



Universidade do Estado de Mato Grosso  
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas  
Departamento de Matemática



**CONEXÃO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA NO CONTEXTO DA BNCC À LUZ  
DO CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**

**JOSIMARA LIMA FURTADO DOS SANTOS**

Orientador: Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

**BARRA DO BUGRES  
2021**

# CONEXÃO ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA NO CONTEXTO DA BNCC À LUZ DO CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Josimara Lima Furtado dos Santos e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Bugres, 24 de março de 2021.

Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares.  
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Prof. Dr. Eitácio Pedro da Silva Júnior

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT, da Universidade do Estado de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**

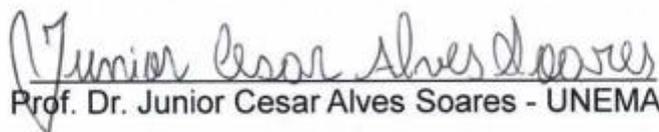
Walter Clayton de Oliveira CRB 1/2049

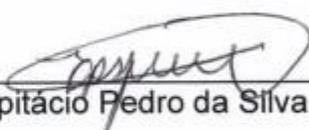
SANTOS, Josimara Lima Furtado dos.  
S237c      Conexão entre Matemática e Música no Contexto da Bncc à Luz do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática / Josimara Lima Furtado dos Santos – Barra do Bugres, 2021. 90 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

Trabalho de Conclusão de Curso  
(Dissertação/Mestrado) – Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Mestrado Profissional em Matemática, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Barra do Bugres, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2021.  
Orientador: Junior Cesar Alves Soares

1. Matemática. 2. Música. 3. Conhecimento Especializado. 4. Bncc. 5. Função. I. Josimara Lima Furtado dos Santos. II. Conexão entre Matemática e Música no Contexto da Bncc à Luz do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática: .  
CDU 51:78

Dissertação Mestrado defendida em 24 de março de 2021 e aprovada Pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

  
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares - UNEMAT

  
Prof. Dr. Epitácio Pedro da Silva Júnior - UNEMAT



Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza – UFMT

Dedico este trabalho a todos que, de alguma forma, tenham contribuído para o meu sucesso.

## AGRADECIMENTOS

Antes de qualquer coisa, tenho que agradecer a Deus que me acompanhou, me guiou, me transformou, me deu fé e principalmente me ajudou nos momentos mais difíceis. Não há palavras suficientes para mostrar o tamanho da minha gratidão, pois só Deus sabe o quanto eu ajoelhei diante Dele, o quanto eu pedi e agradei por cada vitória, mesmo aquelas consideradas pequenas.

Quero aqui agradecer também ao meu esposo Mauro que sempre esteve comigo, me motivando e dando forças para que pudesse chegar até aqui. Expresso também a minha gratidão às minhas filhas Lara Vitória e Maria Júlia por me apoiarem e me deixarem feliz com pequenas e simples palavras, mesmo estando muitas vezes ausente. Ao meu filho Edriweizzer agradeço por me ajudar em pequenas tarefas, mas que fizeram grandes diferenças na minha vida.

Jamais poderia deixar de agradecer aos meus pais José Furtado e Maria por me apoiarem sempre nas decisões que já tomei, por estarem sempre presentes em tudo que preciso e por me ajudarem a orar nas horas mais difíceis.

Agradeço aqui também, às minhas duas amigas de viagens, tarefas e estudos, Brunna e Miriam, que sempre estiveram me apoiando e me animando durante todo esse processo do mestrado.

Também agradeço ao meu orientador professor Dr Junior que sempre esteve muito presente para que este trabalho acontecesse, me auxiliando muito no que foi necessário.

E, por fim, não posso deixar de agradecer à Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

Símbolos são ferramentas e, assim como a música não é uma sequência de notas, a Matemática não é sobre símbolos.

Michel Janos

## RESUMO

Esta pesquisa mostra o quanto há uma conexão intrínseca entre a música e a matemática, a qual pode ser utilizada no ensino de conteúdos matemáticos como recurso motivador. Em particular, pode-se observar a aplicabilidade em funções trigonométricas.

O presente trabalho ainda aborda o novo documento da Educação Básica Brasileira que é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e, com intuito e preocupação de melhorar o ensino da Matemática Básica, também apresenta o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) que auxilia muito os professores a melhorarem sua didática, pois a maior preocupação é a aprendizagem do aluno.

Dedica-se um capítulo à abordagem dos conceitos matemáticos necessários para o desenvolvimento da proposta pedagógica contida neste trabalho.

Por fim, propõe atividades para Função Trigonométrica utilizando a música como recurso metodológico com apoio dos softwares GeoGebra e Audacity.

Palavras-chave: MATEMÁTICA – MÚSICA – CONHECIMENTO ESPECIALIZADO – BNCC – FUNÇÃO.

**ABSTRACT**

This research shows how much there is an intrinsic connection between music and mathematics which can be used in teaching mathematical content as a motivating resource. In particular, one can observe the applicability in trigonometric functions.

The present work also addresses the new Brazilian Basic Education document, which is the National Common Curricular Base (BNCC) and with the intention and concern to improve the teaching of Basic Mathematics, it also presents the Specialized Knowledge of the Mathematics Teacher (MTSK), which greatly teachers to improve their teaching skills, as the main concern is student learning.

Soon there is a chapter with approaches to the mathematical concepts necessary for the development of the pedagogical proposal contained in this work.

Finally, it proposes activities for the Trigonometric Function using music as a methodological resource with the support of GeoGebra and Audacity software.

Keywords: MATHEMATICS - MUSIC - SPECIALIZED KNOWLEDGE - BNCC - FUNCTION.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 01 - Instrumento Órgão .....	14
Figura 02 - Instrumento Teclado Musical.....	15
Figura 03 - O Monocórdio de Pitágoras .....	20
Figura 04 - Oitava de Pitágoras.....	21
Figura 05 - Quarta de Pitágoras .....	22
Figura 06 - Quinta de Pitágoras .....	22
Figura 07 - Proporções de Pitágoras em uma Guitarra .....	24
Figura 08 - Notas da Escala Cromática.....	25
Figura 09 - Escala musical temperada .....	26
Figura 10 - Subdomínios do MTSK .....	39
Figura 11 - Triângulo Retângulo com cateto oposto e cateto adjacente em relação ao ângulo A ( $\alpha$ ).....	48
Figura 12 - Triângulo Retângulo com cateto oposto e cateto adjacente em relação ao ângulo B ( $\beta$ ).....	48
Figura 13 - Semirreta AO e as perpendiculares CD, EF e GH .....	48
Figura 14 - Triângulos Retângulos em A semelhantes .....	50
Figura 15 - Triângulo Retângulo CAB.....	51
Figura 16 - Triângulo Retângulo em A.....	52
Figura 17 - Triângulo BAC com $\alpha$ e $\beta$ complementares.....	52
Figura 18 - Triângulo Equilátero .....	54
Figura 19 - Triângulo Isósceles .....	54
Figura 20 - Circunferência Trigonométrica .....	56
Figura 21 - Quadrantes .....	56
Figura 22 - Função Quadrática.....	57
Figura 23 - Função Cúbica .....	58
Figura 24 - Função Periódica - $p=2$ .....	59
Figura 25 - Função Periódica - $p=3$ .....	59
Figura 26 - Função Limitada.....	60
Figura 27 - Função Seno.....	60
Figura 28 - Gráfico da função seno para $x \in [0, 2\pi]$ .....	62
Figura 29 - Gráfico da curva senoide .....	62
Figura 30 - Periodicidade da função seno .....	62

Figura 31 - Função Seno $f(x) = \text{sen}(x)$ .....	63
Figura 32 - Função Seno $g(x) = 2 \text{sen}(x)$ .....	63
Figura 33 - Função Seno $f(\alpha) = \text{sen}(\alpha)$ .....	64
Figura 34 - Função Seno $g(\alpha) = \text{sen}(2\alpha)$ .....	64
Figura 35 - Representação da Amplitude .....	65
Figura 36 - Representação do comprimento de onda .....	66
Figura 37 - Função Cosseno.....	67
Figura 38 - Gráfico da função cosseno para $x \in [0, 2\pi]$ .....	68
Figura 39 - Gráfico da curva cossenoide.....	68
Figura 40 - Gráfico da Função $f(x) = \text{cos}x$ .....	69
Figura 41 - Gráfico da Função $f(x) = 2\text{cos}x$ .....	69
Figura 42 - Gráfico da Função $f(x) = \text{cos}(2x)$ .....	69
Figura 43 - Parte do Vídeo Donald no País da Matemática .....	70
Figura 44 - Música dos Ângulos Notáveis .....	71
Figura 45 - Programa Audacity.....	72
Figura 46 – Construindo uma faixa .....	72
Figura 47 - Janela do Audacity .....	73
Figura 48 - Gerando o som .....	73
Figura 49 - Gerando o som a partir da frequência.....	74
Figura 50 - Como o som aparece.....	74
Figura 51 - Representação do som.....	74
Figura 52 - Representação de dois sons.....	75
Figura 53 - Funções seno .....	77
Figura 54 - Funções seno representando Amplitudes .....	77
Figura 55 - Calculando a lei da função por meio de gráfico .....	80
Figura 56 - Vídeo sobre frequências .....	81
Figura 57 - Ouvindo uma onda senoidal .....	82
Figura 58 - Botão Play e Botão Stop .....	83
Figura 59 – Criando Notas Musicais .....	83
Figura 60 - Atividade Pronta .....	84

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 01 - Ciclos de quinta .....	23
Tabela 02 - Escala de dó à dó .....	23
Tabela 03 - Frequência das notas musicais .....	27
Tabela 04 - Representação da "teoria da assimilação" .....	45
Tabela 05 - Ângulos Notáveis.....	53
Tabela 06 - Seno de alguns ângulos .....	61
Tabela 07 - Cosseno de alguns ângulos .....	67

**LISTA DE ABREVIATURAS/ TERMOS EM INGLÊS**

- BNCC – Base Nacional Comum Curricular
- KFLM – Knowledge of Features of Learning Mathematics  
Conhecimento de Características da Aprendizagem de Matemática
- KMLS – Knowledge of Mathematics Learning Standards  
Conhecimento das Normas da Aprendizagem de Matemática
- KMT – Knowledge of Mathematics Teaching  
Conhecimento do Ensino de Matemática
- KOT – Knowledge of Topics  
Conhecimento de Tópicos Matemáticos
- KPM – Knowledge of Practices of Mathematics  
Conhecimento da Prática Matemática
- KSM – Knowledge of the Structure of Mathematics  
Conhecimento da Estrutura da Matemática
- MK – Mathematical Knowledge  
Conhecimento Matemático
- MTSK – Mathematics Teacher's Specialized Knowledge  
Conhecimento Especializado do Professor de Matemática
- PCK – Pedagogical Content Knowledge  
Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	18
MATEMÁTICA E MÚSICA .....	18
1.1 Contexto Histórico na Visão Pitagórica .....	19
1.2 Uma Visão Didático/Pedagógica Das Relações em Matemática/Música .....	28
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	30
BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC) .....	30
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	36
CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (MTSK) .....	36
3.1 Conhecimento de Tópicos Matemáticos (KOT) .....	40
3.2 Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM) .....	40
3.3 Conhecimento da Prática Matemática (KPM) .....	41
3.4 Domínio do Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK).....	42
3.4.1 Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT) .....	42
3.4.2 Conhecimento de Características da Aprendizagem de Matemática (KFLM).....	42
3.4.3 Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Matemática (KMLS) .....	43
3.5 Aprendizagem Significativa Segundo David Ausebel .....	43
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	47
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	47
4.1 Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo.....	47
4.1.1 Definição de Seno, Cosseno e Tangente por meio de Semelhança de Triângulos .....	47
4.1.2 Seno, Cosseno e Tangente só dependem do Ângulo .....	50
4.1.3 Relações entre Seno, Cosseno e Tangente.....	51
4.1.4 Seno, Cosseno e Tangente dos Ângulos Notáveis .....	53
4.1.5 Seno e Cosseno de Ângulos Obtusos .....	55
4.2 Circunferência Trigonométrica .....	56
4.3 Função .....	57
4.3.1 Função Par .....	57
4.3.2 Função Ímpar.....	58
4.3.3 Função Periódica .....	58
4.3.4 Função Limitada .....	59
4.4 ESTUDO DA FUNÇÃO SENO .....	60
4.4.1 Função Cosseno.....	66
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	70
ALGUMAS POSSIBILIDADES DE ATIVIDADES COM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS .....	70
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	85
<b>7. REFERÊNCIAS</b> .....	86

## INTRODUÇÃO

Neste início, faço uma breve menção da minha trajetória na carreira como professora de matemática e as experiências que me levaram a escolher o tema que proponho nesta dissertação.

O interesse em trabalhar o assunto que envolve Matemática e Música surgiu pelo fato de gostar muito de matemática e depois em me identificar com a música.

Aos onze anos de idade iniciei os estudos musicais, para aprender a tocar os instrumentos órgão e teclado, instrumentos este que pertencem a classe dos instrumentos aerofones que segundo Rocha (2019) são instrumentos cuja vibração sonora principal se dá pelo ar, podendo ser classificados como livres e sopros, no qual entre os livres estão os órgãos e as sanfonas, e nos sopros, trompetes, flautas e instrumentos de palhetas. Mas vale ressaltar que atualmente os órgãos e teclados são instrumentos eletrônicos, pois possuem sons que imitam diversos instrumentos. Para ilustrar os instrumentos citados aqui, coloquei as figuras 01 e 02.

Figura 01 - Instrumento Órgão



Fonte: <https://www.lojadaorganista.com.br/produtos/orgao-harmonia-hs-45-lux-preto-fosco>, 2020.

Figura 02 - Instrumento Teclado Musical



Fonte: <https://supersonora.com.br/teclado-musical-ct-x800-casio>, 2020.

No decorrer deste estudo musical verifiquei que teria que ter uma base bem forte de matemática para que pudesse me sentir mais confortável em entender os conceitos musicais. A partir daí tudo ficou mais interessante, pois aliaria dois conhecimentos que gosto muito.

A matemática sempre me motivou para sua aprendizagem, bem como a música através dos instrumentos. Fiz curso durante dois anos com uma professora particular, no qual passei por três testes para ser uma organista na igreja. Esses testes eram feitos gradualmente, cada etapa era mais difícil que a anterior, e os mesmos eram feitos por membros da igreja que tinham conhecimentos musicais muito fortes.

Durante 14 anos dei aulas de música e muitas vezes me peguei ensinando adição e subtração de frações nessas aulas, o que cada vez mais me fazia sentir mais vontade em fazer algo para ensinar matemática.

Então, ao entrar na graduação de Licenciatura em Matemática, o desejo sempre foi estudar e entender os laços que estas duas áreas traziam, logo, no decorrer desta jornada ao saber do Trabalho de Conclusão de Curso, resolvi abordar este assunto estudando na aplicação em Progressões Geométricas.

Pude observar que uma escala cromática<sup>1</sup> musical forma uma Progressão Geométrica de razão  $\sqrt[12]{2}$  e, levando isto para a sala de aula, consegui ver um grande interesse por parte dos alunos. Na aula em que foi apresentado essa “Progressão Geométrica Musical”, eu levei um teclado para a sala de aula e toquei a escala cromática musical para os alunos e disse que aquilo era uma P. G. Eles ficaram

---

<sup>1</sup> A escala cromática é uma escala formada pela sequência de 12 notas (Dó, Dó #, Ré, Ré #, Mi, Fá, Fá #, Sol, Sol #, Lá, Lá #, Si (FRAGA, 2015).

encantados dizendo que tinham conseguido “ouvir números”. Foi uma fantástica experiência!

Durante esses 15 anos de trajetória como professora de Matemática, tenho observado que os alunos prestam muito mais atenção nas aulas quando se leva algo que faz sentido junto com o conteúdo matemático a ser aprendido. Em algumas aulas de Grandezas Proporcionais, por exemplo, tenho pedido para eles levarem receitas e os produtos feitos em casa para a apresentação do conteúdo, o que sempre trouxe resultados positivos. Também gosto muito de trabalhar poliedros construindo alguns só com palitos, jujuba ou massinha, o que também provoca grande interesse por parte dos alunos.

É válido salientar que a música traz outros conteúdos podem ser trabalhados fazendo a conexão com a matemática. Foi citado que, em meu trabalho de conclusão de curso, abordei o tema de Progressão Geométrica. Porém, vale ressaltar que podemos trabalhar o conteúdo de frações e suas particularidades.

Aqui trabalharemos a conexão da música e as funções trigonométricas utilizando programas como recursos para nos auxiliar nas apresentações dos sons musicais, mostrando o quanto a matemática está presente.

No decorrer do trabalho alguns outros assuntos ainda serão citados em que se trabalha a conectividade da música com a matemática.

Vale ressaltar que um fato curioso é que os professores de música lidam com esta área facilmente, mesmo sem deterem conhecimentos matemáticos específicos e amplos.

A conexão entre Matemática e Música vem de longa data, desde que Pitágoras, na Antiguidade, esticou uma corda e observou que, ao pressionar a metade da corda, obtinha a mesma nota da corda solta, porém, uma oitava acima, ou seja, com o som mais agudo. E trabalhando com as outras divisões desta corda descobriu-se que as principais consonâncias e combinações de sons mais agradáveis eram as quartas e quintas puras. Este assunto será tratado logo no primeiro capítulo deste trabalho.

Segundo Silva et al. (2018), mesmo que haja registros do surgimento da música no período pré-histórico como modo de expressão de sentimentos, foi por volta do século VI a.C. que se começou a pensar no estudo da música, sendo Pitágoras de Samos o primeiro teórico matemático famoso a iniciar esse estudo da relação entre matemática e música. De acordo com a lenda, depois de Pitágoras ouvir sons de martelos que vinham de uma ferraria e soavam de maneira harmônica, teve a ideia de

investigar as relações harmônicas existentes entre os sons. Ressaltando que, para o estudo da construção da escala, ele utilizou um instrumento chamado de monocórdio.

No segundo capítulo é necessário fazer uma abordagem sobre o novo documento da Educação Básica Brasileira, que é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que traz várias competências e habilidades para se desenvolver com os discentes de acordo com cada etapa escolar.

Já no terceiro capítulo fiz uma abordagem do estudo sobre o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK) e Aprendizagem Significativa, para que assim busquemos maneiras de melhor transmitir os conteúdos para os nossos alunos, buscando sempre valorizar a aprendizagem com satisfação e motivação.

Posteriormente no capítulo quatro fiz uma abordagem de matemática básica, que serve de suporte para os assuntos abordados neste trabalho, e para sugestão de aulas utilizando matemática e música apresentei uma proposta de ensino.

Finalmente, no capítulo 5, venho mostrar a proposta com o passo a passo à luz do conhecimento especializado do professor de matemática para que seja trabalhado em sala de aula a teoria musical como recurso motivador para se aprender matemática. Esse capítulo é composto por várias sugestões para auxiliar o professor em sala de aula, quando lhe for conveniente e for de seu interesse.

## CAPÍTULO 1

### MATEMÁTICA E MÚSICA

A Matemática e a Música possuem laços muito fortes, uma vez que um músico, para ter contato com a teoria musical, precisa ter pelo menos um conhecimento básico de Matemática.

Neste contexto, para que haja fortalecimento nesta questão, é necessário que se faça um passeio pela história da Matemática e Música, já que esta relação é tão perceptível.

Segundo Carvalho (2005), as primeiras maneiras de se produzir sons foi através de tubos sonoros e cordas. No qual as pessoas ouvem os sons pelo tímpano, que é uma membrana que vibra quando é alcançado pelas ondas sonoras, que são vibrações transmitidas pelo ar.

É válido salientar que quando estavam fazendo descobertas musicais também estavam fazendo descobertas matemáticas (CARVALHO, 2005).

Em Carneiro (2018), há uma pesquisa sobre música e matemática, que indica que a assimilação entre os conhecimentos musicais e matemáticos podem ser compreendidos ao longo da história da humanidade, de maneira que, na cultura ocidental, desde a Antiguidade, verifica-se estudos que estabelecem relações entre as duas áreas. Desse modo há que destacar alguns matemáticos, músicos e pensadores na generalidade que prescreveram essas relações entre as duas áreas. São eles: Arquitas, Boetius, Daniel Bernouilli, Descartes, Euler Ohm, Fourier, Galileu Galilei, Helmholtz, Kepler, Mersenne, Pitágoras, Rameau, Saveur, Vincenzo Galilei, Wallis e Zarlino, e assim por diante.

De acordo com o que Cassiodorus *apud* Assayag (2002) apontou no século VI, Matemática é "aquela ciência que considera quantidade abstrata" tendo quatro divisões: aritmética, música, geometria e astronomia e Música é:

a disciplina que trata de números em relação às coisas encontradas em sons, como duplo, triplo, quádruplo e outros chamados relativos que são semelhantes a estes (CASSIODORUS *apud* ASSAYAG, 2002, p. 02).

E em seguida menciona que a música possui três partes: Harmônicas, Rítmicas, Métricas. Sendo que Harmônicos é a ciência musical que distingue os altos

e baixos em sons, Rítmica é aquela que pergunta se as palavras combinadas soam bem ou mal juntas e Métricas é aquela que, por um raciocínio válido, conhece as medidas dos vários medidores. Considera a música como disciplina científica, que era entendida como uma matemática /ciência que abrangeu os vários aspectos do som ordenado, incluindo o som da fala formal e da poesia.

Vale salientar que, conforme Kirk, *apud*, Assayag (2002), a observação da música como disciplina teórica, por sua vez, já apresentava uma longa história racional. Começando tudo, no mínimo, no mundo ocidental, com Pitágoras, um filósofo que viveu no século VI a.C., sobre o qual não há uma única linha escrita. Entretanto, alguns escritores declaram que ele especulou sobre a correspondência entre a qualidade consoante de alguns intervalos musicais e a simplicidade e ainda as múltiplas relações mútuas dos quatro primeiros números inteiros.

## 1.1 CONTEXTO HISTÓRICO NA VISÃO PITAGÓRICA

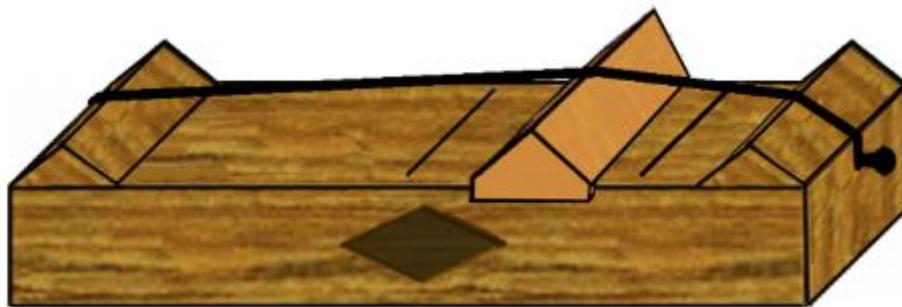
De acordo com Granja (2014), existe uma lenda sobre os estudos de Pitágoras entre números e sons, assim: Pitágoras passava perto de uma oficina de ferreiros quando ouviu sons de batidas de martelos e percebeu que alguns sons soavam agradáveis (sons consonantes), que geravam uma harmonia, e outros soavam como ruídos (sons dissonantes), verificando assim quando dois martelos soavam bem ou não. E pelos pesos descobriu que a razão dos sons era de 1 para 2.

