabalho na página 50, pois consideramos que os discentes do ensino básico tenham capacidade suficiente para compreendê-lo. Não o repetiremos aqui para não tornar o texto monótono. Ao final da explicação, o professor pode relembrar que, no início da aula, foi mencionado que a menor cardinalidade dos conjuntos infinitos é $\aleph_0$, ou seja, a cardinalidade dos números naturais, logo $card(\mathbb{R}) > card(\mathbb{N})$. Cantor classificou os conjuntos cuja cardinalidade seja diferente de $\aleph_0$ de conjuntos não enumeráveis. Ele provou então que existiam conjuntos infinitos diferentes, com "quantidade de elementos" distintas.

Exemplo 4.4.4. *Dados o conjunto dos números reais entre* 0 *e* 1*, ou seja,* $(0,1)$ *e o conjunto dos números entre* 0 *e* 100*, isto é,* $(0,100)$*. Qual deles possui mais elementos?*

O objetivo dessa questão é levar os alunos a compreenderem que as cardinalidades de quaisquer intervalos reais abertos são iguais. O professor deve instigá-los a encontrar uma função bijetiva $f:(0,1)\to(0,100)$. Após discussão, o docente mostrará que a função $f:(0,1)\to(0,100)$ definida por $f(x)=100x$ é bijetiva. Isso pode ser feito através do gráfico dessa função. Portanto, $card\big((0,1)\big)=card\big((0,100)\big)$. Além disso, o professor pode mencionar que, mais que isso, $card\big((0,1)\big)=card\big((a,b)\big)$, para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$, com $a<b$. Uma demonstração intuitiva para esse resultado pode ser obtida a partir de conceitos geométricos utilizando o software Geogebra. Explique para os discentes que um intervalo real pode ser representado geometricamente a partir de um segmento de reta. Tome o segmento de reta (a,b) como a base de um triângulo e $(0,1)$ um segmento paralelo a (a,b), unindo os outros dois lados desse triângulo. Seja P o vértice oposto à base (a,b). Obtém-se uma correspondência biunívoca $f:(0,1)\to(a,b)$ associando a cada $x\in(0,1)$ o ponto $f(x)$ onde a semirreta Px intersecta a base (a,b).

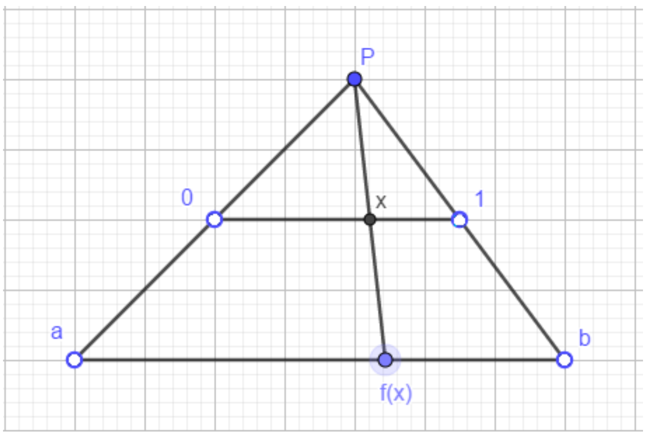


Figura 4.8: Representação geométrica da função $f:(0,1)\to(a,b)$.

O interessante em usar o Geogebra é a possibilidade de mover o ponto $f(x)$ ao longo de todo segmento (a, b). Fazendo isso, os alunos perceberão que o ponto x também percorrerá todo segmento $(0, 1)$, mostrando assim a sobrejetividade da função. Além disso, eles verão que para cada ponto x encontramos um único $f(x)$, o que significa que a função é injetiva. Logo, f é, de fato, bijetiva.

A construção acima e a Figura 4.8 servem para o caso em que $(0, 1)$ tem comprimento menor do que o de (a, b). Quando ocorre o contrário, a construção é parecida, onde trocamos os intervalos de posição no triângulo.

