



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL-PROFMAT**

Lizeane Borges Fortes

**ENSINO DE SISTEMAS LINEARES USANDO MODELAGEM
MATEMÁTICA E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM
UMA TURMA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Florianópolis

2021

Lizeane Borges Fortes

**ENSINO DE SISTEMAS LINEARES USANDO MODELAGEM
MATEMÁTICA E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM
UMA TURMA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Com área de concentração no Ensino de Matemática.

Orientadora: *Prof^a. Dr^a.* Sonia Elena Palomino Castro

Florianópolis

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Fortes, Lizeane

Ensino de Sistemas Lineares usando Modelagem Matemática e Registros de Representação Semiótica em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental. / Lizeane Fortes ; orientadora, Sonia Elena Palomino Castro, coorientadora, Maria Inez Cardoso Gonçalves, 2021.

90 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Modelagem Matemática. 3. Registros de Representação Semiótica. 4. Sequência Didática. 5. Sistemas Lineares. I. Elena Palomino Castro, Sonia . II. Cardoso Gonçalves, Maria Inez . III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática. IV. Título.

Lizeane Borges Fortes

**ENSINO DE SISTEMAS LINEARES USANDO MODELAGEM
MATEMÁTICA E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM
UMA TURMA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof^a. Dr^a. Elisabete Zardo Búrigo
UFRGS

Prof^a. Dr^a. Maria Inez Cardoso Gonçalves
UFSC

Prof^a. Dr^a. Rosilene Beatriz Machado
UFSC

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática.

Prof^a. Dr^a. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora do Programa

Prof^a. Dr^a. Sonia Elena Palomino Castro
Orientadora

Florianópolis, 25 de março 2021.

AGRADECIMENTOS

À *Prof^a. Dr^a*. Sonia Elena Palomino Castro, por toda dedicação e compreensão durante o desenvolvimento deste trabalho.

À *Prof^a. Dr^a*. Maria Inez Cardoso Gonçalves, não só pelas excelentes aulas ministradas durante o curso, mas por aceitar fazer parte desta importante etapa.

À *Prof^a. Dr^a*. Rosilene Beatriz Machado, pelo apoio e acolhimento.

À *Prof^a. Dr^a*. Elisabete Zardo Búrigo, o exemplo de profissional que sempre busco seguir, e que jamais terei palavras para agradecer.

À minha família, pelo apoio e companheirismo em minhas idas e vindas.

À CAPES, por tornar possível a frequência semanal no curso.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de investigar a contribuição da Modelagem Matemática e dos Registros de Representação Semiótica no ensino-aprendizagem de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Fundamental. Para isso, foi implementada em uma escola da rede pública municipal de Porto Alegre, em caráter experimental, a aplicação de uma sequência didática elaborada integralmente pela autora. Analisando os dados coletados na pesquisa, obtidos por meio das produções e interações dos estudantes mediante as atividades propostas, foi possível concluir que a abordagem da Modelagem Matemática, associada à transversalidade no ensino, contribuiu para o entendimento dos conteúdos matemáticos estudados, melhora da autoestima, desenvolvimento da autonomia, e demais competências elencadas pela BNCC, tais como ética e cidadania, e aspectos relevantes da Educação Ambiental, como a importância do cuidado com o espaço que habitam. Além disso, e considerando o escopo do Ensino Fundamental, nesta dissertação também foram abordados alguns métodos de resolução de Sistemas de Equações Lineares em \mathbb{R}^n .

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Registros de Representação Semiótica. Sequências Didáticas. Sistemas Lineares.

ABSTRACT

This work aims to investigate the contribution of Mathematical Modeling and Registers of Semiotic Representations in the teaching-learning of Linear Systems of equations in Elementary School. For this purpose, it was implemented in a public school from Porto Alegre, on an experimental basis, the application of a didactic sequence drawn up entirely by the author. Analyzing the data collected in the research, obtained by means of the students' productions and interactions through the proposed activities, it was possible to conclude that the Mathematical Modeling approach, associated with transversal teaching, contributed to the understanding of the studied mathematical content, improvement of self-esteem, developing of autonomy, and other skills listed by BNCC, such as ethics and citizenship, and relevant aspects of Environmental Education. For instance, the importance of take care of the space they dwell. In addition, and considering the Elementary School scope, in this work, some methods for solving Linear Systems of equations in \mathbb{R}^n is also addressed.

Keywords: Mathematical Modeling. Registers of Semiotic Representations. Didactic Sequence. Linear Systems.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Atividades Propostas	17
Figura 2	Sistema possível e determinado: retas concorrentes.	34
Figura 3	Sistema impossível: retas paralelas.	34
Figura 4	Sistema possível e indeterminado: retas coincidentes.	35
Figura 5	Desenvolvimento do conteúdo programático.	41
Figura 6	Diagrama representando a transformação de tratamento.	44
Figura 7	Diagrama representando a conversão.	44
Figura 8	Atividade 2 - solução por tentativas.	58
Figura 9	Atividade 2 - solução por sistemas de equações.	59
Figura 10	Atividade 3 - solução testando valores.	60
Figura 11	Atividade 3 - solução com coeficientes proporcionais ao modelo original. ...	60
Figura 12	Atividade 3 - solução por sistema de equações.	61
Figura 13	Atividade 3 - reposta após mediação.	62
Figura 14	Atividade 3 - reposta contextualizada.	62
Figura 15	Atividade 3 - reposta esperada.	62
Figura 16	Atividade 3 - solução considerando apenas os cálculos numéricos.	63
Figura 17	Atividade 4 - solução correta sem a construção do modelo matemático. ...	64
Figura 18	Atividade 4 - solução sem verificação das duas condições apresentadas. ...	65
Figura 19	Atividade 5 - solução esperada.	66
Figura 20	Atividade 5 - solução válida.	67
Figura 21	Atividade 5 - solução sem identificar o valor dos coeficientes.	67
Figura 22	Atividade 5 - solução com modelo incorreto.	68
Figura 23	Atividade 5 - solução com tradução incompreensível.	68