Assim sendo, o primeiro a investigar sobre esse assunto foi o matemático filósofo Pitágoras no final do século VI a.C., contribuindo assim com a construção da primeira escala musical para que os instrumentos pudessem ter uma afinação, já que os mesmos eram tão rudimentares (GRANJA, 2014).

Conforme Granja (2014) Pitágoras fez os seus estudos em um instrumento com uma corda só esticada sobre três cavaletes, sendo 2 fixos e 1 móvel para que pudessem verificar as frações dos sons. Nesse caso verificou que a corda solta emitia um som e ao pressionar na metade da mesma, produzia o mesmo som, porém mais agudo, ou seja, uma oitava acima, chamada de oitava justa. E ao dividir a corda em  $\frac{2}{3}$  também conseguia um som harmonioso, que então se tinha a quinta justa e a  $\frac{3}{4}$  do comprimento da corda verificou um terceiro som harmonioso que é a quarta justa. Enquanto que nos outros sons havia sons ruidosos e não harmoniosos.

Para essa investigação, construiu um instrumento denominado “monocórdio”, que se tratava de uma caixa de ressonância sobre a qual era estendida uma única corda presa a dois cavaletes em suas extremidades e um terceiro móvel entre esses dois, segundo a figura 03.

Figura 03 - O Monocórdio de Pitágoras



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/>, 2020.

É válido, segundo Abdounur (2006), deixar claro que o objetivo de Pitágoras era verificar as relações harmônicas das vibrações da corda conforme as divisões por pequenos números inteiros (até o número 4) em seu tamanho e que a harmonia sonora corresponde ao conceito de consonância, ou seja, indica a combinação de vários sons simultâneos que são interpretados de forma agradável para o ouvido humano.

Ainda de acordo com Silva et al. (2018), outro aspecto que deve ser evidenciado é que, para os pitagóricos, existia um misticismo em relação à matemática, à natureza e ao universo, uma vez que os recentes avanços matemáticos da época serviam para descrever perfeitamente diversos fenômenos naturais, colocando como exemplo o número 4 o primeiro quadrado perfeito par, que dava origem a todo o universo, a todo o mundo material, que está associado às 4 estações, aos 4 elementos da natureza (o fogo, o ar, a terra e a água), etc. Sendo assim, os números inteiros considerados como consonâncias eram 1, 2, 3 e 4, que geravam toda a perfeição e depois escalas com sete tons.

Para sintetizar a ideia dos pitagóricos, consoante Abdounur (2006), é dito que eles acreditavam que tudo no universo era racional e que podia ser expresso por números que tinham harmonia em suas relações. E através do monocórdio que construiu é que se dispôs a encontrar essas relações e construir uma das primeiras

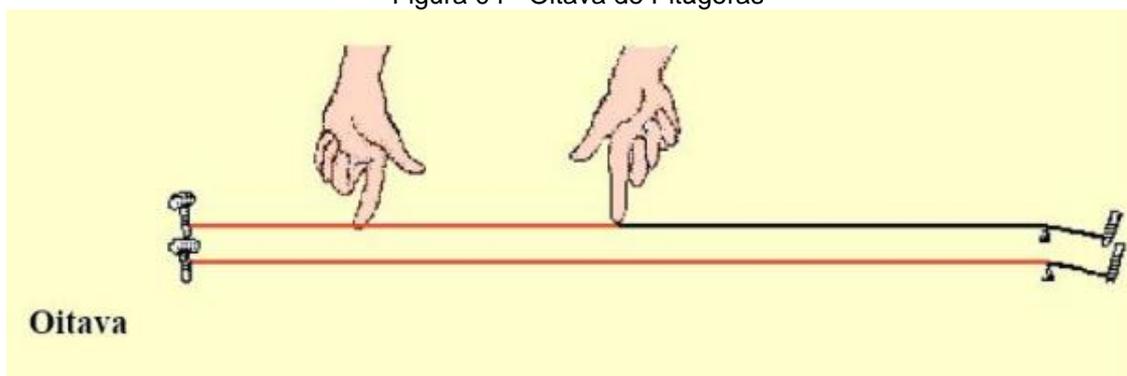
escalas musicais da história. Destaca-se que esse experimento de Pitágoras causou tanto impacto que é considerado como o primeiro experimento científico da história da humanidade, pois nele foram utilizados métodos e regras que, mais tarde, atingiriam o ponto máximo no método científico de pesquisa.

É dito em Abdounur (2006), que Pitágoras verificou em seu experimento que, ao pressionar um ponto situado a  $3/4$  do comprimento da corda em relação a sua extremidade, quando tocado ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Pressionando  $2/3$  do tamanho real da corda, percebia o som de uma quinta acima e ao pressionar  $1/2$  da corda, alcançava-se uma oitava do som original. Logo depois dessa experiência, passam a chamar os intervalos de consonâncias pitagóricas. Assim a primeira descoberta da música foram os sons, Dó, Sol, Fá e Dó (CARVALHO, 2005).

É válido salientar que, quanto mais longa é a corda, mais grave é o som. Quanto mais curta a corda, mais agudo é o som. Nesse caso, quanto maior a frequência, mais agudo é o som e quanto menor a frequência, mais grave é o som.

Naquela ocasião, se mostrou significativa a descoberta da relação entre razão de números inteiros e tons musicais. Isso gerou uma dúvida fundamental para Pitágoras, sobre onde dar-se-ia o desenrolar da relação matemática/música. Sendo assim, associou os intervalos musicais referentes às consonâncias perfeitas – oitava, quinta e quarta - as relações simples  $1/2$ ,  $2/3$  e  $3/4$ , conforme figuras 04, 05 e 06. Os pitagóricos sustentavam a doutrina de que “Tudo é número e harmonia,” por isso a questão de comparar “tudo” aos números.

Figura 04 - Oitava de Pitágoras



Fonte: [https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais\\_vii\\_simmi\\_2016.pdf](https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais_vii_simmi_2016.pdf), 2020.

Figura 05 - Quarta de Pitágoras



Fonte: [https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais\\_vii\\_simmi\\_2016.pdf](https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais_vii_simmi_2016.pdf), 2020.

Figura 06 - Quinta de Pitágoras



Fonte: [https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais\\_vii\\_simmi\\_2016.pdf](https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais_vii_simmi_2016.pdf), 2020.

Para Pitágoras, o intervalo fundamental da escala era a oitava, por isso os pitagóricos a tomam como universo da escala. Então o problema seria dividir a oitava em sons onde determinaria a linguagem musical para se expressar. Logo, tornou-se natural que, a partir de uma nota determinante da oitava-universo junto à sua oitava superior, caminhariam por intervalos de quintas ascendentes e descendentes, onde retornaria à nota equivalente (ABDOUNUR, 2006).

Segundo Granja (2014), a escala era feita por ciclos de quintas, conforme a tabela 01 abaixo:

Tabela 01 - Ciclos de quinta

Comprimento da corda (L <sub>i</sub> )	Ciclos de quinta (2/3 de L <sub>i</sub> )	Comprimento resultante (L <sub>r</sub> )	Condição de existência 1/2 < L <sub>r</sub> < 1 ?	Fração equivalente (oitava: x 2)
1	2/3 de 1	2/3 = 0,666 ...	Sim	-
2/3	2/3 de 2/3	4/9 = 0,444..	Não	8/9 = 0,888 ...
8/9	2/3 de 8/9	16/27 ~ 0,59	Sim	-
16/27	2/3 de 16/27	32/81 ~ 0,395	Não	64/81 ~ 0,79
64/81	2/3 de 64/81	128/243 ~ 0,53	Sim	-

Fonte: Autora, 2020.

A partir disso, consoante Abdounur (2006) há como exemplo, que ao começar pela nota fá, após uma quinta há um dó, e seguindo por mais uma quinta ascendente obtém-se um sol, logo depois um ré, depois lá, logo em seguida mi e por fim o si. Neste caso forma-se uma sequência de fá, dó, sol, ré, lá, mi e si, mas ao ser remanejada à oitava inicial, tem-se a sequência dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó, sendo a mesma constituída por quintas puras, que é uma relação de comprimento de 2/3 e denomina-se como gama pitagórica. É importante destacar que as notas são colocadas com essa nomenclatura para maior facilidade de compreensão, mas na época em que foram criadas não tinham esses nomes. Este processo anterior é denominado quintas ascendentes e quartas descendentes, onde se limitam ao espaço da oitava referência sem repetição de notas.

Citando como exemplo o teclado que hoje existe, ao atribuir-se comprimento 1, e percorrendo uma escala de dó à dó por quintas ascendentes, teremos as notas; sol com comprimento 2/3, ré com 8/9, lá com 16/27, mi com 64/81, si com 128/243 etc. e no percurso descendente, as notas fá com 4/3, etc., originando então a seguinte configuração da tabela 02 (ABDOUNUR,2006):

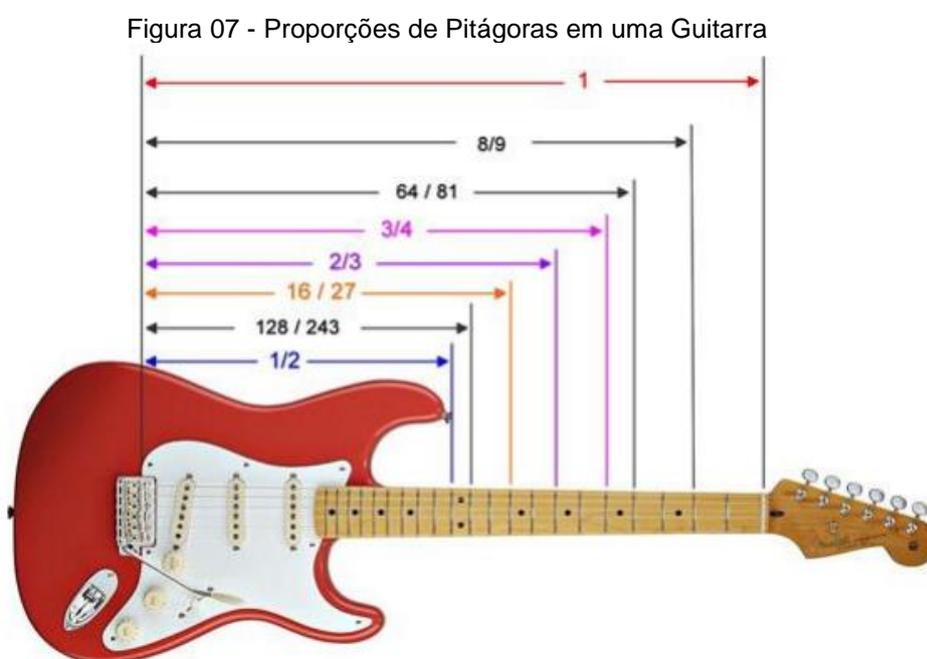
Tabela 02 - Escala de Dó à Dó

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

Fonte: Autora, 2020.

Pelo fato do **si** e do **mi** possuírem relações diferentes com o **dó**, segundo Abdounur (2006), porque possuíam números relativamente grandes, essa gama veio a ser substituída de forma gradativa no século XVI, que então passou a surgir os graus conjuntos com a seguinte sequência, 9/8, 9/8, 256/243, 9/8, 9/8, 9/8, 256/243, que corresponde a escala musical com intervalos de tom, tom, semitom, tom, tom, tom, semitom temperados.

Verifica-se estas relações observando a guitarra inspirada por Pitágoras na Figura 07. Então, assim sendo, segundo Miritz (2015), pode-se dizer que Pitágoras acabou concluindo que as relações numéricas da natureza estavam presentes na música, existindo no interior de sua harmonia.



Fonte: [https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais\\_vii\\_simmi\\_2016.pdf](https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais_vii_simmi_2016.pdf), 2020.

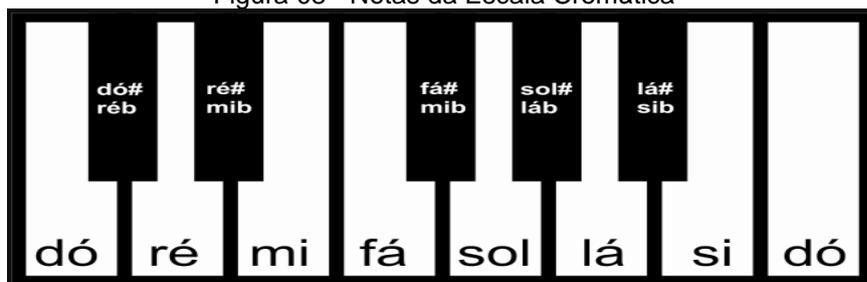
Segundo Granja (2014), observou-se que a escala de Pitágoras possuía dois problemas principais, porque até então Pitágoras tinha subordinado a escala aos números, onde os números regiam a música. Após o Renascimento o som passou a ser um fenômeno físico, daí passa-se a analisar a física dos sons, na qual são representados por ondas (compressão e rarefação). O som musical tem uma regularidade, não sendo ruidoso como o som do mar, e essa regularidade é medida pela frequência (número de vibrações por intervalo de tempo), a qual nosso ouvido entende como uma nota (altura). No caso do violão, quanto maior o comprimento da

corda, menor é a frequência, ou quanto menor o comprimento da corda, maior é a frequência.

A partir de então, não se passa a ver a escala como fração nas cordas, mas sim como vibrações das notas (frequências). O primeiro problema da escala pitagórica é que o ciclo de quintas não coincide com o ciclo de oitavas, apenas com 7 ciclos de oitava tem uma pequena diferença com os 12 ciclos de quintas, que gera uma diferença chamada de *coma pitagórica* (GRANJA, 2014).

Durante a construção da escala por quintas, começando pelo dó, o ciclo se fecha, formando a seguinte sequência: dó, sol, ré, lá, mi, si, fá<sup>#2</sup>, dó#, sol#, ré#, lá#, fá, dó, ressaltando que na gama temperada essas notas correspondem a aproximações dos sons de fatos alcançados. Pelo fato das quintas puras se diferenciarem das quintas temperadas, houve a necessidade de um desajuste, onde aconteceu o seguinte: as quintas temperadas possuem frequências correspondentes a  $2^{7/12} = 1,49830 < 3/2$ , enquanto que as quintas puras possuem frequência que corresponde  $3/2$ . Sendo assim após o percurso de  $n$  quintas puras, a nota alcançada corresponderá a uma frequência multiplicada por  $(3/2)^n$ , que nunca poderá igualar-se precisamente a  $2^m$ , fator multiplicado à frequência inicial quando percorre  $m$  oitavas (ABDOUNUR, 2006). Observe as notas da Escala Cromática na figura 08:

Figura 08 - Notas da Escala Cromática



Fonte: <https://msicasimples.wordpress.com/2015/11/11/comportamento-da-escala/>, 2020.

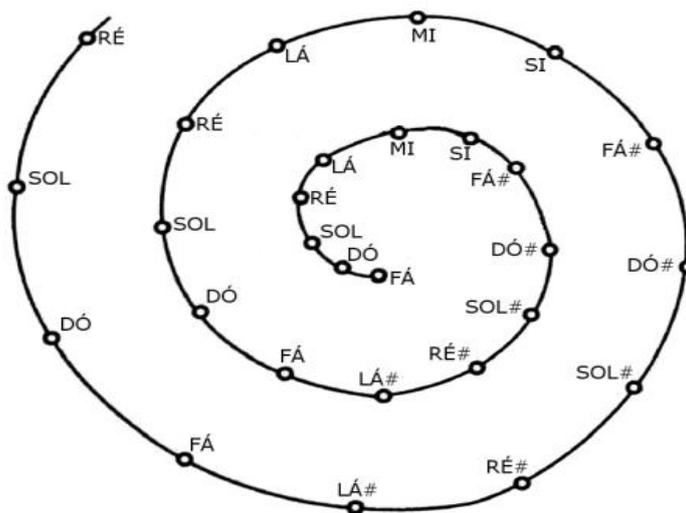
Nesse caso, de acordo com Abdounur (2006), o melhor desajuste corresponde a adequação após doze quintas e sete oitavas, pois  $2^7 = 128$  é aproximadamente  $129,746 = (3/2)^{12}$ . Considerando isto, o percurso de quintas continua formando notas

<sup>2</sup> O símbolo “#” significa sustenido, que segundo Fraga (2015), um sustenido, por definição, é a menor distância entre duas notas na música ocidental.

bastante próximas daquelas adquiridas no primeiro ciclo, gerando assim uma espiral infinita.

Para melhor compreensão considere infinitos pontos marcados sobre uma espiral, que identifica o processo do temperamento, conforme a figura 09.

Figura 09 - Escala musical temperada



Fonte: <https://laboratoriodeluthieria.wordpress.com/2015/07/02/temperamento-a-musica-atraves-dos-numeros/>, 2020.

Na Idade Média, tem-se como forte contribuinte, segundo Sadie *apud* Abdounur (2006), para a sistematização da música ocidental o escritor Boetius (480-524 d.C.), cidadão romano. Em seu raciocínio, Pahlen (1991:32) *apud* Abdounur (2006), considerava a música uma força que impregnava todo o universo e um princípio unificador tanto do corpo e alma do homem quanto das partes de seu corpo, em sua obra *De Institutione Musica*. Apoiar-se na doutrina pitagórica das consonâncias, e faz uso da matemática para racionalizar as consonâncias musicais e o princípio da divisão do monocórdio.

De acordo com Abdounur (2006), até este período a música era caracterizada pela melodia. Sendo assim, considerada monofônica, onde vigorava a quarta, herança dos gregos. Então a partir de observações de que, ao cantar, ouvia-se uma voz principal que seria acompanhada por outra voz chamada organal em intervalos de quintas ou quartas paralelas, tratando-se assim de duplicação na oitava, podia ser chamada de música polifônica. Essa é a ideia de contexto harmônico.

Com o desenvolvimento e sofisticação da matemática, chega-se a Série de Fourier, desenvolvida dez séculos depois, que trata das consonâncias referidas apresentarem as três primeiras distâncias intervalares existentes no desenvolvimento de um som (ABDOUNUR, 2006).

Ademais, a analogia da matemática com o pitagorismo, no trabalho de Descartes<sup>3</sup>, manifesta-se na formulação de axiomas preliminares, afirmando que a oitava apresentava-se como único intervalo simples produzido por um comprimento divisor da corda inteira. O pensador explicou que nenhuma frequência consonante com uma nota daquele intervalo poderia ser dissonante com alguma outra. Para Descartes, a nota mais grave era mais poderosa que a mais aguda, pois o comprimento da corda que gera a primeira, contém todos aqueles pertinentes às menores (ABDOUNUR, 2006).

Portanto, vale ressaltar que essa sequência significa uma progressão geométrica. Assim sendo, se obtém nessa divisão a escala musical mais utilizada atualmente, denominada de escala temperada ou escala cromática (Lá, Lá#, Si, Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá) representada na tabela 03.

Tabela 03 - Frequência das notas musicais

NOTA	SÍMBOLO	TERMOS DA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA <sup>4</sup> $a_n = 220 \left(\sqrt[12]{2}\right)^{(n-1)}$	FREQÜÊNCIA (Hz)
Lá	A	$a_1 = 220$	220
Lá# / Sib	A# / Bb	$a_2 = 220 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^1 = 233,081880\dots$	233
Si	B	$a_3 = 220 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^2 = 246,941650\dots$	247
Dó	C	$a_4 = 220 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^3 = 261,625565\dots$	262
Dó# / Réb	C# / Db	$a_5 = 220 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^4 = 277,182630\dots$	277

<sup>3</sup> Matemático e filósofo (ABDOUNUR, 2006).

<sup>4</sup> Para mais detalhes desta Progressão Geométrica  
([https://www.youtube.com/watch?v=\\_r3DqAJhqMs&feature=emb\\_logo](https://www.youtube.com/watch?v=_r3DqAJhqMs&feature=emb_logo)).

Ré	D	$a_6 = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^5 = 293,664767\dots$	294
Ré# / Mib	D# / Eb	$a_7 = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^6 = 311,126983\dots$	311
Mi	E	$a_8 = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^7 = 329,627556\dots$	330
Fá	F	$a_9 = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^8 = 349,228231\dots$	349
Fá# / Solb	F# / Gb	$a_{10} = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^9 = 369,994422\dots$	370
Sol	G	$a_{11} = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^{10} = 391,995435\dots$	392
Sol# / Láb	G# / Ab	$a_{12} = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^{11} = 415,304697\dots$	415
Lá	A	$a_{13} = 220 \cdot (\sqrt[12]{2})^{12} = 440$	440

Fonte: Autora, 2020.

## 1. 2 UMA VISÃO DIDÁTICO/PEDAGÓGICA DAS RELAÇÕES EM MATEMÁTICA/MÚSICA

Há como relacionar vários conteúdos matemáticos com a música, por exemplo, sons com a Função Trigonométrica, altura musical com frequência, intensidade musical com amplitude de onda, temperamento com progressão geométrica, série harmônica com Séries de Fourier (ABDOUNUR, 2006).

Verifica-se que, em Abdounur (2006), as pesquisas e as oficinas interdisciplinares proporcionaram maior compreensão das trajetórias da música e matemática, tendo como exemplos, os conceitos de consonância/dissonância, timbre, harmônicos, batimentos, intensidade e altura musicais, apresentando como identificação por meio de códigos matemáticos de sons.

É de se notar que a capacidade de construção de experimentos utilizando-se das tecnologias faz com que se abra horizontes não somente para o aprendizado de conceitos complexos sem estrutura teórica suficiente mas, de acordo com Abdounur (2006), permite tal aprendizagem, ainda que em nível informal, em períodos anteriores aqueles de antes, considerados mais adequados.

Pode-se dizer que as tecnologias representam as dinâmicas de pensamento/sentimento, destacando a rede de significados, modificando assim as concepções de inteligência e conhecimento. É válido ressaltar que várias ideias de consonância, altura, etc., chegam de relativamente diferentes vivências sem perda de identidade e redução, mas um fortalecimento capaz de desvendar interpretações antes ocultas (ABDOUNUR, 2006).

Um exemplo que ilustra de modo significativo o que foi dito antes é o fato de relacionarmos a “soma” ou sobreposição de intervalos musicais com o produto de razões em matemática. Assim sendo Abdounur (2006) diz:

a percepção de que mesmas sensações sonoras foram acrescentadas auditivamente traduz-se, do ponto de vista matemático, como um produto de razões, propiciando portanto a associação entre conceitos de ambas as áreas, que interagem mutuamente, estabelecendo ainda relações internas em seus terrenos peculiares de distintas maneiras (ABDOUNUR, 2006, P. 290).

Portanto, sendo assim, de acordo com Abdounur (2006), a matemática contribui com o suporte silencioso para a evolução dos sistemas musicais, sendo que ao mesmo tempo a música, por sua vez, manifesta modelos também presentes na matemática, contribuindo assim de forma mútua para a evolução da ciência/arte.

