



UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS - UFGD  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

CHRYSYTIAN VIEIRA DE OLIVEIRA

**RESOLVENDO PROBLEMAS DO ENSINO BÁSICO  
USANDO TEORIA DOS GRAFOS**

Dourados - MS  
2021

CHRYSSTIAN VIEIRA DE OLIVEIRA

**RESOLVENDO PROBLEMAS DO ENSINO BÁSICO  
USANDO TEORIA DOS GRAFOS**

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Orientador: PROF. DR. ROGÉRIO DE OLIVEIRA

Dourados - MS  
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

O48r Oliveira, Chrystian Vieira De  
Resolvendo problemas do ensino básico usando teoria dos grafos [recurso eletrônico] /  
Chrystian Vieira De Oliveira. -- 2021.  
Arquivo em formato pdf.

Orientador: Rogério de Oliveira.  
Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal da Grande Dourados,  
2021.  
Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:  
<https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio>

1. Grafos. 2. Coloração de Grafos. 3. Grafos Planares. 4. Ensino de Grafos. I. Oliveira,  
Rogério De. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

©Direitos reservados. Permitido a reprodução parcial desde que citada a fonte.



### Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: "**RESOLVENDO PROBLEMAS DO ENSINO BÁSICO USANDO TEORIA DOS GRAFOS**", de autoria de **Chrystian Vieira de Oliveira**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

---

Prof. Dr. Rogério de Oliveira (Orientador-UFGD)  
Presidente da Banca Examinadora

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Irene Magalhães Craveiro  
Membro Examinador (UFGD)

---

Prof. Dr. Vando Narciso  
Membro Examinador Externo (UEMS)

Dourados/MS, 15 de março de 2021

## RESUMO

Teoria dos grafos é um assunto relativamente novo na matemática, porém com inúmeras aplicações. Neste trabalho trazemos algumas definições sobre teoria de grafos, classificamos os principais tipos de grafos, tratamos de grafos planares e coloração de grafos. A abordagem é feita de modo a introduzir um pouco da teoria e mostrar alguns aspectos interessantes, apresentando exemplos e problemas que possam ser usados no ensino básico.

**Palavras chave:** Grafos; Coloração de Grafos; Grafos Planares; Ensino de Grafos.

## **ABSTRACT**

Graph theory is a relatively new subject in mathematics, but it has countless applications. In this work, we present some definitions about graph theory, classify the main types of graphs, discuss planar graphs and graph coloring. The approach is done in such a way as to present some introduction on the theory and to show some interesting aspects, presenting examples and problems that can be used in basic education.

**Key-words:** Graphs; Graph Coloring; Planar Graphs; Graph Teaching.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Problema das três casas.....	11
Figura 2 - Grafo .....	12
Figura 3 - Grafo com laço e arestas múltiplas .....	12
Figura 4 - Subgrafos.....	13
Figura 5 - Grafo completo $K_5$ .....	14
Figura 6 - Grafo 3-regular.....	14
Figura 7 - Ciclo $C_6$ .....	14
Figura 8 - Caminho $P_5$ .....	15
Figura 9 - Árvore .....	15
Figura 10 - Árvore T .....	16
Figura 11 - Grafo T-m.....	16
Figura 12 - Grafo Bipartido .....	17
Figura 13 - Grafos Isomorfos.....	18
Figura 14 - Grafos que não são isomorfos .....	18
Figura 15 - Grafo G .....	19
Figura 16 - Grafo H .....	20
Figura 17 - Subgrafo de H.....	21
Figura 18 - Grafo $P_7$ .....	21
Figura 19 - Grafo $K_6$ .....	22
Figura 20 - Grafo $C_8$ .....	22
Figura 21 - Grafo $K_{2,4}$ .....	22
Figura 22 - Coloração de um grafo bipartido .....	24
Figura 23 - Grafo dos Exames .....	25
Figura 24 - Grafos planares.....	26
Figura 25 - Faces do grafo .....	26
Figura 26 - Grafo $K_5$ .....	27
Figura 27 - Grafo $K_{2,3}$ .....	28
Figura 28 - Grafos Homeomorfos.....	29
Figura 29 - Mapa .....	30
Figura 30 - Grafo dual .....	30
Figura 31 - Grafo do Exemplo 1 .....	31
Figura 32 - Grafo do Exemplo 2 .....	31

Figura 33 - Grafo do Exemplo 3 .....	32
Figura 34 - Grafo do Exemplo 4 .....	32
Figura 35 - Grafo G .....	33
Figura 36 - Representação planar do grafo G .....	33
Figura 37 - Grafo H .....	33
Figura 38 - Representação planar do grafo H .....	34
Figura 39 - Grafo $K_6$ .....	34
Figura 40 - Grafo 3,4 .....	35
Figura 41 - Tabuleiro .....	36
Figura 42 - Casas do tabuleiro .....	36
Figura 43 - Grafo dos movimentos do cavalo .....	37
Figura 44 - Ciclo $C_{12}$ : movimento do cavalo .....	38
Figura 45 - Grafo do viajante .....	38
Figura 46 - Grafo G .....	41
Figura 47 - Grafo complementar do grafo G .....	41
Figura 48 - Grafo desconexo .....	42
Figura 49 - Grafo bipartido completo $K_{3,7}$ .....	42



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>GRAFOS .....</b>	<b>11</b>
2.1	Tipos de Grafos .....	13
2.2	Isomorfismo .....	17
2.3	Exemplos.....	19
<b>3</b>	<b>COLORAÇÃO .....</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>PLANARIDADE.....</b>	<b>26</b>
4.1	Exemplos .....	30
<b>5</b>	<b>EXERCÍCIOS RESOLVIDOS .....</b>	<b>36</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>43</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>44</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No século XVIII o grande matemático suíço Leonhard Euler formulou e resolveu o primeiro problema do que hoje conhecemos como teoria dos grafos. O problema das sete pontes de Königsberg era uma charada matemática onde se perguntava se haveria um trajeto onde cada ponte seria atravessada exatamente uma vez.

Segundo Boaventura (2006), pela falta de aplicações práticas e pela fantástica produção científica de Euler, a solução do problema foi um caso isolado e sem importância para a época. Somente no século XX, com o advento da computação houve considerável desenvolvimento da teoria e de aplicações, inicialmente relacionadas a problemas de otimização computacional. Em seguida, as aplicações da teoria de grafos foram estendidas aos mais diversos campos de conhecimento, incluindo ciências humanas.

Entre os temas centrais no ensino de matemática nos últimos anos está a preocupação em relacionar a matemática ao mundo em que vivemos. Desse modo, é bem oportuno ensinar teoria de grafos no ensino básico, devido as suas inúmeras aplicações.

Além disso, como aponta Oliveira e Pezzeta (2016), o ensino de grafos no ensino pode propiciar aos alunos desenvolver habilidades importantes como: modelar problemas por meio de grafos, explorar questões do ponto de vista da existência ou não de soluções, conjecturar sobre as condições gerais de uma determinada resolução.

No Brasil, a teoria dos grafos é explorada geralmente em cursos de computação, como parte de uma disciplina de Matemática discreta. Assim, ela por muitas vezes não é vista em licenciaturas em Matemática, não chegando ao ensino básico. Ela poderia ser trabalhada na geometria, aplicada em problemas de probabilidade, estatística e matrizes, ajudando a despertar o interesse e o raciocínio dos alunos. Dessa maneira, o presente trabalho visa contribuir como uma introdução a alguns dos temas da teoria de grafos e, através de exemplos e resoluções de exercícios, mostrar algumas estratégias de solução. Espero que o material seja útil para que professores aprendam sobre o tema e possam utilizar algo em suas aulas.

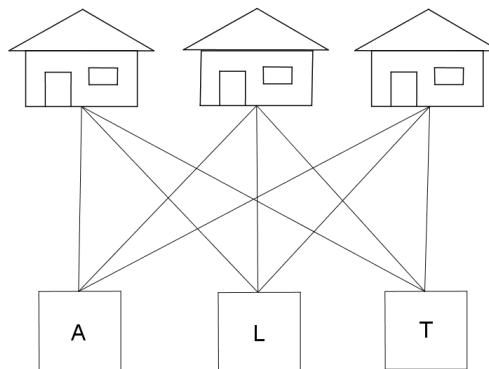
No capítulo 2, damos algumas definições básicas de grafos, mostramos alguns grafos especiais e resolvemos alguns exemplos a fim de fixar a teoria. No capítulo 3 falamos sobre coloração de grafos, expomos alguns teoremas que estabelecem

condições para realizar a coloração e desenvolvemos uma aplicação clássica. No capítulo 4 tratamos das condições para que um grafo seja planar e mostramos que um mapa pode ser "transformado" em um grafo planar. No capítulo 5 trazemos alguns exercícios do livro "Círculos Matemáticos" (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2010), problemas instigantes que envolvem um raciocínio diferente do que estamos acostumados a ver no ensino básico. Outros exemplos e problemas contidos no texto foram baseados principalmente na apostila da OBMEP "Grafos: uma introdução" (JURKIEWICZ, 2009) e na dissertação "Graph Theory for the Secondary School Classroom" (SMITHERS, 2005), ambos possuem temas e aplicações que não foram trabalhadas aqui e podem auxiliar aqueles que desejarem se aprofundar no tema.