Figura 24	Atividade 6 - anotações identificando os coeficientes durante a leitura.....	72
Figura 25	Atividade 6 - solução sem identificar a grandeza das incógnitas.	72
Figura 26	Atividade 6 - solução com identificação incorreta das incógnitas.....	73
Figura 27	Atividade 6 - solução esperada.	73
Figura 28	Atividade 7 - criação de um problema inédito.....	74
Figura 29	Atividade 7 - resolução utilizando questões do cotidiano.	75
Figura 30	Atividade 7 - resolução utilizando o aprendizado construído na etapa anterior.....	76
Figura 31	Atividade 7 - problema envolvendo quatro incógnitas.....	77
Figura 32	Atividade 7 - resolução sem identificação do objeto de estudo.....	78
Figura 33	Atividade 8 - solução do sistema de equações da atividade 2.....	81
Figura 34	Atividade 9 - visualização gráfica do sistema de equações da atividade 2. .	82
Figura 35	Atividade 9 - visualização gráfica do sistema de equações da atividade 3. .	82
Figura 36	Atividade 9 - visualização gráfica do sistema de equações da atividade 4. .	83
Figura 37	Produção dos estudantes na aula de filosofia.....	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Conversão Congruente e Não Congruente	45
Tabela 2	Extintores apropriados para cada classe de incêndio.....	49
Tabela 3	Pesquisa de preço do extintor AP de 10 litros.	49
Tabela 4	Pesquisa de preço do extintor CO_2 de 4 quilos.....	50
Tabela 5	Pesquisa de preço do extintor PQS-BC de 4 quilos.	50
Tabela 6	Pesquisa de preço do extintor PQS-ABC de 4 quilos.....	50
Tabela 7	Risco Baixo Classe B	53

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
2 SISTEMAS LINEARES	21
2.1 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	22
2.1.1 Eliminação Gaussiana	24
2.1.2 Pivotamento Parcial	27
2.1.3 Pivotamento Total	30
2.1.4 Sistemas de Equações Lineares no Ensino Fundamental	31
2.1.4.1 Método da Adição	31
2.1.4.2 Método da Substituição	32
2.1.5 Sistemas de equações lineares no Ensino Médio	35
2.1.5.1 Regra de Cramer	35
2.1.5.2 Método da Matriz Inversa	36
3 REFERENCIAL TEÓRICO	39
3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA	39
3.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	42
4 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS ELABORADAS NESTE TRABALHO ...	47
4.1 O QUE É A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	47
4.2 ATIVIDADES PROPOSTAS	48
4.2.1 Atividade da Produção Inicial	48
4.2.2 Atividade dos Módulos	51
4.2.3 Atividade da Produção Final	54
5 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	57
5.1 ATIVIDADE 1	57
5.2 ATIVIDADE 2	58
5.3 ATIVIDADES 3 E 4	59
5.3.1 Atividade 3	59
5.3.2 Atividade 4	64
5.4 ATIVIDADES 5, 6 E 7	65
5.4.1 Atividade 5	65
5.4.2 Atividade 6	71
5.4.3 Atividade 7	73
5.5 ATIVIDADES 8 E 9	79
5.5.1 Atividade 8	79

5.5.2 Atividade 9	81
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
REFERÊNCIAS	89

1 INTRODUÇÃO

A principal motivação para o desenvolvimento desta pesquisa em Educação Matemática parte de minhas experiências como docente no ensino e aprendizagem de matemática. Trabalho em uma escola municipal, situada no bairro Restinga de Porto Alegre. A característica principal dessa rede de ensino é que as escolas se encontram em bairros periféricos da cidade, zonas de grande vulnerabilidade social, em que os estudantes convivem com situações de extrema pobreza, violência e falta de incentivo. Somado a isso, acredito que uma das maiores dificuldades que os professores sentem, é a falta de persistência dos alunos ao lidar com os desafios da aprendizagem.

Assim, temos como principal objetivo desta pesquisa, a busca de como superar a dificuldade dos discentes em relação ao equacionamento dos problemas apresentados nas aulas de matemática, onde é comum a solicitação de auxílio por parte dos estudantes, sem que eles tenham previamente realizado tentativas, ou criado estratégias para resolvê-los. Para exemplificar, segue um relato de atendimentos realizados por mim, para auxiliar os educandos a resolverem os dois problemas da Figura 1, numerados por 11 e 12, respectivamente.

Figura 1: Atividades Propostas

11. Observe o cartaz.

SORVETERIA Que Calor	
Picolé	
Simple	R\$ 1,00
Com cobertura	R\$ 2,00

Esta sorveteria vendeu 70 picolés e faturou R\$ 100,00. Quantos picolés com cobertura foram vendidos?

12. Tenho R\$ 29,00 em 13 notas e moedas. São moedas de R\$ 1,00 e cédulas de R\$ 5,00. Quantas notas e moedas tenho?

Fonte: Andrini e Vasconcelos (2015).

Após auxiliar os estudantes a equacionarem o problema 11 utilizando diversos recursos pedagógicos, sendo, entre eles, a construção de tabelas para facilitar a identificação dos coeficientes e incógnitas, a maioria dos alunos que concluíram essa atividade solicitaram novamente minha intervenção para equacionar o problema 12. Em um primeiro momento, informei que era semelhante ao 11, e pedi para que pensassem e me trouxes-

sem alguma produção. Sem sucesso, mesmo os educandos afirmando já terem entendido, expliquei novamente o exercício 11 e, ao final, relacionei de forma vaga as incógnitas e coeficientes das duas tarefas: picolés com e sem cobertura x cédulas e moedas, e faturamento x valor total em reais. Enquanto alguns finalizaram a atividade, outros ainda necessitavam minha atenção, até que relacionei explicitamente cada termo das equações dos dois problemas.

Buscando minimizar essa forte dependência do professor por parte dos alunos, pensamos em elaborar uma sequência didática para o ensino de sistemas de equações lineares tendo a Modelagem Matemática e os Registros de Representação Semiótica como referencial deste trabalho. Porém, antes de iniciar a pesquisa, foi realizada uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES¹ para averiguar com que frequência esse tema já foi abordado. Utilizamos como busca as palavras chave *modelagem* e *semiótica* e aplicamos os seguintes filtros:

- a) Ano: trabalhos a partir de 2012.
- b) Grande Área de Conhecimento:
 - Ciências Exatas e da Terra
 - Multidisciplinar
- c) Área de Conhecimento:
 - Ensino
 - Ensino de Ciências e Matemática
 - Interdisciplinar
 - Matemática
- d) Área de Concentração: todos os itens citando educação, matemática, ensino, docência e aprendizagem.

Dos 597 resultados obtidos, apenas 10 abordaram a Modelagem Matemática associada à teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Além disso, o ensino de sistemas lineares no Ensino Fundamental também não foi explorado. Dos quatro trabalhos encontrados com essa temática, três deles eram voltados para o Ensino Médio, e um, ao Ensino Superior.

