



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL-PROFMAT**

Denis Dalzotto

**UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS E PROBLEMAS DE
COLORAÇÃO**

Florianópolis

2021

Denis Dalzotto

**UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS E PROBLEMAS DE
COLORAÇÃO**

Dissertação submetido ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves.

Coorientador: Prof. Dr. Raphael Falcão da Hora.

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

DALZOTTO, DENIS

Uma introdução à Teoria de Grafos e Problemas de Coloração
/ DENIS DALZOTTO ; orientador, Douglas Soares Gonçalves,
coorientador, Raphael Falcão Da Hora, 2021.
82 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Teoria de Grafos. 3. Coloração de
Grafos. I. Gonçalves, Douglas Soares. II. Da Hora, Raphael
Falcão. III. Universidade Federal de Santa Catarina.
Programa de Pós-Graduação em Matemática. IV. Título.

Denis Dalzotto

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS E PROBLEMAS DE COLORAÇÃO

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof^a. Dr^a. Maria Inez Cardoso Gonçalves
UFSC

Prof. Dr. Leandro Batista Morgado
UFSC

Prof. Dr. Leonardo Koller Sacht
UFSC

Prof. Dr. Marcelo Lobo Heldwein
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Prof^a. Dr^a. Maria Inez Cardoso Gonçalves.
Coordenadora do Programa

Prof. Dr. Douglas Soares Gonçalves.
Orientador

Florianópolis, 15 de Janeiro 2021.

Este trabalho é dedicado aos meus professores do curso e a minha família.

AGRADECIMENTOS

A minha família pelo carinho nos momentos difíceis e pelo apoio ao curso. Também agradeço ao meu primo Paulo Arion Flores pela sua ajuda e pelos almoços e a minha irmã Edilaine Dalzotto e amigos Jeiciele Mayara Rodrigues Struz e Lucas Vinícios Rodrigues pelas suas ajudas. Agradeço também ao meu orientador Douglas Soares Gonçalves pela sua ajuda, paciência e aprendizagem. Não posso deixar de agradecer aos professores e colegas do PROFMAT pelos conhecimentos que eles passaram. E agradeço também a UFSC por disponibilizar novamente seu espaço e pelos almoços do restaurante universitário.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução à Teoria de Grafos, assunto que é comumente visto no ensino superior, dando um suporte a professores das séries finais do fundamental II e do ensino médio, com o objetivo de resolver alguns problemas do dia a dia de forma alternativa. A Teoria de Grafos leva a outra visão da matemática que fortalece o raciocínio lógico do aluno, evitando o caminho da algebrização e buscando despertar ainda mais o seu interesse nesta área do conhecimento. Nesse sentido, as definições, conceitos, tipos de grafos e os teoremas importantes, como a fórmula de Euler, Teorema de Brooks, Teorema de Vizing, o Teorema das Cinco cores e o Teorema das Quatro Cores são apresentados nesse trabalho, junto com alguns exemplos de aplicações e a história da busca pela demonstração do Teorema das Quatro Cores. Ao final, apresenta-se um roteiro pedagógico simplificado com sete atividades resolvidas a serem aplicadas em sala de aula.

Palavras-chave: Teoria de Grafos. Coloração. Sequência didática.

ABSTRACT

This work presents an introduction to Graph Theory, a subject that is commonly seen in higher education, giving support to teachers in the final grades of elementary school and high school, with the aim of solving some daily life problems in an alternative way. Graph Theory provides another view of mathematics that strengthens the student's logical reasoning, avoiding the path of algebraization and increasing his/her interest in mathematics even more. In this sense, definitions, concepts, types of graphs and important theorems, such as Euler's formula, Brooks' theorem, Vizing's theorem, the Five-color theorem and the Four-color theorem are presented in this work, along with some application examples and the history of the search for the demonstration of Four-color theorem. At the end, a simplified pedagogical script is presented with seven solved activities to be applied in the classroom.

Keywords: Graph Theory. Coloring. Teaching sequence.

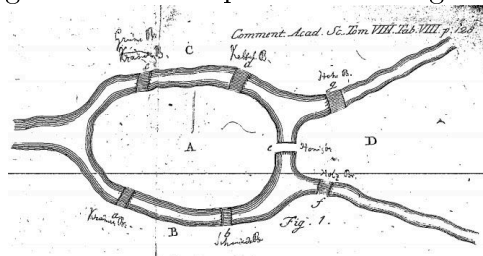
SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 CONCEITOS PRELIMINARES	17
2.1 DEFINIÇÕES	17
2.2 GRAU DO VÉRTICE	24
2.3 TIPOS COMUNS DE GRAFOS	27
2.4 GRAFOS PLANARES.....	31
3 COLORAÇÃO DE ARESTAS	37
3.1 TEOREMA DE VIZING.....	39
3.2 EXEMPLOS ENVOLVENDO COLORAÇÃO DE ARESTAS	46
4 COLORAÇÃO DE VÉRTICES	49
4.1 DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES	49
4.2 TEOREMA DE BROOKS	53
5 TEOREMAS DE COLORAÇÃO DE MAPAS	57
5.1 MOTIVAÇÃO HISTÓRICA DO TEOREMA DAS QUATRO CORES	57
5.2 TEOREMA DAS CINCO CORES.....	59
5.3 UMA IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DAS QUATRO CORES	61
5.4 EXEMPLOS ENVOLVENDO COLORAÇÃO DE MAPAS.....	66
6 APLICAÇÃO EM SALA	69
7 CONCLUSÃO	79
REFERÊNCIAS	81

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história, muitos foram os problemas que levaram a novas ideias e novas criações. Isso não é diferente nos estudos da matemática. Por exemplo, a Teoria de Grafos quase que certamente começou quando em 1735, Leonhard Euler¹ resolveu um problema popular em Königsberg (ALEXANDERSON, 2006), conhecido como o Problema das Sete Pontes de Königsberg. Na época pertencente à Prússia (atual território da Rússia chamada hoje de Kaliningrado), (SAMPAIO, 2002), esta cidade era dividida em quatro regiões A , B , C e D e conectada por sete pontes, como ilustrado na Figura 1.

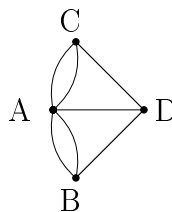
Figura 1: As sete pontes de Königsberg.



Fonte: Extraído de (EULER, 1741, p.128).

O problema surgiu quando os moradores da cidade indagaram se era possível, partindo de uma das quatro regiões, passar uma única vez por cada uma das sete pontes, e retornar à região de origem. Segundo (SAMPAIO, 2002, p.1) “Euler pensou: este é um tipo de problema no qual as distâncias envolvidas são irrelevantes. O que importa é como as várias porções de terra estão interligadas entre si”. Euler representou esse problema geometricamente, como na Figura 2, em que as terras são os pontos: A , B , C e D , e as pontes são as linhas.

Figura 2: O mapa representado por Euler.



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (SAMPAIO, 2002).

A Figura 2 é um exemplo da representação do problema usando grafos. Sendo

¹Leonhard Euler (1707-1783) foi um grande matemático e físico suíço que realizou significativas descobertas que perpassaram muitos campos das ciências exatas.

assim, a forma que Euler buscou para solucionar o problema é considerado o primeiro uso da Teoria de Grafos (ROONEY, 2012).

Foram muitos os problemas resolvidos pela Teoria de Grafos. Um deles, o *Teorema das Quatro cores*, que surgiu em 1852 pelo matemático *Francis Guthrie*² que trabalhava em colorir mapas da Inglaterra, de modo que as regiões vizinhas tenham cores diferentes. Ele percebeu que não precisava mais de 4 cores para colorir os mapas, (SOUSA, 2001). Assim surgiu a conjectura de que são necessárias no máximo 4 cores para colorir um mapa de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas. Contudo, o Teorema levou 124 anos para ser provado.

O objetivo deste trabalho é apresentar um material de apoio aos professores de matemática do ensino médio, em busca de auxiliá-los a expandir a curiosidade de seus alunos pela matéria em resolver problemas do seu dia a dia, usando a Teoria de Grafos. Para isso, este trabalho está organizado de uma forma simples e com exemplos que podem ser aplicados em sala de aula.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2 apresentaremos as principais definições da Teoria de Grafos e também alguns tipos importantes de grafos, como o grafo planar, que será fundamental para o Teorema das Quatro Cores do Capítulo 5.

Nos Capítulos 3 e 4, apresentaremos a coloração de grafos bem com suas definições e exemplos de resolução de problemas colorindo vértices e/ou arestas. Estes problemas de coloração de grafos consistem em achar o menor número de cores necessários para colorir o grafo, que às vezes não é uma tarefa fácil. Apresentaremos nos capítulos e demonstraremos dois dos principais teoremas: o Teorema de Vizing para coloração de arestas e o Teorema de Brooks para coloração de vértices, que fornecem um limitante para encontrar o menor número de cores necessários para colorir o grafo.

Já no Capítulo 5, apresentaremos a história do Teorema das Quatro Cores, o surgimento do *Teorema das Cinco cores*, sua demonstração, além da ideia de demonstração do Teorema das Quatro Cores e algumas aplicações. Em seguida, no Capítulo 6 teremos alguns exemplos de aplicações em sala de aula.

²Francis Guthrie (1831-1899) Foi um advogado, matemático e botânico.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo, buscamos definir alguns conceitos fundamentais que serão importantes para os próximos capítulos. As definições, conceitos e conteúdos desse capítulo estão baseados nas referências (JURKIEWICZ, 2009), (PRESTES, 2016), (HARRIS; HIRST; MOSSINGHOFF, 2008), (ROSEN, 2009) e (BALAKRISHNAN; RANGANATHAN, 2012).

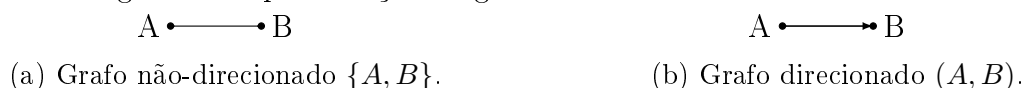
2.1 DEFINIÇÕES

Definição 1. *Um grafo é formado por um conjunto não vazio de **vértices** $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e um conjunto E de pares de vértices, chamados **arestas**. Denotamos o grafo por $G = (V, E)$.*

Sobre as arestas, elas podem ser ordenadas (*grafo direcionado*) ou não ordenadas (*grafo não-direcionado*). Dizemos que as arestas são ordenadas quando existir uma orientação quanto ao sentido da aresta, ou seja, uma aresta que começa em A e termina em B , denotada por (A, B) , é diferente de uma aresta (B, A) que começa em B e termina em A . Dessa forma, $(A, B) \neq (B, A)$. Já nas arestas não ordenadas o sentido não importa. Dessa forma, uma aresta que começa em A e termina em B é igual a uma aresta que começa em B e termina em A e denotamos por $\{A, B\}$ ou $\{B, A\}$.

Um exemplo de um grafo direcionado, são dois pontos turísticos, representados pelos vértices A e B , conectados somente por uma estrada de mão única. Neste caso, a estrada representa a aresta direcionada por (A, B) , se for do sentido A para B ou (B, A) se for do sentido B para A . Um exemplo de um grafo não-direcionado é a amizade entre duas pessoas A e B em uma rede social. Podemos dizer que se A é amigo de B então necessariamente B é amigo de A , isto é, $\{A, B\} = \{B, A\}$. A Figura 3 mostra as representações gráficas de uma aresta num grafo não-direcionado e de um direcionado respectivamente.

Figura 3: Representação de grafo não-direcionado e direcionado.

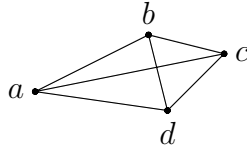


Fonte: Elaborada pelo autor.

Dado um grafo G , denotaremos por $V(G)$ seu conjunto de vértices e $E(G)$ seu conjunto de arestas. Sempre que estiver claro pelo contexto, denotaremos os conjuntos de vértices e arestas de um grafo $G = (V, E)$ simplesmente por V e E . Por exemplo, a Figura 4

representa o grafo G em que a, b, c e d são seus vértices e $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ e $\{c, d\}$ são, desta forma, as arestas de G .

Figura 4: Grafo G .

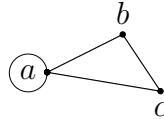


Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 4 temos os seguintes conjuntos: $V = \{a, b, c, d\}$ e $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$. Denotaremos a cardinalidade dos conjuntos de vértices e arestas por $|V|$ e $|E|$, respectivamente. Observa-se na Figura 4 que o número de vértices é $|V| = 4$ e o número de arestas é $|E| = 6$.

Quando os dois vértices de uma aresta são na verdade o mesmo, dizemos que tal aresta é um *laço*. Na Figura 5, ocorre um laço no vértice a , denotado pela aresta $\{a, a\}$, que vai do vértice a a ele mesmo.

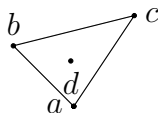
Figura 5: Laço em a .



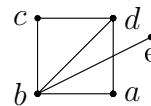
Fonte: Elaborada pelo autor.

Se em um grafo G existe uma aresta $\{a, b\}$ (ou (a, b)) que associa os vértices a e b , dizemos que tais vértices são *adjacentes ou vizinhos* e que a aresta $\{a, b\}$ é *incidente* sobre estes vértices. Se um vértice não possui arestas incidentes, tal vértice é chamado de *isolado*, por exemplo, o vértice d na Figura 6 (a). Se um vértice tiver somente uma aresta de incidência chamamos de vértice *pendente*, como mostra a Figura 6 (b).

Figura 6: Grafos com vértice isolado e pendente.



(a) Vértice d isolado.



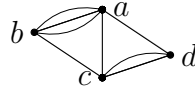
(b) Vértice e pendente.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando duas ou mais arestas possuem os mesmos vértices terminais, as chamaremos de *paralelas*. Na Figura 7, os vértices a e b tem três arestas associadas a eles: estas

arestas são paralelas. Também nos vértices c e d há duas arestas associadas a eles que também são paralelas.

Figura 7: Arestas paralelas

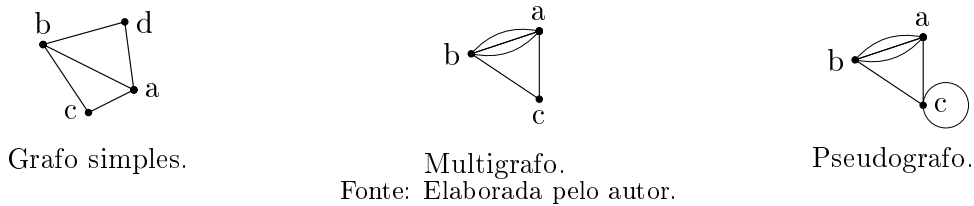


Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2. Um grafo que não possuir arestas paralelas e nem laços é chamado de **grafo simples**. Caso o grafo possua arestas paralelas chamaremos de **multigrafo**.

Alguns autores consideram multigrafo também com laços e outros chamam estes de *pseudografo* como (ROSEN, 2009), (HARRIS; HIRST; MOSSINGHOFF, 2008) e (PRESTES, 2016), deixando o termo multigrafo para casos que não tem laços, como mostra a Figura 8.

Figura 8: Exemplos de grafos simples, multigrafo e pseudografo.



Grafo simples.

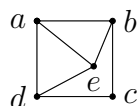
Multigrafo.

Pseudografo.

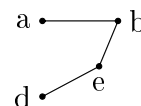
Fonte: Elaborada pelo autor.

No grafo existe o conceito de *caminho*, mas antes de definir, veja o seguinte exemplo: uma pessoa deseja fazer um passeio no parque, cujo mapa do parque é dado pela Figura 9 (a), em que os pontos são as ilhas e as arestas as pontes. A pessoa deseja passar pelas ilhas a , b , d e e e pelas pontes $\{a, b\}$, $\{b, e\}$ e $\{e, d\}$, a Figura 9 (b) mostra o trajeto da pessoa. Esse trajeto é chamado de *passeio*.

Figura 9: Exemplo de um passeio.



(a) Grafo do mapa do parque.



(b) Trajeto do passeio.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 3. Um passeio no grafo G consiste em uma sequência finita de vértices adjacentes. Quando o passeio começa e termina num mesmo vértice chama-se de **passeio**

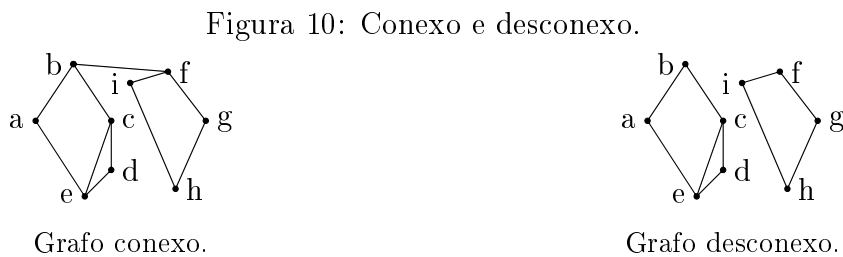
fechado. Agora, se um passeio começar por um vértice e terminar em um outro e sem repetir os vértices e as arestas, chamamos de **caminho**. Um caminho que começa e termina em um mesmo vértice é chamado de **ciclo**.

Definição 4. Um grafo G é **Euleriano** se existe um passeio fechado passando uma única vez nas arestas.

Definição 5. Seja G um grafo. Dizemos que dois vértices u e v de G estão **conectados** se existir um caminho entre eles em G , denotemos esse caminho por $u - v$.

Definição 6. Um grafo G é dito **conexo**, se existir um caminho entre quaisquer pares de vértices. Caso contrário, dizemos que G é **desconexo**.

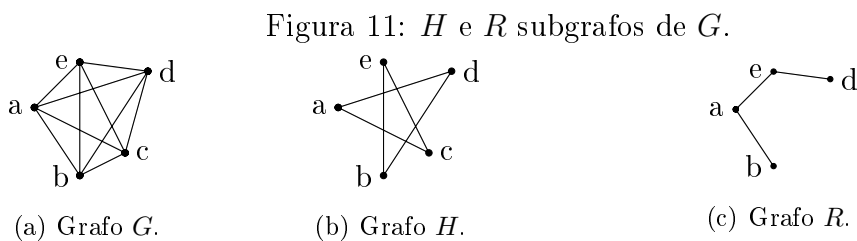
A Figura 10 mostra respectivamente o grafo conexo e o grafo desconexo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 7. Sejam G e H grafos. Dizemos que H é um **subgrafo** de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Nesse caso, denotamos por $H \subseteq G$.

