UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Tiago Coelho Rodrigues

OS GRUPOS FUNDAMENTAIS DE S^n E DO TORO

Florianópolis

2020

Tiago Coelho Rodrigues

OS GRUPOS FUNDAMENTAIS DE S^n E DO TORO

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro

Florianópolis

2020

Catalogação na fonte elaborada pela biblioteca da
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:
http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html

Tiago Coelho Rodrigues

OS GRUPOS FUNDAMENTAIS DE S^n E DO TORO

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Alexandre Tavares Baraviera
UFRGS

Prof. Dr. Eliezer Batista
UFSC

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Documento assinado digitalmente
Maria Inez Cardoso Goncalves
Data: 06/01/2021 14:29:23-0300
CPF: 908.897.119-68

Profª. Drª. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

Documento assinado digitalmente
Gilles Goncalves de Castro
Data: 06/01/2021 08:56:06-0300
CPF: 029.977.489-92

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Orientador

Florianópolis, 14 de Dezembro 2020.

Dedico este trabalho a todos amantes de matemática, a todos que se deleitam nas propriedades sublimes que está tão sublime disciplina nos permite observar. E também dedico para os que assim como Sir Isaac Newton, Charles Darwin, Galileo Galilei e tantos outros, se deleitam em estudar e admirar cada vez mais a capacidade criativa do ser que tudo formou.

AGRADECIMENTOS

Agradeço com todas minhas forças a um único ser, meu Deus, representado na figura do Pai criador, na figura do Filho redentor e na pessoa do Santo Espírito, o consolador. A Ele tudo pertence, devo minha vida, felicidade, alegrias, amor e esperança. Nada do que foi feito, se realizou por minhas capacidades, mas pela bondade de Deus em compartilhar um pouco se sua sabedoria.

Agradeço a minha esposa, ela que detém todo meu amor, a qual fez parte da minha caminhada no mestrado, casei-me com ela no último ano do mestrado, e ela sabe quantas vezes pensei em desistir. Ela me apoiou e me provocou a estudar mais e mais, esta que é, sem sombra de dúvidas, a maior ciência do mundo, e nas palavras de Gauss, a rainha de todas as ciências, a matemática.

Agradeço aos meus amigos e colegas de profissão que fizeram e fazem parte do meu dia a dia, com destaque especial á Thais Leite, ao Antônio José Martins, á Tanay Gonçalves, ao Dirceu Klann, e ao Willian Souza. Esses que admiro e tanto amo, o meu muito obrigado.

Agradeço aos professores e aos colegas do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Caminhamos lado a lado sextas-feiras após sextas-feiras, durante dois anos, onde aprendemos, passamos momentos de tensão, mas sem dúvidas, vencemos juntos.

Agradeço ao professor que detém uma das mentes mais brilhantes que conheço, o professor Gilles Gonçalves de Castro, agradeço pela paciência (e olha que foi preciso), pela disponibilidade, e por querer compartilhar um pouco de seu conhecimento comigo. Além do mais ressalto que não mediu esforço para esta dissertação ser concluída.

Por último e não menos importante que os demais, muito pelo contrário, agradeço a minha mãe, dona Adriana Nadir Severino que me educou, me formou como homem e deu suor e sangue para que eu chegasse até aqui. Valeu cada momento a seu lado, e cada vez que a senhora quis que eu me tornasse algo melhor, e eu serei eternamente grato.

Para finalizar deixo uma frase de gratidão:

"Nada do que sou, eu seria por mim mesmo, mas se sou algo, é devido a fonte da existência humana, a tão sublime graça de DEUS".

Sem os recursos da Matemática não nos seria possível compreender muitas passagens da Santa Escritura.

(Agostinho de Hipona)

RESUMO

Neste trabalho, buscaremos ampliar a ideia usual sobre a igualdade de dois espaços, mostrando que apesar de espaços serem visualmente diferentes, mesmo assim podem ter a mesma forma, sendo assim homeomorfos. Também visando tornar a ideia de função algo mais significativa no ensino médio, construímos uma sequência didática que permite o professor ampliar este conceito ensinado de maneira tão pouco significativa para os alunos.

Palavras-chave: Homeomorfismo. Homotopias. Espaço Topológico. Grupo.

ABSTRACT

In this work, we will seek to enlarge the usual idea of the equality between two spaces, showing that although spaces can be visually different, they might have the same shape yet. So being homeomorphic. Also aiming to make the idea of function something meaningful in high school, we built a didactic sequence that allows the teacher to enlarge this concept, which is taught in a way not so significant for the students.

Keywords: Homeomorphism. Homotopies. Topological space. Group.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No decorrer dos séculos, os matemáticos se dedicam a resolver problemas belíssimos, podemos destacar aqui o último teorema de Fermat, as famosas conjecturas de Goldbach, a irracionalidade de π. Esta dissertação não é diferente neste quesito.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que a Esfera, figura geométrica que não é distante dos alunos de ensino médio, e o Toro, a famosa rosquinha do policial hollywoodiano, não são homeomorfas, ou seja, é impossível distorcer (esticar, amassar) uma Esfera até virar um Toro.

Deve parecer um tanto quanto estranho tal objetivo, mas se observarmos que um dos papéis da matemática é o de classificação, sejam de conjuntos com mesmas características, funções com propriedades similares, entre outros. Faz então se pensar: "A esfera e o toro são a mesma figura?"

Para isso, nesta dissertação será retomado o conceito de grupo, o qual teve surgimento nos trabalhos do matemático francês évariste Galois (1811-1832), que definiu uma estrutura chamada de grupo, ele utilizou esta teoria para descrever as raízes de equações polinomiais, porém vamos utilizar com outra finalidade. Nos apropriamos desta definição e fazemos a devida aplicação em topologia, construindo uma estrutura chamada de grupo fundamental.

A teoria de grupos fundamentais busca caracterizar as formas, ou seja, associa-se a um espaço topológico um grupo e se tais espaços forem iguais (homeomorfos) seus grupos devem ser isomorfos, com isso já fica claro a direção que daremos a este trabalho, que é verificar se os grupos fundamentais da esfera e do toro são realmente isomorfos.

Neste trabalho primeiramente serão apresentados alguns resultados de espaços métricos, teoria de grupos e topologia, os quais serão necessários para a compreensão do trabalho, com o intuito também de torná-lo o mais autocontido possível.

Posteriormente apresentamos a definição de homotopia, que é a maneira matemática de descrever uma "distorção" em um espaço topológico. A definição do grupo fundamental e suas respectivas propriedades são apresentadas posteriormente as propriedades sobre homotopias, afinal, o grupo fundamental é construído em cima de classes de funções homotópicas.

Por fim irá se construir os grupos fundamentais da esfera e do toro, que nos permitirão chegar à conclusão que é impossível "distorcer" uma esfera até esta virar um toro, e vice versa.

O último capítulo deste trabalho mostrará um plano de aula para que se possa ampliar o conceito de funções ministrados no ensino médio, e mostrar que este conceito ampliado pode ter aplicações belissímas e mostrar que ainda que coisas visualmente pareçam distintas, elas podem ser equivalentes, onde se faz necessário ter um conhecimento robusto de matemática.

Vale ressaltar que os resultados deste trabalho são encontrados nos trabalhos (LIMA, 2012) e (LIMA, 2009) do Professor Elon Lages, onde nos embasamos para construção desta dissertação.

2 CONCEITOS INICIAIS

Neste primeiro capítulo da teoria serão apresentados conceitos necessários para compreensão do trabalho. Aqui você encontrará conceitos de análise, como espaço métrico e também conceitos de álgebra, como as definições de grupo e de homomorfismo. Para uma boa compreensão do trabalho, destaca-se a importância deste capítulo.

2.1 ESPAÇOS MÉTRICOS

Definição 2.1. *Seja M um conjunto qualquer não-vazio. Uma função $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ é chamada de **métrica** se satisfaz as seguintes propriedades para todos $x,\ y,\ z \in M$:*

(1) $d(x,\ y) \geqslant 0$;

(2) $d(x,\ y) = 0$ *se e só se* $x = y$;

(3) $d(x,\ y) = d(y,\ x)$;

(4) $d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$.

A propriedade (**4**) é comumente chamada de ***desigualdade triangular***. O par $(M,\ d)$ é chamado de **espaço métrico**, em que M é um conjunto e d é uma métrica.

Exemplo 2.2. *O conjunto $\mathbb{R}^2$ com a métrica $d(x,\ y) = máx\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\}$ é um espaço métrico.*

Demonstração: Vamos verificar que $\mathbb{R}^2$ é um espaço métrico com a métrica dada. Para isto, é preciso verificar as quatro condições da definição 2.1.

(1) Tome $x, y \in \mathbb{R}^2$ em que, $x = (x_1,\ y_1)$ e $y = (x_2,\ y_2)$.

Temos que $d(x,\ y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\} \geqslant 0$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^2$. De fato, como o módulo de qualquer número é maior ou igual a zero, então,
$\text{máx}\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\}$ para qualquer $x, y \in \mathbb{R}^2$ é maior ou igual a zero.

(2) (Ida)
Tome $x, y \in \mathbb{R}^2$ com $d(x,\ y) = 0$ em que, $x = (x_1,\ y_1)$ e $y = (x_2,\ y_2)$. Segue disso que $\text{máx}\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\} = 0$. Podemos afirmar agora então que $|x_1 - x_2| = 0$ e $|y_1 - y_2| = 0$ o que implica em $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Portanto $x = y$.

(Volta)
Tome $x,\ y \in \mathbb{R}^2$ com $x = y$, em que, $x = (x_1,\ y_1)$ e $y = (x_2,\ y_2)$.

Como $x = y$, segue que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, sendo assim;

$$d(x,\ y) = \text{máx}\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\} = \text{máx}\{0\} = 0. \tag{2.1}$$

(3) Tome $x,\ y \in \mathbb{R}^2$ com $x = y$, em que, $x = (x_1,\ y_1)$ e $y = (x_2,\ y_2)$.

Temos que a métrica dada satisfaz (3), de fato:

$$d(x,\ y) = \text{máx}\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\} = \text{máx}\{|x_2 - x_1|,\ |y_2 - y_1|\} = d(y,\ x),$$

para todo $x,\ y \in \mathbb{R}^2$.

(4) Agora vamos verificar a desigualdade triangular.

Sejam $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^2$ quaisquer, em que $x = (x_1,\ y_1)$, $y = (x_2,\ y_2)$ e $z = (x_3, y_3)$. Queremos Provar:

$$d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z),$$

isto é,

$$\text{máx}\{|x_1 - x_3|,\ |y_1 - y_3|\} \leqslant \text{máx}\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\} + \text{máx}\{|x_2 - x_3|,\ |y_2 - y_3|\}.$$

De fato:

Para $a,\ b, \in \mathbb{R}$ é válido que $a \leqslant \text{máx}\{a, b\}$. Então usando este fato e a desigualdade triangular de $\mathbb{R}$ temos :

$$|x_1 - x_3| \leqslant |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \leqslant \text{máx}\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\} + \text{máx}\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\},$$

e

$$|y_1 - y_3| \leqslant |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \leqslant \text{máx}\{|x_1 - x_2|,\ |y_1 - y_2|\} + \text{máx}\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\},$$

Logo, conluímos que

$$\text{máx}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_3|\} \leqslant \text{máx}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \text{máx}\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\},$$

isto é,

$$d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z),$$

sendo assim, a métrica dada satisfaz (4).

Portanto, $(\mathbb{R}^2,\ d)$ é um espaço métrico.

$\blacksquare$

Em um mesmo espaço métrico, pode-se ter mais de uma métrica, e nosso próximo exemplo vai nesta direção, onde irá se construir a chamada **Métrica Euclidiana** ou a métrica usual de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.3. *Dado* $\mathbb{R}^2$ *e* $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *onde* $d(a,\ b) = |A - B| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. *Então* $(\mathbb{R}^2, d)$ *é um espaço métrico.*

Demonstração: Tome $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, onde $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$.

- $d(a,\ b) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \geqslant 0$, pois $\sqrt{x} \geqslant 0 \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}_+$.
- $d(a,\ b) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 0 \iff (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 0$, porém como $(x_A - x_B)^2 > 0$ se $x_A \neq x_B$ e $(y_A - y_B)^2 > 0$ se $y_A \neq y_B$, segue então $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 0 \iff x_A = x_B$ *e* $y_A = y_B$, ou seja, $d(a,\ b) = 0 \iff A = (x_A, y_A) = (x_B, y_B) = B$.
- $d(a,\ b) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = d(B,\ A)$.
- Para demonstrar a desigualdade triangular, utilizaremos a desigualdade de **Cauchy-Schwarz** que é dada por:

$$|X \cdot Y| \leqslant |X| \cdot |Y| \qquad \forall X,\ Y \in \mathbb{R}^2.$$

A demonstração desta desigualdade, pode ser encontrada em (LIMA, 2000), neste trabalho apenas utilizaremos.

Segue disso então:

$$\begin{aligned} |\mathrm{A{+}B}|^2 &= (A+B)(A+B) = A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B = |A|^2 + 2A \cdot B + |B|^2 \\ &\leqslant |A|^2 + 2|A \cdot B| + |B|^2 \leqslant |A|^2 + 2|A| \cdot |B| + |B|^2 = (|A| + |B|)^2 \end{aligned}$$

Ou seja;

$$|A + B|^2 \leqslant (|A| + |B|)^2$$

Como em ambos os lados temos números não negativos, então segue:

$$|A + B| \leqslant |A| + |B|$$

Utilizando agora esta última desigualdade, segue:

$$d(A,\ C) = |A - C| = |A - B + B - C| \leqslant |A - B| + |B - C| = d(a,\ b) + d(B,\ C)$$

$$d(A,\ C) \leqslant d(a,\ b) + d(B,\ C)$$

.

Segue dos quatro itens que $(\mathbb{R}^2, d)$ é um espaço métrico.

■

Definição 2.4. *Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Dado $a \in M$ e $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ define-se a **bola aberta de centro a e raio r** por*

$$B_r(a) = \{x \in M \colon d(x,\ a) < r\}.$$

De maneira similar, definimos **bola fechada (disco) de centro a e raio r**:

$$D_r(a) = \{x \in M\ :\ d(x,\ a) \leqslant r\}.$$

Definição 2.5. *Dado um espaço métrico $(M,\ d)$ e um subconjunto A de M. Dizemos que A é **aberto** se para todo $a \in A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subset A$.*

Ou seja, cada ponto $a \in A$ é o centro de uma bola abera totalmente contida em A. Define-se também que o conjunto vazio é aberto.

Proposição 2.6. *Seja $(M,\ d)$ um espaço métrico. Toda bola aberta $B_r(a)$ de $(M,\ d)$ é um subconjunto aberto do espaço métrico.*

Demonstração: Tome $B_r(a)$ uma bola aberta qualquer de $(M,\ d)$. Para cada $x \in B_r(a)$, vale que $d(x,\ a) < r$. Defina: $\epsilon = r - d(x,\ a)$. Note que $\epsilon > 0$, pois $d(x,\ a) < r$. Vamos mostrar que, $B_\epsilon(x)$ é uma bola aberta contida em $B_r(a)$, de fato, considere $y \in B_\epsilon(x)$, ou seja,

$$d(y,\ x) < \epsilon$$

$$d(y,\ x) < r - d(x,\ a)$$

Logo, pela desigualdade triangular, temos:

$$d(y,\ a) \leqslant d(y,\ x) + d(x,\ a) < r - d(x,\ a) + d(x,\ a) = r,$$

ou seja, $y \in B_r(a)$.

Portanto, para todo $x \in B_r(a)$, existe uma bola aberta de centro x inteiramente contida em $B_r(a)$, isto é, $B_r(a)$ é um subconjunto aberto de $(M,\ d)$. ∎

Exemplo 2.7. *Dado um conjunto X e d uma função definida da seguinte maneira:*

$$d\colon X \ \times\ X \to \mathbb{R}$$
$$d(x,\ y) = \begin{cases} 0, & se \quad x = y, \\ 1, & se \quad x \neq y. \end{cases}$$

Então, $(X,\ d)$ é um espaço métrico e todo subconjunto de X é um aberto.

Demonstração:

Segue da definição de d que $d(x,\ x) = 0$ e $d(x,\ y) > 0$, se $x \neq y$,

$$d(x,\ y) = d(y,\ x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = y, \\ 1, & \text{se} \quad x \neq y \quad \text{ou} \quad y \neq x \end{cases}$$

Já para verificar a desigualdade triangular, devemos considerar os seguintes casos:

Caso (1) : $x = z$;

Como d é uma métrica é válido que:

$$0 \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$$

$$d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$$

Caso (2) : $x \neq z$,

Note que ou $x = y$ ou $y = z$.

Então se $x = y$ temos:

$$d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$$

$$1 \leqslant 0 + 1$$

Agora se $z = y$ temos:

$$d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$$

$$1 \leqslant 1 + 0$$

Por último $x \neq y \neq z$

$$d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$$

$$1 \leqslant 1 + 1$$

Sem maiores dificuldades concluímos que:

$$d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z).$$

Agora vamos provar que todos os subconjuntos de X são abertos, para isso tome $A \subset X$ qualquer.

(i) Se $A = \emptyset$, A é aberto.

(ii) Se $A \neq \emptyset$, tome $a \in A$ e defina :

$$B_1(a) = \{x \in X \ :\ d(a,\ x) < 1\}$$

Note que dado $b \in B_1(a)$ temos $d(a,\ b) < 1$, sendo assim $a = b$ e portanto $B_1(a) \subset A$, ou seja, Para todo $a \in A$ é possível definir uma bola aberta inteiramente contida em A, logo A é aberto, e como A é qualquer, fica demonstrado que para todo $A \subset X$ com a métrica a cima definida A é aberto.

■

Definição 2.8. *Dados espaços métricos $(M,\ d_m)$, $(N,\ d_n)$ e uma função $f\colon M \to N$ e $a \in M$. Diz-se que f é **contínua** no ponto a quando, dado um número $\epsilon > 0$ qualquer, for possível determinar um número $\delta > 0$ tal que $d_m(x,\ a) < \delta$ implique em $d_n(f(x),\ f(a)) < \epsilon$. Diremos ainda que uma **função é contínua** quando ela for contínua em todos os pontos do domínio.*

Exemplo 2.9. *Considere $\mathbb{R}$ com a métrica usual (euclidiana), então $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 5x$ é uma função contínua.*

Demonstração: Seja $a, \epsilon \in \mathbb{R}$ com $\epsilon > 0$ quaisquer. Tome $\delta = \frac{\epsilon}{5}$, note que $\delta > 0$ pois $\epsilon > 0$. Então para qualquer $x \in \mathbb{R}$ com $d(x,\ a) < \delta$, temos que:

$$\begin{aligned} d(f(x),\ f(a)) =& |f(x) - f(a)| = |5x - 5a| = 5|x - a| = 5d(x,\ a) \\ <& 5\delta < \epsilon \end{aligned}$$

Verificou-se assim que f é contínua em a, e como a foi tomado arbitrário, segue que f é contínua.

■

Definição 2.10. *Dados espaços métricos $(M,\ d_m)$, $(N,\ d_n)$ e uma função $f\colon M \to N$, dizemos que f é **uniformemente contínua**, se para qualquer $\epsilon \in \mathbb{R}$, com $\epsilon > 0$ existe $\delta \in \mathbb{R}$, com $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in M$, se $d_m(x,\ y) < \delta$ então $d_n(f(x),\ f(y)) < \epsilon$.*

Exemplo 2.11. *Seja* $(M,\ d)$ *um espaço métrico e* $f\colon M \to M$ *a função identidade,* $f(x) = x$ *para todo* $x \in M$*.*

Demonstração: Dado $\epsilon \in \mathbb{R}$ com $\epsilon > 0$, qualquer, tome então $\delta = \epsilon$. Se $x, y \in M$ são quaisquer tais que $d(x,\ y) < \delta$, então:

$$d(f(x),\ f(y)) = d(x,\ y) < \delta = \epsilon.$$

Mostramos assim que f é uniformemente contínua.