A partir da motivação inicial e do resultado da pesquisa no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, o tema desta dissertação foi definido, e, entendendo a questão

¹<https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses>

ambiental como um dos tópicos relevantes que propiciam a Educação Integral - considerando a importância do uso de temas transversais no ensino da matemática - escolhemos a prevenção de incêndio como o assunto a ser abordado na elaboração das atividades, visto que os grandes incêndios florestais² estavam em destaque na mídia no ano de 2019, e despertavam o interesse dos educandos nas discussões em sala de aula.

Com este trabalho, foi possível observar na Modelagem Matemática um meio de proporcionar a aprendizagem dos discentes, permitindo atingir objetivos antes não atingidos. Assim, pretendo em minha prática docente desenvolver sequências didáticas sob tal perspectiva, a fim de, a cada conteúdo estudado, buscar superar as dificuldades apresentadas pelos estudantes. Além disso, apesar de já utilizar a teoria de Raymond Duval ao planejar minhas aulas, tornou-se visível a necessidade de abordar de forma mais efetiva as conversões entre os Registros de Representação do objeto de estudo, bem como a inversão de seus sentidos.

Esta pesquisa está dividida em seis capítulos. Para contextualizar o uso de sistemas de equações lineares, no Capítulo 2 veremos, de forma rápida, alguns métodos de resolução de sistemas de equações lineares em \mathbb{R}^n , visto que este não é o foco principal do trabalho. No Capítulo 3, abordaremos as teorias de Modelagem Matemática e Registros de Representação Semiótica. No Capítulo 4, apresentaremos a estrutura de uma sequência didática, bem como os objetivos das atividades propostas. No Capítulo 5, acompanharemos a aplicação da sequência didática e analisaremos a produção dos alunos. Por fim, no Capítulo 6, trataremos das considerações finais e, logo após, apresentaremos as referências.

²<https://exame.abril.com.br/brasil/inferno-na-floresta-o-que-sabemos-sobre-os-incendios-na-amazonia/>

2 SISTEMAS LINEARES

O trato de resolução de sistemas de equações lineares na escola se dá, no Ensino Fundamental, a partir dos métodos da adição e substituição, aplicados em sistemas de duas equações de 1º grau com duas incógnitas. No Ensino Médio, o estudo se estende para sistemas de equações lineares, na maioria das vezes de ordem três ou quatro, sendo os principais métodos de resolução o escalonamento, matriz inversa, e regra de Cramer. Neste capítulo, vamos fazer uma breve incursão pelos métodos de resolução de sistemas de equações lineares, abrangendo tanto aqueles que dizem respeito às questões tratadas no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio. Além disso, com o intuito de deixar aqui indicada uma referência para o professor com a extensão dos processos de resolução além daqueles estudados na Educação Básica, ampliamos a abordagem para sistemas de equações lineares de ordem n . Para isso, utilizamos como referência Hefez e Fernandez (2016), além de Justo, Sauter, Azevedo, Guidi e Konzen (2016).

Assim, dado m e n inteiros positivos, um sistema de equações lineares é um conjunto de m equações de 1º grau com n incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \ddots + \vdots + \ddots + \vdots = \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = b_k \\ \vdots + \vdots + \ddots + \vdots + \ddots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Onde a_{ij} e b_i , para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são números reais dados, em que a_{ij} são denominados coeficientes do sistema e b_i os termos independentes.

Podemos representar o sistema acima na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_b \quad (2.2)$$

Ou simplesmente

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Onde \mathbf{A} é uma matriz retangular de ordem $m \times n$ denominada matriz dos coeficientes, \mathbf{x} é a matriz coluna das incógnitas, e \mathbf{b} é a matriz coluna dos termos independentes.

Seja

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, 1 \leq i \leq m\},$$

definimos S como o conjunto solução do sistema (2.1)¹.

Um sistema de equações lineares pode ser classificado a partir de suas soluções:

- a) Sistema possível e determinado (SPD): existe uma única solução;
- b) Sistema possível e indeterminado (SPI): existem infinitas soluções;
- c) Sistema impossível (SI): não é possível determinar um conjunto solução.

Na próxima seção utilizaremos a matriz ampliada do sistema, a qual será denotada por $A_a = [A \mid b]$. A matriz A_a é uma matriz $m \times (n + 1)$, cujas n primeiras colunas são as colunas da matriz A , e a última coluna consiste da matriz coluna b . Isto é,

$$A_a = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} & b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

2.1 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Antes de iniciarmos os métodos de resolução de sistemas de equações lineares, vamos definir *operações elementares de matrizes* conforme Hefez e Fernandes (2016):

Seja A uma matriz $m \times n$. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotemos por L_i a i -ésima linha de A . São operações elementares nas linhas da matriz A :

- a) Permutação das linhas L_i e L_j , indicada por $L_i \leftrightarrow L_j$.

¹Embora no sistema proposto a solução seja uma matriz incógnita coluna, é comum abusar da linguagem matemática, apresentando a solução em forma de linhas.

- b) Substituição de uma linha L_i pela adição desta mesma linha com c vezes uma outra linha L_j , indicada por $L_i \rightarrow L_i + cL_j$.
- c) Multiplicação de uma linha L_i por um número real c não nulo, indicada por $L_i \rightarrow cL_i$.

Proposição 2.1. *Toda operação elementar e nas linhas de matrizes $m \times n$ é reversível, no sentido de que existe uma operação elementar e' tal que $e'(e(A)) = A$ e $e(e'(A)) = A$ para toda matriz $A_{m \times n}$.*

Demonstração:

- a) Se e é uma permutação das linhas $L_i \leftrightarrow L_j$, tome $e' = e$.
- b) Se e é uma substituição de linha $L_i \rightarrow L_i + cL_j$, tome $e' = L_i \rightarrow L_i - cL_j$.
- c) Se e é uma multiplicação de linha $L_i \rightarrow cL_i$, tome $e' = \frac{1}{c}L_i$. Lembrando que $c \neq 0$.

Além disso, sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$, **definimos que A é equivalente por linhas à matriz B , se B pode ser obtida de A pela aplicação sucessiva de um número finito de operações elementares sobre linhas.** Pela proposição anterior, B também é equivalente por linhas a A . Dizemos, então, que A e B são matrizes equivalentes.

Proposição 2.2. *Dado o sistema linear 2.2 e $A_a = [A \mid b]$; $\tilde{A}_a = [\tilde{A} \mid \tilde{b}]$, onde \tilde{A} e \tilde{b} são matrizes equivalentes pelas mesmas operações elementares às matrizes A e b , respectivamente. Então A_a e \tilde{A}_a são equivalentes.*

Demonstração:

Denotemos por e ao conjunto de operações² elementares que transformam A em \tilde{A} , isto é, $e(A) = \tilde{A}$. Similarmente, $e(b) = \tilde{b}$ transforma a matriz de termos independentes com o mesmo conjunto de operações elementares.