Por exemplo, na Figura 11, os grafos H e R são subgrafos de G , pois $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$ e também $V(R) \subseteq V(G)$ e $E(R) \subseteq E(G)$, mas observa-se que R não é subgrafo de H , pois $\{a, e\} \in E(R)$ mas não pertence a $E(H)$.

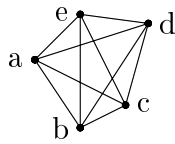


Fonte: Elaborada pelo autor.

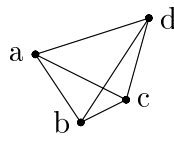
Definição 8. Sejam $Q \subseteq G$ e $S \subseteq V(G)$. Dizemos que Q é um **subgrafo induzido** por S , se $V(Q) = S$ e $E(Q)$ é formado por todas as arestas de G cujas extremidades estão em S . Denotamos o subgrafo induzido por S , por $G[S]$.

Definição 9. Sejam P um subgrafo de G e $A \subset E(G)$. Dizemos que P é um **subgrafo induzido** por A , se $E(Q) = A$ e $V(Q)$ é formado por vértices de G que são as extremidades das arestas de A . Denotamos o subgrafo induzido por A , por $G[A]$.

Figura 12: Exemplo de um grafo induzido.

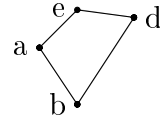


Grafo G .



Um subgrafo induzido de G .

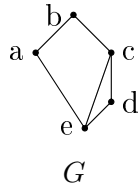
Fonte: Elaborada pelo autor.



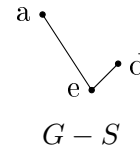
Um subgrafo de G mas não um subgrafo induzido de G .

Seja S um subconjunto de $V(G)$, denotamos por $G - S$ a *remoção* dos vértices S do grafo G . $G - S$ é um subgrafo contendo os vértices de G que não estão em S e as arestas de G que não são incidentes aos vértices de S (PRESTES, 2016). Veja o exemplo na Figura 13 para $S = \{b, c\}$. Caso a remoção de um vértice, digamos v , denotamos por $G - v$, como mostra na Figura 14.

Figura 13: Remoção de um subconjunto de vértice no grafo G .



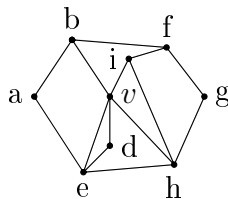
G



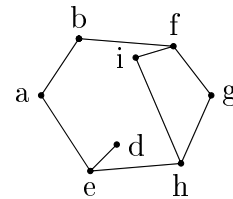
$G - S$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14: Remoção de um vértice no grafo G .



G



$G - v$

Fonte: Elaborada pelo autor.

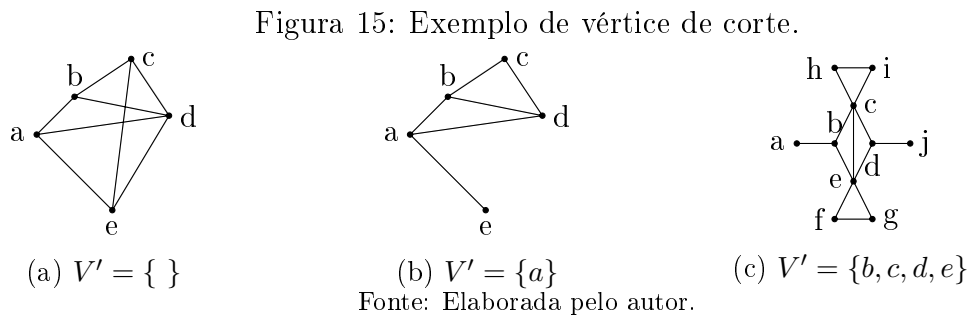
Se a é uma aresta de um grafo G , a remoção da aresta a do grafo G é denotado por $G - a$ que é um subgrafo de G sem a aresta a . Assim, se A é um subconjunto de $E(G)$, então $G - A$ é um subgrafo sem as arestas de A .

Definição 10. Dizemos que H é um **componente conexo** de G , se H é um subgrafo conexo de G que não é um subgrafo próprio de um outro subgrafo conexo de G .

Seja G um grafo e H um subgrafo de G . A remoção de H em G é um subgrafo contendo os vértices de G que não estão em H e as arestas de G que não estão em H e as arestas de G que não são incidentes aos vértices de H . Denotamos esse subgrafo por $G - H$.

Definição 11. Seja G conexo. Um subconjunto $V' \subseteq V(G)$ é um conjunto de **vértices de corte** de G se $G - V'$ é desconexo. Dizemos que é um k -corte se $|V'| = k$. Um vértice v de G é um vértice de corte se $G - v$ é desconexo.

Sobre o vértice de corte, a Figura 15 mostra três exemplos de grafos, em que a Figura 15 (a), não tem vértice de corte, pois se tirar qualquer um dos vértices continua conexo. No caso da Figura 15 (b) tem um vértice de corte que é o vértice a e a Figura 15 (c) tem quatro vértices de corte que são b, c, d e e .

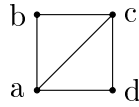


Definição 12. Um grafo G é **separável** se tem vértice de corte. Caso contrário, **não separável**.

Definição 13. Um **bloco** de G é um subgrafo maximal não separável. Se o grafo G não tem vértice de corte, então o próprio G é um bloco. Se o bloco conter um vértice de corte de G , chamamos de **bloco terminal**.

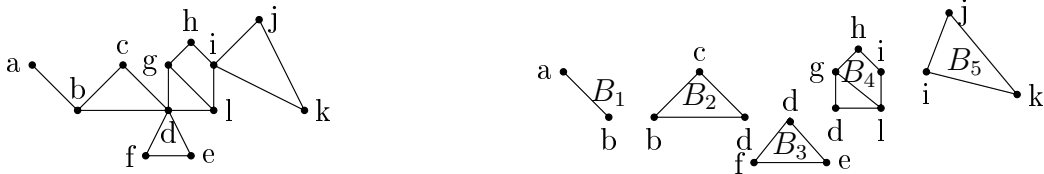
O grafo G da Figura 16 é um bloco, pois G não é separável e é maximal. Já a Figura 17 (a) mostra o grafo H e a Figura 17 (b) mostra os blocos de H . Os blocos B_1, B_3 e B_5 são blocos terminais, pois eles tem apenas um vértice de corte de H que são b, d e i respectivamente. O subgrafo formado pelos vértices d, g e l é não separável mas não é um bloco, pois não é maximal não separável.

Figura 16: Exemplo de um grafo G ser o próprio bloco.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17: Exemplos de blocos de um grafo.



(a) Grafo H .

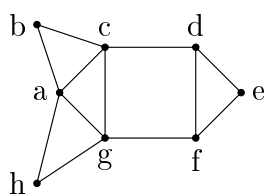
(b) Blocos B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

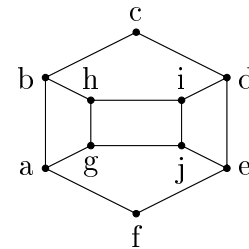
Definição 14. Conectividade de vértice de G é a cardinalidade do menor conjunto de vértice de corte de G . Denotamos simbolicamente por $\kappa(G)$.

Por exemplo, na Figura 18 temos dois grafos G e H , no grafo G o menor conjunto de vértice de corte tem dois elementos, logo $\kappa(G) = 2$. No grafo H , o menor conjunto de vértice de corte tem quatro elementos, assim $\kappa(H) = 4$.

Figura 18: Conectividade de vértice.



Grafo G , $\kappa(G) = 2$.

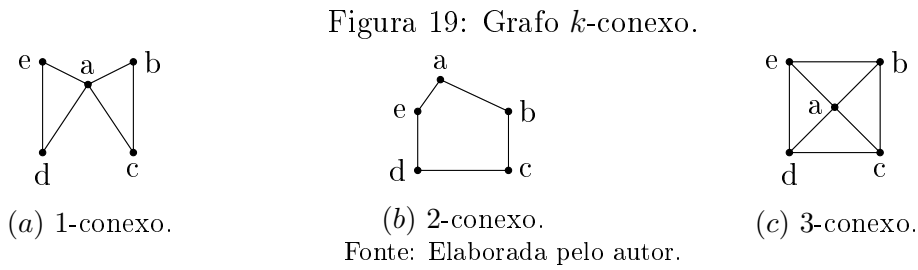


Grafo H , $\kappa(H) = 4$.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 15. Um grafo G é **k -conexo** quando $\kappa(G) \geq k$. Isto é, se retirarmos $k - 1$ vértices de G , G continua conexo.

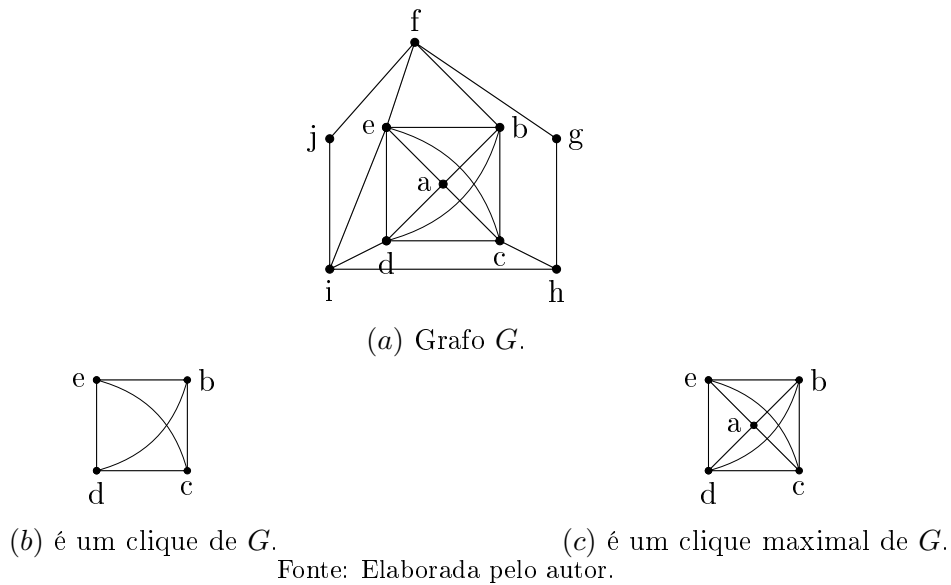
Para compreender melhor a Definição 15, são apresentados três exemplos de grafo na Figura 19. O primeiro grafo (a) é 1-conexo, pois se remover o vértice a temos um subgrafo desconexo. No grafo (b) é 2-conexo, pois se remover qualquer um dos vértices continuará conexo, se remover dois vértices não adjacentes como b e d desconectará o grafo G . Caso (c) é 3-conexo, pois se remover um ou dois vértices quaisquer continuará conexo, se remover três vértices adequados, como a, b e d o subgrafo será desconexo.



Definição 16. Dado um grafo G , um **clique** é um subconjunto $S \subseteq V$, tal que quaisquer dois vértices de S são adjacentes. Um clique de G é um clique maximal se não estiver propriamente contido em um outro clique de G .

A Figura 20 mostra os exemplos de cliques para o grafo G dado na Figura 20 (a) e nas Figura 20 (b) e (c) os cliques. Existem outros cliques de G além da figura (b) e (c), como os subgrafos formados pelos vértices $\{d, e, i\}$, $\{c, a, b\}$ e $\{e, f, b\}$. A Figura 20 (c) é um clique maximal, pois não existe um outro clique contendo ele. Já a Figura 20 (b) não é maximal, pois está contida em um outro clique, nesse caso o clique da Figura 20 (c).

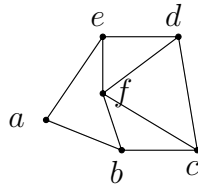
Figura 20: Exemplo de clique para um grafo.



2.2 GRAU DO VÉRTICE

Definição 17. O grau de um vértice v é o número de arestas incidentes nele. Denotamos por $d(v)$.

Por exemplo, a Figura 21, o vértice f tem grau $d(f) = 4$.

Figura 21: Grafo G .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em um grafo G qualquer, representamos o maior grau de um vértice de G por $\Delta(G)$ e o menor grau por $\delta(G)$. Por exemplo, a Figura 21, o maior grau é $\Delta(G) = 4$ e o menor $\delta(G) = 2$.

Veremos agora um lema que ajudará na demonstração do próximo teorema, ambos podem ser encontrados em (WILSON, 1979, p.32).

Lema 2.1. *Se G é um grafo com $d(v) \geq 2$ para quaisquer $v \in V(G)$, então G contém um ciclo.*

Demonstração: Se G possui arestas paralelas ou laços, então G possui um ciclo. Agora se G é um grafo simples, considere um passeio partindo de um vértice qualquer, digamos v .

O vértice v é adjacente a um vértice, digamos v_1 de G , pois $d(v) \geq 2$. Como $d(v_1) \geq 2$, esse será adjacente a um outro vértice $v_2 \neq v$. Como $d(v_2) \geq 2$, v_2 será adjacente a um outro vértice v_3 , em que v_3 pode ser o vértice v ou um novo vértice. Se $v_3 = v$ temos um ciclo e se $v_3 \neq v$, esse será adjacente a um outro vértice v_4 . O vértice v_4 pode ser um dos vértices já escolhidos anteriormente menos o v_2 , pois é um grafo simples, ou pode ser um novo vértice. Se v_4 for um dos vértices já escolhidos teremos um ciclo. Se v_4 for um novo vértice esse será adjacente a um outro vértice e assim sucessivamente.

Como a quantidade de vértices é finito, essa sequência vai até um vértice, digamos v_k e esse vértice tem $d(v_k) \geq 2$ e pela construção da sequência v_k é adjacente com v_{k-1} , mas como $d(v_k) \geq 2$ tem que ser adjacente a um dos vértices já escolhidos anteriormente, assim, formando um ciclo. ■

O teorema a seguir é o *Teorema de Euler* que envolve o grau dos vértices, e esse teorema será usado para resolver o problema das sete pontes de Königsberg. Para mais detalhes, veja (JURKIEWICZ, 2009).

Teorema 2.2. *Um grafo G conexo é Euleriano se, e somente se, todos os vértices de G tem grau par.*

Demonstração: Se G é Euleriano, então temos um passeio fechado em G que passa por todas as arestas uma única vez e podendo repetir os vértices. Como o passeio é fechado,

toda vez que um vértice v de G é visitado são utilizadas duas arestas: uma de entrada e outra de saída. Sendo cada aresta visitada uma única vez, temos então que cada vez que um vértice é visitado, um novo par de arestas de entrada/saída é utilizado. Portanto o grau de cada vértice visitado é par. Como G é conexo, todos os vértices são visitados.

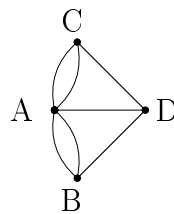
Vamos provar a volta por indução sobre o número de arestas de G . Suponha que cada vértice de G tem grau par. Como G é conexo e $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V(G)$, o Lema 2.1 garante a existência de um ciclo no grafo G .

Seja A o conjunto de todas as arestas do ciclo. Se $A = E(G)$, então G é Euleriano. Se $A \subset E(G)$, tome $H = G - A$ um subgrafo de G , em que o grau dos vértices de H continua sendo par e H podendo ser desconexo.

Pela hipótese de indução, cada componente de H tem um passeio fechado e como G é conexo, existe em cada componente de H pelo menos um vértice em comum ao ciclo. Assim, re-conectando os vértices dos passeios fechados de cada componente de H que pertencem ao ciclo, obtemos um passeio fechado em G . ■

O problema das sete pontes de Königsberg que foi citado na introdução pode ser resolvido usando o Teorema 2.2. Para tal problema, segundo (RABUSKE, 1992, p.3), Euler provou que é impossível passar por todas as pontes uma única vez, pois para cada vértice teria que ter uma quantidade par de arestas, sendo que cada vez que o passeio fechado chega em um vértice, esse terá duas novas arestas, uma de chegada e a outra de saída. Então, pelo Teorema 2.2 será impossível, pois todos os vértices do grafo da Figura 22 tem grau ímpar, tendo que passar pelo menos uma ponte mais de uma vez.

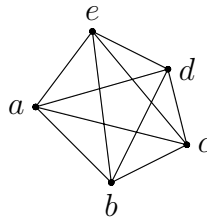
Figura 22: As pontes de Königsberg.



Fonte: Elaborada pelo autor com base em (SAMPAIO, 2002).

Exemplo 2.3. *Uma turma de educação física pretende fazer um campeonato de basquete 3×3 , uma das novas modalidades olímpicas. Essa turma formou cinco equipes nomeadas de a, b, c, d e e e cada equipe jogará uma única vez com outra equipe. Quantos jogos cada equipe jogará e quantos jogos serão realizados?*

Uma resposta possível para tal problema é o seguinte: considere as equipes como vértices e os jogos como arestas. Por exemplo, aresta $\{a, e\}$ representa a partida realizada pelas equipes a e e . Segue abaixo um diagrama que modela o problema.

Figura 23: Grafo G : Representação dos jogos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos observar na Figura 23 que todos os vértices têm grau quatro. Disso, concluímos que cada equipe jogará quatro partidas. E para responder a outra pergunta precisamos saber quantas arestas há no grafo G , pois cada aresta representa um jogo, nesse caso, $|E(G)| = 10$ jogos serão realizados.

Neste exemplo podemos notar que a soma do grau dos vértices é igual ao dobro da quantidade de arestas. Esta observação na verdade é válida para qualquer grafo simples.

