UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS- UFGD
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia - FACET

Fabricio Adão Germany

INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

DOURADOS-MS
2021

Fabricio Adão Germany

INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Robert Jesús Rodríguez Reyes

DOURADOS-MS
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

G373i Germany, Fabricio Adao

INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA [recurso eletrônico] / Fabricio Adao Germany. -- 2021.

Arquivo em formato pdf.

Orientador: Robert Jesús Rodríguez Reyes.

Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2021.

Disponível no Repositório Institucional da UFGD em: https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio

1. Lógica. 2. raciocinio. 3. raciocinio logico. 4. introdução a logica. I. Reyes, Robert Jesús Rodríguez. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"Introdução à lógica matemática ",** de autoria de **Fabricio Adão Germany**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

____
Prof. Dr. Robert Jesús Rodríguez Reyes (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Ana Claudia M. M. Chagas
____
Profª. Drª. Ana Claudia Machado Mendonça Chagas
Membro Examinador (UFGD)

Vando Narciso
____
Prof. Dr. Vando Narciso
Membro Exerno (UEMS)

Dourados/MS, 24 de fevereiro de 2021

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que sempre esteve ao meu lado.

A minha esposa Thalyta e minha mãe Jaíra que são meus alicerces, a meu filho Lorenzo meu combustível diário que me dá energia para levantar todos os dias e ir à luta.

A todos os meus professores, que contribuíram para a minha formação acadêmica, em especial a Profª Dra. Irene Magalhães Craveiro que muito me ajudou e motivou e ao Prof.Dr. Robert Jesús Rodríguez Reyes meu orientador que tanto me ajudou neste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) Finance Code 001.

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma introdução à lógica matemática. O mesmo é composto por 4 partes, nos capítulos 2 e 3 trabalha-se de maneira axiomática os conceitos básicos do raciocínio lógico matemático, no capítulo 4 explora-se os métodos de demonstração, em seguida no capítulo 5 apresenta-se ao leitor algumas aplicações dos temas trabalhados anteriormente. O trabalho procurou abordar todos os temas propostos discutindo-se exemplos usando a própria matemática e aplicações no cotidiano.

Palavras-chave: Lógica, Demonstrações Matemáticas, Lógica Matemática.

ABSTRACT

This work presents an introduction to mathematical logic. The work is composed of 4 parts, in chapters 2 and 3 the basic concepts of mathematical logical reasoning are worked axiomatic, chapter 4 explores the demonstration methods, then in chapter 5, the reader presents some applications of the themes previously worked on. The work sought to approach all the proposed themes by discussing examples using the own mathematics and applications in daily life.

Keywords: Logic, Mathematical Proofs, Mathematical Logic.

Sumário

1 Introdução **8**

2 Proposições e Quantificadores **10**

2.1 Proposições 10
2.2 Valores lógicos das proposições 11
2.3 Proposições Abertas 12
2.4 Quantificadores 13
2.4.1 A ordem dos Quantificadores 14
2.4.2 Do Português para Proposições Matemáticas 15

3 Conectivos e Proposições Compostas **18**

3.1 Tipos de proposições 18
3.2 Conectivos 18
3.2.1 Negação 19
3.2.2 Conjunção 20
3.2.3 Disjunção 21
3.2.4 Disjunção exclusiva 23
3.2.5 Condicional 23
3.2.6 Bicondicional 36
3.3 Equivalências Lógicas 36
3.3.1 Tabela Verdade para Proposições Compostas 36
3.3.2 Tautologia, Contradição e Contingência 37
3.4 Negação de Proposições Composta 41
3.4.1 Negação de Proposições Conjuntivas e Disjuntivas 41
3.4.2 Negação de Quantificadores 42
3.4.3 Negação de uma Condicional 45

4 Métodos de Demonstrações **47**

4.1 Demonstrações Diretas 47
4.2 Demonstração por Absurdo 50
4.3 Demonstração por Contrapositiva 52

5 Aplicações **57**

5.1 Conjunção e conta bancária 57
5.2 Disjunção e conta bancária 58
5.3 Aladim e o condicional 59
5.4 Aladim e o bicondicional 60
5.5 Sistemas de Especificações 62

5.6 Quebra-cabeças lógicos 64
5.7 Lógica e Operações Bit 65

6 Considerações Finais **67**

Referências **68**

1 Introdução

Irving Copi, em [1], dá a seguinte definição de lógica: "Lógica é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto".

A lógica matemática teve início no século IV a.C. com Aristóteles na Grécia antiga, apesar de estudar diversos tipos de sistematizações de argumentos ele fico notabilizado por dar mais atenção ao silogismo, argumento esse formado por duas proposições iniciais (premissas) e uma proposição final (conclusão), um exemplo de silogismo é:

$$\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r}\text{Todos os pássaros voam;}\\ \text{As garças são pássaros;}\end{array}\right\} & \text{2 premissas}\\ \text{(logo,) As garças voam.}\quad & \text{conclusão}\end{array}$$

A obra de Aristótoles permaneceu praticamente intacta por mais de dois mil anos e somente no século XVII d.C. novas ideias se destacaram, um dos expoentes foi o matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) que transformou o raciocínio lógico usual em uma forma de cálculo. Leibniz propusera transformar o raciocínio usual em cálculos aritméticos obtendo assim conclusões como se fossem soluções aos cálculos apresentados.

Na segunda metade do século XIX com autores como Boole, Frege e Russel a lógica passa a se tornar fundamentalmente matemática. A lógica matemática tem origem com George Boole (1815–1864), ele descreve raciocínios lógicos em termos de uma álgebra de conjuntos, usando as operações, atualmente chamadas *booleanas*, entre conjuntos: união, intersecção e complementar.

Dando sequência na evolução da lógica tem-se o matemático alemão Gottlob Frege sua monografia *Begriffsschrift* publicada em 1879 é considerada como a maior obra de lógica pós-Aristóteles, nessa obra Frege propõe que a aritmética pode ser apresentada como um sistema construído a partir das leis da lógica. Frege perceberá que muitos de seus sucessores tentavam sem êxito provar a sistematização do raciocínio lógico matemático, esses fracassos em geral se davam por erros de demonstração, sendo assim Frege dedicou-se a estudar técnicas de demonstrações, criando assim regras básicas, simples, cujas aplicações não gerariam dúvidas, tais regras formam o chamado "cálculo de predicado", algo revolucionário para a lógica contemporânea, suas ideias inspiraram o trabalho de outros autores como por exemplo Bertrand Russel (1872–1970) e Alfred North (1861–1947), autores de uma das obras fundamentais da lógica atual, o *Principia Mathematica* uma obra com três volumes, que serve de fonte de pesquisa para muitos pesquisadores atuais.

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma introdução à lógica matemática. A intenção é possibilitar ao leitor uma melhor compreensão da lógica matemática e para isso trazemos exemplos usando a própria matemática e aplicações no cotidiano.

Dentro dessa proposta, o trabalho foi dividido como segue:

No capítulos 2 e 3 introduzem-se os conceitos elementares da lógica.

No capítulo 4 apresenta-se alguns métodos básicos de demonstração: demonstração direta, demonstração por absurdo e demonstração por contrapositiva.

No capítulo 5 apresenta-se algumas aplicações simples, fora da lógica matemática.

2 Proposições e Quantificadores

Este capítulo tem por objetivo apresentar dois importantes conceitos da lógica matemática: as proposições e os quantificadores. Assim, esses conceitos facilitarão o entendimento dos capítulos posteriores. O desenvolvimento deste capitulo se baseou em [2], [3], [4] e [5].

2.1 Proposições

Definição 2.1. *Chama-se frase a um conjunto de palavras ou de símbolos matemáticos, incluindo os sinais de acentuação e pontuação, que se relacionam para comunicar uma ideia.*

Uma sentença ou proposição é uma frase, que pode ser expressa em linguagem matemática, conter apenas símbolos matemáticos, que cumpre as condições:

(1) *Apresenta-se estruturada como uma oração, com sujeito e predicado, incluindo o verbo.*

(2) *É afirmativa declarativa (não é interrogativa, nem exclamativa).*

(3) *Satisfaz os seguintes princípios:*

  (3.1) ***Princípio do terceiro excluído:*** *uma proposição é falsa ou verdadeira, excluindo-se uma terceira alternativa.*

  (3.2) ***Princípio da não contradição:*** *uma proposição não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo, não podendo contradizer-se.*

Segue da definição acima que, não são proposições as frases:

- Exclamativas (aquelas que possuem ponto de exclamação "!").
- Interrogativas (as que possuem ponto interrogação "?", ou seja, qualquer tipo de pergunta).
- Imperativas (são frases em que se transmite uma ordem a alguém).
- Frases sem verbo.
- Frases optativas (a pessoa que diz a frase, expressa um desejo).

Exemplo 2.1. Pode-se verificar que as seguintes frases são proposições, elas satisfazem as condições (1), (2) e (3) da Definição 2.1 :

p_1 : Os ângulos internos de um triângulo equilátero são todos iguais.

p_2 : Existe $a \in \mathbb{R}$; $a^2 > 36$ e $0 < a < 7$.

p_3 : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = -\dfrac{3}{7}$.

p_4 : $\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$.

p_5 : Todo número ímpar é divisível por 2.

p_6 : Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x^2 + 6x - 7 < 0$ ou $x \geq 1$ ou $x \leq -7$.

p_7 : $3 + 2 = 6$.

p_8 : $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$ e $\sqrt{3} + \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$.

p_9 : O Brasil é um país da América Central.

p_{10} : Se $a_1, a_2, ..., a_n$ forem os termos de uma progressão aritmética, então

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Observe-se que p_9 não é uma proposição matemática, mas é proposição lógica, uma vez que satisfaz (1), (2) e (3) da Definição 2.1.

2.2 Valores lógicos das proposições

Definição 2.2. *O valor lógico de uma proposição é verdadeiro, indicado por V, se for uma proposição verdadeira, e falso, indicado por F, se for uma proposição falsa.*

Assim, dos princípios da Definição 2.1 segue-se que a toda proposição está associada a um único valor lógico: verdadeiro ou falso.

Exemplo 2.2. No Exemplo 2.1 o valor lógico das proposições p_1, p_2, p_4, p_6 e p_{10} é verdadeiro e o das proposições p_3, p_5, p_7, p_8 e p_9 é falso.

É interessante observar que, às vezes, o problema de descobrir o valor lógico de uma proposição nem sempre é imediata ou até o problema pode ficar em aberto.

Exemplo 2.3. Por volta de 1637, o matemático francês Pierre de Fermat registrava, na margem de um livro, que tinha descoberto um resultado sensacional, mas que naquela margem do livro não dispunha de espaço para escrever a demonstração:

p : Se $n \geq 3$, então $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções inteiras x, y e z não nulas.

Fermat acreditava que a proposição p era verdadeira. Em 1995, o matemático inglês, Andrew Wiles (1953) deu uma demonstração completa do teorema. Depois de mais de 300 anos chega a estabelecer-se que a proposição p é verdadeira.

Exemplo 2.4. Os primos gêmeos são pares de números primos ímpares consecutivos da forma $(p, p+2)$. Os primeiros primos gêmeos são:

$$(3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31) \text{ e } (41,43).$$

Considere a proposição:

$$p : \text{Existem infinitos pares de primos da forma } (p, p+2).$$

Qual é o valor lógico de p? A resposta está em aberto.

No exemplo a seguir, analisa-se algumas frases que deixam de satisfazer pelo menos umas das condições (1), (2) e (3) da Definição 2.1.

Exemplo 2.5.

(a) Como vai você?

Essa frase não é uma proposição, pois trata-se de uma pergunta. Frases interrogativas não são proposições.

(b) $\dfrac{1}{5} + 2$

Note-se que a frase tem sujeito (um quinto mais dois), mas não tem verbo nem predicado. Desde que não cumpre a condição um da Definição 2.1, não é proposição.

(c) *Eu estou mentindo.*

Se a frase é verdadeira, isto é, é verdade o que a frase diz, então é falsa. Por outro lado, se a frase é falsa, ou seja, não é verdade o que a frase diz, então a frase é verdadeira. Dessa forma, se a frase for verdadeira, ela será falsa, e, se for falsa, será verdadeira. Conclui-se que a frase é um paradoxo, ou seja, não é uma proposição, pois não satisfaz o princípio da não contradição da Definição 2.1.

(d) $2x + 5 = 1$

Observe-se que para $x = -2$ a frase é verdadeira, e é falsa para qualquer valor de x diferente de $x = -2$. Portanto, não há como determinar se ela é verdadeira ou falsa, pois o valor de x não é especificado. Desde que não cumpre a condição (3.1) da Definição 2.1, a frase não é uma proposição. Esse tipo de frase motiva a seguinte seção.

2.3 Proposições Abertas

A linguagem Matemática usa constantemente expressões ou frases que envolvem variáveis. Por exemplo, considere-se as seguintes expressões:

$$2x + 5 = 1, \quad x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 - 1 > 0 \quad \text{e} \quad z - x > y.$$

Essas expressões não são nem verdadeiras nem falsas quando o valor das variáveis não é especificado, isto é, quando as variáveis ficam livres ou abertas. No entanto, uma vez que os valores são especificados para as variáveis, obteremos proposições verdadeiras ou falsas. As expressões ou frases com variáveis livres que se transformam em proposições, quando as variáveis são substituídas por valores convenientes, chamam-se proposições abertas.

Definição 2.3. *Uma frase é uma proposição aberta se:*

- *Ela contém uma ou mais variáveis livres (ou abertas), e*
- *Ela não é uma proposição, mas*
- *Ela torna-se uma proposição quando suas variáveis são substituídas por certos valores permissíveis*

É costume na literatura matemática chamar de proposição aberta a uma frase que, na verdade, não é uma proposição, conforme a definição acima.

Exemplo 2.6. A frase "$5x + 2 = 7$" é uma proposição aberta de variável livre x. Se $x = 1$, a frase é uma proposição verdadeira. Para $x = -5$, é uma proposição falsa.

Exemplo 2.7. A frase "$|y - 4| > 20$" é uma proposição aberta de variável livre y. Tomando-se $y = 1$, obtemos uma proposição falsa. Já para $y = 30$, obtemos uma proposição verdadeira.

Exemplo 2.8. Seja a proposição aberta:

$$\text{Tem-se } x = 0 \text{ ou } y = 0, \text{ desde que } x \cdot y = 0.$$

Ela é verdadeira se $x = 3$ e $y = 0$, e é falsa, caso x e y forem, por exemplo, as matrizes

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.9. Considere a proposição aberta:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Ela é verdadeira se $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$, e é falsa, caso $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

Nos exemplos acima, temos que, atribuindo-se valores às variáveis de uma proposição aberta, obtém-se uma proposição com valores-verdade. Entretanto, existe outra maneira de transformar uma proposição aberta em proposição, denominada quantificação.

2.4 Quantificadores

A quantificação é uma das maneiras de construir proposições a partir de proposições abertas.

Na Matemática é comum a utilização de dois quantificadores:

- Quantificador universal: "para todo", "para qualquer" ou "qualquer que seja"
- Quantificador existencial: "existe", "existe um" ou "existe pelo menos um"

O quantificador universal é usado para expressar condições satisfeitas por todos os elementos de um conjunto, já o quantificador existencial é usado para expressar condições satisfeitas por, pelo menos, um elemento de um conjunto. Vamos ilustrar o uso dos quantificadores nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.10. Para transformar a proposição aberta $5x + 2 = 7$ em proposição, temos as seguintes possibilidades:

(a) Existe $x \in \mathbb{R}$, tal que $5x + 2 = 7$.

(b) Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $5x + 2 = 7$.

Observe-se que em (a) temos uma proposição verdadeira e em (b) uma proposição falsa.