## 2 GRAFOS

Um problema bastante conhecido é o seguinte: ligar os serviços de água (A), luz (L) e telefone (T) a três casas, supondo que os fios e canos das ligações estão em um mesmo plano, como na Figura 1.

Figura 1 - Problema das três casas



É possível fornecer os três serviços às três casas, de modo que as linhas que representam os fios e canos, não se cruzem? Responderemos essa questão no capítulo 4, após apresentarmos algumas ferramentas de Teoria dos Grafos.

Um grafo  $G$  é um par composto por:

- um conjunto finito não vazio de objetos chamados vértices;
- um conjunto de pares não ordenados de vértices, chamados arestas.

Cada vértice de uma aresta será chamado de extremidade desta aresta e, por outro lado, diremos que a aresta é incidente neste vértice. Os dois vértices que são extremidades de uma aresta são chamados de adjacentes ou vizinhos.

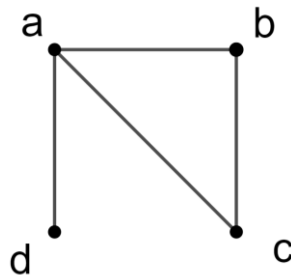
Aos conjuntos de vértices e arestas de um grafo  $G$  denotaremos por  $V(G)$  e  $A(G)$ , respectivamente. No grafo da Figura 2 temos:

$$V(G) = \{a, b, c, d\}$$

$$A(G) = \{ab, ac, ad, bc\}$$

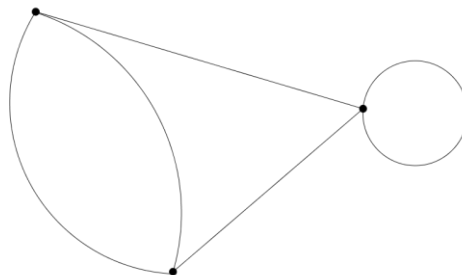
Simbolizaremos o número de vértices pela letra  $v$ . Para o número de arestas usaremos  $a$ . Um laço é uma aresta que tem como extremidades o mesmo vértice.

Figura 2 - Grafo



Arestas múltiplas são arestas que possuem mesmo par de extremidades. Um grafo que não possui laço e nem arestas múltiplas é chamado de grafo simples. Na maioria das aplicações de grafos trabalha-se com grafos simples. A Figura 3 nos mostra um exemplo de laço e de arestas múltiplas.

Figura 3 - Grafo com laço e arestas múltiplas



O grau  $d(v)$  de um vértice  $v$  é o número de arestas que incidem sobre  $v$ . Os laços são contados duas vezes, uma para cada extremidade.

Dizemos que um vértice é par se o seu grau for par. Um vértice de grau ímpar é dito vértice ímpar.

**Teorema 1.** Para todo grafo  $G$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2a$$

Ou seja: "A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas".

Demonstração. Contamos a mesma aresta uma vez para cada extremidade. Como

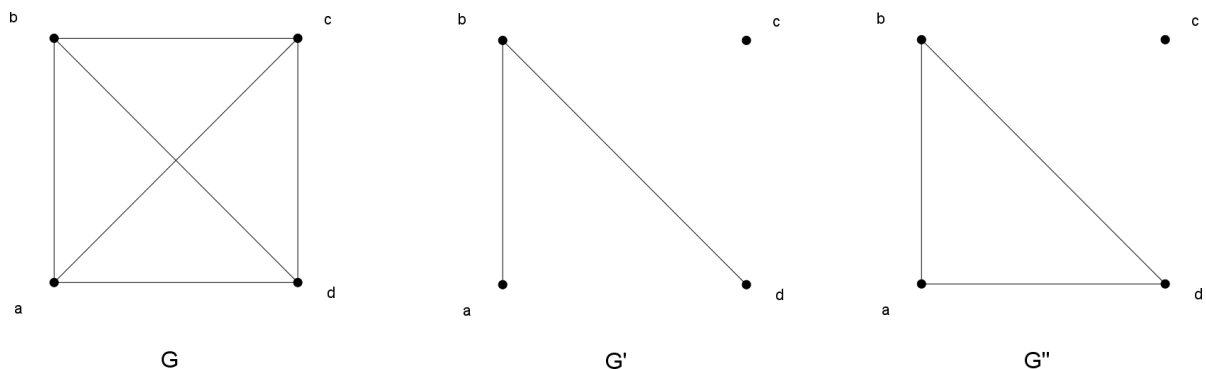
cada aresta possui duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

**Corolário.** O número de vértices ímpares em um grafo é sempre par.

Demonstração. A soma dos graus dos vértices é um número par pois é o dobro do número de arestas. A soma dos graus dos vértices pares sempre será um número par. Se tivéssemos um número ímpar de vértices ímpares a soma dos graus dos vértices seria par.

Dizemos que  $G'$  é um subgrafo de  $G$  se  $V(G') \subseteq V(G)$  e  $A(G') \subseteq A(G)$ . O grafo  $G''$  é dito subgrafo induzido pelo subconjunto  $X$  de  $V(G)$ , quando apenas as arestas de  $G$  com ambos os extremos nos vértices do conjunto  $X$  estão em  $G''$ . Na Figura 4 temos o grafo  $G$  e dois subgrafos,  $G'$  e  $G''$ , sendo que  $G''$  é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices  $\{a, b, d\}$ .

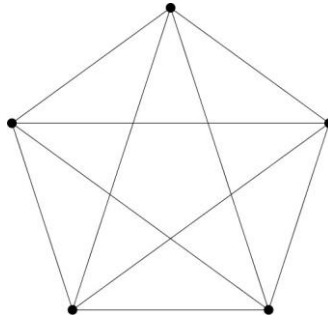
Figura 4 - Subgrafos



Um passeio é uma sequência de arestas do tipo  $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{s-1}v_s$ ; onde  $s$  é o comprimento do passeio. Uma trilha é um passeio onde todas as arestas são distintas e trilha fechada se  $v_0 = v_s$ . Se todos os vértices de uma trilha são distintos temos um caminho e se  $v_0 = v_s$ , temos um ciclo. Um grafo  $G$  é conexo se, e só se, existe um caminho entre quaisquer dois vértices de  $G$ .

## 2.1 Tipos de Grafos

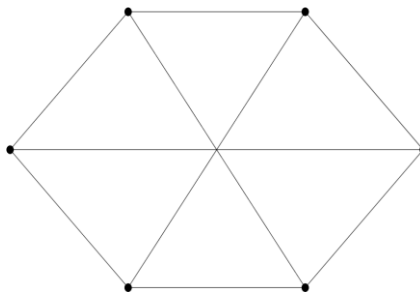
Um grafo onde todo par de vértices são adjacentes é um grafo completo. Um grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ , o grafo da Figura 5 é o  $K_5$ .

Figura 5 - Grafo completo  $K_5$ 

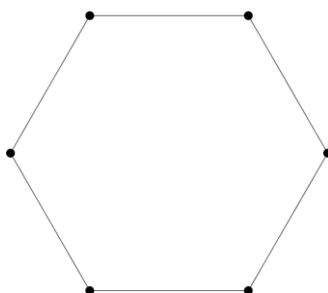
Note que o cruzamento de duas arestas na representação de um grafo não é um vértice, os vértices são representados por pontos.

Se todos os vértices de um grafo possuem grau  $k$ , ele é dito regular de grau  $k$ , ou  $k$ -regular. A Figura 6 mostra um grafo 3-regular.

Figura 6 - Grafo 3-regular

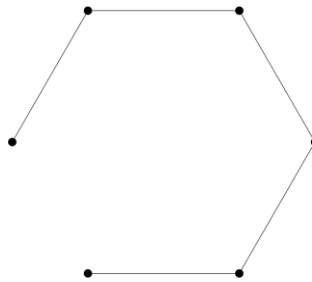


Um grafo que é um ciclo (ver Figura 7) é um grafo conexo regular de grau 2. A notação é  $C_n$ .

Figura 7 - Ciclo  $C_6$ 

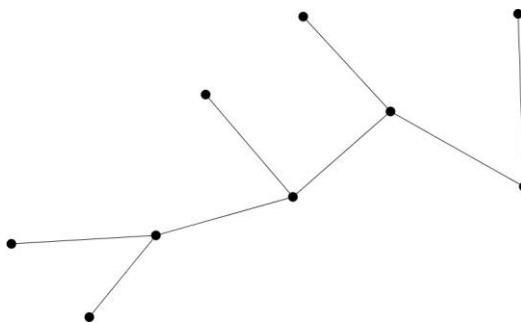
É fácil ver que, se retiramos uma aresta do ciclo obtemos um grafo que é um caminho. Denotamos por  $P_n$  o caminho com  $n$  arestas. Na Figura 8 temos o caminho  $P_5$  obtido retirando uma aresta do ciclo  $C_6$ .