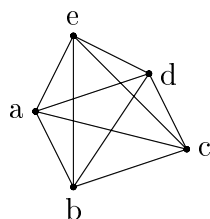
Proposição 2.4. *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. Então:*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E|. \quad (2.1)$$

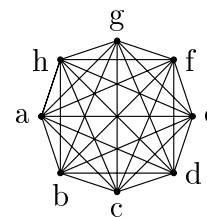
Demonstração: Ao contar o grau de um vértice, estamos contando as arestas incidentes a ele. Como cada aresta é incidente a dois vértices, então estamos contando as arestas duas vezes. ■

2.3 TIPOS COMUNS DE GRAFOS

Grafo completo. Um grafo é completo quando todo vértice é adjacente a todos os outros vértices. Denotamos tais grafos por K_n em que n é o número de vértices. Veja os exemplos das Figuras 24 e 25.

Figura 24: Grafo completo K_5 .

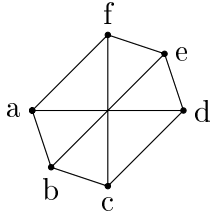
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25: Grafo completo K_8 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

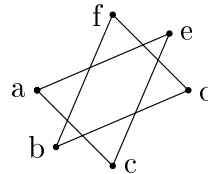
Grafo complementar. Seja G um grafo. Dizemos que \overline{G} é complementar de G se $V(\overline{G}) = V(G)$ e se $E(\overline{G}) = \{v_i v_j \mid v_i \text{ e } v_j \in V, i \neq j, v_i v_j \notin E(G)\}$. Observa-se nas Figuras 26 e 27 que a união das arestas de um grafo e as de seu complementar resultam em um grafo completo, como mostra a Figura 28.

Figura 26: Grafo G .



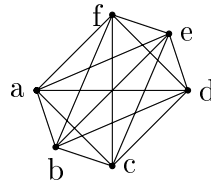
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 27: Grafo \overline{G} .



Fonte: Elaborada pelo autor.

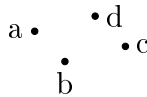
Figura 28: Grafo formado pela união das arestas de $E(G)$ e $E(\overline{G})$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Grafo nulo ou vazio. É o grafo que não tem arestas, isto é, $E(G) = \emptyset$.

Figura 29: Grafo nulo ou vazio.



Fonte: Elaborada pelo autor.

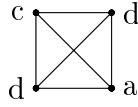
Grafo trivial. É um grafo com apenas um vértice e nenhuma aresta.

Figura 30: Grafo trivial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

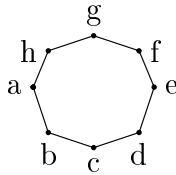
Figura 31: Grafo 3-regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

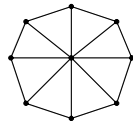
Grafo regular. É um grafo no qual todos os vértices têm o mesmo grau. Se todos os vértices tem grau k , chamamos de k -regular. A Figura 31, mostra um grafo regular com todos os vértices de grau 3.

Grafo ciclo. É um grafo conexo e regular com vértices de grau dois. Pode-se pensar que é um caminho passando por todos os vértices uma única vez e voltando no vértice de origem. Denotamos esse grafo por C_n , em que n é o número de vértices. Se n for par chamamos de *ciclo par* e se n for ímpar chamamos de *ciclo ímpar*. Na Figura 32, pode-se observar que o número de vértices é igual ao número de arestas, isso sempre acontece quando for um grafo ciclo.

Figura 32: Grafo ciclo C_8 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Grafo roda. É um grafo formado por um ciclo C_{n-1} junto com um vértice central de grau $n - 1$, e esse vértice é adjacente a todos os vértices do ciclo. Denotamos esse grafo por W_n , em que n é o número de vértices.

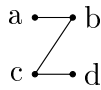
Figura 33: W_9 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

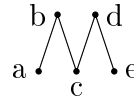
Figura 34: W_4 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Grafo caminho. É um grafo com $n + 1$ vértices e n arestas, em que o grau do primeiro e último vértice é 1 e dos demais é 2. Denotamos esse caminho por P_n , em que n é o número de arestas.

Figura 35: P_3 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 36: P_4 .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Árvore. É um grafo conexo que não contém ciclos. Em uma árvore, o número de arestas é sempre uma unidade menor que o número de vértices, isto é, $|V| = |E| + 1$.

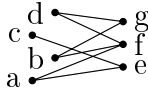
Figura 37: Árvore.



Fonte: Elaborada pelo autor.

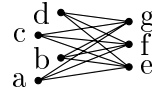
Grafo bipartido. É um grafo cujo conjunto de vértices V pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 , tal que, o conjunto das arestas é um subconjunto de $V_1 \times V_2$ e não existem arestas em $V_1 \times V_1$, nem em $V_2 \times V_2$. Se cada elemento de V_1 é conectado a todos os elementos de V_2 , chamamos de grafo bipartido completo e denotamos por $K_{n,p}$, para $n = |V_1|$ e $p = |V_2|$. Veja as Figuras 38 e 39.

Figura 38: Bipartido.



Fonte: Elaborada pelo autor.

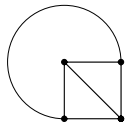
Figura 39: Bipartido Completo.



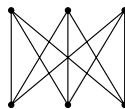
Fonte: Elaborada pelo autor.

Grafo planar. É um grafo que pode ser desenhado no plano, de modo que as arestas não se cruzam, exceto em vértices que são incidentes. Caso contrário, chamamos de *grafo não planar*.

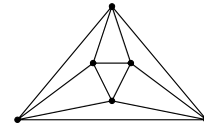
Figura 40: Grafo planar e não planar.



(a) Grafo planar



(b) Grafo não planar



(c) Grafo planar

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 40 (a) e (c) são grafos planares, pois não tem arestas se cruzando, só se encontram nos vértices. A Figura 40 (b) é um grafo não planar, pois têm duas arestas que se cruzam fora dos vértices.

Na próxima seção apresentaremos alguns resultados teóricos sobre grafos planares que serão importantes no desenvolvimento do Capítulo 5.

2.4 GRAFOS PLANARES

Como acabamos de definir, um **grafo planar** é um grafo cujas arestas só se encontram nos vértices. A Figura 41 mostra dois grafos planares.

Figura 41: Grafos planares.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As Figuras 41 (a) e (b) são exemplos de representação de poliedros, em que a Figura 41 (a) é uma forma de representar o tetraedro e a Figura 41 (b) representa um cubo.

Quando falamos de poliedros convexos na geometria, estes são formados por uma reunião finita de polígonos conexos, chamados de *faces* do poliedro. Denotaremos o número de faces do poliedro por $f = |F|$. As intersecções dos lados e dos vértices dos polígonos são, respectivamente, as arestas e os vértices do poliedro. Denotaremos por $a = |E|$ o número total de arestas, bem como, $v = |V|$ o número total de vértices.

É bem conhecido da geometria que, para poliedros convexos, a fórmula de Euler é válida, $|V| + |F| - |E| = 2$ (LIMA, 1985). A seguir faremos sua dedução para grafos planares.

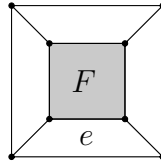
Ao representar um grafo planar no plano, as arestas e os vértices do grafo dividem o plano em áreas. A área de um grafo planar é a parte do grafo limitada pelas arestas, como mostra a área F da Figura 42.

Definição 18. Dizemos que uma aresta *limita* a área F se e está em contato com F e com alguma outra área vizinha de F .

Por exemplo, na Figura 42 há seis áreas, chamaremos de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 e F_6 , como mostra a Figura 43. As áreas F_1, F_2, F_3, F_4 e F_5 são áreas limitadas e F_6 é uma área ilimitada, que é chamada de *área exterior*. Essas áreas chamamos de *faces* do grafo.

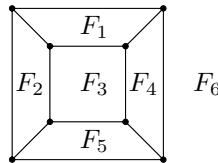
O grafo da Figura 43 é uma representação do cubo que tem seis faces, oito vértices e doze arestas, que são os mesmos valores do cubo. Podemos então, apresentar o seguinte

Figura 42: A parte cinza do grafo representa a área F .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 43: Faces de um grafo planar.



Fonte: Elaborada pelo autor.

teorema, cuja demonstração é baseada em (HARRIS; HIRST; MOSSINGHOFF, 2008, p.78).

Teorema 2.5. (*Fórmula de Euler*) Se G é um grafo planar conexo com $|V|$ vértices, $|E|$ arestas e $|F|$ faces, então $|V| + |F| - |E| = 2$.

Demonstração: Seja G um grafo planar conexo. Vamos provar por indução sobre o número de arestas $|E|$.

Se $|E| = 0$, então o grafo é completo com um vértice, isto é, K_1 . Isso acontece, pois G é conexo. Logo, o grafo G tem uma face e é ilimitada. Portanto, temos que $|E| = 0$, $|V| = 1$ e $|F| = 1$, que satisfaz a fórmula de Euler.

Suponha que a fórmula vale para $|E| = k$ arestas. Assim, $|V| + |F| - k = 2$ é a hipótese de indução. Vamos mostrar que vale para um grafo G com $|E| = k + 1$ arestas. Temos dois casos:

Caso a: Suponha que G é uma árvore.

Então, temos que $|V| = |E| + 1$ e como é uma árvore o número de faces é $|F| = 1$. Portanto, a fórmula de Euler é verificada:

$$|V| + |F| - |E| = (|E| + 1) + 1 - |E| = 2.$$

Caso b: Suponha que G não é uma árvore.

Então, existe um caminho fechado em G , digamos C que é um ciclo em G . Seja e uma aresta de C e considere o subgrafo $G - e$ de G . Observe que o subgrafo $G - e$ tem uma aresta e uma face a menos (já que C define uma face limitada) que o grafo G e a quantidade de vértices é a mesma. Como $G - e$ tem uma aresta a menos que G , podemos

usar a hipótese de indução em $G - e$:

$$|V| + (|F| - 1) - k = 2$$

Mas isto implica em

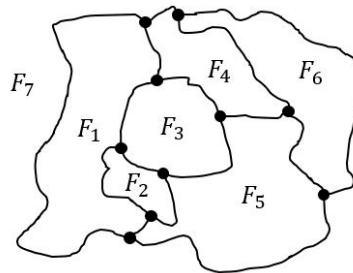
$$|V| + |F| - (k + 1) = 2$$

que mostra a validade da fórmula para G que possui $|E| = k + 1$ arestas. ■

Definição 19. O grau de uma face F é o número de arestas que limitam a face F . Denotamos por $L(F)$.

Por exemplo, o grau das faces da Figura 44 são $L(F_2) = L(F_6) = 3$, $L(F_3) = L(F_7) = 4$, $L(F_1) = L(F_4) = 5$ e $L(F_5) = 6$.

Figura 44: Grafo planar G com suas faces.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O seguinte teorema é um suporte para a demonstração do Teorema 2.7 que pode ser encontrado em (HARRIS; HIRST; MOSSINGHOFF, 2008, p.78).

Teorema 2.6. Seja G um grafo simples conexo e planar com $|V| \geq 3$. Então $|E| \leq 3|V| - 6$.

Demonstração: Seja G um grafo planar simples conexo e com três ou mais vértices. Temos dois casos:

Caso a: Existem pelo menos duas faces em G .

Considere a soma

$$S = \sum_F L(F)$$

sobre todas as faces do grafo planar G . Como G tem pelo menos duas faces e cada uma delas é limitada por pelo menos três arestas, temos $S \geq 3|F|$. Agora, como cada aresta pode estar na fronteira de no máximo duas faces, temos que $S \leq 2|E|$. Obtemos com as duas inequações: $3|F| \leq 2|E|$.

Pelo Teorema 2.5, temos

$$|V| + |F| - |E| = 2.$$

Isolando $|F|$ e substituindo em $3|F| \leq 2|E|$, temos

$$3(2 + |E| - |V|) \leq 2|E|$$

que implica em

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Caso b: *Existe uma face em G .*

Como G tem uma face e pelo Teorema 2.5, temos

$$|E| = |V| - 1 \leq |V|.$$

Pela hipótese, temos que $|V| - 3 \geq 0$, então

$$|E| \leq |V| \leq |V| + 2(|V| - 3) \leq 3|V| - 6.$$

Portanto, ambos os casos satisfazem a inequação $|E| \leq 3|V| - 6$. ■

O Teorema a seguir é importante para a coloração de mapas (que será discutida no Capítulo 5) e sua demonstração pode ser encontrado em (HARRIS; HIRST; MOSSINGHOFF, 2008, p.79).

Teorema 2.7. *Se G é um grafo planar simples e conexo, então $\delta(G) \leq 5$.*

Demonstração: Seja G um grafo planar simples e conexo. Se $|V| \leq 6$, então $d(v) \leq \Delta(G) \leq 5$ para todo $v \in V(G)$. Satisfazendo o resultado de $\delta(G) \leq 5$.

Se $|V| > 6$. Pela Proposição 2.4, temos

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E|. \tag{2.2}$$

Se cada vértice de G tem grau 6 ou mais, então a Equação (2.2) fica

$$6|V| \leq 2|E|. \tag{2.3}$$

Usando o Teorema 2.6 em (2.3), temos

$$6|V| \leq 2|E| \leq 2(3|V| - 6) \leq 6|V| - 12$$

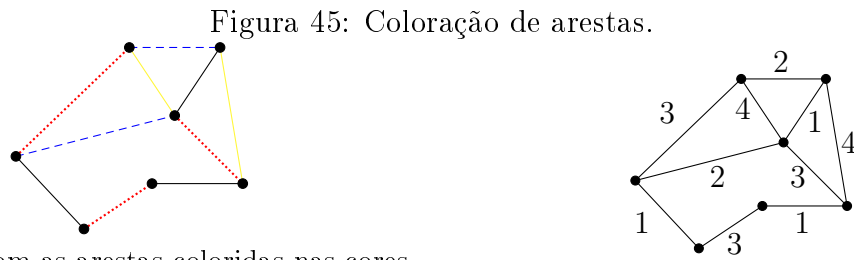
que é uma contradição. Logo, existe um vértice de G de grau menor que 6, isto é, $\delta(G) \leq 5$. ■

Os conceitos e resultados fundamentais que acabamos de estudar serão aplicados nos próximos capítulos em problemas de coloração de arestas, coloração de vértices e coloração de mapas.

3 COLORAÇÃO DE ARESTAS

Um problema famoso estudado na Teoria de Grafos é o problema das quatro cores. Esse problema consiste em colorir qualquer mapa utilizando apenas quatro cores, de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas (BALAKRISHNAN; RANGANATHAN, 2012). Podemos dizer que esse problema deu origem a *coloração de grafos*, no qual podemos atribuir cores, números ou símbolos aos vértices ou arestas de um grafo G , satisfazendo certas condições. Esse processo, denominado *coloração de arestas e/ou vértices*, será tratado neste e nos próximos capítulos.

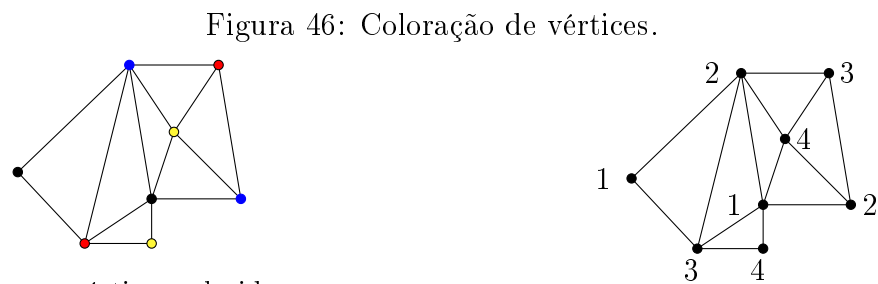
As Figuras 45 e 46, mostram exemplos de como colorir as arestas e os vértices respectivamente, com cores ou números.



(a) Grafo com as arestas coloridas nas cores preto, vermelho, azul e amarelo.

(b) Grafo colorido com números.

Fonte: Elaborada pelo autor.



(a) Grafo com os vértices coloridos nas cores preto, vermelho, azul e amarelo.

(b) Grafo colorido com números.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em problemas de coloração vamos sempre considerar grafos simples.

Definição 20. *Em problemas de coloração de arestas buscamos colorir as arestas de um grafo com o menor número de cores possível, de modo que arestas incidentes ao mesmo vértice possuam cores diferentes. Qualquer coloração de arestas com esta última propriedade é chamada coloração válida.*

Exemplo 3.1. *Suponha um grupo de pessoas formando duplas conforme o Quadro 3.1 para cumprir quatorze tarefas¹. Cada tarefa é realizada em uma hora e cada pessoa não pode executar mais de uma tarefa ao mesmo tempo. O problema resume-se em achar o menor tempo necessário para que todas as tarefas sejam realizadas.*

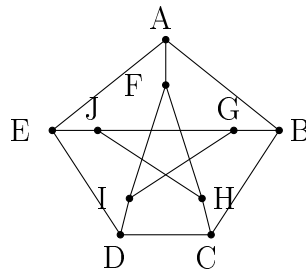
Quadro 3.1: As duplas.

Duplas
AB, AE, AF, BC, BG, CD, CH
DE, DI, EJ, FI, GI, HJ, JG

Fonte: Dados elaborados pelo autor deste trabalho.

O grafo da Figura 47 pode ser utilizado para visualizar esse problema, em que os vértices representam as pessoas e as arestas as tarefas que são realizadas em duplas.

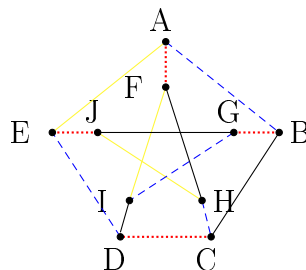
Figura 47: Grafo de Petersen P em que as arestas representam as duplas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para resolver o problema devemos encontrar uma coloração de arestas válida com o menor número de cores possível. Com essa coloração, o problema que era para descobrir o menor tempo, fica agora em descobrir o menor número de cores necessário para colorir as arestas do grafo, de modo que arestas incidentes ao mesmo vértice possuam cores diferentes.

Figura 48: Grafo de Petersen P colorido.



Fonte: Elaborada pelo autor.

¹Problema adaptado de (JURKIEWICZ, 2009)

Nesse exemplo foram usadas quatro cores para colorir as arestas, como mostra a Figura 48. Observamos também que as duplas com cores iguais, podem trabalhar no mesmo horário. Portanto, a forma que foi colorido nos permite dizer que foram necessárias quatro horas para realizar as tarefas, como mostra o Quadro 3.2, mas ainda não sabemos se este é o menor tempo.