Exemplo 4.4.5. *Dados o conjunto dos números reais entre* 0 *e* 1*, ou seja,* $(0, 1)$ *e o conjunto dos números maiores que* 0*, isto é,* $(0, \infty)$*. Qual deles possui mais elementos?*

O objetivo dessa questão é levar os alunos a compreenderem que $card\big((0, 1)\big) = card\big((0, \infty)\big)$. O professor deve dar um tempo para que os alunos possam, por si mesmos, encontrar uma função bijetiva $f : (0, 1) \to (0, \infty)$ ou $g : (0, \infty) \to (0, 1)$. Após discussão, o professor pode construir no Geogebra, junto com os alunos, o gráfico da função $f : (0, 1) \to (0, \infty)$ definida por $f(x) = \frac{x}{1-x}$ (Figura 4.9), para mostrar que ela é bijetiva, provando assim o que queríamos.

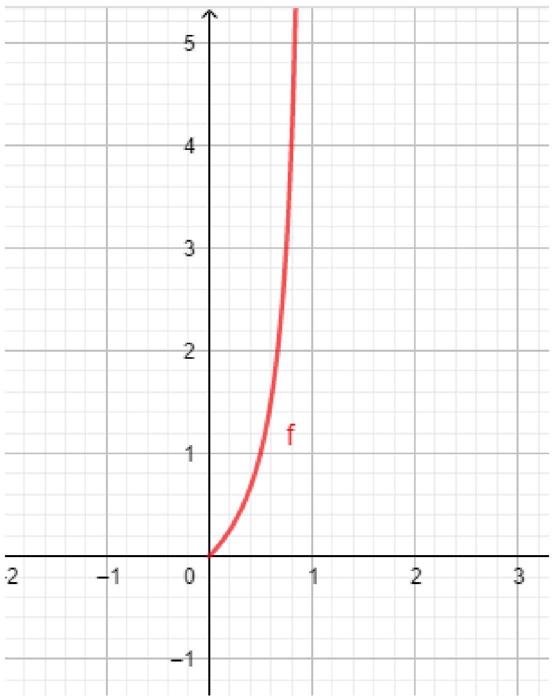


Figura 4.9: Representação gráfica da função $f : (0, 1) \to (0, \infty)$.

Mas também seria interessante que o docente utilizasse de instrumentos geométricos para provar, de modo intuitivo, esse resultado. Nós já mostramos esse argumento no Exemplo $3.0.2$ na página 52 deste trabalho, mas vamos fazer uma pequena adaptação para facilitar o entendimento dos alunos.

Para a função f, considere o intervalo $(0, \infty)$ como sendo o eixo das abscissas positivo do plano de cordenadas cartesianas e escreva o intervalo $(0, 1)$ no eixo das ordenadas. Considere ainda o ponto $P = (-1, 1)$. Defina a função $f : (0, 1) \to (0, \infty)$ associando a cada número $x \in (0, 1)$ o número $f(x)$ tal que $\big(f(x), 0\big)$ é o ponto no qual a reta que passa pelos ponto P e $(0, x)$ intersecta o eixo x. No geogebra, o professor deve construir a figura abaixo a qual exibe o que descrevemos.