Exemplo 2.11. A proposição aberta $|y - 4| > 20$ poderia ser transformada em uma proposição, escrevendo-se por exemplo:

(a) Para todo $y \in (24, +\infty)$, temos $|y - 4| > 20$.

(b) Existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $|y - 4| > 20$.

(c) Para todo $y \in (-16, 24)$ temos $|y - 4| > 20$.

Neste último exemplo, é fácil verificar que as proposições (a) e (b) são verdadeiras e a proposição (c) é falsa.

Utilizaremos o símbolo "$\exists$" para o quantificador existencial. O símbolo "$\forall$" é usado para denotar o quantificador universal. Note que, o símbolo de existência é o 'E' invertido da palavra inglesa *exists*, cuja tradução é *existe*. O símbolo para o quantificador universal decorre da letra 'A' invertida, inicial das palavras *all* do Inglês e *allgemein* do Alemão, que significa *todo*.

Exemplo 2.12. Vamos transformar a proposição do Exemplo 2.9 em uma proposição. Uma alternativa seria:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ tem-se } x = 0 \text{ ou } y = 0, \text{ desde que } x \cdot y = 0.$$

Outra possibilidade seria:

$$\forall x, y \in \mathbb{M}, \text{ tem-se } x = 0 \text{ ou } y = 0, \text{ desde que } x \cdot y = 0$$

onde $\mathbb{M}$ denota o conjunto das matrizes quadradas.

Obtemos, assim, uma proposição verdadeira na primeira alternativa e uma falsa na segunda.

2.4.1 A ordem dos Quantificadores

A ordem dos quantificadores de naturezas distintas altera completamente o significado de uma proposição. Por exemplo, os significados das proposições abaixo são totalmente distintos:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $y^3 = x$.

(b) $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ temos $y^3 = x$.

Por um lado, a quantificação em (a) corresponde a dizer que dado um número real x, existe um número real $y = \sqrt[3]{x}$ tal que $y^3 = x$. Assim, a proposição é verdadeira.

Por outro lado, a quantificação em (b) é equivalente a dizer que existe um número real y tal que $y^3 = x$ para qualquer número real x. Desde que não existe tal número y com essa propriedade, a proposição é falsa.

Já a ordem na qual aparecem quantificadores de mesma natureza pode ser mudada sem alterar o significado da proposição quantificada. Tanto faz escrever

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \text{ tem-se } x + y = y + x,$$

como

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ tem-se } x + y = y + x.$$

Ou ainda, tanto faz escrever

$$\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z}; x^2 + y^2 = 20,$$

como

$$\exists y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{N}; x^2 + y^2 = 20.$$

2.4.2 Do Português para Proposições Matemáticas

Traduzir proposições em português para proposições matemáticas é uma tarefa crucial em matemática e muitas outras disciplinas.

Vamos usar alguns exemplos para ilustrar como traduzir do português para proposições matemáticas. O objetivo nessa tradução é produzir expressões simples e usuais.

Exemplo 2.13. Use o máximo de símbolos matemáticos para reescrever as proposições abaixo.

(a) Cada número real, exceto 0, tem um inverso multiplicativo.

(b) Sejam dois subconjuntos de números reais, de sorte que existe um elemento do primeiro conjunto que é estritamente maior do que o quadrado de qualquer elemento do segundo conjunto.

(c) Sejam A e B subconjuntos de números naturais. Para todo elemento de A e para todo elemento de B, existe um único número irracional que é maior do que o cubo do módulo da diferença desses elementos.

(d) Sejam $a_1, a_2, a_3, ...$ e l números reais. Dado epsílon minúsculo positivo, existe um número natural n_0 tal que, se n for maior do que n_0, então o módulo da diferença de a_n e l é menor do que esse epsílon minúsculo.

Solução:

(a) Uma possível resposta seria:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } xy = 1$$

ou

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists y \in \mathbb{R}; xy = 1.$$

(b) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$.
$$\exists x \in X; \forall y \in Y, \text{ tem-se } x > y^2.$$

(c) Neste caso, usa-se a notação $\exists!$ que significa 'existe um único'. Assim, sejam $A, B \subset \mathbb{N}$.
$$\forall a \in A \text{ e } \forall b \in B, \exists!\, r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}; r > |a-b|^3.$$

(d) Seja $\{l, a_1, a_2, a_3, ...\} \subset \mathbb{R}$.
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon.$$

Nos próximos exemplos, veremos como os quantificadores podem ser expressos usando a linguagem de conjuntos, tornando-os mais simples de serem manipulados.

Exemplo 2.14. Seja $p(x)$ uma proposição aberta que depende de uma variável x pertencente a um conjunto universo U. Se denotarmos
$$P = \{x \in U;\ p(x) \text{ é válida }\},$$
temos:

(a) A proposição $\exists x \in U; p(x)$ vale significa $P \neq \phi$ e, reciprocamente, $P \neq \phi$ significa $\exists x \in U; p(x)$ vale;

(b) Já a proposição $\forall x \in U; p(x)$ vale significa $P = U$ e, reciprocamente, $P = U$ significa $\forall x \in U; p(x)$ vale.

Vejamos, agora, casos explícitos do exemplo anterior.

Exemplo 2.15. Se
$$p(x) : x + 1 > x \text{ e } P = \{x \in \mathbb{R}; p(x) \text{ é válida }\},$$
logo,

(a) A proposição $\exists x \in \mathbb{R}$, tal que $x + 1 > x$ significa $P \neq \phi$ e reciprocamente;

(b) Já a proposição $\forall x \in \mathbb{R}$ temos $x + 1 > x$, significa $P = \mathbb{R}$ e reciprocamente.

Exemplo 2.16. Em cada item abaixo, dê exemplo de uma proposição $p(x)$ e de um conjunto U, de modo que se $P = \{x \in U;\ p(x) \text{ é válida }\}$, tem-se:

(a) $P = \phi$.

(b) $P = U$.

(c) $P = \{\pi, e\}$.

Solução: Uma possível resposta seria:

(a) $p(x) : x \in \mathbb{R}$ é tal que $x^2 = 16$. $\quad U = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

(b) $p(x) : x \in \mathbb{R}$ satisfaz a equação $x^2 = 16$. $\quad U = \{-4, 4\}$.

(c) $p(x) : x \in \mathbb{R}$ é tal que $(x - \pi)(x - e) = 0$. $\quad U = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Às vezes, os quantificadores não aparecem explicitamente nas proposições.

Exemplo 2.17. Reescreva a frase a seguir, explicitando os quantificadores que não estão revelados:

(a) Os diâmetros de uma circunferência se intersectam num ponto.

(b) Sejam α e β dois planos passando pelo ponto a. Então a interseção desses planos contém uma reta.

(c) Se α é um ângulo, então $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$.

(d) Numa festa com n pessoas, pelo menos duas delas tem o mesmo número de amigos.

(e) Dado um ângulo θ, pode-se encontrar um ângulo α cuja tangente é maior do que a tangente de θ.

Solução: Reescrevendo utilizando quantificadores, temos:

(a) Para toda circunferência, todos os diâmetros se intersectam num ponto.

(b) Para quaisquer dois planos que se intersectam em um ponto, existe uma reta contida na interseção desses planos.

(c) Para todo ângulo α, $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$.

(d) Numa festa com n pessoas, existem duas delas com o mesmo número de amigos.

(e) Dado um ângulo θ, existe um ângulo α tal que a tangente α é maior do que a tangente de θ.

3 Conectivos e Proposições Compostas

Discute-se, neste capítulo, novas proposições, chamadas de proposições compostas. Essas proposições são construídas a partir de proposições existentes usando-se conectivos lógicos.

3.1 Tipos de proposições

As proposições podem ser classificadas em simples ou compostas.

Definição 3.1. *Uma proposição é simples ou atômica quando não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma.*

Exemplo 3.1. As proposições seguintes são simples:

p : 2 é um número par.
q : José é professor de matemática.
r : Pedro gosta de futebol.

Definição 3.2. *Uma proposição é composta ou molecular quando é formada pela combinação de duas ou mais proposições simples.*

Exemplo 3.2. As proposições seguintes são compostas:

p : 2 é par e Pedro gosta de futebol.
q : Se José é professor de matemática, então Pedro gosta de futebol.

Como já sabemos as proposições compostas são formadas por duas ou mais proposições simples, as palavras que usamos para ligar (conectar) essas proposições são chamadas de "conectivos lógicos", ou simplesmente, conectivos.

3.2 Conectivos

Os conectivos lógicos ou simplesmente conectivos são palavras usadas para se formar novas proposições a partir de outras. Os conectivos usuais em lógica matemática são: "e", "ou", "não", "se ... então ...", "ou ... ou ... " e "... se e somente se ..."

3.2.1 Negação

Definição 3.3. *Seja p uma proposição. A negação de p, indicada por $\sim p$, é a proposição "Não é o caso de p." A proposição $\sim p$ é lida "não p". O valor lógico de $\sim p$ é o oposto do valor lógico de p.*

O valor lógico da negação de uma proposição é, portanto, definido pela seguinte tabela chamada tabela-verdade:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Uma tabela-verdade é uma maneira prática de encontrar e exibir os valores lógicos de proposições compostas. Ela contém as proposições nas colunas, e as possibilidades de valores-verdade nas linhas. Deste ponto em diante apresentaremos a tabela-verdade de cada conectivo lógico.

Exemplo 3.3. Considere a proposição

$$p: \text{ Hoje é segunda-feira.}$$

A negação de p pode expressar-se das seguintes formas:

$$\begin{aligned} \sim p &: \text{ Não é o caso de hoje ser segunda-feira.} \\ \sim p &: \text{ Não é segunda-feira hoje.} \\ \sim p &: \text{ Hoje não é segunda-feira.} \end{aligned}$$

Exemplo 3.4. A negação da proposição

$$p: \text{ José é alto,}$$

pode ser expressa por

$$\sim p: \text{ José não é alto.}$$

Repare-se no último exemplo que para negar a proposição p, utiliza-se a palavra "não", um erro muito comum, seria tentar negar a proposição p dizendo "José é baixo", mas José pode ter estatura média, não sendo nem alto e nem baixo, ou seja, faz-se necessário o uso da palavra "não" antes da palavra alto.

Exemplo 3.5. A negação da proposição

$$p: \text{ O inteiro 5 é ímpar}$$

é dada por

$$\sim p: \text{ O inteiro 5 não é ímpar}$$

ou melhor

$$\sim p: \text{ O inteiro 5 é par}$$

Similarmente, a negação da proposição

$$q: \text{ O inteiro 57 é primo}$$

é

$$\sim q: \text{ O inteiro 57 não é primo}$$

ou

$$\sim q: \text{ O inteiro 57 é composto}$$

Exemplo 3.6. A negação das proposições:

$$\begin{aligned} p &: \ \{-1,0\} \cap \{0,1\} = \{0\} \\ q &: \ (-1,0) \cap (0,1) = \phi \end{aligned}$$

é dada por:

$$\begin{aligned} \sim p &: \ \{-1,0\} \cap \{0,1\} \neq \{0\} \\ \sim q &: \ (-1,0) \cap (0,1) \neq \phi \end{aligned}$$

3.2.2 Conjunção

Definição 3.4. *Sejam p e q proposições. A conjunção de p e q, indicada $p \wedge q$, é a proposição "p e q". A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando ambas são verdadeiras, e falsa caso contrário.*

O valor lógico da conjunção de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Observe-se que somente na primeira linha temos as duas proposições verdadeiras, assim só nesse caso temos o resultado verdadeiro.

Exemplo 3.7. Considere as proposições

$$p : \sqrt{64} = 8 \quad \text{e} \quad q\text{: 2 é um número ímpar.}$$

A conjunção

$$p \wedge q\text{: } \sqrt{64} = 8 \text{ e 2 é um número ímpar}$$

é falsa pois q é falsa.

Exemplo 3.8. Considere as proposições

$$p : 2 < 5 \quad \text{e} \quad q : \text{A neve é branca} \quad \text{e} \quad r : \text{Paris é a capital da França.}$$

A conjunção

$$p \wedge q \wedge r : \ 2{<}5 \text{ e a neve é branca e Paris é a capital da França}$$

é verdadeira pois todas as proposições são verdadeiras.

Exemplo 3.9. Das proposições

$$p : 2^2 = 4, \quad q : \text{Pelé nasceu na Croácia}, \quad r : \text{3 é ímpar}, \quad s : \text{7 é primo.}$$

temos que a conjunção

$$p \wedge q \wedge r \wedge s : 2^2 = 4 \text{ e Pelé nasceu na Croácia e 3 é ímpar e 7 é primo}$$

é falsa pois q é falsa.

A definição de conjunção para proposições estende-se naturalmente para às proposições abertas.

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas proposições abertas referentes a certas condições satisfeitas (ou propriedades gozadas) por elementos x de um conjunto universo U. Chamemos

$$P = \{x \in U; x \text{ cumpre as condições estabelecidas por } p(x)\},$$

$$Q = \{x \in U; x \text{ cumpre as condições estabelecidas por } q(x)\},$$

e

$$D = \{x \in U; x \text{ cumpre as condições estabelecidas por } p(x) \wedge q(x)\}.$$

Assim, vale a igualdade $D = P \cap Q$, ou seja, o conjunto de elementos que satisfazem às condições estabelecidas por $p(x) \wedge q(x)$ é $P \cap Q$. Os exemplos a seguir ilustram melhor esses fatos.

Exemplo 3.10. Considere as proposições abertas em $\mathbb{R}$:

$$p(x) : x^2 > 1 \;\text{ e }\; q(x) : x + 5 > 2.$$

O conjunto dos números que satisfazem a condição $p(x)$ é $P = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e o conjunto dos números que cumprem a condição $q(x)$ é $Q = (-3, +\infty)$. Assim, a afirmação

$$p(x) \wedge q(x) : x^2 > 1 \,\wedge\, x + 5 > 2$$

é equivalente a

$$x \in P \cap Q = (-3, -1) \cup (1, +\infty).$$

Exemplo 3.11. Considere as proposições abertas em $\mathbb{R}$:

$$p(x) : x^2 + x - 6 = 0 \;\text{ e }\; q(x) : x^3 - 7x^2 + 10x = 0.$$

Nesse caso, temos $P = \{-3, 2\}$ e $Q = \{0, 2, 5\}$. Daí, o conjunto que satisfaz $p(x) \wedge q(x)$ é $P \cap Q = \{2\}$.

3.2.3 Disjunção

Definição 3.5. *Sejam p e q proposições. A disjunção de p e q, indicada $p \vee q$, é a proposição "p ou q". A disjunção $p \vee q$ é falsa se p e q são ambas falsas, e verdadeira em qualquer outro caso.*

A tabela-verdade para $p \vee q$ é a seguinte :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A tabela acima mostra que se houver pelo menos uma proposição simples verdadeira, o resultado será verdadeiro, mesmo que todas as outras proposições sejam falsas.

Exemplo 3.12. Dadas as proposições

$$p : -5 > 0, \quad q\text{: 8 é par}, \quad r\text{: } \tfrac{5}{3} < 1 \quad \text{e} \quad s\text{: Brasil tem 7 letras}$$

A disjunção

$$p \vee q\text{: } -5 > 0 \text{ ou 8 é par}$$

é verdadeira pois q é verdadeira.
Por outro lado, a disjunção

$$r \vee s\text{: } \tfrac{5}{3} < 1 \text{ ou Brasil tem 7 letras}$$

é falsa pois ambas proposições são falsas.