■

Já sabemos o que é um conjunto aberto. Nossa próxima definição é do seu complementar que chamaremos de fechado.

Definição 2.12. *Seja* M *um espaço métrico e* $F \subset M$*, dizemos que* F *é* ***fechado*** *quando* $M - F$ *é aberto.*

Ou seja, um conjunto é fechado se for complementar de um aberto.

Exemplo 2.13. *Como exemplo podemos destacar os intervalos fechados de* $\mathbb{R}$*.*

Definição 2.14. *Dado um conjunto* $A \subset M$*,* M *é um espaço métrico. Dizemos que* A *é um conjunto limitado se existe* $\epsilon \in \mathbb{R}$*, com* $\epsilon > 0$*, tal que* $A \subset B_\epsilon(x)$*, para algum* $x \in M$*.*

A próxima definição, possui uma outra versão mais geral, para espaços topológicos não tão usuais quanto $\mathbb{R}^n$, mas para os objetivos deste trabalho, não se requer uma definição tão geral.

Definição 2.15. *Em* $\mathbb{R}^n$ *com a métrica usal (Euclidiana), um subconjunto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *é chamado* ***compacto*** *se* K *é limitado e fechado em* $\mathbb{R}^n$*.*

Observamos que existe uma definição mais geral de espaço compacto para espaços métricos mais gerais, a qual não vai ser definida neste trabalho, pois para os resultados de interesse trabalharemos com subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

O próximo teorema, será aceito sem demosntrção, haja visto que o objetivo deste trabalho não é se alongar em conteúdos de espaços métricos, porém o leitor pode encontrar a demonstração deste teorema em (LIMA, 2010). Ainda aceitaremos que composição de funções contínuas é uma função contínua.

Teorema 2.16. Sejam $(M,\ d_m)$, $(N,\ d_n)$ espaços métricos e uma função $f\colon M \to N$, contínua. Se $K \subset M$ é compacto, então $f(K) = \{f(x)\ :\ x \in K\}$ é compacto, se $K \subset N$ é fechado, então $f^{-1}(K) = \{x \in M\ :\ f(x) \in K\}$ é fechado, se $K \subset N$ é aberto, então $f^{-1}(K) = \{x \in M\ :\ f(x) \in K\}$ é aberto, e ainda, se M é compacto então f é uniformemente contínua.

2.2 GRUPOS

Vimos acima, alumas definições, propriedades e exemplos sobre espaços métricos. Agora vamos a algumas definições e propriedades de álgebra, que foram retiradas (JANESCH, 2008).

Definição 2.17. *Seja G um conjunto não vazio e $*$ uma operação em G. Dizemos que $(G, *)$ é um **Grupo**, quando :*

(i) $*$ é associativa, isto é, para todos $x, y, z \in G$ vale:

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

(ii) Existe elemento Neutro para $*$, isto é, existe $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$;

*(iii) Todo elemento de **G** admite um inverso, isto é, para todo $x \in G$, existe um $y \in G$ tal que $x * y = y * x = e$.*

Definição 2.18. *Seja $(G, *)$ um grupo. Diz-se que um subconjunto $H \subset G$ é um **subgrupo de G** quando:*

(i) $H \neq \emptyset$,

(ii) H é fechado para a operação $*$, isto é, para qualquer operação entre elementos de H o resultado é um elemento de H.

(iii) $(H, *)$ é um Grupo.

Exemplo 2.19. *O conjunto $G = (\mathbb{Z},\ +)$ onde $+$ é a operação adição usual, é um grupo. Ainda, $H = (2\mathbb{Z},\ +)$, onde $2\mathbb{Z}$ é conjunto dos números pares, H definido desta maneira é um grupo, pois a soma de números pares é par, H não é vazio e H está contido em G, portanto H é um Subgrupo de G.*

$\blacksquare$

Definição 2.20. *Sejam $(G, *)$ e $(S, .)$ grupos. Diz-se que uma função $f : G \to S$ é um **homomorfismo** se, para todo $x, y \in G$ tivermos*

$$f(x * y) = f(x).f(y)$$

Exemplo 2.21. *A função f definida a baixo é um homomorfismo.*

$$f\colon (\mathbb{C}^*,\ \cdot) \to (\mathbb{R}^*_+,\ \cdot)$$

$$f(z) = |z|$$

De fato, dados $a, b \in \mathbb{C}^*$ podemos calcular $f(a \cdot b)$ que é dado por:

$$f(a \cdot b) = |a \cdot b| = |a| \cdot |b| = f(a) \cdot f(b)$$

■

Definição 2.22. *Sejam $(G,\ *)$ e $(S,\ \cdot)$ grupos. Diz-se que uma função $f\colon G \to S$ é um* ***isomorfismo*** *se f é um homomorfismo e é bijetora.*

Proposição 2.23. *Sejam $f\colon G \to J$ e $g\colon J \to K$ homomorfismos de grupos. Então $g \circ f$ é um homomorfismo. Se f e g forem isomorfismos então $g \circ f$ também será.*

Demonstração: Tome $a, b \in G$, temos que:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a \cdot b) &= g(f(a \cdot b)) = g(f(a) \cdot f(b)) = g(f(a)) \cdot g(f(b)) \\ &= (g \circ f)(a) \cdot (g \circ f)(b)\end{aligned}$$

Portanto, concluímos $g \circ f$ é homomorfismo.

Como tarefa para o leitor, conclua que se f e g são isomorfismo a composição também será.

■

3 TOPOLOGIA

O objetivo deste capítulo é fazer com que o leitor consiga compreender o que é um espaço topológico e algumas propriedades, para que posteriormente compreenda o que é uma homotopia entre espaços topológicos.

Definição 3.1. *Uma* ***topologia*** *num conjunto X é um coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X, os quais chamamos de subconjuntos abertos, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) Os conjuntos X e $\emptyset$ são subconjuntos abertos;

(ii) A união de uma família de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

(iii) A intersecção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Um **espaço topológico** é um par $(X,\ \mathcal{T})$ em que X é um conjunto e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X. Os subconjuntos de X pertencentes a $\mathcal{T}$ serão chamados simplesmente de abertos.

Exemplo 3.2. *Seja (X, d) um espaço métrico, conforme definido no capítulo anterior, e tome $\mathcal{T}$ o conjunto de todos os abertos em X pela métrica d.*

Demonstração:

(i) : $\emptyset$ é aberto para todo espaço métrico;

(ii) : Seja I um conjunto de índices qualquer, e A_i um aberto para todo i. Considere $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ e tome $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, então, $x \in A_i$ para algum i, e como A_i é aberto, temos que x é o centro de bola aberta inteiramente contida em A_i, ou seja, $B_{(x,\epsilon)} \subset A_i \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, logo, x é o centro de uma bola inteiramente contida em $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, o que implica em $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ ser aberto, sendo assim $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

(iii) : Seja $I = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n\}$ um conjunto de índices, e A_i um aberto para todo i. Tome o seguinte conjunto $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ e $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, então, $x \in A_i$ para todo i, e como A_i é aberto para todo i, existe $B_{(x,r_i)} \subset A_i$, onde r_i é o raio da bola com centro x contida em A_i. Defina $r = min\{r_i, i \in I\}$, segue então que $B_{(x,r)} \subset A_i$ para todo i, logo $B_{(x,r)} \subset \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, ou seja, x é o centro de uma bola inteiramente contida em $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$, o que implica nele ser aberto e $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Portanto, dos três itens concluímos que $\mathcal{T}$ é uma topologia.

■

Definição 3.3. *Um espaço topológico* $(X,\ \mathcal{T})$ *é dito* ***metrizável*** *quando é possível definir uma métrica* d *em* X *tal que os abertos definidos por* d *coincididem com os abertos da topologia* $\mathcal{T}$ *de* X.

Para maior compreensão da definição acima, verifique o exemplo abaixo.

Exemplo 3.4. *Seja* X *um conjunto. Defina* $\mathcal{T}_0$ *como a coleção de todos os subconjuntos de* X. $\mathcal{T}_0$ *definida desta maneira é uma topologia e* $(X, \mathcal{T}_0)$ *é um espaço metrizável.*

Demonstração: Vamos verificar que o espaço $(X,\ \mathcal{T}_0)$ é um espaço topológico metrizável, para isto, primeiramente constataremos que $\mathcal{T}_0$ é uma topologia, ou seja, verificaremos que as condições da definição 3.1 estão satisfeitas.

De fato,

(i) X e $\emptyset$ são abertos, pois $X \subset X$ e $\emptyset \subset X$.

(ii) Considere F_i uma família de subconjuntos de abertos de $\mathcal{T}_0$, em que I, é um conjunto de índices. Tem-se que $\bigcup_{i\in I} F_i \subset X$, pois dado $a \in \bigcup_{i\in I} F_i \subset X$ teremos que $a \in F_k$ para algum $k \in I$ e como $F_k \subset X$, então $a \in X$, sendo assim, $\bigcup_{i\in I} F_i$ é um subconjunto de X, então é um subconjunto aberto em $\mathcal{T}_0$.

(iii) Considere F_i uma família de subconjuntos abertos de $\mathcal{T}_0$, em que $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, um conjunto de índices. Tem-se que $\bigcap_{i\in I} F_i \subset X$, pois dado $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$, tem-se $x \in F_i$, para todo i, então como $F_i \subset X$, para todo i, temos $x \in X$, então $\bigcap_{i\in I} F_i \subset X$, logo $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{T}_0$ é um subconjunto aberto , por outro lado, se $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, é fácil ver que $\emptyset \subset X$ e assim também teríamos $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathcal{T}_0$.

Logo, $\mathcal{T}_0$ é uma topologia, já que (i), (ii) e (iii) são satisfeitos.

Agora note que X é metrizável, de fato:

Defina:

$$d\colon X \ \times \ X \to \mathbb{R}$$

$$d(x,\ y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = y, \\ 1, & \text{se} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Já foi verificado no exemplo 2.7 que d é métrica e todo subconjunto de X é um aberto, logo pertence a $\mathcal{T}_0$.

Logo, d é uma métrica e como $(X,\ \mathcal{T}_0)$ é um espaço topológico.

Portanto, $(X,\ \mathcal{T}_0)$ é um espaço topológico metrizável.

∎

Exemplo 3.5. *Seja X um conjunto que contenha pelo menos dois pontos, ainda considere o seguinte conjunto:* $\mathcal{T}_1 = \{\mathcal{X},\ \emptyset\}$.

Afirmação 1: $\mathcal{T}_1$ é uma topologia.

Demonstração:

De fato:

(i) $\mathcal{X}$ e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{T}_1$, ou seja, são abertos.

(ii) A união de uma família de abertos ou é $\mathcal{X}$, ou é $\emptyset$, ou seja, a união de uma família de abertos sempre é aberto.

(iii) A intersecção de uma família de abertos, ou é $\mathcal{X}$ ou é $\emptyset$ que são abertos.

Logo, $\mathcal{T}_1$ é uma topologia.

Afirmação 2: O espaço $(\mathcal{X},\ \mathcal{T}_1)$ não é metrizável.

De fato, suponha que $(\mathcal{X},\ \mathcal{T}_1)$ seja metrizável, sendo assim, existe uma métrica d em $\mathcal{X}$ tal que os abertos definidos por d coincidem com os abertos de $\mathcal{T}_1$. Absurdo, pois dados $a \neq b \in X$, que existem por hipótese, e $r \in \mathbb{R}$ com $0 < r < \frac{d(a,\ b)}{2}$, é possivel definir os seguintes conjuntos:

$$B_r(a) = \left\{x \in X \colon d(x,\ a) < r \text{ com } 0 < r < \frac{d(a,\ b)}{2}\right\}$$

$$B_r(b) = \left\{x \in X \colon d(x,\ b) < r \text{ com } 0 < r < \frac{d(a,\ b)}{2}\right\},$$

Essas bolas são abertos em X pela métrica d e não são abertos pela topologia $\mathcal{T}_1$

Portanto, $(\mathcal{X},\ \mathcal{T}_1)$ não é metrizável.

■

Exemplo 3.6. *Seja* $\mathbb{R}^2$ *o plano cartesiano, defina* $\mathcal{T}$ *como a coleção de todos os conjuntos que se pode representar como união de regiões limitadas (sem o contorno) por quadrados de lados paralelos aos eixos.* $\mathcal{T}$ *definida desta maneira é uma topologia.*

Demonstração: Note que regiões limitadas sem a borda são as bolas abertas de acordo com a métrica do máx, vista no Exemplo 2.2. Então $\mathcal{T}$ sendo a coleção de todos os conjuntos que se pode representar como união de bolas abertas, $\mathcal{T}$ é a coleção dos abertos de $\mathbb{R}^2$, pois todo aberto é uma união de bolas abertas.

Vimos no exemplo 3.2 que um espaço métrico define uma topologia $\mathcal{T}$ pegando todos os abertos pela métrica deste espaço métrico.

Logo, $\mathcal{T}$ é uma topologia e $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ é metrizável pela métrica de $\mathbb{R}^2$.

■

Definição 3.7. *Seja X um espaço topológico, dizemos que X é um* ***espaço de Hausdorf*** *se quando dados $x,\ y \in X$ com $x \neq y$, existem abertos A e $B \subset X$ tais que $x \in A,\ y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.*

Exemplo 3.8. *Todo espaço metrizável é de Hausdorff.*

Demonstração: Seja A um espaço metrizável de topologia $\mathcal{T}$ e de métrica d, por definição, $\mathcal{T}$ e d definem os mesmos abertos.

Afirmação 1: Dados a e b com $a \neq b,\ a,\ b \in A$, existem duas bolas abertas e disjuntas com centros em a e b respectivamente.

De fato, seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r \leqslant \frac{d(a,\ b)}{2}$.

Defina as seguintes bolas abertas:

$$B_r(a) = \{x \in A \colon d(x,\ a) < r\}$$

$$B_r(b) = \{x \in A \colon d(x,\ b) < r\}\,.$$

Vamos provar que $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$.

Suponha que existe $x_0 \in B_r(a) \cap B_r(b)$, isto é, $x_0 \in B_r(a)$ e $x_0 \in B_r(b)$, sendo assim, $d(x_0,\ a) < r$ e $d(x_0,\ b) < r$, então disto e da Desigualdade Triangular, temos:

$$d(a,\ b) \leqslant d(a,\ x_0) + d(x_0,\ b)$$

$$d(a,\ b) < 2r$$

$$\frac{d(a,\ b)}{2} < r,$$

o que é uma contradição, ou seja, $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$ provando assim a Afirmação 1.

Segue da **Afirmação 1** que se $a,\ b \in A$, tais que $a \neq b$, existe $B_r(a)$ e $B_r(b)$ que são abertos de A, com

$$a \in B_r(a), \qquad b \in B_r(b) \qquad \text{e} \qquad B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset.$$

Sendo assim, dado A metrizável, então A é de Hausdorff.

$\blacksquare$

Com esse último exemplo, temos que $\mathbb{R}^n$ é de Hausdorff para a métrica euclidiana, para todo n. Além disso os Espaços Vetorias Normados também são Hausdorff.

Dado um espaço topológico X, a partir dele, podemos criar outros espaços topologicos, como se segue

Proposição 3.9. *Seja $f\colon S \to X$ uma função de um conjunto S num espaço topológico X. A coleção $\mathcal{T}_i$ das imagens inversas, $f^{-1}(A)$, dos abertos $A \subset X$, pela função f, é uma topologia em S.*

Demonstração:

(i) O conjunto $\emptyset \in \mathcal{T}_i$, pois $\emptyset \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ topologia de X), ou seja, $\emptyset$ é um aberto em X e $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(ii) O conjunto $S \in \mathcal{T}_i$, pois $X \in \mathcal{T}$, ou seja, X é um aberto em X e $f^{-1}(X) = S$.

(iii) Considere $(A_\lambda)_{\lambda \in U}$ uma família de abertos A_λ de $\mathcal{T}_i$ em que U é um conjunto de índices.

Note que para todo $\lambda \in U$ existe um $B_\lambda \in \mathcal{T}$ talque, $A_\lambda = f^{-1}(B_\lambda)$

Então tomando agora a imagem inversa de $\bigcup B_\lambda$, que é um aberto, temos:

$$f^{-1}\left(\bigcup B_\lambda\right) = \bigcup f^{-1}(B_\lambda), \ \textit{onde } f^{-1}(B_\lambda) \text{ é igual a algum } A_\lambda \in \mathcal{T}_i,$$

ou seja,

$$f^{-1}\left(\bigcup B_\lambda\right) = \bigcup A_\lambda,$$

logo, $\bigcup A_\lambda \in \mathcal{T}_i \subset S$.

(iv) Considere $(A_\lambda)_{\lambda \in \{1,\ 2,\ \dots\ ,\ n\}}$ uma família de abertos A_λ de $\mathcal{T}_i$.

Note que para todo $\lambda \in U$ existe um $B_\lambda \in \mathcal{T}$ talque, $A_\lambda = f^{-1}(B_\lambda)$. Fazendo então intersecção $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ temos :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_1 \cap \ldots \cap A_n &= f^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(B_n) \\ &= f^{-1}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) \end{aligned}$$

Note que $(B_1 \cap \ldots \cap B_n) \in \mathcal{T}$, logo $A_1 \cap \ldots \cap A_n = f^{-1}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) \in \mathcal{T}_i$. Acabamos de provar que a intersecção finita de elementos de $\mathcal{T}_i$ ainda é um aberto de $\mathcal{T}_i$.

Portanto de (i), (ii), (iii) e (iv), $\mathcal{T}_i$ é uma topologia em S.

Chamamos $\mathcal{T}_i$ de **topologia induzida** em S pela função $f\colon S \to X$.

A próxima definição é uma outra maneira, um novo olhar, equivalente a **definição 2.8** mostrada no capítulo anterior.

Definição 3.10. *Uma aplicação $f\colon X \to Y$, para X e Y espaço topológicos é dita* ***função contínua*** *quando a imagem inversa, $f^{-1}(B)$, de um aberto (ou fechado) $B \subset Y$ é um aberto (ou fechado) em X.*

Dessa última definição, se S tem a topologia induzida por uma função $f\colon S \to X$, pela definição de topologia induzida, $f^{-1}(A)$, com $A \subset X$ um aberto(ou fechado), é na verdade um aberto (ou fechado) em S, com isso f é contínua.

Definição 3.11. *Seja $S \subset X$, em que X é um espaço topológico. Dizemos que S é um* ***subespaço*** *do espaço topológico X, quando S for um espaço topológico, munido pela topologia induzida sobre a seguinte função $f\colon S \to X$ dada por $f(x) = x$, para todo $x \in S \subset X$.*

Note que se A é um aberto de S, então $A = B \cap S$ para algum aberto $B \subset X$.

A seguir consta uma propriedade um tanto quanto interessante.

Proposição 3.12. *Seja X um espaço de Hausdorff então seus subespaços são de Hausdorff.*

Demonstração: Dado um espaço X de Hausdorff e $S \subset X$ um subespaço. Tome $x,\ y \in S$ com $x \neq y$, note que $x,\ y \in X$. Como X é Hausdorff, existem A e B com $A,\ B \subset X$, com A e B abertos, tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Defina agora: $A_1 = A \cap S$ e $B_1 = B \cap S$ são abertos em S, sendo que $x \in A_1$ e $y \in B_1$, $x \neq y$ e como $A \cap B = \emptyset$, então $A_1 \cap B_1 = A \cap S \cap B \cap S = A \cap B \cap S = \emptyset \cap S = \emptyset$, logo S é de Hausdorff.