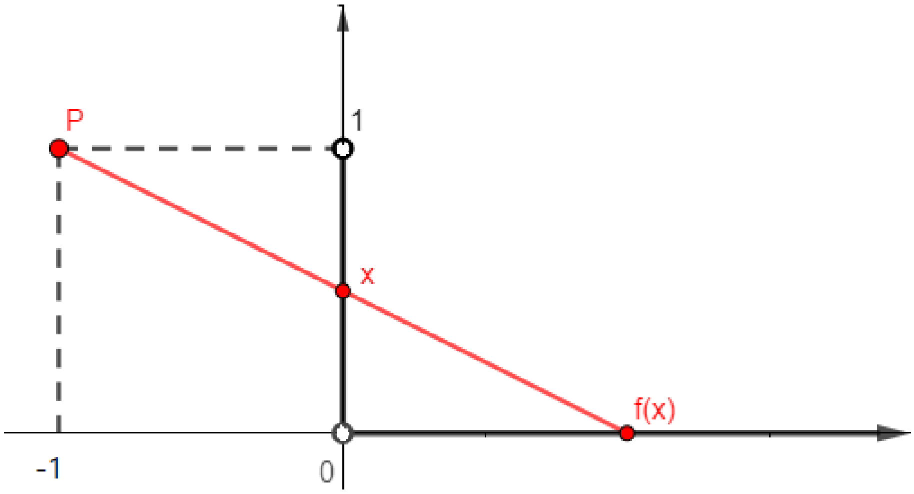


Figura 4.10: Representação geométrica da função $f : (0, 1) \to (0, \infty)$.

Deste modo, no Geogebra, o professor pode mover o ponto x entre 0 e 1 até um certo ponto. Fazendo isso, os alunos perceberão que o ponto $f(x)$ vai se mover ao entre 0 e qualquer ponto do eixo $(0, \infty)$. É claro que, diferente do exemplo anterior, não poderemos percorrer a semirreta inteira, pois ela é ilimitada, mas pode-se destacar que por mais distante da origem que esteja o ponto $f(x)$, ainda haverá um ponto $x \in (0, 1)$ que fará correspondência com ele e que será diferente dos demais, apesar de não ser possível observar isso a "olho nú". Provando assim que a função é bijetiva.

Exemplo 4.4.6. *Dados o conjunto dos números reais entre 0 e 1, ou seja, $(0, 1)$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Qual deles possui mais elementos?*

O objetivo dessa questão é levar os alunos a compreenderem que $card\big((0, 1)\big) =$

$card(\mathbb{R})$. Se essa atividade for direcionada a uma turma que já estudou funções trigonométricas, o professor pode explicar que, como vimos, a cardinalidade do intervalo $(0,1)$ é igual a cardinalidade de qualquer conjunto (a,b), com $a,b \in \mathbb{R}$. Em particular, $card\big((0,1)\big) = card\big((0,\frac{\pi}{2})\big)$. Logo, se encontrarmos uma função bijetiva $f : (0,\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, teríamos que $card\big((0,1)\big) = card\big((0,\frac{\pi}{2})\big) = card(\mathbb{R})$. Com o auxílio do Geogebra, construa, junto com os alunos, o gráfico da função $f : (0,\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (Figura 4.11). Com isso, eles perceberão que ela é bijetiva. Isso demonstra que, de fato, a reta tem o mesmo número de pontos que o segmento $(0,1)$.

Figura 4.11: Representação gráfica da função $f : (0,\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$.

Mas também é possível estabelecer essa bijeção de forma geométrica. Nós já mostramos esse argumento no Exemplo 3.0.3 na página 54 deste trabalho, mas, outra vez, precisamos adequá-lo para que nossos alunos possam compreendê-lo de maneira clara.

No Geogebra, trace no plano cartesiano a reta $y = \frac{1}{2}$ para representar a reta real. Construa o segmento $(0,1)$ perpendicular à reta de modo que o ponto de intersecção entre eles seja $(0, \frac{1}{2})$. Considere o ponto P no primeiro quadrante de modo que a reta suporte do segmento $P1$ seja paralela à reta real. De modo análogo, tome o ponto Q no terceiro quadrante de modo que a reta suporte do segmento $Q0$ seja paralelo à reta real. Agora, defina a função $f : (0, \frac{1}{2}) \to (0, \infty)$ associando a cada número $x \in (0, \frac{1}{2})$ o número $f(x)$ tal que $\left(f(x), \frac{1}{2}\right)$ é o ponto no qual a reta que passa pelos pontos Q e $(0, x)$ intersecta a reta desenhada anteriormente. De forma parecida, defina a função $g : (\frac{1}{2}, 1) \to (-\infty, 0)$ associando a cada número $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ o número $g(x)$ tal que $\left(g(x), \frac{1}{2}\right)$ é o ponto no qual a reta que passa pelos ponto P e $(0, x)$ intersecta a reta desenhada anteriormente.