Exemplo 3.13. Considere agora as proposições

$$p : 3 < 0, \quad q : 2 \text{ é par} \quad \text{e} \quad r : \text{Maradona é brasileiro.}$$

A disjunção das três proposições simples é

$$p \vee q \vee r : 3 < 0 \text{ ou 2 é par ou Maradona é brasileiro}$$

que é verdadeira dado que apenas a segunda é verdadeira, o que já faz com que a proposição composta seja verdadeira, mesmo que as demais sejam falsas.

Exemplo 3.14. No caso das seguintes proposições

$$p : 2 + 4 = 7, \quad q : \text{A capital do Acre é Cuba}, \quad r : \text{x+4=8 se x=9},$$

temos que a disjunção

$$p \vee q \vee r : \text{ 2+4=7 ou a capital do Acre é Cuba ou x+4=8 se x=9},$$

é falsa pois todas as proposições simples são falsas.

A seguir, estende-se para às proposições abertas a definição de disjunção.

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas proposições abertas referentes a certas condições (ou propriedades gozadas) por elementos x de um conjunto universo U. Chamemos

$$P = \{x \in U; x \text{ cumpre as condições estabelecidas por } p(x)\},$$

$$Q = \{x \in U; x \text{ cumpre as condições estabelecidas por } q(x)\},$$

e

$$C = \{x \in U; x \text{ cumpre as condições estabelecidas por } p(x) \vee q(x)\}.$$

Assim, vale a igualdade $C = P \cup Q$, ou seja, o conjunto de elementos que satisfazem às condições estabelecidas por $p(x) \vee q(x)$ é $P \cup Q$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.15. Suponha as proposições abertas em $\mathbb{R}$:

$$p(x) : x^2 > 1 \text{ e } q(x) : x + 5 > 2.$$

Inicialmente, observe que o conjunto dos números que satisfazem a condição $p(x)$ é $P = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Ademais, o conjunto dos números que cumprem a condição $q(x)$ é $Q = (-3, +\infty)$. Deste modo, a expressão

$$p(x) \vee q(x) : x^2 > 1 \vee x + 5 > 2$$

é equivalente a

$$x \in P \cup Q = \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.16. Sejam as proposições abertas em $\mathbb{R}$:

$$p(x) : x^2 + x - 6 = 0 \text{ e } q(x) : x^3 - 7x^2 + 10x = 0.$$

Primeiramente, temos $P = \{-3, 2\}$ e $Q = \{0, 2, 5\}$. Portanto, o conjunto que satisfaz $p(x) \vee q(x)$ é $P \cup Q = \{-3, 0, 2, 5\}$.

3.2.4 Disjunção exclusiva

O uso do conectivo "ou" em uma disjunção corresponde a um dos sentidos da palavra "ou" usados em português, chamada forma inclusiva. Outra maneira de utilizar o conectivo "ou" é na forma exclusiva.

Definição 3.6. *Sejam p e q proposições. A disjunção exclusiva de p e q, indicada $p \oplus q$, é a proposição "ou p ou q" ou "p ou q, mas não ambos". A disjunção exclusiva $p \oplus q$ é verdadeira quando exatamente uma das duas é verdadeira e falsa nos outros casos.*

A tabela-verdade para $p \oplus q$ é a seguinte :

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A tabela acima mostra que a proposição $p \oplus q$ é verdadeira se uma, e apenas uma, das proposições é verdadeira, e é falsa quando p e q são ambas falsas ou ambas verdadeiras.

Exemplo 3.17. Considere as proposições

$$p: \text{ O céu é azul}, \quad q: \text{O triplo de 2 é 6.}$$

A disjunção exclusiva das proposições é

$$p \oplus q: \text{ Ou o céu é azul, ou o triplo de 2 é 6.}$$

Exemplo 3.18. O ou exclusivo foi usado na frase

"Estudantes que têm aulas de geometria ou lógica, mas não ambas, podem assistir a estas aulas"

Na frase, queremos dizer que estudantes que têm aulas nesses dois cursos, geometria e lógica, não podem assistir a estas aulas.

3.2.5 Condicional

Definição 3.7. *Sejam p e q proposições. A proposição condicional $p \to q$ é a proposição "se p, então q". A condicional $p \to q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e verdadeira em qualquer outro caso. Na condicional $p \to q$, p é chamada de hipótese (ou antecedente ou premissa) e q é chamada de conclusão (ou consequência ou consequente).*

A tabela-verdade para o condicional é a seguinte :

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observa-se da tabela que a condicional é verdadeira quando ambos o são e quando p é falsa (não importando qual o valor de verdade de q).

Existem algumas expressões que podem ser utilizadas como equivalentes para expressar a condicional

"se p, q"

"q se p "

"quando p,q"

"sempre que p, q"

"toda vez que p, q"

"p implica q"

"p é suficiente para q"

"q é necessário para p"

"uma condição necessária para p é q"

"uma condição suficiente para q é p"

"q segue de p"

"q quando ocorrer p"

Exemplo 3.19. Vejamos a condicional "Se estudo, então sou aprovado", esta proposição também pode ser escrita como:

- Se estudo, sou aprovado.
- Sou aprovado, se estudo.
- Quando estudo, sou aprovado.
- Sempre que estudo, sou aprovado.
- Estudar implica eu ser aprovado.
- Eu ser aprovado é condição necessária para estudar.
- Uma condição suficiente para ser aprovado é estudar.
- Sou aprovado, se estudo.

Exemplo 3.20. Seja p a proposição "Eu esfrego a lâmpada maravilhosa" e q a proposição "O gênio aparece". Da definição de condicional, vemos que, $p \to q$ representa a proposição

$p \to q$: Se eu esfregar a lâmpada maravilhosa, então o gênio aparecerá.

Exemplo 3.21. Considere as seguintes proposições com seus respectivos valores lógicos:

$$\begin{aligned} p &: \text{ a terra é plana (F)} \\ q &: \text{ 7 é um número ímpar (V)} \end{aligned}$$

Da tabela-verdade do condicional temos que o valor lógico de $p \to q$ é (V), isto é,

$$p \to q : \text{ Se a terra é plana, então 7 é um número ímpar (V)}$$

Do exemplo anterior, deve-se notar que a verdade ou falsidade de $p \to q$ depende apenas da verdade ou falsidade das proposições p e q e não do conteúdo dessas proposições. Quando analisamos $p \to q$ do ponto de vista do seu conteúdo, vemos que não existe nenhuma relação entre os dois fatos. Por isso, condicionais como essas não é de nosso interesse. Dentre as condicionais, estamos interessados nas condicionais válidas.

Chamamos proposição condicional válida a uma proposição condicional "se p, então q" na qual, admitindo-se a validade da proposição p, se deduz a validade de da proposição q. Caso contrário, a proposição condicional é dita proposição condicional não válida.

Vejamos alguns exemplos, à guisa de ilustração.

Exemplo 3.22. Se n for um número inteiro divisível por 10, então n é um número par.

A expressão é uma proposição condicional, em que

$$p : \; n \text{ é um número inteiro divisível por 10}$$

e

$$q : \; n \text{ é um número par.}$$

Exemplo 3.23. Se um triângulo for retângulo, então o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Neste exemplo, temos:

$$p : \text{ Um triângulo é retângulo}$$

e

$$\begin{aligned} q : \;& \text{O quadrado da medida da hipotenusa é igual} \\ & \text{à soma dos quadrados das medidas dos catetos.} \end{aligned}$$

Exemplo 3.24. Se n for um número inteiro par, então $n^2 + 1$ é um número primo.

Dos exemplos anteriores, os Exemplos 3.22 e 3.23 são proposições condicionais válidas. Já o Exemplo 3.24 não é uma proposição condicional válida, pois, supondo a validade de p resulta, em particular que, sendo $n = 8$ um número inteiro par, o número $n^2 + 1 = 65$ deveria ser um número primo, o que não ocorre.

Proposições Implicativas

Na lógica formal, diz-se que uma proposição composta p implica logicamente uma proposição composta q (indica-se por $p \Rightarrow q$), quando na tabela-verdade de p e q, verifica-se que p é verdadeiro, e q também. Podemos também dizer que p implica q quando o valor lógico da condicional $p \to q$ será sempre V, independentemente dos valores lógicos de p e q.

Observe a seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Percebemos que, a condicional $(p \wedge q) \to p$ contém apenas V, independente dos valores lógicos p e q. Assim, $(p \wedge q) \Rightarrow p$.

Observação 3.1. :

- O símbolo '$\to$' será usado para proposições condicionais da lógica formal, representando uma operação lógica com proposições.
- O símbolo '$\Rightarrow$' será usado na implicação lógica de proposições.

Além de o símbolo '$\Rightarrow$' ser usado na lógica formal o mesmo símbolo é usado para representar a palavra implica ou acarreta.

Dadas duas proposições p e q, em vez de escrever a proposição p implica ou acarreta a proposição q, escrevemos simplesmente $p \Rightarrow q$. A proposição é chamada **proposição implicativa**.

É importante notar que $p \Rightarrow q$ é apenas outra maneira de escrever a proposição condicional "se p, então q".

Como feito para proposições condicionais:

- A proposição $p \Rightarrow q$ é chamada proposição implicativa válida, quando a proposição q puder ser deduzida da proposição p e, caso contrário, a proposição $p \Rightarrow q$ chamar-se-á proposição implicativa não válida.
- Nas mesmas circunstâncias a implicação $p \Rightarrow q$ é dita implicação válida ou implicação não válida.

Exemplo 3.25. Reescreva na forma implicativa as seguintes proposições condicionais.

(a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

(b) Se n é um inteiro par, então $3n^5$ é um inteiro par.

(c) Se f e g são funções contínuas, então $f + g$ é contínua.

(d) Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, então $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

(e) Se n for um número inteiro par, então $n^2 + 1$ é um número primo.

Solução:

(a) $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

(b) n é um inteiro par $\Rightarrow 3n^5$ é um inteiro par.

(c) f e g são funções contínuas $\Rightarrow f + g$ é contínua.

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge $\Rightarrow \displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(e) n for um número inteiro par $\Rightarrow n^2 + 1$ é um número primo.

As quatro primeiras proposições são proposições implicativas válidas, já a última é uma proposição implicativa não válida.

Exemplo 3.26. Use o símbolo de implicação para ligar as proposições abaixo em sua ordem natural lógica, construindo, dessa forma, novas proposições.

(a) p_1 : $y \in \mathbb{Z}$ é tal que $y = \dfrac{19-3}{3} + 7 = \dfrac{27}{3} = 9$
p_2 : $y = 9$

(b) p_3 : $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ é uma progressão geométrica de razão r
p_4 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$
p_5 : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma sequência tal que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

(c) p_6 : O volume do sólido P é o produto da área da base pela altura
p_7 : P é um paralelepípedo
p_8 : P é um prisma

(d) p_9 : $x = 9/2$
p_{10} : $5x - 3x = 9$
p_{11} : $x \in \mathbb{Q}$ é tal que $3x + 9 = 5x$
p_{12} : $2x = 9$

(e) p_{13} : $\operatorname{sen}(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ têm sinais opostos
p_{14} : $\operatorname{tg}(\alpha)$ é negativo
p_{15} : $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \pi + 2k\pi$ ou
$\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Solução: Uma possível solução é:

(a) $p_1 \Rightarrow p_2$

(b) $p_3 \Rightarrow p_5 \Rightarrow p_4$

(c) $p_7 \Rightarrow p_8 \Rightarrow p_6$

(d) $p_{11} \Rightarrow p_{10} \Rightarrow p_{12} \Rightarrow p_9$

(e) $p_{15} \Rightarrow p_{13} \Rightarrow p_{14}$

Conjuntos, Proposições Implicativas e Condicionais

A relação de inclusão entre conjuntos está estreitamente relacionada com as proposições condicionais e as proposições implicativas. Vejamos como.

Sejam p e q duas proposições definidas por condições satisfeitas por elementos pertencentes a um conjunto universo U. Associamos a proposição p ao conjunto $A \subset U$, dos elementos que gozam de p, e associamos a proposição q ao conjunto $B \subset U$, dos elementos que gozam de q. Diz-se que a implicação $p \Rightarrow q$ é válida, sempre que $A \subset B$ e, reciprocamente, se $A \subset B$, então a implicação $p \Rightarrow q$ é válida. A mesma ideia pode ser aplicada para proposições condicionais.

Exemplo 3.27. Considere o conjunto universal U dado por:

$$U = \{ \text{ quadriláteros convexos do plano } \}$$

Designemos com p e q as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} p &: \quad \text{quadrilátero com seus quatro ângulos retos} \\ q &: \quad \text{quadrilátero com lados opostos paralelos} \end{aligned}$$

Então podemos escrever $p \Rightarrow q$. Com efeito, neste caso, os conjuntos A e B são dados como

$$\begin{aligned} A &= \{ \; x \in U; \, x \text{ têm seus quatro ângulos retos } \} \\ &= \{ \text{ retângulos } \} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B &= \{ \; x \in U; \, x \text{ têm lados opostos paralelos } \} \\ &= \{ \text{ paralelogramos } \}, \end{aligned}$$

logo $A \subset B$.

Reciprocamente, como $p \Rightarrow q$, concluímos $A \subset B$.

Exemplo 3.28. Usando conjuntos, vamos justificar a validade da implicação

$$n \in \mathbb{Z}, n \text{ é divisível por } 10 \Rightarrow n \text{ termina em zero.}$$

Primeiramente, sejam

$$A = \{ \; n \in \mathbb{Z}; \, n \text{ é divisível por } 10 \; \}$$

e

$$B = \{ \; n \in \mathbb{Z}; \, n \text{ termina em } 0 \; \},$$

como

$$A = \{..., -20, -10, 0, 10, 20, ...\}$$

e

$$B = \{..., -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, ...\},$$

tem-se $A = B$ e, portanto, $A \subset B$. Dessa forma vale a implicação

$$n \in \mathbb{Z}, n \text{ é divisível por } 10 \Rightarrow n \text{ termina em zero.}$$

Exemplo 3.29. Podemos escrever a implicação

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Ela significa que o conjunto das raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$ está contido no conjunto das raízes da equação $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Observação 3.2.

- Não se deve usar: Se $x \in \{1, 3\} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. O símbolo $\Rightarrow$ deve ligar duas proposições. Observe que "Se $x \in \{1, 3\}$" não é uma proposição.

- Também é incorreto empregar o símbolo $\Rightarrow$ com significado conclusivo da palavra "portanto". O símbolo adequado para esta palavra é $\therefore$ e não $\Rightarrow$.

Exemplo 3.30. (Propriedade transitiva) Provaremos nesse exemplo a propriedade transitiva, que estabelece: Caso as implicações $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$ sejam válidas, resulta na validade da implicação $p \Rightarrow r$.

Demonstração. Associamos a p, q e r os conjuntos A, B e C, respectivamente. Como $p \Rightarrow q$, então $A \subset B$. Da mesma forma, como $q \Rightarrow r$, tem-se $B \subset C$. Logo, como $A \subset B$ e $B \subset C$, resulta $A \subset C$, o que implica $p \Rightarrow r$. □

A resolução de uma equação é um caso típico em que se tem uma sequência de implicações lógicas. Vejamos.

Exemplo 3.31. Para resolver a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, podemos seguir os passos abaixo:

$$\begin{aligned} p &: \ x^2 - 4x + 3 = 0; \\ q &: \ (x-1)(x-3) = 0; \\ r &: \ x = 1 \text{ ou } x = 3; \\ s &: \ x \in \{1, 3\}. \end{aligned}$$

Se chamarmos respectivamente de p, q, r e s as condições impostas sobre o número x em cada uma das expressões acima, os passos que acabamos de seguir implicam que

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow s.$$

Isto é, se o número x satisfaz p estão satisfaz q e assim por diante. Por transitividade, a conclusão a tirar é $p \Rightarrow s$, ou seja:

$$\text{Se } x^2 - 4x + 3 = 0, \text{ então } x \in \{1, 3\}.$$

No exemplo acima, estritamente falando, a firmação a que chegamos não significa que as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ são 1 e 3. O que está dito acima é que se houver raízes desta equação elas devem pertencer ao conjunto $\{1, 3\}$.