Quadro 3.2: Dado coletados pela análise da coloração das arestas do grafo de Petersen.

Horário	Cor	Duplas
1	Vermelho	AF, CD, EJ, BG
2	Preto	DI, BC, FH, JG
3	Azul	AB, CH, DE, IG
4	Amarelo	AE, HJ, IF

Fonte: Dados elaborados pelo autor deste trabalho.

Para saber se esse é realmente o menor tempo necessário, precisamos determinar qual o menor número de cores para uma coloração válida do grafo associado.

Definição 21. Chamamos de índice cromático $\chi'(G)$ o menor número de cores necessário para resolver o problema de coloração de arestas.

Encontrar o índice cromático, não é uma tarefa fácil. Na próxima seção, apresentaremos um teorema que fornece limitantes para $\chi'(G)$.

3.1 TEOREMA DE VIZING

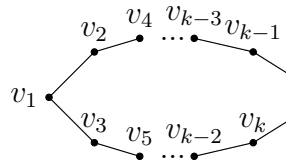
O Teorema de Vizing (VIZING, 1964) fornece os limitantes inferior e superior para o índice cromático. Antes de apresentar o teorema, precisamos de lemas que auxiliarão em sua demonstração, a qual é baseada em (SILVA, 2018).

Lema 3.2. Um grafo simples é 2-regular se, e somente se, seus componentes conexos são ciclos.

Demonstração: Seja G um grafo simples em que todos os componentes são ciclos. Então, os componentes são conexos e regulares com vértices de grau 2. Portanto, o grafo G é 2-regular.

Por outro lado, seja G um grafo simples e 2-regular. Considere um vértice qualquer de G , o qual denotamos por v_1 em um componente conexo de G , com k vértices, que denotaremos por C_k . Esse vértice tem grau 2, logo possui apenas dois vizinhos: v_2 e v_3 . Os vértices v_2 e v_3 , por sua vez, também têm grau 2 e, portanto, além de v_1 , são adjacentes a v_4 e v_5 , respectivamente. Como G é finito, obtemos um caminho de vértices até os vértices v_{k-1} e v_k , com $k \in \mathbb{N}$, como mostra a Figura 49.

Figura 49: Representação do caminho dos vértices



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sobre os vértices v_{k-1} e v_k , podem ocorrer dois casos: serem adjacentes entre eles ou não. Se os dois forem adjacentes, teremos um ciclo, caso contrário, v_k será adjacente a um outro vértice v_i , para $i = 2, 3, 4, \dots, k-3$ e v_{k-1} será adjacente a um outro vértice v_j , para $i = 2, 3, 4, \dots, k-4, k-2$. Assim, os vértices v_i e v_j teriam grau 3, o que contradiria o fato de G ser 2-regular. Portanto, C_k é um ciclo de G .

Se $G - C_k$ for vazio, então G será o próprio componente conexo. Caso contrário, $G - C_k$ será um subgrafo 2-regular e usando o argumento anterior, obtemos um outro componente conexo que é um ciclo e assim sucessivamente. Portanto, os componentes conexos de G são ciclos. ■

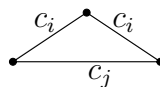
Para os próximos lemas, vamos considerar G um grafo simples com uma coloração válida que utiliza as cores c_0 até c_k , para $k \in \mathbb{N}$. Definimos que a cor c_i está disponível em um vértice v de G , se essa cor não foi usada para colorir as arestas incidentes a v . Denotaremos por D_i o conjunto de todas as cores disponíveis no vértice v_i e E_i o conjunto de todas as arestas de G coloridas com a cor c_i , com $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Lema 3.3. *Seja $H = G[E_i \cup E_j]$. Então, os componentes conexos de H ou são caminhos, ou então ciclos de comprimento par.*

Demonstração: Note que $\Delta(H) \leq 2$, pois do contrário haveria mais de 2 arestas incidentes em um mesmo vértice, recebendo uma mesma cor (por haver apenas duas cores), contradizendo o fato da coloração inicial de G ser válida.

Como $\Delta(H) \leq 2$, suponha que em um componente conexo de H todos os vértices tem grau dois. Então, pelo Lema 3.2 o componente é um ciclo, podendo ser de comprimento ímpar ou par. Se fosse ímpar (ver Figura 50), teria um vértice com duas arestas incidentes da mesma cor. Logo, é um ciclo de comprimento par.

Figura 50: Ciclo ímpar

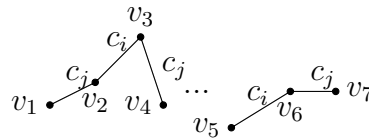


Fonte: Elaborada pelo autor.

Se em um componente conexo de H todos os vértices tem grau um, o componente é apenas uma aresta ligando dois vértices, digamos v_1 e v_2 . Logo, o componente é um caminho com uma aresta.

Se em um componente conexo há vértices de grau um e dois, suponhamos v_1 o vértice de grau um, que é adjacente ao outro vértice v_2 de grau dois, esse é adjacente a um outro vértice, digamos v_3 . Se v_3 tem grau um, temos um caminho com os extremos v_1 e v_3 . Se $d(v_3) = 2$, v_3 é adjacente a um outro vértice v_4 , podendo esse ser de grau um ou dois. Pensando na mesma forma que o vértice v_3 , temos uma sequência limitada de vértices, até o vértice v_k . Por sua vez, o vértice v_k pode ter grau um ou dois. Se $d(v_k) = 2$, v_k é adjacente a um outro vértice v_i , para $i = 2, \dots, k-2$, assim v_i passaria a ter grau 3, uma contradição. Segue que o grau de v_k é um. Portanto, obtemos um caminho em que os vértices dos extremos são v_1 e v_k de grau um e os demais grau 2, como mostra a Figura 51. ■

Figura 51: Componente conexo de H .

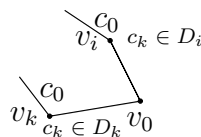


Fonte: Elaborada pelo autor.

Lema 3.4. *Seja G um grafo simples e considere uma coloração válida para G com cores c_0, \dots, c_k . Sejam os vértices v_0, v_i e v_k de $H = G[E_0 \cup E_k]$, tais que, v_i e v_k são vizinhos de v_0 . Suponha que o vértice v_k tem disponível a cor c_k e os vértices v_i e v_k não tem a cor c_0 disponível. Então, os vértices não pertencem ao mesmo componente conexo de H .*

Demonstração: Suponha que os vértices v_0, v_i e v_k estão no mesmo componente. Por hipótese c_0 não está disponível nos vértices v_k e v_i , e também a cor c_k está disponível em v_k e v_i , como mostra a Figura 52.

Figura 52: Componente conexo de H .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelo Lema 3.3 o componente conexo só pode ser um caminho, ou um ciclo de comprimento par. Ambos os casos tem um caminho que passa pelos vértice v_0, v_i e v_k ,

em que as cores das arestas ficam alternando entre c_0 e c_k (pois assumimos uma coloração válida para G). O vértice v_k tem a cor c_k disponível, logo a aresta $\{v_k, v_0\}$ tem que ser colorida pela cor c_k (ver a Figura 52), por consequência a aresta $\{v_i, v_0\}$ deve ser c_0 , mas isso é impossível, pois c_0 não está disponível no vértice v_i . Isso contradiz a coloração válida para G . Portanto, os vértices v_0, v_i e v_k não estão no mesmo componente conexo de H . ■

Teorema 3.5. (*Vizing*) Para qualquer grafo G simples, tem-se que

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Demonstração: Para provar a validade de $\Delta(G) \leq \chi'(G)$, basta notar que existe um vértice $v \in V(G)$, tal que $d(v) = \Delta(G)$. Então esse vértice precisa de $\Delta(G)$ cores para colorir as arestas incidentes a ele. Logo, G não admite uma coloração válida com menos que $\Delta(G)$ cores.

Agora, para provar $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ vamos supor por contradição que existe G , tal que $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$. Sem perda de generalidade, suponha G minimal, isto é, ao remover uma aresta $e = \{v_0, v_1\}$ de G temos que $\chi'(G - e) \leq \Delta(G - e) + 1$. Analisando essa inequação, temos dois casos:

Caso a: Se $\chi'(G - e) < \Delta(G - e) + 1$.

Nesse caso, observe que aplicando o limitante inferior temos $\Delta(G - e) \leq \chi'(G - e) \leq \Delta(G - e)$. Logo, $\chi'(G - e) = \Delta(G - e)$. Assim, se retornarmos a aresta e com uma nova cor, temos:

$$\chi'(G) = \chi'(G - e) + 1 = \Delta(G - e) + 1 \leq \Delta(G) + 1,$$

em que a última desigualdade segue do fato de G ser minimal.

Isso contradiz o fato de G ser um contra-exemplo minimal.

Caso b: Se $\chi'(G - e) = \Delta(G - e) + 1$.

Temos aqui dois subcasos.

b₁. $\Delta(G - e) = \Delta(G) - 1$.

Como, $\chi'(G - e) = \Delta(G - e) + 1 \stackrel{b_1}{=} \Delta(G) - 1 + 1 = \Delta(G)$, sobra uma nova cor para colorir a aresta e , e retornando ela com uma nova cor, temos:

$$\chi'(G) = \chi'(G - e) + 1 = \Delta(G) + 1$$

Contradizendo o fato de $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$.

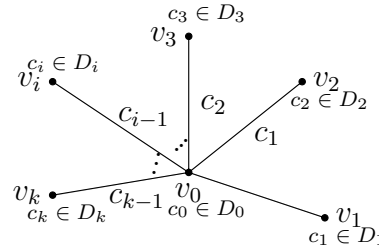
b₂. $\Delta(G - e) = \Delta(G)$

Neste caso, $\chi'(G - e) = \Delta(G - e) + 1 = \Delta(G) + 1$. Dessas igualdades temos que

todo vértice de $G - e$ tem pelo menos uma cor disponível.

Seja G' o subgrafo de G formado por v_0 e seus k vizinhos, com c_i a cor disponível ao vértice v_i , para $i = 0, 1, 2, \dots, k$ em que $k \in \mathbb{N}$, $k \leq d_G(v_0)$, c_i a cor das arestas $\{v_0, v_{i+1}\}$, para $i = 1, 2, \dots, k - 1$ e considere também D_i o conjunto de cores disponíveis no vértice v_i .

Figura 53: Subgrafo G' .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Essa construção de G' , como mostra a Figura 53, termina quando:

b_{2.1} : $c_k = c_0$ (cor disponível para v_0).

b_{2.2} : $c_i \in D_k$ para algum $i = 1, 2, \dots, k - 2$.

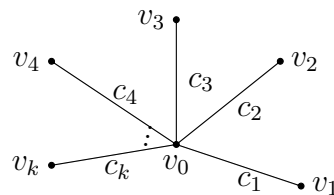
b_{2.2.1} : $c_0 \in D_k$.

b_{2.2.2} : $c_0 \in D_i$.

b_{2.2.3} : $c_0 \notin D_k$; $c_0 \notin D_i$.

Caso **b_{2.1}** : com $c_k \in D_0$ e $c_k \in D_k$, podemos reorganizar as cores das arestas do subgrafo G' da seguinte forma (ver Figura 54), a aresta $\{v_k, v_0\}$ com a cor c_k e as demais arestas $\{v_i, v_0\}$ com a cor c_i , para $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Com essa construção encontramos $\Delta(G) + 1$ cores para colorir G que contraria a hipótese de $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$.

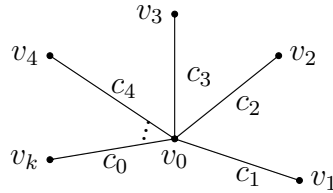
Figura 54: Subgrafo G' com a cor c_k na aresta $\{v_k, v_0\}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso **b_{2.2.1}** : com $c_0 \in D_k$ e $c_0 \in D_0$, podemos reorganizar as cores das arestas do subgrafo G' em que a aresta $\{v_k, v_0\}$ pode ser colorida com a cor c_0 (ver Figura 55), e as demais arestas $\{v_i, v_0\}$ com a cor c_i , para $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Novamente contradizendo a hipótese inicial.

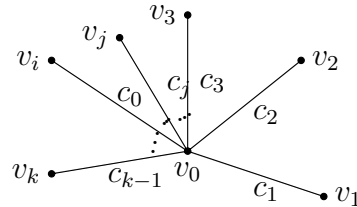
Figura 55: Subgrafo G' com a cor c_0 na aresta $\{v_k, v_0\}$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso **b_{2.2.2}** : se $c_0 \in D_i$, podemos recolorir o subgrafo G' da seguinte forma, a aresta $\{v_i, v_0\}$ com a cor c_0 e as arestas $\{v_j, v_0\}$ com a cor c_j , para $j = 1, 2, \dots, i - 1$ e as demais arestas mantêm as cores, como mostra a Figura 56. Dessa forma, temos também $\Delta(G) + 1$ cores para colorir G , contradizendo a hipótese inicial.

Figura 56: Subgrafo G' com uma nova ordem de coloração.



Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso **b_{2.2.3}** : se $c_i \in D_k$, $c_0 \notin D_k$ e $c_0 \notin D_i$ considere um subgrafo $H = G[E_0 \cup E_k]$ induzido por todas arestas de $G - e$ que estão com as cores c_0 e c_k . Pelo Lema 3.3, componentes conexos de H são caminhos ou ciclos de comprimento par e pelo Lema 3.4 os vértices v_0 , v_i e v_k não pertencem ao mesmo componente conexo. Assim, devemos recolorir o subgrafo H , escolhendo um dos componentes conexos de H que tem um dos vértices v_0 , v_i e v_k e trocando as cores das arestas entre c_0 e c_k do componente escolhido, isto é, a aresta com a cor c_0 passa a ser c_k e vice-versa.

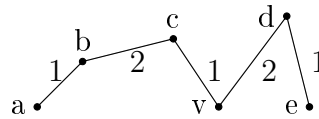
Supondo, sem perda de generalidade, que o caminho escolhido passa pelo vértice v_0 e em seguida trocando as cores, a cor c_0 passará a estar disponível no vértice v_0 e conseqüentemente a cor c_k fica disponível no vértice v_k . Logo, a aresta $\{v_i, v_0\}$ pode ser colorida pela cor c_i , para $i = 1, 2, 3, \dots, k$, obtendo uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de arestas

de G , contrariando a hipótese. O mesmo acontece para os casos que o caminho escolhido passe por v_i ou por v_k . ■

O Teorema de Vizing mostra que para qualquer grafo simples ou $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Apresentamos a seguir, exemplos destes dois casos.

Se G for um caminho, como mostra a Figura 57, em que $\Delta(G) = 2$ e $\chi'(G) = 2$. Lembrando que os números representam as cores.

Figura 57: Grafo G , $\Delta(G) = \chi'(G)$.

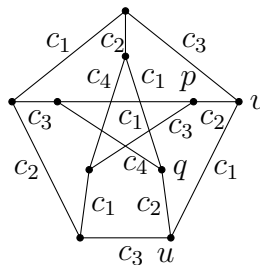


Fonte: Elaborada pelo autor.

Voltando ao Exemplo 3.1 do grafo de Petersen, foram usadas 4 cores para colorir o grafo P e concluímos que seriam necessárias quatro horas para cumprir as tarefas. Pela Definição 21 o tempo mínimo é dado por $\chi'(P)$ e pelo Teorema 3.5 temos que $3 \leq \chi'(P) \leq 4$.

Suponha que o tempo mínimo é 3, isto é, o grafo P pode ser colorido com 3 cores. Observe que o grafo P tem dois ciclos C_5 externo e interno. Seja $\{u, v\}$ uma aresta do ciclo externo, com a cor c_i para $i \in \{1, 2, 3\}$. Sejam q e p os vértices do ciclo interno adjacentes aos vértices u e v respectivamente (veja Figura 58). As arestas $\{u, q\}$ e $\{v, p\}$ não podem ser coloridas com a cor c_i . Assim, a cor c_i vai pertencer as arestas incidentes aos vértices q e p do ciclo interno do grafo P .

Figura 58: Grafo P com os vértice u, v, q e p .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como $\{q, p\}$ não é uma aresta do grafo P , então o ciclo interno tem duas arestas distintas com a cor c_i ; uma em relação ao vértice q e a outra no vértice p . Porém, o ciclo externo tem três cores, pois é um ciclo de ordem ímpar. Disso temos que cada uma

dessas três cores são usadas duas vezes no ciclo interno, que é uma contradição, pois o ciclo interno tem 5 arestas (NASERASR; ŠKREKOVSKI, 2003). Logo o $\chi'(P) = 4$, pois não conseguimos colorir o grafo P com apenas 3 cores.

3.2 EXEMPLOS ENVOLVENDO COLORAÇÃO DE ARESTAS

Nesta seção vamos apresentar dois problemas que podem ser resolvidos pelos conceitos de coloração arestas.

Exemplo 3.6. *Suponha que 4 professores P_1, P_2, P_3, P_4 irão entrevistar 5 estudantes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 de modo a cada professor entrevistar um aluno e que cada aluno não pode ser entrevistado por dois ou mais professores ao mesmo tempo². O Quadro 3.3 mostra quais são os alunos que os professores irão entrevistar.*

Supondo que cada entrevista leva uma hora, qual o menor tempo que os professores levam para fazer todas as entrevistas?

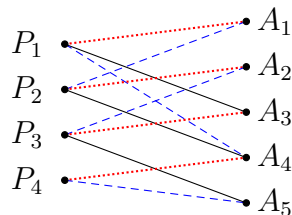
Quadro 3.3: Apresenta os alunos (A) que serão entrevistados pelos professores (P).

Professores	Alunos
P_1	A_1, A_3, A_4
P_2	A_1, A_2, A_4
P_3	A_2, A_3, A_5
P_4	A_4, A_5

Fonte: Dados elaborados pelo autor deste trabalho.

Para responder a pergunta vamos reescrever o Quadro 3.3 na forma de um grafo bipartido com as arestas coloridas e cada cor corresponderá a um horário. Portanto, para encontrar o menor tempo para as entrevistas, basta encontrar o menor número de cores para colorir as arestas do grafo da Figura 59, isto é, χ' .