Para A_a e \tilde{A}_a serem matrizes equivalentes, devemos provar que $e(A_a) = \tilde{A}_a$.

$$e(A_a) = e([A \mid b]) = [e(A) \mid e(b)] = [\tilde{A} \mid \tilde{b}] = \tilde{A}_a.$$

E assim provamos o enunciado.

Definição 2.1. *Dois sistemas $Ax = b$ e $A'x = b'$ são ditos equivalentes se as matrizes aumentadas respectivas são equivalentes. Dessa forma, sistemas equivalentes possuem a mesma solução.*

²Não importa o número de operações elementares executadas, nem se \tilde{A} ou \tilde{A}_a são matrizes triangulares ou quase triangulares.

2.1.1 Eliminação Gaussiana

Esse método de resolução, também conhecido como escalonamento, consiste em aplicar operações elementares, transformando a matriz aumentada do sistema em uma matriz triangular superior³, onde a solução pode ser facilmente obtida.

Vejamos agora um algoritmo para o escalonamento da matriz aumentada A_a :

Passo 1. Seja k_1 a primeira coluna da matriz aumentada com algum elemento não nulo.

Troque as linhas de modo que na nova matriz $a_{1k_1} \neq 0$.

Passo 2. Para cada $i > 1$, realize a operação

$$L_i \rightarrow L_i - \frac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}}L_1.$$

Passo 3. Repita os passos 1 e 2 na matriz assim obtida, ignorando a primeira linha. Novamente, repita os passos 1 e 2 nessa nova matriz, ignorando as duas primeiras linhas, e assim sucessivamente, até alcançar a última linha não nula.

Exercício 2.1. *Determine o conjunto solução do sistema*

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -15 \\ 2x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = -24 \end{cases}.$$

Solução:

Reescrevendo o sistema na forma de matriz aumentada obtemos:

$$A_a = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & -4 & 8 \\ -1 & 4 & 2 & 5 & -15 \\ 2 & -3 & 9 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 & -24 \end{array} \right].$$

Passo 1. Verificamos que o elemento $a_{11} \neq 0$, passamos ao passo 2.

Passo 2. Realizaremos as seguintes operações elementares

$$L_2 \rightarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}L_1, \quad L_3 \rightarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}L_1 \quad \text{e} \quad L_4 \rightarrow L_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}}L_1,$$

³Uma matriz triangular superior de ordem n é uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ tal que $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & -4 & 8 \\ -1 & 4 & 2 & 5 & -15 \\ 2 & -3 & 9 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 & -24 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 + \frac{1}{5}L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - \frac{2}{5}L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 + \frac{3}{5}L_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} & \frac{21}{5} & -\frac{67}{5} \\ 0 & -\frac{19}{5} & \frac{43}{5} & \frac{23}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{28}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{96}{5} \end{array} \right]$$

Passo 3. Ignorando a primeira linha, vamos repetir os passos 1 e 2 nessa nova matriz.

Ou seja, após verificar que $a_{22} \neq 0$, realizaremos as operações elementares:

$$L_3 \rightarrow L_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}}L_2 \text{ e } L_4 \rightarrow L_4 - \frac{a_{42}}{a_{22}}L_2,$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} & \frac{21}{5} & -\frac{67}{5} \\ 0 & -\frac{19}{5} & \frac{43}{5} & \frac{23}{5} & -\frac{6}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & \frac{28}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{96}{5} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 + \frac{19}{22}L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - \frac{1}{2}L_2 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} & \frac{21}{5} & -\frac{67}{5} \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & \frac{181}{22} & -\frac{281}{22} \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{25}{2} \end{array} \right]$$

Passo 4. Ignorando as duas primeiras linhas, vamos repetir os passos 1 e 2. Ou seja, após verificar que $a_{33} \neq 0$, realizaremos a operação elementar:

$$L_4 \rightarrow L_4 - \frac{a_{43}}{a_{33}}L_3,$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} & \frac{21}{5} & -\frac{67}{5} \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & \frac{181}{22} & -\frac{281}{22} \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{25}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - \frac{3}{7}L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & \frac{22}{5} & \frac{11}{5} & \frac{21}{5} & -\frac{67}{5} \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & \frac{181}{22} & -\frac{281}{22} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{541}{77} & -\frac{541}{77} \end{array} \right]$$

Deste modo, obtemos uma matriz na forma triangular superior, e podemos calcular mais facilmente o conjunto solução do sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 & = & 8 \\ \frac{22}{5}x_2 + \frac{11}{5}x_3 + \frac{21}{5}x_4 & = & -\frac{67}{5} \\ \frac{21}{2}x_3 + \frac{181}{22}x_4 & = & -\frac{281}{22} \\ -\frac{541}{77}x_4 & = & -\frac{541}{77} \end{array} \right.$$

$$x_4 = 1$$

$$\frac{21}{2}x_3 = -\frac{281}{22} - \frac{181}{22} \cdot 1 \Rightarrow x_3 = -\frac{462}{231} = -2$$

$$\frac{22}{5}x_2 = -\frac{67}{5} - \frac{11}{5} \cdot (-2) - \frac{21}{5} \cdot 1 \Rightarrow x_2 = -\frac{66}{22} = -3$$

$$5x_1 = 8 - 2 \cdot (-3) - (-2) + 4 \cdot 1 \Rightarrow x_1 = \frac{20}{5} = 4$$

Assim, o conjunto solução do sistema originalmente dado é $S = \{(4, -3, -2, 1)\}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{array} \right].$$

Como na matriz escalonada obtivemos $a_{41} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0$ e $b_4 \neq 0$, então o sistema não tem solução.

b) Vamos escalonar a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 4 & 8 & -6 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 5L_1}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - 2L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Calculando o conjunto solução:

$$x_3 = 1 + 2x_4.$$

$$8x_2 = -4 - 2(1 + 2x_4) - 11x_4 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{4} - \frac{15}{8}x_4.$$

$$x_1 = 2 - 2\left(-\frac{3}{4} - \frac{15}{8}x_4\right) \Rightarrow x_1 = \frac{11}{2} + \frac{31}{4}x_4.$$

Portanto, as soluções do sistema são os elementos do conjunto

$$S = \left\{ \left(\frac{11}{2} + \frac{31}{4}x_4, -\frac{3}{4} - \frac{15}{8}x_4, 1 + 2x_4, x_4 \right); x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Note que, ao programar o algoritmo da eliminação gaussiana utilizando recursos computacionais, tal processo gera acúmulos de arredondamentos. Assim, veremos a seguir, duas formas de minimizar os erros de arredondamento durante o escalonamento.