Entendendo que a música e seus recursos são uma maneira de motivar os alunos para a aprendizagem de conteúdos de matemática, em particular, funções trigonométricas, é necessário identificar essa possibilidade sob o prisma da nova lei que rege a educação brasileira, a saber, o novo documento denominado Base Nacional Comum Curricular (BNCC) o qual viabiliza as conexões de diversas competências com objetivo de entendimento das habilidades.

Para tanto, haverá no capítulo seguinte uma breve apresentação desta lei.

## **CAPÍTULO 2**

### **BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)**

Atualmente, tem-se um novo documento muito importante para a educação básica brasileira, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que traz as competências e habilidades para uma aprendizagem de sucesso. Dentre todas as habilidades, no próximo capítulo apresenta-se três dessas habilidades, e nelas se busca, juntamente com o objeto da música, introduzir a matemática de uma forma diferenciada da que se tem nos livros escolares. Mostrar-se-á como utilizar a ligação entre essas duas áreas juntamente com o software matemático, visando obter uma aprendizagem mais prazerosa e significativa.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é uma nova normatização que veio para fortalecer a educação brasileira. Sendo assim, para se embasar em questões teóricas para a prática pedagógica, deve-se recorrer a BNCC do Ensino Médio, já que o foco desta pesquisa é um conteúdo do Ensino Médio.

Vale ressaltar que este documento traz várias competências e habilidades para uma melhor aprendizagem, logo, neste capítulo há a apresentação das competências e habilidades da Matemática, as quais são necessárias para a abordagem do conteúdo deste trabalho.

Segundo a BNCC (2017)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BNCC, 2017, p. 07).

Dessa maneira, há a expectativa de que a BNCC domine a distribuição das políticas educacionais, facilitando o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo. Segundo a BNCC (2017), as principais aprendizagens estabelecidas na BNCC precisam apoiar, garantindo aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais que compõem, no âmbito pedagógico, os direitos de aprendizagem e desenvolvimento.

Destaque-se que na BNCC (2017), competência é definida como o impulso de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e

socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, em pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Segue abaixo as competências gerais da Educação Básica que articulam-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da LDB (BNCC, 2017).

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários (BNCC, 2017, p. 09).

A BNCC, por sua vez, apresenta indicações sobre as decisões pedagógicas que devem estar orientadas para a aplicação de competências. Vale ressaltar que

mediante essa indicação tem-se a clareza do que os alunos devem “saber” (atendendo a questão de habilidades, conhecimentos, valores e atitudes) e, especialmente, e do que devem “saber fazer” (atendendo a motivação desses habilidades, conhecimentos, valores e atitudes para resolver as necessidades complexas da vida do dia a dia, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho). A determinação das competências disponibiliza referências para o enriquecimento de ações que afirmam as principais aprendizagens estipuladas na BNCC.

Além disso, de acordo com BNCC (2017), a BNCC e currículos têm como responsabilidade complementares garantir as aprendizagens essenciais determinadas para cada etapa da Educação Básica, ressaltando que tais aprendizagens só se concretizam por meio de um conjunto de decisões que caracterizam o currículo em ação. Sendo que essas decisões vão conciliar as proposições da BNCC à realidade local, levando em conta a autonomia dos sistemas ou das redes de ensino e das instituições escolares, como também o contexto e as características dos alunos. Tais decisões, que resultam de um processo de envolvimento e participação das famílias e da comunidade, referindo-se a outras ações, são expressas como (BNCC, 2017):

- contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;
- decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;
- selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.;
- conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens;
- construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos alunos;
- selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender;
- criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem;

- manter processos contínuos de aprendizagem sobre gestão pedagógica e curricular para os demais educadores, no âmbito das escolas e sistemas de ensino (BNCC, 2017, p. 16).

De acordo com a BNCC (2017), no Ensino Médio o ponto principal que deve ser ressaltado é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade. Assim sendo, quando a sugestão é a realidade, é preciso considerar as vivências do dia a dia dos discentes do Ensino Médio, no qual se envolvem em diversos graus dados por suas condições socioeconômicas, pelo desenvolvimento tecnológico, pelas determinações do mercado de trabalho, pela capacidade das mídias sociais, dentre vários outros. Portanto essas considerações colocam a área de Matemática e suas Tecnologias diante da incumbência de aproveitar toda a capacidade já gerada por esses discentes, promovendo ações que possam estimular e provocar processos de reflexão e de abstração, no qual podendo dar sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos favorecendo a tomada de decisões direcionadas pela ética e o bem comum.

Para que essas determinações se materializem nessa área, segundo a BNCC (2017), os discentes devem apresentar habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Nesse caso, eles, por sua vez, precisam motivar sua própria maneira de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em argumentações e corroborações concomitantes, aprender conceitos e praticar representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. Logo, para o desenvolvimento de competências que abarcam o raciocinar, é importante que os discentes sejam capazes de interagir com seus colegas e professores, investigando, explicando e justificando os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática.

De acordo BNCC (2017) tem-se que:

Embora todas as habilidades pressuponham a mobilização do raciocínio, nem todas se restringem ao seu desenvolvimento. Assim, por exemplo, a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado (BNCC, 2018, p. 519).

Assim sendo, sublinhe-se que, na Matemática, é necessário a utilização dos mais diversos registros de representação e das diferentes linguagens, para que haja a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Porque

nesse caso faz com que os estudantes tenham mais agilidade e facilidade na área, promovendo assim o desenvolvimento do raciocínio.

Isto posto, depois de solucionarem os problemas matemáticos, os mesmos necessitam mostrar e argumentar seus resultados, podendo assim haver a interpretação dos resultados dos colegas e a interação com os mesmos. Tendo nesse aspecto um grande ganho, pois os estudantes desenvolveram a competência da comunicação justificando suas considerações finais não apenas pela simbologia matemática, mas sim através da língua nativa.

Segundo a BNCC (2017):

Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história (BNCC, 2017, p. 522).

Segue abaixo, de acordo com BNCC (2017) as Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BNCC, 2017, p. 523).

Desta forma, como o foco desta pesquisa é a utilização da teoria musical como recurso motivador em conteúdos matemáticos, é necessário analisar concomitantemente a Trigonometria e a Música. Portanto, as habilidades que serão focalizadas são (BNCC, 2017):

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria (BNCC, 2017, p. 528)..

(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança (BNCC, 2017, p. 529).

(EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BNCC, 2017, p. 531).

Diante disso, também aflora a necessidade de se abordar o Conhecimento Especializado em Matemática para o professor, pois muitas vezes é pensado que basta dominar os conceitos e conteúdos matemáticos para se lecionar, mas não é só isso, é necessário que se tenha uma didática, ou seja, uma preparação para que o discente tenha uma boa aprendizagem.

Então, ao se pensar nesta questão surge a necessidade de se trabalhar o Conhecimento Especializado em Matemática, assunto este que está abordado no próximo capítulo.

## CAPÍTULO 3

### CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (MTSK)

Neste capítulo aborda-se o modelo teórico conhecido como conhecimento especializado do professor de matemática, cuja sigla em inglês (MTSK), é mais conhecida. Este modelo apresenta domínios e subdomínios que ajudam a compreender quais conhecimentos estão presentes e são necessários para exercer a função de docente em matemática. Faz-se necessário apresentar esse modelo teórico aqui, uma vez que na trajetória profissional de um professor, em particular de matemática, estão um arcabouço de domínios, os quais destacam-se o de conhecimento específico de matemática e dos conhecimentos pedagógicos dos conteúdos de matemática. Sendo assim, por este conjunto de ideias pode-se compreender mais precisamente o pano de fundo da execução de um conteúdo de matemática. Desta forma, é possível aliar o conhecimento prévio do professor, um objeto metodológico como a música, uma normativa educacional, a BNCC, e um conteúdo de matemática, no caso funções trigonométricas.

Observando os alunos em sala de aula, percebe-se que eles apresentam muitas dificuldades para aprender os conceitos matemáticos e ainda que, às vezes, há professores que, mesmo dominando muito bem os conteúdos, ainda precisam repensar sua didática ou maneira de ensinar, para que o alunos, por sua vez, tenham um maior entendimento sobre o conteúdo a ser aprendido. Pensando neste contexto, é que se vê necessário abordar o tema deste capítulo.

De acordo com Rincón (2019) Conhecimento Especializado em Matemática é o conhecimento especializado, não necessariamente um conhecimento geral, um conhecimento matemático do conteúdo, nem relativo ao conteúdo pedagógico, mas que quem ensina matemática deve saber sobre a matemática que está sendo ensinada para alunos de determinado ano, porque o conhecimento especial é diferente em cada ano escolar, portanto este conhecimento se especializa de acordo com o tipo de matemática que está sendo desenvolvida. Sendo assim, o professor tem que passar por formações.

Pesquisadores das universidades do Brasil, Espanha e Portugal decidiram caracterizar a diferença entre o professor de matemática e o professor que ensina matemática. Logo, o professor de matemática é aquele que assume a área de matemática sem necessariamente ter uma formação de ensino pedagógico sobre o

conteúdo da matemática escolar, e um professor que ensina matemática é treinado para isto e está sempre pensando em projetar atividades típicas de uma escola de matemática. Portanto nesse caso o professor que ensina matemática de acordo com o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática precisa ter conhecimento de Pedagogia, Didática e Disciplina (RINCÓN, 2019).

Sendo assim, é necessário que o professor, por sua vez, faça uma análise sobre as suas aulas, refletindo sobre as diversas maneiras de se ensinar e transmitir um conteúdo, pois fazer com que o aluno aprenda de maneira plausível é de suma importância para o seu desenvolvimento nos assuntos a serem explorados. O professor, ao fazer essa análise sobre o aprimoramento de suas aulas, verifica se teve êxito ou não (MORIEL JUNIOR, 2014).

Logo, elaborar mudanças em suas aulas, faz com que surja um desafio para alguns professores, pois entende-se que lidar com diferentes maneiras de ensinar de acordo com a necessidade de cada estudante pode gerar muita inovação para o professor (MORIEL JUNIOR, 2014).

Vale ressaltar que, de acordo com Moriel Junior (2014), quando o professor possui o conhecimento matemático, a capacidade de dar explicações sobre os conteúdos que por sua vez responde as dúvidas dos alunos está imediatamente comparada com a habilidade do professor em identificar erros dos alunos e suas prováveis fontes.

Para Moriel Junior (2014), o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática tem como origem o conhecimento profissional que é específico de professores de matemática, do qual considera de que fora constituído por avanços de modelos anteriores. E ainda, segundo Araújo (2018) esse modelo foi organizado pelo grupo comandado por José Carrillo na Universidade de Huelva, Espanha, que diz também que o professor de Matemática possui domínio do conteúdo matemático e da parte pedagógica que se tem que trabalhar juntamente com o conteúdo matemático em questão.

Destaque-se que, segundo Moriel Junior (2014), na sua base tem como significado de que o *conhecimento* de uma pessoa é a compreensão que a mesma tem pronta para utilizar na solução de problemas, atingir suas metas ou realizar qualquer tarefa. Vê-se que, segundo essa base, o conhecimento não tem necessidade de estar correto.

Na visão de Araújo (2018), esse modelo MTSK é apresentado por dois domínios – *Conhecimento Matemático* e *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* – sendo cada um deles decomposto em três subdomínios (Figura 10). Sendo que os conceitos dos professores sobre a matemática, seu ensino e aprendizagem são acrescentados a ele por meio dos subdomínios, pois eles dão discernimento às suas ações.

Segundo Rincón (2019), a sigla MTSK está em Inglês, no qual é um modelo apresentado por um hexágono dividido em partes iguais que considera os subdomínios propostos pelo modelo. Onde do lado direito são encontrados o conhecimento pedagógico e didático do conhecimento e do lado esquerdo os possíveis conhecimentos matemáticos do conhecimento pedagógico da disciplina matemática. Refere-se a três os seus domínios: o Conhecimento do Ensino de Matemática que se trata das estratégias, técnicas, tarefas e exemplos para ensinar matemática; o Conhecimento de Características da Aprendizagem de Matemática, no qual verifica a aprendizagem do aluno, suas potencialidades, capacidades e dificuldades com o conteúdo matemático; e o Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Matemática, que se refere ao desenvolvimento conceitual e procedimental esperado.

Do outro lado tem-se os subdomínios, no qual destaca o Conhecimento de Tópicos que faz a correspondência aos conceitos, propriedades, definições, registros e representações, fenômenos e representações dos conteúdos. Tem o Conhecimento da Estrutura da Matemática referente às conexões para trabalhar um conteúdo, conexões estas que podem ser conexões auxiliares ou conexões transversais; e o Conhecimento da Prática Matemática, que se refere ao papel dos símbolos e linguagens, processos de produção de matemática e condições necessárias e suficientes para gerar definições.

Este modelo diz que, assim como a matemática é concebida e ensinada nas salas de aula, se o professor foi ensinado ou treinado dentro do modelo onde o exercício é a base da matemática, possivelmente este professor vai aplicar em suas salas de aula apenas exercícios sem considerar outras formas de práticas matemáticas, como modelagem de demonstração, argumentação, etc.

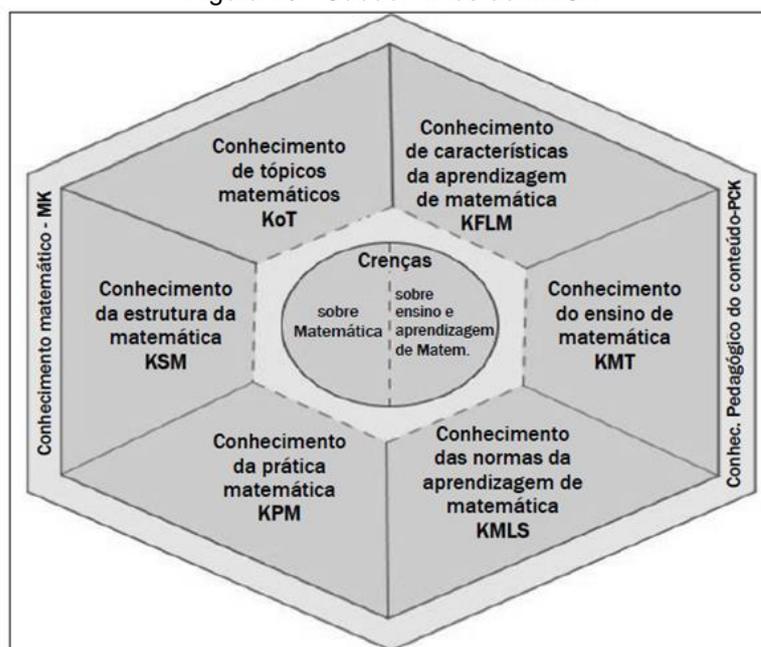
O professor que ensina matemática escolar assume vários aspectos, sendo um deles caber só a ele o conhecimento de matemática, portanto a maneira e o modo de resolver situações em salas de aula tem que ser revisadas pelo professor para saber

se as respostas tem significados, valorizando as respostas dos alunos e verificando as diferentes formas de resoluções. É importante esclarecer que a matemática escolar aprendida pelos alunos é limitada ao conhecimento do professor, ressaltando por exemplo que os conteúdos de estatísticas e geometria sempre são deixados para depois, pois pode ter alguns professores que tenham pouco domínio nesses conteúdos (RINCÓN, 2019).

Segundo Rincón (2019), uma parte importante no modelo é o conhecimento interpretativo, o professor que ensina matemática deve observar de que maneira o aluno interpreta, sendo às vezes diferente da que ele interpreta.

Deve-se apontar que é interessante levar algo que concretize a aprendizagem de determinado conteúdo matemático, pois assim faz com que os alunos compreendam alguns tópicos. É interessante abordar que, assim fazendo, o professor tem práticas de ensino reflexivas, que consistem em repensar como o professor que ensina matemática não fica apenas no modelo de aulas que se prepara no dia a dia, para que assim as aulas se tornem cada vez mais adequadas no modelo KFLM. Tem-se que valorizar a heterogeneidade, pois cada um aprende de uma forma diferente. Segue abaixo a figura 10 que representa os subdomínios do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MTSK).

Figura 10 - Subdomínios do MTSK



Fonte: Carrillo et al. (2013) e Montes, Contreras e Carrillo (2013), apud, Moriel Junior, 2014.

Logo a partir da figura acima tem-se que, de acordo com Moriel Junior (2014), os subdomínios do Conhecimento Matemático são definidos a seguir, discorrendo-se sobre cada um.

### 3.1 CONHECIMENTO DE TÓPICOS MATEMÁTICOS (KOT)

Esse subdomínio trata-se da correspondência ao conhecimento do professor referente ao conteúdo matemático, ou seja: conceitos; propriedades; definições específicas e particulares que determinam o tópico, incluindo assim apontamentos de representações, fenomenologia e procedimentos do assunto a ser abordado, a sua originalidade, exemplos e processos.

Considerando neste caso as Funções Trigonométricas, verifica-se que tem como definição, a apresentação um padrão de repetição, onde essa demonstração é feita através de gráficos, denominando assim esse padrão, como período. Assim uma função  $f: A \rightarrow B$  é dita periódica<sup>5</sup> se existir um número  $k > 0$  onde o menor valor de  $k$  que satisfaz a condição abaixo é chamado de período:  $f(x + k) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ .

Ressaltando que os valores das funções trigonométricas, por regra, são representados no ciclo trigonométrico, percebe-se que em cada função os períodos ficarão fechados para cada ciclo completo no eixo trigonométrico.

Logo, para Moriel Junior (2014), esse subdomínio tem como referência conteúdos matemáticos definidos em textos ou manuais matemáticos, onde se pode dizer sobre os porquês e as razões de determinadas definições matemáticas, ressaltando sempre que esses apontamentos podem ser feitos para que os alunos tenham um maior entendimento, claro que observando e fazendo isto de acordo a faixa etária de cada um.

### 3.2 CONHECIMENTO DA ESTRUTURA DA MATEMÁTICA (KSM)

Esse subdomínio trata-se de explicar o novo conteúdo buscando conexões com outros já estudados anteriormente. Segundo Moriel Junior (2014), o professor não deve trabalhar os conteúdos de forma isolada, mas de maneira integrada para que

---

<sup>5</sup> Capítulo 4

assim se possa entender a Matemática mais avançada, ou seja o ponto considerado básico tem que ser apoio para o mais difícil.

Assim, de acordo Araújo (2018), o professor trabalha com conteúdos de conexão (conteúdos já trabalhados), os quais servem como conexões de simplificação; conteúdos futuros, que são as conexões complexas; também acrescentando o uso de conteúdos matemáticos relacionados com outras disciplinas, que são as conexões transversais e ainda ressaltar as conexões auxiliares que são os conteúdos que possuem mesmas características e propriedades.

Logo, utilizar-se da música para trabalhar com funções trigonométricas é bastante válido, pois assim há uma conexão entre dois assuntos que possuem tanta afinidade.

Há várias possibilidades de se trabalhar a matemática utilizando-se de partes da música, tais como: frações, no caso de estudos de valores das figuras musicais; Progressão Geométrica, no caso da escala cromática; funções trigonométricas, no caso da representação das frequências das notas musicais, entre outros.

### **3.3 CONHECIMENTO DA PRÁTICA MATEMÁTICA (KPM)**

De acordo com Litoldo et al. (2018), nesse subdomínio pode-se destacar que o mesmo está ligado a elaboração e a constituição matemática, atendo-se a questões de símbolos, demonstração e validação matemática, bem como a linguagem formal da matemática. Destacando por exemplo a questão de funções, explicando quando é função e dando contraexemplos de quando não é. Ainda de acordo com Junior (2014) esse subdomínio tem como propósito fazer com que o professor solidifique o seu conhecimento, sabendo transmitir a informação de forma clara e precisa para seus alunos.

Então ao definir os três subdomínios ainda pode-se dizer que, segundo Moriel Junior (2014, p. 36, apud, CARRILLO *et al.*, 2013, p. 06) o MK :

se estende por toda a gama de conhecimento matemático, que abrange todo o universo da matemática, compreendendo conceitos e procedimentos, estruturação de ideias, conexões entre os conceitos, a razão para, ou origem de procedimentos, significado de provas e qualquer forma de proceder em matemática, juntamente com a linguagem matemática e sua precisão (JUNIOR 2014, p. 36, apud, CARRILLO *et al.*, 2013, p. 06).

Nesse caso, é importante dizer que utilizando-se ondas sonoras para se trabalhar funções trigonométricas, faz-se com que o aluno possa solidificar a sua aprendizagem, já que música é algo que muitas vezes chama a atenção dos jovens e quando os mesmos são levados a fazer comparações com o que já conhecem, se tornam mais motivados.

### **3.4 DOMÍNIO DO CONHECIMENTO DIDÁTICO DO CONTEÚDO (PCK)**

É válido salientar que de acordo Araujo (2018), esse Domínio do Conhecimento Didático do Conteúdo é constituído pelos subdomínios: Conhecimento do Ensino de Matemática, Conhecimento de Características da Aprendizagem de Matemática e Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Matemática, que apresenta como principal, o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

#### **3.4.1 Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT)**

Segundo Araújo (2018), esse subdomínio representa o conhecimento do professor em matemática que tem como objetivo o ensinar, analisando-se suas estratégias, dinâmicas, maneiras, técnicas de se explorar determinado conteúdo, não deixando para trás as questões de recursos e materiais didáticos utilizados para que haja a aprendizagem.

Nesse caso, ao utilizar a música como algo que proporcione a motivação, é de suma importância a apresentação de instrumentos musicais e softwares que auxiliam nas questões de som.

#### **3.4.2 Conhecimento de Características da Aprendizagem de Matemática (KFLM)**

Esse subdomínio, de acordo com Araújo (2018), tem como propósito a questão da verificação de aprendizagem do aluno, observando sua capacidade em aprender o conteúdo matemático, bem como as suas dificuldades e confusões que podem surgir no decorrer do desenvolvimento de determinado assunto matemático.

Ainda segundo Moriel Junior (2014), o subdomínio em questão tem como originalidade o indispensável entendimento do professor em relação aos alunos, quando os mesmos estão inseridos na resolução de exercícios, atividades ou tarefas matemáticas. Ressaltando que o professor, por sua vez, tem que ser consciente sobre as indecisões que os alunos poderão ter em determinado assunto, tópico ou conceito,

cuidando sempre da aprendizagem que o aluno precisa ter para pelo menos entender ou compreender o conteúdo.

### **3.4.3 Conhecimento dos Parâmetros da Aprendizagem de Matemática (KMLS)**

Já esse subdomínio, segundo Moriel Junior (2014), tem como foco as especificações curriculares, ou seja, documentos que regem o que os alunos devem aprender em cada etapa de sua vida. No caso em questão deve-se recorrer a BNCC do Ensino Médio. Assim sendo as principais coisas a serem dada atenção são as competências e habilidades da BNCC que estão citadas neste trabalho, não podendo deixar de fora os conhecimentos prévios e a sequência de conceitos.

### **3.5 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA SEGUNDO DAVID AUSEBEL**

A Matemática é vista pelos alunos como forma de se decorar fórmulas, sem saber muitas vezes o seu significado e o porquê de sua utilização. Diante disso, é importante fazer com que o educando compreenda o significado do que se aprende, principalmente ao relacionar este aprendizado com o cotidiano.