■

Definição 3.13. *Seja h uma função contínua, h é chamada de* ***homeomorfismo*** *se for bijetora e h^{-1} também for contínua.*

Matematicamente, pode-se provar que uma esfera menos um ponto é homeomorfa a um plano, chamaremos a este homeomorfismo de **projeção estereográfica**.

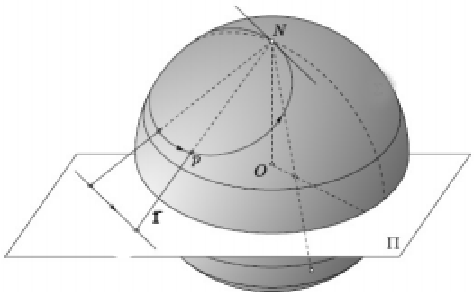
Exemplo 3.14. *Tome $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ a esfera de raio 1 e centro (0,0,0). Seja $r : \{(0, 0, 1) + t \cdot (a, b, c - 1) \ :\ t \in \mathbb{R}\}$ uma reta e ainda $\pi : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ z = 0\}$ um plano. Defina uma função φ, tal que:*

$$
\begin{aligned}
&\varphi\colon S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2 \\
&(a,\ b,\ c) \mapsto \varphi(a,\ b,\ c) = \left(\frac{a}{1-c},\ \frac{b}{1-c}\right),
\end{aligned}
$$

em que, $N = (0,\ 0,\ 1)$. Então φ é um homeomorfismo.

Afirmação 1 : φ está bem definida.

Figura 1: Projeção Estereográfica



Fonte: https://www.ime.unicamp.br/ ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/JP$_V C1_2$015

Observe que o único ponto que daria problema em φ é N, que não está no domínio de S^2. Então realmente φ está bem definida.

Afirmação 2 : φ é injetora.

Sejam $p_1 = (a_1,\ b_1,\ c_1)$ e $p_2 = (a_2,\ b_2,\ c_2)$ com $p_1,\ p_2 \in S^2 - \{N\}$, suponha agora que:

$$\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$$

assim:

$$\frac{a_1^2 + b_1^2}{(1-c_1)^2} = \frac{a_2^2 + b_2^2}{(1-c_2)^2},$$

obtendo-se,

$$\frac{1+c_1}{1-c_1} = \frac{1+c_2}{1-c_2},$$

ou seja,

$$(1+c_1)(1-c_2) = (1+c_2)(1-c_1)$$

resultando na seguinte igualdade,

$$c_1 = c_2$$

segue que,

$$\frac{a_1}{1-c_1} = \frac{a_2}{1-c_2},$$

então

$$a_1 = a_2$$

e por último, conlui-se que

$$\frac{b_1}{1-c_1} = \frac{b_2}{1-c_2},$$

isto é

$$b_1 = b_2.$$

Logo, temos $p_1 = p_2$, o que implica em φ ser injetora.

Afirmação 3 : φ é sobrejetora.

Tome $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ um par qualquer, defina um ponto P da seguinte maneira:

$$P = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\ \frac{2y}{x^2+y^2+1},\ \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)$$

é facil ver que:

$$\varphi(P) = (x,\ y).$$

Logo, φ é sobrejetora.

Segue então das três afirmações que φ é uma função bijetora. Então sua inversa é:

$$\begin{aligned} &\varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{N\} \\ &(x,\ y) \mapsto \varphi^{-1}(x,\ y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\ \frac{2y}{x^2+y^2+1},\ \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) \end{aligned}$$

em que, $N = (0,\ 0,\ 1)$.

Concluir que $\varphi \circ \varphi^{-1}(P) = \varphi^{-1} \circ \varphi(P) = P$ é simples, basta substituir uma função dentro da outra.

Por último observe que φ e φ^{-1} são contínuas, pois as suas coordenadas são dadas por funções contínuas.

Portanto φ é um homeomorfismo.

■

Este exemplo mostra que é possível transformar uma esfera sem um ponto em um plano. De maneira mais geral, é possível concluir que S^n menos um ponto e $\mathbb{R}^n$ também são homeomorfos, basta estender a função φ para estes espaços.

Definição 3.15. *Dado X um espaço topológico. Dizemos que X é* ***conexo por caminhos*** *se para quaisquer $p, q \in X$ existe uma função contínua tal que $f\colon I \to X$ onde $f(0) = p$ e $f(1) = q$. Dizemos também que $p, q \in X$ pertencem a mesma componente conexa por caminhos quando existe um caminho entre p e q.*

Finalizando agora este capítulo, ja temos condições de nos aproximar ainda mais do objetivo central deste trabalho, agora que já estamos munidos de boas ferramentas para melhor compreensão das próximas definições e teoremas.

4 HOMOTOPIA

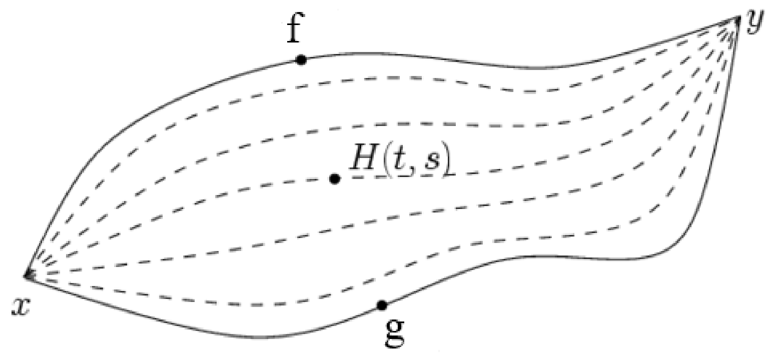
Chegamos no capítulo que nos permitirá construir um Grupo associado a um espaço topológico que permitirá diferenciar a esfera bidimensional do toro. Homotopia de maneira bem geral e sem preocupação com exatidão, nada mais é que uma função que controla a metamorfose de uma função em outra, ou seja, permite distorcer uma função, transformando-a em outra, tudo isso de maneira contínua.

Definição 4.1. *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que duas funções contínuas $f,\ g\colon X \to Y$ são* ***homotópicas*** *quando existe uma função contínua $H\colon X \times I \to Y$, em que $I = [0,\ 1]$ tal que $H(x,\ 0) = f(x)$ e $H(x,\ 1) = g(x)$, para todo $x \in X$.*

A função H definida é chamada de **homotopia** entre f e g.

Notação: $H\colon f \simeq g$ ou $f \simeq g$.

Figura 2: Exemplo de Homotopia



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_da_homotopia/$media/Ficheiro$: $Homotopy$_curves

Dado uma homotopia $H\colon f \simeq g$, considere um parâmetro $t \in I$ e $H_t\colon X \to Y$ dada por $H_t(x) = H(x,\ t)$ uma função contínua.

Conseguimos construir uma **família contínua** (no sentido de que não há buracos nos índices) $(H_t)_{t\in I}$, de tal maneira que $H_0 = f$ e $H_1 = g$, ou seja, a família $(H_t)_{t\in I}$ começa em f e termina em g. Sendo assim podemos considerar t como o tempo, em que no decorrer do tempo a função f é distorcida até se tornar g de maneira contínua, sendo possível acompanhar os processos intermediários, basta tomar uma H_t para algum $0 < t < 1$.

Exemplo 4.2. *Duas funções constantes $f,\ g\colon X \to Y$ com $f(x) = p$ e $g(x) = q$, são homotópicas se e só se suas imagens pertencem a mesma componente conexa por caminhos* *do espaço do contradomínio, isto é, existe uma função contínua ligando p e q.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Considere uma homotopia H entre f e g as funções constantes, da seguinte maneira:

$$f\colon X \to Y \qquad g\colon X \to Y \qquad H\colon X \times I \to Y$$
$$x \mapsto p \qquad x \mapsto q \qquad (x,\ 0) \mapsto f(x) = p$$
$$\text{e}$$
$$(x,\ 1) \mapsto g(x) = q$$

Tome $x_0 \in X$, x_0 fixo e defina o seguinte função $\alpha\colon I \to Y$ dada por $\alpha(t) = H(x_0,\ t)$.

Note que $\alpha(0) = H(x_0,\ 0) = p$, pela definição de H que é uma homotopia, do mesmo modo que $\alpha(1) = H(x_0,\ 1) = q$.

Segue então que a função α é um caminho (função contínua) que liga o ponto p ao ponto q, ou seja, pertencem a mesma componente conexa por caminhos.

($\Leftarrow$) Considere agora que p e q pertencem a mesma componente conexa por caminhos, isto é, existe uma função α, tal que:

$$\alpha\colon I \to Y$$
$$\alpha(0) = p \qquad \text{e} \qquad \alpha(1) = q.$$

Sendo assim, defina:

$$H\colon H \times I \to Y$$
$$H(x,\ t) = \alpha(t),\ \forall (x,\ t) \in X \times I.$$

Note que $H(x,\ 0) = \alpha(0) = p$ e $H(x,\ 1) = q$, note ainda que H é contínua, já que α é contínua.

Segue então que se:

$$f\colon X \to Y$$
$$x \mapsto f(x) = p$$

e

$$g\colon X \to Y$$
$$x \mapsto g(x) = q$$

então $f \simeq g$ pela função H que é uma homotopia entre f e g.

■

Exemplo 4.3. *Considere $f,\ g\colon X \to \mathbb{R}^2$ contínuas, então $f \simeq g$.*

Demonstração: Defina

$$H\colon X \times I \to \mathbb{R}^2$$

dada por $H(x,\ t) = (1-t)\cdot f(x) + t \cdot g(x),\ \forall x \in X$ e $(x,\ t) \in X \times I$.

Note que $H(x,\ 0) = f(x),\ \forall x \in X$ e $H(x,\ 1) = g(x),\ \forall x \in X$.

A continuidade de H decorre da continuidade de f e g, também pois a multiplicação por escalar e soma são contínuas.

Logo, $f \simeq g$ pela homotopia H.

■

Exemplo 4.4. *Considere $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ a esfera de raio unitário unimensional (círculo de raio um, ou mais conhecido como ciclo trigonométrico). Dadas duas funções contínuas $f,\ g\colon \mathbb{R}^2 \to S^1$ tal que $f(x) \neq -g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^2$, isto é, $f(x)$ e $g(x)$ nunca são diametralmente opostos (antípodas), então $f \simeq g$.*

Demonstração: Defina:

$$H\colon \mathbb{R}^2 \times I \to S^1$$
$$(x,\ t) \mapsto H(x,\ t) = \frac{(1-t)\cdot f(x) + t\cdot g(x)}{\parallel (1-t)\cdot f(x) + t\cdot g(x) \parallel},$$

sendo que $\parallel f(x) \parallel = \parallel g(x) \parallel = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^2$, pois $f(x) \in S^1$ e $g(x) \in S^1$.

Note que H está bem definida, pois $(1-t)\cdot f(x) + t\cdot g(x) \neq 0,\ \forall t \in I$ e $\forall x \in X$. Caso contrário, teríamos:

(1) Se $t \neq 0$ *e* $t \neq 1$:

$$(1-t)\cdot f(x) + t\cdot g(x) = 0$$
$$g(x) = \frac{-(1-t)}{t}\cdot f(x)$$
$$\|g(x)\| = \left\|\frac{-(1-t)}{t}\right\| \cdot \|f(x)\|$$
$$1 = \frac{1-t}{t}$$
$$t = \frac{1}{2},$$

ou seja, contradiz o fato de $f(x) \neq -g(x)$.

(2) Se $t = 0$:

$$(1-t)\cdot f(x) = 0$$

$$f(x) = 0$$

o que é uma contradição, pois $f(x) \in S^1$.

(3) Se $t = 1$:

$$(t) \cdot g(x) = 0$$

$$g(x) = 0$$

o que é uma contradição, pois $g(x) \in S^1$.

Ainda como f é contínua então $\alpha \cdot f$ é contínua e a operação soma conserva a continuidade. Sendo assim H é contínua.

Note ainda que:

$$H(x,\ 0) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x),$$

pois $\|f(x)\| = 1$ e

$$H(x,\ 1) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|} = g(x),$$

já que $\|g(x)\| = 1$.

Portanto $f \simeq g$.

■

Proposição 4.5. *Sejam X e Y espaços topológicos. A relação de homotopia, $f \simeq g$ é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas de X em Y ($\mathcal{C}[X,\ Y]$).*

Demonstração: Tome $f\colon X \to Y$ uma função contínua qualquer.

Defina:

$$H\colon X \times I \to Y$$

$$H(x,\ t) = f(x)$$

(i) H é contínua, pela continuidade de f.

(ii) $H(x,\ 0) = f(x)$ e $H(x,\ 1) = f(x)$, ou seja, H é uma homotopia, pela definição 4.1.

Sendo assim, $\simeq$ é reflexiva, afinal, $f \simeq f$ para toda função contínua. $(*)$

Seja agora $H\colon X \times I \to Y$ uma homotopia entre $g \simeq f$.

Agora, defina:

$$K\colon X \times I \to Y$$

$$K(x,\ t) = H(x,\ 1 - t).$$

Note que K é contínua, pois H é contínua e ainda,

$$K(x,\ 0) = H(x,\ 1) = f(x),$$

assim como,

$$K(x,\ 1) = H(x,\ 0) = g(x),$$

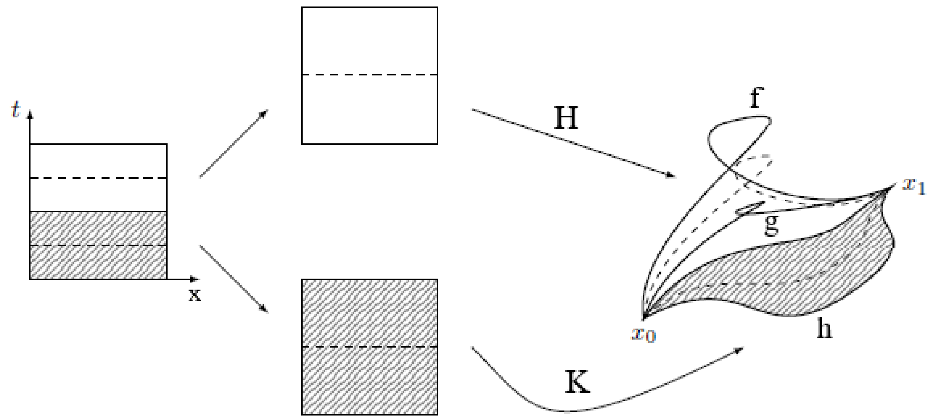
pois H é homotopia entre g e f.

Logo, K é uma homotopia entre f e g. Portanto, $\simeq$ é simétrica. $(**)$

Por último considere os seguintes homotopias:

$$H\colon X \times I \to Y \qquad \text{e} \qquad K\colon X \times I \to Y$$
$$H\colon f \simeq g \qquad\qquad\qquad K\colon g \simeq h.$$

Figura 3: Exemplo de Transitividade



Fonte: https://www.dm.ufscar.br/profs/tcc/trabalhos/2010-2/299871

Defina a seguinte função:

$$L\colon X \times I \to Y$$
$$L(x,\ t) = \begin{cases} H(x,\ 2t), & \text{se} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ K(x,\ 2t-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Segue que:

$L(x,\ 0) = H(x,\ 0) = f(x)$, pela homotopia H.

$L(x,\ 1) = K(x,\ 1) = h(x)$, pela homotopia K.

L é contínua para todo $(x, t) \in X \times I$ pela continuidade de H e K, e ainda note que os pontos da forma $(x, \frac{1}{2})$ implica em $L(x, \frac{1}{2}) = H(x, 1) = K(x, 0) = g(x)$ que é contínua.

Segue disso que L é uma homotopia entre f e h, então $\simeq$ é uma relação transitiva. $(***)$

Portanto, de $(*), (**)$ e $(***)$ temos que $\simeq$ é uma relação de equivalência.

■

As classes de equivalência, segundo a relação de homotopia serão chamadas de **classes de homotopia**.

A **classe de homotopia** de uma função contínua $f\colon X \to Y$ será indicada pelo símbolo $[f]$ que representa todas as funções que são homotópicas com f, ou seja, representa todas as funções que podem ser distorcidas em f.

O conjunto das classes de homotopia das funções contínuas de X em Y será representado pela símbolo $[X,\ Y]$.

Como podemos observar, o conceito de homotopia está diretamente ligado com a continuidade das funções entre X e Y.

Proposição 4.6. *Sejam $f,\ f'\colon X \to Y$ e $g,\ g'\colon Y \to Z$ funções contínuas. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $g \circ f \simeq g' \circ f'$, ou seja, composição de funções conserva homotopias.*

Demonstração: Sejam

$$\begin{array}{ccc} H\colon X \times I \to Y & \quad\text{e}\quad & K\colon Y \times I \to Z \\ H\colon f \simeq f' & & K\colon g \simeq g'. \end{array}$$

Defina agora a seguinte função

$$\begin{aligned} &L\colon X \times I \to Z \\ &L(x,\ t) = K(H(x,\ t),\ t) \end{aligned}$$

Temos que L é contínua pois K e H são. Note agora que

$$L(x,\ 0) = K(H(x,\ 0),\ 0) = K(f(x),\ 0) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

e

$$L(x,\ 1) = K(H(x,\ 1),\ 1) = K(f'(x),\ 1) = g'(f'(x)) = g' \circ f'(x)$$

Segue disso que L é uma homotopia.

Potanto $L\colon g \circ f \simeq g' \circ f'$

■

Definição 4.7. *Dizemos que uma função contínua $f\colon X \to Y$ é uma **equivalência homotópica**, quando existe uma função contínua $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq id_X$ e*

$f \circ g \simeq id_Y$. Dizemos ainda que g é o ***inverso homotópico*** *de f e os espaços topológicos X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia.*

Notação: $X \equiv Y$ ou $f\colon X \equiv Y$

De maneira intuitiva, dois espaços **homotopicamente equivalentes**, possuem ou a "mesma forma", ou a menos de "esmagar" ou mais precisamente "contrair" ou "esticar" continuamente (de maneira contínua) um até virar o outro.

Exemplo 4.8. *$\mathbb{R}^n$ é homotopicamente equivalente a um ponto $\{a\}$.*

A idéia deste exemplo é mostrar que se pode "esmagar" $\mathbb{R}^n$ até obter apenas um ponto.

Demonstração: Defina as seguintes funções:

$$f\colon \{a\} \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad g\colon \mathbb{R}^n \to \{a\}$$
$$f(a) = 0 \qquad\qquad g(x) = a.$$

Note que $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0) = a = id_{\{a\}}$, então como $g \circ f = id_{\{a\}}$, segue que $g \circ f \simeq id_{\{a\}}$, pois toda função é homotópica a si mesma.

Por outro lado,

$$f \circ g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(a) = 0$$
$$f \circ g(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Defina agora:

$$H(x,\ t) = (1-t)\cdot id_{\mathbb{R}^n},$$

note que

$$H(x,\ 0) = id_{\mathbb{R}^n}$$

e

$$H(x,\ 1) = 0 = f \circ g(x)\ \forall x.$$

Sendo assim $f \circ g \simeq id_{\mathbb{R}^n}$, pois H é homotopia.

Logo, $\mathbb{R}^n$ e $\{a\}$ possuem o mesmo tipo de homotopia.