2.1.2 Pivotamento Parcial

O processo de pivotamento parcial⁵ consiste em, seguindo o algoritmo descrito anteriormente, no início de cada passo k das eliminações, escolher para a_{kk} o elemento de maior módulo entre os coeficientes a_{ik} , $i = k, k + 1, \dots, n$ e trocar as linhas k e i se

⁵A partir daqui levamos em consideração sistemas lineares com $m=n$.

necessário. Assim, em cada passo, escolheremos o maior elemento da coluna k para pivô. Vejamos como exercício, um exemplo de Peters e Szeremeta (2018).

Exercício 2.3. *Resolva o sistema de equações lineares usando pivotamento parcial.*

$$\begin{cases} 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 = 1 \\ 0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 = 0 \\ -0.319x_1 + 0.884x_2 + 0.279x_3 = 0 \end{cases} .$$

Solução:

Escrevendo na forma de matriz aumentada obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.448 & 0.832 & 0.193 & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & 0 \\ -0.319 & 0.884 & 0.279 & 0 \end{array} \right] .$$

Observe que $a_{11} = 0.448$ já é o maior coeficiente da coluna. Assim, vamos aplicar as operações: $L_2 \rightarrow L_2 - 0.9397L_1$ e $L_3 \rightarrow L_3 + 0.7121L_1$, obtendo como resultado a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.448 & 0.832 & 0.193 & 1 \\ 0 & 0.00217 & -0.3884 & -0.9397 \\ 0 & 1.476 & 0.4164 & 0.7121 \end{array} \right] .$$

Ignorando a primeira linha e analisando a segunda coluna, constatamos que $a_{32} > a_{22}$. Assim, vamos realizar a operação $L_2 \leftrightarrow L_3$, obtendo a nova matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.448 & 0.832 & 0.193 & 1 \\ 0 & 1.476 & 0.4164 & 0.7121 \\ 0 & 0.00217 & -0.3884 & -0.9397 \end{array} \right] .$$

Aplicando a operação $L_3 \rightarrow L_3 - 0.00147L_2$ obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.448 & 0.832 & 0.193 & 1 \\ 0 & 1.476 & 0.4164 & 0.7121 \\ 0 & 0 & -0.389 & -0.9407 \end{array} \right] .$$

Realizando as substituições encontramos o conjunto solução

$$S = \{(1.561, -0.1997, 2.418)\}.$$

Vamos verificar se a solução encontrada é exata, substituindo os valores de x_1 , x_2 e x_3 nas

equações:

$$\begin{aligned} 0.448x_1 + 0.832x_2 + 0.193x_3 - 1 &= 0 \\ 0.421x_1 + 0.784x_2 - 0.207x_3 - 0 &= 0 . \\ -0.319x_1 + 0.884x_2 + 0.279x_3 - 0 &= 0 \end{aligned}$$

Perceba que, caso a solução seja exata, devemos encontrar o resultado nulo. Caso contrário, o processo teve acúmulos de arredondamentos, e a diferença encontrada é denominada *resíduo*. Assim, vamos calcular o resíduo gerado nas três equações do sistema:

$$\begin{aligned} R_1 &= | 0.448 \times 1.561 - 0.832 \times 0.1997 + 0.193 \times 2.418 - 1 | = 0.0001484 \\ R_2 &= | 0.421 \times 1.561 - 0.784 \times 0.1997 - 0.207 \times 2.418 - 0 | = 0.0000902 . \\ R_3 &= | -0.319 \times 1.561 - 0.884 \times 0.1997 + 0.279 \times 2.418 - 0 | = 0.001282 \end{aligned}$$

A modo de comparação, resolveremos o mesmo exercício sem pivotamento:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 0.448 & 0.832 & 0.193 & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & 0 \\ -0.319 & 0.884 & 0.279 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 0.9397L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 0.7121L_1 \end{array}} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 0.448 & 0.832 & 0.193 & 1 \\ 0 & 0.00217 & -0.3884 & -0.9397 \\ 0 & 1.476 & 0.4164 & 0.7121 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 680.2L_2} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 0.448 & 0.832 & 0.193 & 1 \\ 0 & 0.00217 & -0.3884 & -0.9397 \\ 0 & 0 & 264.6 & 639.9 \end{array} \right] . \end{aligned}$$

Calculando o conjunto solução, obtemos

$$S = \{(1.66, -0.2529, 2.418)\}.$$

Vamos calcular o resíduo de cada uma de suas equações:

$$\begin{aligned} R_1 &= | 0.448 \times 1.66 - 0.832 \times 0.2529 + 0.193 \times 2.418 - 1 | = 0.0000588 \\ R_2 &= | 0.421 \times 1.66 - 0.784 \times 0.2529 - 0.207 \times 2.418 - 0 | = 0.0000604 . \\ R_3 &= | -0.319 \times 1.66 - 0.884 \times 0.2529 + 0.279 \times 2.418 - 0 | = 0.07848 \end{aligned}$$

Note que em R_3 encontramos um resíduo significativo quando comparado à precisão adotada na resolução do sistema, maior do que o obtido ao solucionar o sistema de equações com pivotamento parcial.

Apesar de também ser possível calcular o erro da solução encontrada, não sendo

este o foco dessa pesquisa, seguiremos nossa comparação apenas pelo resíduo.

2.1.3 Pivotamento Total

No pivotamento total, a cada etapa do processo, procuramos o maior elemento, em módulo, da matriz. Após, realizamos tanto a troca de linhas quanto de colunas. Importante observar que ao trocar as colunas, estamos trocando a ordem das incógnitas do sistema. Assim, é necessário se ater a esse fato ao calcular o conjunto solução.