Para defender a ideia de que a aprendizagem deve ter significado ao aluno é fundamental, basear-se em autores que tratam desse assunto de maneira “segura”. Neste caso vamos utilizar o autor David Paul Ausebel, pois é um dos mais conceituados nos cursos de licenciatura, tratando-se de aprendizagem significativa.

Logo se torna importante trabalhar a matemática e música juntos, pois muitos alunos tem a chance de ter esse contato na sua vida, e muito deles até dominam muito bem a música, o que pode tornar um grande motivador para se aprender matemática.

Para David Ausebel (apud, Moreira, 1999), psicólogo da aprendizagem, o principal no processo de ensino é que a aprendizagem seja significativa. Sendo assim, o ponto central da teoria de Ausebel é a Aprendizagem Significativa, a qual tem exercido uma forte influência na educação, uma vez que baseia-se em um modelo construtivista dos processos cognitivos do indivíduo. No caso particular a teoria de assimilação descreve como o aprendiz adquire os conceitos e como os organiza em sua estrutura cognitiva. Então para Ausebel, Moreira (1999) “Aprendizagem Significativa” é:

um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausebel define como conceito subsunçor<sup>6</sup> (MOREIRA, 1999, p. 153).

Na citação acima observa-se a palavra subsunçor que, segundo Ausebel *apud* Moreira (1999), seria equivalente a dizer facilitador.

Quando a aprendizagem não é significativa, ou seja, não conseguiu ser ligado a algo conhecido, o autor chama-a de Aprendizagem Mecânica. Nesse caso, não há interação com a informação já armazenada e a nova informação. Assim ocorre simplesmente a decoraçãõ de fórmulas, leis e macetes para provas e logo após a avaliação, tudo isto é esquecido, pois a informação foi armazenada de forma arbitrária.

Ausebel *apud* Moreira (1999), define essa distinçãõ como sendo uma dicotomia e não como um contínuo. Ao se tratar de aprendizagem por descoberta e aprendizagem por recepçãõ, não se deve confundir com a distinçãõ de Aprendizagem Significativa e Aprendizagem Mecânica. Pois a aprendizagem por recepçãõ, apresenta o conteúdo a ser aprendido em sua forma final, já na aprendizagem por descoberta o conteúdo principal a ser aprendido deve ser descoberto pelo aprendiz.

De acordo Ausebel, a Aprendizagem Significativa e Aprendizagem Mecânica são tratadas de forma divididas e não de forma sucessivas, no entanto, deveriam ser tratadas da segunda forma, pois assim o aluno aprenderia o objeto a ser estudado de maneira significativa, para depois “memorizar” a fórmula.

Segundo o autor, para que haja aprendizagem significativa é necessário que o aluno, por sua vez, tenha disposiçãõ para aprender; mas se o aprendiz simplesmente quiser memorizar o material de forma arbitrária e literal, não haverá essa aprendizagem; e sim a aprendizagem mecânica. O material a ser aprendido deve ser potencialmente significativo, de forma não-arbitrária e não-literal. Assim, cada aprendiz fará uma filtragem dos materiais que têm significado ou não para ele próprio.

É importante destacar que Ausebel deixou claro que o aluno também tem que estar disposto a aprender, porque se ele quiser só memorizar a fórmula de nada adianta, a aprendizagem será simplesmente mecânica. E no outro caso observa-se que há exemplos que, para alguns alunos, terão significados geral do que aprende, e

---

<sup>6</sup> A palavra “subsunçor” não existe em português; trata-se de uma tentativa de aporuguesar a palavra inglesa “subsumer”. Seria mais ou menos equivalente a inseridor, facilitador ou subordinador.

para outros, alguma coisa lhe será significativo. Portanto o exemplo utilizado tem que ser abrangente para que assim possa ser possível o educando fazer uma filtragem do que para ele é significativo ou não.

Reportando-se a Ausebel *apud* Moreira (1999), para que haja uma ótima compreensão de um conceito ou proposição é necessário que se tenha significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis, porque se pedir simplesmente para o aluno que diga quais são os atributos de um conceito ou proposição, pode-se obter apenas respostas mecânicas que foram memorizadas.

O autor distingue três tipos de aprendizagem significativa. A aprendizagem representacional, utiliza símbolos que passam a significar, para o aprendiz, o que seus referentes significam. A aprendizagem de conceitos que também é representacional, pois os conceitos também são representados por símbolos particulares, mas só que representam abstrações. E aprendizagem proposicional, que não se trata apenas de aprender palavras isoladas ou combinadas, mas sim, aprender o significado das ideias em forma de proposição.

Com intuito de deixar claro o processo de aquisição e organização de significados, na estrutura cognitiva, Ausebel propõe a “teoria da assimilação”, possuindo valor tanto para a aprendizagem como para a retenção, podendo ser representada conforme tabela 04 (MOREIRA, 1999):

Tabela 04 - Representação da "teoria da assimilação"

<i>Nova informação, Potencialmente Significativa <b>a</b></i>	<i>Relacionada a, e Assimilada por</i>	<i>Conceito subsunçor Existente na Estrutura cognitiva <b>A</b></i>	<i>Produto Interacional (subsunçor Modificado) <b>A' a'</b></i>
---	--	---	---

Fonte: Autora, 2020.

Assim, segundo Ausebel *apud* Moreira (1999), a assimilação é:

Um processo que ocorre quando um conceito ou proposição a, potencialmente significativo, é assimilado sob uma ideia ou conceito mais inclusivo, já existente na estrutura cognitiva, como um exemplo, extensão, elaboração ou qualificação do mesmo (AUSEBEL, *apud*, MOREIRA, 1999, p.158).

Como observado no diagrama, verifica-se que não só a nova informação **a**, como o conceito subsunçor **A**, com o qual se relacionam, são modificados pela interação. Sendo assim, **A'a'** é um subsunçor modificado. Dessa forma no ponto de vista ausebeliano, o fator cognitivo a ser considerado primeiro e importante é a estrutura cognitiva do indivíduo no momento da aprendizagem. Esta, entretanto, pode ser influenciada de duas maneiras: Substantivamente, pela representação de conceitos e princípios unificadores e inclusivos ao aluno, com maior poder de explanação e propriedades integradoras; e Programaticamente, pelo emprego de métodos adequados para a apresentação do conteúdo e utilização de princípios programáticos apropriados na organização sequencial da matéria de ensino (MOREIRA,1999).

Em uso das palavras do próprio Ausebel:

uma vez que o problema organizacional substantivo (identificação dos básicos disciplina está resolvido), a atenção pode ser dirigida para os problemas programáticos componentes. Aqui, hipotetiza – se, vários princípios relativos à programação eficiente dos aplicáveis independentemente da área de conhecimento (MOREIRA,1999, p.161).

Nesse sentido será necessário o auxílio do professor para que o aluno possa assimilar a estrutura da matéria de ensino e organizar sua própria estrutura cognitiva nessa área de conhecimento, através de aquisição de significados claros, estáveis e transferíveis.

Segundo Klausen (2017):

A aprendizagem é muito mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significativa para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio. Sendo assim na sua prática pedagógica, o professor não pode ser omisso diante dos fatos sócios históricos locais e mundiais, e precisa entender não apenas de sua disciplina, mais também como de política, ética, família para que o processo de ensino aprendizagem seja efetivado na sua plenitude dentro da realidade do aluno (Klausen,2017, p. 02).

Contudo, pode-se dizer que relacionando um conceito a ser apresentado para o aluno com o cotidiano a aprendizagem se tornará mais acessível para o educando, pois assim ele poderá voltar a algo que se tornou significativo para si mesmo. podendo obter uma melhor compreensão do próximo conceito, pois, isto já está na sua estrutura cognitiva.

## CAPÍTULO 4

### FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo, o foco é a visualização de fundamentos elementares da trigonometria. Ressalta-se que muitos dos assuntos aqui abordados podem não ser utilizados nas atividades propostas, mas estão citados aqui, porque podem servir de material de pesquisa para o professor, já que são assuntos basilares para alunos do Ensino Médio, para chegar no que se propõe este trabalho.

É importante destacar que a Trigonometria está conectada com diferentes áreas do conhecimento humano, por exemplo, na Matemática, está agregada ao triângulo equilátero ou triângulo retângulo e ao círculo trigonométrico.

Isto posto, nas próximas seções serão abordados estes conteúdos matemáticos citados acima para que se tenha uma melhor visualização dos conceitos.

É importante salientar que neste capítulo tem a contribuição de definições de vários autores tais como: DANTE (2016), LEONARDO (2016) e CARMO *et al.* (1992).

#### 4.1 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

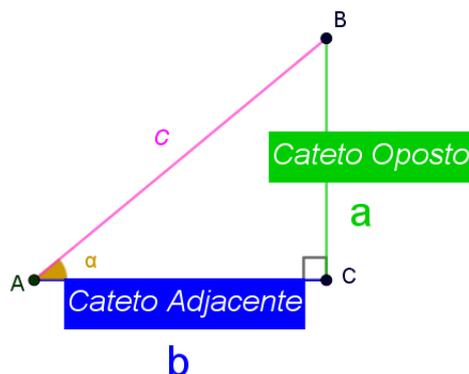
##### 4.1.1 Definição de Seno, Cosseno e Tangente por meio de Semelhança de Triângulos

Verifica-se a trigonometria foi composta por diversos povos e cada um, em um determinado período da história, contribuiu para a construção dessa parte das ciências exatas. A trigonometria é caracterizada como um estudo que relaciona lados e ângulos de um triângulo retângulo sendo que, dessa relação, obtém as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Se  $ABC$  é um triângulo retângulo em  $C$ , conforme figuras 11 e 12, segue que:

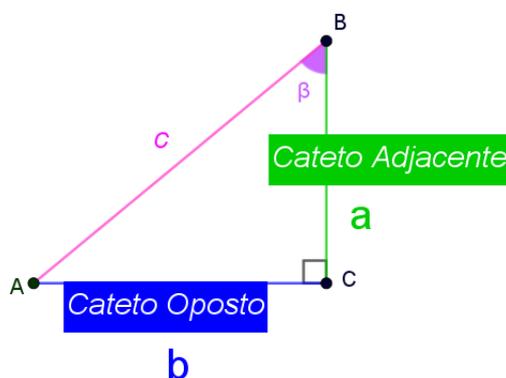
- $c$  é a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto);
- $a$  e  $b$  são as medidas dos catetos (lados que formam o ângulo reto);
- $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são ângulos agudos;
- $\overline{BC}$  é o cateto oposto do ângulo  $A$  ( $\alpha$ );
- $\overline{AC}$  é o cateto adjacente do ângulo  $A$  ( $\alpha$ );
- $\overline{AC}$  é o cateto oposto do ângulo  $B$  ( $\beta$ );
- $\overline{BC}$  é o cateto adjacente do ângulo  $B$  ( $\beta$ ).

Figura 11 - Triângulo Retângulo com cateto oposto e cateto adjacente em relação ao ângulo  $A$  ( $\alpha$ )



Fonte: Autora, 2020.

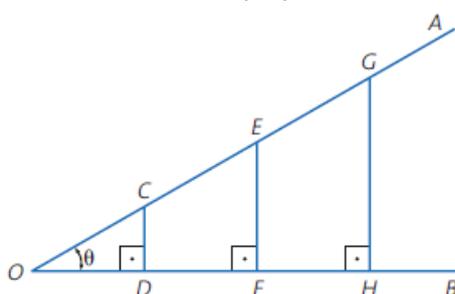
Figura 12 - Triângulo Retângulo com cateto oposto e cateto adjacente em relação ao ângulo  $B$  ( $\beta$ )



Fonte: Autora, 2020.

Considerando agora um ângulo  $A\hat{O}B = \theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) e traçando, a partir dos pontos  $C, E, G$ , etc. da semirreta  $AO$ , as perpendiculares  $CD, EF, GH$ , etc., à semirreta  $OB$ , como mostra a figura 13.

Figura 13 - Semirreta  $AO$  e as perpendiculares  $CD, EF$  e  $GH$



Fonte: Dante, 2016.

Os triângulos  $OCD$ ,  $OEF$ ,  $OGH$ , etc. são semelhantes por terem os mesmos ângulos. Portanto, pode-se escrever:

$$\frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} = \dots$$

Essa relação depende apenas do ângulo  $\theta$  (e não do tamanho das medidas dos lados do triângulo retângulo do qual  $\theta$  é um dos ângulos agudos). Ela é chamada seno de  $\theta$  e escreve-se:

$$\text{sen } \theta = \frac{CD}{OC} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

Da mesma forma, da semelhança de triângulos obtém-se as relações:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = \dots$$

$$\frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = \dots$$

que também dependem apenas do ângulo  $\theta$  e que definem-se, respectivamente, como cosseno do ângulo  $\theta$  e tangente do ângulo  $\theta$ :

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{medida da hipotenusa}} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

Já a relação trigonométrica tangente  $\alpha$  é dada pela razão do cateto oposto pelo cateto adjacente. Assim:

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{Cat. Oposto}}{\text{Cat. Adj.}} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

Isto acontece porque:

$$\frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\text{Cat. Oposto}}{\text{Hip}} \cdot \frac{\text{Hip}}{\text{Cat. Adj.}} = \frac{\text{Cat. Oposto}}{\text{Cat. Adj.}} = \text{tg } \theta$$

Portanto:

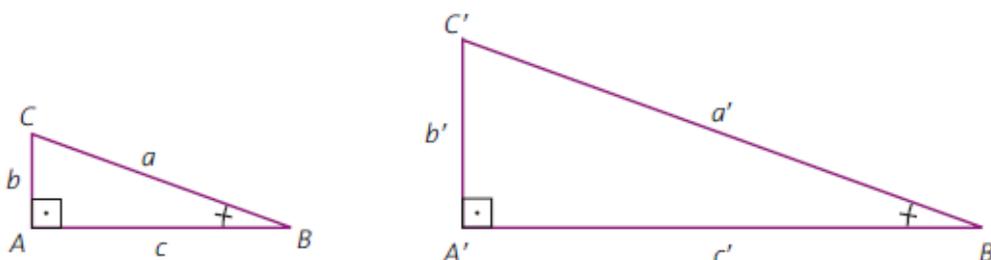
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{Cat.Oposto}}{\operatorname{Cat.Adj.}} \quad (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

#### 4.1.2 Seno, Cosseno e Tangente só dependem do Ângulo

Vale ressaltar que  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\operatorname{cos} \alpha$  e  $\operatorname{tg} \alpha$  dependem somente do ângulo  $\alpha$ , mas não do tamanho das medidas dos lados do triângulo retângulo do qual  $\alpha$  é um dos ângulos agudos (DANTE, 2016). Veja a demonstração dessa parte.

Considere dois triângulos retângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  que possuem um ângulo agudo de mesma medida ( $B = B'$ ). Sendo assim os triângulos são semelhantes, pois possuem dois ângulos correspondentes,  $B = B'$ ,  $C = C'$  e  $A = A'$  (ângulos retos). Observe figura 14.

Figura 14 - Triângulos Retângulos em A semelhantes



Fonte: Dante, 2016.

Dessa semelhança tem-se:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$$

ou seja,  $\operatorname{sen} \widehat{B}' = \operatorname{sen} \widehat{B}$ ,  $\operatorname{cos} \widehat{B}' = \operatorname{cos} \widehat{B}$  e  $\operatorname{tg} \widehat{B}' = \operatorname{tg} \widehat{B}$ .

Dessa forma, vale salientar que o seno, o cosseno e a tangente refere-se somente ao ângulo, e não ao triângulo compreendido.

### 4.1.3 Relações entre Seno, Cosseno e Tangente

De acordo Dante (2016), as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente se associam de várias maneiras, como se mostra a seguir:

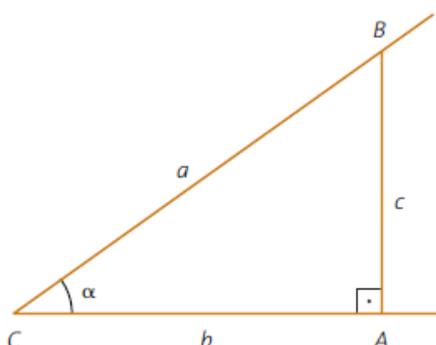
1ª) Fórmula fundamental<sup>7</sup> no triângulo retângulo

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

Demonstração:

Considere um ângulo  $\alpha$  de vértice  $C$  e um triângulo  $CAB$ , retângulo em  $A$ , como mostra a figura 15 abaixo.

Figura 15 - Triângulo Retângulo  $CAB$



Fonte: Dante,2016.

Pelo Teorema de Pitágoras  $a^2 = b^2 + c^2$ , obtém-se:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Assim,

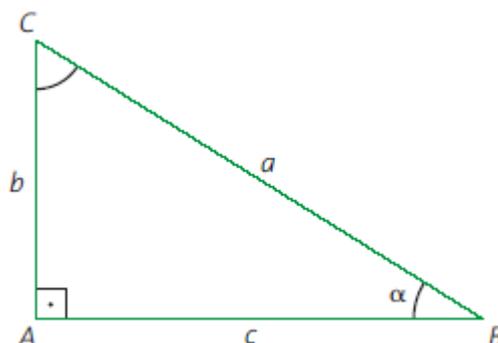
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

$$2^\text{ª}) \tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

---

<sup>7</sup> A Fórmula Fundamental é mais ampla em sua validade do que descrito na demonstração mais precisamente para todo  $x \in \mathbb{R}$  é válido que  $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$ .

Figura 16 - Triângulo Retângulo em A



Fonte: Dante, 2016.

Demonstração a partir da figura 16 mostrada acima:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{ab}{ac} = \frac{b}{c} = \text{tan } \alpha$$

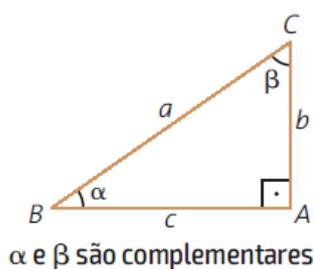
ou

$$\text{tan } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad (\text{divide-se ambos os termos da razão por } a \neq 0)$$

$$\text{Logo } \text{tan } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

3ª) Se dois ângulos,  $\alpha$  e  $\beta$ , são complementares ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ), então  $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$  (o seno de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo complementar, e vice-versa).

Demonstração a partir da figura 17:

Figura 17 - Triângulo BAC com  $\alpha$  e  $\beta$  complementares

Fonte: Dante, 2016.

Aplicando as definições de seno, cosseno e tangente nesse triângulo anterior, obtém-se:

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} = \cos \beta ; \text{ portanto } \text{sen } \alpha = \cos \beta$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{c}{a} = \text{sen } \beta ; \text{ portanto } \text{cos } \alpha = \text{sen } \beta$$

Observações:

1ª) Dessa propriedade surgiu o nome cosseno – “seno do complemento”.

2ª) Com essa propriedade, conhecendo as razões trigonométricas de ângulos  $\alpha$  consegue-se determinar imediatamente as razões trigonométricas dos ângulos complementares  $\beta$  e vice-versa. Por exemplo, sabendo que  $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ , já sabe-se

que  $\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$ , pois  $30^\circ$  e  $60^\circ$  são ângulos complementares.

#### 4.1.4 Seno, Cosseno e Tangente dos Ângulos Notáveis

Os ângulos agudos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , são chamados de “Ângulos Notáveis”. Para isto tem-se a tabela 05 muito usada para que facilite os cálculos.

Tabela 05 - Ângulos Notáveis

	<b>30°</b>	<b>45°</b>	<b>60°</b>
<b>sen</b>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<b>cos</b>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<b>tg</b>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

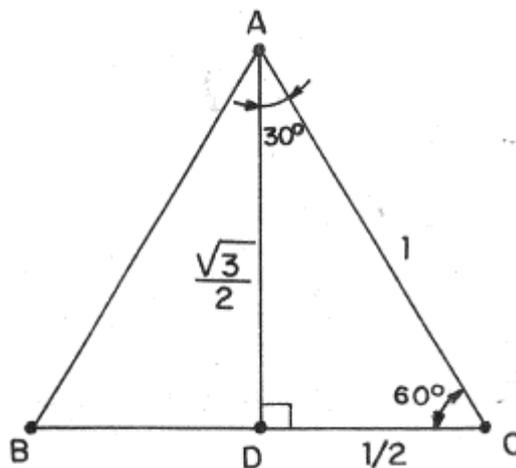
Fonte: Autora, 2020.

Mas vale ressaltar que tem explicação para esses valores, veja como foram encontrados.

I) Ângulos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$

Considere um triângulo equilátero  $ABC$  de lado 1 da figura abaixo, traça-se a altura  $AD$  (que também é mediana). Obtém-se então  $DC = 1/2$  e pelo Teorema de Pitágoras  $AD = \sqrt{3}/2$ . Como  $\hat{ACD} = 60^\circ$  e  $\hat{DAC} = 30^\circ$ , têm-se a figura 18:

Figura 18 - Triângulo Equilátero



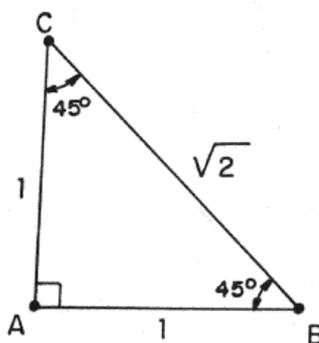
Fonte: Carmo, et al., 1992.

$$\begin{array}{lll} \text{sen } 30^\circ = 1/2 & \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 & \text{tg } 30^\circ = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}/3 \\ \text{sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2 & \cos 60^\circ = 1/2 & \text{tg } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \end{array}$$

I) Ângulo de  $45^\circ$

Considere o triângulo  $ABC$  da figura abaixo de catetos com medida 1 e ângulos agudos de  $45^\circ$ . Pelo Teorema de Pitágoras  $BC = \sqrt{2}$ . Então obtém-se a figura 19:

Figura 19 - Triângulo Isósceles



Fonte: Carmo, et al., 1992.

$$\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \qquad \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \qquad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

#### 4.1.5 Seno e Cosseno de Ângulos Obtusos

Ângulo Obtuso, é aquele ângulo que está entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$ . Neste momento, segundo Dante (2016), abordar-se-á os valores de senos e cossenos de ângulos obtusos, sabendo que este assunto não foi apresentado ainda porque não existem ângulos obtusos nos triângulos retângulos. Sendo assim, agora trata-se apenas de como lidar com esses ângulos na prática.

Primeiramente, é preciso que se saiba:

- $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$  e  $\operatorname{cos} 90^\circ = 0$
- senos de ângulos obtusos são exatamente iguais aos senos dos suplementos desses ângulos:  
 $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} (180^\circ - x)$
- cossenos de ângulos obtusos são opostos aos cossenos dos suplementos desses ângulos:  
 $\operatorname{cos} x = -\operatorname{cos} (180^\circ - x)$

Vale lembrar que ângulos suplementares são dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a  $180^\circ$ .