Figura 8 - Caminho  $P_5$



Uma árvore é um grafo conexo que não contém ciclos como subgrafos, como na Figura 9. Pelo fato de não conter ciclos, em relação aos grafos conexos com mesmo número de vértices, as árvores são os que possuem o menor número de arestas.

Figura 9 - Árvore

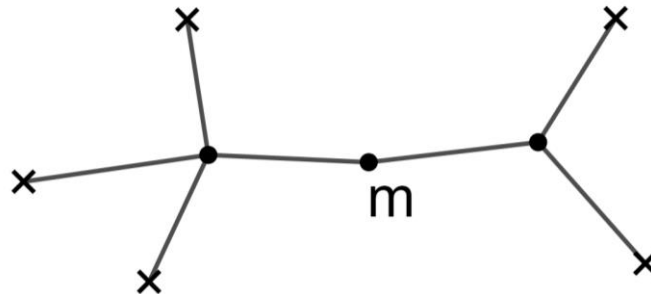


Faremos algumas observações antes de demonstrarmos o próximo teorema. Se temos uma árvore e retiramos um vértice de grau 1, o grafo resultante será uma árvore que possui um vértice e uma aresta a menos que a árvore



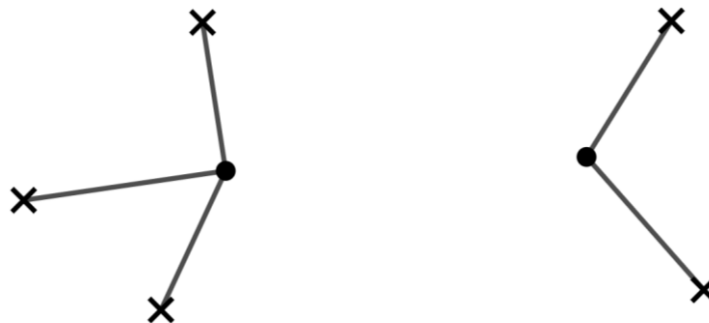
original. Na Figura 10 são representados por um “x” todos os vértices de grau 1.

Figura 10 - Árvore T



Se retirarmos da árvore um vértice de grau maior que 1, o grafo resultante será desconexo com um vértice a menos e sem as arestas que eram adjacentes a esse vértice no grafo original. Na Figura 11 vemos o grafo  $T-m$ , obtido ao retirarmos a aresta  $m$  de grau dois da árvore  $T$  (Figura 10).

Figura 11 - Grafo T-m



**Teorema 2.** Se  $G$  é uma árvore com  $v$  vértices, então  $G$  possui  $v - 1$  arestas. Demonstração. Realizaremos a prova por indução sobre número de vértices de  $G$ . Para uma árvore com  $v = 1$  o teorema é válido, pois temos que o número de arestas é  $0 = 1 - 1 = v - 1$ .

Hipótese de indução: Vamos supor que o teorema seja verdadeiro para uma árvore com  $v$  vértices.

Queremos provar que uma árvore  $G$  com  $v + 1$  vértices possuirá  $v$  arestas.

Retiraremos um vértice  $q$  de  $G$ , de forma a obtermos uma árvore que é um grafo

conexo,  $q$  deve ter grau 1 (se  $q$  tivesse grau dois, obteríamos um grafo desconexo, não haveria um caminho entre os vizinhos de  $q$ ). Seja  $G' = G - q$ ,  $G'$  tem  $v$  vértices e, pela hipótese de indução,  $v - 1$  arestas.

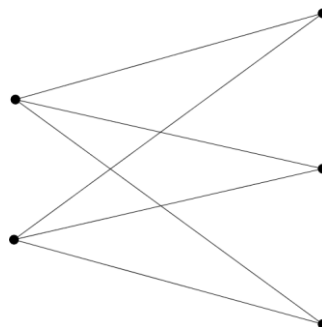
Como  $d(q) = 1$ , ao retirarmos  $q$  de  $G$  retiramos apenas uma aresta. Portanto,  $G$  que possui  $v + 1$  vértices tem  $v$  arestas.

Assim, o teorema está provado por indução.

—

Se os vértices de um grafo  $G$  podem ser divididos em dois conjuntos  $A$  e  $B$  de modo que todas as arestas de  $G$  têm uma extremidade em  $A$  e outra em  $B$ , então  $G$  é um grafo bipartido. Se todos os  $p$  vértices de  $A$  são ligados a todos os  $q$  vértices de  $B$ ,  $G$  é um grafo bipartido completo e o simbolizamos por  $K_{p,q}$ . Na Figura 12 está representado o  $K_{2,3}$ .

Figura 12 - Grafo Bipartido



## 2.2 Isomorfismo

Dois grafos simples  $G$  e  $H$  são isomorfos se existe uma correspondência 1-a-1 entre os vértices de  $G$  e  $H$  tal que se existe uma aresta unindo dois vértices em  $G$ , há uma aresta unindo os vértices correspondentes em  $H$ . Na Figura 13 temos dois grafos isomorfos, seguindo a seguinte correspondência.

$f: a - v$

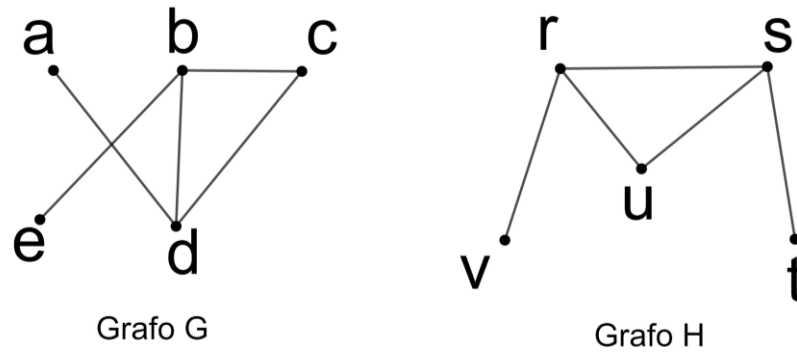
$b - s$

$c - u$

$d - r$

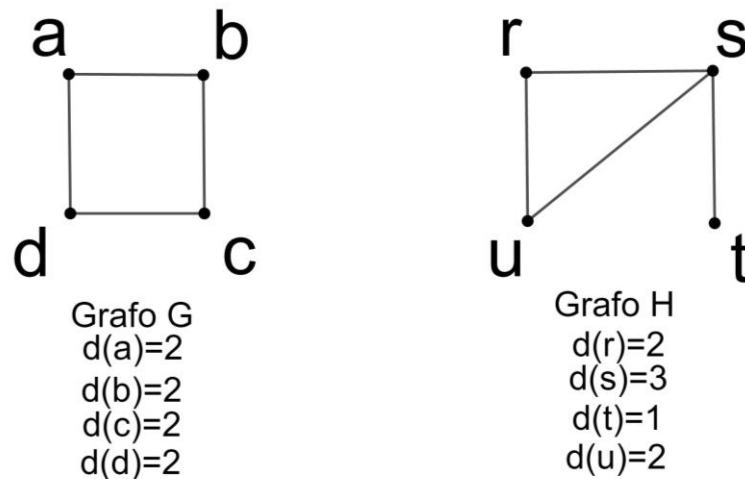
$e - t$

Figura 13 - Grafos Isomorfos



Note que se tomarmos, por exemplo, a aresta  $ad$  do grafo  $G$ , a função nos levará a aresta  $vr$  do grafo  $H$ . Se escolhermos dois vértices não adjacentes ( $a$  e  $c$ , por exemplo) do grafo  $G$ , a correspondência nos apontará dois vértices não adjacentes ( $v$  e  $u$ ) no grafo  $H$ .

Figura 14 - Grafos que não são isomorfos



Na Figura 14 temos dois grafos que não são isomorfos. Eles possuem o mesmo número de vértices e arestas, mas os graus dos vértices são diferentes.

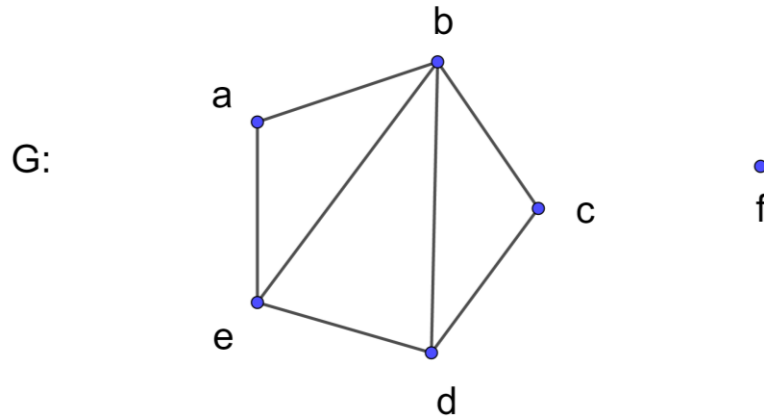
Os seguintes exemplos foram adaptados de exercícios trabalhados no estudo “Graph Theory for the Secondary School Classroom”, de Dayna Brown Smithers.