Nas próximas seções, estudaremos as situações que envolvem o caminho de volta quando consideramos as implicações recíprocas.

Condição necessária e condição suficiente

Lembre-se de que a proposição implicativa $p \Rightarrow q$ é lida como p implica q. Outra forma de apresentar uma proposição implicativa ou proposição condicional é a seguinte:

$$p \text{ é condição suficiente para } q$$

ou

$$q \text{ é condição necessária para } p.$$

Esses estilos de apresentar uma proposição implicativa é muito comum na Matemática ao se enunciar teoremas.

A diferença entre condição suficiente e necessária deve ficar bem claro. Comecemos com um exemplo fora da Matemática, em que os significados das palavras *necessária* e *suficiente* são bem instrutivos.

Exemplo 3.32. Suponha que Craque seja o nome de um cavalo. Considere a proposição:

Craque é cavalo, implica Craque é quadrúpede.

Outra maneira de expressar essa frase é:

Craque ser cavalo é uma condição suficiente para Craque ser quadrúpede.

ou

Craque ser quadrúpede é uma condição necessária para Craque ser cavalo.

Observe que é suficiente Craque ser cavalo para ser quadrúpede. Por outro lado, como não há cavalos que não sejam quadrúpedes, é necessário Craque ser quadrúpede para ser cavalo.

Vejamos a seguir exemplos dentro da matemática.

Exemplo 3.33. Sabemos que o conjunto de números $n \in \mathbb{Z}$ que são múltiplos de 4 está contido no conjunto dos números pares. Isto é, todo múltiplo de 4 é par. Por outro lado, nem todo par é múltiplo de 4. Podemos expressar essas afirmações na forma de implicações lógicas:

$$n \text{ múltiplo de } 4 \Rightarrow n \text{ par} \quad \text{e} \quad n \text{ par} \not\Rightarrow n \text{ múltiplo de } 4.$$

Em outras palavras, para que um número n seja par é suficiente que n seja múltiplo de 4. Ou, de forma equivalente, basta ser múltiplo de 4 para ser par. Por outro lado, um número pode ser par sem ser múltiplo de 4, isto é, não é necessário ser múltiplo de 4 para ser par. Assim, ser múltiplo de 4 é suficiente, mas não necessário para ser par.

Podemos ainda expressar esta afirmação de outra forma equivalente: ser par é necessário, mas não suficiente para ser múltiplo de 4.

Exemplo 3.34. Todo retângulo possui lados opostos paralelos. Porém, existem quadriláteros convexos com lados opostos paralelos que não são retângulos. Assim, para que um quadrilátero convexo Q seja um retângulo é necessário que seus lados opostos sejam paralelos, mas esta propriedade apenas não assegura que Q tenha ângulos todos retos.

Por conseguinte, ter lados opostos paralelos é uma condição necessária, mas não suficiente para que um quadrilátero seja retângulo. Equivalentemente, ser retângulo é uma condição suficiente, mas não necessária, para que um quadrilátero tenha lados opostos paralelos. Ou ainda,

$$Q \text{ é retângulo } \Rightarrow Q \text{ tem lados opostos paralelos,}$$

e

$$Q \text{ tem lados opostos paralelos } \not\Rightarrow Q \text{ é retângulo.}$$

A fim de ilustrar o uso dos termos *necessário* e *suficiente*, colecionamos a seguir alguns exemplos nos quais apresentamos teoremas para ser reescritos de maneiras distintas.

Exemplo 3.35. Reescreva cada teorema a seguir, usando primeiramente os termos *condição suficiente*, e depois, usando os termos *condição necessária*

(a) Se dois números terminarem em 76, então o mesmo ocorre com o produto desses números.

(b) O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 é nulo, sempre que essa matriz possuir duas colunas proporcionais.

(c) Os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3) do plano cartesiano, $x_1 \neq x_2$ e $x_2 \neq x_3$, são colineares se $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$.

(d) Um polinômio de grau n possui exatamente n raízes complexas.

(e) Todo polígono regular pode ser inscrito em um círculo.

(f) Os elementos do conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ são $a = 10$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 13$ e $e = 14$, se estes elementos formarem uma sequência de cinco números inteiros consecutivos não negativos, que satisfazem a identidade $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$.

Solução:

(a) Dois números terminarem em 76 é condição suficiente para que o produto desses números termine em 76.

O produto de dois números terminar em 76 é condição necessária para que esses números terminem em 76.

(b) Uma matriz quadrada de ordem 3 possuir duas colunas proporcionais é uma condição suficiente para que seu determinante seja nulo.

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 ser nulo é uma condição necessária para que essa matriz possua duas colunas proporcionais

(c) Uma condição suficiente para que os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3), $x_1 \neq x_2$ e $x_2 \neq x_3$, sejam colineares é que $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$.

Uma condição necessária para que a igualdade $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ ocorra é que os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3), $x_1 \neq x_2$ e $x_2 \neq x_3$, sejam colineares.

(d) Uma condição suficiente para um polinômio ter n raízes complexas é que ele tenha grau n.

Uma condição necessária para um polinômio ter grau n é que esse polinômio tenha n raízes complexas.

(e) Uma condição suficiente para que um polígono possa ser inscrito em um círculo é que esse polígono seja regular.

Uma condição necessária para que um polígono seja regular é que ele possa ser inscrito em um círculo.

(f) Os elementos do conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ formarem uma sequência de cinco números inteiros consecutivos não negativos que satisfaçam a identidade $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$ é uma condição suficiente para que $a = 10$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 13$ e $e = 14$.

As igualdades $a = 10$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 13$ e $e = 14$ valerem é uma condição necessária para os elementos do conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ formarem uma sequência de cinco números inteiros consecutivos não negativos, que satisfaçam a identidade $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$.

Exemplo 3.36. Reescreva cada teorema abaixo na forma condicional *Se...,então...*

(a) Uma condição necessária para um número ser divisível por 6 é que ele seja simultaneamente divisível por 2 e por 3.

(b) Ser um triângulo retângulo é condição suficiente para ter a altura correspondente ao vértice do ângulo reto igual à média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

(c) Uma condição suficiente para que um triângulo seja isósceles é que ele tenha dois ângulos internos congruentes.

(d) Ter duas colunas iguais é uma condição suficiente para uma matriz quadrada ter determinante nulo.

(e) Não ser primo é uma condição necessária para que o número seja da forma $n^4 + 4$, para $n \geq 2$.

(f) Uma condição necessária para que dois números terminem em 1 é que seu produto também termine em 1.

Solução:

(a) Se um número for divisível por 6, então ele é divisível por 2 e por 3 simultaneamente.

(b) Se um triângulo for retângulo, então a altura correspondente ao vértice do ângulo reto é média proporcional ou geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

(c) Se um triângulo tiver dois ângulos congruentes, então ele é isósceles.

(d) Se uma matriz quadrada tiver duas colunas iguais, então seu determinante nulo.

(e) Se um número for da forma $n^4 + 4$, para $n \geq 2$, então ele não é primo.

(f) Se dois números terminarem em 1, então o produto deles também termina em 1.

A recíproca de uma proposição

Podemos formar outras proposições com a proposição condicional *Se* p, *então* q. Por exemplo, a proposição *Se* q, *então* p é chamada a recíproca da proposição condicional *Se* p, *então* q. No caso de uma proposição implicativa $p \Rightarrow q$, sua recíproca é definida como a proposição $q \Rightarrow p$.

Exemplo 3.37. Considere a proposição:

> Se dois números forem negativos, então sua soma também é negativa.

Sua recíproca é:

> Se a soma de dois números for negativa, então esses números são negativos.

Exemplo 3.38. A recíproca da proposição

> Todo triângulo isósceles é retângulo

é

> Todo triângulo retângulo é isósceles.

Exemplo 3.39. Seja a proposição:

> Uma condição suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes desse plano.

Sua recíproca é:

> Uma condição suficiente para que uma reta seja perpendicular a duas retas concorrentes de um plano é que ela seja perpendicular ao plano .

ou equivalentemente

> Se uma reta for perpendicular a um plano, então ela é perpendicular a duas retas concorrentes deste plano.

Em relação aos exemplos anteriores, observe que, os valores lógicos de uma proposição e de sua recíproca são independentes. No Exemplo 3.37, acima, temos que a proposição é verdadeira, mas sua recíproca é falsa. Já a proposição que aparece no Exemplo 3.38 é falsa e sua recíproca também é falsa. Por último, no Exemplo 3.39 a proposição é verdadeira e sua recíproca também é verdadeira.

Proposições equivalentes

Se tivermos duas proposições p e q, tais que são verdadeiras ambas as implicações $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, dizemos p *se, e somente se*, q, ou que p *é equivalente a* q ou, ainda, que p *é necessário e suficiente para* q. Neste caso, escreve-se

$$p \Leftrightarrow q.$$

Em linguagem de conjuntos, isto significa que o conjunto dos elementos que têm a propriedade p é igual ao conjunto dos elementos que têm a propriedade q.

Vejamos um exemplo onde usamos maneiras distintas de enunciar a equivalência.

Exemplo 3.40.

- Usando o conectivo *se, e somente se*:

  Uma matriz quadrada A é invertível *se, e somente se* $\det A \neq 0$.

- Usando os termos *condição necessária e suficiente*:

  Uma condição necessária e suficiente para que uma matriz quadrada A seja invertível é que $\det A \neq 0$.

- Usando o termo *equivalente*: As condições a seguir são equivalentes:

  (i) Uma matriz quadrada A é invertível.

  (ii) $\det A \neq 0$.

Exemplo 3.41. Podemos expressar o teorema de Pitágoras das maneiras seguintes:

- A condição necessária e suficiente para que um triângulo ABC seja retângulo em B é que $AC^2 = AB^2 + AC^2$.

- Dados três pontos distintos A, B e C, a condição necessária e suficiente para que $AC^2 = AB^2 + AC^2$ é que o triângulo ABC seja retângulo em B.

- Seja ABC um triângulo. Então,

$$ABC \text{ é retângulo em } B \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + AC^2.$$

- Um triângulo ABC é retângulo em B se e somente se $AC^2 = AB^2 + AC^2$.

No dia a dia da Matemática é frequente a utilização de várias proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$, uma equivalente à outra:

$$p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow p_{n-1} \Leftrightarrow p_n.$$

Neste caso, dizemos simplesmente que as proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são equivalentes. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.42. Para provar que dois números reais a e b são iguais, podemos provar qualquer das proposições equivalentes abaixo

$$a - b = 0 \Leftrightarrow (a \leq b \;\text{ e }\; a \geq b) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow |a - b| < \epsilon,\ \forall \epsilon > 0.$$

Exemplo 3.43. Se A for uma matriz $n \times n$, então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) A é invertível.

(b) $\det A \neq 0$.

(c) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem somente a solução trivial.

(d) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.

(e) Os vetores coluna de A são linearmente independentes.

(f) Os vetores linha de A são linearmente independentes.

(g) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem exatamente uma solução com cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$.

A recíproca na resolução de equações

Voltando à tentativa de resolver em $\mathbb{R}$ a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ do Exemplo 3.31. Nesse exemplo, provou-se apenas as implicações

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow s. \tag{3.1}$$

Ou melhor, chamando S o conjunto-solução da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, provou-se a inclusão $S \subset \{1, 3\}$.

Como garantir o fato de o conjunto $S = \{1, 3\}$ ser o conjunto-solução da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$?

A resposta é: a recíproca de cada implicação em (3.1) deve ser válida.

Não é difícil ver que valem as implicações

$$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p.$$

Logo, $s \Rightarrow p$. Concluímos que $s \Leftrightarrow p$. Assim, $S = \{1, 3\}$., ou seja, 1 e 3 são de fato as (únicas) raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Exemplo 3.44. Sabe-se que a equação $x^2 + 1 = 0$ não possui soluções reais. Na sequência abaixo, cada uma das letras p, q, r e s representa a condição sobre o número x expressa na igualdade ao lado:

$$\begin{aligned} p &: \ x^2 + 1 = 0; \\ q &: \ x^4 - 1 = 0; \\ r &: \ x^4 = 0; \\ s &: \ x \in \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

Claramente, tem-se $p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow s$, logo $p \Rightarrow s$. Ou seja, a sequência de implicações apenas garante que, se a equação $x^2+1 = 0$ possuir raízes reais, então elas pertencerão ao conjunto $\{-1, 1\}$.

Na verdade, a implicação $p \Rightarrow q$ não pode ser revertida: sua recíproca é falsa. Sabemos que o conjunto das soluções reais da equação é vazio. Assim, a dedução acima apenas ilustra o fato de que $\phi \in \{-1, 1\}$. Como sabemos, o conjunto vazio está contido em qualquer outro.

Exemplo 3.45. Para resolver equação $\sqrt{x} + 2 = x$, $x \in \mathbb{R}$, procede-se assim:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 2 = x \ &\Rightarrow \ \sqrt{x} = x - 2; \\ &\Rightarrow \ (\sqrt{x})^2 = (x - 2)^2; \\ &\Rightarrow \ x = x^2 - 4x + 4; \\ &\Rightarrow \ x^2 - 5x + 4 = 0; \\ &\Rightarrow \ x = 4 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Da sequência de implicações temos que se houver raízes da equação $\sqrt{x} + 2 = x$ elas devem pertencer ao conjunto $\{1, 4\}$.

Todas as implicações acima são inversíveis, exceto a segunda. Na verdade, a implicação

$$(\sqrt{x})^2 = (x - 2)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = x - 2$$

é válida apenas quando $x \geq 2$. Assim, $x = 4$ é a raiz da equação.

3.2.6 Bicondicional

Na lógica simbólica formal, dadas duas proposições p e q, se tivermos $p \to q$ e $q \to p$ simultaneamente, escrevemos $p \leftrightarrow q$, que é lido como *p se, e somente se q*. Formalmente temos a definição.

Definição 3.8. *Sejam p e q proposições. A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é a proposição "p se e somente se q". A bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira sempre que p e q têm o mesmo valor-verdade, e falsa caso contrário.*

A tabela-verdade para o bicondicional é a seguinte :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

O símbolo '$\leftrightarrow$' define uma operação entre proposições que leva um par de proposições (p, q) em outra proposição, representada por $p \leftrightarrow q$.

Exemplo 3.46. Sejam as seguintes proposições com seus respectivos valores lógicos:

p : Quito fica em América (V)
q : A neve é branca (V)

Da tabela-verdade do bicondicional temos que o valor lógico de $p \leftrightarrow q$ é (V), isto é,

$p \leftrightarrow q$: Quito fica na América se, e somente se, a neve é branca (V)

Na lógica formal, levando em consideração o que já expusemos sobre implicação entre proposições, escrevemos $p \Leftrightarrow q$, nos casos em que a última coluna da tabela-verdade acima contiver apenas V. Quando isso ocorre, as sentenças p e q são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas.

Na próxima seção usaremos o conceito de tautologia para definir equivalência de proposições $(p \Leftrightarrow q)$.

3.3 Equivalências Lógicas

Na argumentação matemática é frequente a substituição de uma proposição por outra que lhe seja equivalente. Muitas vezes, isso simplifica o cálculo com proposições, como também facilita algumas demonstrações. Antes de desenvolver o conceito de equivalência, precisamos manipular tabelas-verdade de proposições compostas e classificar as proposições compostas de acordo com seus possíveis valores-verdade.