Figura 59: Grafo G dos dados do Quadro 3.3



Fonte: Elaborada pelo autor.

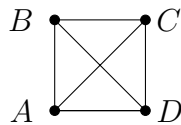
²Problema adaptado de (JURKIEWICZ, 2009).

A Figura 59 mostra o grafo G montado com os dados das entrevistas conforme o Quadro 3.3, usando 3 cores. Neste caso, como as cores representam as horas, então será necessário pelo menos três horas para fazer as entrevistas. O menor tempo para entrevistar todos é $\chi'(G)$. Pelo Teorema 3.5, temos $3 \leq \chi'(G) \leq 4$. Como o grafo G foi colorido com três cores, segue que $\chi'(G) = 3$.

Exemplo 3.7. *Um grupo de quatro escoteiros faz um trabalho comunitário em visitar famílias de um determinado bairro em duplas, de modo que a cada dia formam-se novas duplas. Quantos dias serão necessários para que cada escoteiro tenha formado dupla com todos os outros?*

Vamos considerar nesse exemplo um grafo G em que os vértices representam os escoteiros A, B, C e D e as arestas as duplas. Como cada escoteiro fará dupla com todos, teremos um grafo completo, conforme a Figura 60.

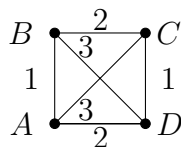
Figura 60: Representação das duplas no grafo G .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para responder esse exemplo, vamos colorir as arestas, como a Figura 61, em que as cores 1, 2 e 3 representaram os dias. Neste caso, observe que não pode existir um vértice com arestas de mesma cor, pois, não tem como um escoteiro fazer uma dupla ao mesmo tempo com qualquer um dos outros escoteiros.

Figura 61: Coloração de arestas do grafo G .



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 61 mostra uma forma de colorir as arestas do grafo G utilizando três cores. Como $\Delta(G) = 3$ e pelo Teorema 3.5, temos que $3 \leq \chi'(G) \leq 4$. Portanto, serão necessários três dias, em que no primeiro dia as duplas serão AB e CD , segundo dia AD e BC e terceiro dia AC e BD .

4 COLORAÇÃO DE VÉRTICES

O problema de coloração de vértices em um grafo simples consiste em colorir os vértices do grafo com o menor número de cores, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas. A seguir, apresentamos algumas definições para a coloração de vértices, baseado em (WEST et al., 1996).

4.1 DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

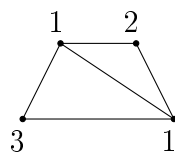
Definição 22. Uma k -coloração de vértices de G é uma função $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Essa coloração é própria se para todo par de vértices adjacentes x, y de G temos que $f(x) \neq f(y)$.

Definição 23. Um grafo G é k -colorível se G admite uma k -coloração própria.

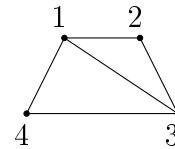
Definição 24. O número cromático $\chi(G)$ de um gráfico G é o menor valor k , tal que G é k -colorível. Se $\chi(G) = k$, então G é k -cromático.

Considerando os exemplos (a), (b) e (d) da Figura 62, eles têm o mesmo formato, porém as formas de colorir são diferentes. No exemplo (b), temos uma 4-coloração de vértices e além disso, cada vértice tem uma cor diferente das outras, então podemos dizer que ele é 4-colorível. Já no exemplo (a) temos uma 3-coloração de vértices que não é própria, pois têm dois vértices adjacentes com a mesma cor.

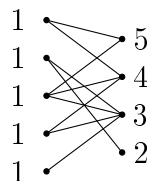
Figura 62: Exemplos de k -coloração



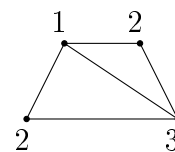
(a) Grafo com uma 3-coloração.



(b) Grafo com uma 4-coloração própria ou 4-colorível



(c) Grafo bipartido 5-colorível, mas 2-cromático.



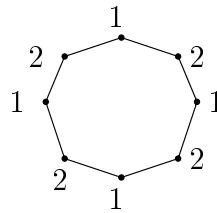
(d) Grafo 3-cromático.

Fonte: Elaborada pelo autor.

No exemplo (d) da Figura 62 o grafo é 3-cromático, pois é 3-colorível e são necessários no mínimo três cores para colorir o tal grafo. No exemplo (c) da Figura 62, temos um grafo bipartido e 2-colorível, pois possui duas partições que podem ser coloridas, cada uma com uma cor. Portanto, precisamos no mínimo duas cores, logo, o grafo é 2-cromático.

Vamos estudar o número cromático de alguns tipos especiais de grafo. Para um grafo ciclo C_n , seu número cromático pode ser 2 ou 3. Se $\chi(C_n) = 2$, então o número de vértices n é par. Pois, se ordenar os vértices em v_1, v_2, \dots, v_n , com n par e colorindo os vértices entre as cores 1 e 2, de modo que os vértices de ordem ímpar fiquem com a cor 1 e os de ordem par com a cor 2. Isso é possível, o único lugar que poderia dar problema seria nos vértices v_1 e v_n onde o ciclo fecha e como v_n está com a cor 2 e v_1 com a cor 1 o ciclo fecha com vértices adjacentes de cores diferentes. Logo, $\chi(C_n) = 2$. A Figura 63 mostra um caso em que $n = 8$ e $\chi(C_8) = 2$.

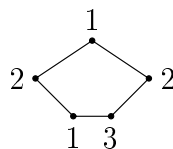
Figura 63: Grafo C_8 com as cores 1 e 2 intercaladas nos vértices.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se $\chi(C_n) = 3$, então o número de vértices n é ímpar. Pois, fazendo o mesmo no caso anterior o ciclo fecha nos vértices v_1 e v_n , mas n é ímpar, logo v_1 e v_n ficariam com a mesma cor que não é possível, pois são adjacentes. Assim, v_n tem que ser recolorido, mas não pode ser com a cor 2, pois o outro vértice adjacente com v_n é v_{n-1} que está com a cor 2, pois $n - 1$ é par. Logo, v_n tem que ser colorido com uma nova cor, precisando assim de no mínimo 3 cores para colorir C_n . Por exemplo a Figura 64, em que $n = 5$ e $\chi(C_5) = 3$.

Figura 64: Grafo C_5 com as cores 1, 2 e 3.

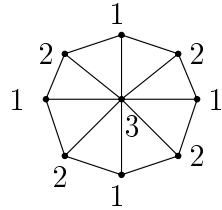


Fonte: Elaborada pelo autor.

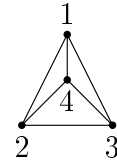
Um outro caso, se G for um grafo roda seu número cromático pode ser 3 ou 4. Se n for ímpar, temos que $\chi(W_n) = 3$, pois se tirar o vértice central o grafo vira um ciclo

C_{n-1} , cujo $\chi(C_{n-1}) = 2$, e como o vértice central é adjacente a todos os vértices, inclusive a dois vértices que são adjacentes entre si, temos que colorir o vértice central com uma nova cor. Agora, se n for par, temos que $\chi(W_n) = 4$, pois de modo semelhante ao caso anterior, temos que $\chi(C_{n-1}) = 3$, assim o vértice central terá que ser colorido com uma nova (quarta) cor, como mostra a Figura 65 (b).

Figura 65: Número cromático para grafo roda.



(a) Grafo roda com $n = 9$ e os vértices coloridos com as cores 1, 2 e 3.



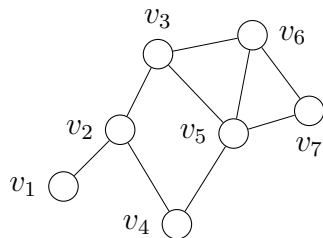
(b) Grafo roda com $n = 4$ e os vértices coloridos com as cores 1, 2, 3 e 4.

Fonte: Elaborada pelo autor.

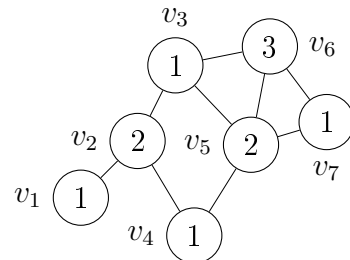
Existem alguns algoritmos para o problema de coloração de vértices (CORMEN et al., 2002, p.296). Dentre eles, talvez o mais conhecido seja o algoritmo *ganancioso* (WEST et al., 1996, p.194). Este algoritmo realiza a coloração dos vértices na ordem v_1, v_2, \dots, v_n de $V(G)$ e as cores sendo os números na ordem $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ de modo que o vértice v_i recebe a primeira cor disponível de $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ que ainda não foi usada nos vértices adjacentes já coloridos.

Por exemplo, a Figura 66 (a) mostra os vértices ordenados em v_1, v_2, \dots, v_7 , considerando que temos 4 cores para colorir, digamos *azul* = 1, *amarelo* = 2, *verde* = 3 e *vermelho* = 4. A partir disso, temos dois conjuntos ordenados, o conjunto dos vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_7\}$ e o conjunto das cores $\{1, 2, 3, 4\}$.

Figura 66: Algoritmo ganancioso



(a) Vértices ordenados.



(b) Vértices coloridos.

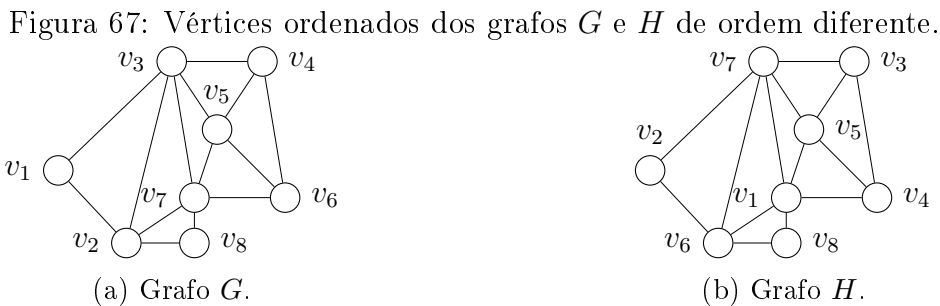
Fonte: Elaborada pelo autor.

O método ganancioso começa a colorir o vértice v_1 atribuindo a primeira cor disponível em $\{1, 2, 3, 4\}$ que nesse caso é a cor 1. No próximo passo, o método vai para o

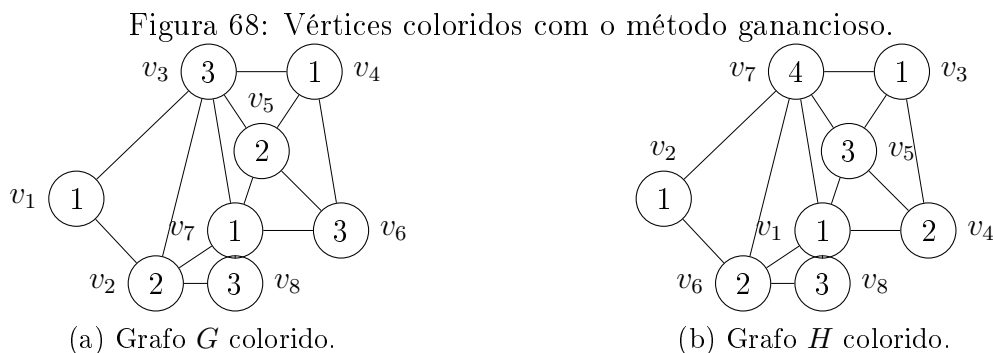
vértice v_2 escolhendo a primeira cor disponível de $\{1, 2, 3, 4\}$ que não foi usada nos vértices adjacentes já coloridos, nesse caso a cor 2. Fazendo isso sucessivamente, temos v_3 com a cor 1, v_4 com a cor 1, v_5 com a cor 2, v_6 com a cor 3, pois a cor 1 e 2 não estão disponíveis e v_7 com a cor 1, como mostra a Figura 66 (b).

Num grafo simples o algoritmo ganancioso sempre funciona, e precisa de no máximo $\Delta(G)+1$ cores, como veremos no Teorema 4.1. No entanto, o método nem sempre encontra o número cromático. Por exemplo, se organizarmos os 8 vértices na ordem v_1, v_2, \dots, v_8 de duas formas, como mostra a Figura 67, e utilizarmos a coloração gananciosa, podemos obter formas diferentes de colorir, como mostra a Figura 68.

Observamos que na Figura 68 (a) foram usadas 3 cores e na Figura 68 (b) foram usadas 4 cores. Assim, conforme a ordenação de vértices, o algoritmo ganancioso poderá resultar em uma quantidade de cores diferentes, variando entre $\chi(G)$ e $\Delta(G) + 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Encontrar o valor mínimo de cores a ser usado em um grafo G , não é uma tarefa fácil. Até hoje não foi desenvolvido um algoritmo *eficiente* para isso (FEOFILOFF; KOHAYAKAWA; WAKABAYASHI, 2011). Os algoritmos existentes consomem muito tempo, dessa forma, são insatisfatórios na prática a medida que o número de vértices aumenta.

Ao menos, podemos encontrar um limitante como mostra o Teorema 4.1 (BALAKRISHNAN; RANGANATHAN, 2012, p.148).

Teorema 4.1. *Se G um grafo qualquer simples, então $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Demonstração: Vamos provar por indução sobre o número de vértices n . Seja G um grafo com n vértices. Analisando o caso base para $n = 1$, temos um grafo completo K_1 com um vértice e $\Delta(G) = 0$. Para colorir esse grafo basta apenas uma cor, pois só tem um vértice. Logo, $\chi(G) = 1 = 0 + 1 = \Delta(G) + 1$.

Agora suponhamos que vale para $n - 1$ vértices, em que $n \geq 2$, e vamos mostrar que vale para n vértices. Seja $v \in V(G)$ um vértice qualquer de G . Removendo esse vértice de G temos um novo grafo $G - v$ com $n - 1$ vértices. Usando a hipótese de indução neste grafo menor, temos que $\chi(G - v) \leq \Delta(G - v) + 1$. Assim, $G - v$ pode ser colorido com no máximo $\Delta(G - v) + 1$ cores.

Note que $d(v) \leq \Delta(G)$, isto é, os vizinhos de v podem usar no máximo $\Delta(G)$ cores. Analisemos dois casos possíveis para $\Delta(G)$:

Caso 1: $\Delta(G) = \Delta(G - v)$.

Então, existe pelo menos uma cor de $\Delta(G - v) + 1 = \Delta(G) + 1$ não utilizada pelos vizinhos de v , assim v pode ser colorido por essa cor. Isso nos dá uma $(\Delta(G) + 1)$ -coloração de G , de modo que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Caso 2: $\Delta(G) \neq \Delta(G - v)$.

Nesse caso só pode ocorrer $\Delta(G) > \Delta(G - v)$. Portanto, como pela hipótese de indução $\chi(G - v) \leq \Delta(G - v) + 1$, isto é, $\chi(G - v) < \Delta(G) + 1$, podemos usar uma nova cor para v , implicando em $\Delta(G - v) + 2 \leq \Delta(G) + 1$, de onde segue que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Nos dois casos temos que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, para n vértices. Com isso, provamos que todo grafo pode ser colorido com no máximo $\Delta + 1$ cores. ■

4.2 TEOREMA DE BROOKS

No Teorema 4.1 a igualdade é válida para casos em que o grafo é completo (K_n) ou um ciclo ímpar (C_{2n+1}). Caso contrário, temos um importante teorema que é o Teorema de Brooks (BROOKS, 1941), ele reduz um pouco o limitante do $\chi(G)$.

Teorema 4.2. *(Brooks) Se G é um grafo conexo com grau máximo Δ ($\Delta \geq 3$) e G não contém um $K_{\Delta(G)+1}$, então G é Δ -colorível.*

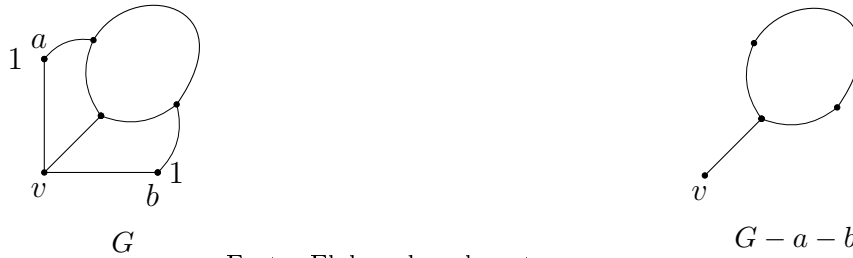
Demonstração: Seguiremos a demonstração apresentada em (LOVÁSZ, 1975). Ela é dividida em dois casos:

Caso 1: G é 3-conexo.

Então, existem dois vértices a e b de G de distância 2, de modo que $G - a - b$ é

conexo. Esses vértices existem, pois por hipótese $\Delta(G) \geq 3$ e G não é um grafo completo, logo existem pelo menos 4 vértices no grafo e alguns deles não adjacentes. Seja v o vértice adjacente a a e b , como mostra a Figura 69.

Figura 69: Grafo G tirando os vértices a e b .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como $G - a - b$ é conexo, podemos organizar os vértices em uma sequência $x_1 = v$, x_2, x_3, \dots, x_{m-2} , tal que $x_i, i \geq 2$ é adjacente a um vértice anterior na sequência.

Vamos definir uma Δ -coloração de G da seguinte maneira: os vértices não adjacentes a e b com a mesma cor, digamos a cor 1, e os demais vértices colorindo sucessivamente, começando do mais distante de v para o mais próximo, $x_{m-2}, x_{m-3}, \dots, x_2$ com uma das cores $1, \dots, \Delta$. Isso é possível, pois cada um tem menos de Δ vizinhos anteriormente coloridos. Embora isso possa não ser verdade para $x_1 = v$, como v tem dois vértices adjacentes a e b da mesma cor, podemos colorir v com uma das cores diferentes de seus vizinhos. Então G é Δ -colorível.

Caso 2: G é 2-conexo.

Seja x um vértice qualquer que não é adjacente a todos os outros vértices, mas que possui grau de pelo menos 3. Esse vértice existe pelo fato de G ter grau máximo maior ou igual a 3 e por não ser completo. Ao remover x do grafo, temos dois subcasos para $G - x$:

Caso 2a: $G - x$ é 2-conexo.