■

Definição 4.9. *Um espaço topológico X é* ***contrátil*** *quando ele tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.*

Exemplo 4.10. *Vimos no* ***Exemplo 4.8*** *que $\mathbb{R}^n$ e $\{a\}$ possuem o mesmo tipo de homotopia, sendo assim é imediato concluir que $\mathbb{R}^n$ é contrátil.*

Proposição 4.11. *Um espaço topológico X é contrátil se e só se a função identidade $id\colon X \to X$ é homotópica a uma função constante $k\colon X \to X$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se X é contrátil então ele possui o mesmo tipo de homotopia que um ponto, isto é, existem f e g funções contínuas, tais que $f\colon X \to \{p\}$ e $g\colon \{p\} \to X$, sendo assim, por hipótese, $g \circ f \simeq id_X$. Note que $g \circ f(x) = g(p),\ \forall x$, logo definindo $k\colon X \to X$ com $k(x) = g(p)\ \forall x$, concluímos id_X é homotópica a uma constante.

($\Leftarrow$) Como id_X é homotópica a uma função constante, segue:

$$f = id_X\colon X \to X \qquad \text{e} \qquad k\colon X \to X$$
$$f(x) = x \qquad\qquad k(x) = p,\ \forall x.$$

Defina as seguintes composições:

$$a\colon X \to \{p\} \qquad \text{e} \qquad b\colon \{p\} \to X$$
$$a(p) = p \qquad\qquad b(x) = p$$

Segue disso então que: $a \circ b \simeq id_{\{p\}}$ e $b \circ a(x) = k(x) \simeq id_X$

Logo, a e b são equivalências homotópicas e disso temos que X possui o mesmo tipo de homotopia que $\{p\}$, potanto X é contrátil.

∎

Exemplo 4.12. *O intervalo $I = [0,\ 1]$ é contrátil.*

Demonstração: Defina as seguintes funções:

$$f\colon [0,\ 1] \to \{p\} \qquad\qquad g\colon \{p\} \to [0,\ 1]$$
$$f(x) = p,\ \forall x \qquad\qquad g(x) = 0, \forall x \in \{p\}.$$

Note que:

$$f \circ g(p) = f(g(p)) = f(0) = p = id_{\{p\}}.$$

Como $f \circ g = id_{\{p\}}$ e toda função é homotópica a si, então

$$f \circ g \simeq id_{\{p\}}. \ (*)$$

Por outro lado,

$$g \circ f \colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$$

$$g \circ f(x) = 0,\ \forall x \in [0,\ 1].$$

Agora, defina a seguinte função:

$$H \colon [0,\ 1] \times I \to [0,\ 1]$$

$$H(x,\ t) = (1-t) \cdot id_{[0,\ 1]},\ \forall x \in I \text{ e } \forall t \in I.$$

Segue que:

$$H(x,\ 0) = id_{[0,\ 1]}$$

e

$$H(x,\ 1) = 0 = g \circ f(x).$$

Note que H é contínua, pois $id_{[0,\ 1]}$ é contínua.

Segue disso então que H é uma homotopia e $g \circ f \simeq id_{[0,\ 1]}$. $(**)$

Logo, de $(*)$ e $(**)$ obtemos que f e g são inversas homotópicas, portanto $[0,\ 1]$ e $\{p\}$ possuem o mesmo tipo de homotopia. Conclui-se então que $[0,\ 1]$ é contrátil.

∎

Proposição 4.13. *Dado $f \colon [0,\ 1] \to X$ um caminho entre a e b, para $a,\ b \in X$, então f é homotópica a uma constante.*

Demonstração: Como $f \colon [0,\ 1] \to X$ é um caminho entre a e b, então temos que $f(0) = a$, $f(1) = b$ e f é contínua.

Defina agora uma função g da seguinte maneira:

$$g \colon [0,\ 1] \to X$$

$$g(x) = a \ \forall x \in [0,\ 1].$$

Note que g é uma função constante.

Agora, defina a seguinte função:

$$H \colon [0,\ 1] \times I \to X$$

$$H(x,\ t) = f((1-t) \cdot x) \qquad \text{e } \forall t \in I.$$

Segue que

$$H(x,\ 0) = f(x)$$

e

$$H(x,\ 1) = g(x).$$

Observe ainda que H é contínua, pois f é um caminho e g é contínua, pois é constante.

Portanto, $H\colon f \simeq g$.

■

Sabido agora o que é uma homotopia e algumas propriedades sobre esta função, estamos preparados para construir um grupo, conforme definição 2.17. Esta construção utilizará caminhos e é o objetivo do próximo capítulo.

5 GRUPO FUNDAMENTAL

Como objetivo maior deste capítulo queremos construir um grupo, formado por funções homotópicas entre si, pois isso posteriormente nos permitirá provar que a esfera S^2 não é homeomorfa ao toro $T = S^1 \times S^1$.

Definição 5.1. *Dizemos que $f,\ g\colon I \to X$ são* ***caminhos homotópicos****, quando $f \simeq g$ em relação ∂I. (Observe que: $\partial I = \{0,\ 1\}$ = fronteira de I).*

Notação: *$f \cong g$ ou $H\colon f \cong g$.*

Segue disso que uma homotopia $H\colon f \cong g$ entre caminhos é uma função contínua, tal que :

$$
\begin{aligned}
&H\colon I \times I \to X\\
&H(s,\ 0) = f(s) \qquad e \qquad H(s,\ 1) = g(s)\\
&H(0,\ t) = f(0) = g(0)\\
&H(1,\ t) = f(1) = g(1), \qquad\qquad \forall s,\ t \in I.
\end{aligned}
$$

Para que faça sentido afirmar que $f \cong g$, é necessário que $f(0) = g(0) = x_0$ e $f(1) = g(1) = x_1$, ou seja, é necessário que os caminhos f e g possuam as mesmas extremidades.

Uma função H satisfazendo as propriedades acima é chamada de **homotopia de caminhos**. Um caso particular de homotopia de caminhos é quando esses caminhos são fechados, isto é, $f(0) = f(1) = x_0$. Sendo assim, diremos que os caminhos fechados $f,\ g\colon I \to X$ são homotópicos, quando existir uma função contínua H tal que:

$$
\begin{aligned}
&H\colon I \times I \to X\\
&H(s,\ 0) = f(s),\\
&H(s,\ 1) = g(s),\\
&H(0,\ t) = H(1,\ t) = x_0,\ \forall s,\ t \in I.
\end{aligned}
$$

Definição 5.2. *Dois caminhos fechados $f,\ g\colon I \to X$ são chamados* ***livremente homotópicos*** *quando existe uma função contínua H tal que :*

$$
\begin{aligned}
&H\colon I \times I \to X\\
&H(x,\ 0) = f(x),\\
&H(x,\ 1) = g(x),\\
&H(0,\ t) = H(1,\ t),\ \forall x,\ t \in I.
\end{aligned}
$$

A função H é chamada de **homotopia livre**.

Vimos no capítulo anterior que homotopias nos fornecem uma relação de equivalência, sendo assim, isso é verídico para os casos especiais de homotopia de caminhos e homotopias livres.

A partir de agora, vamos indicar por $\boldsymbol{\alpha = [f]}$ a classe de equivalência do caminho $f\colon I \to X$, ou seja, α é o conjunto de todos os caminhos em X que possuem as mesmas extremidades de f e que são homotópicas a f, com extremos fixos durante a homotopia.

Exemplo 5.3. *Seja X um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado. Se $f,\ g\colon I \to X$ são caminhos com as mesmas extremidades, então $f \cong g$.*

Demonstração: Como f e g são caminhos com as mesmas extremidades, temos que:

$$f(0) = g(0) = x_0 \in X$$

e

$$f(1) = g(1) = x_1 \in X.$$

Sendo assim, defina:

$$
\begin{aligned}
&H\colon I \times I \to X\\
&H(x,\ t) = (1-t)\cdot f(x) + t\cdot g(x).
\end{aligned}
$$

Note que H definida desta maneira é uma função, de fato, $(1-t)\cdot f(x) + t\cdot g(x) \in X$, $\forall x,\ t \in I$, pois X é convexo. Além disso, temos H contínua, já que f e g são contínuas e multiplicação por escalar e somas conservam a continuidade.

Note ainda:

(1):

$$H(x,\ 0) = f(x) \text{ e } H(x,\ 1) = g(x)\ (*)$$

(2):

$$
\begin{aligned}
H(0,\ t) &= (1-t)\cdot f(0) + t\cdot g(0)\\
&= (1-t)\cdot x_0 + t\cdot x_0\\
H(0,\ t) &= x_0
\end{aligned}
$$

(3):

$$\begin{aligned} H(1,\ t) &= (1-t)\cdot f(1) + t\cdot g(1) \\ &= (1-t)\cdot x_1 + t\cdot x_1 \\ H(1,\ t) &= x_1 \end{aligned}$$

Portanto, de **(1)**, **(2)** e **(3)**, segue que $H\colon f \cong g$.

■

Mostrar que dois espaços topológicos são homeomorfos, ou seja, que um pode ser distorcido continuamente no outro, não é uma tarefa fácil. Entretanto demonstrar que não o são, o qual é o objetivo deste trabalho, é um pouco mais amigável, já que consiste em encontrar apenas uma propriedade topológica invariante por homeomorfismos na qual apenas um dos dois espaços possua. Para isso, vamos nos apropriar da teoria de grupos e concluir que espaços homeomorfos possuem estruturas algébricas isomorfas, ou seja, se um espaço A possui um propriedade topológica qualquer e A é homeomorfo a um outro espaço B, este também terá tal propriedade.

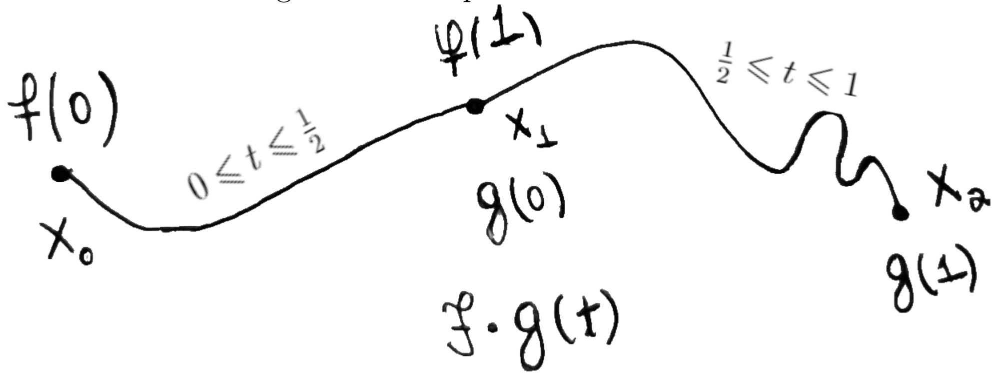
Definição 5.4. *Sejam $f,\ g\colon I \to X$ caminhos tais que o fim de f coincide com a origem de g. Definamos o* ***produto*** *$f\cdot g$ como sendo o caminho que consiste em percorrer primeiro f e depois g, sendo assim:*

$$f\cdot g\colon I \to X$$

$$f\cdot g(t) = \begin{cases} f(2t), & se \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2t-1), & se \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

A função $f\cdot g$ está bem definida e é contínua, pois $f\cdot g\ |_{[0,\ \frac{1}{2}]}$ e $f\cdot g|_{[\frac{1}{2},\ 1]}$ são funções contínuas.

Figura 4: Exemplo de Transitividade



Fonte: O próprio autor

Perceba que $f \cdot g$ é um caminho que inicia em $f(0)$ e termina em $g(1)$ passando por $f(1) = g(0)$.

Dado um caminho $f \colon I \to X$ com início em $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, faz sentido pensar num caminho inverso, um **"caminho de volta"** que inicia em x_1 e termina em x_0, então assim se tem a exigência da seguinte definição.

Definição 5.5. *Dado o caminho $f \colon I \to X$, definimos o caminho inverso f^{-1} de tal modo:*

$$f^{-1} \colon I \to X$$
$$f^{-1} = f(1-t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Note que:

$f^{-1} = f \circ v$, em que $v \colon I \to I$ é dada por $v(t) = 1 - t$.

f^{-1} é o **"caminho de volta"** de f.

Usaremos e_x para indicar o caminho constante, tal que $e_x(t) = x,\ \forall t \in I$. A classe de homotopia de e_x será denotado por $\boldsymbol{\mathcal{E}_x = [e_x]}$.

Proposição 5.6. *Seja $C(X)$ o conjunto dos caminhos do espaço topológico X, então $(C(X),\ \cdot)$ não é um grupo.*

Demonstração: Para mostrar que $(C(X),\ \cdot)$ não é grupo, basta verificar a Definição 2.17, e perceber que:

(1): A operação não está bem definida, por exemplo, dado $X = \{a, b, c, d\}$ e dois caminhos f e g tais que $f(0) = a$, $f(1) = b$,$g(0) = c$ e $g(1) = d$, note que $f \cdot g$ não existe, pois b não inicia onde a termina.

(2): Não existe elemento neutro em $(C(X),\ \cdot)$ para a multiplicação.

De fato, dado um caminho f da seguinte maneira:

$$f \colon I \to X$$
$$f(0) = x,$$
$$f(1) = y$$

Segue disso que $e_x\ \cdot f$ não está definido para $x = \frac{1}{2}$, pois teríamos:

$$e_x \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} e_x(1) = x, \\ f(1) = y. \end{cases}$$

O que é um absurdo!

(3): $f \cdot f^{-1} \neq e_x$.

De fato, pois:

$$f \cdot f^{-1}(0) = x$$

,

$$f \cdot f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = y$$

Ou seja, $f \cdot f^{-1}$ não é o elemento neutro.

Como vimos de **(1)**, **(2)** e **(3)** a operação $\cdot$ não define um grupo em $C(X)$.

Como então conseguir a estrutura de grupo? Para conseguir isso basta considerarmos as classes de homotopia de caminhos.

Proposição 5.7. *Se $f,\ g,'\ ,\ g' \colon I \to X$ são caminhos tais que $f(1) = g(0)$ em que $f \cong f'$ e $g \cong g'$. Então $f \cdot g \cong f' \cdot g'$ e $f^{-1} \cong (f')^{-1}$.*

Demonstração:

Como $f \cong f'$ e $g \cong g'$, considere as seguintes homotopias:

$$\begin{array}{ll}
H\colon I \times I \to X & k\colon I \times I \to X \\
H(s,\ 0) = f(s) & k(s,\ 0) = g(s) \\
H(s,\ 1) = f'(s) & k(s,\ 1) = g'(s) \\
H(0,\ t) = f(0) = f'(0) & k(0,\ t) = g(0) = g'(0) \\
H(1,\ t) = f(1) = f'(1). & k(1,\ t) = g(1) = g'(1).
\end{array}$$

Sabemos ainda que $f(1) = g(0)$, por hipótese.

Sendo assim, defina:

$$L\colon I \times I \to X$$

$$L(s,\ t) = \begin{cases} H(2s,\ t), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ k(2s-1,\ t), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

L é uma função e está bem definida, afinal:

$$L\left(\frac{1}{2},\ t\right) = H(1,\ t) = K(0,\ t) = L\left(\frac{1}{2},\ t\right),$$

pois, por hipótese, $H(1,\ t) = f(1) = g(0) = K(0,\ t)$.

Além disso, L é contínua, pois:

(1):

$$L|_{[0,\ \frac{1}{2}] \times I}$$

é contínua, já que, H é contínua

(2):

$$L|_{[\frac{1}{2},\ 1]\times I}$$

é contínua, já que, K é contínua.

Logo, de **(1)** e **(2)** concluímos que L é contínua.

Note ainda que:

(1):

$$L(s,\ 0) = \begin{cases} H(2s,\ 0) = f(2s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ k(2s-1,\ 0) = g(2s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases} = f \cdot g(s)$$

(2):

$$L(s,\ 1) = \begin{cases} H(2s,\ 1) = f'(2s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ k(2s-1,\ 1) = g'(2s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases} = f' \cdot g'(s)$$

(3):

$$L(0,\ t) = H(0,\ t) = f(0) = f'(0) = f \cdot g(0) = f' \cdot g'(0)$$

(4):

$$L(1,\ t) = H(1,\ t) = g(1) = g'(1) = f \cdot g(1) = f' \cdot g'(1),$$

logo de **(1), (2), (3) e (4)** temos que $L\colon f \cdot g \cong f' \cdot g'$.

Defina agora:

$$G\colon I \times I \to X$$
$$G(s,\ t) = H(1-s,\ t).$$

Sabemos, por definição que:

$$f^{-1}(s) = f(1-s) \text{ e } [f']^{-1}(s) = f'(1-s).$$

Além do que, a função G é contínua, pois H é uma homotopia.

Ainda sobre G temos:

(1): $G(s,\ 0) = H(1-s,\ 0) = f(1-s) = f^{-1}(s)$

(2): $G(s,\ 1) = H(1-s,\ 1) = f'(1-s) = (f')^{-1}(s)$

(3): $G(0,\ t) = H(1,\ t) = f(1) = f'(1) = f^{-1}(0) = (f')^{-1}(0)$

(4): $G(1,\ t) = H(0,\ t) = f(0) = f'(0) = f^{-1}(1) = (f')^{-1}(1)$.

Portanto, de **(1), (2), (3) e (4)**, G é uma homotopia de caminhos entre $f^{-1} \cong (f')^{-1}$.

Finalmente, definiremos uma operação produto, a qual nos aproximará de uma estrutura de grupo, para isto, considere X um espaço topológico e $\alpha = [f]$, em que f é um caminho em X com origem em um ponto qualquer $a \in X$ e termina num ponto $b \in X$. Assim como, considere $\beta = [g]$, em que g é um caminho em X com origem em $b \in X$ e termina em $c \in X$.

Definição 5.8. *O produto $\alpha \cdot \beta$ é definido como*

$$\alpha \cdot \beta = [f \cdot g] = [f] \cdot [g].$$

Definição 5.9. *Chamamos de **inversa de $\boldsymbol{\alpha}$** a seguinte classe de homotopia:*

$$\alpha^{-1} = [f^{-1}].$$

Observação:

(1) Note que $\alpha \cdot \beta$ está bem definida para todo $f \in \alpha$ e para todo $g \in \beta$.

(2) α^{-1} é única, pela Proposição 5.7 e está bem definida, pois $f^{-1}(x) = f(1 - x)$ está bem definida $\forall x \in I$.

Definição 5.10. *Uma função $\varphi \colon I \to I$ é dito uma **parametrização de I** quando φ é contínua e $\varphi(\partial I) \subset \partial I$.*

Ainda, a parametrização é dita:

- *Positiva se $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$.*
- *Negativa se $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(1) = 0$.*
- *Trivial se $\varphi(0) = \varphi(1)$.*

Definição 5.11. *Dada uma parametrização $\varphi \colon I \to I$ e $a \colon I \to X$ um caminho, a função $b = a \circ \varphi \colon I \to X$ é chamada de **reparametrização** do caminho a.*

Proposição 5.12. *Seja $b = a \circ \varphi$ uma reparametrização do caminho $a \colon I \to X$ se a parametrização φ for:*

(1) Positiva, então $b \cong a$;

(2) Negativa, então $b \cong a^{-1}$;

(3) Trivial, então $b \cong$ constante, mais do que isso, se $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ temos $b \cong a(0)$ e se $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$ temos $b \cong a(1)$.

Demonstração:

Afirmação (1): Dois caminhos em I são homotópicos com extremidades fixas, se e somente se, possuem a mesma origem e o mesmo fim. Esta afirmação segue pelo fato de I ser um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^2$, provado no Exemplo 5.3.

Então, agora, vamos separar a demonstração em três casos:

Caso (1) - φ positiva: Como $\varphi\colon I \to I$ é positiva, então $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$.