## 2.3 Exemplos

### Exemplo 1

Vamos estudar as propriedades do Grafo  $G$ .

Figura 15 - Grafo  $G$



O grafo  $G$  possui 6 vértices. Conjuntos de vértices e arestas de  $G$ :

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\};$$

$$A(G) = \{ab, ae, bc, bd, be, cd, de\}.$$

Os graus dos vértices de  $G$  são:

$$d(a) = 2;$$

$$d(b) = 4;$$

$$d(c) = 2;$$

$$d(d) = 3;$$

$$d(e) = 3;$$

$$d(f) = 0.$$

Para calcular o número de arestas de  $G$ , temos que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas (Teorema 1). Somando os graus dos vértices obtemos 14, logo o número de arestas é 7.

ou

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2a \Rightarrow 2 + 4 + 2 + 3 + 3 + 0 = 2a \Rightarrow a = 14 \div 2 \Rightarrow a = 7$$

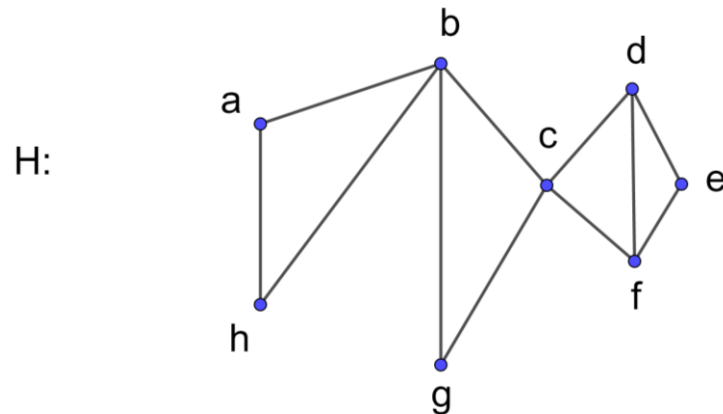
É claro que podemos verificar isto contando no desenho.

O grafo  $G$  não é conexo, pois não existe um caminho entre o vértice  $f$  e qualquer outro vértice.

Exemplo 2

Vamos estudar as propriedades do Grafo  $H$ .

Figura 16 - Grafo  $H$



O grafo  $H$  possui 8 vértices. Conjuntos de vértices e arestas de  $H$ :

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\};$$

$$A(G) = \{ab, ah, bc, bg, bh, cd, cf, cg, de, df, ef\}.$$

Os graus dos vértices são:

$$d(a) = 2;$$

$$d(b) = 4;$$

$$d(c) = 4;$$

$$d(d) = 3;$$

$$d(e) = 2;$$

$$d(f) = 3;$$

$$d(g) = 2;$$

$$d(h) = 2.$$

Para calcular o número de arestas de  $H$ , temos que a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas. Somando os graus dos vértices obtemos 22, logo o número de arestas é 11.

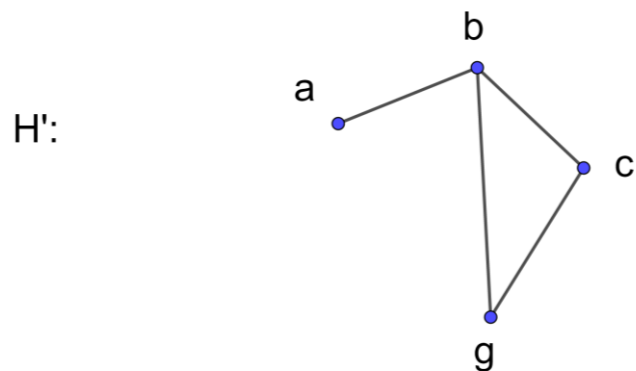
ou

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2a \Rightarrow 2 + 4 + 4 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 = 2a \Rightarrow 2a = 22 \Rightarrow a = 11$$

O grafo  $H$  é conexo

Um possível subgrafo de  $H$  é o  $H'$ . (Observe que pode haver outros).

Figura 17 - Subgrafo de  $H$



Exemplo 3

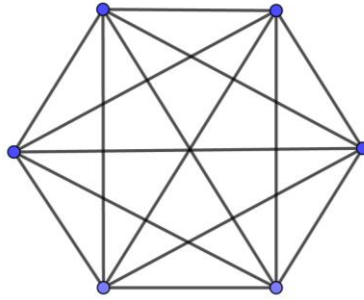
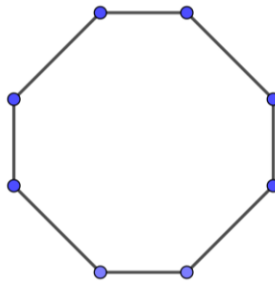
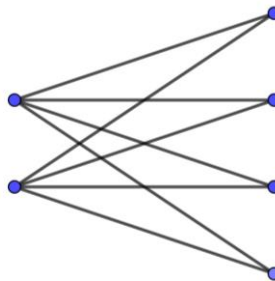
Vamos mostrar a representação de alguns grafos

Grafo  $P_7$

Figura 18 - Grafo  $P_7$



Grafo  $K_6$

Figura 19 - Grafo  $K_6$  $K_6$ Grafo  $C_8$ .Figura 20 - Grafo  $C_8$  $C_8$ Grafo  $K_{2,4}$ .Figura 21 - Grafo  $K_{2,4}$  $K_{2,4}$ 

### 3 COLORAÇÃO

Uma  $k$ -coloração ( $k \geq 0$ ) de um grafo  $G$  é uma função  $f: V \mapsto \{1, 2, \dots, k\}$  tal que se  $v_1$  e  $v_2$  são vértices adjacentes em  $G$  então  $f(v_1) \neq f(v_2)$ . Assim, em uma  $k$ -coloração atribuímos a vértices adjacentes cores diferentes. O valor  $f(v) = 3$  quer dizer que ao vértice  $v$  está associada a cor 3. Dizemos que uma  $k$ -coloração é uma coloração própria.

Nem todas as  $k$  cores precisam ser utilizadas. Se um grafo possui  $n$  vértices, podemos colori-los com  $n$  cores diferentes. Todo grafo que é 5-colorável é também 6-colorável.

O número cromático de um grafo é o menor número  $k$  tal que  $G$  é  $k$ -colorável. Denotamos por  $\chi(G)$  o número cromático do grafo  $G$ . O símbolo  $\chi$  é a letra grega minúscula “qui”.

**Teorema 3.** Seja  $G'$  um subgrafo de  $G$ , então  $\chi(G') \leq \chi(G)$ .

Demonstração. Dada uma coloração própria de  $G$ , copiamos essas cores nos vértices de  $G'$ . Assim, usaremos em  $G'$  no máximo as  $\chi(G)$  cores que utilizamos em  $G$ . —

**Teorema 4.** Dado  $\delta$  o grau máximo de  $G$ , tem-se que  $\chi(G) \leq \delta + 1$ .

Demonstração. Colorimos vértice a vértice escolhendo cores diferentes das que já foram usadas nos vértices adjacentes. Como cada vértice tem no máximo  $\delta$  vizinhos, teremos sempre como colorir qualquer vértice. —

**Teorema 5.** Um grafo  $G$  é bipartido se e somente se  $\chi(G) = 2$ .

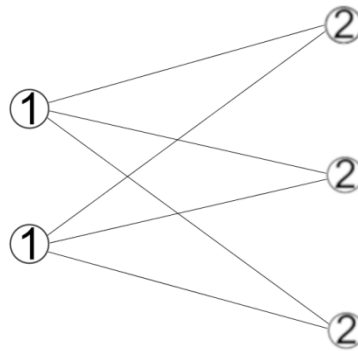
Demonstração. Se  $G$  é bipartido, seja  $\{V_1, V_2\}$  uma partição de  $V(G)$ . Fazemos corresponder a  $V_1$  e  $V_2$  cores diferentes.

Por outro lado, se  $\chi(G) = 2$  então podemos dividir os seus vértices em dois subconjuntos disjuntos, ou seja,  $G$  é bipartido. —

Na Figura 22 temos a coloração de um grafo bipartido. Observe que usamos números para fazer a coloração.



Figura 22 - Coloração de um grafo bipartido



Um exemplo clássico de coloração de grafos é a alocação de alunos em exames que eles devem prestar. As disciplinas são  $\{M, N, O, P, Q, R, S\}$  e serão representadas pelos vértices. Dois vértices serão ligados por aresta se houver um aluno que precise realizar os dois exames.