Exemplos:

a)  $\operatorname{sen} 120^\circ$

O suplemento de  $120^\circ$  é  $60^\circ$ , logo:

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 120^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b)  $\operatorname{cos} 120^\circ$

O suplemento de  $120^\circ$  é  $60^\circ$ , portanto:

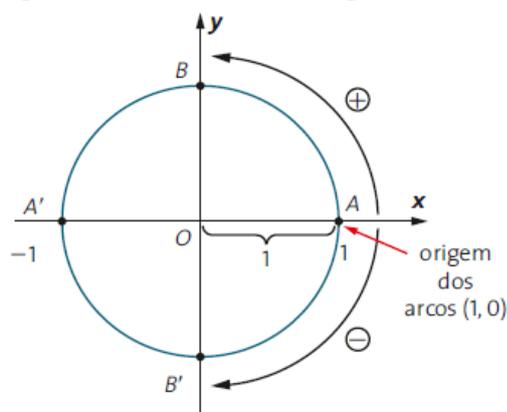
$$\operatorname{cos} 120^\circ = -\operatorname{cos}(180^\circ - 120^\circ) = -\operatorname{cos} 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

## 4.2 CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Denomina-se circunferência trigonométrica a circunferência orientada, de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cujo raio tem 1 unidade de comprimento e na qual o sentido positivo é o anti-horário.

Associando à circunferência trigonométrica de centro  $O$  um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, fixando o ponto  $A$  de coordenadas  $(1, 0)$  como origem dos arcos, nesse caso observe a figura 20 abaixo.

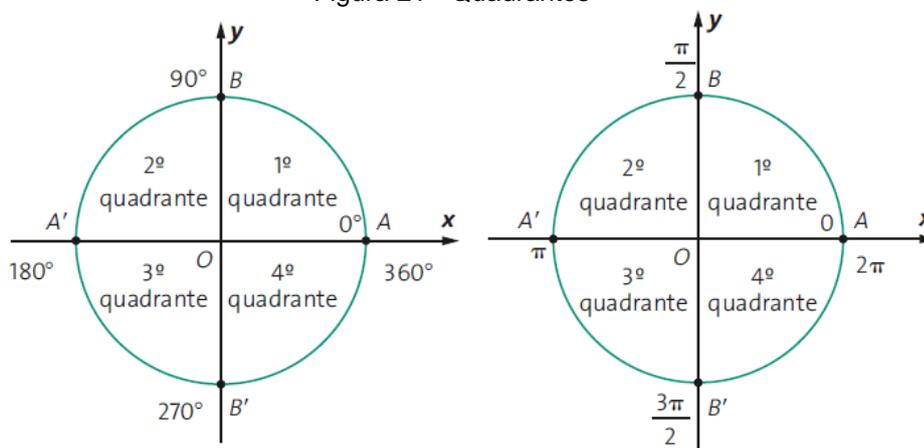
Figura 20 - Circunferência Trigonométrica



Fonte: Dante, 2016.

Os eixos  $x$  e  $y$  dividem a circunferência trigonométrica em quatro partes congruentes chamadas quadrantes, numeradas de 1 a 4 e contadas a partir de  $A$ , no sentido positivo. Conforme figura 21, onde são apresentadas duas circunferências, pois na circunferência a esquerda as medidas estão em graus e na circunferência a direita as medidas estão em radianos.

Figura 21 - Quadrantes



Fonte: Dante, 2016.

### 4.3 FUNÇÃO

Vale ressaltar que um dos conceitos matemáticos mais utilizados é o de função, podendo ser uma maneira de interpretar várias situações no cotidiano, destacando que funções podem ser empregadas em economia, saúde, logística, química, física, dentre várias outras áreas para prever novos resultados ou até mesmo para entender comportamentos.

Função é definida da seguinte forma:

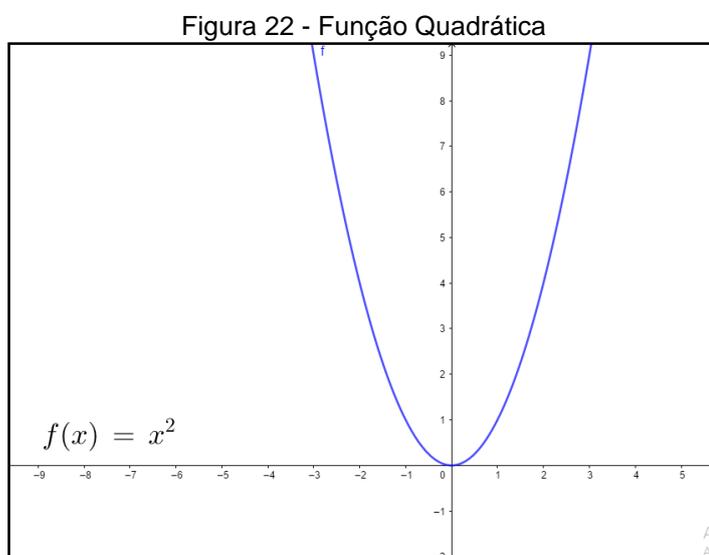
Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios, uma função de  $A$  em  $B$  é uma relação  $f$  tal que  $Dom(f) = A$  e para cada  $x$  em  $A$  existe um único elemento  $y$  em  $B$  tal que  $(x, y) \in f$ .

#### 4.3.1 Função Par

Por definição diz-se que uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é par quando para todo  $x \in Dom(f)$  tem-se  $f(x) = f(-x)$ .

Além disso, tem-se que o gráfico de uma função par é simétrica com relação ao eixo  $y$ .

Considere a função  $f(x) = x^2$  tem-se para todo  $x$  no domínio de  $f$  tem-se  $f(x) = f(-x)$ , de fato  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ . Além disso, o gráfico de  $f$  é simétrico em relação ao eixo  $y$  conforme figura 22.



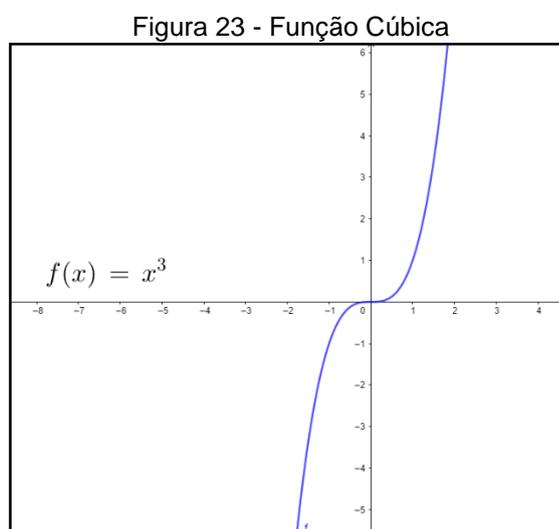
Fonte: Autora, 2020.

### 4.3.2 Função Ímpar

Por definição diz-se que uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é ímpar quando para todo  $x \in \text{Dom}(f)$  tem-se  $f(-x) = -f(x)$ .

Além disso, tem-se que o gráfico de uma função ímpar é simétrica com relação à origem.

Considere a função  $f(x) = x^3$  tem-se para todo  $x$  no domínio de  $f$  tem-se  $f(x) = -f(-x)$ , de fato  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ . Além disso, o gráfico de  $f$  na figura 23 é simétrico em relação à origem, ou seja, para todo ponto do gráfico  $(x, f(x))$ , o ponto  $(-x, f(-x))$ , também está no gráfico da figura 23.



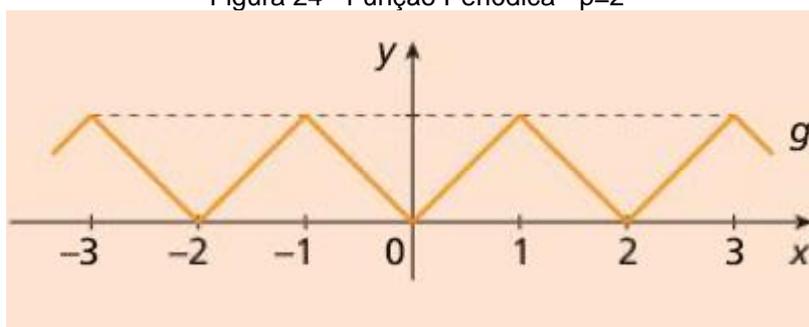
Fonte: Autora, 2020.

### 4.3.3 Função Periódica

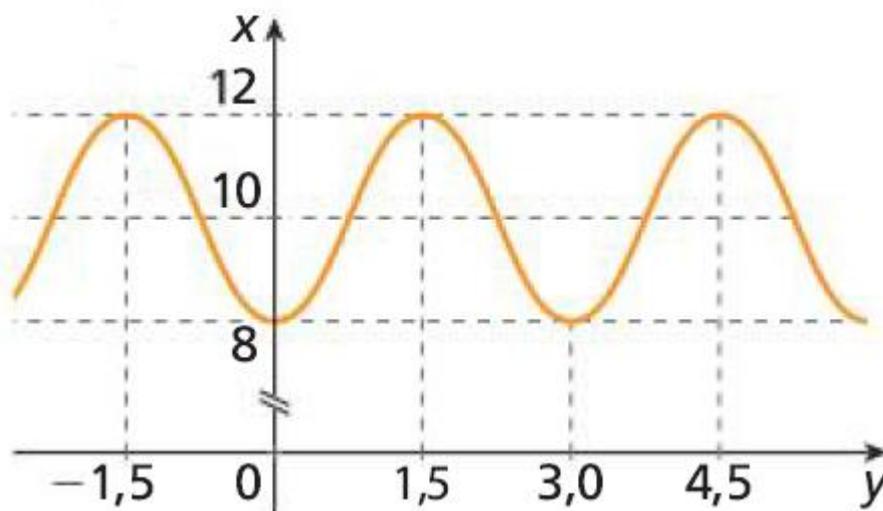
Define-se como função periódica, uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é assim chamada quando existe um número real positivo  $p \neq 0$ , tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = f(x + p)$ . Quando isso ocorre tem-se  $f(x + kp) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e todo  $k \in \mathbb{Z}$ . O menor número  $p > 0$  tal que  $f(x + p) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  chama-se período da função  $f$ .

Sendo que o menor valor positivo de  $p$  que satisfaz a igualdade acima é chamado de período de  $f$ , conforme as figuras 24 e 25.

Exemplos:

Figura 24 - Função Periódica -  $p=2$ 

Fonte: Leonardo, 2016.

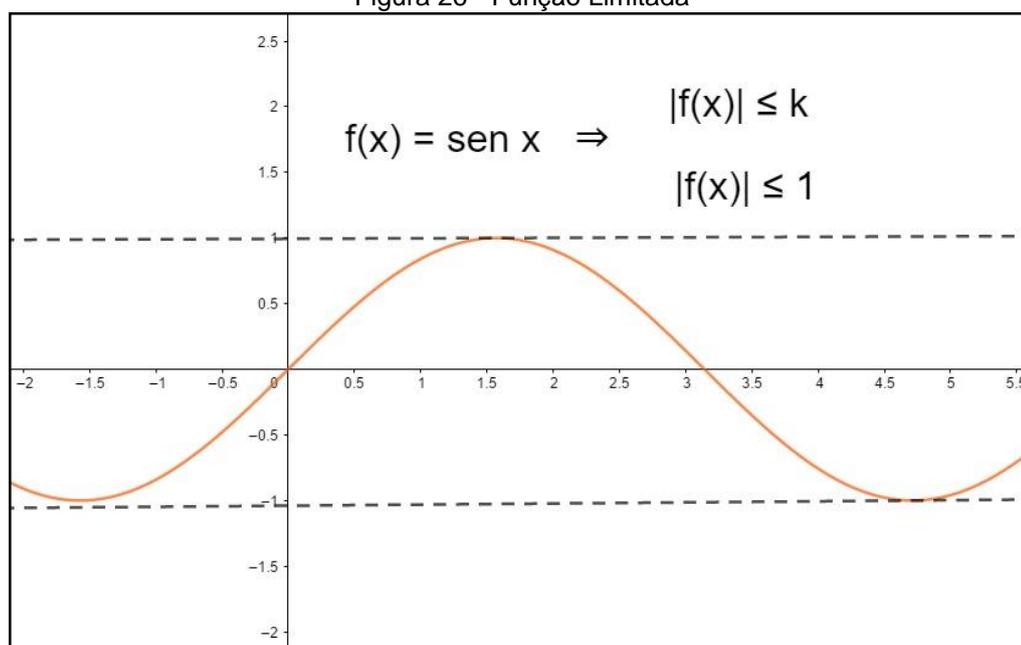
Figura 25 - Função Periódica -  $p=3$ 

Fonte: Leonardo, 2016.

#### 4.3.4 Função Limitada

Uma função real  $f$  é limitada quando existe um número real  $k$ , tal que, para todo  $x$  pertencente ao domínio de  $f$  tem-se que  $|f(x)| \leq k$ . Observe o gráfico da figura 26.

Figura 26 - Função Limitada

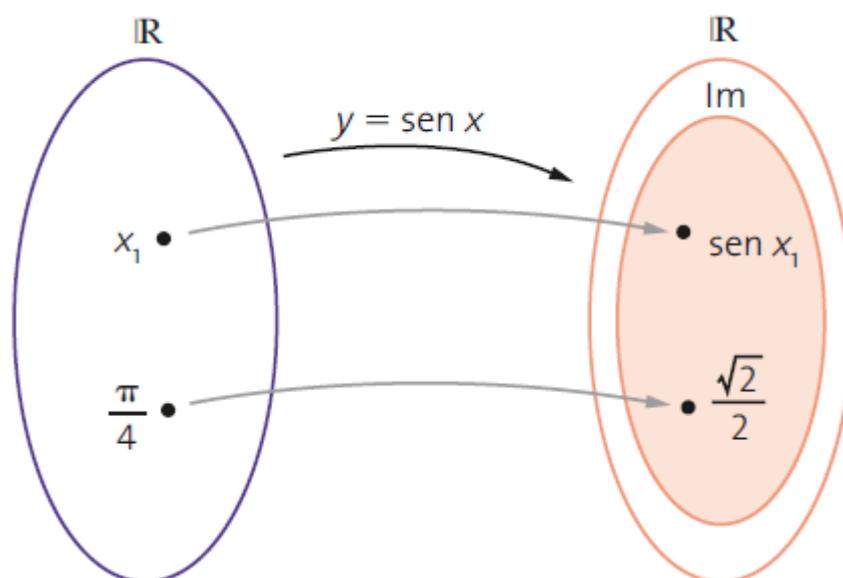


Fonte: Autora, 2020.

#### 4.4 ESTUDO DA FUNÇÃO SENO

Dado um número real  $x$ , pode-se associar a ele o valor do seno de um ângulo (ou arco) de  $x$  radianos representados na figura 27:

Figura 27 - Função Seno



Fonte: Dante, 2016.

Então assim se define a função trigonométrica seno como a função real de variáveis reais que associa a cada número real  $x$  o valor real  $\text{sen } x$ , ou seja,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x) = \text{sen } x$ .

Propriedades da Função Seno;

- Domínio: O domínio da função seno é  $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$ , pois está definida para todos os valores reais.
- Imagem: A imagem é da forma  $\text{Im } f(x) = \{y \in \mathbb{R} | -1 < y < 1\}$ , ou seja, tem como valor mínimo -1 e como valor máximo 1.

Ressalte-se que a medida de um ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

Para a construção do gráfico da função seno, primeiramente é preciso elaborar uma tabela com os valores de  $x$  da primeira volta positiva. Vale salientar que em alguns casos, o seno terá utilizado valores aproximados conforme a tabela 06.

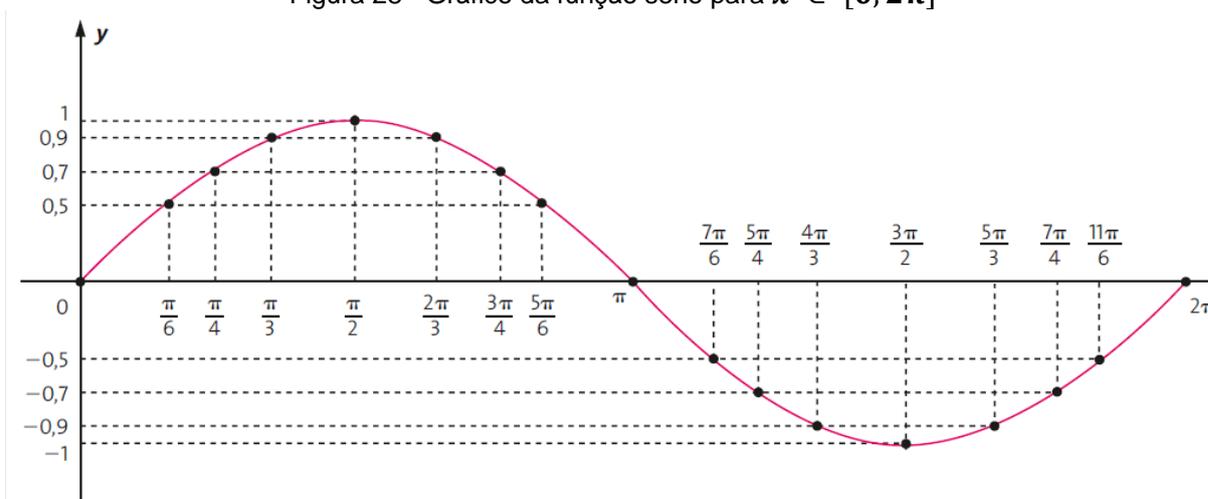
Tabela 06 - Seno de alguns ângulos

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sen x	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
sen x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
sen x	-0,5	-0,7	-0,9	-1	-0,9	-0,7	-0,5	0

Fonte: Autora, 2020.

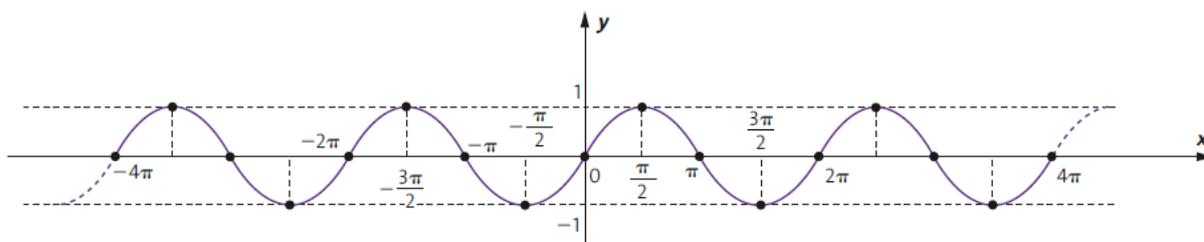
Observe o gráfico da figura 28, para  $x \in [0, 2\pi]$ :

Figura 28 - Gráfico da função seno para  $x \in [0, 2\pi]$ 

Fonte: Dante, 2016.

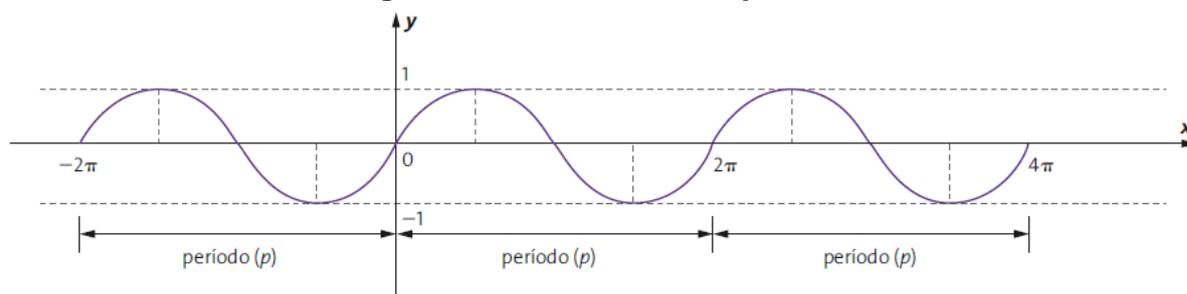
Como a função  $f(x) = \sin x$  é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é  $\mathbb{R}$ , a curva pode ser estendida para valores de  $x$  menores do que zero e maiores do que  $2\pi$ . Assim, o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sin x$ , é a curva chamada senoide, que tem o seguinte aspecto nas figura 29 e 30:

Figura 29 - Gráfico da curva senoide



Fonte: Dante, 2016.

Figura 30 - Periodicidade da função seno



Fonte: Dante, 2016.

Ao observar o gráfico da função seno, verifica-se que a função repete periodicamente seus valores nos intervalos ...,  $[-2\pi, 0]$ ,  $[0, 2\pi]$ ,  $[2\pi, 4\pi]$ ,... Nesse caso então diz-se que a função seno é periódica.

Veja que no gráfico:

$$\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \dots \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Logo pode-se dizer que o período da função seno é  $2\pi$  e indicando-se assim:  $p = 2\pi$ .

Portanto, para encontrar o período, basta observar no gráfico o deslocamento horizontal necessário para que ele comece a se repetir.

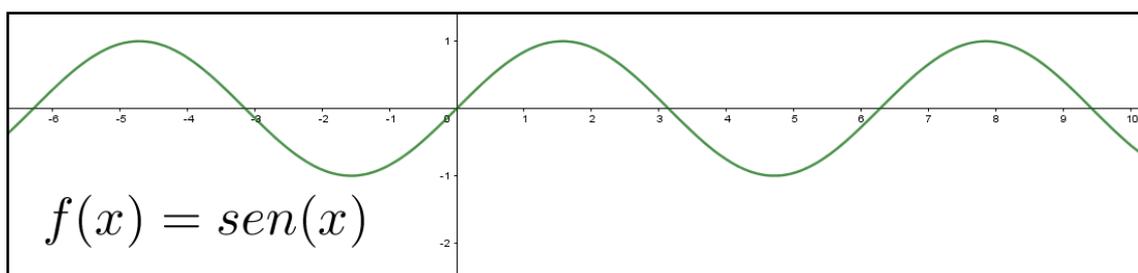
Da função seno vale destacar que a metade da distância vertical entre um ponto mínimo a um ponto máximo, chama-se amplitude.

Exemplo:

$$y = 2 \cdot \text{sen } x$$

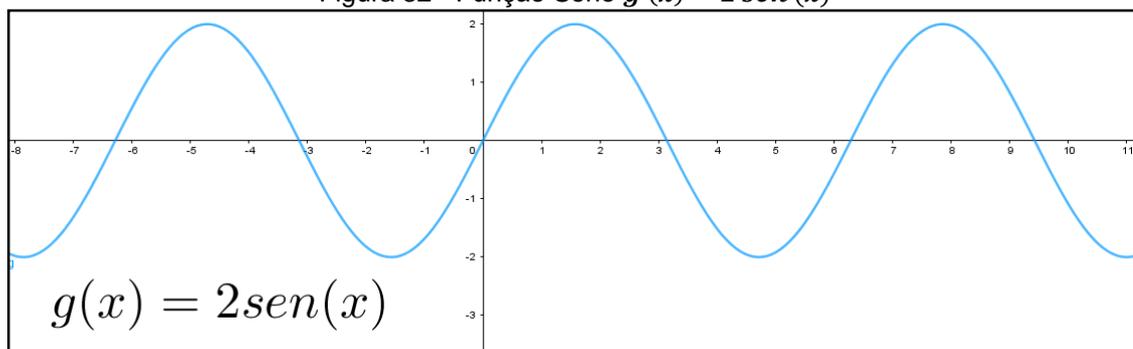
A amplitude neste caso é o 2, ou seja, ao representar as funções  $y = \text{sen } x$  ou  $y = 2 \cdot \text{sen } x$  em relação ao deslocamento e ao tempo, as mesmas mostram o deslocamento de um ponto Q que se movimenta para cima e para baixo sobre uma reta, sendo a variável independente, o ângulo. Veja as figuras 31 e 32.