Defina então:

$$
\begin{aligned}
&i\colon I \to I\\
&i(s) = s, \ \forall s \in I.
\end{aligned}
$$

Note que $i(0) = 0$ e $i(1) = 1$, ou seja, φ e i possuem os mesmos extremos, então, pela afirmação 1 temos $\varphi \cong i$. Perceba que $a \circ i = a$.

Então, como $a\colon I \to X$ é um caminho, por hipótese, segue da Proposição 4.6:

$$a \circ \varphi \cong a \circ i$$

$$b \cong a$$

Caso (2) - φ negativa: Como $\varphi\colon I \to I$ é negativa, então $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(1) = 0$.

Defina então:

$$
\begin{aligned}
&j\colon I \to I\\
&j(s) = 1 - s, \ \forall s \in I.
\end{aligned}
$$

Note que $j(0) = 1$ e $j(1) = 0$, ou seja, φ e j possuem os mesmos extremos, então pela afirmação 1, $\varphi \cong j$. Perceba ainda que $a \circ j = a^{-1}$, pois $a \circ j(0) = 1 = a^{-1}(0)$ e $a \circ j(1) = 0 = a^{-1}(1)$, em que $b \cong a^{-1}$.

Então, como $a\colon I \to X$ é um caminho, segue que:

$$a \circ \varphi \cong a \circ j,$$

$$b \cong a^{-1}$$

Caso (3) - φ trivial: Como $\varphi\colon I \to I$ é trivial, temos que $\varphi(0) = \varphi(1)$.

Defina então:

$$
\begin{aligned}
&k\colon I \to I\\
&k(s) = \varphi(0), \forall s \in I.
\end{aligned}
$$

Observe que k é constante.

Note que $k(0) = k(1) = \varphi(0) = \varphi(1)$.

Logo, φ e k possuem os mesmo extremos e pela afirmação 1, segue que $f \cong k$.

Então,

$$a \circ \varphi \cong a \circ k,$$

$$b \cong \text{“constante”},$$

em que $a \circ k = a(\varphi(0))$ é constante. E se $\varphi(0) = 0$ temos $b \cong a(0)$ e se $\varphi(0) = 1$ temos $b \cong a(1)$.

Portanto, a tese é satisfeita com as hipóteses dadas.

■

Nosso objetivo é formar um grupo com as classes de homotopias, para isto, precisamos de uma última proposição, a qual consta a seguir:

Proposição 5.13. *Sejam a, b, $c\colon I \to X$ caminhos tais que cada um deles termina onde o seguinte começa, $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$, $\gamma = [c]$ suas classes de homotopia, $x = a(0)$ a origem de a e $y = a(1)$ seu fim. Sejam e_x e e_y os caminhos constantes sobre esses pontos, $\epsilon_x = [e_x]$ e $\epsilon_y = [e_y]$ as classes de homotopias dessas constantes, então:*

$$(1)\colon \alpha \cdot \alpha^{-1} = \epsilon_x \qquad\qquad (3)\colon \epsilon_x \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot \epsilon_y$$

$$(2)\colon \alpha^{-1} \cdot \alpha = \epsilon_y \qquad\qquad (4)\colon (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

Demonstração:

Considere as seguintes parametrizações φ_1 e φ_2 :

$$\varphi_1(s) = \begin{cases} 2s, & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2 - 2s, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\varphi_2(s) = \begin{cases} 1 - 2s, & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2s - 1, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Note que φ_1 e φ_2 são triviais, pois $\varphi_1(0) = \varphi_1(1)$ e $\varphi_2(0) = \varphi_1(1)$.

Da proposição 5.12, temos que dado $a \in \alpha$, $a\colon I \to X$ um caminho, é tal que

$$a \circ \varphi_1 \cong \text{constante}.$$

Ainda temos que:

$$a \cdot a^{-1} = \begin{cases} a(2s) & \text{, se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ a^{-1}(2s-1) = a(2-2s), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Como

$$a \circ \varphi_1(s) = \begin{cases} a(2s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ a(2-2s), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

$$a \cdot a^{-1}(s) = \begin{cases} a(2s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ a(2-2s), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Então,

$$a \circ \varphi_1(s) = a \cdot a^{-1}(s) \cong a(0),$$

segue disso que

$$[a \cdot a^{-1}] = [a(0)]$$

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = \mathcal{E}_x. \qquad (*)$$

Novamente da proposição 5.12, temos que dado $a \in \alpha$, $a\colon I \to X$ um caminho, é tal que

$$a \circ \varphi_2 \cong \text{“constante”},$$

pois φ_2 é trivial, ainda temos que

$$a \circ \varphi_2(s) = \begin{cases} a(1-2s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ a(2s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Podemos verificar que:

$$a \cdot a^{-1}(s) = \begin{cases} a^{-1}(2s) = a(1-2s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ a(2s-1) & \text{, se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Sendo assim,

$$a \circ \varphi_2 = a^{-1} \cdot a \cong \ a(1),$$

segue disso que

$$[a^{-1} \cdot a] = [a(1)],$$

$$\alpha^{-1} \cdot \alpha = \mathcal{E}_y. \qquad (**)$$

Logo, de $(*)$ e $(**)$ fica provado os tópicos (1) e (2) da proposição.

Para os demais, define-se as seguintes parametrizações:

$$\varphi_3(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2s-1, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\varphi_4(s) = \begin{cases} 2s, & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\varphi_5(s) = \begin{cases} 2s, & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{4}, \\ s+\frac{1}{4}, & \text{se} \quad \frac{1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(s+1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Note que φ_3, φ_4 e φ_5 são positivas, pois

$$\varphi_3(0) = \varphi_4(0) = \varphi_5(0) = 0$$

e

$$\varphi_3(1) = \varphi_4(1) = \varphi_5(1) = 1.$$

Agora dado $a \in \alpha$, $a\colon I \to X$ um caminho e fazendo a composição de a com φ_3, temos:

$$a \circ \varphi_3(s) = \begin{cases} a(0) = x, & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ a(2s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Note que:

$$e_x \cdot a(s) = \begin{cases} e_x(2s) = x, & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ a(2s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Logo, pela proposição anterior 5.12,

$$a \circ \varphi_3 \cong a \cong e_x \cdot a$$

$$[a] = [e_x \cdot a]$$

$$\alpha = \epsilon_x \cdot \alpha \qquad\qquad (***)$$

Já ao fazer a composição de φ_4 e a, obtemos:

$$a \circ \varphi_4(s) = \begin{cases} a(2s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ a(1) = y, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Note ainde que:

$$a \cdot e_y = \begin{cases} a(2s) & , \text{ se } \ 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ e_y(2s-1) = y, & \text{ se } \ \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Logo, $a \circ \varphi_4 = a \cdot e_y$ e pela proposição 5.12, temos:

$$a \circ \varphi_4 \cong a$$

$$a \cdot e_y \cong a$$

$$[a \cdot e_y] = [a]$$

$$\alpha \cdot \epsilon_y = \alpha. \ (****)$$

Sendo assim, de $(***)$ e $(****)$, o item (3) fica demonstrado, ou seja:

$$\epsilon_x \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot \epsilon_y.$$

Por último, considere a, b e c, tais que $a \in \alpha$, $b \in \beta$ e $c \in \gamma$.

$$(a \cdot b) \cdot c = \begin{cases} a \cdot b(2s), & \text{se } \ 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ c(2s-1), & \text{se } \ \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} = \begin{cases} a(4s), & \text{se } \ 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{4}, \\ b(4s-1), & \text{se } \ \frac{1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ c(2s-1), & \text{se } \ \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Note que:

$$0 \leqslant \varphi_5(s) \leqslant \frac{1}{2}, \text{ se } \ 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \varphi_5(s) \leqslant \frac{3}{4}, \text{ se } \ \frac{1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{3}{4} \leqslant \varphi_5(s) \leqslant 1, \text{ se } \ \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1.$$

Compondo agora $a \cdot (b \cdot c)$ com φ_5, temos:

$$a \cdot (b \cdot c) \circ \varphi_5 = \begin{cases} a(4s), & \text{se } \ 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{4}, \\ b(4s-1), & \text{se } \ \frac{1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ c(2s-1), & \text{se } \ \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Agora fazendo $a \cdot (b \cdot c)$ temos

$$a \cdot (b \cdot c) = \begin{cases} a(4s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{4}, \\ b(4s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ c(2s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Segue então que: $a \cdot (b \cdot c) \circ \varphi_5 = (a \cdot b) \cdot c$.

Pela proposição 5.12, temos:

$$a \cdot (b \cdot c) \circ \varphi_5 \cong a \cdot (b \cdot c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c \cong a \cdot (b \cdot c)$$

$$[(a \cdot b) \cdot c] \cong [a \cdot (b \cdot c)]$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot c = \alpha \cdot (\beta \cdot c),$$

segue disto, o item (4) da proposição.

Portanto, demonstramos a proposição.

■

Com esta última proposição, estamos prontos para definir uma estrutura de grupo nas classes de homotopias, mas antes vamos a algumas observações.

Definição 5.14. ***grupóide fundamental de X*** *(ou $\Pi(X)$) é o conjunto das classes de homotopias (com extremos fixos) dos caminhos num espaço topológico X munido da operação (produto) definida acima. Onde esta operação está parcialmente definida no grupóide, para caminhos com extremos fixos.*

Observação:

- Em matemática existe uma estrutura o qual chama-se grupóide, porém não iremos nos alongar neste conceito.

- O par $(X,\ x_0)$ com $x_0 \in X$, em que x_0 será chamado de **ponto básico de X**, nos permite definir um caminho $a\colon (I,\ \partial I) \to (X,\ x_0)$, tal que $a(0) = a(1) = x_0$, que será chamado de "caminho fechado com base no ponto x_0", lembre-se que $\partial I = \{0, 1\}$ que é a fronteira de I.

Definição 5.15. *O subconjunto $\pi_1(X,\ x_0)$ do grupoide fundamental, formado pelas classes de homotopias de caminhos fechados com base em x_0 é chamado de* ***grupo fundamental****.*

Lema 5.16. *O grupo fundamental $\pi(X,\ x_0)$ acima definido, munido da operação produto acima definida e tomando como elemento neutro $\epsilon = \epsilon_{x_0} = [x_0]$ (classe de homotopia de caminho constante de x_0) é um grupo.*

Demonstração: Da útilma proposição, temos:

(1) $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \epsilon_x$

(2) $\alpha^{-1} \cdot \alpha = \epsilon_y$,

como $\epsilon_x = \epsilon_y$, pois os caminhos são fechados em x_0, segue que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = \epsilon = \epsilon_{x_0}$.

Assim como temos o item a seguir:

(3) $\epsilon_x \cdot \alpha = \alpha$ e $\alpha \cdot \epsilon_y = \alpha$,

segue que $\epsilon \cdot \alpha = \alpha \cdot \epsilon = \alpha$.

Por fim, segue do item (4) da proposição 5.13, a associativdade.

Portanto, temos a estrutura de um grupo.

$\blacksquare$

Agora que já possuímos a estrutura de grupo, basta os resultados que constam abaixo para obtermos nosso objetivo, o qual é provar que um toro e uma esfera não são homeomorfos.

Proposição 5.17. *Se x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos de X, então $\pi_1(X,\ x_0)$ e $\pi_1(X,\ x_1)$ são isomorfos.*

Demonstração: Tome $x_0,\ x_1 \in X$ tais que pertencem a mesma componente conexa por caminhos, ou seja, existe um caminho a, tal que $a\colon I \to X$ é dada por $a(0) = x_0$ e $a(1) = x_1$, em que a é contínua.

Seja $\alpha = [a]$ a classe de homotopia de caminhos que ligam x_0 a x_1.

Tome agora $\beta, \gamma \in \pi_1(X,\ x_1)$, ou seja, β e γ são classes de homotopias de caminhos fechados em x_1. Tome também b um destes caminhos fechados em x_1, ou seja, $b \in \beta$, tal que $b\colon I \to X$ satisfaz $b(0) = b(1) = x_1$.

Operando agora a e b da seguinte maneira:

$$a \cdot b \cdot a^{-1}(s) = \begin{cases} a(4s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{4}, \\ b(4s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{4} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ a^{-1}(2s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Note que $a \cdot b \cdot a^{-1}(0) = x_0$ e $a \cdot b \cdot a^{-1}(1) = x_0$, ou seja, a classe $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \in \pi_1(X,\ x_0)$, pois $a \cdot b \cdot a^{-1}$ é um caminho fechado em X_0.

Notemos que

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1} = \alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1} = (\alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1}) \cdot (\alpha \cdot \gamma \cdot \alpha^{-1}), \qquad (*)$$

sendo que $\alpha^{-1} \cdot \alpha = \mathcal{E}_{x_1}$.

A partir disso, defina:

$$\overline{\alpha} \colon \pi_1(X,\ x_1) \to \pi_1(X,\ x_0)$$
$$\overline{\alpha}(\beta) = \alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1}.$$

De $(*)$, temos que $\overline{\alpha}$ é um homomorfismo.

Defina agora:

$$f \colon \pi_1(X,\ x_0) \to (X,\ x_1)$$
$$f(\beta) = \alpha^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha,$$

segue dessa definição que

$$\overline{\alpha} \circ f(\beta) = \beta$$

e

$$f \circ \overline{\alpha}(\beta) = \beta,$$

ou seja, f é a inversa a direita e a esquerda de $\overline{\alpha}$, logo $\overline{\alpha}$ é bijetora.

Portanto, $\pi_1(X,\ x_0)$ é isomorfo $\pi_1(X,\ x_1)$.

■

Desta última proposição vimos que os grupos fundamentais com base em pontos x_0 e x_1 diferentes são isomorfos se existir um caminho ligando x_0 a x_1.

De maneira mais geral:

Corolário 5.18. *Se X é conexo por caminhos, então $\pi_1(X,\ x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X,\ x_1)$, para quaisquer $x_0,\ x_1 \in X$.*

Observação: Se X for conexo por caminhos, escreveremos apenas $\pi_1(X)$ para representar o grupo fundamental de X, sem especificar um $x_0 \in X$.

Demonstração: Decorre imediatamente da proposição anterior, pois como X é conexo por caminhos, sendo que para todo $x,\ y \in X$ existe um caminho ligando eles.

■

Proposição 5.19. *Dada h um homeomorfismo entre espaços topológicos X e Y, ainda considere $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, com $h(x_0) = y_0$. Então $\pi_1(X,\ x_0)$ e $\pi_1(Y,\ y_0)$ são isomorfos.*

Demonstração: Como h é homeomorfismo, temos, $h \colon X \to Y$ contínua assim como a função $h^{-1} \colon Y \to X$.

Vamos provar agora que $\pi_1(X,\ x_0)$ é isomorfo à $\pi_1(Y,\ y_0)$, para isso defina a seguinte função:

$$h_*\colon \pi_1(X,\ x_0) \to \pi_1(Y,\ y_0)$$
$$h_*(\alpha) = [h \circ a],$$

em que $[a] = \alpha$.

A função h_* está bem definida, pois se $[a] = [b]$, ou seja, $a \cong b$ e da proposição 4.6, segue que $h \circ a \cong h \circ b$, isto é, $[h \circ a] = [h \circ b]$, então $h_*(\alpha) = h_*(\beta)$.

Além disso, note que dados dois caminhos a e b fechados em x_0, temos:

$$h \circ (a \cdot b)(s) = \begin{cases} h \circ a(2s) & , \text{ se } \ 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ h \circ b(2s-1), & \text{ se } \ \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} = (h \circ a) \cdot (h \circ b)(s),$$

sendo asim,

$$h_*(\alpha \cdot \beta) = [h \circ (a \cdot b)] = [(h \circ a) \cdot (h \circ b)] = [(h \circ a)] \cdot [(h \circ b)] = h_*(\alpha) \cdot h_*(\beta).$$

Logo, h_* é um homomorfismo.

Defina agora:

$$h_*^{-1}\colon \pi_1(Y,\ y_0) \to \pi_1(X,\ x_0)$$
$$h_*^{-1}(\beta) = [h^{-1} \circ b],$$

em que $x_0 = h^{-1}(y_0)$ e $[b] = \beta$.

Note que:

$$h_*^{-1} \circ h_*(\alpha) = h_*^{-1}(h_*(\alpha)) = h_*^{-1}([h \circ a]) = [h_*^{-1} \circ (h \circ a)] = [a] = \alpha.(*)$$

$$h_*^{-1} \circ h_*(\beta) = h_*^{-1}(h_*(\beta)) = h_*^{-1}([h \circ b]) = [h_*^{-1} \circ (h \circ b)] = [b] = \beta.(**).$$

Logo, de $(*)$ e $(**)$ segue que h_*^{-1} é a inversa de h_*.

Portanto, h_* é um isomorfismo e $\pi_1(X,\ x_0)$ é isomorfo $\pi_1(Y,\ y_0)$.

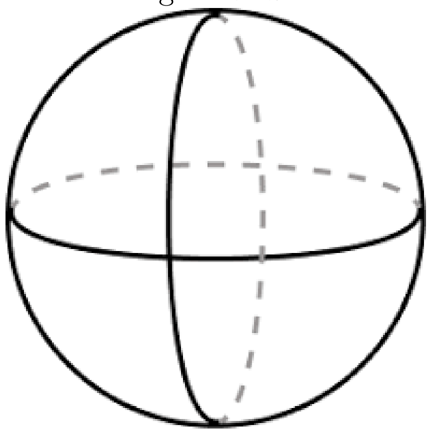
■

Com este último resultado, já estamos em condições de caminhar para o fim deste trabalho, para isso construiremos nas subseções seguintes o grupo fundamental da esfera (S^2) e do toro $(S^1 \times S^1)$ e em seguida, provaremos que não são homeomorfos.

5.1 O GRUPO FUNDAMENTAL DE S^2

Vamos provar que o grupo fundamental de S^2 é $\{0\}$, ou mais precisamente, isomorfo à $\{0\}$, para isso considere os seguintes resultados.

Figura 5: S^2



Fonte: https://matematicabasica.net/esfera/

Proposição 5.20. *Sejam $a,\ b\colon I \to X$ caminhos fechados com base nos pontos x_0 e y_0 respectivamente. A fim de que a e b sejam livremente homotópicos é necessário e suficiente que exista um caminho $c\colon I \to X$ ligando x_0 e y_0 tal que $a \cong (c \cdot b) \cdot c^{-1}$.*

Demonstração:
"Necessário": Seja $h\colon I \times I \to X$ uma homotopia livre entre os caminhos a e b, isto é,

$$h(x,\ 0) = a(x) \qquad h(x,\ 1) = b(x) \qquad h(0,\ s) = h(1,\ s),\ \forall x,\ s \in I.$$

Defina agora:

$$c\colon I \to X$$

$$c(t) = h(0,\ t) = h(1,\ t),$$

note que $c(0) = h(0,\ 0) = a(0) = x_0$ e $c(1) = h(0,\ 1) = b(1) = y_0$, ou seja, c é um caminho entre x_0 e y_0.

Defina também:

$$\varphi\colon I\times I\to I\times I$$

$$\varphi(0,\ t)=(0,\ 0);$$

$$\varphi(1,\ t)=(1,\ 0);$$

$$\varphi(s,\ 0)=(s,\ 0);$$

$$\varphi(s,\ 1)=\begin{cases}(0,\ 4s), & \text{se}\quad 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{4},\\ (4s-1,\ 1), & \text{se}\quad \frac{1}{4}\leqslant s\leqslant \frac{1}{2},\\ (1,\ 2-2s), & \text{se}\quad \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$$

A φ definida desta maneira esta claramente bem definida, isto é, se $(a,\ b)=(c,\ d)\in I\times I$, então $\varphi(a,\ b)=\varphi(c,\ d)$. Note também que no exemplo (4.12) deste trabalho concluímos que I é contrátil, consequentemente, concluímos o mesmo para $I\times I$.