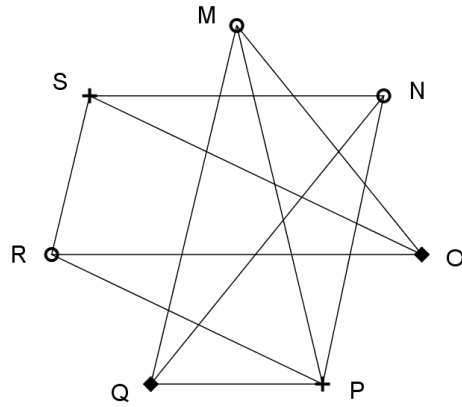
O objetivo é saber o mínimo de horários diferentes de exame que podem ser feitos de modo que dois exames que tenham alunos em comum não ocorram simultaneamente. Observe a seguinte tabela contendo as disciplinas e representamos por 0 quando os dois vértices não são adjacentes e por 1 quando são adjacentes.

Tabela 1 - Tabela dos Exames

	M	N	O	P	Q	R	S
M	0	0	1	1	1	0	1
N	0	0	1	1	1	0	1
O	1	1	0	1	0	1	1
P	1	1	1	0	1	1	0
Q	1	1	0	1	0	1	1
R	0	0	1	1	1	0	1
S	1	1	1	0	1	1	0

Assim, o problema de definir os horários é equivalente a colorir um grafo onde dois vértices adjacentes não recebem a mesma cor. No grafo da Figura 23 apresentamos uma coloração para o grafo.

Figura 23 - Grafo dos Exames

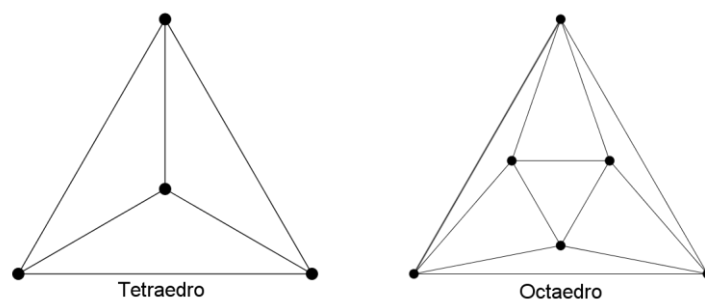


A coloração particiona os vértices do grafo em 3 componentes:  $\{M, N, R\}$ ,  $\{S, P\}$  e  $\{O, Q\}$ . Então são necessários apenas 3 horários para a realização dos exames.

## 4 PLANARIDADE

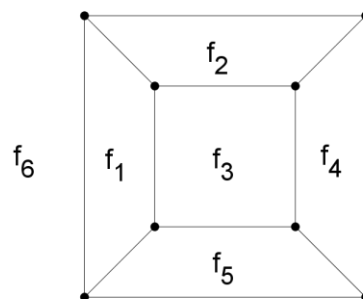
Um grafo  $G$  é planar se admite uma representação gráfica isomorfa em que as arestas não se encontrem, a não ser num vértice ao qual são incidentes. Os grafos planares da Figura 24 são representações das planificações dos sólidos platônicos tetraedro e octaedro.

Figura 24 - Grafos planares



Uma representação gráfica que contém um ciclo divide o plano em regiões, chamadas faces. Em um grafo sem ciclos, caso das árvores, temos uma única região. A Figura 25 mostra as faces ( $f_1, f_2, \dots, f_6$ ) de um grafo. A face  $f_6$  que não é limitada por nenhum ciclo é chamada face ilimitada.

Figura 25 - Faces do grafo

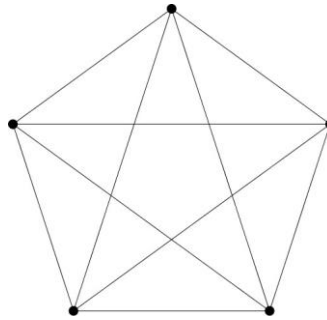


O grafo  $K_5$  (Figura 26) é um exemplo de grafo que não é planar, mas isso não é evidente. Para mostrar que um grafo é planar, basta exibir uma representação planar dele, mas nem sempre é fácil encontrá-la. Partiremos do conhecido Teorema de Euler para estabelecer um limite de arestas que pode ter um grafo planar, assim será

possível apresentar alguns exemplos de grafos que não são planares.

A relação de Euler para poliedros convexos é válida para grafos planares.

Figura 26 - Grafo  $K_5$



**Teorema 6 (Euler).** Num grafo planar conexo  $G$  vale  $v-a+f=2$ .

Demonstração. Vamos provar por indução sobre o número de arestas de  $G$ .

Se  $a=0$ , então  $v=1$  (pois  $G$  é conexo) e  $f=1$  (a face ilimitada). O teorema é válido para este caso.

Suporemos que o teorema vale para todos os grafos com no máximo  $a-1$  arestas, e seja  $G$  um grafo planar com  $a$  arestas. Se  $G$  for uma árvore, temos  $a=v-1$  e  $f=1$ , então teremos  $v-a+f=2$ . Se  $G$  não for uma árvore, escolhamos uma aresta  $t$  em algum ciclo de  $G$ . Então  $G-t$  é um grafo planar conexo com  $v$  vértices,  $a-1$  arestas e  $f-1$  faces, de modo que  $v-(a-1)+(f-1)=2$ , pela hipótese de indução. Portanto segue que  $v-a+f=2$ , como queríamos mostrar.

—

Observe que, em um grafo planar, se uma porção do plano está limitada por um ciclo com mais de 3 arestas podemos acrescentar uma aresta sem comprometer a planaridade do grafo. Quando um grafo planar tem apenas ciclos de comprimento 3, dizemos que ele é um grafo maximal planar.

**Teorema 7.** Num grafo planar conexo  $G$  vale  $a \leq 3v - 6$ . A igualdade vale se  $G$  é maximal planar.

Demonstração. Contando o número de arestas de cada face, contaremos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face contém no mínimo 3 arestas, temos:

$$3f \leq 2a$$

Pelo Teorema de Euler,

$$v - a + f = 2$$

$$3v - 3a + 3f = 6$$

$$3v - 3a + 2a \geq 6$$

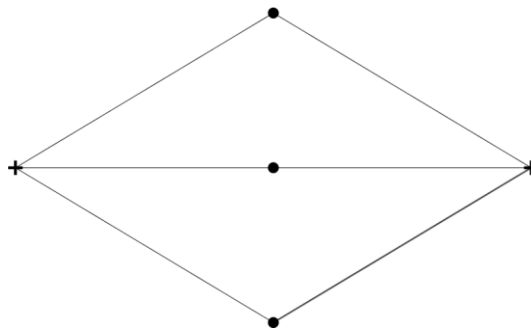
$$a \leq 3v - 6$$

—

O teorema nos apresenta um limite de arestas que um grafo planar pode ter. O grafo  $K_5$  não é planar pois tem 5 vértices, 10 arestas e  $10 > 3 \cdot 5 - 6$ .

Temos que o grafo  $K_{2,3}$  é planar (veja a Figura 27). E o grafo  $K_{3,3}$ ? Apenas pelo resultado acima o número de arestas desse grafo não é proibido, pois  $9 < 3 \cdot 6 - 6$ . Para demonstrar o teorema a seguir, usaremos o fato de que um grafo bipartido não possui ciclos com um número ímpar de arestas, então cada face conterà no mínimo quatro arestas, ou seja,  $4f \leq 2a$ .

Figura 27 - Grafo  $K_{2,3}$



**Teorema 8.** Em todo grafo bipartido planar vale  $a \leq 2v - 4$ .

Demonstração. Em um grafo bipartido cada face tem no mínimo 4 arestas.

$$4f \leq 2a$$

Usando a fórmula de Euler,

$$v - a + f = 2$$

$$3v - 3a + 3f = 6$$

$$3v - 3a + 2a \geq 6$$

$$a \leq 2v - 4$$

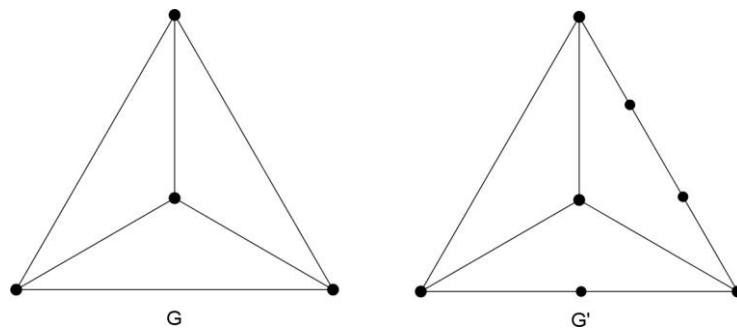
---

Assim, o grafo  $K_{3,3}$  não é planar, pois  $9 > 2 \cdot 6 - 4$ .