Vamos retomar, como exemplo, o sistema original:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.448 & 0.832 & 0.193 & 1 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & 0 \\ -0.319 & 0.884 & 0.279 & 0 \end{array} \right].$$

Observe que a_{32} é o maior elemento da matriz. Assim, primeiramente vamos realizar a operação $L_3 \leftrightarrow L_1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -0.319 & 0.884 & 0.279 & 0 \\ 0.421 & 0.784 & -0.207 & 0 \\ \underbrace{0.448}_{x_1} & \underbrace{0.832}_{x_2} & \underbrace{0.193}_{x_3} & 1 \end{array} \right].$$

Após, vamos trocar as duas primeiras colunas, trocando também a ordem das incógnitas do sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.884 & -0.319 & 0.279 & 0 \\ 0.784 & 0.421 & -0.207 & 0 \\ \underbrace{0.832}_{x_2} & \underbrace{0.448}_{x_1} & \underbrace{0.193}_{x_3} & 1 \end{array} \right].$$

Aplicando as operações $L_2 \rightarrow L_2 - 0.8869L_1$ e $L_3 \rightarrow L_3 - 0.9412L_1$ obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.884 & -0.319 & 0.279 & 0 \\ 0 & 0.7039 & -0.4544 & 0 \\ 0 & 0.7482 & -0.06959 & 1 \end{array} \right].$$

Voltamos ao passo 1, em que ignoramos a primeira linha, e procuramos o maior elemento da matriz restante, a saber, a_{32} . Logo, basta efetuar a troca de linhas: $L_3 \leftrightarrow L_2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.884 & -0.319 & 0.279 & 0 \\ 0 & 0.7482 & -0.06959 & 1 \\ 0 & 0.7039 & -0.4544 & 0 \end{array} \right].$$

Aplicando a operação $L_3 \rightarrow L_3 - 0.9408L_2$ finalizamos o processo de triangulização:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0.884 & -0.319 & 0.279 & 0 \\ 0 & 0.7482 & -0.06959 & 1 \\ 0 & 0 & -0.3889 & -0.9408 \end{array} \right].$$

Vamos escrever o sistema de equações equivalentes, observando a nova ordem das incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.884x_2 - 0.319x_1 + 0.279x_3 = 0 \\ 0.7482x_1 - 0.06959x_3 = 1 \\ -0.3889x_3 = -0.9408 \end{array} \right. .$$

Resolvendo as equações e realizando as substituições, obtemos:

$$x_3 = \frac{-0.9408}{-0.3889} = 2.419$$

$$0.7482x_1 = 1 + 0.06959 \times 2.419 \Rightarrow x_1 = 1.562$$

$$0.884x_2 = 0 + 0.319 \times 1.562 - 0.279 \times 2.419 \Rightarrow x_2 = -0.1998$$

Logo, o conjunto solução do sistema é $S = \{(1.562, -0.1998, 2.419)\}$. Calculando os resíduos de cada equação obtemos:

$$R_1 = | 0.448 \times 1.562 - 0.832 \times 0.1998 + 0.193 \times 2.419 - 1 | = 0.0004094$$

$$R_2 = | 0.421 \times 1.562 - 0.784 \times 0.1998 - 0.207 \times 2.419 - 0 | = 0.0002258 .$$

$$R_3 = | -0.319 \times 1.562 - 0.884 \times 0.1998 + 0.279 \times 2.419 - 0 | = 0.0000002$$

Percebemos, então, que o pivotamento total foi a forma que produziu resíduos menores, condizentes com a precisão dos arredondamentos efetuados durante a resolução do sistema.

2.1.4 Sistemas de Equações Lineares no Ensino Fundamental

Para essa seção, utilizamos como referencial Andrini e Vasconcelos (2015).

2.1.4.1 Método da Adição

Esse método consiste em aplicar operações elementares sobre as equações do sistema, até obter coeficientes opostos em pelo menos uma das incógnitas presente nas equações. Assim, ao adicioná-las, caso o sistema seja possível e determinado, obteremos uma nova equação com apenas uma incógnita. Vamos resgatar, como exemplo, um dos exercícios citados na introdução deste trabalho.

Exercício 2.4. *Tenho R\$ 29,00 em 13 notas e moedas. São moedas de R\$ 1,00 e cédulas de R\$ 5,00. Quantas notas e moedas tenho?*

Solução:

Primeiro, vamos anotar os dados do exercício:

Quantidade de notas de R\$ 5,00 = x

Quantidade de moedas de R\$ 1,00 = y

Total de notas e moedas = 13

Total de reais = R\$ 29,00

Assim, equacionamos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 13 & (1) \\ 5x + y = 29 & (2) \end{cases}.$$

Para obter coeficientes opostos na incógnita y , basta multiplicar uma das equações por -1 . Multiplicando pela equação (1), obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} -x - y = -13 & (3) \\ 5x + y = 29 & (4) \end{cases}.$$

Adicionando as equações (3) e (4) obtemos

$$4x = 16 \Rightarrow x = 4.$$

Substituindo o valor encontrado na equação (1) obtemos

$$4 + y = 13 \Rightarrow y = 9.$$

Logo, o conjunto solução do sistema linear é $S = \{(4, 9)\}$ e a resposta do exercício é que tenho quatro notas de R\$ 5,00 e nove moedas de R\$ 1,00.

2.1.4.2 Método da Substituição

Esse método consiste em isolar uma das incógnitas em uma equação, substituindo-a na outra equação.

Exercício 2.5. *Determine o conjunto solução do sistema*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -8 & (1) \\ -3x_1 + 6x_2 = 4 & (2) \end{cases}.$$

Solução:

Vamos isolar x_1 da equação (1) e substituir na equação (2). Assim:

$$x_1 = -8 + 2x_2$$

e substituindo na equação (2) vamos obter que

$$-3(-8 + 2x_2) + 6x_2 = 4$$

$$24 - 6x_2 + 6x_2 = 4$$

$$24 = 4.$$

O que é uma contradição. Logo, o sistema é impossível, ou seja, não possui conjunto solução.

Exercício 2.6. *Determine o conjunto solução do sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = -10 \\ -x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}.$$

Solução:

Utilizando o método da adição, vamos multiplicar a segunda equação por 2, obtendo o sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = -10 \\ -2x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}.$$