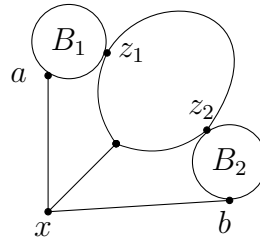
Considere dois vértices a e b , tais que, $x = a$ e b um vértice qualquer de distância 2 de x . Com essa escolha podemos repetir a construção apresentada no caso 1.

Caso 2b: $G - x$ não é 2-conexo.

Então, $G - x$ é separável. Considere dois blocos terminais¹ B_1 e B_2 , com vértices de corte z_1 e z_2 , respectivamente (veja Figura 70). Note que, para $i = 1, 2$, qualquer outra componente 2-conexa B , ou é disjunta de B_i , ou o único vértice em comum é z_i . Como G é 2-conexo, existem vértices $a \in B_1 - z_1$ e $b \in B_2 - z_2$ adjacentes a x . Agora a, b satisfazem os requisitos do caso 1.

¹Blocos terminais foram definidos em (LOVÁSZ, 1975).

Figura 70: Grafo G com seus blocos terminais B_1 e B_2 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

■

Finalizamos este capítulo com um exemplo didático de aplicação da coloração de vértices.

Exemplo 4.3. *O problema dos exames finais dos alunos². Sabendo que um aluno não pode fazer mais de um exame ao mesmo tempo, qual seria o tempo necessário para a realização dos exames dos alunos, em que o Quadro 4.1 mostra quais foram os alunos que ficaram em exame em determinadas disciplinas.*

Quadro 4.1: Representa os alunos com as disciplinas de exame.

Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Matemática		x			x				x	
Biologia	x			x	x		x			
Português	x									x
Química			x						x	
Geografia			x	x				x		
História						x	x			
Física		x				x		x		x

Fonte: Dados adaptado de (JURKIEWICZ, 2009).

Para responder a pergunta vamos representar os dados do quadro na forma de um grafo G sendo os vértices as disciplinas (veja Figura 71 (a)), em que dois vértices estarão ligados se tiverem um aluno em comum.

Figura 71: Grafo do Quadro 4.1.



(a) Grafo G , representação do Quadro 4.1. (b) Grafo G com os vértices coloridos

Fonte: Elaborada pelo autor.

²Problema adaptado de (JURKIEWICZ, 2009).

Colorindo os vértices como mostra a Figura 71 (b) temos $\chi(G) = 2$, então os exames podem ser realizados em duas horas, o primeiro horário para $\{M, P, H, G\}$ e outro para $\{F, Q, B\}$ ou vice-versa.

Existem outras aplicações de coloração de vértices, como por exemplo a coloração de mapas, que veremos em detalhes no próximo capítulo.

5 TEOREMAS DE COLORAÇÃO DE MAPAS

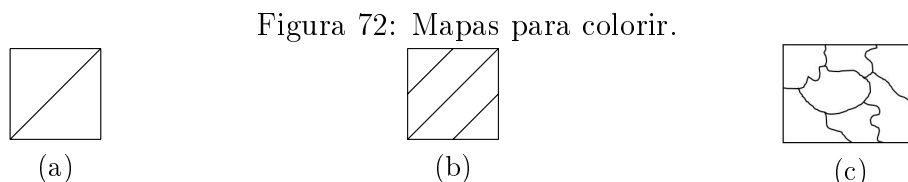
Nesse capítulo vamos tratar sobre o Teorema das Quatro Cores, baseado em (SOUSA, 2001) e (LIMA, 2016). Ao longo deste capítulo assumiremos que G é simples e conexo.

O Teorema das Quatro Cores começou como uma conjectura por Francis Guthrie ao pintar mapas, percebendo que não utilizava mais de quatro cores para colorir o mapa de modo que as regiões vizinhas tivessem cores diferentes. Durante a busca da demonstração da conjectura, surgiu o *Teorema das Cinco Cores*, que será abordado e demonstrado nesse capítulo. Mais de um século depois, a prova do Teorema das Quatro Cores se concretiza, porém com auxílio computacional. Comentaremos superficialmente sobre sua demonstração e em seguida apresentaremos alguns exemplos de aplicações.

5.1 MOTIVAÇÃO HISTÓRICA DO TEOREMA DAS QUATRO CORES

O *Teorema das Quatro Cores* originou-se em 1852 como uma conjectura, formulada pelo matemático Francis Guthrie que tentava colorir as regiões do mapa da Inglaterra de modo que regiões vizinhas tivessem cores distintas.

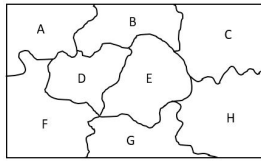
Por exemplo, a Figura 72 mostra três mapas para colorir de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas. É fácil de perceber que no mapa da Figura 72 (a) são necessárias somente duas cores, e no mapa da Figura 72 (b) também são necessárias no mínimo duas cores. Já no mapa da Figura 72 (c) achar a quantidade de cores necessárias se torna mais complexo. Não é fácil perceber que no mapa (c), pode ser utilizada uma quantidade mínima de quatro cores para pintar o mapa, sem que regiões vizinhas tenham a mesma cor, ao invés de utilizar uma cor para cada região.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em um mapa qualquer, definimos que regiões são vizinhas somente em casos que apresentarem fronteiras em forma de linha (NANJWENGE, 2018). Por exemplo, a região D da Figura 73 é vizinha com A, B, E e F , mas não é com a região G , pois só há um ponto em comum. E a região E tem como vizinhas B, C, D, G e H , mas F não é vizinha.

Figura 73: Exemplo de regiões vizinhas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com o passar do tempo e sucessivas tentativas, Francis Guthrie percebeu que não utilizava mais do que quatro cores para colorir os mapas, assim, surgiu a conjectura de que é possível pintar qualquer mapa com apenas quatro cores. A princípio, Francis não conseguiu provar e, intrigado, apresentou para seu irmão *Frederick Guthrie*¹, que também não obteve sucesso. Como os dois não conseguiram solucionar o problema, Frederick apresentou a tal conjectura para seu professor *Augustus De Morgan*², que ficou interessado pelo problema. Entusiasmado, e não conseguindo provar a conjectura De Morgan apresentou a outros matemáticos gerando uma certa publicidade acadêmica sobre o problema (SOUSA, 2001).

Somente em 1879 surgiu a primeira prova da conjectura das quatro cores, que foi publicada na revista *American Journal of Mathematics*, por *Alfred Bray Kempe*³ (KEMPE, 1879). Mas, em 1890, *Percy John Heawood*⁴ encontrou um erro na demonstração de Kempe. Heawood não conseguiu demonstrar a conjectura das quatro cores, mas conseguiu demonstrar que com até cinco cores um mapa pode ser colorido, de modo que regiões vizinhas tenham cores distintas. Esse resultado passou a ser chamado de *Teorema das cinco cores* (PIMENTA, 2010).

Quase cem anos depois, em 1976, *Kenneth Appel* e *Wolfgang Haken* solucionaram o problema com auxílio de computador, conforme publicado em (APPEL; HAKEN, 1977). A demonstração de Appel e Haken se tornou a primeira prova matemática com auxílio de computador. Porém, muitos matemáticos não ficaram satisfeitos com partes da demonstração que provavam certas afirmações reduzindo o problema a diversos casos particulares e verificando-os com o auxílio de computador (NANJWENGE, 2018).

Com o passar do tempo, surgiu uma nova prova do teorema, também com o auxílio de computador só que mais simplificada e com o custo computacional muito menor. Foi provado por quatro matemáticos *Neil Robertson*, *Daniel P. Sanders*, *Paul Seymour* e *Robin Thomas* conforme publicado em (ROBERTSON et al., 1996). Atualmente só existem provas do Teorema das quatro cores através de recursos computacionais (SOUSA, 2001), pois,

¹Frederick Guthrie (1833 - 1886) foi um físico e químico, na época era aluno de Augustus De Morgan.

²Augustus De Morgan (1806-1871) foi um matemático que formulou as Leis de De Morgan na lógica.

³Alfred Bray Kempe (1849-1922) foi um matemático britânico.

⁴Percy John Heawood (1861-1955) foi um matemático britânico.

a demonstração é subdividida em pequenos casos em que um computador pode resolver de forma muito mais rápida, algo que levaria um tempo muito grande manualmente, se tornando impraticável.

Antes de apresentar formalmente o Teorema das Quatro Cores, primeiramente discutiremos o Teorema das Cinco Cores e sua demonstração.

5.2 TEOREMA DAS CINCO CORES

O *Teorema das Cinco Cores* é um caso particular da coloração de vértices, que surgiu através das tentativas de demonstrar a conjectura das quatro cores. Formulado por Heawood, fornecendo um limite para o número de cores necessárias ao colorir um mapa, essa afirmação pode ser encontrada em (HEAWOOD, 1890). O teorema declara que com até cinco cores é possível colorir qualquer mapa tal que regiões vizinhas não tenham a mesma cor.

Apresentaremos uma demonstração do Teorema das Cinco Cores usando o método indutivo e o Teorema 2.7, baseada em (HARRIS; HIRST; MOSSINGHOFF, 2008, p.95).

Teorema 5.1. (*Teorema das Cinco Cores*) *Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 5$.*

Demonstração: Vamos provar por indução sobre o número de vértices do grafo G . Seja G um grafo planar com $|V| = n$.

Se $n \leq 5$ é fácil de ver que o resultado é válido, pois como tem no máximo 5 vértices, basta escolher uma das cinco cores para cada vértices de modo que cada um tenha cores diferentes das outras.

Por hipótese de indução, suponha $n \geq 6$ e que qualquer grafo planar, com $n - 1$ vértices, pode ser colorido com 5 cores.

Queremos mostrar que qualquer grafo planar com n vértices pode ser colorido com 5 cores.

Pelo Teorema 2.7, temos $\delta(G) \leq 5$, isto é, existe um vértice de G , digamos v , com $d(v) \leq 5$.

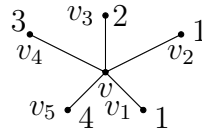
Considere $H = G - v$, um grafo planar com $n - 1$ vértices. Como H tem $n - 1$ vértices, podemos usar a hipótese de indução em H . Pela hipótese H é 5-colorível, com as cores $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Como $d(v) \leq 5$, v tem no máximo 5 vizinhos, digamos $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, que são vértices de H já coloridos. Temos dois casos a serem considerados na coloração dos vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Caso 1: *São usadas menos de 5 cores para colorir os vértices v_i , com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

Considere a seguinte coloração, para o vértice v_1 com a cor 1 e os demais vértices v_i com a cor $i - 1$, para $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, como mostra a Figura 74. Nessa coloração sobra

a cor 5. Assim, podemos colorir o vértice v com a cor que sobrou, neste caso a cor 5. Portanto, o grafo G é 5-colorível.

Figura 74: Subgrafo com os vizinhos de v coloridos.

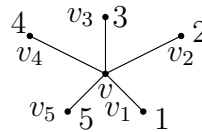


Fonte: Elaborada pelo autor.

Caso 2: São usadas as 5 cores para colorir os vértices v_i , com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Neste caso todos os vizinhos de v estão coloridos com cores diferentes. Suponha sem perda de generalidade que cada v_i está com a cor i , para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Como mostra a Figura 75.

Figura 75: Subgrafo com os vizinhos de v coloridos com cores diferentes.



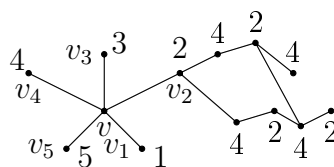
Fonte: Elaborada pelo autor.

Vamos mostrar que é possível reorganizar as cores dos vértices de H de modo que no máximo 4 cores sejam usadas, para colorir os vértices v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 . Para isso, considere todos os vértices de H com as cores 2 ou 4. Assim, temos dois casos a serem estudados.

Caso 2a: Não existe no grafo H um caminho de v_2 a v_4 em que todos os vértices do caminho são de cor 2 ou 4.

Seja H' um subgrafo de H , formado pela união de todos os caminhos que partem do vértice v_2 e passam apenas pelos vértices com as cores 2 e 4. Como mostra a Figura 76.

Figura 76: Grafo G .



Fonte: Elaborada pelo autor.

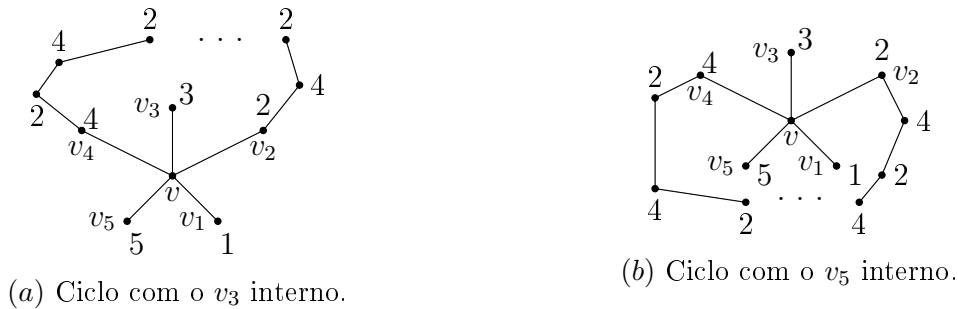
Note que $v_4 \notin H'$ e nem seus vizinhos, pois se um dos vizinhos pertencer ao grafo H' , então v_4 estaria em H' . Assim, podemos trocar as cores dos vértices de H' , mudando a cor 2 para a cor 4 e vice-versa.

Com a reorganização das cores o v_2 passa a estar com a cor 4 e assim a cor 2 fica disponível para o vértice v . Portanto, G é 5-colorível.

Caso 2b: *Existe no grafo H um caminho de v_2 a v_4 em que todos os vértices do caminho são de cor 2 ou 4.*

Seja P um caminho de H que liga os vértices v_2 e v_4 de modo que esse caminho só tem os vértices de H com as cores 2 ou 4. Se unir o vértice v com P , teremos um ciclo. Este ciclo cerca v_3 ou v_5 (veja Figura 77).

Figura 77: Ciclo envolvendo o vértice v_3 ou v_5 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como o grafo é planar, em ambos os casos, não existe um caminho em H que liga os vértices v_3 e v_5 , no qual os vértices do caminho estão com as cores 3 e 5 respectivamente. Assim, o caso 2a se aplica (trocando v_2 por v_3 e v_4 por v_5 e as cores 2 por 3 e 4 por 5). Portanto, concluímos que G é 5-colorível. ■

5.3 UMA IDEIA DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DAS QUATRO CORES

O Teorema das Quatro Cores surgiu ao colorir o mapa da Inglaterra por Francis Guthrie (1852) e quase foi provado por Kempe (1879). Contudo, em 1890, Heawood encontra uma falha nessa prova. Nessa seção vamos analisar brevemente a ideia da demonstração de Kempe do Teorema das Quatro Cores, pois essa ideia serviu de base para a prova do teorema por outros matemáticos.

Primeiramente vamos definir alguns conceitos utilizados por Kempe na sua demonstração.

Definição 25. *Um mapa que não pode ser colorido com menos de cinco cores é chamado mapa pentacromático.*

Definição 26. *Um mapa normal é um mapa que satisfaz os seguintes critérios:*

- i. *Não existe no mapa uma região isolada dentro de outra região.*
- ii. *Se P é o ponto de fronteira entre regiões, P não se encontra em mais do que três regiões.*

Figura 78: Mapas não normais.



- (a) Região A isolada na região B . (b) O ponto P é a fronteira de quatro regiões.
 Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 78 (a) não satisfaz o primeiro critério, pois a região A está isolada na região B . E a Figura 78 (b) não satisfaz o segundo critério, pois o ponto P é a fronteira de quatro regiões.

Definição 27. *Um mapa pentacromático normal mínimo é um mapa pentacromático normal com o menor número de regiões possíveis.*

Definição 28. *Uma configuração de regiões é redutível se não faz parte de um mapa pentacromático normal mínimo.*

De acordo com Kempe seria impossível a existência de mapas pentacromáticos. Para isso ele utiliza as seguintes afirmações para sua demonstração (SOUSA, 2001):

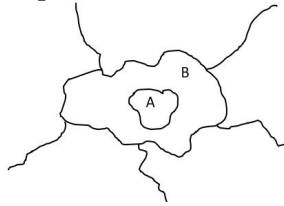
- I. Se existe um mapa pentacromático, então existe um mapa pentacromático normal.
- II. Se existe um mapa pentacromático normal, então existe um pentacromático normal mínimo.
- III. Qualquer mapa normal tem pelo menos uma região com no máximo cinco vizinhos.
- IV. Nenhum mapa pentacromático normal mínimo pode conter uma região com menos de seis vizinhos.

Das quatro afirmações, Kempe demonstrou corretamente as três primeiras, mas na última ele cometeu um erro. Vejamos cada uma delas.

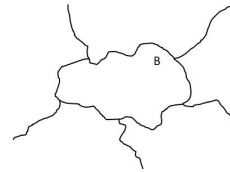
Afirmção (I): Suponha G é um mapa pentacromático com região isolada dentro de outra região, como mostra a Figura 79 (a). Se excluir a região isolada, teremos um

novo mapa M , como pode ser visto na Figura 79 (b), sem região isolada. Como G é pentacromático, então M também o é, pois a coloração da região excluída A não interfere na coloração das outras regiões do mapa G . Assim, M satisfaz o primeiro critério de ser um mapa normal. Caso M satisfaça o segundo critério, então M é um mapa normal.

Figura 79: Exclusão de uma região isolada em uma outra região.



(a) Parte do mapa G com a região A isolado na região B .

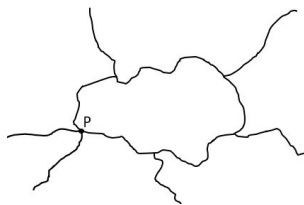


(b) Mapa M sem a região isolada de G .

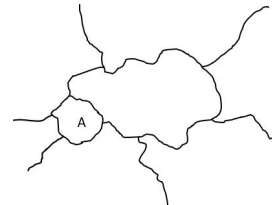
Fonte: Elaborada pelo autor.