Figura 31 - Função Seno  $f(x) = \text{sen}(x)$



Fonte: Autora, 2020.

Figura 32 - Função Seno  $g(x) = 2 \text{sen}(x)$



Fonte: Autora, 2020.

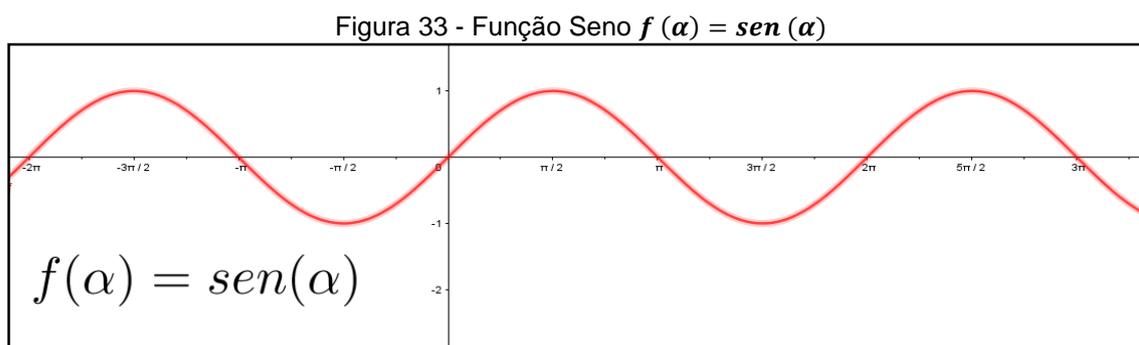
Supondo que um ponto P gaste 1s para dar uma volta completa em uma circunferência, então resolvendo uma regra de três tem-se:

<i>Tempo</i>	<i>Volta Completa</i>
1 s	$2\pi$
$t$	$x$

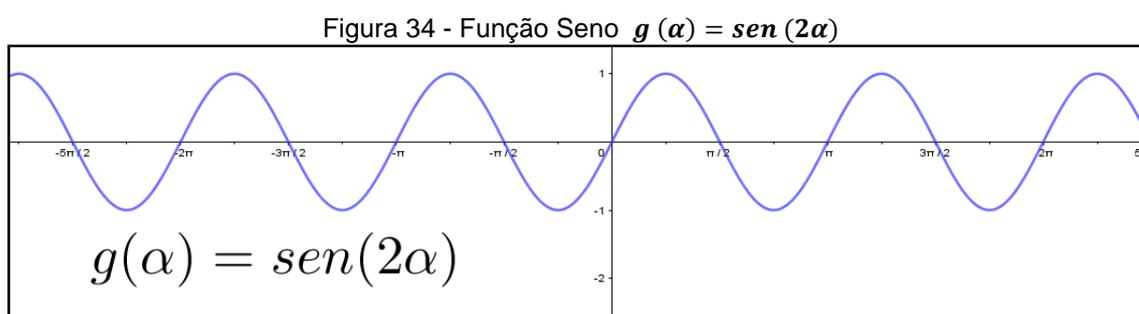
Então:  $x = 2\pi t$

Portanto a função  $y = \text{sen } x$  será representada por  $y = \text{sen } 2\pi t$ , onde  $t$  varia de 0 a 1 segundo e o ângulo  $\alpha$  varia de 0 a  $2\pi$ .

Há outros fatores para se abordar, o primeiro é a frequência, que é o espaço de um segundo, no qual 1 ciclo por segundo é igual a 1 Hz (Hertz), e o segundo é no caso do tempo gasto pelo ponto P, o chamado período. Observe as figuras 33 e 34.



Fonte: Autora, 2020.



Fonte: Autora, 2020.

Então se um ponto P percorrer uma circunferência  $F$  vezes em um segundo, tem-se uma função  $y = \text{sen } x$  que pode ser representada por  $y = \text{sen}(2\pi t F) \rightarrow F$  revoluções em 1s.

Para aumentar a amplitude de uma função, basta aumentar o fator  $A$ .

$$y = A \text{sen}(2\pi \cdot t \cdot F)$$

Sendo que:

A = amplitude (raio do ciclo)

T = tempo

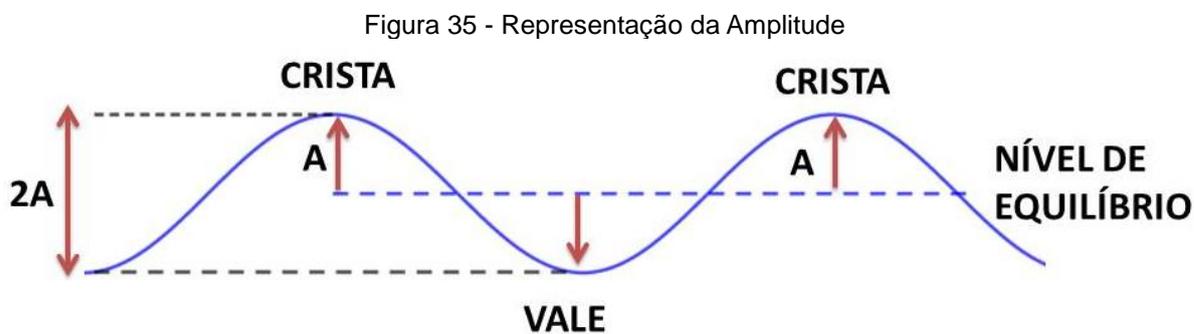
F = número de revoluções por segundo (frequência)

$\lambda$  = comprimento de onda

No caso do som, tem-se que:

A amplitude (A) é a intensidade do som, é fato desse som ser forte ou fraco.

Ao se determinar uma onda, também se chama de amplitude a distância de uma crista ou vale ao nível de equilíbrio conforme representado na figura 35.



Fonte: Autora, 2020.

A frequência (F) é o que se relaciona com a altura da nota musical, por exemplo a nota Dó possui 261 pulsos em um segundo.

Destaque-se que o som obtido é de acordo com a frequência, pois quanto maior ela for, mais agudo é o som e quanto menor ela for, o som será mais grave.

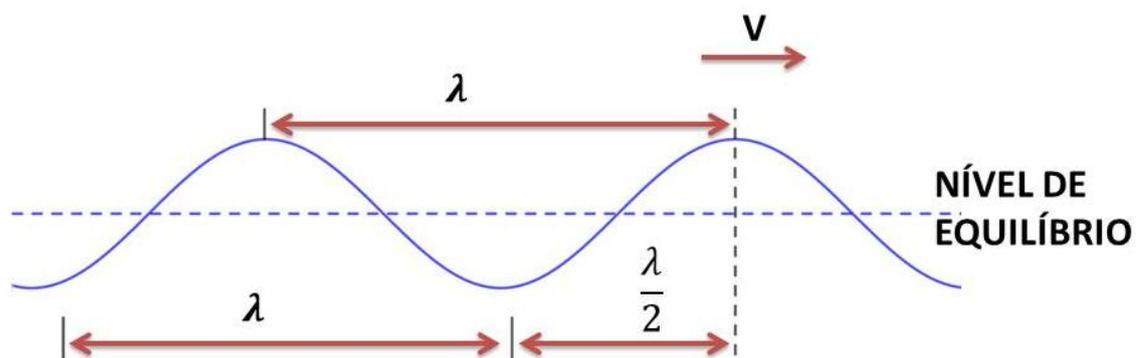
A fórmula em que se utiliza para encontrar a frequência é  $F = \frac{1}{T}$ .

O período (T) é o que relaciona o tempo compreendido entre estados iguais de vibração.

A fórmula em que se utiliza para encontrar o tempo é  $T = \frac{1}{F}$ .

Chama-se comprimento de onda a distância que a perturbação percorre durante um período, conforme a figura 36.

Figura 36 - Representação do comprimento de onda



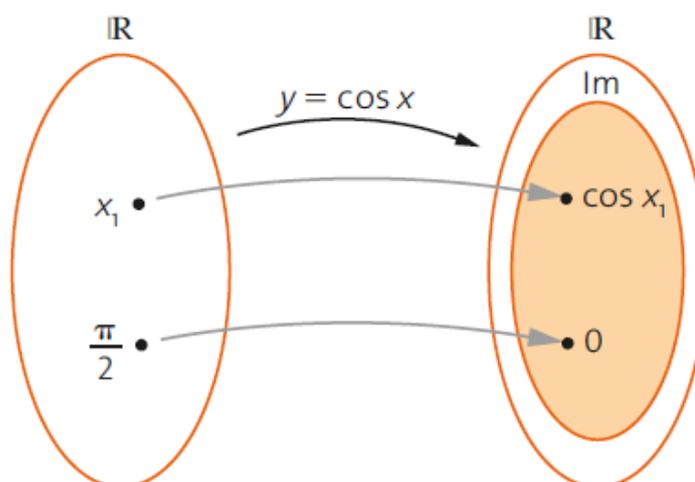
Fonte: Autora, 2020.

No caso, quando Pitágoras realizou o experimento do monocórdio e observou que ao dividir uma corda ao meio, a mesma tinha o dobro de vibrações de quando tinha se considerado a corda inteira, ou seja, se a corda vibrou 15 pulsos, metade da corda vibrou 30 pulsos, assim sendo, o período da função se reduziu à metade. Ressaltando que quanto maior o número de vibrações, mais agudo é o som.

#### 4.4.1 Função Cosseno

Dado um número real  $x$ , pode-se associar a ele o valor do cosseno de um ângulo (ou arco) de  $x$  radianos conforme a figura 37:

Figura 37 - Função Cosseno



Fonte: Dante, 2016.

Define-se a função trigonométrica cosseno como a função real de variáveis reais que associa a cada número real  $x$  o valor real  $\cos x$ , ou seja,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow f(x) = \cos x$ .

Propriedades da Função Cosseno:

- Domínio:  $Dom f(x) = \mathbb{R}$ , pois a Função Cosseno está definida para todos os valores reais.
- Imagem: A imagem é da forma  $Im f(x) = \{y \in \mathbb{R} | -1 < y < 1\}$ .

Vale ressaltar que a medida de um ângulo (ou arco), é expresso em radianos.

Para a construção do gráfico da função cosseno, primeiramente é necessário se fazer uma tabela com os valores do cosseno, observando que em alguns casos os valores podem estar aproximados representados na tabela 07 e figura 38.

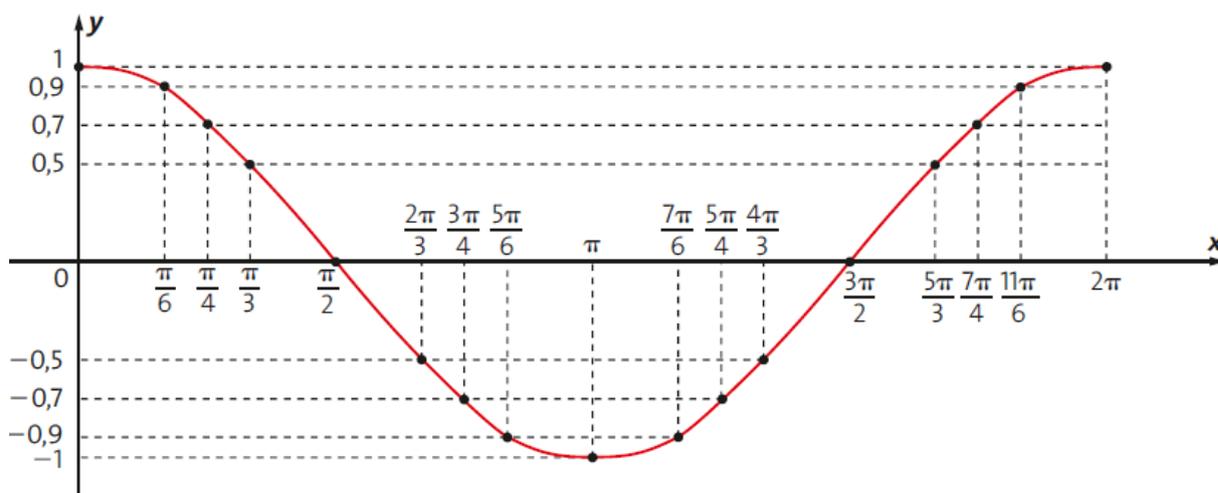
Tabela 07 - Cosseno de alguns ângulos

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
cos x	1	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1

$x$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	-0,9	-0,7	-0,5	0	0,5	0,7	0,9	1

Fonte: Autora, 2020.

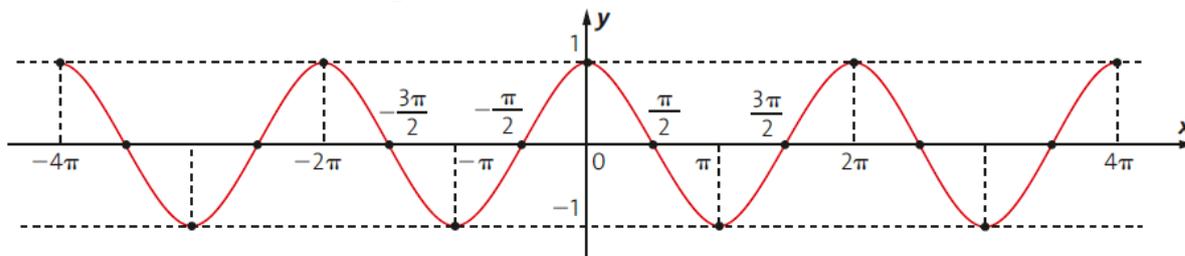
Figura 38 - Gráfico da função cosseno para  $x \in [0, 2\pi]$



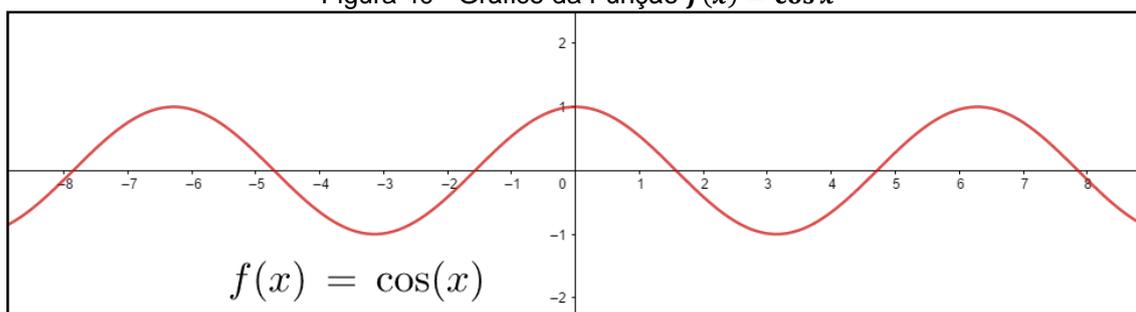
Fonte: Dante, 2016.

Como a função  $f(x) = \cos x$  é definida no conjunto dos números reais, ou seja, seu domínio é  $\mathbb{R}$ , a curva pode ser estendida para valores de  $x$  menores do que zero e maiores do que  $2\pi$ . Assim, o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \cos x$ , é a curva chamada cossenoide, que tem o seguinte modelo representado nas figuras 39, 40, 41 e 42:

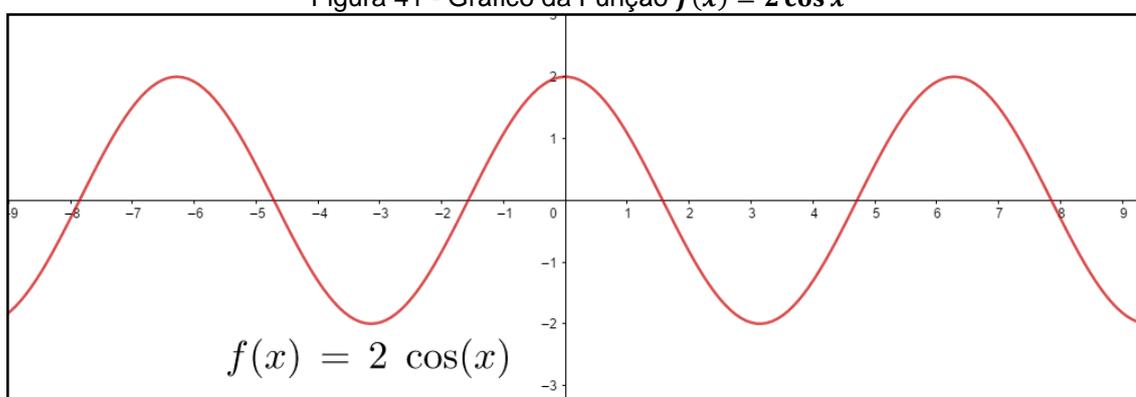
Figura 39 - Gráfico da curva cossenoide



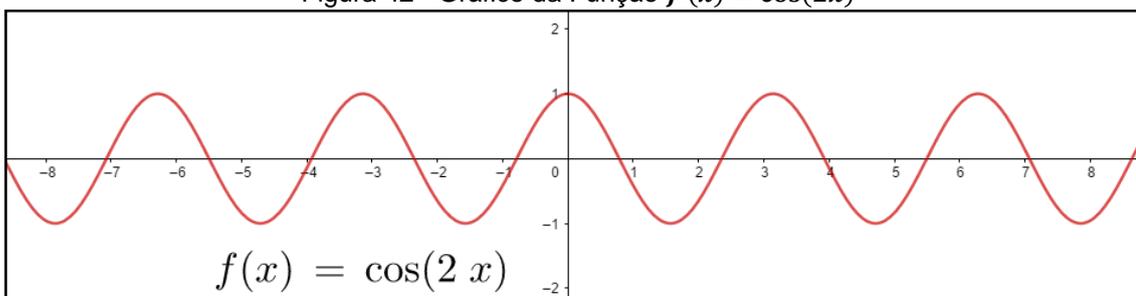
Fonte: Dante, 2016.

Figura 40 - Gráfico da Função  $f(x) = \cos x$ 

Fonte: Autora, 2020.

Figura 41 - Gráfico da Função  $f(x) = 2 \cos x$ 

Fonte: Autora, 2020.

Figura 42 - Gráfico da Função  $f(x) = \cos(2x)$ 

Fonte: Autora, 2020.

## CAPÍTULO 5

### ALGUMAS POSSIBILIDADES DE ATIVIDADES COM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vale salientar que a conexão entre Música e Matemática é ampla, mas este trabalho tem um olhar especial para Funções Trigonométricas, no qual será apresentada uma proposta de plano de atividades para algumas aulas, podendo ser adaptada de acordo a realidade dos alunos e do professor.

O público alvo desta proposta de atividades é o 2º Ano do Ensino Médio e o tempo estimado de aplicação da mesma é 08 horas/aulas.

É importante que o aluno se inteire da história da Música e Matemática, através da contribuição do filósofo, astrônomo, matemático e músico Pitágoras, fazendo isso através de apresentações de textos e vídeo proposto na figura abaixo 43 para um debate em sala de aula.

Figura 43 - Parte do Vídeo Donald no País da Matemática



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk>, 2020.

Vale ressaltar que, neste momento de aula, o professor estará trabalhando com o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática focando o subdomínio Conhecimento da Estrutura da Matemática, pois está tendo uma conexão da matemática com a música, logo, isso é uma conexão de diferentes áreas, conexão essa chamada de conexão transversal. E ainda assim o aluno terá o reconhecimento de que a matemática foi importante para o avanço da música.

Para dar continuidade a esta aula, o professor estará desenvolvendo a habilidade abaixo:

(EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança (BNCC, 2017, p. 529).

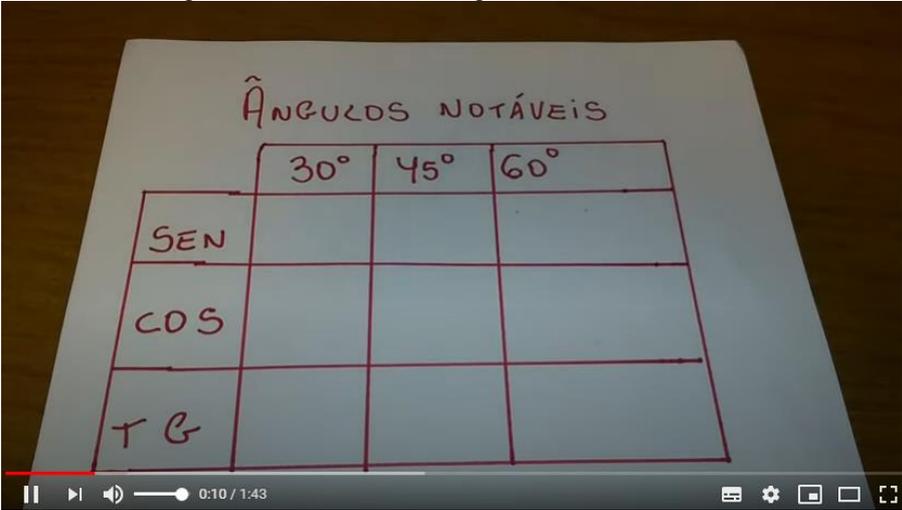
Considerando a habilidade citada acima, observa-se que o aluno terá que utilizar os triângulos e suas propriedades para demonstrar as razões trigonométricas que virá logo abaixo para o aluno identificá-las.

Também é válido salientar que neste momento estará novamente trabalhando o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática focando o subdomínio Conhecimento de Tópicos, pois aqui é necessário dar atenção aos conceitos, definições e propriedades de Triângulos.

Pois nesse momento é importante que o aluno identifique as razões trigonométricas no triângulo retângulo através de exemplos e demonstrações que estão disponíveis no capítulo 04.

Para memorização da Tabela dos Ângulos Notáveis tem a sugestão de uma música que está disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=HHjuKRHEuu4> de acordo a figura 44 abaixo.

Figura 44 - Música dos Ângulos Notáveis



A handwritten table on a piece of paper titled "ÂNGULOS NOTÁVEIS". The table has three columns for angles: 30°, 45°, and 60°. The rows represent trigonometric functions: SEN, COS, and TG. The cells are currently empty.

	30°	45°	60°
SEN			
COS			
TG			

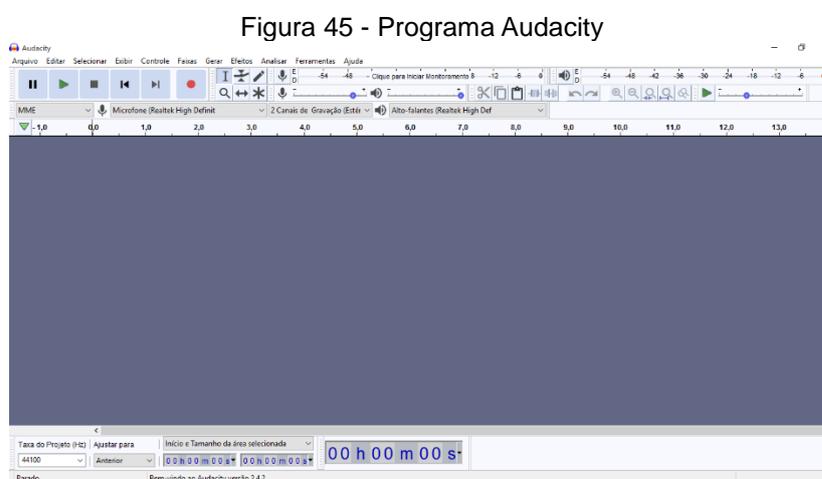
Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=HHjuKRHEuu4>, 2020.