Como $I\times I$ é contrátil, logo pela Proposição 4.11 temos $Id\cong\kappa$, onde κ é uma função constante e Proposição 4.6 temos $\varphi=\varphi\circ Id\cong\varphi\circ\kappa$, onde $\varphi\circ\kappa$ é uma função constante, sendo assim concluímos que φ é homotópica a uma constante.

Defina

$$k\colon I\times I\to X$$

$$k(s,\ t)=h\circ\varphi(s,\ t).$$

Note que:

$$k(s,\ 0)=h\circ\varphi(s,\ 0)=h(s,\ 0)=a(s);$$

$$k(s,\ 1)=h\circ\varphi(t,\ 1)=\begin{cases}h(0,\ 4s)=c(4s), & \text{se}\quad 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{4},\\ h(4s-1,\ 1)=b(4s-1), & \text{se}\quad \frac{1}{4}\leqslant s\leqslant \frac{1}{2},\\ h(1,\ 2-2s)=c^{-1}(2s-1), & \text{se}\quad \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}=(c\cdot b)\cdot c^{-1}(t);$$

$$k(0,t)=k(1,t),\ \forall t\in I.$$

Sendo assim, $k\colon a\cong(c\cdot b)\cdot c^{-1}$, ou seja, k é uma homotopia de caminhos entre a e $(c\cdot b)\cdot c^{-1}$.

"Suficiente": Suponha $a\cong(c\cdot b)\cdot c^{-1}$, em que c é um caminho entre x_0 e y_0, ou seja, $c(0)=x_0$ e $c(1)=y_0$.

Defina agora uma função φ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&\varphi\colon I\times I\to I\\
&\varphi(t,\ 0)=t;\\
&\varphi(t,\ 1)=\frac{t+1}{4},\ \text{se}\ \frac{1}{4}\leqslant\varphi(t,\ 1)\leqslant\frac{1}{2};\\
&\varphi(0,\ t)=\frac{t}{4},\ \text{se}\ 0\leqslant\varphi(0,\ t)\leqslant\frac{1}{4};\\
&\varphi(1,\ t)=1-\frac{t}{2},\ \text{se}\ \frac{1}{2}\leqslant\varphi(1,\ t)\leqslant 1.
\end{aligned}$$

Por fim, defina:

$$h\colon I\times I\to X$$

$$h(s,\ t)=((c\cdot b)\cdot c^{-1})\circ\varphi(s,\ t).$$

Lembremos que:

$$(c\cdot b)\cdot c^{-1}(s)=\begin{cases} c(4s), & \text{se}\quad 0\leqslant s\leqslant\frac{1}{4},\\ b(4s-1), & \text{se}\quad \frac{1}{4}\leqslant s\leqslant\frac{1}{2},\\ c^{-1}(2s-1), & \text{se}\quad \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

Sendo assim,

$$h(0,\ t)=c(4\varphi(0,\ t))=c(t)$$

e

$$h(1,\ t)=c^{-1}(2\varphi(1,\ t)-1)=c^{-1}(1-t)=c(t),\forall t\in I,$$

logo, $h(0,\ t)=h(1,\ t)$, para todo $t\in I$, assim como:

$$h(x,\ 0)=(c\cdot b)\cdot c^{-1}(x)$$

e

$$h(x,\ 1)=b(x),\forall x\in I.$$

Portanto, h é uma homotopia livre entre $(c\cdot b)\cdot c^{-1}$ e b.

Concluímos que como $(c\cdot b)\cdot c^{-1}\cong b$ e $a\cong(c\cdot b)\cdot c^{-1}$, segue $b\cong a$, ou seja, a é livremente homotópico a b.

■

Corolário 5.21. *Se um caminho fechado $a\colon I\to X$, de base x_0, isto é, $a(0)=a(1)=x_0$, é livremente homotópico a uma constante, então $a\cong e_{x_0}$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, digamos que $a\colon I\to X$ seja livremente homotópico a $b\colon I\to X$, tal que $b(s)=e_{y_0}(s)$, para todo $s\in I$.

Pela proposição anterior, existe $c\colon I\to X$ ligando x_0 e e_{y_0}, em que

$$a \cong (c \cdot b) \cdot c^{-1}$$

$$a \cong (c \cdot e_{y_0}) \cdot c^{-1}$$

$$a \cong c \cdot c^{-1}$$

$$a \cong e_{x_0}$$

■

Definição 5.22. *Um espaço topológico X é* ***simplesmente conexo*** *quando é conexo por caminhos e para todo $x_0 \in X$, temos $\pi_1(X,\ x_0) = \{\epsilon_{x_0}\}$.*

Para descobrir o grupo fundamental de S^2, vamos provar que S^2 é simplesmente conexo e concluir que seu grupo fundamental é o grupo que contém apenas o neutro. Para isso vamos enunciar alguns lemas e proposições a seguir.

Lema 5.23. *Se X é simplesmente conexo, então todos os caminhos fechados de I em X relativos a $x_0 \in X$ são livrementes homotópicos a e_{x_0}.*

Demonstração: Tome $a\colon I \to X$ um caminho fechado em x_0, isto é, $a(0) = a(1) = x_0$.

Então $[a] \in \pi_1(X,\ x_0)$,pois a é um caminho fechado em x_0. Logo $[a] = \mathcal{E}_{x_0}$, pois $\pi_1(X,\ x_0) = \{\epsilon_{x_0}\}$, onde $\mathcal{E}_{x_0} = [e_{x_0}]$.

Portanto, como $[a] = \mathcal{E}_{x_0}$, temos que $a \cong e_{x_0}$.

■

Exemplo 5.24. *Todo espaço contrátil é simplesmente conexo. No exemplo* (4.12) *foi provado que $I = [0,\ 1]$ é contrátil, sendo assim $\pi_1([0,\ 1],\ x_0) = \{0\}$ em particular.*

Demonstração:

Afirmação 1: Todo espaço contrátil é conexo por caminhos.

De fato, como ele é contrátil, então exite uma homotopia h entre:

$$id_X\colon X \to X \qquad\qquad k\colon X \to X$$

$$id_X(a) = a \qquad\qquad k(x) = p$$

para $p \in X$, fixo, e $h(x, 0) = id_X$ e $h(x, 1) = k(x) = p$.

Então defina para um $x \in X$ fixo, a seguinte função:

$$\alpha\colon I \to X$$

$$\alpha(t) = h(x,\ t),$$

Note que $\alpha(0) = id(x) = x$ e $\alpha(1) = p$, ainda, α é contínua, pois H é contínua e α é um caminho ligando x a p, para quaisquer $x,\ p \in X$, ou seja, X é conexo por caminhos.

Afirmação 2: Dado $p \in X$, p fixo, temos que $\pi_1(X,\ p) = \{\epsilon_p\}$.

Tome $b\colon I \to X$ dada por $b(t) = p$, para todo t. Segue que b é um caminho fechado, pois $b(0) = b(1) = p$, ainda $b = \epsilon_p$ e disso $[b] = [e_p] = \mathcal{E}_p$.

Agora tome $a\colon I \to X$ um caminho fechado qualquer, com base em $x_0 \in X$. Como X é conexo por caminhos, existe um caminho k ligando p e x_0, sendo assim, $[a] = [b] = \mathcal{E}_p$. Então pelo Corolário (5.18) temos $\pi_1(X,\ p) = \pi_1(X,\ x_0) = \{e_p\}$.

Afirmação 3: $\pi_1(X,\ x) = \pi_1(X)$, ou seja, $\forall x, y \in X$ temos que $\pi_1(X,\ x) = \pi_1(x,\ y)$.

Tome $\alpha \in \pi_1(X,\ x)$ e $\gamma \in \pi_1(X,\ y)$, então $\alpha = [a]$, para algum caminho fechado a com base em x, e $\gamma = [c]$, para algum caminho fechado c com base em y. Como X é conexo por caminho, existe um caminho ligando x e y, logo do Corolário (5.18) temos $[a] = [c]$, segue disso então que $\forall \alpha \in \pi_1(X,\ x)$ tem-se $\alpha \in \pi_1(x,\ y)$ e $\forall \gamma \in \pi_1(X,\ y)$ tem-se $\gamma \in \pi_1(X, x)$. Portanto $\forall x, y \in X$ temos que $\pi_1(X,\ x) = \pi_1(x,\ y)$.

Tomando p da afirmação 2, temos que existe um caminho d ligando x ao p e um caminho g ligando y ao p, com isso teremos $[d] = [g] = [b] = [e_p]$.

Portanto, das afirmações 1,2 e 3 segue que todo espaço contrátil é simplesmente conexo.

■

Para mais exemplos, podemos afirmar sem demonstração, que todos os intervalos fechados e abertos (bolas fechadas e bolas abertas) de $\mathbb{R}^n$ são simplesmente conexos, pois são contráteis.

Caminhando em direção de obter o grupo fundamental de S^2, os três lemas que seguem e a próxima propriedade, são ferramentas necessárias para provar que S^n, para $n > 1$ é simplesmente conexo, ou seja, $\pi_1(S^n,\ x_0) = \{0\}$ se $n > 1$ e para todo $x_0 \in S^n$.

Confira a seguir os três lemas mencionados acima:

Lema 5.25. *Seja $a\colon I \to S^n$ um caminho tal que $a(I) \neq S^n$, então $a \cong e_{x_0}$ se $a(0) = a(1) = x_0$ e $a \cong c$, em que $c\colon I \to S^n$ é um caminho injetivo, se for $a(0) \neq a(1)$.*

Demonstração: Como $a(I) \neq S^n$, tome $p \in S^n - a(I)$. Defina agora:

$\varphi\colon S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ a projeção esterográfica.

No exemplo 3.14, provamos que $\varphi\colon S^2 - \{p\} \to \mathbb{R}^2$ é um homeomorfismo, porém neste momento vamos utilizar sem demonstração que é um homeomorfismo para todo n.

Sabido disso, veja as afirmações que se fazem:

Afirmação 1: $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo.

Demonstração: Para provar esta afirmação, vamos mostrar que existe um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ e uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$ qualquer, para isso lembremos que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial normado. Seja $\| \ \|$ sua norma, sendo assim $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ é um espaço vetorial normado. Sem perda de generalidade, tome a bola aberta $B = B_{(0,\ 1)} \subset \mathbb{R}^n$, haja visto que todas as bolas abertas são homeomorfos entre si, considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to B_{(0,\ 1)} \\ x &\mapsto \frac{x}{1+\|x\|}. \end{aligned}$$

Observemos que:

(1) A função norma $\| \ \|\colon x \to \|x\|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$;

(2) A soma é contínua em $\mathbb{R}^n$;

(3) A multiplicação por um escalar também é contínua em $\mathbb{R}^n$.

Segue então que f é contínua e note que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ é válido que:

$$\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1;$$

pois $f(x) \in B_{(0,\ 1)}$.

Defina agora:

$$\begin{aligned} g\colon B_{(0,\ 1)} &\to \mathbb{R}^n \\ y &\to \frac{y}{1-\|y\|}; \end{aligned}$$

Como $y \in B_{(0,\ 1)}$, temos: $\|y\| < 1$.

A função g é contínua pelos mesmos motivos que observamos para f.

Além disto, para todo $y \in B$, temos:

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = y$$

e para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = x.$$

Assim segue que $g = f^{-1}$.

Logo, f é um homeomorfismo.

No exemplo 5.24 foi comentado que toda bola é simplesmente conexa, então como f é um homeomorfismo, segue que $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo, provando assim a afirmação 1.

Segue da afirmação 1 e do lema 5.23 que o caminho $a\colon I \to S^n$ é tal que $a \cong e_{x_0}$, se $a(0) = a(1) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, pois $S^n \subset \mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo.

Agora, se $a(0) \neq a(1)$ e fazendo a composição entre φ e o caminho a, temos:

$$\varphi \circ a \colon I \to \mathbb{R}^n$$

Defina então um segmento de reta b ligando $\varphi \circ a(0)$ com $\varphi \circ a(1)$, tal que:

$$b \colon I \to \mathbb{R}^n$$

$$b(0) = \varphi \circ a(0) \qquad\qquad b(1) = \varphi \circ a(1)$$

Defina agora uma função h, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} &h \colon I \times I \to \mathbb{R}^n \\ &h(x,t) = t \cdot \varphi \circ a(x) + (1-t) \cdot b(x), \end{aligned}$$

notemos que:

$$\begin{aligned} &h(x,0) = \varphi \circ a(x) \\ &h(x,1) = b(x) \\ &h(0,t) = \varphi \circ a(0) = b(0) \\ &h(1,t) = \varphi \circ a(1) = b(1), \qquad \forall x, t \in I. \end{aligned}$$

Segue disso que h é uma homotopia entre $\varphi \circ a$ e b, segue disso então

$$\begin{aligned} \varphi \circ a &\cong b \\ a &\cong \varphi^{-1} \circ b \end{aligned}$$

Defina agora $c \colon I \to S^n$ como $c = \varphi^{-1} \circ b$. Note que c é um caminho injetivo, pois b é um segmento de reta e φ é bijetora, em particular $c(0) \neq c(1)$.

Logo, $a \cong c = \varphi^{-1} \circ b$, um caminho injetivo, se $a(0) \neq a(1)$.

Potanto, o lema fica demonstrado.

■

Lema 5.26. *Seja $n > 1$. Se o caminho $a \colon I \to S^n$ é injetivo, sua imagem é um subconjunto fechado com interior vazio em S^n.*

Demonstração:

Como I é compacto e a é contínua, temos $a(I) \subset S^n$ é compacto, e como $a(I) \subset S^n \subset \mathbb{R}^n$ é um subspaço compacto de um espaço métrico, é também fechado, pelo teorema 2.16.

Notemos que $a\colon I \to a(I)$ é bijetora e contínua, sua inversa é $a^{-1}\colon a(I) \to I$. Tome $F \subset I$ fechado, logo F é compacto, agora note que $(a^{-1})^{-1}(F) = a(F)$ onde $a(F) \subset a(I)$ e é compacto, logo é fechado. Então concluímos que a^{-1} é contínua e portanto a é um homeomorfismo.

Afirmação: O interior de $a(I)$ é vazio.

Suponha que o interior de $a(I)$ não seja vazio, segue então que existe um x no interior de $a(I) \subset S^n$, então x é o centro de uma bola aberta que pode ser definida da seguinte maneira:

$$B_x = x \cap B$$

onde $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma bola aberta. Note disso que B_x possui dimensão n, mas como a é um homeomorfismo $a^{-1}(B_x)$ possui dimensão 1, o que é uma contradição.

Portanto, concluímos que $a(I)$ é fechado com interior vazio.

■

Lema 5.27. *Todo caminho $a\colon I \to S^n$ é homotópico (com extremos fixos) a um caminho $b\colon I \to S^n$ tal que $b(I) \neq S^n$.*

Demonstração:

Como a é contínua, e I e S^n são compactos, segue que a é uniformemente contínua. Então considere a seguinte partição de I:

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_k = 1$$

de tal modo que dado $\epsilon < 2$, existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que, se $d(x,\ y) < \delta$, para $x, y \in I_i$, onde $I_i = [s_{i-1}, s_i]$, temos, $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, e com isso $a(I) \neq S^n$, pois existem pontos em S^n talque sua distância é 2.

Defina agora os caminhos parciais de a como:

$$a_i\colon I \to S^n$$
$$a_i = a|_{s_{i-1},\ s_i} \circ \varphi_i$$

em que

$$\varphi_i\colon I \to [s_{i-1},\ s_i]$$
$$x \to (s_i - s_{i-1})x + s_{i-1}$$

é o homeomorfismo linear crescente, com $\varphi_i(0) \neq \varphi_i(1)$.

Seja agora $[t_{i-1}, t_i]$, onde $t_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i}$, para $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$. Defina então:

$$\mathbb{E}_i\colon [t_{i-1}, t_i] \to [s_{i-1},\ s_i]$$
$$x \mapsto \left(\frac{s_i - s_{i-1}}{t_{i-1} - t_i}\right) x + \frac{t_{i-1}\cdot s_i - t_i \cdot s_{i-1}}{t_{i-1} - t_i}$$

que também é um homeomorfismo linear crescente. Por último, defina o seguinte homeomorfismo:

$$\mathbb{E}\colon I \to I$$
$$\mathbb{E}|_{[t_{i-1},t_i]} = \mathbb{E}_i$$

Note que $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k = a \circ \mathbb{E}$, onde $a \circ \mathbb{E}$ é uma reparametrização positiva de a, pois, $\mathbb{E}(0) = 0$ e $\mathbb{E}(1) = 1$.

Então, pela proposição 5.12 temos que $a \cong a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k$, em que cada $a_i\colon I \to S^n$ é uma reparametrização de $a|_{I_i}$, com $a_i(I) = a(I_i) \neq S^n$. Sendo assim, pelo lema 5.25, temos duas possibilidades:

Se $a_i(0) = a_i(1)$ temos $a_i \cong e_{x_0}$. Defina então caminhos parciais $b_i = e_{x_0}$, para cada i. Temos então que $b_i(I) = \{x_0\}$ para cada i. Defina agora então $b\colon I \to S^n$, onde $b(t) = b_i(t)$, note que $b(I) \neq S^n$.

Se $a_i(0) \neq a_i(1)$, sendo asim, existe um caminho $b_i\colon I \to S^n$ injetor tal que $a_i \cong b_i$. Então pelo lema 5.26 para $n > 1$, $b_i(I) \subset S^n$ é fechado e possui interior vazio.

Defina agora:

$$b = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k.$$

decorre disso então que como $a_i \cong b_i$ para todo $i = 1,\ \ldots,\ k$, temos:

$$a \cong a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \cong b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_k = b$$

A imagem de b é dada por $b(I) = b_1(I) \cup b_2(I) \ldots \cup b_k(I)$.

Note que

$$b\colon I \to S^n$$
$$b = b_1 \ldots b_k,$$

sendo que e $b(I) \neq S^n$, pois $b(I)$ é a união finita de fechados, portanto fechado, e é também a união finita de conjuntos de interior vazio, portanto o seu interior é vazio. Esta propriedade é demonstrada com mais detalhes em (LIMA, 2009).

Portanto, o lema fica provado.

■

Com a demonstração dos três lemas anteriores, vamos agora provar que $\pi_1(S^2, x_0)$ é isomorfo a $\{0\}$.

Proposição 5.28. *Se $n > 1$, a esfera S^n é simplesmente conexa.*

Demonstração: Pelo lema 5.27 dado um caminho fechado $a\colon I \to S^n$, com $n > 1$, temos $a \cong b$, em que b é um caminho fechado tal que $b(I) \neq S^n$, segue do lema 5.25 que $b \cong e_{x_0}$.

Portanto, para todo $a\colon I \to S^n$ fechado, temos $a \cong e_{x_0}$, o que implica que S^n é simplesmente conexo, pois para todo a temos $[a] = \epsilon$.

■

Acabamos assim de concluir que o grupo fundamental de S^n, $n > 1$, é um grupo unitário. $\pi_1(S^n,\ x_0) = \{0\}$, para todo $x_0 \in S^n$, em particular $\pi_1(S^2,\ x_0) = \{0\}$.

5.2 O GRUPO FUNDAMENTAL DE S^1

Agora concentraremos os nossos esforços para construir o grupo fundamental de S^1. O grupo fundamental de S^1 nos permitirá obter o grupo fundamental do toro.