Em virtude disso, temos que o problema das três casas e das fontes de suprimento não tem solução.

Depois de algumas definições apresentaremos um teorema, sem demonstrá-lo, que caracteriza os grafos não planares. Um grafo  $G'$  é uma subdivisão de um grafo  $G$ , quando  $G'$  pode ser obtido pela inserção de um caminho de comprimento 2 no lugar de uma aresta de  $G$ . O grafo  $G'$  é homeomorfo a  $G$  se puder ser obtido a partir de  $G$  por meio de sucessivas operações de subdivisão. Os grafos da Figura 28 são homeomorfos (observe que eles não são isomorfos, ou seja, não confunda isomorfismo com homeomorfismo).

Figura 28 - Grafos Homeomorfos



**Teorema 9 (Kuratowski).** Um grafo é planar se não contiver subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ou a  $K_{3,3}$ .

O grafo dual  $D$  de um grafo  $G$  é um grafo onde associamos a cada face de  $G$  um vértice em  $D$  e a cada aresta entre duas faces em  $G$ , uma aresta em  $D$  ligando os vértices correspondentes às faces em  $G$ .

Todo mapa é um grafo planar: os países são as faces e as linhas de fronteira

são as arestas. Assim, considerando o grafo dual de um mapa transformamos o problema de colorir mapas, onde duas regiões com linha de fronteira em comum não podem receber uma mesma cor, em colorir os vértices do grafo dual. Exemplificando, considere o seguinte mapa fictício (Figura 29) e o seu grafo dual na Figura 30.

Figura 29 - Mapa

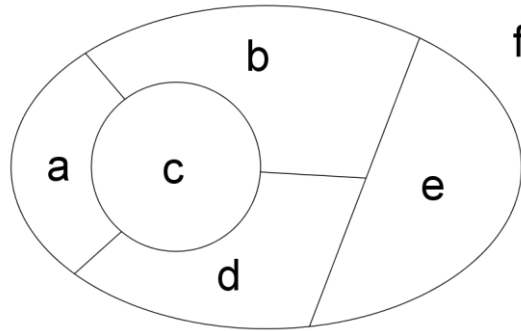
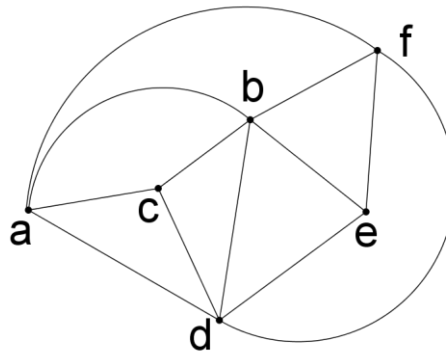


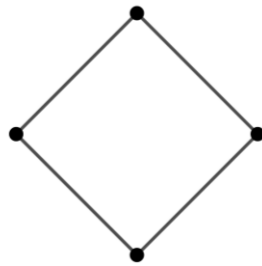
Figura 30 - Grafo dual



## 4.1 Exemplos

### Exemplo 1

Figura 31 - Grafo do Exemplo 1



O Grafo da Figura 31 possui:

Vértices:  $v = 4$ ;

Arestas:  $a = 4$ ;

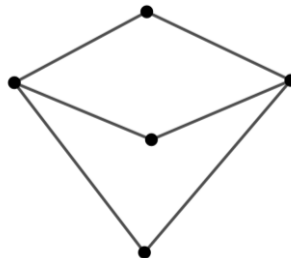
Faces:  $f = 2$ ;

Verificando a relação de Euler,

$$v - a + f = 2 \Rightarrow 4 - 4 + 2 = 2 \Rightarrow 2 = 2.$$

### Exemplo 2

Figura 32 - Grafo do Exemplo 2



O grafo da Figura 32 possui:

Vértices:  $v = 5$ ;

Arestas:  $a = 6$ ;

Faces:  $f = 3$ ;

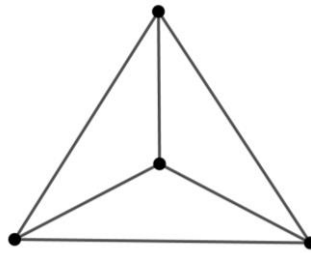
Verificando a relação de Euler,

$$v - a + f = 2 \Rightarrow 5 - 6 + 3 = 2 \Rightarrow 2 = 2.$$

### Exemplo 3



Figura 33 - Grafo do Exemplo 3



O grafo da Figura 33 possui:

Vértices:  $v = 4$ ;

Arestas:  $a = 6$ ;

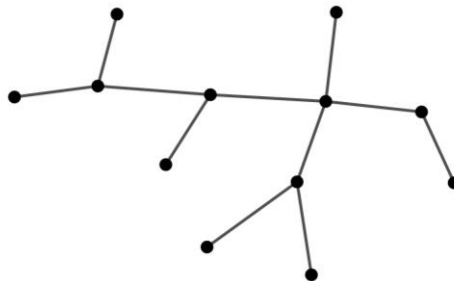
Faces:  $f = 4$ ;

Verificando a relação de Euler,

$$v - a + f = 2 \Rightarrow 4 - 6 + 4 = 2 \Rightarrow 2 = 2.$$

#### Exemplo 4

Figura 34 - Grafo do Exemplo 4



O grafo da Figura 34 possui:

Vértices:  $v = 12$ ;

Arestas:  $a = 11$ ;

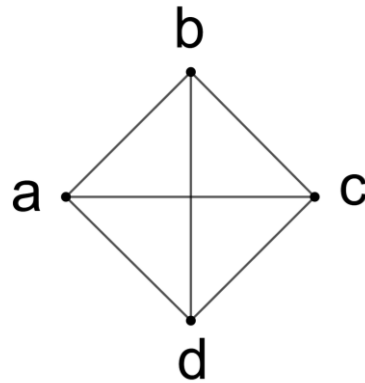
Faces:  $f = 1$ ;

Verificando a relação de Euler,

$$v - a + f = 2 \Rightarrow 12 - 11 + 1 = 2 \Rightarrow 2 = 2.$$

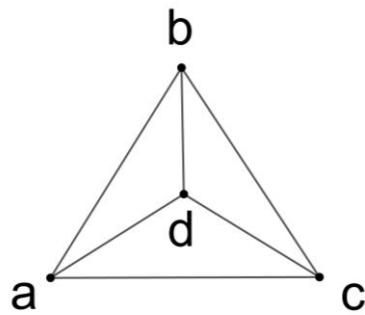
#### Exemplo 5

Figura 35 - Grafo G



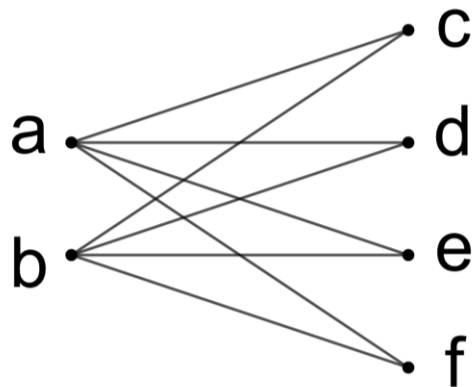
Uma representação planar do grafo da Figura 35 é o grafo da Figura 36.

Figura 36 - Representação planar do grafo G



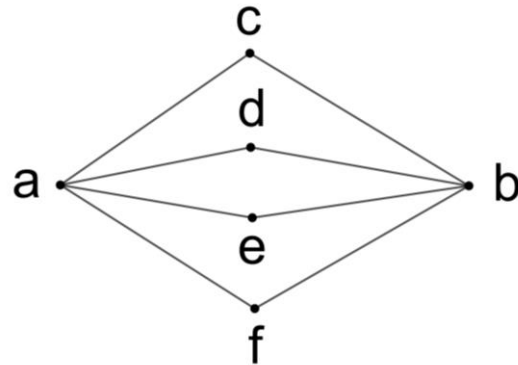
### Exemplo 6

Figura 37 - Grafo H



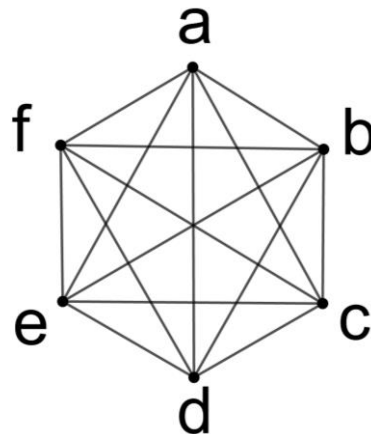
Uma representação planar do grafo da Figura 37 é o grafo da Figura 38.