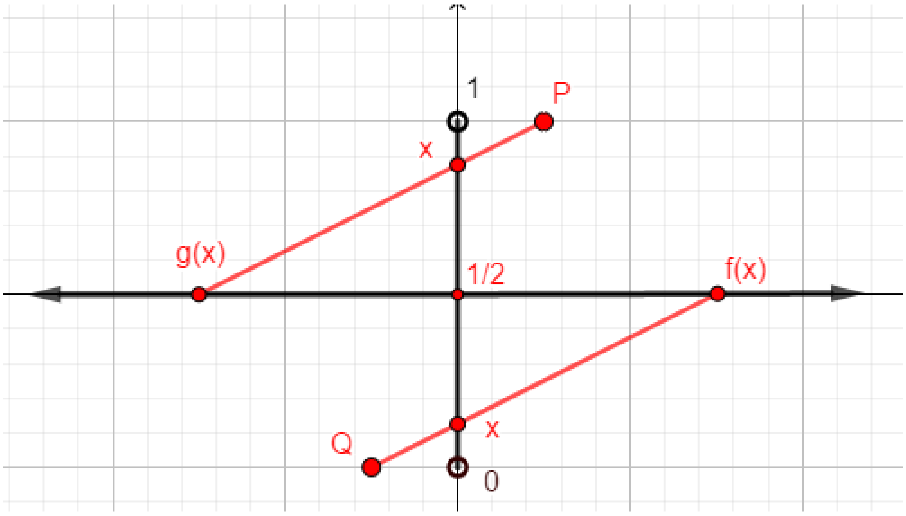


Figura 4.12: Representação geométrica da função $h : (0,1) \to \mathbb{R}$.

Agora, defina $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ pondo

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ g(x) & , \text{ se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , \text{ se } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Não é viável mostrar que essa função é bijetiva de maneira rigorosa como fizemos no Exemplo 3.0.3. Basta então mover os pontos $f(x)$ e $g(x)$ para mostrar aos discentes que para todo ponto da reta real conseguiremos encontrar um correspondente diferente no segmento $(0, 1)$.

Ao final da aula, o professor pode informar aos alunos que Cantor classificou a cardinalidade dos conjuntos cuja cardinalidade era igual a cardinalidade dos números reais de $\aleph_1$. Ele ainda descobriu que, além das cardinalidade $\aleph_0$ e $\aleph_1$, existiam outras infinitas classes de cardinalidades. Em outras palavras, Cantor descobriu que existem infinitos tipos de infinitos. Além disso, o docente pode relatar que a teoria dos conjuntos desenvolvida por Cantor foi tão revolucionária para sua época, que muitos matemáticos contemporâneos a ele o perseguiam e tentavam difamar seu trabalho. Entre os críticos, estava Kronecker, seu antigo instrutor. Somada às críticas, o fato de não conseguir provar a sua hipótese de que não havia nenhum conjunto com cardinalidade maior que a cardinalidade dos conjuntos dos números naturais e menor que a do conjunto dos números reais, chamada hoje de *hipótese do contínuo*, fê-lo, perto do fim da vida, sofrer com problemas mentais. Após várias internações em hospitais psiquiátricos, conforme escreveu Belna ([2]), Cantor faleceu com um ataque cardíaco em 6 de Janeiro de 1918, em Hale, deixando seu legado para futuras gerações de matemáticos.

Capítulo 5

Conclusão

Sabemos que um dos desafios do professor de matemática da educação básica é “adequar” os conteúdos de modo a não ser tão formalista, pois isso pode tornar sua matéria desinteressante e cansativa para os discentes, e ao mesmo tempo ser fiel aos conceitos e ao rigor mínimo necessário para o nível no qual leciona. Pensando nisso, fomos inspirados a escrever essa dissertação com o intuito de que ela se torne um material auxiliar para que os professores de matemática possam tratar sobre a cardinalidade dos conjuntos finitos e infinitos em suas aulas, mesmo que para turmas do ensino básico.