Seguindo a proposta tem-se a utilização do programa Audacity e do programa GeoGebra para representar os sons, a fim de que o aluno identifique uma função periódica através de gráficos, reconheça a amplitude, frequência, período e comprimento de onda de uma função a partir de seu gráfico, entenda a definição de

função seno e função cosseno e adquira noção de cada parâmetro da função do tipo  $f(x) = A \text{ sen } (2\pi \cdot t \cdot F)$ .

Neste momento é necessário que o professor tenha baixado em seu computador o programa Audacity, para tanto pode-se obter instruções para a instalação no vídeo disponível em: <https://youtu.be/Bt3PI3P5mow>. O objetivo é representar os sons de notas musicais através de sua frequência e amplitude através do Programa Audacity.

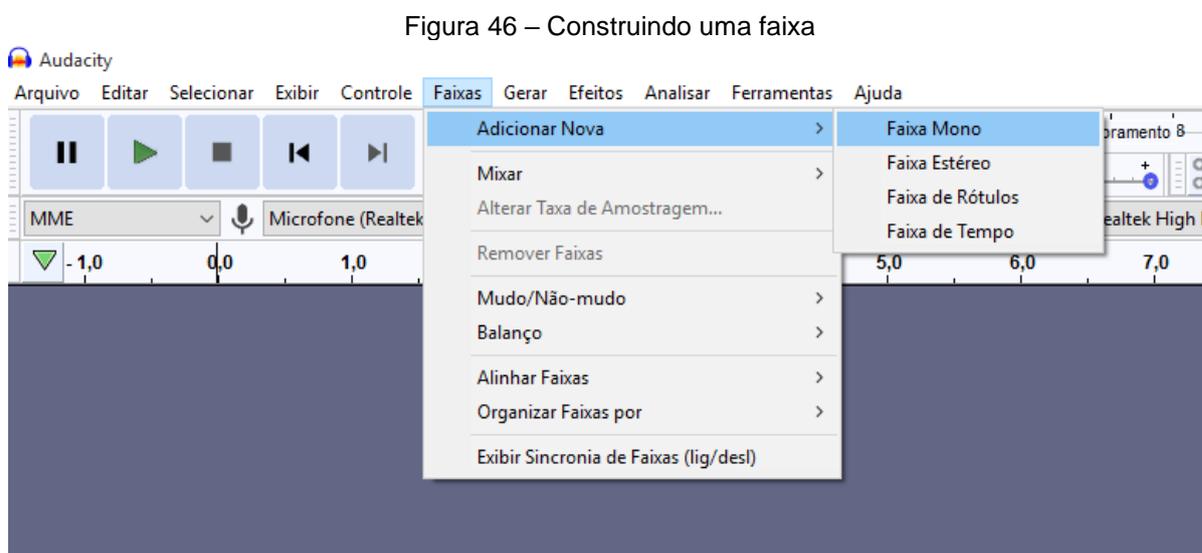
Depois de baixado o programa aparecerá uma tela conforme figura 45 abaixo:



Fonte: Autora, 2021.

Para representar os sons é necessário seguir a seguinte ordem:

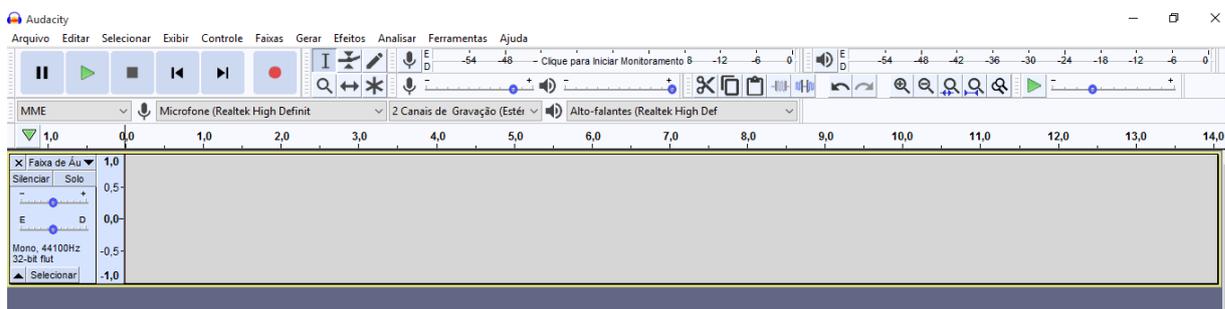
1. Faixas; Adicionar nova; Faixa mono. Assim conforme a figura 46 abaixo.



Fonte: Autora, 2021.

Logo, depois destes passos a tela ficará conforme figura 47.

Figura 47 - Janela do Audacity

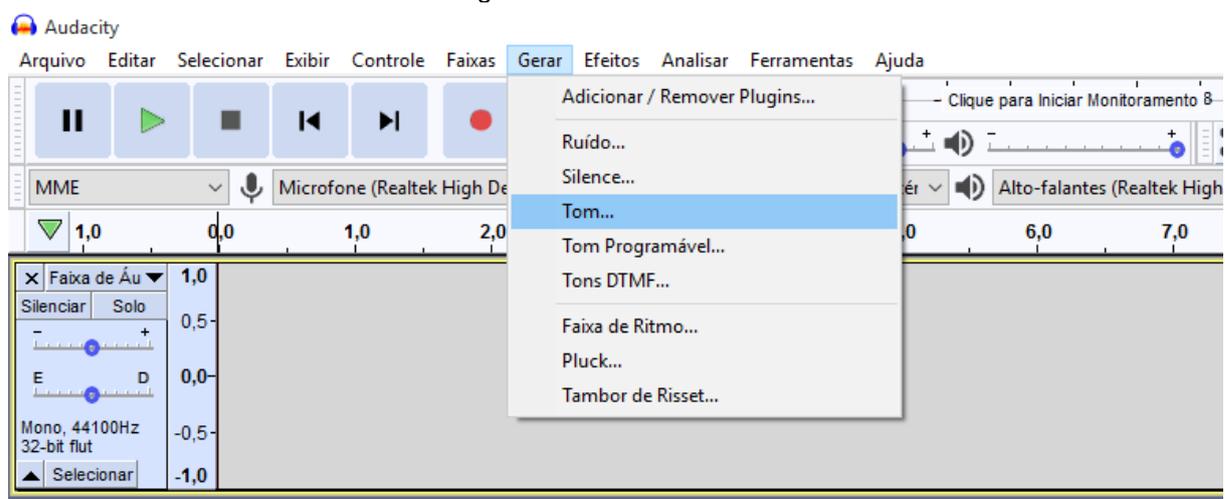


Fonte: Autora, 2021.

Então a partir disso faz-se:

2. Gerar; Tom. Daí aparece a seguinte tela na figura 48 abaixo.

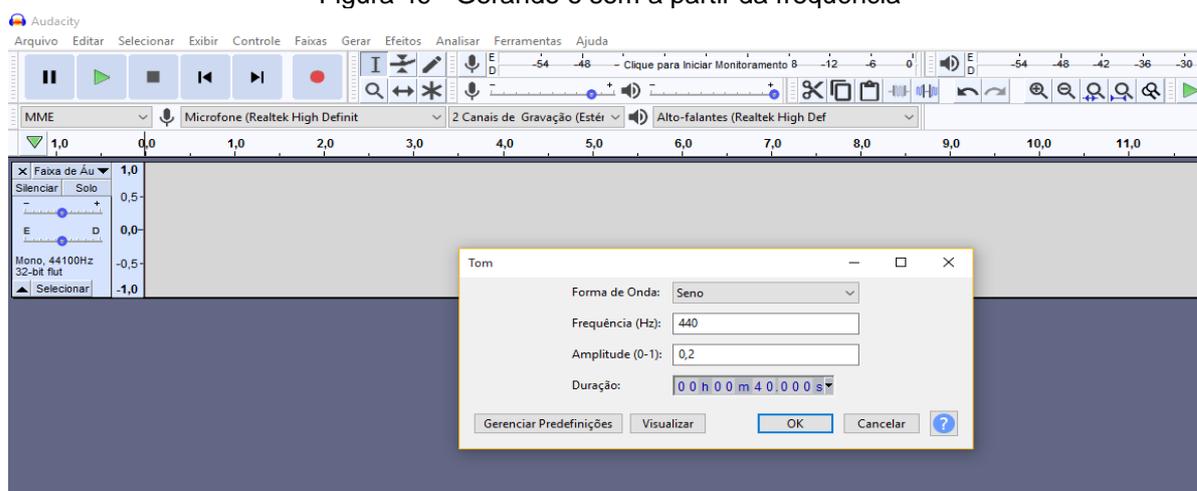
Figura 48 - Gerando o som



Fonte: Autora, 2021.

Agora atendendo o objetivo acima tem-se a figura 49 abaixo.

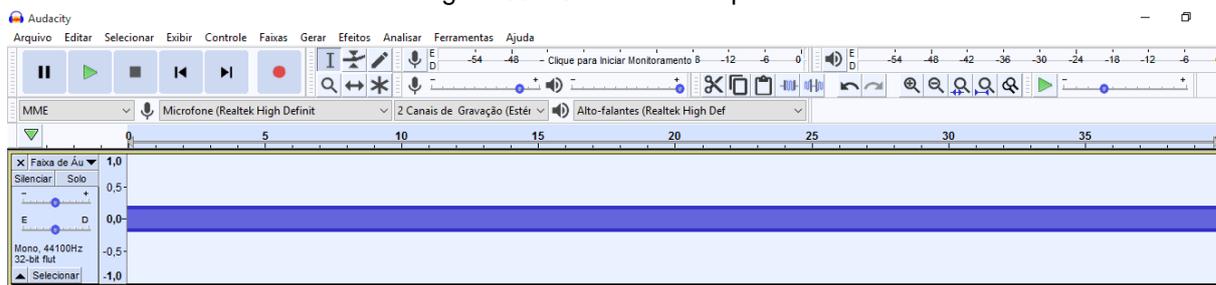
Figura 49 - Gerando o som a partir da frequência



Fonte: Autora, 2021.

Nessa janela que apareceu forma de onda, frequência, amplitude e duração, o professor escolhe o som que quer representar e a preenche como preferir. Na figura 50 a seguir, vê-se como o som aparece.

Figura 50 - Como o som aparece



Fonte: Autora, 2021.

Para representar o som em forma de ondas é necessário clicar no símbolo apresentado na figura 51 abaixo.

Figura 51 - Representação do som



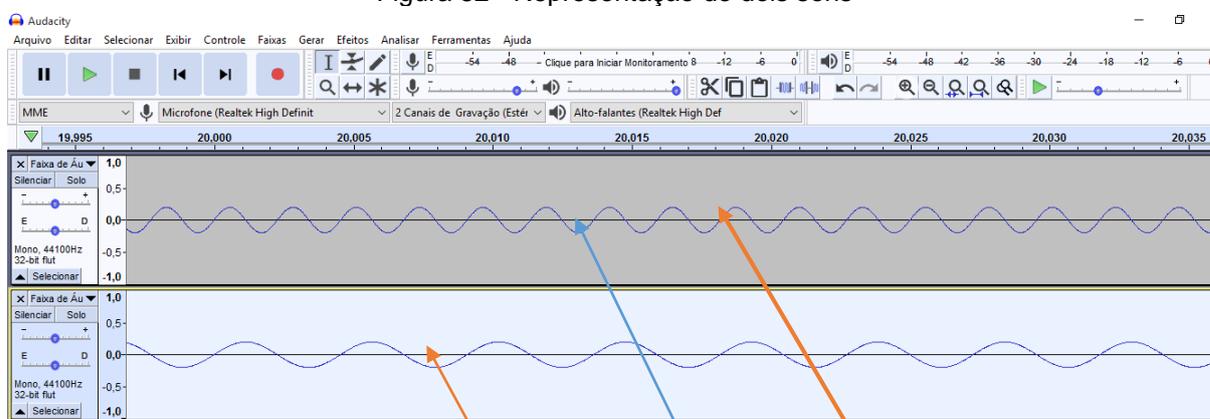
Fonte: Autora, 2021.

Se porventura quiser apresentar outra faixa de som, é só aproveitar a mesma tela e fazer todo o processo novamente. Nesse caso consegue-se fazer a análise de gráficos. Com isso tem-se os seguintes objetivos:

- Verificar os gráficos fornecidos pelo programa ao apresentar as notas musicais, com intuito de que haja a identificação de periodicidade;
- Conceituar funções periódicas.

Com o intuito de atender aos objetivos acima os sons estarão representados conforme figura 52 abaixo.

Figura 52 - Representação de dois sons



Fonte: Autora, 2021.

É importante ressaltar que neste momento destaca-se as habilidades:

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria (BNCC, 2017, p. 528)..

(EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BNCC, 2017, p. 531).

Eis que os discentes poderão ver a representação dos sons na Forma de Função Trigonométrica, que envolvem fenômenos periódicos e ondas sonoras com auxílio do Programa Audacity, ou seja, com apoio de tecnologias digitais.

E ainda vale destacar que também se usa o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática destacando o subdomínio do Conhecimento de Tópicos, pois se trata das questões de conceitos, propriedades e definições, o subdomínio Conhecimento da Estrutura da Matemática, pois está havendo uma conexão de áreas, o subdomínio Conhecimento da Prática Matemática, pois se trata da solidificação do conhecimento a ser transmitido e o subdomínio do Ensino de Matemática, pois se trata dos recursos materiais utilizados.

Neste momento da aula novamente o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática torna a ser verificado pois está sendo destacado pelo Conhecimento de Tópicos, pois vai se tratar das definições, conceitos e propriedades dos objetivos abaixo.

- Definição de Função seno e Função cosseno;
- Identificar o período, amplitude, frequência e o comprimento de onda de cada função produzida pelos sons mostrados em aulas anteriores.

Vale salientar que toda a teoria necessária para essa parte da aula está descrita no capítulo 4, podendo ser adequado para a turma a ser trabalhada.

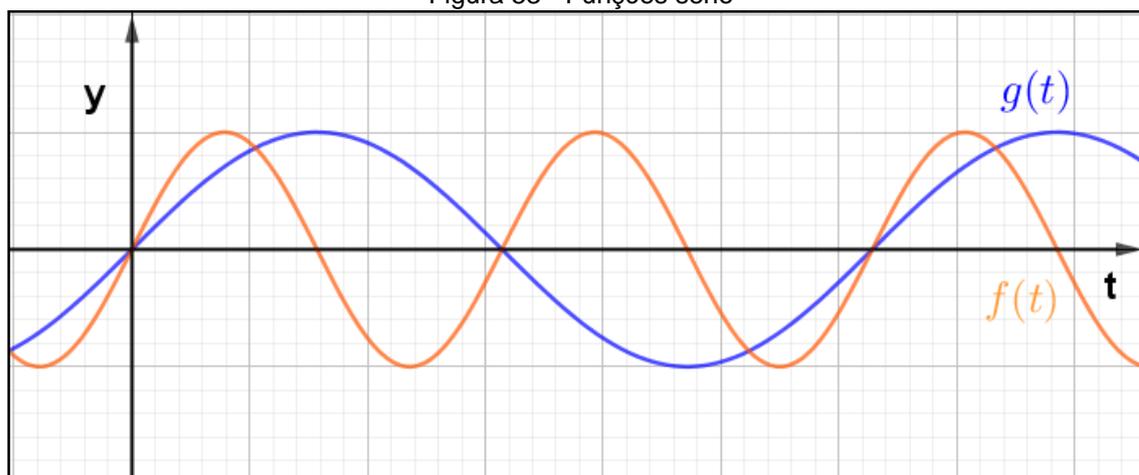
Para finalização destas aulas tem-se aqui a apresentação de mais algumas atividades para que o professor verifique a aprendizagem de seu aluno, nesse caso estará utilizando o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática focando o subdomínio Conhecimento de Características da Aprendizagem de Matemática, pois assim estará observando a aprendizagem, as potencialidades, capacidades e dificuldades do aluno com o conteúdo matemático.

Sendo assim a primeira atividade proposta e a observação dos gráficos da função seno, fazendo a analogia com a teoria musical para obtenção da resposta correta.

1) De acordo os assuntos apresentados em aula observe os gráficos da função seno na figura a seguir e responda:

a) Qual das funções representa o som mais agudo? Explique.

Figura 53 - Funções seno



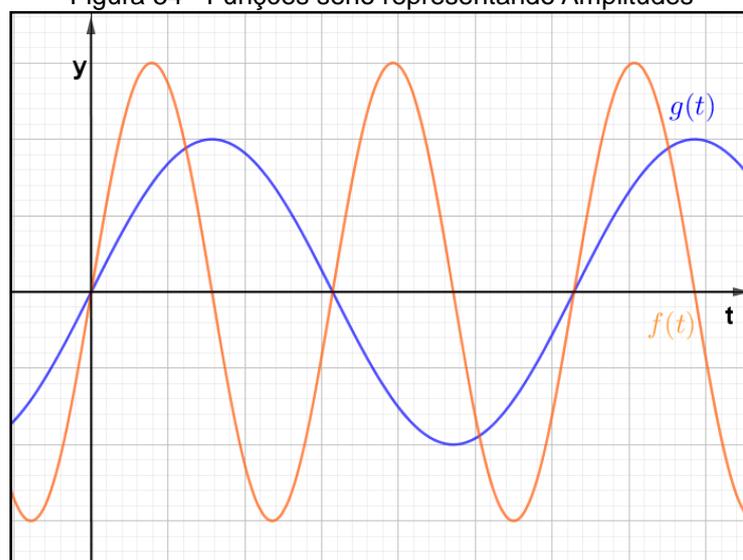
Fonte: Autora,2020.

Espera-se que o aluno responda que é a função  $f(t)$ , porque tem um número maior de oscilações que  $g(t)$  em um mesmo intervalo de tempo, desse modo, sua frequência é maior. Logo, o som é mais agudo.

Vale ressaltar que nesse momento o subdomínio Conhecimento da Estrutura da Matemática do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática se fez presente novamente, pois o aluno estará fazendo conexão entre conceitos matemáticos e teoria musical.

b) Agora, ao observar estas funções na figura abaixo, qual representa o som com maior volume? Explique.

Figura 54 - Funções seno representando Amplitudes



Fonte: Autora, 2020.

Nesta atividade espera-se que aluno responda que é  $f(t)$ , pois verifica que a amplitude, ou seja, o valor máximo de  $f(t)$  é maior que a amplitude de  $g(t)$ . Portanto, sua intensidade é maior.

Com o intuito de se trabalhar a representação de um som através da função, tem-se a atividade abaixo.

2) A nota Lá que possui uma vibração a 440 Hz, serve como padrão de referência para a afinação da altura musical. Imagine que certo instrumento musical emitiu um som com amplitude de 0,5.

a) Tendo essas informações obtenha a lei da função que permite construir o gráfico da Amplitude x Tempo que caracteriza esta nota?

Pode-se representar um som simples pela função  $y = A \cdot \text{sen}(2\pi \cdot F \cdot t)$ . Assim sendo, tem-se:  $A = 0,5$  e  $F = 440$  Hz, logo:

$$y = A \cdot \text{sen}(2\pi \cdot F \cdot t)$$

$$y = 0,5 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 440 \cdot t)$$

$$y = 0,5 \cdot \text{sen}(880 \cdot \pi \cdot t)$$

Portanto a lei da função  $y = h(t)$  é:

$$h(t) = 0,5 \cdot \text{sen}(880 \cdot \pi \cdot t)$$

b) Agora, determine a lei para uma amplitude de 0,7.

Considerando agora  $A = 0,7$  e  $F = 440$  Hz, tem-se:

$$y = A \cdot \text{sen}(2\pi \cdot F \cdot t)$$

$$y = 0,7 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 440 \cdot t)$$

$$y = 0,7 \cdot \text{sen}(880 \cdot \pi \cdot t)$$

Logo a lei da função  $y = f(t)$  é:

$$f(t) = 0,7 \cdot \text{sen}(880\pi t)$$

c) Ao ouvir os dois sons pode-se sentir alguma diferença entre eles? De que modo?

Resposta: Pode sim, pois foi estudado que a amplitude ( $A$ ) representa a intensidade do som, portanto o som expresso com a amplitude 0,5 possui um volume menos intenso do que o som expresso pela amplitude 0,7.

Nesta atividade, é importante também que os alunos coloquem essas amplitudes no Programa Audacity, pois assim o aluno estará ouvindo as diferenças

de intensidades dos sons, destacando que estará utilizando então aqui entra a aprendizagem significativa, pois está assimilando conceito matemático com teoria musical e ainda utilizando o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática citado na atividade 1.

Com a intenção de se trabalhar a habilidade abaixo, é que tem-se a atividade 3:

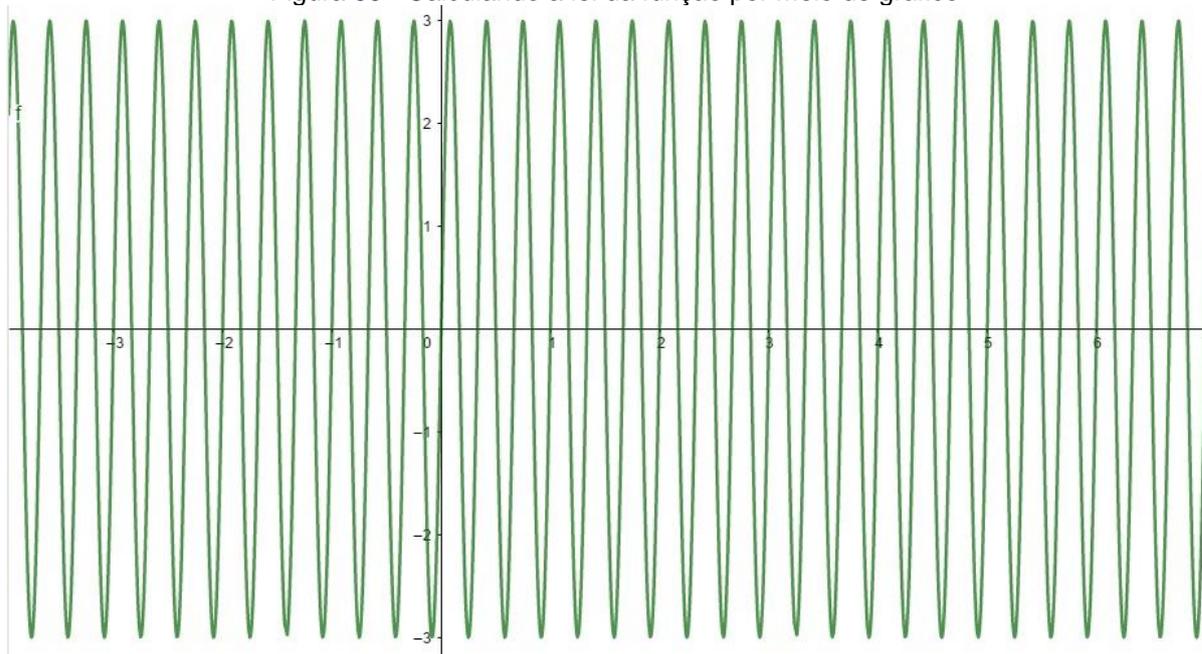
(EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BNCC, 2017, p. 531).