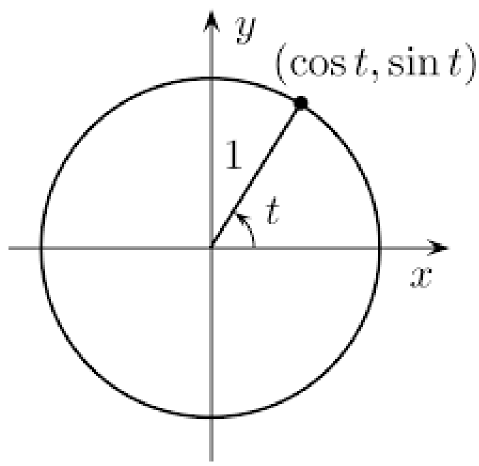
Definição 5.29. *O círculo S^1 pode ser definido da seguinte maneira:*

$$S^1 = \{x \in \mathbb{C}\ :\ |x| =\ 1\},$$

em que $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos.

De maneira mais simples, S^1 é o famoso círculo trigonométrico, que não é distante dos alunos do ensino médio.

Figura 6: S^1



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Círculo_unitário

Observação:

(1) Iremos representar o número complexo $a + bi$ como o par $(a,\ b)$.

(2) O conjunto dos números complexos, sem o zero, (representado por $\mathbb{C}^*$) munido da operação produto é um grupo abeliano.

(3) $S^1 \subset \mathbb{C}$ é um subgrupo de $\mathbb{C}$, pois o produto de dois números complexos de módulo 1 resulta em um número complexo de módulo igual a 1.

Para construir o grupo fundamental de S^1, vamos utilizar a seguinte função exponencial, que nos permite escrever nossos números complexos.

Defina então:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \\ &\mathcal{E}(t) = e^{i\cdot t} = (cos(t),\ sen(t)) \end{aligned}$$

Esta função ϵ é um homomorfismo, pois:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t+s) &= e^{i\cdot(t+s)} \\ &= e^{it+i\cdot s} \\ &= e^{it}\cdot e^{is} \\ &= \mathcal{E}(t)\cdot\mathcal{E}(s) \end{aligned}$$

A função $\mathcal{E}$ é um sobrejetora, pois para todo $x \in S^1$, existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que $(cos(\omega),\ sen(\omega)) = x$, para isto, basta pegar o ângulo formado pelo semi-eixo positivo de X e pelo segmento que representa o módulo de x.

Lema 5.30. *A aplicação* $\mathcal{E}\colon \mathbb{R} \to S^1$ *é aberta.*

Demonstração:

Dado um aberto $U \subset \mathbb{R}$, basta provarmos que sua imagem é um aberto em S^1, isto é, que $\mathcal{E}(U)$ é um aberto em S^1.

Para isto, mostraremos que o complementar de $\mathcal{E}(U)$ é fechado, ou seja, que $F = S^1 - \mathcal{E}(U)$ é fechado.

Considere $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(U))$ a imagem inversa de $\mathcal{E}(U)$. Notemos que

$$\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(U)) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(U + 2\pi\cdot n),$$

pois se $x \in \mathcal{E}(U)$, então $x = (cos(t),\ sen(t))$ para algum $t \in U$, porém múltiplos de 2π somados a t, vão gerar o mesmo x, isto é, $x = (cos(t+2\pi\cdot n),\ sen(t+2\pi\cdot n))$, pois dois números reais com o mesmo cosseno e seno se e só se, diferem por um múltiplo inteiro de 2π.

Note que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $(U + 2\pi \cdot n)$ é aberto, logo sua união enumerável é aberto, ou seja, $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(U))$ é aberto em $\mathbb{R}$.

Logo, o complementar da imagem inversa de $\mathcal{E}(U)$, ou seja $\mathcal{E}^{-1}(F)$, é um fechado em $\mathbb{R}$, isto é, $\mathcal{E}^{-1}(F)$ é fechado em $\mathbb{R}$.

Note que para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $x' \in [0,\ 2\pi]$ tal que $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(x')$.

De fato:

Se $x \in [0,\ 2\pi]$ tome $x = x'$, então $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(x')$.

Se $x \notin [0,\ 2\pi]$, então $x \in \mathbb{R} - [0,\ 2\pi]$ tal que, $x = x' + 2\pi \cdot n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$ e $x' \in [0,\ 2\pi]$, note que $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(x')$.

Note então que se $x \in \mathcal{E}^{-1}(F)$, basta pegar seu representante $x' \in [0,\ 2\pi]$.

Sendo assim,

$$F = \mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(F)) = \mathcal{E}\left(\mathcal{E}^{-1}(F) \cap [0,\ 2\pi]\right).$$

Porém, $\mathcal{E}^{-1}(F) \cap [0,\ 2\pi]$ é uma instersecção de um fechado $\mathcal{E}^{-1}(F)$ com um compacto $[0,\ 2\pi]$, o qual é um compacto em $\mathbb{R}$.

Logo, a sua imagem $\mathcal{E}(\mathcal{E}^{-1}(F)) = \mathcal{E}\left(\mathcal{E}^{-1}(F) \cap [0,\ 2\pi]\right)$ é compacto em S^1, então é fechado.

Portanto, como F é fechado, então $\mathcal{E}(U)$ é um aberto para todo $U \subset \mathbb{R}$ aberto.

■

Proposição 5.31. *A restrição de $\mathcal{E}$ a todo intervalo aberto $]t,\ t + 2\pi[$ de comprimento 2π é um homeomorfismo sobre $S^1 - \{\mathcal{E}(t)\}$.*

Demonstração: Seja

$$\varphi\colon\ ]t,\ t + 2\pi[\to S^1 - \mathcal{E}(t)$$

$$\varphi(x) = \mathcal{E}(x) = e^{i \cdot x}$$

Temos que:

- φ é contínua, pois $\mathcal{E}$ é contínua.
- φ é sobrejetora, pois $\mathcal{E}$ é sobrejetora, pois dado $t \in \mathbb{R}$ é sabido que $cos(t) = cos(t + 2\pi)$ e $sen(t) = sen(t + 2\pi)$. E assim $\mathcal{E}([0, 2\pi]) = \mathcal{E}([t, t + 2\pi])$, então tirando os extremos do intervalo, devemos tirar sua imagem $\mathcal{E}(t)$, para manter a sobrejetividade.

Agora, vamos verificar que φ é injetora, para isso, tome $a,\ b \in]t,\ t + 2\pi[$ tal que $a \neq b$.

Suponha que $\varphi(a) = \varphi(b)$, isto é, $a \in]t,\ t+2\pi[$, então $\varphi(a) = e^{i \cdot a} = (cos(a),\ sen(a))$, assim como para $b \in]t,\ t+2\pi[$, $\varphi(b) = e^{i \cdot b} = (cos(b),\ sen(b))$.

Se $\varphi(a) = \varphi(b)$, então

$$(cos(a),\ sen(a)) = (cos(b),\ sen(b)),$$

segue que:

$$cos(a) = cos(b) \text{ e } sen(a) = sen(b),$$

porém $cos(a) = cos(b) \ \Leftrightarrow\ a = b$ ou $a = 2\pi - b$, sendo que $a = b$ não ocorre, pois $a \neq b$, assim como, $sen(a) = sen(b) \ \Leftrightarrow\ a = b$ ou $a = \pi - b$, sendo que $a = b$ não ocorre, pois $a \neq b$, segue disso que $a = 2\pi - b$ e $a = \pi - b$, deveriam ocorrer simultaneamente, o que não possível, então $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Logo, se $a \neq b \in]t,\ t+2\pi[$, então $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, sendo assim, $\mathcal{E}|_{]t,\ t+\pi[}$ é injetora.

Sendo assim φ é bijetora. então sua inversa é dada por:

$$\varphi^{-1}\colon S^1 - \mathcal{E}(t) \rightarrow]t,\ t+2\pi[$$

$$\varphi^{-1}(x) = \mathcal{E}^{-1}(x)$$

E pelo lema 5.30, dado um A aberto de $]t,\ t+2\pi[$ sua imagem, $\varphi(A) = \mathcal{E}(A)$, é um aberto em S^1. Sendo assim concluímos que a imagem direta do aberto $\varphi(A)$ pela inversa φ^{-1} é um aberto, o que implica em φ^{-1} ser contínua, sendo assim $\mathcal{E}^{-1}$ é contínua.

Portanto, $\mathcal{E}|_{]t,\ t+2\pi[}$ é homeomorfismo.

$\blacksquare$

Proposição 5.32. *Dado um intervalo $J = [s_0,\ s_1]$, uma função contínua $a\colon J \rightarrow S^1$ e um número real t_0 com $a(s_0) = e^{i \cdot t_0}$. Então existe um única função contínua $\tilde{a}\colon J \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(s) = e^{i \cdot \tilde{a}(s)}$, para todo $s \in J$, isto é, $a = \mathcal{E} \circ \tilde{a}$ e $\tilde{a}(s_0) = t_0$.*

Demonstração: Vamos separar a demonstração em três casos, os quais constam a seguir:

Caso (1): Se $a(J) \subset S^1 - y$, para algum $y \in S^1$.

Como $a(J) \subset S^1 - y$, temos que $a(s_0) \neq y$, sendo assim, existe um único $x \in \mathcal{E}^{-1}(y)$ tal que $t_0 \in]x,\ x+2\pi[$, se x não for único teríamos t_0 pertencendo simultaneamente a dois intervalos disjuntos, o que é impossível. Então, pela proposição 5.31 $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}|_{]x,\ x+2\pi[}$ é um homeomorfismo sobre $S^1 - \{y = \mathcal{E}(x)\}$.

Defina então agora:

$$\tilde{a} \colon J \to \mathbb{R}$$
$$\tilde{a}(s) = \mathcal{E}_x^{-1} \circ a.$$

Note que $\tilde{a}(s_0) = t_0$.

Como x é único, segue que $\tilde{a}$ é única. Além disso,

$$a(s) = \mathcal{E}_x \circ \tilde{a}(s) = \mathcal{E} \circ \tilde{a}(s) = e^{i\tilde{a}(s)}.$$

Caso (2): Suponha agora que $J = J_1 \cup J_2$ seja a reunião de dois intervalos compactos com um extremo s_* em comum e que a proposição seja válida para as restrições:

$$a_1 = a|_{J_1} \qquad e \qquad a_2 = a|_{J_2};$$

ou seja, existem únicas:

$$\begin{array}{lcl} \tilde{a}_1 \colon J_1 \to \mathbb{R} & e & \tilde{a}_2 \colon J_2 \to \mathbb{R} \\ \mathcal{E} \circ \tilde{a}_1 = a_1 & & \mathcal{E} \circ \tilde{a}_2 = a_2 \\ \tilde{a}_1(s_0) = t_0 & & \tilde{a}_2(s_*) = \tilde{a}_1(s_*) \end{array}$$

Note que:

$$a_2(s_*) = \mathcal{E}(\tilde{a}_2(s_*)) = e^{\tilde{a}_2(s_*)} = e^{\tilde{a}_1(s_*)} = \mathcal{E}(\tilde{a}_1(s_*)) = a_1(s_*)$$

com $s_* \in J_1 \cap J_2$.

Defina agora:

$$\tilde{a} \colon J \to \mathbb{R}$$
$$\tilde{a}(s) = \begin{cases} \tilde{a}_1(s), & \text{se} \quad s \in J_1, \\ \tilde{a}_2(s), & \text{se} \quad s \in J_2, \end{cases}$$

Além do mais,

$$a(s) = \mathcal{E} \circ \tilde{a}(s) = \begin{cases} \mathcal{E} \circ \tilde{a}_1(s) = a_1 = a|_{J_1}, & \text{se} \quad s \in J_1, \\ \mathcal{E} \circ \tilde{a}_2(s) = a_2 = a|_{J_2}, & \text{se} \quad s \in J_2, \end{cases}$$

Ainda temos que $\tilde{a}(s_0) = \tilde{a}_1(s_0) = t_0$.

Notemos que $\tilde{a}$ é única que satisfaz as condições do enunciado, pois $\tilde{a}_1$ e $\tilde{a}_2$ são únicas.

Caso (3): A existência de $\tilde{a}$ no caso geral, se reduz aos dois casos particulares anteriores, pois como J é compacto, para toda função contínua $a \colon J \to S^1$, existe uma decomposição $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_k$ como a união de intervalos justapostos de modo que

$a(J_i) \neq S^1$, para todo $i \in 1, \ \ldots, \ k$.

Quanto a unicidade, basta obervar que dados $\tilde{a}$ e $\hat{a}\colon J \to \mathbb{R}$ funções contínuas, tais que $e^{i\cdot\tilde{a}(s)} = e^{i\cdot\hat{a}(s)}$, para todo $s \in J$, então:

$$(cos(\tilde{a}(s)), \ sen(\tilde{a}(s))) = (cos(\hat{a}(s)), \ sen(\hat{a}(s))),$$

sendo assim, defina a seguinte função contínua

$$f(s) = \frac{\tilde{a}(s) - \hat{a}(s)}{2\pi} = n$$

uma constante, pois $\tilde{a}(s) = \hat{a}(s) + 2\pi n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Então para

$$cos(\tilde{a}(s)) = cos(\hat{a}(s)) \text{ e } sen(\tilde{a}(s)) = sen(\hat{a}(s))$$

com $\tilde{a}(s_0) = \hat{a}(s_0) = t_0$ e $\tilde{a}(s) = \hat{a}(s)$, para todo $s \in J$, temos assim, $\tilde{a} = \hat{a}$.

■

A função $\tilde{a}\colon J \to \mathbb{R}$ é chamada de **função ângulo** para a.

Provamos acima que se fixado $t_0 \in J$ com $a(s_0) = \mathcal{E}(t_0)$ e obtendo $\tilde{a}(s_0) = t_0$, as demais funções ângulos para a que devem ter início nos pontos $t_0 + 2\pi \cdot k$, tendo seguinte forma:

$$\hat{a}(s) = \tilde{a}(s) + 2\pi \cdot k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Agora, se $a\colon I \to S^1$ é um caminho fechado, temos que toda função ângulo $\tilde{a}\colon I \to \mathbb{R}$ é tal que $\frac{\tilde{a}(1)-\tilde{a}(0)}{2\pi} = n(a) \in \mathbb{Z}$, em que $n(a)$ é chamado de **grau do caminho fechado** $a\colon I \to S^1$.

Caminhando para obtenção do grupo fundamental de S^1, munidos agora da última proposição e da próxima, conseguiremos concluir que $\pi_1(S^1, x_0)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Proposição 5.33. *Sejam $a, \ b\colon I \to S^1$ caminhos fechados. Então:*

(1) Se a e b têm o mesmo ponto básico, vale que $n(a \cdot b) = n(a) + n(b)$.

(2) Se a e b são livremente homotópicos, tem-se $n(a) = n(b)$.

(3) Se $n(a) = n(b)$, então a e b são livremente homotópicos. Além disso, $a \cong b$ quando a e b possuem o mesmo ponto básico.

(4) Dados $p \in S^1$ e $k \in \mathbb{Z}$, existe um caminho fechado $a\colon I \to S^1$ com base no ponto p, tal que $n(a) = k$.

Demonstração:

(1): Sejam $\tilde{a}$ e $\tilde{b}\colon I \to \mathbb{R}$ funções ângulos para a e b, respectivamente. Tome $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $e^{i\cdot t_0} = a(0) = a(1) = b(0) = b(1)$ como definidos na proposição 5.32, então:

$$\begin{array}{ll} \tilde{a}\colon I \to \mathbb{R} & \qquad \tilde{b}\colon I \to \mathbb{R} \\ \tilde{a}(0) = t_0 & \qquad \tilde{b}(0) = \tilde{a}(1). \\ \tilde{a}(1) = t_0 + 2 \cdot n(a) \cdot \pi & \end{array}$$

note disso que $b(0) = a(1) = e^{i\cdot \tilde{a}(1)}$. Como $a(0) = a(1) = b(0) = b(1)$, pois possuem o mesmo ponto básico e são caminhos fechados, defina:

$$\tilde{a}\tilde{b}\colon I \to \mathbb{R}$$

$$\tilde{a}\tilde{b}(s) = \begin{cases} \tilde{a}(2s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ \tilde{b}(2s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

Note que $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{a}(0) = t_0$, em que $\tilde{a}\tilde{b}$ está bem definida, pois $\tilde{b}(0) = \tilde{a}(1)$, também concluímos que $\tilde{a}\tilde{b}$ é contínua, decorrendo de $\tilde{b}(0) = \tilde{a}(1)$ e do fato de $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ serem contínuas.

Além disto,

$$\mathcal{E} \circ \tilde{a}\tilde{b}(s) = \begin{cases} \mathcal{E} \circ \tilde{a}(2s), & \text{se} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ \mathcal{E} \circ \tilde{b}(2s-1), & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases} = a \cdot b(s)(*)$$

Então, segue de $(*)$ que $\tilde{a}\tilde{b}$ é a função ângulo para $a \cdot b$.

Sabe-se que:

$$n(a \cdot b) = \frac{\tilde{a}\tilde{b}(1) - \tilde{a}\tilde{b}(0)}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot n(a \cdot b) &= \tilde{b}(1) - \tilde{a}(0) \\ &= \tilde{b}(1) - \tilde{a}(1) + \tilde{a}(1) - \tilde{a}(0) \\ &= \tilde{b}(1) - \tilde{b}(0) + \tilde{a}(1) - \tilde{a}(0) \\ &= 2\pi \cdot (n(b)) + 2\pi \cdot (n(a)), \end{aligned}$$

já que $\tilde{a}(1) - \tilde{b}(0) = 0$, e pela definição da função $\tilde{a}\tilde{b}\colon I \to \mathbb{R}$.

Logo,

$$n(a \cdot b) = n(b) + n(a).$$

Concluímos que a primeira afirmação é satisfeita.

(2):

Caso (1): Suponha que $|a(s) - b(s)| < 2$, para todo $s \in I$, ou seja, $a(s)$ e $b(s)$ nunca são antípodas (diametralmente opostos).

Seja $s_0 \in S^1$ tal que $a(0) = e^{i \cdot s_0}$ e $t_0 \in S^1$ tal que $b(0) = e^{i \cdot t_0}$.

Podemos supor que $|s_0 - t_0| < \pi$ $(*)$, pois $|a(s) - b(s)| < 2$, para todo $s \in I$.

Tome $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ as funções-ângulos de a e b respectivamente. Sabe-se que:

$$\tilde{a}(0) = s_0 \qquad e \qquad \tilde{b}(0) = t_0$$

Como $a(s)$ e $b(s)$ nunca são antípodas, deve-se ter

$$\tilde{a}(s) - \tilde{b}(s) \neq \pi, \ \forall s \in I. \ (**)$$

De $(*)$ e $(**)$, segue que:

$$|\tilde{a}(s) - \tilde{b}(s)| < \pi, \ \forall s \in I.$$

Lembre que,

$$n(a) - n(b) = \frac{\tilde{a}(1) - \tilde{a}(0) - \tilde{b}(1) + \tilde{b}(0)}{2\pi},$$

disto, da última desigualdade e da desigualdade triangular, temos que:

$$2\pi|n(a) - n(b)| = |\tilde{a}(1) - \tilde{a}(0) - \tilde{b}(1) + \tilde{b}(0)| \leqslant |\tilde{a}(1) - \tilde{b}(1)| + |\tilde{a}(0) - \tilde{b}(0)|$$

$$2\pi|n(a) - n(b)| < 2\pi$$

$$|n(a) - n(b)| < 1,$$

como $n(a)$ e $n(b) \in \mathbb{Z}$

$$n(a) - n(b) = 0 \ \Rightarrow \ n(a) = n(b).$$

Caso (2): Caso geral

Como a e b são fechados e livremente homotópicos, temos que existe uma homotopia h, tal que:

$h\colon I \times I \to S^1$ em que h é contínua, porém como $I \times I$ é compacto, então h é uniformemente contínua.