Suponha que M não satisfaz o segundo critério, como mostra a Figura 80 (a), em que o ponto P é o ponto de fronteira adjacente a mais de três regiões. Podemos criar um novo mapa M' em relação ao M formando uma nova região A no lugar da fronteira P , como mostra a Figura 80 (b). Assim, o mapa M' é um mapa normal. Como M é pentacromático, então M' também o é, pois as regiões antigas continuam tendo as mesmas fronteiras entre elas, não alterando a coloração, e algumas dessas regiões passam a ter uma nova região de fronteira. A região nova pode ser colorida com uma das cores usadas ao colorir M ou, se isto não for possível, com uma nova cor. De qualquer forma, o mapa continua sendo pentacromático.

Figura 80: Criando uma região no ponto de fronteira.



(a) Parte do mapa M com a fronteira P com mais de três regiões.



(b) Mapa M' com a fronteira P com mais de três regiões.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Afirmção (II): Se G é um mapa pentacromático normal, então existe um mapa M compreendido em G com o menor número de regiões possíveis de G e mantendo a condição de ser pentacromático normal. Nesse caso, M é um mapa pentacromático normal e mínimo.

Afirmação (III): Para a demonstração dessa afirmação, considere G um grafo planar simples que representa o mapa normal, em que os vértices são os pontos de intersecção das fronteiras das regiões do mapa normal. As arestas do grafo, sendo as fronteiras que ligam os vértices, e as faces sendo as áreas formadas pelas arestas do grafo no plano, que representam as regiões (países) do mapa. Pelo Teorema 2.7 temos que $\delta(G) \leq 5$. Portanto, existe pelo menos um país com no máximo cinco vizinhos.

Por essa afirmação Kempe percebeu que um mapa normal sempre terá alguma das características apresentadas na Figura 81 que classificou como um conjunto *inevitável* (LIMA, 2016), isto é, todo mapa normal contém pelo menos uma região com no máximo cinco vizinhos.

Figura 81: Configurações inevitáveis de Kempe.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Afirmação (IV): Sua estratégia, foi mostrar que em um mapa pentacromático normal mínimo, as quatro configurações inevitáveis da afirmação (III) são redutíveis (veja Definição 28). O erro que Kempe comete se encontra nessa afirmação. A seguir, iremos analisar os quatro casos.

Caso 1: Seja M um mapa pentacromático normal mínimo contendo uma região com dois vizinhos, como mostra a Figura 82 (a). Se excluir a região A que tem dois vizinhos, temos um novo mapa M' normal com uma região a menos que M , como pode ser observado na Figura 82 (b).

Figura 82: Região com dois vizinhos.



(a) Parte do mapa M com uma região com dois vizinhos. (b) Mapa M' sem a região com dois vizinhos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O novo mapa M' pode ser colorido com quatro cores, pois M é um mapa pentacromático normal mínimo e como M' tem uma região a menos, logo não pode ser

pentacromático normal mínimo (que contradiria o fato de M ser mínimo). Como M' pode ser colorido com quatro cores, então M também pode. Pois, bastaria colorir a região excluída A de M com uma das quatro cores que não foram usadas nas regiões B e C , como mostra a Figura 82, contradizendo a hipótese de M ser pentacromático. Portanto, M é redutível.

Caso 2: Seja M um mapa pentacromático normal mínimo contendo uma região com três vizinhos, como a Figura 83. A construção para a demonstração é análoga com a anterior. Se excluir a região A que tem os três vizinhos, temos um novo mapa M' normal que pode ser observado na Figura 83 (b).

Figura 83: Região com três vizinhos.



(a) Parte do mapa M com uma região com três vizinhos. (b) Mapa M' sem a região com três vizinhos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, M' pode ser colorido com quatro cores, pois M é um mapa pentacromático normal mínimo. Como M' pode ser colorido com quatro cores, segue que M também pode. Pois, bastaria colorir a região excluída A de M com uma das quatro cores que não foi usada para colorir as regiões B , C e D da Figura 83 (b). Portanto, M é redutível.

Agora para os *casos 3 e 4*, com regiões tendo quatro ou cinco vizinhos, não é possível aplicar a mesma ideia, pois ao excluir uma região de M , não sabemos se sobraria uma cor para colorir essa região excluída, como no primeiro caso no qual sobravam duas cores e no segundo caso uma cor. A prova para estes casos é mais complexa e direcionamos o leitor para a referência (LIMA, 2016).

Logo, pelas afirmações (III) e (IV), não existe mapa pentacromático normal mínimo, por consequência da afirmação (II) não existe um mapa pentacromático normal, segue também pela afirmação (I) que não existe mapa pentacromático. Assim, Kempe “provou” o Teorema das Quatro Cores.

No entanto, na prova de Kempe do quarto caso há um equívoco encontrado pelo Heawood, que apresentou um contra exemplo. Para mais detalhes sobre o erro cometido e o contra exemplo de Heawood, veja a referência (LIMA, 2016).

Passados aproximadamente 86 anos, isto é, em 1976 foi realmente provada a conjectura pelos matemáticos *Kenneth Appel* e *Wolfgang Haken* que usaram como base a ideia

de Kempe, e para contornar o problema da demonstração do caso em que uma mapa pentacromático possui uma região com cinco vizinhos, eles usaram recursos computacionais.

Vamos ver a ideia que Appel e Haken tiveram para a demonstração do Teorema das Quatro Cores e motivo que os levou ao uso de recursos computacionais. Mas antes vamos formalizar o teorema das Quatro Cores.

Teorema 5.2. (*Teorema das quatro cores*) *Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 4$.*

Appel e Haken usaram a mesma ideia de Kempe para a demonstração do Teorema das Quatro Cores, considerando que não existe um mapa pentacromático. Eles partiram pela afirmação (III) de Kempe, em que todo mapa normal tem pelo menos uma região com no máximo cinco vizinhos. Para isso, consideraram o conjunto de configurações inevitáveis como Kempe, mas eles adquiriram um total de 1482 configurações inevitáveis com auxílio de computador, que em mãos seria impossível de verificar (LIMA, 2016).

Para Appel e Haken concluírem a demonstração, faltava ver se as configurações inevitáveis eram redutíveis, para mapa pentacromático normal mínimo. Para isso eles utilizaram também o auxílio de computadores. Assim, provando o Teorema das Quatro Cores (LIMA, 2016).

Em 1993, quatro matemáticos Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas ao estudar a demonstração de Appel e Haken perceberam que iriam levar muito tempo para verificar cada caso, então resolveram provar o teorema por eles mesmos. Eles partiram pela mesma estratégia de Appel e Haken, mas determinaram 633 configurações inevitáveis ao contrário de Appel e Haken que encontraram 1482. Com a diminuição das configurações inevitáveis e o avanço dos computadores, fez com que diminui-se o tempo computacional para algumas horas (SOUSA, 2001).

5.4 EXEMPLOS ENVOLVENDO COLORAÇÃO DE MAPAS

Nesta seção vamos apresentar alguns exemplos que podem ser resolvidos pelos conceitos de coloração de mapas.

Exemplo 5.3. *A Figura 84 representa o mapa dos estados do Brasil. Serão necessárias no mínimo quantas cores para colorir o mapa de modo que não existam estados vizinhos da mesma cor?*

Em vez de pintar o mapa da Figura 84, vamos colorir o grafo conexo da Figura 85 (b) que é a representação da Figura 85 (a), em que os vértices são os estados e as arestas representam os estados vizinhos.

Figura 84: Mapa dos estados do Brasil.

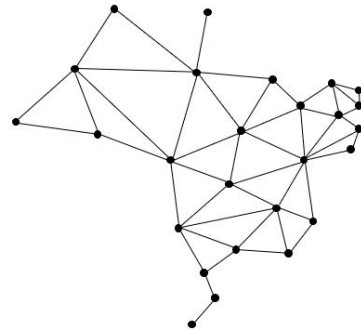


Fonte: <https://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2019/07/mapa-do-brasil-estados-branco-sem-legenda.jpg>(adaptado).

Figura 85: Grafo do mapa do Brasil.



(a) Representando os estados do Brasil por vértices.



(b) Grafo B dos estados do Brasil.

Fonte: Elaborada pelo autor.

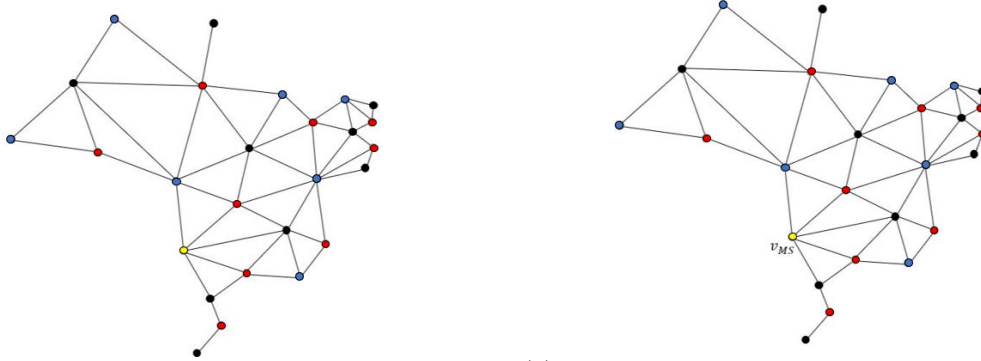
Como o grafo da Figura 85 (b) é conexo e planar, satisfazendo o Teorema 5.2, ao se colorir os vértices adjacentes que tenham cores diferentes como a Figura 86 (a), mostra-se uma das formas de colorir, mas todas utilizam no máximo 4 cores. Se observar o vértice v_{MS} da Figura 86 (b) ele faz parte de um grafo roda W_6 , formado pelos vértices dos estados de Mato Grosso do Sul, Minas Gerais, Bahia, Tocantins, Mato Grosso e Goiás, então $\chi(W_6) = 4$, pois o número de vértices é par (veja o Capítulo 4). Assim, pelo Teorema 5.2 Serão necessárias quatro cores.

Exemplo 5.4. *No mapa da Figura 87, são necessárias no mínimo quantas cores para colorir ela, sabendo que regiões vizinhas tenham cores distintas?*

É preciso no mínimo 3 cores para colorir, ou seja, não é necessário utilizar sempre 4 cores para colorir o mapa, pelo Teorema 5.2. Foram consideradas as regiões da Figura 87 como sendo os vértices e as regiões vizinhas as arestas, como pode ser visto na Figura 88.

Assim, obtemos um grafo representado na Figura 89. Desta forma, colorindo o

Figura 86: Coloração do mapa do Brasil.

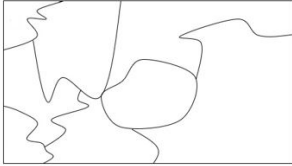


(a) Coloração do grafo dos estados do Brasil.

(b) Grafo colorido e v_{MS} é o estado do Mato Grosso do Sul.

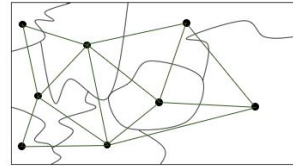
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 87: Mapa com 8 regiões.



Fonte: Elaborada pelo autor.

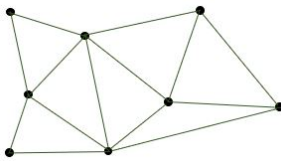
Figura 88: Montando o grafo da Figura 87.



Fonte: Elaborada pelo autor.

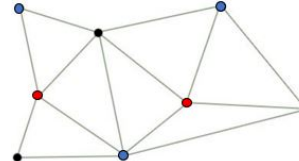
grafo percebe-se que será necessário no mínimo 3 cores, pois existe um subgrafo formado pelos 5 vértices da direita que é um grafo roda W_5 . Como o número de vértices é ímpar, temos que $\chi(W_5) = 3$. Os outros 3 vértices da esquerda, podem ser coloridas cada um com uma cor diferente, mantendo a condição de vértices vizinhos com cores distintas. Assim, precisamos de no mínimo 3 cores, como mostra a Figura 90.

Figura 89: Grafo da Figura 87.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 90: Colorindo o grafo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 APLICAÇÃO EM SALA

Neste capítulo apresentaremos problemas que podem ser aplicados em sala de aula, baseados em Teoria de Grafos.

Foram desenvolvidos sete problemas para serem aplicados em sala: o desenho da casa¹; o assassinato na mansão²; o trabalho de Francis, o problema da secretária³; o problema das entrevistas, o problema da gincana e o problema do Sudoku⁴.

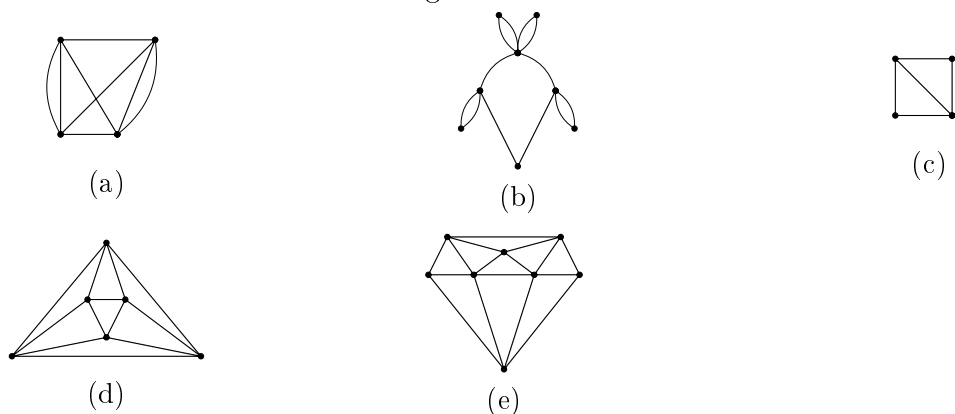
Como os Problemas 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7 envolvem cores, ao resolvê-los em sala, adaptações são necessárias caso haja algum aluno com daltonismo. Uma estratégia é usar símbolos ao invés de cores.

O Problema 6.1, pode ser aplicado a partir do ensino fundamental II. Para resolver o problema precisamos dos conceitos das Seções 2.1 e 2.2.

Problema 6.1. (*Desenho da casa*).

Maticilia, mãe de Logomático, deixou para seu filho cinco desenhos com bolinhas e linhas como mostra a Figura 91. E perguntou para Logomático: quais dessas figuras você consegue, saindo de um ponto qualquer passando por todas as linhas somente uma vez, voltar ao ponto de origem? Qual foi a resposta de Logomático para sua mãe?

Figura 91: Grafos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Após um tempo dado para os grupos pensarem no problema, a resposta esperada tanto de Logomático quanto dos alunos seria (a), (b) e (d). Assim, podemos afirmar que os itens (c) e (e) são impossíveis, pelo Teorema 2.2, pois têm vértices de grau ímpar. As

¹Esse problema pode ser encontrado em <https://www.inf.ufsc.br/grafos/temas/euleriano/euleriano.htm>

²Esse problema pode ser encontrado em <https://www.inf.ufsc.br/grafos/temas/euleriano/euleriano.htm>

³Esse problema pode ser encontrado em <https://www.inf.ufsc.br/grafos/problemas/colora.htm>

⁴Sudoku é um jogo de lógica criado pelo arquiteto Howard Garns (1905-1989).

Figuras (a), (b) e (d), têm todos os vértices de grau par, e pelo Teorema 2.2 é possível sair de um ponto e voltar nele passando uma única vez em todas as linhas.

Ao final da proposta pedagógica, comentar com os alunos sobre *1Line*⁵ (aplicativo de jogo), jogo mobile que tem uma proposta similar. Por fim, contar a história do problema das sete pontes, e como Euler resolveu pensando em vértices e arestas, fazendo uma analogia com o problema aplicado.

O próximo Problema 6.2, pode ser aplicado para as séries finais do ensino fundamental II e para o ensino médio. Para resolver o problema precisamos dos conceitos das Seções 2.1 e 2.2.

Problema 6.2. (*O assassinato na mansão*)

Em uma mansão de Florianópolis, ocorreu um assassinato. O Dono foi encontrado no chão da sala 1 conforme a Figura 92. A família contratou um detetive famoso em resolver grandes mistérios por meio da matemática. O detetive começa sua investigação, interrogando pessoas que estavam na mansão no momento do assassinato. Depois dos interrogatórios, o detetive analisa suas anotações.

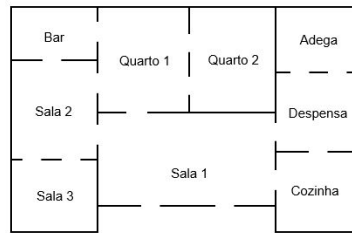
- *O jardineiro fala ter visto a esposa entrar na casa pela sala 1 e em seguida deixado a casa pela mesma porta que entrou.*
- *A empregada que estava limpando o quarto 1, diz ter ouvido gritos do patrão com o motorista.*
- *O motorista disse que estava lavando o carro na área de fora ao lado do bar.*
- *O mordomo que organizava o bar, diz ter visto o motorista lavando o carro a tarde toda.*
- *A esposa falou que entrou na casa e que tinha passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, saiu da casa.*

Depois de examinar sua anotação, o detetive olha a planta da casa conforme a Figura 92, logo em seguida, disse que solucionou o caso. Quem seria o suspeito e como o detetive chegou nessa conclusão?

A resposta esperada dos alunos, após várias tentativas, seria a esposa. Pois, ao entrar na sala 2 que tem cinco portas, sobrariam quatro portas, duas para sair e as outras duas para entrar, sendo assim, ela sairia por uma e entraria por outra, sobrando agora duas portas, saindo numa e voltando por outra. Ou seja, não teria como ela sair da sala 2. O mesmo ocorre se for no quarto 1. Segundo Euler, para ela passar por todas as portas uma única vez, cada cômodo teria que ter uma quantidade par de portas, pois

⁵O jogo *1Line* para celulares androide pode ser encontrado em <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.oneline.onetouch.onestroke.dotgame>

Figura 92: Planta da mansão.



Fonte: <https://www.inf.ufsc.br/grafos/temas/euleriano/euleriano.htm> (Adaptado).

uma porta seria para entrar e a outra para sair. E como a sala 2 tem cinco portas ela acabaria ficando na sala ou sendo obrigada a sair por uma mesma porta que já passou. Concluindo, a esposa mentiu para o detetive, sendo a suspeita.