3.3.1 Tabela Verdade para Proposições Compostas

Se desejarmos saber o valor de verdade de proposições mais complicadas com maior número de variáveis proposicionais, como proceder? Uma opção é usar tabelas-verdade, como ilustrado nos seguintes exemplos.

Exemplo 3.47. Construir a tabela verdade da proposição $\sim (p \wedge \sim q)$

Solução: Como a proposição envolve apenas duas variáveis proposicionais, p e q, existem quatro linhas nessa tabela, correspondentes às combinações dos valores-verdade VV, VF, FV e FF. As duas primeiras colunas são usadas para os valores-verdade de p e q, respectivamente. Em seguida montamos a coluna correspondente a $\sim q$. Depois, forma-se a coluna para $p \wedge \sim q$. Por fim, constrói-se a coluna de $\sim (p \wedge \sim q)$ que será montada com os valores lógicos contrários à coluna anterior por se tratar da negação de $p \wedge \sim q$.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Exemplo 3.48. Construir a tabela verdade da proposição $(p \wedge q) \rightarrow \sim q$

Solução:

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$(p \wedge q) \rightarrow \sim q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

Nota-se que, cada vez que adicionamos uma nova variável proposicional, dobramos o número de linhas da tabela-verdade. Por exemplo, a tabela-verdade para a proposição $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ é:

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

Portanto, a tabela-verdade de uma proposição composta contendo n variáveis proposicionais diferentes terá 2^n linhas.

3.3.2 Tautologia, Contradição e Contingência

Definição 3.9. *Uma proposição composta que é sempre verdadeira, qualquer que sejam os valores-verdade das proposições que ocorrem nela, é chamada de tautologia. Uma* *proposição composta que é sempre falsa, qualquer que sejam os valores-verdade das proposições que a compõem, é chamada de contradição. Uma proposição composta que não é nem tautologia nem contradição é chamada de contingência .*

Exemplo 3.49. As proposições $p \vee \sim p$ e $p \wedge \sim p$ são exemplos de tautologia e contradição respectivamente, conforme ilustra a seguinte tabela-verdade:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Exemplo 3.50. A proposição $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ é uma tautologia, conforme se vê pela sua tabela-verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Resulta imediatamente deste último exemplo a contradição

$$\sim [\,(p \wedge q) \to (p \vee q)\,]\,,$$

pois trata-se da negação de $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ que tem todas as suas linhas resultando em V, logo sua negação resulta em todas as linhas com resultado F.

No exemplo a seguir temos uma pequena história com personagens de Alice no País das Maravilhas, da autoria de Lewis Carrol. Para maiores detalhes consulte [6, p. 432].

Exemplo 3.51. Alice acabava de cair no País das Maravilhas e ainda estava um pouco atordoada e sem saber por onde ir. Passa por ela o Coelho Branco que, apesar de muito apressado, tenta ajudá-la e aconselha-a a perguntar o caminho ao Gato Risonho, que tudo sabe.

– Mas – alerta o Coelho – deves ter muito cuidado! É que há dias em que o Gato diz sempre a verdade, mas também há dias em que mente sempre.

Mas à frente, Alice encontra o Gato empoleirado numa árvore, muito risonho, que, entre dois possíveis caminhos opostos, lhe aponta o da direita.

– Como é que eu sei que não me estás a enganar? – pergunta, desconfiada, Alice.

– Bom – responde o Gato, com um sorriso enigmático – se o melhor caminho é o da direita então é o da esquerda e se o melhor caminho é o da esquerda então é o da direita!

Alice pensa um pouco, agradece, e segue o caminho da esquerda, enquanto o Gato vai desaparecendo aos poucos, até ficar apenas a sua cauda a balançar no cimo da árvore.

Do texto anterior o que Alice concluiu?

Solução: Alice concluiu que o Gato Risonho mentiu na sua resposta. Portanto, o Gato estava em dia de mentiras e teria indicado inicialmente o caminho errado. Com efeito, considere a seguinte proposição

$$g: \text{ O melhor caminho é o da direita}$$

A resposta do gato traduz-se pela proposição

$$(g \to \sim g) \wedge (\sim g \to g)$$

que é uma contradição, independente do valor lógico de g:

g	$\sim g$	$g \to \sim g$	$\sim g \to g$	$(g \to \sim g) \wedge (\sim g \to g)$
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F

Agora, podemos definir a equivalência lógica entre proposições

Definição 3.10. *As proposições compostas p e q são chamadas de logicamente equivalentes se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia. A notação $p \Leftrightarrow q$ indica que p e q são logicamente equivalentes*

Uma maneira de verificar quando duas proposições p e q são equivalentes é usar a tabela-verdade. Isto é, elas serão equivalentes se as colunas que fornecem seus valores-verdade forem idênticas.

Exemplo 3.52. Mostre que p e $\sim(\sim p)$ são logicamente equivalentes.

Solução: As tabelas-verdade dessas proposições estão na Tabela 3.1. Como os valores verdade de p e $\sim(\sim p)$ coincidem para todas as possibilidades de combinações de valores-verdade de p, segue-se que $p \leftrightarrow \sim(\sim p)$ é uma tautologia e, portanto, essas proposições são equivalentes, isto é, $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$.

Tabela 3.1: Tabela verdade para p e $\sim p$

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

As seguintes equivalências lógicas, conhecidas como leis de De Morgan, nos mostram como negar conjunções e como negar disjunções.

Exemplo 3.53. (Leis de De Morgan) Sejam p e q duas proposições qualquer. Então:

(a) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

(b) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

Solução:

(a) Da Tabela 3.2, temos que os valores verdade de $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são idênticos. Logo eles são equivalentes.

Tabela 3.2: Tabela verdade para $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

(b) A Tabela 3.3 revela que os valores verdade de $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$ são idênticos. Logo eles são equivalentes.

Tabela 3.3: Tabela verdade para $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Listamos a seguir outras propriedades de equivalências envolvendo conjunção e disjunção de proposições. Elas podem ser provadas, sem dificuldade, usando-se tabelas-verdade.

Exemplo 3.54. Sejam p, q e r proposições. Então são válidas as propriedades:
Idempotência

(a) $p \wedge p \Leftrightarrow p \qquad p \vee p \Leftrightarrow p$

Comutativa

(b) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \qquad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Associativa

(c) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Distributiva

(d) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Exemplo 3.55. Demonstre as seguintes equivalências lógicas:

(a) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$.

(b) $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q)$.

Solução:

(a) A partir da Tabela 3.4 concluímos que a bicondicional $(p \to q) \leftrightarrow (\sim p) \vee q$ é uma tautologia.

Tabela 3.4: Tabela verdade para $(p \to q)$ e $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

(b) Observe-se da Tabela 3.5 que a bicondicional $\sim (p \to q) \leftrightarrow p \wedge (\sim q)$ é uma tautologia.

Tabela 3.5: Tabela verdade para $\sim (p \to q)$ e $p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \to q$	$\sim (p \to q)$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

3.4 Negação de Proposições Composta

Muitas vezes em raciocínios dedutivos matemáticos é necessário saber formular a negação de proposições matemáticas. Este capítulo descreve algumas negações de proposições compostas. Inicialmente, apresenta-se a negação de proposições conjuntivas e disjuntivas. Em seguida, discute-se a negação de quantificadores. Por fim, apresenta-se a negação de uma condicional.

3.4.1 Negação de Proposições Conjuntivas e Disjuntivas

De acordo com o Exemplo 3.53, temos as seguintes equivalências

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \quad \text{e} \quad \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q.$$

A primeira equivalência diz:

A negação da disjunção é a conjunção das negações.

Já a segunda diz:

A negação da conjunção é a disjunção das negações.

Vejamos alguns exemplos concretos.

Exemplo 3.56. A negação da proposição

$$p : \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} \text{ e } \sqrt{3} + \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}.$$

é

$$\sim p : \sqrt{3} + \sqrt[3]{2} \leq \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} \text{ ou } \sqrt{3} + \sqrt{2} \geq \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}.$$

Exemplo 3.57. A negação da proposição disjuntiva

$p \vee q$: A soma dos números $e + \pi$ é irracional ou é maior do que $5,86$.

é

$\sim p \wedge \sim q$: A soma dos números $e + \pi$ é racional e é menor do que ou igual a $5,86$.

Podemos expressar as proposições anteriores em forma simbólica:

$$\begin{aligned} p \vee q &: \quad e + \pi \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \text{ ou } e + \pi > 5,86 \\ \sim p \wedge \sim q &: \quad e + \pi \in \mathbb{Q} \text{ e } e + \pi \leq 5,86. \end{aligned}$$

A negação de muitas expressões matemáticas é feita segundo o exemplo a seguir.

Exemplo 3.58. A negação da frase:

O elemento x do conjunto A satisfaz as propriedades p e q.

é dada por

O elemento x do conjunto A não satisfaz a propriedade p ou a propriedade q.

Já a negação da frase:

O elemento x do conjunto A satisfaz as propriedades p ou q.

é

O elemento x do conjunto A não satisfaz as propriedades p e q.

3.4.2 Negação de Quantificadores

A negação de 'existe x que goza da propriedade p' é 'dado x, ele não goza da propriedade p'. Outras expressões equivalentes são:

- "para todo x, ele não goza da propriedade p"
- "qualquer que seja x, ele não goza da propriedade p"

Em forma simbólica:

$$\sim (\exists x \in U; p(x) \text{ vale}) \Leftrightarrow (\forall x \in U, p(x) \text{ não vale}). \tag{3.2}$$

Na maioria das vezes, colocamos a negação diretamente na propriedade $p(x)$, e a negação anterior toma a forma

$$\sim (\exists x \in U; p(x) \text{ vale}) \Leftrightarrow (\forall x \in U, \sim p(x) \text{ vale}).$$

A negação de 'dado x que goza da propriedade p' é 'existe x que não goza da propriedade p'. Formalmente:

$$\begin{aligned} \sim (\forall x \in U, p(x) \text{ vale}) &\Leftrightarrow (\exists x \in U; p(x) \text{ não vale}) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in U; \sim p(x) \text{ vale}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Uma prova de (3.2) ou (3.3) pode ser encontrada em [4]. Apresentamos a seguir uma série de exemplos que ilustram a negação dos quantificadores.

Exemplo 3.59. Considere a seguinte proposição:

p : O quadrado de todo número real é não negativo.

Em linguagem simbólica, essa afirmação corresponde à proposição:

$$p : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0,$$

cuja negação é:

$$\begin{aligned} \sim (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \sim (x^2 \geq 0) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0. \end{aligned}$$

Em palavras:

p : Existe um número real cujo quadrado é negativo.

Observe-se que p é V e $\sim p$ é F.

Exemplo 3.60. As negações das proposições:

$$\begin{aligned} p &: \exists x \in \mathbb{R}, x > 0, \text{ tal que } x < 0,1 \text{ e } x^2 > 0 \\ q &: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 3. \end{aligned}$$

são, respectivamente

$$\begin{aligned} \sim p &: \forall x \in \mathbb{R}, x > 0, \text{ temos } x \geq 0,1 \text{ ou } x^2 \leq 0 \\ \sim q &: \exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 = 3. \end{aligned}$$

Exemplo 3.61. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ e seu conjunto potência $\mathcal{P}(A)$. Então, a proposição

$$\forall B \in \mathcal{P}(A),\ A - B \neq \phi \tag{3.4}$$

é falsa, pois para $B = A = \{1, 2, 3\}$, temos $A - B = \phi$.

Por outro lado a negação de (3.4) é

$$\exists B \in \mathcal{P}(A) \text{ tal que } A - B = \phi,$$

que é V pois para $B = A \in \mathcal{P}(A)$, temos $A - B = \phi$.

As proposições que envolvem mais de um quantificador podem ser negadas por aplicações sucessivas de (3.2) e (3.3). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.62. Considere a seguinte proposição verdadeira

$$p: \text{Para todo número real } x, \text{ existe um real } y \text{ tal que } y^3 = x.$$

Em linguagem simbólica, temos

$$p: \forall x \in \mathbb{R},\, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y^3 = x.$$

A negação da proposição p é:

$$\begin{aligned} \sim (\forall x \in \mathbb{R},\, \exists y \in \mathbb{R}; y^3 = x) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \sim (\exists y \in \mathbb{R},\, y^3 = x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\, \forall y \in \mathbb{R}, \sim (y^3 = x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\, \forall y \in \mathbb{R}, y^3 \neq x. \end{aligned}$$

Assim, a negação de p é a seguinte proposição falsa:

$$\sim p: \text{ Existe um número real } x \text{ para o qual } y^3 \neq x \text{ para qualquer real } y.$$

Exemplo 3.63. Para negar a proposição

$$\forall x > 0,\, \forall z \leq 0 \text{ temos } xz \leq 0,$$

fazemos os seguintes passos

$$\begin{aligned} \sim (\forall x > 0,\, \forall z \leq 0, \text{ temos } xz \leq 0) &\Leftrightarrow \exists x > 0, \sim (\forall z \leq 0, \text{ temos } xz \leq 0) \\ &\Leftrightarrow \exists x > 0 \text{ e } \exists z \leq 0 \sim (\text{ temos } xz \leq 0) \\ &\Leftrightarrow \exists x > 0 \text{ e } \exists z \leq 0 \text{ tais que } \sim (xz \leq 0). \\ &\Leftrightarrow \exists x > 0 \text{ e } \exists z \leq 0 \text{ tais que } xz > 0). \end{aligned}$$

Logo o que fizemos foi mostrar que:

$$\begin{aligned} \sim (\text{ Para } x > 0 \text{ e } z \leq 0, \text{ temos } xz \leq 0) \quad \Leftrightarrow \quad & \text{existe } x > 0 \text{ e existe } z \leq 0 \\ & \text{tais que } xz > 0. \end{aligned}$$

Exemplo 3.64. A negação da proposição verdadeira

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \forall y \in \mathbb{R},\, x^2 + y^2 \geq 0$$

é:

$$\begin{aligned} \sim (\forall x \in \mathbb{R},\, \forall y \in \mathbb{R},\, x^2 + y^2 \geq 0) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \sim (x^2 + y^2 \geq 0) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\, x^2 + y^2 < 0. \end{aligned}$$

Esta última proposição diz:

$$\text{Existem números reais } x \text{ e } y \text{ tais que } x^2 + y^2 < 0,$$

que é uma proposição falsa.

3.4.3 Negação de uma Condicional

A negação de uma proposição condicional *Se* p, *então* q envolve a negação do quantificador universal, e é o mesmo que negar a frase *todo elemento que satisfaz a hipótese* p *cumpre a tese* q. Logo, a negação da proposição *Se* p, *então* q é: *existe um elemento que satisfaz a hipótese* p *e não cumpre a tese* q. Em forma simbólica:

$$\sim (p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q.$$

Exemplo 3.65. Um dos mais importantes e mais conhecidos úteis teoremas da geometria Euclideana plana é o "teorema de Pitágoras":

Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

A negação do teorema é:

Existe um triângulo retângulo cujo quadrado do comprimento da hipotenusa é diferente da soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Exemplo 3.66. Considere a proposição:

$$\text{Se } x \in \mathbb{R}. \text{ Tem-se : } x^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

A proposição também pode ser expressa como

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3},$$

cuja negação é:

$$\begin{aligned} \sim (\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \sim (x^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 3 \text{ e } \sim (-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 3 \text{ e } |x| \geq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

A última proposição diz:

$$\text{Existe } x \in \mathbb{R} \text{ de sorte que } x^2 < 3, \text{ mas } |x| \geq \sqrt{3}.$$

A seguir, colecionamos exemplos sobre a negação de algumas importantes definições matemáticas.

Exemplo 3.67. Negue, matematicamente, as seguintes definições.