3) Esta atividade tem como objetivo mostrar ao aluno como calcular a lei da função tendo a frequência, visto que a onda completa 3 ciclos no instante de 1 segundo, utilizando a parâmetro  $y = A \text{ sen } (2\pi \cdot F \cdot t)$ . Nesta atividade o aluno estará novamente utilizando a habilidade abaixo:

(EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BNCC, 2017, p. 531).

Pois estará trabalhando a função seno por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos com o apoio de tecnologias digitais. Veja a figura 55 abaixo.

Figura 55 - Calculando a lei da função por meio de gráfico



Fonte: Autora, 2020.

Esta atividade apresenta como solução a função  $f(x) = 3 \operatorname{sen}(6\pi x)$ , pois a frequência é  $F = 3 \text{ Hz}$ , período  $p = 1/3$  e amplitude  $A = 3$ .

4) Nesta atividade o aluno assistirá a um vídeo sobre sons focando a frequência das notas musicais para que fique bem esclarecido esta questão da matemática relacionada com a teoria musical. Com esta atividade o professor estará trabalhando o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática focando o subdomínio Conhecimento da Estrutura da Matemática, pois novamente está fazendo conexão da matemática com a teoria musical, o subdomínio Conhecimento do Ensino de Matemática, devido ao fato de estar utilizando recursos materiais e virtuais para ensinar matemática e ainda dando foco a aprendizagem significativa, pois está utilizando a teoria da assimilação, ou seja, mostrando um conteúdo que pode ser assimilado com outro assunto. O vídeo proposto está na figura 56 abaixo.

Figura 56 - Vídeo sobre frequências

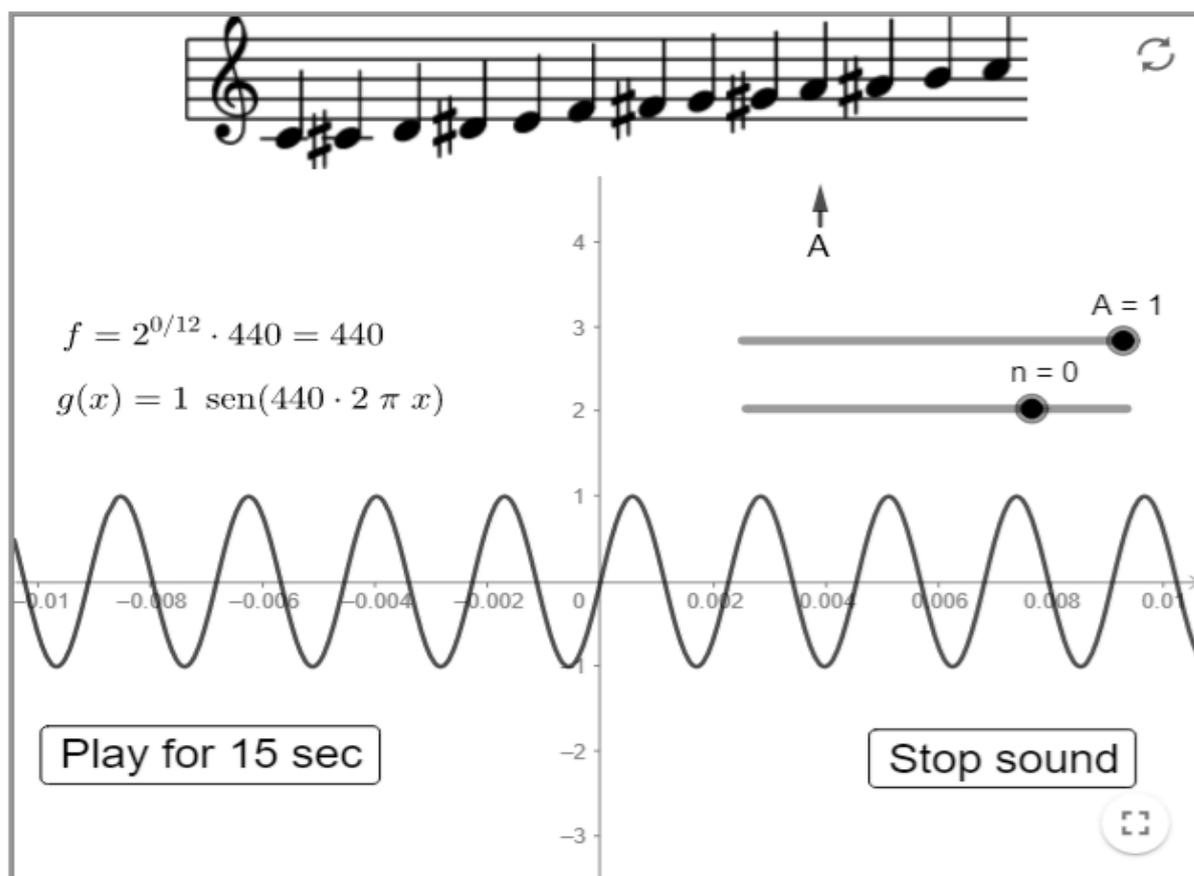


Fonte: [https://www.youtube.com/watch?v=\\_r3DqAJhqMs&feature=emb\\_logo](https://www.youtube.com/watch?v=_r3DqAJhqMs&feature=emb_logo), 2021.

5) Nesta atividade o aluno irá ouvir os sons, ver as notas e suas frequência através do controle deslizante  $n$ , construído no GeoGebra.

Verifica-se então que ao aluno visualizar essas notas, suas frequências, as ondas senoidais e ainda ouvir, o professor estará utilizando o Conhecimento Especializado do Professor de Matemática já citados anteriormente, pois assim o aluno não fica só na memorização, mas pode testar sua aprendizagem e seus conhecimentos.

Figura 57 - Ouvindo uma onda senoidal

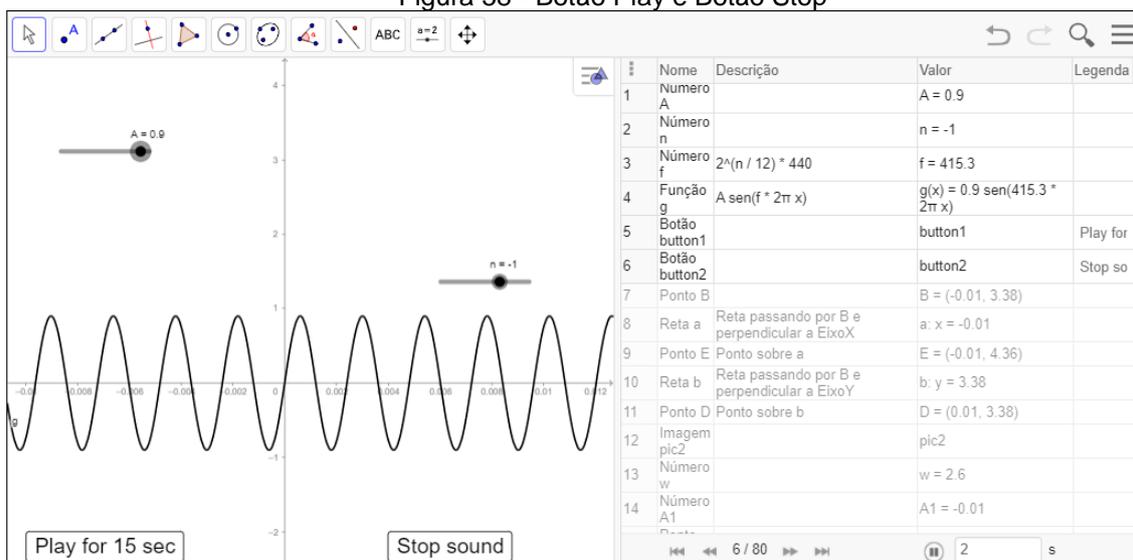


Fonte: <http://www.malinc.se/math/trigonometry/musicen.php>, 2021.

Caso não queira utilizar a construção pronta proposta no link acima é possível que se faça a construção desta atividade. Para isto deve-se seguir alguns passos principais.

Nesta figura 58 foi criado dois controles deslizantes, número  $f$ , a função  $g$ , o botão play e o botão stop.

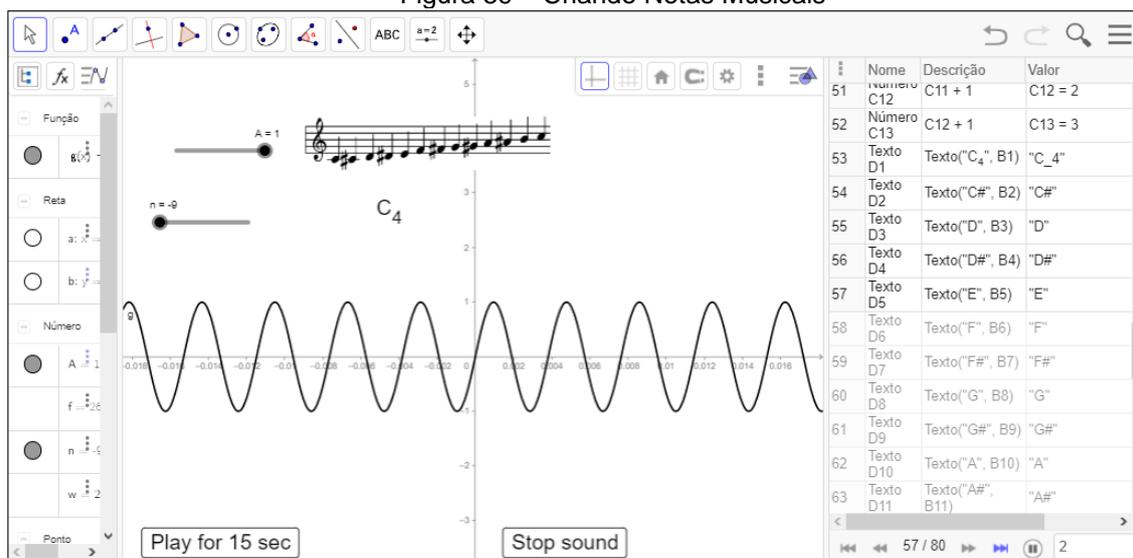
Figura 58 - Botão Play e Botão Stop



Fonte: Autora, 2021.

Nesta figura 59 foi criado os sons de acordo a nota musical da escala cromática.

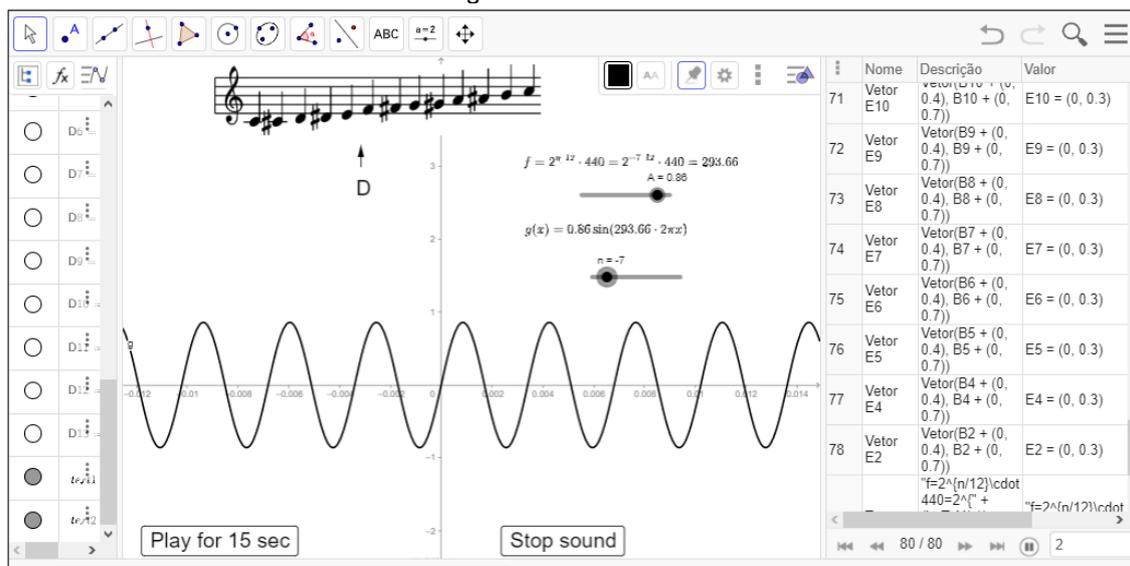
Figura 59 – Criando Notas Musicais



Fonte: Autora, 2021.

Nesta figura 60 foi colocado o texto do número f e da função g.

Figura 60 - Atividade Pronta



Fonte: Autora, 2021.

Como são muitos passos, vale ressaltar que o detalhamento desta parte ficaria muito extenso. Portanto para a construção passo a passo desta atividade, entrar no site do [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), procurar pelo material *frequencies of notes*, abra a atividade, modificar *applet* e ir em protocolo de construção.

### Recursos necessários para o desenvolvimento das aulas;

- Computador com programa de som e de Geometria;  
Sendo eles o Audacity e o Geogebra.
- Data show;
- Proposta de Atividade.

### Avaliação

A avaliação será contínua através de participação nas aulas e no desenvolvimento da resolução de exercícios. Verificando se houve assimilação do conteúdo matemático apresentado com a música por parte dos discentes, bem como valorizando e direcionando os argumentos apresentados por eles.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada uma conexão entre matemática e música, mostrando como a música pode servir de auxílio no ensino da matemática. Seu desenvolvimento teórico apareceu inicialmente com Pitágoras e seus discípulos, destacando que os primeiros estudos foram feitos em um instrumento de uma única corda chamado monocórdio, descobrindo assim a primeira escala musical.

É importante salientar que, na música, em particular, na teoria musical surge diversas vezes conteúdos matemáticos tais como frações, progressão geométrica, funções trigonométricas e muitos outros.

É interessante perceber que muitas vezes algumas pessoas falam que possuem muita dificuldade em matemática e são excelentes músicos, não percebendo que dominam muitos conceitos matemáticos.

Ressaltamos que neste trabalho o professor também tem como ler a respeito do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (MSTK) que pode auxiliar muito em seus planejamentos, em suas aulas e em sua didática de como ensinar matemática e ainda estudar um pouco sobre aprendizagem significativa, como propõe Ausebel, além de ler um trecho do documento da Educação Básica Brasileira a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

E para finalizar, foi apresentada possibilidades de ensino utilizando a música para apresentar Função Trigonométrica, na qual muitas vezes os alunos sentem muita dificuldade. A proposta apresentou os conceitos matemáticos necessários para o assunto e, por fim, a apresentação de sons por meios de *softwares* como o Audacity e o GeoGebra para que assim a aprendizagem se torne mais agradável e significativa.

Portanto a pesquisa mostra aos professores de matemática o quanto a música pode ser usada como um recurso didático para o ensino de matemática, em particular, ensino de funções trigonométricas.

## 7. REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. **MATEMÁTICA E MÚSICA: O pensamento analógico na construção de significados**. 4. ed. São Paulo: Escrituras, 2006.

ARAUJO, W. R. **Conhecimento Especializado do Professor de Matemática sobre Função no Contexto de uma Experiência Prévia de Lesson Study**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018. Disponível em: [http://taurus.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/332979/1/Araujo\\_WellingtonRabelloDe\\_M.pdf](http://taurus.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/332979/1/Araujo_WellingtonRabelloDe_M.pdf). Acesso em: 20 jul. 2020.

ASSAYAG, G.; FEICHTINGER, H. G.; RODRIGUES, J. F. **Mathematics and Music**. 1. ed. Lisbon – Paris – Vienna: Springer, 2002.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio>. Acesso em: 15 abr. 2020.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria e Números Complexos**. ed. Rio de Janeiro: Graftex, 1992.

CARNEIRO, I. **Música e Matemática: possibilidades de integração curricular**. 2018. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/333808396>. Acesso em: 15 abr. 2020.

CARVALHO, P. C. **Matemática na Música**. 2005. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=r7Ff5Um3GSo>. Acesso em: 03 out. 2020.

CHRISTERSSON, M. **Música**. 2019. Disponível em: <http://www.malinc.se/math/trigonometry/musicen.php>. Acesso em: 15 fev. 2021.

COMO BAIXAR E INSTALAR O AUDACITY 2021. Valdinei. [ S. l.: s.n.], 2020. 1 vídeo (03 min 56 s). Disponível em: <https://youtu.be/Bt3PI3P5mow>. Acesso em: 05 fev. 2021.

CORRÊA, A. **Música para nunca mais esquecer Seno, Cosseno e Tangente**. SOS Matemática On line. [ S. l.: s.n.], 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=HHjuKRHEuu4>. Acesso em: 14 set. 2020.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & Aplicações: Ensino Médio: Volume 1**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & Aplicações: Ensino Médio: Volume 2**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DONALD NO PAÍS DA MATEMÁTICA. Hamilton Luske. [ S. l.: s.n.], 2013. 1 vídeo (27 min 41 s). Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk>. Acesso em: 14 set. 2020.

FRAGA, N. W. **Descomplicando a Música**. 2015. Disponível em: <https://www.descomplicandoamusica.com/>. Acesso em: 20 jul. 2020.

**GeoGebra Online**. Disponível em: [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Acesso em: 20 nov. 2020.

GRANJA, C. E. **Matemática e Música**. 2014. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ETPzsN-vgE8>. Acesso em: 01 out. 2020.

GRANJA, C. E. **Matemática e Música**. 2014. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=GFZngfZU6Yk>. Acesso em: 01 out. 2020.

HOURNEAUX, E. **Temperamento – A música através dos números**. 2015. Disponível em: <https://laboratoriodeluthieria.wordpress.com/2015/07/02/temperamento-a-musica-atraves-dos-numeros/>. Acesso em: 19 jul. 2020.

KLAUSEN, L. S. **APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: UM DESAFIO**. 2017. Disponível em: [https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/25702\\_12706.pdf](https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/25702_12706.pdf). Acesso em: 02 ago. 2020.

LEONARDO, F. **Conexões com a Matemática: Ensino Médio 2º Ano**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LITOLDO, B. F.; ALMEIDA, M. V. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado do professor que ensina Matemática: uma análise do livro didático no âmbito das Frações. **Tangram – Revista de Educação Matemática**, Dourados, v. 1, n. 3, p. 03 – 23, 2018.

LUCHETTA, V. O. J. **Teorema de Pitágoras**. 2005. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/teopitagoras.html>. Acesso em: 23 ago. 2020.

MACIEL, T. B. **Matemática e Música: Uma Proposta Pedagógica**. 2018. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018. Disponível em: <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3254>. Acesso em: 15 abr. 2020.

MAIA, A; MANZOLLI, J. **Luthier de Proporções**. [ S. l.: s.n.], 2012. 1 vídeo (10 min 56 s). Disponível em: [https://www.youtube.com/watch?v=\\_r3DqAJhqMs&feature=emb\\_logo](https://www.youtube.com/watch?v=_r3DqAJhqMs&feature=emb_logo). Acesso em: 17 fev. 2021.

MARQUES, D. **Tubos Sonoros Musicais**. Disponível em: <https://educador.brasilecola.uol.com.br/estrategias-ensino/tubos-sonoros-musicais.htm>. Acesso em: 20 jul. 2020.

MEIER, M.; CHRISTERSSON, M.; MICROLOGUS. **Funções Trigonométricas**. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/hhvr6f6e>. Acesso em: 09 dez. 2020.

MIRITZ, J. C. D. **Matemática e Música**. 2015. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande, 2015. Disponível em: [https://profmat.furg.br/images/TCC/TCCJoseCarlos\\_versaofinal.pdf](https://profmat.furg.br/images/TCC/TCCJoseCarlos_versaofinal.pdf). Acesso em: 15 abr. 2020.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. ed. São Paulo: EPU, 1999.

MORIEL JUNIOR, J. G. **Conhecimento Especializado para Ensinar Divisão de Frações**. 2014. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática - PPGECEM/ REAMEC) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: <https://silو.tips/download/jeferson-gomes-moriel-junior>. Acesso em: 03 abr. 2020.

OLIVEIRA, W. **Matemática e música: Interdisciplinaridade no ensino da Trigonometria e uma proposta de atividades para sala de aula**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015. Disponível em: [https://sca.profmat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=1546](https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1546). Acesso em: 22 abr. 2020.

RIBEIRO, B. S.; VIEIRA, F. B.; MONTEIRO, N. Z.; SILVA, R. B.; GIACOMO, R. R.; OLIVEIRA, W. D. **Aplicando a matemática básica – Construção de um Monocórdio**. 2015. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/aplicando-a-matematica-basica-construcao-de-um-monocordio/>. Acesso em: 15 ago. 2020.

RINCÓN, J. P. A. **Conhecimento especializado do Professor que ensina Matemática**. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=8afIz7GPlcw>. Acesso em: 04 out. 2020.

ROCHA, D. **Aerofones**. 2019. Disponível em: <http://www.ccta.ufpb.br/labeet/contents/acervos/categorias/aerofones>. Acesso em: 27 dez. 2020.

ROSSO JUNIOR, A. C.; AMSON, G. A. J. V.; CARDOSO, R. T. **Ensino Médio: Matemática: Caderno 3: Manual do professor**. 1 ed. São Paulo: SOMOS Sistemas de Ensino, 2016.

SILVA, L. T.; GROENWALD, C. L. O. **Matemática e Música: a história da relação e evolução de duas Ciências através dos tempos**. 2018. Disponível em: <http://seer.upf.br/index.php/rbecm/article/view/8977>. Acesso em: 15 abr. 2020.

STARTUP, M. **Loja Órgãos Musicais**. 2020. Disponível em: <https://www.lojadaorganista.com.br/produtos/orgao-harmonia-hs-45-lux-preto-fosco>. Acesso em: 30 dez. 2020.

SUPERSONORA. **Teclado Musical**. 2020. Disponível em:  
<https://supersonora.com.br/teclado-musical-ct-x800-casio>. Acesso em: 30 dez. 2020.

TEIXEIRA, A. C. S.; RIBEIRO, M. R. R. **Matemática na Música: A Escala Cromática e as Progressões Geométricas**. 2016. Disponível em:  
[https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais\\_vii\\_simmi\\_2016.pdf](https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/631/o/anais_vii_simmi_2016.pdf). Acesso em: 15 ago. 2020.

VASCONCELOS, C. S. **Relações entre matemática e Música: Uma Ferramenta para as aulas de Matemática**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2017. Disponível em:  
<http://profmat.uefs.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=7>. Acesso em: 15 abr. 2020.