Os Problemas 6.3 e 6.4, podem ser apresentados para o ensino médio. Para resolver o problema são necessários os conceitos dos Capítulos 4 e 5.

Problema 6.3. (*Trabalho de Francis*) Francis foi contratado para colorir mapas de algumas regiões, conforme a Figura 93. O contratante pediu para ele colorir com as seguintes condições:

- Colorir o mapa de modo que as regiões vizinhas tenham cores distintas.
- Usar a menor quantidade de cores possível.

Quantas cores Francis utilizou em cada uma das figuras?

Figura 93: Mapas para colorir.

(a) Mapa da Austrália.⁶(b) Mapa da América do Sul.⁷(c) Mapa do Brasil.⁸

⁶Fonte: <http://www.desenhosparacolorir24.com/escola-e-aprendizado/geografia-e-mapas/Australia>. (Adaptado).

⁷Fonte: <https://viagemdeaz.com/wp-content/uploads/2017/04/mapa-mundi-colorir-paises-2.jpg>. (Adaptado).

⁸Fonte: <http://www.desenhosparacolorir24.com/escola-e-aprendizado/geografia-e-mapas/Brazil>. (Adaptado).

Deixar um tempo para os alunos discutirem sobre esse fato e colorir os mapas. Depois de um tempo, discutir as ideias e ver qual foi a conclusão deles sobre a quantidade de cores encontradas nos mapas (a), (b) e (c), e se todos encontraram a mesma quantidade de cores.

Depois de debater com os alunos, contar a história do Teorema das Quatro Cores, seu surgimento e como foi provado. Sugerir para eles uma nova forma de resolver utilizando vértices e arestas que representam regiões e as regiões vizinhas respectivamente. Ao resolver o problema para o ensino médio, mostrar para eles que na Figura 93 (a), temos um ciclo com número ímpar de vértices e nas Figura 93 (b) e (c), temos um grafo roda com uma quantidade par de vértices, como foi visto na Seção 4.1. Pelo Teorema 5.2, podemos concluir que a Figura 93 (a) necessita de pelo menos 3 cores, a Figura (b) 4 cores e (c) 4 cores.

Problema 6.4. *(O problema da secretária) O chefe de uma companhia solicitou a sua secretária a impressão colorida do mapa das microrregiões do estado de Santa Catarina, conforme a Figura 94. A secretária sabe que a impressora possui 16 cores, contudo, para minimizar os custos ela deve imprimir o mapa com o menor número de cores possível sem que microrregiões que fazem fronteira tenham a mesma cor. Quantas cores são necessárias para colorir o mapa?*

Figura 94: Mapa microrregiões de Santa Catarina.



Fonte: <https://portaldemapas.ibge.gov.br/portal.php#mapa222715>.

Após escutar a história do Teorema das Quatro Cores os alunos terão uma noção de que é possível utilizar quatro cores para pintar o mapa. Depois de dar um tempo para os alunos resolverem, fazer com eles uma verificação pintando o mapa com quatro cores. Após pintar, falar do Teorema das Quatro Cores, pois o mapa pode ser pintado com quatro cores ou menos, abrindo precedente para questionar se não pode ser colorido com menos cores. Ao analisar esse caso percebe-se que não há como, pois a região de Ituporanga (mostrar onde fica no mapa) faz fronteira com cinco regiões formando um pentágono, com ela no centro, formando um grafo roda como no Exemplo 5.3. Assim

precisamos de quatro cores, só para essa parte. O Teorema das Quatro Cores nos leva a concluir que serão necessárias quatro cores.

Após mostrar para os alunos esses problemas num grafo, apresentar para eles outros três problemas que envolvem a coloração de arestas e vértices, como os Problemas 6.5, 6.6 e 6.7.

O Problema 6.5, pode ser apresentado para as séries finais do ensino fundamental II e para o ensino médio. Para resolver o problema precisamos ver o Capítulo 3.

Problema 6.5. *(Problema das entrevistas) Suponha uma empresa que está oferecendo 3 vagas de emprego das quais foram registrados 11 candidatos para realizarem as entrevistas com o avaliadores como mostra o Quadro 6.1. Na empresa só há três avaliadores para as entrevistas e cada um deles leva uma hora para finalizar uma entrevista. Sabendo que cada candidato será entrevistado somente uma vez, qual é a quantidade mínima de horas necessárias para fazer todas as entrevistas?*

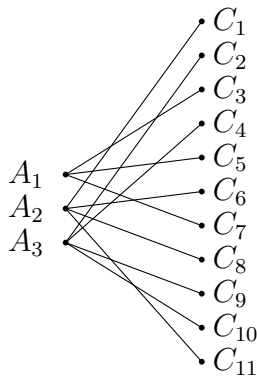
Quadro 6.1: Quadro das entrevistas.

Avaliadores	Candidatos
A_1	C_3, C_5, C_7
A_2	C_1, C_6, C_8, C_{11}
A_3	C_2, C_4, C_9, C_{10}

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dar um tempo para os alunos pensarem no problema e depois ver as conclusões deles. Discutir com eles o problema no grafo, como mostra a Figura 95. Em que, os vértices A_1, A_2, A_3 são os avaliadores e $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}$ são os candidatos. As arestas representam o avaliador e o candidato que está sendo entrevistado.

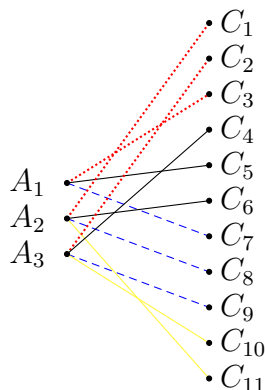
Figura 95: Grafo dos dados do Quadro 6.1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para responder a pergunta, colorir as arestas com os alunos de modo que cada cor corresponderá a um horário. Portanto, para encontrar o menor tempo para as entrevistas, passará a ser encontrar o menor número de cores necessário para colorir as arestas do grafo da Figura 95, isto é, χ' .

Figura 96: Colorindo as arestas.



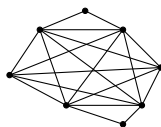
Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 96 mostra uma forma de colorir as arestas do grafo, usando 4 cores (amarelo, azul, preto e vermelho). Como as cores representam as horas, então serão necessárias 4 horas para fazer as entrevistas. Note que o menor tempo para entrevistar todos é $\chi'(G)$. Logo, pelo Teorema 3.5, temos $4 \leq \chi'(G) \leq 5$, como foi colorido o grafo G com quatro cores, segue $\chi'(G) = 4$.

Os Problemas 6.6 e 6.7, podem ser apresentados para o ensino médio. Para resolver os problemas precisamos consultar o Capítulo 4.

Problema 6.6. *(O problema da gincana) Uma escola faz uma gincana em que os alunos do ensino médio ficam responsáveis por oito barracas de lanches, mas, cada barraca vizinha deverá ter lanches diferentes. A escola oferece um diagrama dos locais das barracas, conforme a Figura 97 em que os vértices são os locais das barracas e as linhas representam as barracas vizinhas. Qual é a quantidade mínima de lanches que os alunos podem oferecer na gincana?*

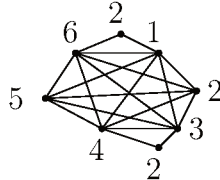
Figura 97: Grafo B local das barracas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Após apresentar esse problema para os alunos e dar tempo para eles pensarem, resolver com eles colorindo os vértices do grafo B dado pelo problema, como mostra a Figura 98 os vértices coloridos com as cores 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Figura 98: Grafo B colorido com as cores 1, 2, 3, 4, 5 e 6.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O grafo B foi colorido com seis cores, pois se retirar os vértices dos extremos da parte de cima e de baixo do grafo B , obtemos um grafo completo K_6 e pelos Teoremas 4.1 e 4.2 temos $\chi(G) = 6$. Portanto, na gincana haverá no mínimo seis tipos de lanches.

O próximo problema envolve um jogo conhecido, o Sudoku, que pode ser resolvido por grafos. Explicar para os alunos como funciona o jogo resolvendo como exemplo um Sudoku 4×4 no quadro, envolvendo quatro blocos e cada bloco sendo divididos em quatro quadrados. Depois de explicar para os alunos o Sudoku, aplicar para eles o seguinte o problema.

Problema 6.7. (Sudoku 4×4).

O jogo Sudoku abaixo está incompleto. Preencher os quadrados com os números 1, 2, 3 e 4 de modo que cada número não apareça mais de uma vez na mesma linha ou na mesma coluna ou no mesmo bloco.

Figura 99: Sudoku 4×4 .

1			
		3	
2			
	4		

Fonte: Elaborada pelo autor.

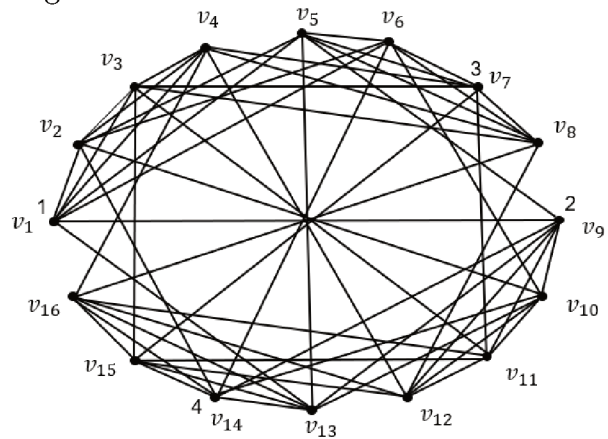
Depois de dar um tempo para os alunos resolverem o problema, mostrar para eles como o problema pode ser modelado como um problema de coloração e resolvido através da teoria de grafos.

Considere cada quadrado um vértice e as arestas do grafo serão os segmentos que ligam os vértices que estão na mesma linha ou coluna ou bloco, como ilustrado na Figura 100.

Figura 100: Montando o grafo do Sudoku.

v_1	v_2	v_3	v_4
v_5	v_6	v_7	v_8
v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}

(a)



(b) Grafo G

Observe pela construção do grafo G , que os vértices adjacentes não podem receber o mesmo número, o que pode ser interpretado como a condição de vértices adjacentes possuírem cores distintas no problema de coloração de vértices.

Para resolver o problema, vamos representar os números 1, 2, 3 e 4 do jogo do sudoku sendo as cores azul, preto, verde e vermelho respectivamente.

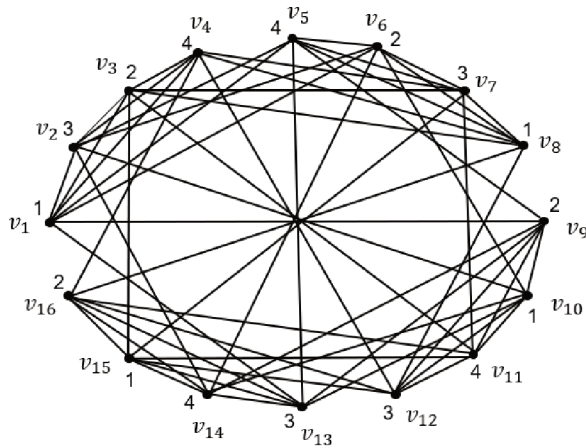
Pelo teorema de Brooks (Teorema 4.2) e pela construção do grafo G da Figura 100 (b), temos $\chi(G) \leq 7$. Observe que no grafo G existem subgrafos K_4 , como por exemplo os vértices que estão em uma mesma linha v_1, v_2, v_3 e v_4 . No Capítulo 4, foi visto que um grafo completo satisfaz a igualdade $\chi(K_n) = \Delta(K_n)$. Assim, junto com o Teorema 4.2, temos $4 \leq \chi(G) \leq 7$, mas para o jogo ter solução o número cromático de G tem que ser quatro.

Para colorir os vértices do grafo G vamos usar o algoritmo ganancioso (veja Seção 4.1, Capítulo 4). Se não for possível colorir o grafo com as quatro cores, o problema dado não terá solução.

Na Figura 100 (b), como o vértice v_1 já está colorido com a cor 1, começaremos a colorir o vértice v_2 com algoritmo ganancioso pela cor 2, e o vértice v_3 pela cor 4, pois v_3 é adjacente com v_1, v_2 e v_7 já coloridos. Agora colorindo o v_4 , observe que não podemos colorir com nenhuma das quatro cores, pois as cores 1, 2, 3 e 4 já estão sendo utilizadas nos vértices v_1, v_2, v_7 e v_3 respectivamente. Portanto, começar a colorir o vértice v_2 com a cor 2, não foi uma escolha apropriada.

Fazendo o mesmo raciocínio, colorimos o vértice v_2 com a cor 3 e pelo algoritmo ganancioso o vértice v_3 será colorido com a cor 2, v_4 com a cor 4, e assim sucessivamente até colorir todos os vértices com as quatro cores, como mostra a Figura 101.

Figura 101: Sudoku resolvido.



(a) Sudoku 4×4

1	3	2	4
4	2	3	1
2	1	4	3
3	4	1	2

(b)

Embora esta formulação do Sudoku 4×4 usando grafos pareça muito mais complicada que tentar resolver diretamente (e manualmente) o problema, ela permite a criação de algoritmos capazes de resolver *qualquer* Sudoku 4×4 .

7 CONCLUSÃO

Ao final desse trabalho, vinculamos a Teoria de Grafos, não presente no plano curricular do ensino médio, às situações cotidianas e a práticas curriculares. Apesar da fácil compreensão e da grande possibilidade de mesclagem, com o dia a dia dos discentes, a teoria é pouco utilizada em sala.

Um exemplo claro da proximidade do tema com o conteúdo programático, são os conceitos de vértices e arestas presentes tanto na Teoria de Grafos como em polígonos. A semelhança de conceitos encontrados nesse assunto facilitaria a introdução da Teoria de Grafos, como também, aumentaria o interesse dos alunos por novas áreas da matemática.

Nesse trabalho foram apresentados alguns problemas históricos que foram resolvidos com a Teoria de Grafos. Ao longo do trabalho foram estudados conceitos fundamentais da teoria com foco nos problemas de coloração de vértices e arestas, culminando com uma breve discussão sobre o Teorema das Quatro Cores.

Esse trabalho pode ser uma importante ferramenta, para auxiliar professores do ensino da matemática a expandir a curiosidade e os conhecimentos dos alunos pela matéria, sendo capaz de levar para dentro da sala de aula uma proposta de resoluções diferenciadas fugindo das equações. Para tanto, fora desenvolvido um roteiro com linguagem simples que agrupa conceitos teóricos, históricos e pedagógicos, sendo possível sua utilização para discussões em sala e até para a elaboração de outras atividades pedagógicas.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDERSON, G. About the cover: Euler and Königsberg's Bridges: A historical view. *Bulletin of the american mathematical society*, v. 43, n. 4, p. 567–573, 2006.
- APPEL, K.; HAKEN, W. The solution of the four-color-map problem. *Scientific American*, JSTOR, v. 237, n. 4, p. 108–121, 1977.
- BALAKRISHNAN, R.; RANGANATHAN, K. *A textbook of graph theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- BROOKS, R. L. On colouring the nodes of a network. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. [S.l.], 1941. v. 37, n. 2, p. 194–197.
- CORMEN, T. H. et al. Algoritmos: teoria e prática. *Editora Campus*, v. 2, p. 296, 2002.
- EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, p. 128–140, 1741.
- FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. Uma introdução sucinta à teoria dos grafos. 2011.
- HARRIS, J. M.; HIRST, J. L.; MOSSINGHOFF, M. J. *Combinatorics and Graph Theory. Second Edition*. [S.l.]: Springer, 2008.
- HEAWOOD, P. J. Map color theorems. *Quant. J. Math.*, v. 24, p. 332–338, 1890.
- JURKIEWICZ, S. Grafos - uma Introdução. *São Paulo: OBMEP*, 2009.
- KEMPE, A. B. On the geographical problem of the four colours. *American journal of mathematics*, JSTOR, v. 2, n. 3, p. 193–200, 1879.
- LIMA, C. L. G. D. *Um estudo sobre Teoria dos Grafos e o Teorema das Quatro Cores*. 2016.
- LIMA, E. L. O teorema de euler sobre poliedros. *Revista Matemática Universitária. Rio de Janeiro: SBM*, n. 2, 1985.
- LOVÁSZ, L. Three short proofs in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Academic Press, v. 19, n. 3, p. 269–271, 1975.
- NANJWENGE, S. E. *The Four Colour Theorem*. 2018.
- NASERASR, R.; ŠKREKOVSKI, R. The Petersen graph is not 3-edge-colorable—a new proof. *Discrete mathematics*, Elsevier, v. 268, n. 1-3, p. 325–326, 2003.
- PIMENTA, M. M. D. História do problema das quatro cores. *Outras Publicações*, 2010.
- PRESTES, E. Introdução à Teoria dos Grafos. *Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Informática, Departamento de Informática Teórica, Tech. Rep*, 2016.
- RABUSKE, M. A. *Introdução à Teoria dos Grafos*. [S.l.]: Editora da UFSC, 1992.

- ROBERTSON, N. et al. A new proof of the four-colour theorem. *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, v. 2, n. 1, p. 17–25, 1996.
- ROONEY, A. A história da Matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. *São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda*, 2012.
- ROSEN, K. H. *Matemática discreta e suas aplicações*. [S.l.]: Grupo A Educação, 2009.
- SAMPAIO, J. C. V. Passeios de Euler e as pontes de Königsberg. *Disponível em <http://www.dm.ufscar.br/sampaio/PasseiosdeEuler.pdf>, acesso em 10 de junho de 2015*, 2002.
- SILVA, A. G. D. *Um estudo sobre coloração de arestas e coloração total de grafos*. 2018.
- SOUSA, L. O Teorema das Quatro Cores. *Millenium*, Instituto Politécnico de Viseu, p. 125–151, 2001.
- VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Discret Analiz*, v. 3, p. 25–30, 1964.
- WEST, D. B. et al. *Introduction to Graph Theory*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1996.
- WILSON, R. J. *Introduction to graph theory*. [S.l.]: Pearson Education India, 1979.