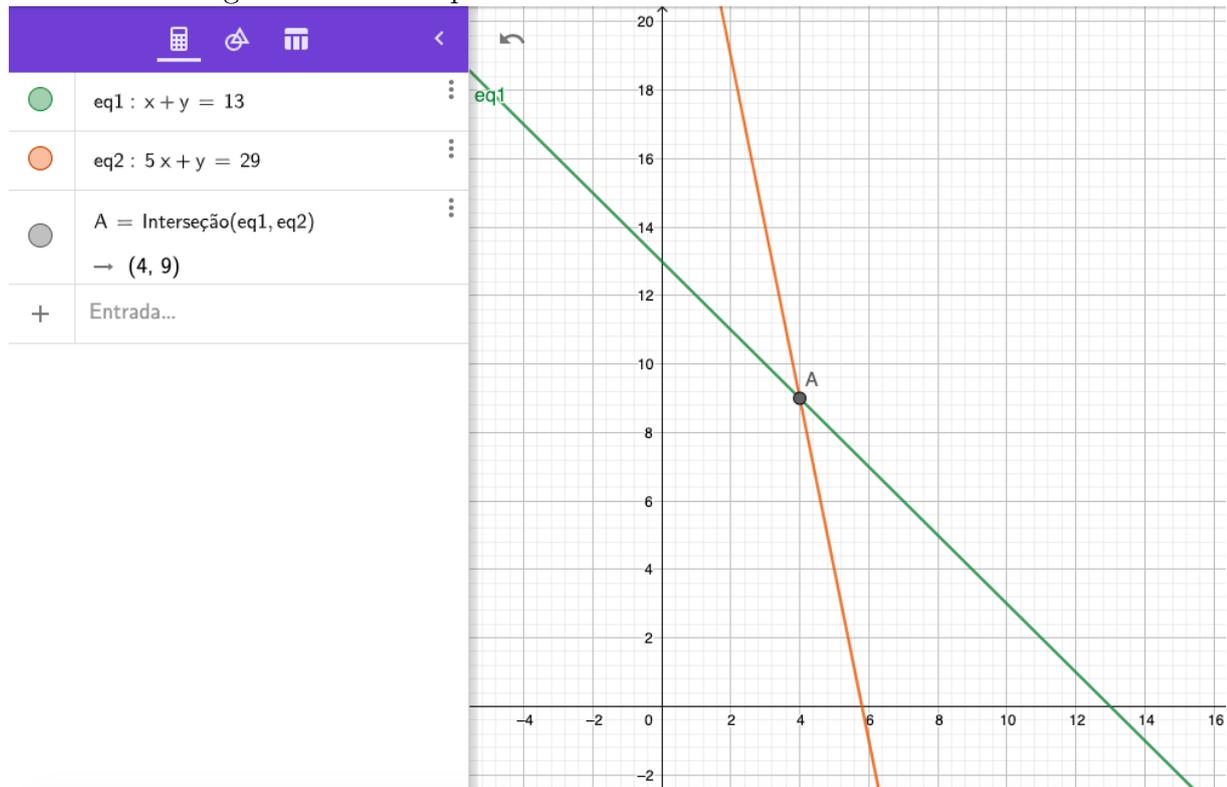
Adicionando as duas equações, obtemos

$$0x_1 + 0x_2 = 0.$$

Note que essa equação será sempre verdadeira, e, portanto, o sistema tem infinitas soluções.

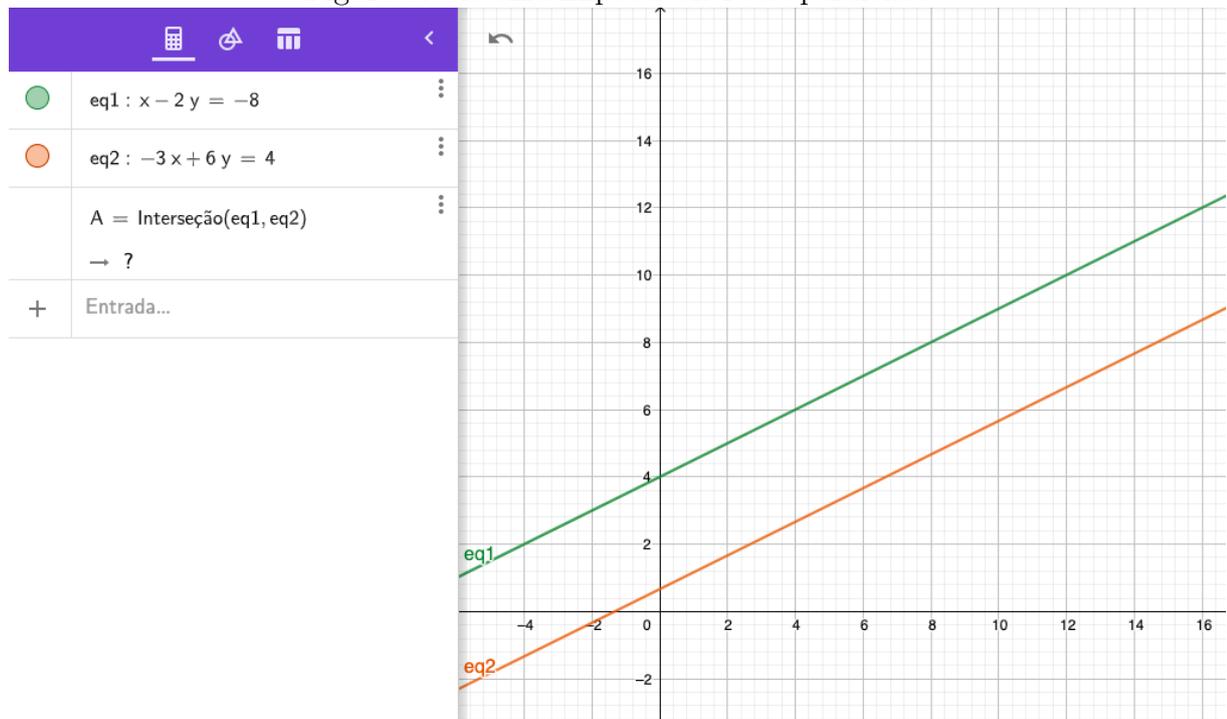
Vejam agora a representação gráfica dos sistemas de equações lineares dos exercícios 2.4, 2.5 e 2.6, nas Figuras 2, 3 e 4, respectivamente.

Figura 2: Sistema possível e determinado: retas concorrentes.