Figura 38 - Representação planar do grafo H



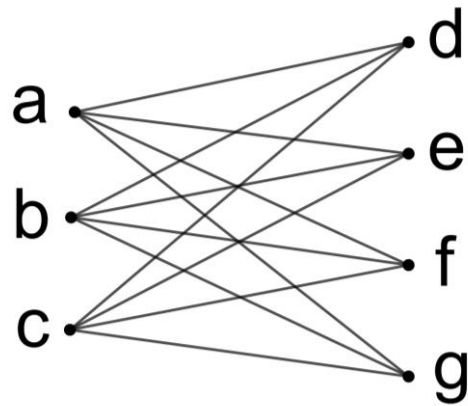
### Exemplo 7

Figura 39 - Grafo  $K_6$



Se  $K_6$  (Figura 39) for um grafo planar, pelo teorema 7 teremos  $a \leq 3v - 6$ . O grafo tem 15 arestas e 6 vértices, então  $15 > 3 \cdot 6 - 6$ . Portanto  $K_6$  não admite representação planar.

### Exemplo 8

Figura 40 - Grafo  $K_{3,4}$ 

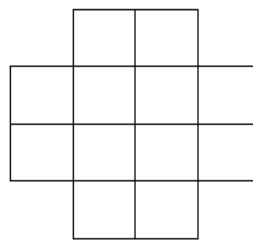
Se  $K_{3,4}$  (Figura 40) for um grafo planar, pelo teorema 8 teremos  $e \leq 2v - 4$ . O grafo tem 12 arestas e 7 vértices, então  $12 > 2 \cdot 7 - 4$ . Portanto  $K_{3,4}$  não admite representação planar.

## 5 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

### Exercício 1

(FOMIN; GENKIN; ITENBERG, página 45, problema 3) Um tabuleiro com a forma de uma cruz é obtido de um tabuleiro 4 x 4 retirando-se as quatro quinas (veja a Figura 41). Um cavalo pode se mover nesse tabuleiro de modo a passar por todos os quadrados exatamente uma vez e terminar no quadrado de onde saiu?

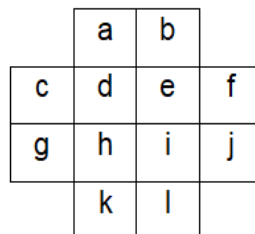
Figura 41 - Tabuleiro



Fonte: Adaptado de Fomin, Genkin, Itenberg (2010)

Solução: Primeiro vamos nomear as casas como segue na Figura 42.

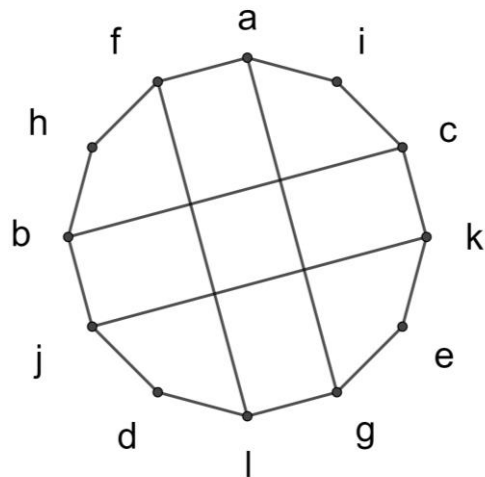
Figura 42 - Casas do tabuleiro



Em muitos problemas matemáticos, o tabuleiro de xadrez e suas peças aparecem. Como existem pessoas que ainda não tiveram a oportunidade de apreciar esse jogo, explicaremos o movimento do cavalo. O cavalo se movimenta em “L”, isso significa que ele pode percorrer duas casas na horizontal e uma na vertical, ou duas casas na vertical e uma na horizontal. Assim, se a posição do cavalo for a casa “a” do tabuleiro do problema, ele pode ser movimentado para as casas “g”, “i” ou “f”.

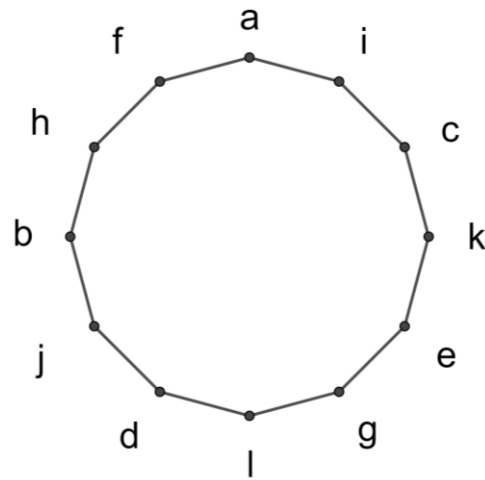
Em seguida temos, na Figura 43, o grafo onde os vértices representam as casas do tabuleiro e as arestas representam os possíveis movimentos do cavalo.

Figura 43 - Grafo dos movimentos do cavalo



Na Figura 44 temos um subgrafo que é um ciclo, note que podemos escolher qualquer vértice para ser o inicial. Escolhendo o vértice *a* como ponto de partida, temos o caminho *aickegljdbhfa* no qual o cavalo sai da casa *a* e retorna ao ponto de partida após ter passado uma única vez por cada uma das casas do tabuleiro.

Observação: Pensando na possibilidade de se desenvolver uma atividade usando este problema, no ensino médio, é preciso destacar que a solução aqui apresentada está otimizada, no sentido de que o grafo obtido por um aluno poderia ser bem diferente do apresentado aqui (apesar de ser isomorfo). Ou seja, se o aluno obtiver uma representação gráfica diferente, talvez não seja tão evidente o caminho apresentado nesta solução. Porém, ele ainda pode procurar o caminho que soluciona o problema. Além disso, quanto maior prática, mais fácil fica encontrar representações gráficas mais elegantes ou mais apropriadas para resolver o problema em questão. No caso da Figura 43, veja que o grafo possui uma simetria envolvendo os vértices *d*, *e*, *h*, *i*, que são os únicos com grau 2.

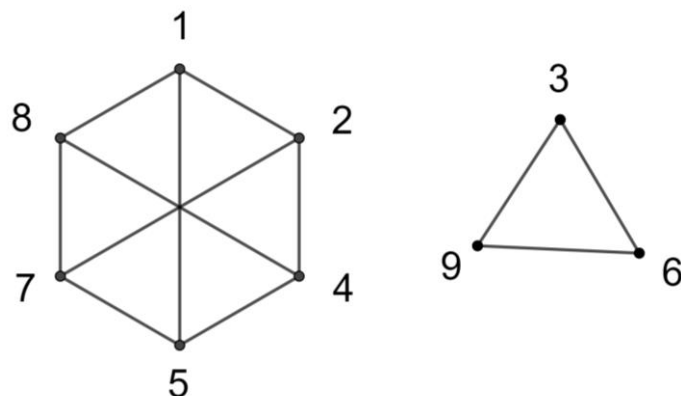
Figura 44 - Ciclo  $C_{12}$ : movimento do cavalo

### Exercício 2

(FOMIN; GENKIN; ITENBERG, página 45, problema 4) Figurativo é um país com nove cidades de nomes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Um viajante descobre que existe voo direto de uma cidade a outra se e somente se o número de dois algarismos formados pelos nomes da cidade é divisível por 3. O viajante pode ir da Cidade 1 para a Cidade 9?

Solução: Vamos fazer o grafo onde ligamos dois países se existir voo direto entre eles (ver Figura 45).

Figura 45 - Grafo do viajante



Como podemos ver, não é possível que um viajante vá da cidade 1 até a cidade 9.

**Exercício 3**

(FOMIN; GENKIN; ITENBERG, página 49, problema 07) Um determinado reinado tem 100 cidades e saem quatro estradas de cada uma delas. Quantas estradas existem ao todo neste reinado?

Solução: Considere o grafo em que os vértices representam as cidades e as arestas representam as estradas. Este grafo possui 100 vértices e cada vértice tem grau 4. Somando o grau de todos os vértices estamos contando cada aresta duas vezes, uma para cada extremidade (vértice). Assim, pelo teorema 1, o número de arestas é  $100 \times 4/2 = 200$ , que corresponde ao número de estradas.

**Exercício 4**

(FOMIN; GENKIN; ITENBERG, página 50, problema 09) Em Interiorana existem 15 telefones. Eles podem ser conectados de modo que

- (a) Cada telefone seja conectado a exatamente 7 outros;
- (b) Quatro telefones estão conectados a 3 outros, 8 telefones estão conectados a 6 outros e 3 telefones estão conectados a 5 outros?

Solução: a) Esse grafo teria 15 vértices (representando os telefones) e cada vértice teria grau 7, mas tal grafo não pode existir pois, pelo corolário do teorema 1, o número de vértices com grau ímpar sempre deve ser um número par.

b) Não é possível, pois, assim como no item anterior, temos um número ímpar de vértices com grau ímpar, sendo quatro vértices com grau 3 e 3 vértices com grau 5.