Segue então que existe $\delta > 0$ tal que se $|t - t'| < \delta$ então $|h(s,\ t) - h(s,\ t')| < 2$ $(*)$ para todo $s \in I$.

Agora, considere t_i, para $i = 0, \ldots, k$, tais que $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = 1$ uma partição de I, em que $t_{i+1} - t_i < \delta$.

Defina assim caminhos fechados em S^1, do seguinte modo:

$$a_0 = a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots, a_k = b,$$

em que $a_i(s) = h(s,\ t_i)$.

Segue de $(*)$ que:

$$|a_i(s) - a_{i+1}(s)| < 2,\ \forall s \in I.$$

Agora, pelo caso 1, como $|a_i(s) - a_{i+1}(s)| < 2,\ \forall s \in I$, temos $n(a_i) = n(a_{i+1})$, ou seja, $n(a) = n(a_1) = \ldots = n(b)$.

Logo, o item 2 está provado.

(3): Sejam $\tilde{a},\ \tilde{b}\colon I \to \mathbb{R}$ as funções-ângulos para a e b, respectivamente.

Como $n(a) = n(b)$, temos que $\tilde{a}(1) - \tilde{a}(0) = \tilde{b}(1) - \tilde{b}(0)$.

Defina a seguinte função:

$$h\colon I \times I \to \mathbb{R}$$
$$h(s,\ t) = (1 - t) \cdot \tilde{a}(s) + t \cdot \tilde{b}(s).$$

Note que h é contínua, pois $\tilde{a}(s)$ e $\tilde{b}(s)$ são e ainda, h é uma homotopia entre $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$, pois $h(s,\ 0) = \tilde{a}(s)$ e $h(s,\ 1) = \tilde{b}(s)$, para todo $s \in I$.

Segue disso que para todo $t \in I$, temos:

$$\begin{aligned} h(1,\ t) - h(0,\ t) &= (1 - t) \cdot [\tilde{a}(1) - \tilde{a}(0)] + t \cdot [\tilde{b}(1) - \tilde{b}(0)] \\ &= (1 - t) \cdot 2\pi \cdot n + t \cdot 2\pi \cdot n \\ &= 2\pi n, \end{aligned}$$

em que $n = n(a) = n(b)$.

Logo, defina:

$$k\colon I \times I \to S^1$$
$$k(s,\ t) = \mathcal{E} \circ h(s,\ t),$$

sendo que k é contínua, pois $\mathcal{E}$ e k são.

Ainda, temos que:

$$\begin{aligned} k(s,\ 0) &= \mathcal{E} \circ h(s,\ 0) \\ &= \mathcal{E} \circ \tilde{a}(s) \\ k(s,\ 0) &= a(s), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k(s,\ 1) &= \mathcal{E} \circ h(s,\ 1) \\ &= \mathcal{E} \circ \tilde{b}(s) \\ k(s,\ 1) &= b(s), \end{aligned}$$

e ainda,

$$k(0,\ t) = k(1,\ t),\ \forall t \in I.$$

Logo, concluímos que k é uma homotopia livre entre a e b.

Agora, se a e b tiverem o mesmo ponto básico, tome $\tilde{a}(0) = \tilde{b}(0)$, donde $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$, o que implica em $k\colon a \cong b$.

Logo, provamos o terceiro item.

(4): Seja $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{E}(s_0) = p$.

O caminho fechado $a\colon I \to S^1$ dado por $a(s) = (cos(s_0 + 2k\pi s),\ sen(s_0 + 2k\pi s))$ tem base no ponto p, pois $a(0) = \mathcal{E}(s_0) = p$ e $a(1) = \mathcal{E}(s_0) = p$.

Definindo assim:

$$\tilde{a}(s) = s_0 + 2k\pi s,$$

note que $a = \mathcal{E} \circ \tilde{a}$, sendo assim $\tilde{a}$ é a função-ângulo para a e $n(a) = \frac{\tilde{a}(1) - \tilde{a}(0)}{2\pi} = k$.

Provando assim o quarto item.

Portanto com os quatro itens demonstrados, concluímos a proposição.

■

No próximo teorema finalmente mostraremos que o grupo fundamental de S^1 é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Teorema 5.34. O grupo fundamental de S^1 é isomorfo ao grupo aditivo de $\mathbb{Z}$ (inteiros).

Demonstração:

Para cada classe de homotopia $\alpha = [a]$ de caminhos fechados de S^1, associaremos $n(a)$.

Sendo assim, pelo segundo item da proposição 5.33, o grau $n(a)$ depende apenas da classe α, mas não do caminho a que escolhe-se.

Sendo assim, pode-se definir o grau de α com $n(\alpha)$.

Definindo agora:

$$n\colon \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$$

$$\alpha \mapsto n(\alpha) = n(a),$$

em que $a \in \alpha$ e a, ou seja, a é algum representante de α.

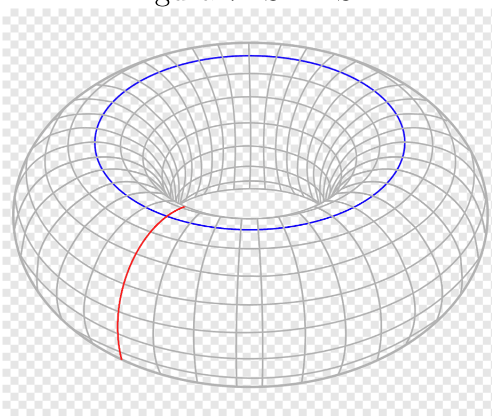
Pela primeira afirmação da proposição 5.33, temos que n é homomorfismo, já pela terceira afirmação da proposição 5.33, segue que n é injetora e por fim, pela quarta afirmação da proposição 5.33, segue que n é sobrejetora.

Portanto, n é bijetora e um homomorfismo, ou seja, n é isomorfismo. E $\pi_1(S^1)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

■

Para concluir o objetivo principal deste trabalho, que é mostrar que não existe um homeomorfismo entre S^2 e $S^1 \times S^1$ (toro), faz-se necessário um último teorema, que nos coloca em condições de concluir o referido objetivo.

Figura 7: $S^1 \times S^1$



Fonte: https://www.klipartz.com/es/sticker-png-stjwl

Teorema 5.35. O grupo fundamental de um produto cartesiano $X \times Y$ é isomorfo ao produto cartesiano dos grupos fundamentais de X e Y. Mais precisamente, se $p\colon X \times Y \to X$ e $q\colon X \times Y \to Y$ são as projeç oes naturais, ou seja, $p(a,\ b) = a$ e $q(a,\ b) = b$. Então dado $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$

$$\varphi\colon (X \times Y,\ (x_0,\ y_0)) \to \pi_1(X,\ x_0) \times \pi_1(Y,\ y_0)$$
$$\varphi(\alpha) = (p_*(\alpha),\ q_*(\alpha))$$

é um isomorfismo, em que $p_*(\alpha)$ e $q_*(\alpha)$ são definidos da seguinte maneira:

$p_*\colon \pi_1(X \times Y,\ (x_0,\ y_0)) \to \pi_1(X,\ x_0)$ $\qquad$ $q_*\colon \pi_1(X \times Y,\ (x_0,\ y_0)) \to \pi_1(Y,\ y_0)$

$p_*(\alpha) = [p \circ a],\ [a] = \alpha$ $\qquad$ $q_*(\alpha) = [q \circ a],\ [a] = \alpha.$

Demonstração: Primeiramente vamos provar que φ está bem definida, ou seja, dados $\alpha, \beta \in \pi_1(X \times Y,\ (x_0,\ y_0))$ tal que $\alpha = \beta$, então $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

Para isso tome

$$c\colon I \to X \times Y$$
$$c(s) = (a(s),\ b(s)).$$

um caminho fechado com base em $(x_0,\ y_0)$. Onde

$$a\colon X \times Y \to X \qquad b\colon X \times Y \to Y$$
$$a(s) = p \circ c(s) \qquad b(s) = q \circ c(s)$$
$$a(0) = a(1) = x_0 \qquad b(0) = b(1) = y_0$$

Agora tome

$$c^{'}\colon I \to X \times Y$$
$$c^{'}(s) = (a^{'}(s),\ b^{'}(s))$$

Então segue que

$$c \cong c^{'} \Leftrightarrow a \cong a^{'} \text{ e } b \cong b^{'}.$$

De fato, uma homotopia $k : c \cong c^{'}$ tem a forma

$k(s,\ t) = (g(s,\ t),\ h(s,\ t))$, em que $g\colon a \cong a^{'}$ e $h\colon b \cong b^{'}$. Isso mostra que φ está bem definida, pois $[c] = [c^{'}] \Leftrightarrow [a] = [a^{'}]$ e $[b] = [b^{'}]$. ainda:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha \cdot \beta) &= (p_*(\alpha \cdot \beta),\ q_*(\alpha \cdot \beta)) \\
&= (p_*(\alpha) \cdot p_*(\beta),\ q_*(\alpha) \cdot q_*(\beta)) \\
&= (p_*(\alpha),\ q_*(\alpha)) \cdot (p_*(\beta),\ q_*(\beta)) \\
&= \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta),
\end{aligned}$$

logo φ é um homomorfismo e como p_* e q_* são bijetoras, concluímos isso do mesmo modo que na proposição 5.19 foi concluído que h_* é um isomorfismo, segue então que φ é bijetora também.

Portanto, φ é isomorfismo.

$\blacksquare$

Teorema 5.36. O grupo fundamental do toro $T = S^1 \times S^1$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Pelo teorema 5.34, temos que $\pi_1(S^1)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$. E agora pelo teorema 5.35 o grupo fundamental do toro $\pi_1(T) = \pi_1(S^1 \times S^1)$ é isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

■

Agora temos condições de provar o teorema principal desta dissertação.

Teorema 5.37. A esfera bi-dimensional (espaço topológico S^2) não é homeomorfa ao toro (espaço topológico $T = S^1 \times S^1$).

Demonstração:

Suponha que S^2 seja homeomorfo a $T = S^1 \times S^1$, então pela proposição 5.19 temos $\pi_1(S^2)$ isomorfo a $\pi_1(T) = \pi_1(S^1 \times S^1)$.

Por outro lado, pela proposição 5.28 e definição 5.22 segue que $\pi_1(S^2) = \{0\}$ e pelo teorema 5.36 temos $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Logo $\pi_1(S^2)$ isomorfo a $\pi_1(T) = \pi_1(S^1 \times S^1)$ implica em $\{0\}$ isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, o que é uma contradição, pois não são isomorfos.

Portanto, não existe homeomorfismo entre S^2 e $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = T$.

■

6 CONTEXTUALIZAÇÃO COM O ENSINO MÉDIO

Toda mudança gera receio, ansiedade e a transição do ensino fundamental para o ensino médio é uma dessas, sendo que estudar matemática para muitos alunos do ensino médio é uma tarefa extremamente díficil e até mesmo dita desnecessária, em que isto pode ser observado nas perguntas "Para que vou usar isso na minha vida?" ou "Onde vou usar isso na minha vida?".

Em geral, responder tais perguntas, assim como explicá-las não é uma tarefa fácil, mas faz parte da profissão pelo menos direcionar o aluno para uma resposta e assim ajudá-lo a sanar sua dúvida.

Dentre os inúmeros conceitos matemáticos ensinados no ensino médio, o de função é um tanto quanto abstrato e daqueles que os alunos possuem bastante dificuldade para compreender, mas se exemplificado de uma maneira que o aluno se sinta pertencente, a historia é outra, por exemplo, mostrar que a distância de uma corrida de UBER e valor pago pela corrida estão relacionados por uma função, o aluno já vê uma utilidade.

No entanto, que tal utilizar o conceito de função para classificar conjuntos, como foi feito neste trabalho, onde concluímos que uma bola (esfera) nunca se transforma em uma rosquinha (toro), por mais que amassemos ou estiquemos a bola ? Mostrar para os alunos que esticar, amassar são exemplos de funções, seria uma outra maneira, outro exemplo para abordar o conceito de função.

Tendo isso em vista, neste capítulo, montaremos um plano de aula onde o objetivo principal é fazer com que um aluno do ensino médio, munido do conceito de função, números complexos e geometria analítica, seja capaz de entender este trabalho, e mais que isso, que ele perceba que simples problemas de classificação são difíceis e requerem um domínio avançado de matemática.

Quando nos referimos que o aluno deve entender este trabalho, não é no sentido explícito da palavra, onde ele domina o raciocínio por traz de cada demonstração ao ponto de reproduzir, mas sim que ele tenha um esclarecimento maior sobre o conceito de função e suas aplicações.

O público alvo deste plano de aula seria composto por alunos que já tiveram contato com o conceito de função, e um pouco mais que isso, que já tiveram uma caminhada por ela, estudando funções polinomiais, modulares, trigonométricas, exponenciais e logarítimicas. Também se faz necessário o contato com números complexos e geometria analítica, para que se possa aproveitar estes exemplos e ir construindo a ideia deste trabalho, sendo assim um aluno no terceiro ano do ensino médio detém todo conteúdo necessário.

Sabido disso, nosso passo seguinte é montar o plano de aula, nessa aula consideraremos um período de três horas, que será composto de três momentos de uma hora em que será construída a explicação deste trabalho. Segue então o plano de aula:

Plano de Aula

Momento 01: Neste momento o objetivo é abordar os conceitos básicos necessários para a compreensão do trabalho. Começar exemplificando que um espaço métrico é um conjunto em que se consegue calcular distâncias entre quaisquer elementos, podendo se exemplificar com a reta real, onde a distância é calculada fazendo o maior menos o menor, podendo exemplificar que o plano cartesiano também é um espaço métrico. Essa maneira que se calcula a distância é o que chamamos de métrica.

Posteriormente, já se pode dizer que as funções contínuas podem ser entendidas como aquelas que se consegue desenhar o gráfico sem tirar o lápis do caderno, o que não seria verdade para uma função escada, ou a função tangente nos pontos onde ela possui suas assíntotas laterais.

Em seguida, construir a ideia de grupo que nada mais é do que um conjunto em que existe uma operação que respeita as propriedades das operações de soma e de multiplicação que os alunos aprendem logo nos primeiros anos do ingresso no ensino básico. Podendo exemplificar que o conjunto dos números pares é um grupo para a operação soma, mas não é para a operação multiplicação. Também podendo ser exemplificado com o grupo das matrizes quadradas de ordem dois, utilizando a operação de soma de matrizes usual.

Sabendo o que é um grupo, contruir a ideia do que seria um homomorfismo, que nos mostra que é indiferente fazer a operação antes de colocar na função ou fazer depois que já colocou, podendo ser exemplificado com a função modular e a operação produto.

Esta função chamada de homomorfismo quando for bijetora damos outro nome, chamada de isomorfismo, que é o nome bonito para equivalência entre dois conjuntos, como por exemplo, o plano cartesiano e o conjunto dos números complexos são isomorfos, ou seja, cada número complexo pode ser representado por um par ordenado e vice e versa.

Logo, é essa característica que nos permitirá dizer que uma esfera não é equivalente a um toro, pois iremos perceber que eles possuem caracteristicas diferemtes. Pode-se exemplificar aqui com o seguinte, quanlaçamos uma esfera, sempre é possível ir fechando o laço até que ele se feche totalmente, porém se laçamos uma rosquinha passando pelo meio dela, é impossível fechar o laço sem cortar a rosquinha, perceba aqui que um possui uma característica que o outro não possui.

Momento 02: Neste momento deixar claro que um espaço topológico X é um conjunto que pode ser exemplificado com o conjunto dos reais, plano cartesiano, conjunto dos números complexos e até mesmo o ciclo trigonométrico, os quais são espaços topológicos.

Sabido o que é um espaço topológico se pode conceituar o que é um homeomorfismo, mostrando que é uma função contínua e bijetora entre espaços topológicos, em que a inversa é também contínua. Comentar que se for possível deformar um espaço em outro, como por exemplo, a rosquinha virar uma caneca e vice e versa, quem faz isso é um homeomorfismo. Figuras homeomorfas possuem uma forma equivalente, ainda que visualmente aparentem ser distintas.

Munido destes conceitos, pode-se seguir em direção a última parte.

Momento 03: Neste momento começar conceituando o que seria uma homotopia, que nada mais é que uma função que controla a distorção de uma função em outra, por exemplo, se o gráfico da função seno for esticado ele vira o gráfico de uma função afim, homotopias fazem isso, transformam uma função em outra.

Funções que podem ser distorcidas em uma mesma função, neste momento vale ressaltar que não é qualquer tipo de função que estamos trabalhando, mas sim com caminhos fechados, ou seja, funções contínuas que começam e terminam no mesmo lugar, pertencem a um mesmo conjunto chamado de classes de homotopias. Essas classes de homotopias se colocadas em um outro conjunto chamado de grupo fundamental, que possui a estrutura de grupo, se utilizarmos a ideia de acelerar, ou seja, anteriormente uma função precisava do intervalo todo para gerar sua imagem, agora se faz com que ela faça tudo isso em meio intervalo, para que na outra metade a outra função faça sua parte.

Por último comentamos que se a esfera e o toro fossem equivalentes eles deveriam ter grupos fundamentais isomorfos, ou seja, iguais. Mas isso não acontece, pois o da esfera é um ponto, já o do toro é o “plano cartesiano” apenas com pares ordenados com entradas inteiras.

No final da aula o professor pode comentar que um simples problema para identificar se dois espaços podem ser transformados um no outro, necessita de uma grande gama de conceitos e a dificuldade é grande, ou seja, ainda que pareça óbvio a questão, a matemática nos mostra que não é bem assim.

7 CONCLUSÃO

Saber se existe uma maneira de “amassar” ou “esticar” uma esfera até que ela vire um toro, verificando assim se um pode virar o outro, ou de maneira matemática poderíamos reescrever esta frase como: “uma esfera e um toro são homeomorfos ?”. Esta pergunta faz parecer o problema mais simples do que realmente é, porém vimos neste trabalho que esta pergunta, apesar de simples, não possui uma resposta fácil.

Foi necessário retomar conceitos de espaços métricos, de álgebra e construir uma estrutura chamada Grupo Fundamental para responder esta pergunta. Ainda para contruir esta estrutura de grupo fundamental foi necessária a ampliação dos exemplos e problemas que o conceito de função visto no ensino médio, dá conta de resolver, e até mesmo, na graduação, criando uma estrutura auxiliar chamada de homotopia, responsável por distorcer uma função em outra.

Conseguimos responder a pergunta percebendo que se elas fossem homeomorfas, seus grupos fundamentais deviram ser isomorfos, porém provamos que tais não eram isomorfos, e com isso então é fácil ver que a esfera e o toro não são homeomorfos.

Na tentativa de tornar a matemática mais significativa para alunos de ensino médio, montamos um plano de aula, que também pode ser visto como uma sequência didática que tenta transpor a liguagem formal em uma linguagem que um aluno entenda, com a matemática que ele possui. Percebemos de imediato que tal transposição não é fácil, mas com esforço e uma pequena redução de ideias é possível, entretanto fazer com que a significação matemática dos alunos aumente vale todo esforço e faz parte do cotidiano de todo professor.

REFERÊNCIAS

JANESCH, O. R. *Álgebra II. Florianópolis.* [S.l.], 2008.

LIMA, E. L. *Curso de Análise, vol. 2.* [S.l.: s.n.], 2000.

LIMA, E. L. Elementos de topologia geral, 1a ediçao. *Rio de Janeiro: SBM*, 2009.

LIMA, E. L. Curso de análise. v. 1. *Rio de Janeiro: Projeto Euclides*, 2010.

LIMA, E. L. Grupo fundamental e espaços de recobrimento, 4a edição. *IMPA, CNPq, Rio de Janeiro*, 2012.