Vimos que isso é possível porque toda a teoria inicial desenvolvida por Cantor quanto à cardinalidade de conjuntos passa pela aplicação dos conceitos de funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas, assuntos que fazem parte do currículo do estudante do ensino básico. Dessa forma, além de proporcionar a aprendizagem sobre cardinalidade, as atividades propostas proporcionam ao discente um aprofundamento sobre esses conceitos.

Além disso, destacamos a importância de que o professor tenha pleno domínio sobre o tema e, para isso, pode se apropriar da parte teórica exibida nos três primeiros capítulos. Sobre a proposta didática apresentada no último capítulo, destacamos que o docente deverá adequá-la a sua realidade, ou seja, os exemplos expostos podem ser utilizados tais quais foram apresentados aqui ou modificados conforme sua criatividade.

Ademais, esperamos que este trabalho encontre seu papel como fonte de motivação e inspiração para outros pesquisadores que se interessam pela área.

Referências Bibliográficas

[1] BARGAS, Caio Leonardo Duarte. **Uma perspectiva sobre o Ensino de Funções Bijetivas e Cardinalidade no Ensino Médio**, 2020. 104 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, São Paulo, 2020.

[2] BELNA, Jean-Pierre, **Cantor/ Jean-Pierre Belna**; tradução Guilherme João Ferreira, São Paulo: Estação Liberdade, 2011.

[3] BHIDE, Ravi. **Hyperwebster - an uncountable dictionary**. Blogger, Califórnia-EUA, 2 jul. 2011. Disponível em: http://ravi-bhide.blogspot.com/2011/07/hyperwebster-uncountable-dictionary.html?m=1. Acesso: 13 fev. 2021.

[4] BORGES, Bruno Andrade. **O infinito na matemática**, 2015. 89 f. Dissertação (Mestrado) - Profmat, USP, São Paulo, 2015.

[5] CAMARGO, Bruno Aguiar Alves. **Explorando o infinito de Cantor e apresentando-o ao ensino médio**, 2020. 151 f. Dissertação (Mestrado) - Profmat, UNESP, São Paulo, 2020.

[6] GONÇALVES, Mirian Buss; GONÇALVES, Daniel. **Elementos da Análise**. 2. ed. Florianópoles: Ufsc, 2012.

[7] HALMOS, P. **Números e funções reais**, Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[8] LEÃO, Alessandro Mignac Carneiro. **Noções básicas de infinito e números cardinais**, 2014. 57 f. Dissertação (Mestrado) - Profmat, UFPB, João Pessoa, 2014.

[9] LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**, Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[10] LIMA, Elon Lages. **Um curso de análise**, Rio de Janeiro: SBM, 1987.

[11] LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1: Funções de uma variável.**, Rio de Janeiro: IMPAR, 2006.

[12] LIMA, Paulo Cupertino de. **Fundamentos de análise I** , Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.

[13] MEYRIES, Martin. **INFINITY: a simple, but not too simple introduction**. Cornell University, Nova York, v. 1, n. 2, p. 1-22, jun. 2015. Semanal. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1506.06319.pdf. Acesso em: 08 jul. 2020.

[14] MORRIS, Richard. **Uma breve história do Infinito – dos paradoxos de Zenão ao universo quântico**; tradução Maria Luiza X de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

[15] PIMENTEL, Rodrigo. **O infinito: um estudo sobre as diferentes concepções**. Revista Interfaces, Suzano-sp, v. 2, n. 2, p. 53-57, out. 2010. Anual.

[16] PROFMAT, **MA14 – Aritmética**. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/ma14. Acesso: 01 jun. 2020.

[17] ROSALES, José . **Numerabilidad y cardinalidad de conjuntos**. Matemática, Educación e Internet, Costa Rica, v. 17, n. 2, p. 1-45, ago. 2017. Semanal. Disponível em: http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/. Acesso em: 08 jul. 2020.

[18] SANTOS, Tatiana de Souza Lima. **O Conceito de Infinito: Uma Abordagem a Partir da Resolução de Problemas**, 2015. 54 f. Dissertação (Mestrado) - Profmat, UFBA, Salvador, Bahia, 2015.