(a) A função $f : A \to \mathbb{R}$ é injetiva quando para $x, y \in A$ ocorre

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

(b) Um conjunto D é denso em $\mathbb{R}$ quando

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \epsilon > 0, \exists d \in D, \text{ tal que } |x - d| < \epsilon.$$

Solução

(a) Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ deixa de ser injetiva quando existem $x_0, y_0 \in A$ para os quais $f(x_0) = f(y_0)$, mas $x_0 \neq y_0$.

(b) $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\exists \epsilon_0 > 0$ tais que $|x_0 - d| \geq \epsilon_0, \forall d \in D$.

Antes de apresentar o próximo exemplo, lembremos a definição de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$:

Para todo real $\epsilon > 0$ existe um número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ toda vez que $0 < |x - a| < \delta$.

Essa definição pode ser expressa em termos de quantificadores por:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \tag{3.5}$$

Exemplo 3.68. Negue a definição de limite anterior.

Solução: Para dizer que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não existe, basta dizer que, para todo L, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$. Usando (3.5), a expressão $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$ pode ser expressa por:

$$\sim (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Por sucessivas aplicações de (3.2) e (3.3), construímos esta sequência de proposições equivalentes:

$$\begin{aligned}
&\sim (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \\
&\qquad \Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 \sim (\exists \delta > 0, \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \\
&\qquad \Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0\, \forall \delta > 0 \sim (\forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \\
&\qquad \Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \sim (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \\
&\qquad \Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x,\ 0 < |x - a| < \delta \text{ e } |f(x) - L| \geq \epsilon.
\end{aligned}$$

Como a expressão "$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não existe" significa que para todo número real L, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$, essa pode ser expressa por:

$$\forall L\, \exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x,\ 0 < |x - a| < \delta \text{ e } |f(x) - L| \geq \epsilon.$$

Esta última proposição diz que para todo número real L existe um número real $\epsilon > 0$ tal que para cada número real $\delta > 0$, existe um número real x tal que $0 < |x - a| < \delta$ e $|f(x) - L| \geq \epsilon$.

4 Métodos de Demonstrações

Este capítulo apresenta alguns métodos de demonstração usados em matemática. Inicialmente, aborda-se o método de demonstração direta. Em seguida, o método de demonstração por absurdo. Finalmente, o método de demonstração por contrapositiva. Ao longo deste capítulo, encontra-se exemplos variados dos métodos de demonstração.

4.1 Demonstrações Diretas

A matemática é repleta de teoremas (corolários, lemas ou proposições), muitos deles escritos na forma implicativa ou condicional. Ao escrever um teorema na forma implicativa $p \Rightarrow q$ ou condicional *Se* p,*então* q, a proposição p chama-se hipótese do teorema e a proposição q chama-se tese do teorema.

Se quisermos demonstrar uma proposição $p \Rightarrow q$, usando a demonstração direta, supomos que a hipótese p é válida e, usando um processo lógico-dedutivo, devemos deduzir diretamente a tese q.

O exemplo a seguir é uma demonstração direta simples, que não requer argumentos e nem procedimentos muito elaborados.

Exemplo 4.1. Demonstre que cada número do conjunto $\{1, 7, 15, 31\}$ é da forma $2^n - 1$, para algum número natural n.

Solução: Observe-se que a proposição não está na forma implicativa ou condicional explícita. De maneira natural, é possível reescrever a proposição em uma forma condicional como:

$$\text{Se } x \in \{1, 7, 15, 31\}, \text{ então } x = 2^n - 1, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Diante desta última versão, temos:

$$\begin{aligned} \text{Hipótese}: &\quad x \in \{1, 7, 15, 31\}; \\ \text{Tese}: &\quad x = 2^n - 1, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ideia da demonstração. Uma maneira simples para provar esse resultado é escrever os números do conjunto $x \in \{1, 7, 15, 31\}$ na forma da tese $2^n - 1$. Para este fim não é necessário usar argumento especial algum, basta um simples raciocínio. Vejamos.

$$\begin{aligned} 1 &= 2^1 - 1; \\ 7 &= 2^3 - 1; \\ 15 &= 2^4 - 1; \\ 31 &= 2^5 - 1. \end{aligned}$$

Agora, podemos redigir a demonstração.

Demonstração. Cada número do conjunto $\{1, 7, 15, 31\}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} 1 &= 2^1 - 1; \\ 7 &= 2^3 - 1; \\ 15 &= 2^4 - 1; \\ 31 &= 2^5 - 1. \end{aligned}$$

Assim, o resultado se segue. $\square$

Os próximos exemplos de demonstrações diretas requerem apenas certos artifícios, entretanto, mais elaborados que o do exemplo anterior.

Para o exemplo a seguir, recorde que o conjunto dos números racionais pode ser representado na forma:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Exemplo 4.2. Demonstre que a soma de dois números racionais é um número racional.

Reescrevendo numa forma condicional explícita:

$$\text{Se } \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, \text{ com } q, s \neq 0, \text{ então } \frac{p}{q} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}.$$

Separando a hipótese e tese:

$$\begin{aligned} \text{Hipótese} &: \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, \text{ com } q, s \neq 0; \\ \text{Tese} &: \frac{p}{q} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, com $q, s \neq 0$. Ora, $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}$. Como $ps + qr$ e qs são números inteiros, por serem soma e produto de números inteiros e, como $qs \neq 0$, já que $q, s \neq 0$, a última igualdade implica $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Logo, se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Observe que toda a demonstração foi baseada na maneira de como representar um número racional qualquer.

Exemplo 4.3. Demonstrar que a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Podemos reescrever o exemplo numa forma condicional explícita:

> Se $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$, então $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

É fácil ver que:

$$\begin{aligned} \text{Hipótese} &: S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ é a soma dos n primeiros} \\ &\quad \text{termos da progressão aritmética } (a_1, a_2, a_3, ...); \\ \text{Tese} &: S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Pela propriedade comutativa da adição, podemos escrever a soma de trás para frente

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1.$$

Daí,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Observe que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parêntese são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \;\text{ e }\; S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

□

Antes de apresentar o próximo exemplo, precisamos lembrar os conceitos de injetividade e composição de funções. Para mais detalhes consulte [7].

- Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, a função composta de f e g (nessa ordem) é a função $g \circ f : X \to Z$, definida, para cada $x \in X$, por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

- Uma função $f : X \to Y$ é dita injetora, ou injetiva quando para $x, y \in X$ ocorre

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Exemplo 4.4. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções dadas. Então:

$$g, f \text{ injetoras } \Rightarrow g \circ f \text{ injetora }.$$

É fácil deduzir que:

$$\begin{aligned} \text{Hipótese}: &\quad \text{as funções injetoras } f : X \to Y \text{ e } g : Y \to Z; \\ \text{Tese}: &\quad g \circ f \text{ injetora }. \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que f e g são injetoras, e tome $x_1, x_2 \in X$ tais que

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2).$$

Utilizando sucessivamente as injetividades de g e f, temos

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)); \\ &\Rightarrow f(x_1) = f(x_2); \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

de modo que $g \circ f$ também é injetora. □

4.2 Demonstração por Absurdo

Para demonstrar uma proposição condicional *Se p, então q* por absurdo (ou por contradição), admite-se que p e $\sim q$ ocorram. Com essa suposição, deve-se deduzir uma proposição contraditória $(\sim r \wedge r) = C$, chamada absurdo ou contradição. A hipótese adicional $\sim q$, considerada nesse método, chama-se hipótese de absurdo ou hipótese de contradição.

Uma justificativa formal da demonstração por redução a um absurdo é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Sejam p e q duas proposições quaisquer e C uma contradição. Então,*

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \rightarrow C). \tag{4.1}$$

Demonstração. Analisando a Tabela 4.1, podemos observar que as duas condicionais possuem os mesmos valores lógicos. Portanto, concluímos a equivalência.

Tabela 4.1: Tabela verdade para $p \rightarrow q$ e $(p \wedge \sim q) \rightarrow C$

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	C	$(p \wedge \sim q) \rightarrow C$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V

□

Da equivalência (4.1), temos que para provar a validade da proposição $p \rightarrow q$, supõe-se que a hipótese p ocorra, mas que a tese q não ocorra, isto é, $p \wedge \sim q$ ocorre, ou seja, essa proposição é verdadeira. Partindo-se da ocorrência de $p \wedge \sim q$, deve-se deduzir uma proposição contraditória da forma C, que é falsa. Ora, mas não se pode deduzir uma proposição falsa, partindo-se de uma proposição verdadeira. Logo, nossa suposição inicial, $p \wedge \sim q$, não pode ocorrer, e do Exemplo 3.55, a proposição $\sim(p \rightarrow q)$ também não pode ocorrer. Por conseguinte, $p \rightarrow q$ deve ocorrer.

Observação 4.1. As mesmas ideias expostas acima se aplicam para uma proposição implicativa $p \Rightarrow q$.

Vejamos agora como se pode usar a demonstração por absurdo para provar vários resultados.

Exemplo 4.5. Dê uma demonstração por absurdo do teorema "Se $3n + 2$ é ímpar, então n é impar".

Solução: sejam

$$\begin{aligned} p &: \ 3n + 2 \text{ é ímpar;} \\ q &: \ n \text{ é impar;} \\ \sim q &: \ n \text{ é par.} \end{aligned}$$

Para demonstrar por absurdo, assumimos que ambas p e $\sim q$ são verdadeiras. Ou seja, assumimos que $3n + 2$ é ímpar e que n é par. Como n é par, existe um inteiro k, tal que $n = 2k$. Isso implica que $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$. Como $3n + 2$ é $2t$, em que $t = 3k + 1$, $3n + 2$ é par, o que contradiz a hipótese de $3n + 2$ ser ímpar. Isso completa a demonstração por contradição, demonstrando que se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Exemplo 4.6. Demonstre que se $\cos 2\theta$ for um número irracional, então $\cos\theta$ é irracional.

Solução: Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} p &: \ \cos 2\theta \text{ é irracional;} \\ q &: \ \cos\theta \text{ é irracional;} \\ \sim q &: \ \cos\theta \text{ é racional.} \end{aligned}$$

Suponha, por absurdo, que $\cos\theta$ é racional. Logo, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, com $\cos\theta = \frac{p}{q}$. Daí,

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1 = \frac{2p^2 - q^2}{q^2}. \tag{4.2}$$

Segue de (4.2) que $\cos 2\theta$ é racional, o que contradiz a hipótese de $\cos 2\theta$ ser irracional. Chegamos a um absurdo. Assim, $\cos\theta$ é irracional.

Exemplo 4.7. Sejam a e b números reais positivos. Se $a < b$, então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Solução: Aqui, temos:

$$\begin{aligned} p &: \ a \text{ e } b \text{ reais positivos com } a < b; \\ q &: \ \sqrt{a} < \sqrt{b}; \\ \sim q &: \ \sqrt{a} \geq \sqrt{b}. \end{aligned}$$

Sejam a e b reais positivos com $a < b$. Suponha que $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$. Daí, $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a} = \sqrt{b}$. Se $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, então $a > b$, a qual contradiz a hipótese de $a < b$. Por outro lado, se $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, então $a = b$, a qual também contradiz a hipótese de $a < b$. Portanto, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

A seguir, daremos um exemplo clássico do uso da demonstração por absurdo. O objetivo é provar a irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Para isso, precisamos provar o lema, a seguir, e o faremos usando o método de redução ao absurdo.

Lema 4.1. *Se $n \in \mathbb{N}$ e n^2 for divisível por dois (n^2 for par), então n é divisível por dois (n é par).*

No lema temos:

$$\begin{aligned} p &: \ n \in \mathbb{N} \text{ e } n^2 \text{ é divisível por 2;} \\ q &: \ n \text{ é divisível por 2;} \\ \sim q &: \ n \text{ não é divisível por 2, ou, equivalentemente, } n \text{ ímpar.} \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que n^2 seja divisível por 2. Suponha que n não seja divisível por 2, isto é, n seja ímpar. Logo n é da forma $n = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1$, onde $m = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. Portanto, n^2 é ímpar, o que contradiz a hipótese de n^2 ser divisível por 2. Chegamos a um absurdo. Isso implica no fato da negação da tese ser falsa, ou seja, n é divisível por 2, como queríamos demonstrar. $\square$

Agora passemos a provar a irracionalidade do $\sqrt{2}$, usando, mais uma vez, o método da redução ao absurdo.

Teorema 4.2. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Este teorema pode ser representado na seguinte forma condicional:
Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ e $x^2 = 2$ então $x \notin \mathbb{Q}$.
Temos:

$$\begin{aligned} p &: \quad x^2 = 2; \\ q &: \quad x \notin \mathbb{Q}; \\ \sim q &: \quad x \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que seja $x = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, com $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Podemos considerar, sem perda de generalidade, p e q primos entre si, ou seja, que não possuam divisores comuns, além da unidade. Da última igualdade temos $\frac{p^2}{q^2} = 2$, e daí

$$p^2 = 2q^2. \tag{4.3}$$

Como 2 divide o lado direito da igualdade (4.3), ele divide p^2, garantindo que p^2 é divisível por 2. Decorre do Lema 4.1, que p é divisível por 2 e, portanto, é da forma $p = 2k$, para algum número k inteiro. Substituindo p por $2k$ na igualdade (4.3) e fazendo a devida simplificação, encontramos $2k^2 = q^2$. Aplicando o mesmo raciocínio para essa última igualdade, se conclui que q é também divisível por 2, mas isso contradiz o fato de p e q serem primos entre si. Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Assim, nossa suposição inicial de que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ é falsa, ou seja, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

4.3 Demonstração por Contrapositiva

A implicação $\sim q \Rightarrow \sim p$ é chamada contrapositiva da implicação $p \Rightarrow q$. O teorema, a seguir, estabelece que a contrapositiva é um equivalente lógico da implicação original. Isto é, a contrapositiva de uma implicação nada mais é do que a mesma implicação dita em outas palavras.

Teorema 4.3. *Sejam p e q duas proposições quaisquer. Então vale a seguinte equivalência:*

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p). \tag{4.4}$$

Demonstração. Analisando a Tabela 4.2, podemos observar que as duas condicionais possuem os mesmos valores lógicos. Portanto, concluímos a equivalência.

Tabela 4.2: Tabela verdade para $p \Rightarrow q$ e $\sim q \Rightarrow \sim p$

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

□

Semelhantemente, definimos *Se* $\sim q$, *então* $\sim p$ como a contrapositiva da condicional *Se* p, *então* q.

O Teorema 4.3 também é válido para proposições condicionais, ou seja, vale a equivalência

$$(\text{ Se } p, \text{ então } q\ ) \Leftrightarrow (\text{ Se } \sim q, \text{ então } \sim p).$$

Pelo Teorema 4.3, a implicação $p \Rightarrow q$ será válida se, e somente se, sua contrapositiva $\sim q \Rightarrow \sim p$ for válida. Logo, se demonstrarmos $\sim q \Rightarrow \sim p$, temos assegurada a validade de $p \Rightarrow q$, e reciprocamente. O método de demonstração usando a contrapositiva baseia-se em demonstrar $\sim q \Rightarrow \sim p$ para assegurar a validade de $p \Rightarrow q$. O mesmo vale para proposições condicionais.

Antes de apresentar demonstrações por contrapositiva, daremos exemplos relacionados a determinação de contrapositivas.

Exemplo 4.8. Sendo U o conjunto dos quadriláteros convexos do plano, consideremos r a propriedade que tem um quadrilátero x de ser um retângulo e p a propriedade de ser um paralelogramo. Então $\sim p$ é a propriedade que tem um quadrilátero convexo de não ser um paralelogramo e $\sim r$ a de não ser um retângulo. Neste caso, as implicações $r \Rightarrow p$ e $\sim p \Rightarrow \sim r$ leem-se, respectivamente, assim:

Se x é um retângulo, então x é um paralelogramo;
Se x não é um paralelogramo, então x não é um retângulo.