**Exercício 5**

(FOMIN; GENKIN; ITENBERG, página 50, problema 11) É possível existirem exatamente 100 estradas em um reinado no qual existem 3 estradas saindo de cada cidade?

Solução: O grafo teria  $n$  vértices (representando as cidades) e 100 arestas (representando as estradas). Como cada vértice tem grau três, multiplicando  $n$  por 3 encontramos o dobro do número de arestas (teorema 1), ou seja,  $n \times 3 = 2 \times 100 \Rightarrow n = 200/3$ , o que não é possível pois  $n$  deve ser inteiro.

**Exercício 6**

(FOMIN; GENKIN; ITENBERG, página 50, problema 13) Prove que o número



de pessoas que viveram na Terra e que apertaram mãos um número ímpar de vezes em suas vidas é par.

Solução: Seja o grafo onde os vértices representam as pessoas e cada aresta um aperto de mão, a soma dos graus dos vértices de grau par é um número par. Pelo corolário do teorema 1, a soma dos graus dos vértices de grau ímpar será um número par se, e somente se, houver um número par de vértices satisfazendo essa condição. Logo, o número de pessoas que viveram na Terra e que apertaram mãos um número ímpar de vezes é par.

### **Exercício 7**

(FOMIN; GENKIN; ITENBERG, página 50, problema 14) É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada um intersecta exatamente 3 outros?

Solução: Se isto fosse possível, existiria o grafo onde os vértices representam os segmentos e as arestas ligariam dois vértices se os respectivos segmentos possuísem intersecção. Tal grafo teria 9 vértices com grau 3, mas o número de vértices de grau ímpar em um grafo deve ser sempre par (corolário do teorema 1). Portanto não é possível desenhar os 9 segmentos de reta no plano onde cada segmento intersecta exatamente 3 outros.

### **Exercício 8**

(FOMIN; GENKIN; ITENBERG, página 154, problema 09) Todos os vértices de um grafo têm grau 3. Prove que o grafo tem um ciclo.

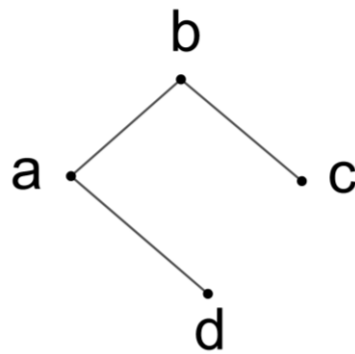
Solução: Vamos começar a listar os vértices. Escolhemos qualquer vértice e chamamos de 1. O vértice 2 será um dos três vizinhos de 1. O vértice 3 será um vizinho do vértice 2 que seja diferente do 1 (que existirá, já que o grau é 3). Se o vértice 3 for vizinho do vértice 1, encontramos um ciclo, caso contrário, teremos um vértice 4 que será um vizinho do vértice 3 que ainda não listamos, e assim sucessivamente. Como o número de vértices e arestas são finitos, haverá um vértice  $n$  em que todos os seus vértices adjacentes já foram enumerados, encontramos um ciclo.

### **Exercício 9**

O grafo complementar de um grafo  $G$ , é um grafo com o mesmo conjunto de

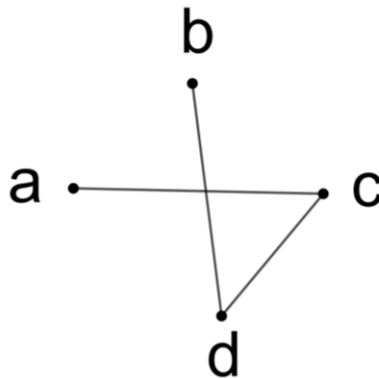
vértices de  $G$ , tal que dois vértices distintos são adjacentes se não são em  $G$ . Ou seja, o grafo complementar contém as arestas que faltam em  $G$  para que ele se torne completo. Assim, qual o grafo complementar do grafo  $G$  (Figura 46)?

Figura 46 - Grafo  $G$



Solução. Na Figura 47, temos o grafo complementar do grafo  $G$ .

Figura 47 - Grafo complementar do grafo  $G$

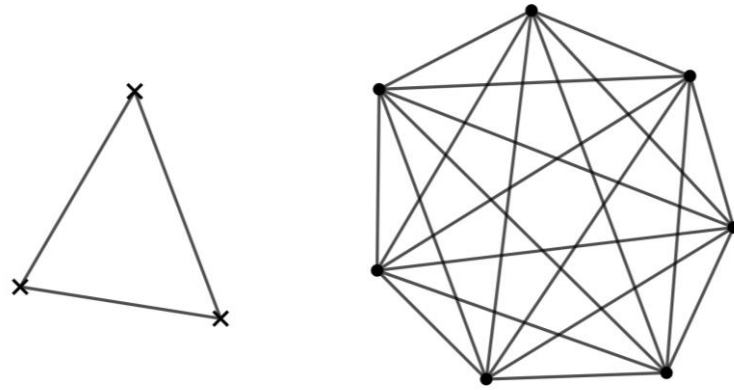


### Exercício 10

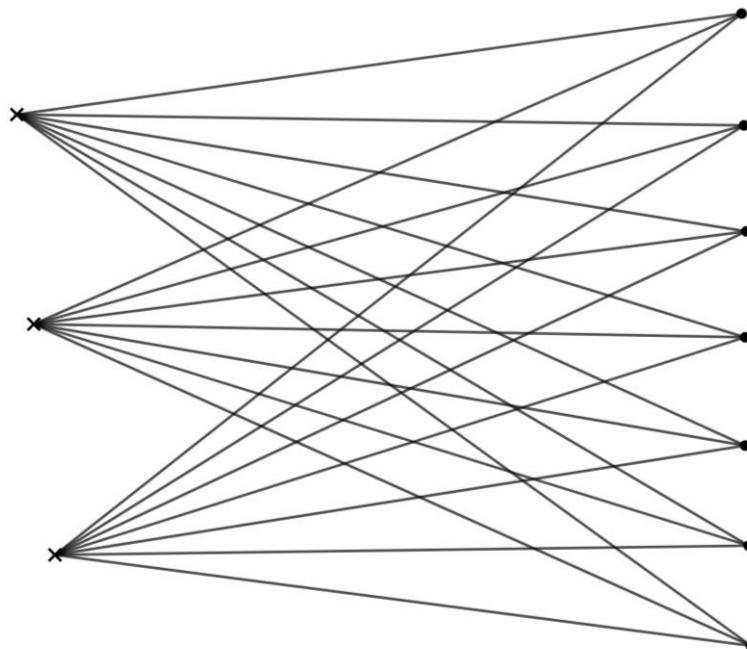
(JURKIEWICZ, página 25, exercício 1) Qual o grafo complementar do grafo desconexo formado por duas componentes conexas isomorfas a  $K_3$  e  $K_7$ ?

Solução. Na Figura 48 podemos ver o grafo desconexo formado por duas componentes conexas isomorfas a  $K_3$  e  $K_7$ .

Figura 48 - Grafo desconexo



Note que os vértices da componente conexa  $K_3$  são todos adjacentes entre si e nenhum desses vértices é vizinho de nenhum vértice de  $K_7$ . Do mesmo modo, os vértices da componente conexa  $K_7$  são todos adjacentes entre si e nenhum desses vértices é vizinho de nenhum vértice de  $K_3$ . Assim, o grafo complementar será formado por todas ligações entre os vértices das componentes  $K_3$  e  $K_7$ , pois são as arestas que faltam. O Grafo complementar será o grafo bipartido completo  $K_{3,7}$  (Figura 49).

Figura 49 - Grafo bipartido completo  $K_{3,7}$ 

## **6 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Neste trabalho apresentamos definições, exemplos e problemas relacionados a teoria dos grafos. O objetivo foi criar um material que introduzisse alguns temas dessa teoria, oferecendo um material que possa servir de inspiração para que o professor leve o assunto à sala de aula.

O tema é relativamente novo e suas aplicações são as mais variadas, dessa forma, teoria dos grafos pode render interessantes descobertas se o leitor desejar se aprofundar na área.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOAVENTURA-NETTO, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**. 4ª Edição. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; & ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos: A experiência russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

JURKIEWICZ, S. **Grafos: Uma Introdução**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2009.

LUCCHESI, C. L. **Introdução a Teoria dos Grafos**: 12º Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

OLIVEIRA, G. P.; PEZZETA, J. R. **Teoria dos Grafos no Ensino Médio: Uma Abordagem por Meio da Resolução de Problemas**. Ensino da Matemática em Debate, 3(1), 2016.

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta: Uma Introdução**. Cengage Learning Editores, 2003.

SMITHERS, D. B. **Graph Theory for the Secondary School Classroom**. Electronic Theses and Dissertations, 2005. Paper 1015. <https://dc.etsu.edu/etd/1015>

WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory**. Vol. 2. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001.

WILSON, R. J. **Introduction to Graph Theory**. Pearson Education India, 1979.