Assim, as duas afirmações acima são equivalentes.

Exemplo 4.9. Observe as seguintes afirmações :

Todo número primo maior do que 2 é ímpar;
Todo número par maior do que 2 é composto.

Estas afirmações exprimem a mesma ideia, só que com diferentes termos. Podemos reescrevê-las na forma de implicações, aplicadas a $n \in \mathbb{N}$, vendo claramente que uma é a contrapositiva da outra:

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$: n primo$\Rightarrow$ n ímpar;
Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$: $\sim$ (n ímpar) $\Rightarrow$ $\sim$(n primo) ;
Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$: n par $\Rightarrow$ n composto.

Exemplo 4.10. Determine as contrapositivas das seguintes proposições. Empregue os mesmos modelos de apresentação para escrever cada contrapositiva.

(a) Se $xy = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

(b) $n \in \mathbb{Z}$; $-2 > n > -4 \Rightarrow n = -3$.

(c) A condição $xy > 0$ é suficiente para ($x > 0$ e $y > 0$) ou ($x < 0$ e $y < 0$).

(d) Se $x < y$ e $z < 0$, resulta em $xz > yz$.

(e) Uma condição necessária para que $a - \epsilon < b, \forall \epsilon > 0$, é que $a \leq b$.

(f) Se $\cos\theta$ for racional, então $\cos 3\theta$ é racional.

(g) Se $n \in \mathbb{Z}$ e $-3 \leq n \leq -5$, temos $n \in \{-3, -4, -5\}$.

Solução:

(a) Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então $xy \neq 0$.

(b) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -3 \Rightarrow n \leq 4$ ou $n \geq -2$.

(c) A condição ($x \leq 0$ ou $y \leq 0$) e ($x \geq 0$ ou $y \geq 0$) é suficiente para $xy \leq 0$.

(d) Se $xz \leq yz$, então $z \geq 0$ ou $x \geq y$.

(e) Uma condição necessária para que $a > b$ é que $\exists \epsilon > 0$ tal que $a - \epsilon \geq b$.

(f) Se $\cos 3\theta$ for irracional, então $\cos\theta$ é racional.

(g) Se $n \notin \{-3, -4, -5\}$, então $n \notin \mathbb{Z}$ ou $n < -3$ ou $n > -5$.

Exemplo 4.11. A definição de uma função injetora é formulada por uma proposição ou, às vezes pela contrapositiva dessa propoposição. Vejamos a formulação das duas definições.

(a) A função $f : A \to \mathbb{R}$ é injetiva quando para $x, y \in A$ ocorre

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

(b) A contrapositiva é: A função $f : A \to \mathbb{R}$ é injetiva quando para $x, y \in A$ ocorre

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Os exemplos a seguir mostram como utilizar o método de demonstração por contrapositiva.

Exemplo 4.12. Demonstra que se n é inteiro e $5n - 7$ é par, então n é ímpar.

Solução: Primeiro vamos tentar uma demonstração direta. Para isso, devemos assumir que $5n - 7$ é um número par. Isso significa que $5n - 7 = 2k$ para algum inteiro k. Daí, $n = (2k + 7)/5$. Essa última expressão para n não parece ter algum meio direto para concluir que n é ímpar. Vamos tentar uma demonstração por contrapositiva. Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} p &: \ 5n - 7 \text{ é par;} \\ q &: \ n \text{ é ímpar;} \\ \sim p &: \ 5n - 7 \text{ é ímpar;} \\ \sim q &: \ n \text{ é par.} \end{aligned}$$

A contrapositva da condicional é:

Se n é inteiro e n é par, então $5n - 7$ é ímpar.

A demonstração por contrapositiva é como segue: Suponha que n é par. Logo n é da forma $n = 2k$, para algum k inteiro. Daí,

$$5n - 7 = 5(2k) - 7 = 10k - 7 = 2(5k - 4) + 1.$$

Desde que $(5k - 4) \in \mathbb{Z}$, o inteiro $5n - 7$ é ímpar. Assim, demonstramos que se n é inteiro e $5n - 7$ é par, então n é ímpar.

Exemplo 4.13. Demonstre que se $x, y \in \mathbb{R}$ e $y^3 + xy^2 \leq x^3 + xy^2$, então $y \leq x$.

Solução Temos:

$$\begin{aligned} p &: \ y^3 + xy^2 \leq x^3 + xy^2; \\ q &: \ y \leq x; \\ \sim p &: \ y^3 + xy^2 > x^3 + xy^2; \\ \sim q &: \ y > x. \end{aligned}$$

Neste caso a contrapositva da condicional é:

$$\text{Se } x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y > x, \text{ então } y^3 + xy^2 > x^3 + xy^2 \ .$$

Suponha $x, y \in \mathbb{R}$ com $y > x$. Então $y - x > 0$. Multiplicando ambos os lados de $y - x > 0$ pela expressão $x^2 + y^2$, temos

$$\begin{aligned} (y - x)(x^2 + y^2) &> 0(x^2 + y^2) \\ yx^2 + y^3 - x^3 - xy^2 &> 0 \\ y^3 + yx^2 &> x^3 + xy^2. \end{aligned}$$

Portanto, $y^3 + yx^2 > x^3 + xy^2$.

Para o próximo exemplo, precisamos lembrar a definição de função crescente.

- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente se, para todos $x_1 < x_2$ em $\mathbb{R}$ tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.
- A negação dessa definição é: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deixa de ser crescente se existem reais x_1, x_2 com $x_1 < x_2$ tais que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Exemplo 4.14. Demonstre que se a função $y = f(x) = ax + b$ é crescente em $\mathbb{R}$, então $a > 0$.

Solução Temos:

$$\begin{aligned} p &: \ y = f(x) = ax + b \text{ é crescente em } \mathbb{R}; \\ q &: \ a > 0; \\ \sim p &: \ y = f(x) = ax + b \text{ deixa de ser crescente em } \mathbb{R}; \\ \sim q &: \ a \leq 0. \end{aligned}$$

Neste caso a contrapositva da condicional é:

$$\text{Se } a \leq 0, \text{ então a função } y = f(x) = ax + b \text{ deixa de ser crescente em } \mathbb{R}.$$

Suponha $a \leq 0$. Tomando $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$, obtemos $x_1 < x_2$. Como $a \leq 0$, então $ax_1 = 3a \geq 5a = ax_2$, de maneira que $3a + b \geq 5a + b$, isto é, $f(3) \geq f(5)$. Portanto, temos a existência de reais x_1 e x_2 com $x_1 < x_2$ tais que $f(x_1) \geq f(x_2)$, provando que $y = ax + b$ deixa de ser crescente em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.15. Demonstre que se $|a| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$, então $a = 0$.

Solução Temos:

$$\begin{aligned} p &: |a| < \epsilon, \forall\, \epsilon > 0; \\ q &: a = 0; \\ \sim p &: \exists\, \epsilon_0 > 0; |a| \geq \epsilon_0; \\ \sim q &: a \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, a contrapositiva da condicional é:

Se $a \neq 0$, então existe um número $\epsilon_0 > 0$, tal que $|a| \geq \epsilon_0$.

Suponha $a \neq 0$. Podemos considerar $\epsilon_0 = \frac{|a|}{2}$, que temos $|a| \geq \epsilon_0$. Assim, $\exists\, \epsilon_0 > 0$ tal que $|a| \geq \epsilon_0$.

O resultado que acabamos de demonstrar é muito usado na teoria de limites para demonstrações de unicidade.

5 Aplicações

Neste capítulo apresenta-se algumas aplicações simples, fora da lógica matemática, seguindo [5], [8], [9] e [10].

5.1 Conjunção e conta bancária

O pai de Adriana resolveu presenteá-la, no dia de seu aniversário, abrindo uma conta bancária conjunta. Para evitar, entretanto, que Adriana exagerasse nos seus gastos, ele abriu uma conta conjunta vinculada, ou seja, os cheques deveriam ser assinados por Adriana e seu pai.

Adriana, entretanto, era uma adolescente que vivia no mundo da lua e não entendeu a explicação de seu pai. Feliz, foi ao banco retirar uma quantia em dinheiro, achando que, para isto, bastaria sua assinatura na folhinha do cheque. O gerente do banco, entretanto, não descontou o cheque, alegando o seguinte:

- Adriana, infelizmente, este cheque não pode ser descontado, porque só tem a sua assinatura. O contrato assinado entre seu pai e o banco reza que só posso descontar os cheques assinados por Adriana e seu pai.

Do texto:

(a) Traduzir para a linguagem simbólica a seguinte proposição "O cheque foi assinado por Adriana e seu pai".

(b) Construa a tabela-verdade do item anterior e diga em qual das situações Adriana se encontra.

(c) Responda se o gerente está certo em não descontar o cheque.

Solução:

(a) Considere as proposições simples

$$\begin{aligned} p &: \text{ O cheque foi assinado por Adriana.} \\ q &: \text{ O cheque foi assinado por seu pai.} \end{aligned}$$

Assim, $p \wedge q$ representa a proposição "O cheque foi assinado por Adriana e seu pai"

(b) A tabela-verdade da proposição $p \wedge q$ é dada por:

	p	q	$p \wedge q$
1.	V	V	V
2.	V	F	F
3.	F	V	F
4.	F	F	F

Da tabela pode-se ver que Adriana se encontra na situação 2, ou seja, é verdade que assinou o cheque, mas que é falso que seu pai o assinou. Assim, $p \wedge q$ é F, ou seja, é falso a conjunção "O cheque foi assinado por Adriana e seu pai"

(c) O contrato assinado pelo pai e o banco reza que "Só serão descontados cheques assinados por Adriana e seu pai", ou seja, o gerente quer que a conjunção $p \wedge q$ seja verdadeira (situação 1 na tabela). No entanto, o gerente está certo ao não descontar o cheque assinado apenas por Adriana.

5.2 Disjunção e conta bancária

Adriana chegou em casa e, aos prantos, contou ao seu pai o que havia acontecido no banco. O pai de Adriana ficou bastante comovido e disse a ela:

– Minha filha, eu te proponho uma coisa. Estabeleceremos um limite máximo de dinheiro que você poderá gastar; você promete que não vai exceder este limite, e eu farei uma alteração em nossa conta, transformando-a em conta conjunta não vinculada, certo?

– Assim é melhor, pai.

O pai de Adriana, que sabia que ela tinha um bom caráter, foi então ao banco alterar o contrato de modo que os cheques pudessem ser assinados por Adriana ou seu pai.

Dois dias depois de entrar em vigor o novo contrato, Adriana foi ao banco sacar uma pequena quantia em dinheiro, apenas com sua assinatura no cheque.

Do texto:

(a) Traduzir para a linguagem simbólica a seguinte proposição "O cheque foi assinado por Adriana ou seu pai".

(b) Construa a tabela-verdade do item anterior e diga em qual das situações Adriana se encontra.

(c) O gerente deve ou não descontar o cheque de Adriana.

Solução:

(a) Sejam as proposições simples

$$p: \text{ O cheque foi assinado por Adriana.}$$
$$q: \text{ O cheque foi assinado por seu pai.}$$

Logo, $p \vee q$ representa a proposição "O cheque foi assinado por Adriana ou seu pai"

(b) A tabela-verdade da disjunção $p \vee q$ é dada por:

	p	q	$p \vee q$
1.	V	V	V
2.	V	F	V
3.	F	V	V
4.	F	F	F

A tabela acima mostra que Adriana se encontra na situação da linha 2 em que p é V, ou seja, é V que Adriana assinou o cheque, e q é F, no caso, é F que o cheque foi assinado pelo seu pai. Em tal situação a proposição $p \vee q$ é verdadeira.

(c) Desde que $p \vee q$ é verdadeiro, o gerente deve descontar o cheque de Adriana. Note-se que agora o contrato reza que "Só serão descontados cheques assinados por Adriana ou seu pai".

5.3 Aladim e o condicional

Aladim estava apaixonado pela princesa Dona Lua das Luas, a filha do sultão. Fez da sua mãe a mensageira e enviou a este um presente riquíssimo: pedras preciosas nunca vistas por nenhum homem e que foram retiradas do esconderijo da lâmpada encantada. A mãe de Aladim explicou ao sultão o motivo daquela oferenda. O sultão, maravilhado com aquele divino presente, prometeu a mão da princesa ao jovem Aladim, mas o Grão-Vizir, movido pela inveja, já que planejava o casamento da Princesa Lua das Luas com seu filho, impôs uma condição para que a promessa pudesse ser realizada, com o que o sultão concordou. E disse o sultão à mãe de Aladim:

– Vai dizer ao teu filho que sou fiel ao compromisso que assumi perante ele por teu intermédio, mas com uma condição: que ele faça chegar a mim o dote que exijo dele. Quero, portanto, para esse dote, quarenta taças de ouro puro repletas de todas as variedades das pedras preciosas que tu já me entregaste. Será preciso, além disso, que estas taças sejam carregadas por quarenta virgens acompanhadas de quarenta servos varões.

Após proferir estas palavras, o sultão sintetizou sua condição:

– Se teu filho ser exato para atender a essa exigência, terá a minha filha.

A mãe retornou para casa muito aflita, pois temia que seu filho, que estava tomado de grande paixão pela princesa, não pudesse cumprir esta condição. Considerou que talvez as pedras e mesmo as taças poderiam ser obtidas, se Aladim retornasse ao esconderijo da lâmpada, mas como poderia o filho conseguir as quarenta virgens e os quarenta varões? Tomada por tais preocupações, a mãe comunicou ao filho a condição do sultão, mas Aladim tranquilizou-a raciocinando do seguinte modo:

– Minha querida mãe, por que te preocupas à toa? Esqueceste que a lâmpada encantada está em meu poder? Basta que eu chame o Djim, o gênio da minha lâmpada encantada, para que eu tenha à minha frente as quarenta taças, seu conteúdo e os entregadores, tal qual o sultão condicionou.

– Mas – disse a mãe – se você não puder atender as condições exatamente como o Sultão quer?

– A Princesa Lua das Luas ainda poderá ser minha. O que o sultão disse é que, se eu cumprisse as condições tal e qual ele declarou e especificou, eu teria a Dona Lua das

Luas. Mas ele não disse que esta é a única maneira de tê-la. Mesmo que eu não consiga mais entrar no esconderijo da lâmpada, eu ainda poderia desposá-la. As possibilidades soam infinitas e meu gênio sempre poderá ajudar-me neste empreendimento.

Do texto anterior:

(a) Suponha que Aladim tenha se casado com a Princesa Lua das Luas. Isto significa que necessariamente Aladim cumpriu a condição imposta pelo sultão? Justifique sua resposta.

(b) Suponha que Aladim tenha cumprido as condições exigidas pelo sultão. Sendo assim, ele necessariamente casou com a princesa? Justifique sua resposta.

(c) Suponha que Aladim não cumpriu as exigências feitas pelo sultão. Sendo assim, o que podemos dizer sobre o casamento de Aladim com a princesa? Justifique.

Solução: Primeiramente vamos refletir sobre a fala de Aladim "...O que o sultão disse é que, se eu cumprisse as condições tal e qual ele declarou e especificou, eu teria a Dona Lua das Luas".

Consideremos as proposições simples:

$$\begin{aligned} p &: \text{ Aladim cumpre as exigências.} \\ q &: \text{ Aladim casa-se com a princesa.} \end{aligned}$$

Podemos então reescrever logicamente a fala de Aladim como:

$$p \rightarrow q$$

Por hipótese teremos essa premissa como sendo verdadeira. Sua tabela verdade será:

	p	q	$p \rightarrow q$
1.	V	V	V
2.	V	F	F
3.	F	V	V
4.	F	F	V

(a) Supondo que $p \rightarrow q$ é V e q é V, pela tabela verdade acima p pode ser verdadeira (linha 1) ou pode ser falsa (linha 3). Logo não há como saber se Aladim cumpriu as exigências do sultão.

(b) Suponhamos que $p \rightarrow q$ é V e p é V, pela tabela verdade q é V (linha 1), assim sendo ele casou-se com a princesa.

(c) Supondo que $p \rightarrow q$ é V e p é F, pela tabela verdade temos que q pode ser verdadeira (linha 3) ou também pode ser falsa (linha 4), assim sendo não é possível concluir se Aladim casou-se ou não com a princesa.

5.4 Aladim e o bicondicional

Muito antes do episódio anteriormente narrado, Aladim viu-se às voltas com a mais inusitada das aventuras. Um falso tio, verdadeiramente o Grande Mago do Poente, conduziu o jovem herói para além das cercanias da cidade com o falso pretexto de mostra-lhe um exuberante jardim. Depois de muito caminharem, chegaram ao sopé de uma montanha onde o falso tio revelou sua verdadeira identidade, a de Mago das Terras do Poente. Dispôs seus objetos de magia, fez invocações, produziu um espetáculo pirotécnico e disse alguns abracadabras, fazendo com que a terra finalmente se abrisse aos seus pés. Ao fundo, surgiu uma laje de mármore e sobre ela um anel que brilhava entre a areia que ainda cobria alguns pontos da laje. Depois de acalmar o espanto de Aladim com promessas de imensurável riqueza, o mago dirigiu-lhe estas palavras:

– Aqui se encontra um tesouro marcado com teu nome. E tu, que querias te afastar dele com toda a velocidade de tuas pernas! Mas agora presta bem atenção. Lembra-te bem de como abri o solo com a ajuda de meus feitiços e de minhas evocações e fica sabendo que esta laje que estamos vendo indica onde se encontra o tesouro de que te falei. Precisas pegar o anel e levantar a laje, pois ninguém entre os humanos pode fazê-lo além de ti. Assim, também és o único a poder pisar na via subterrânea que leva ao tesouro secreto, pois ele está guardado sob o signo de teu nome.

O pobre Aladim, para recompor-se do assombro que tamanha novidade lhe causara, sintetizou assim tudo o que o mago lhe dissera:

1. A laje sairá do lugar, se, e somente se, eu tocá-la.
2. O mago porá suas mãos no tesouro, se, e somente se, eu entrar no esconderijo secreto.

Ao raciocinar assim, imediatamente deu-se conta do motivo pelo qual o falso tio tão bem o tratara. Deu-se conta de por que o mago lhe comprara roupas novas, por que o levara aos banhos públicos, lhe pagara refrescos e boa comida. Deu-se conta de por que o mago dera dez moedas de ouro para sua mãe e por que derramara tantas falsas lágrimas pelo pai morto de Aladim. É que ele, Aladim, era um predestinado. Somente ele e nenhum outro mortal poderia levantar aquela imensa laje e retirar das galerias o tesouro que guardava.

Era uma dupla condição. Se Aladim colocasse o anel e tocasse a laje, ela sairia do lugar. E a laje só sairia do lugar se Aladim colocasse o anel e nela tocasse. Satisfeito com este pensamento, Aladim sentiu-se mais seguro contra o grande e temível Mago de Poente, pois sabendo que este desejava ardentemente o tesouro, nada demais e de mal poderia, por enquanto, fazer-lhe.

Do texto anterior considere a expressão "O tesouro será resgatado, se, e somente se, Aladim levantar a laje".

(a) Construa a tabela de verdade e, a partir dela, diga se algum outro mortal poderá resgatar o tesouro. Justifique.

(b) Se o bicondicional for verdadeiro, e Aladim não levantar a laje, o tesouro poderá ser resgatado? Justifique.

(c) Se o bicondicional for verdadeiro, e o tesouro for resgatado, podemos saber quem levantou a laje? Justifique.

Solução: Dada a expressão (proposição composta) "O tesouro será resgatado, se, e somente se, Aladim levantar a laje", vamos fragmentá-la em:

p : O tesouro será resgatado.

q : Aladim levantar a laje.

A proposição dada é uma bicondicional, sendo assim pode ser representada por $p \leftrightarrow q$.

(a) A tabela-verdade de $p \leftrightarrow q$ é:

	p	q	$p \leftrightarrow q$
1.	V	V	V
2.	V	F	F
3.	F	V	F
4.	F	F	V

Se p é V (o enunciado "O tesouro será resgatado" é verdaddeiro) e se q é F (o enunciado "Aladim levanta a laje" é falso), então o bicondicional $p \leftrightarrow q$ é F. Portanto, somente Aladim pode resgatar o tesouro.

(b) Se $p \leftrightarrow q$ é V e q é F, necessariamente devemos ter pela tabela-verdade que p é F (linha 4), assim sendo conclui-se que o tesouro não poderá ser resgatado.

(c) Se $p \leftrightarrow q$ é V e p é V, necessariamente devemos ter pela tabela-verdade que q é V (linha 1), assim sendo conclui-se que Aladim levantou a laje.

5.5 Sistemas de Especificações

Na atividade de especificações de sistemas de hardware ou software é muito importante a tradução de sentenças da linguagem natural para proposições lógicas. Esse processo produz especificações precisas e sem ambiguidades. Os exemplos a seguir mostram como proposições compostas podem ser usadas nesse processo.

Exemplo 5.1. Expresse as seguintes especificações usando conectivos lógicos.

(a) "A mensagem é verificada contra vírus sempre que a mensagem é enviada de um sistema desconhecido".

(b) "A mensagem foi enviada de um sistema desconhecido, mas não foi verificada contra vírus".

(c) "É necessário verificar a mensagem contra vírus sempre que ela for enviada de um sistema desconhecido".

(d) "Quando a mensagem não é enviada de um sistema desconhecido, não é verificada contra vírus".

Solução: Sejam p e q a representação das seguintes proposições:

p : A mensagem é verificada contra vírus.

q : A mensagem é enviada de um sistema desconhecido.

Então, as representações lógicas das especificações são:

(a) $q \rightarrow p$

(b) $q \wedge \sim p$

(c) $q \to p$

(d) $\sim q \to \sim p$

Sistemas de especificações devem ser consistentes, ou seja, não podem conter especificações conflitantes que possam ser usadas para derivar uma contradição. Quando as especificações não são consistentes, pode não haver um meio de desenvolver um sistema que satisfaça todas as especificações.

Exemplo 5.2. Determine se o seguinte sistema de especificações é consistente: "O roteador pode mandar pacotes para o sistema principal apenas se ele suportar um novo espaço de endereço. Para o roteador suportar o novo espaço de endereço, é necessário que a última liberação do software seja instalada. O roteador pode mandar pacotes ao sistema principal se a última liberação de software estiver instalada. O roteador não comporta o novo espaço."

Para determinar se esse sistema é consistente, vamos reescrevê-lo como expressões lógicas. Sejam as proposições

p : O roteador manda pacotes para o sistema principal

q : O roteador suporta um novo espaço de endereço

r : A última liberação de software é instalada

Logo, a especificação acima pode ser traduzida como:

(a) $p \to q$

(b) $q \to r$

(c) $r \to p$

(d) $\sim q$

Uma valoração que torna as quatro especificações verdadeiras deve ter q falsa para que $\sim q$ seja verdadeira. Como queremos que $p \to q$ seja verdadeira e temos q falsa, devemos ter p falsa. Analogamente, como queremos que $r \to p$ seja verdadeira e dado que p é falsa, então r é falsa. Finalmente como $q \to r$ é verdadeira quando q e r são falsos, concluímos que essas especificações são consistentes porque são verdadeiras quando p, q e r são falsas.

Outra forma de verificar a consistência das quatro especificações é analisando as tabela-verdade e examinando as oito possibilidades de valores-verdade para p, q e r.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$r \to p$	$\sim q$
V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Pela tabela acima, quando as três proposições são falsas, as quatro especificações são verdadeiras. Dessa forma, vemos que elas são consistentes.

5.6 Quebra-cabeças lógicos

Exemplo 5.3. Uma ilha contém dois tipos de habitantes: cavaleiros, que sempre falam a verdade, e bandidos, que sempre mentem. Você encontra duas pessoas, A e B. Determine, se possível, quem são A e B se eles conduzirem você nos caminhos descritos. Se não puder determinar quem são essas duas pessoas, você pode tirar alguma conclusão?

(a) A diz: "Ao menos um de nós é um bandido" e B não diz nada.

(b) A diz: "Eu sou um bandido ou B é um cavaleiro" e B não diz nada.

Solução:

(a) Primeiro, vamos considerar a possibilidade de A ser bandido; ou seja, a proposição "Ao menos um de nós é um bandido" é falsa. Se isso ocorre, então A está falando mentira, o que implica que A e B são cavaleiros o que é impossível, pois A é bandido. Então, devemos pensar que A é um cavaleiro, logo está falando a verdade, e, portanto, B é bandido. Assim, A é um cavaleiro e B é um bandido.

(b) Suponha que A é bandido. Então a proposição "Eu sou um bandido ou B é um cavaleiro" é falsa, o que significa isso? Significa que A é cavaleiro e B é bandido. Porém, é absurdo que A seja cavaleiro e bandido ao mesmo tempo. Logo, devemos supor que A é cavaleiro. Se isso ocorre, então a proposição "Eu sou um bandido ou B é um cavaleiro" é verdadeira. Desde que a proposição "Eu sou um bandido" é falsa, então a proposição "B é um cavaleiro" é verdadeira. Assim, A e B são ambos cavaleiros.

Exemplo 5.4. Existem dois gêmeos idênticos e o nome de um deles é João. Um deles sempre mente, e o outro sempre diz a verdade. Suponha que você encontre os dois irmãos e queira descobrir qual deles é João. Você só pode fazer uma pergunta a um deles, e a pergunta tem que ser respondida por sim ou não. Além disso, a pergunta não pode ter mais de três palavras. O que você perguntaria?

Solução: Para descobrir qual dos irmãos é João, pergunte a um deles: "João é verdadeiro?". Se ele responder "sim", deverá ser João, independentemente de estar mentindo ou dizendo a verdade. Se disser "não", João será o outro. Isso pode ser demonstrado considerando dois casos: o caso de a resposta ser "sim" e o caso de a resposta ser "não".

(a) **Caso de a resposta ser "sim"** Se ele responder "sim", estará afirmando que João diz a verdade. Se essa afirmação for verdadeira, João será realmente o que diz a verdade e, como o falante está sendo verdadeiro, ele deve ser João. Se sua afirmação for mentirosa, João não será realmente verdadeiro; nesse caso, João mentirá como o falante, no qual , mais uma vez, o falante deverá ser João. Isso prova que, independentemente de o falante dizer a verdade ou mentir, ele deve ser João.

Tabela 5.1: Caso resposta "sim"

Gêmeo	**João é verdadeiro?**	**Afirmação**	**Quem é João?**
Fala verdade	sim	João é verdadeiro	este falante é João
Fala mentira	sim	João mente	este falante é João

(b) **Caso de a resposta ser "não"** Se ele responder "não", estará afirmando que João não é verdadeiro. Se essa afirmação for verdadeira, João será mentiroso; se a afirmação for mentirosa, João será verdadeiro. Em qualquer dos casos, o falante não é como João, portanto, deve ser o irmão de João. Assim, a resposta "não" indica que o falante não é João.

Tabela 5.2: Caso resposta "não"

Gêmeo	**João é verdadeiro?**	**Afirmação**	**Quem é João?**
Fala verdade	não	João é mentiroso	este falante não é João
Fala mentira	não	João é verdadeiro	este falante não é João

5.7 Lógica e Operações Bit

Toda informação inserida no computador é processada internamente através de bits. Um bit é a unidade básica que os computadores e sistemas digitais utilizam para trabalhar, ele pode assumir dois valores possíveis, 0 ou 1. Um bit pode ser usado para representar um valor de verdade. Como é costumeiramente feito, 1 representa V e 0 representa F.

Uma operação bit (ou operação binária) é um computo que corresponde aos conectivos lógicos, trocando verdadeiro por 1 e falso por 0 nas tabelas-verdade dos operadores $\wedge$, $\vee$ e $\oplus$. A próxima tabela mostra as operações binárias obtidas.

Tabela 5.3: Operações binárias

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

Também é costume usar a notação AND (E), OR (OU) e XOR (OU-exclusivo) para os conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\oplus$, como em algumas linguagens computacionais.

Informações são frequentemente representadas usando sequências binarias, que são sequências de zeros e uns. Por exemplo, o ASCII é o sistema de representação de caracteres mais conhecido. Nesse sistema, os caracteres P e R são representados pelas sequências 01010000 e 01010010 respectivamente. Para manipular essas informações é frequente o uso de operações nas sequências binárias.

Definição 5.1. *Uma sequência binária é uma sequência de zero ou mais bits. O comprimento dessa sequência é o número de bits que ela contém.*

Exemplo 5.5. 00010001 e 11000 são sequências binárias de comprimento oito e cinco respectivamente.

Definição 5.2. *A sequência binária tipo OU, a sequência binária tipo E e a sequência binária tipo OU-exclusivo de duas sequências binárias de mesmo comprimento é aquela que tem como seus bits os bits correspondentes ao OU, E e OU-exclusivo para os respectivos dígitos das sequências originais.*

Exemplo 5.6. As sequências binárias tipo OU, tipo E e tipo OU-exclusivo das sequências 1000110101 e 0110011011 são dadas por

	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
OU	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
E	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
OU-exclusivo	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0

Usaremos os símbolos dos operadores $\wedge$, $\vee$ e $\oplus$ para representar as sequências binárias tipo OU, tipo E e tipo OU-exclusivo, respectivamente

Exemplo 5.7. Dê os valores de cada uma destas expressões.

(a) $11000 \wedge (01011 \vee 11011)$

(b) $(01010 \oplus 11011) \oplus 01000)$

Solução: Os valores das expressões são:

(a)

$$\begin{aligned} 11000 \wedge (01011 \vee 11011) &= 11000 \wedge 11011 \\ &= 11000 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (01010 \oplus 11011) \oplus 01000 &= 10001 \oplus 01000 \\ &= 11001 \end{aligned}$$

6 Considerações Finais

Neste trabalho apresentou-se um estudo introdutório à lógica matemática.

Mostrou-se como a lógica matemática pode ser utilizada para formalizar a matemática, tornando-a mais precisa e rigorosa.

Foram apresentadas aplicações ligadas às demonstrações matemáticas bem como a situações do cotidiano.

Referências

[1] COPI, I. *Introdução à Lógica*. 2. ed. São Paulo: Ed. Mestre Jou, 1978.

[2] FILHO, E. de A. *Iniciação à lógica matemática*. 1. ed. São Paulo: Nobel, 2017.

[3] FAJARDO, R. A. dos S. *Lógica Matemática*. São Paulo: Edusp, 2017.

[4] FILHO, D. C. de M. *Um convite à Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[5] ROSEN, K. H. *Matemática discreta e suas aplicações*. São Paulo: Grupo A Educação, 2009.

[6] SÁ, C. C. de; ROCHA, J. *Treze viagens pelo mundo da matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[7] NETO, A. C. M. *Fundamentos de cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[8] FOSSA, J. A. *Introdução ás técnicas de demonstração na matemática*. São Paulo: Livraria da Fisica, 2009.

[9] NAHRA, C.; WEBER, I. H. *Através da lógica*. Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

[10] SMULLYAN, R. *Alice no País dos Enigmas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2000.