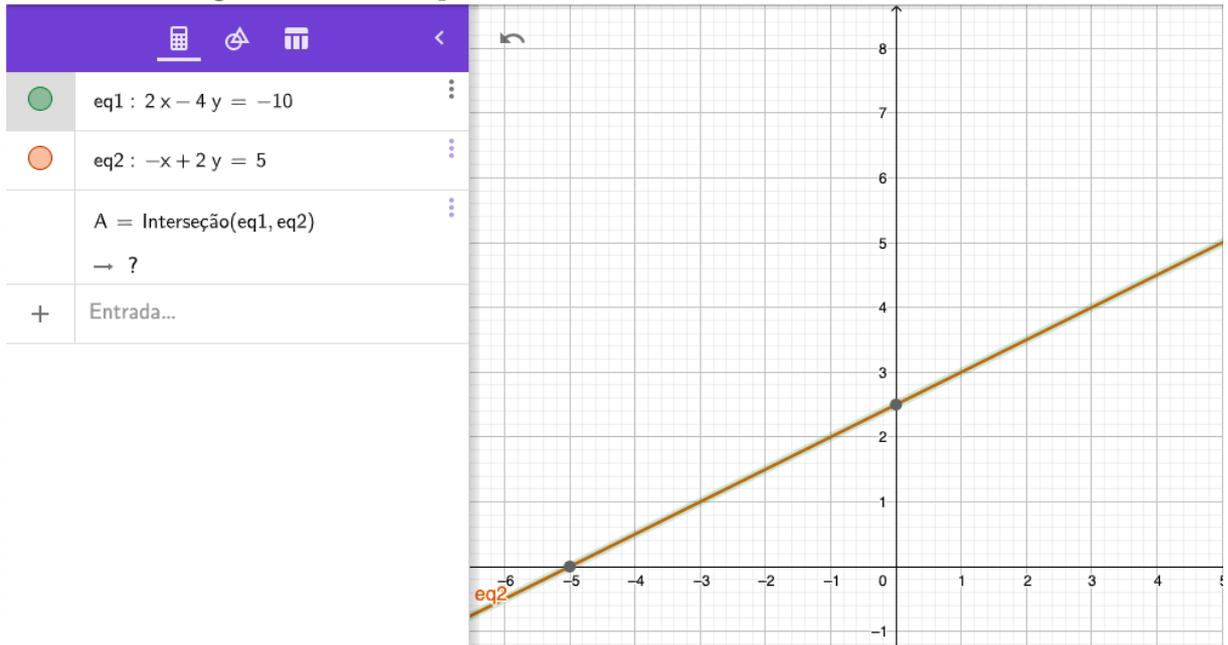
Fonte: <http://www.geogebra.org/graphing>

Figura 3: Sistema impossível: retas paralelas.



Fonte: <http://www.geogebra.org/graphing>

Figura 4: Sistema possível e indeterminado: retas coincidentes.



Fonte: <http://www.geogebra.org/graphing>

2.1.5 Sistemas de equações lineares no Ensino Médio

Para essa seção, utilizamos como referencial Filho e Fevorini (1985).

2.1.5.1 Regra de Cramer

Seja $Ax = b$ um sistema linear onde A é uma matriz quadrada de ordem n denominada matriz dos coeficientes. Denotemos por D o determinante da matriz A , e por D_j o determinante da matriz A cuja coluna j foi substituída pela matriz coluna dos termos independentes b . Se $D \neq 0$, podemos calcular o conjunto solução desse sistema, onde

$$x_j = \frac{D_j}{D}.$$

Exercício 2.7. Utilizando a Regra de Cramer, determine o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 12 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}.$$

Solução:

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a matriz dos coeficientes. Denotamos por D o determinante dessa matriz. Considere

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 12 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a matriz obtida ao substituir a coluna da incógnita x_1 pela coluna dos termos independentes. Denotamos por D_1 o determinante dessa matriz.

Similarmente, obtemos

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 12 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 12 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

sendo D_2 e D_3 o determinantes das matrizes A_2 e A_3 , respectivamente. Assim:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \text{ e } x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

Calculando D, D_1, D_2 e D_3 , obtemos $D = 66, D_1 = 0, D_2 = 132$, e $D_3 = -264$.

Logo, $x_1 = \frac{0}{66} = 0$.

$$x_2 = \frac{132}{66} = 2.$$

$$x_3 = \frac{-264}{66} = -4.$$

E o conjunto solução do sistema é $S = \{(0, 2, -4)\}$.

2.1.5.2 Método da Matriz Inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n invertível, A^{-1} a matriz inversa de A , e I a matriz identidade⁶ de mesma ordem de A . Então:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Seja $Ax = b$ um sistema linear onde A é uma matriz invertível. Então,

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow Ix = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b.$$

⁶Matriz identidade é a matriz quadrada cujos termos $a_{ij} = 1$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Logo, podemos calcular a matriz coluna das incógnitas encontrando a matriz inversa de A . Para isso, vamos utilizar operações elementares, a fim de transformar a matriz A na matriz identidade. Ou seja, vamos aplicar as operações elementares na matriz estendida

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

e assim obteremos A^{-1} .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 5L_1 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -18 & -12 & 5 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 9L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 33 & -13 & -9 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + \frac{2}{33}L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - \frac{5}{33}L_3 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & \frac{7}{33} & -\frac{6}{11} & -\frac{2}{33} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{33} & \frac{4}{11} & \frac{5}{33} \\ 0 & 0 & 33 & -13 & -9 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + \frac{3}{2}L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{33} & \frac{4}{11} & \frac{5}{33} \\ 0 & 0 & 33 & -13 & -9 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{33}L_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{66} & \frac{2}{11} & \frac{5}{66} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{33} & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{33} \end{array} \right].$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{66} & \frac{2}{11} & \frac{5}{66} \\ -\frac{13}{33} & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{33} \end{bmatrix}.$$

A seguir, utilizaremos o sistema de equações lineares do exercício 2.7 para determinar o seu conjunto solução por meio da matriz inversa.

Exercício 2.8. *Determine o conjunto solução do sistema*

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 12 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} .$$

Solução:

Vamos utilizar a representação matricial do sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix} .$$

Logo, para encontrar a matriz coluna das incógnitas, resolvemos a multiplicação:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{66} & \frac{2}{11} & \frac{5}{66} \\ -\frac{13}{33} & -\frac{3}{11} & -\frac{1}{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{33} + \frac{24}{11} - \frac{5}{33} \\ -\frac{26}{33} - \frac{36}{11} + \frac{2}{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} .$$

Logo, conforme visto anteriormente na resolução pela regra de Cramer, o conjunto solução do sistema é $S = \{(0, 2, -4)\}$.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

A sequência didática elaborada nesta pesquisa foi norteadada pelas teorias de Modelagem Matemática e Registros de Representação Semiótica. Portanto, ao longo deste capítulo, veremos um resumo de cada uma delas. Porém, um conteúdo mais amplo pode ser desenvolvido ao abordar essas teorias separadamente.

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática consiste em representar matematicamente situações problema do cotidiano, onde o modelo matemático é definido como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão, ou modelo de situação real” (BIEMBENGUT; HEIN, 2018). Nesse sentido, ela é utilizada tanto como um método científico de pesquisa – Matemática Aplicada – quanto como estratégia de ensino-aprendizagem. Para diferenciar tais perspectivas, alguns autores designam a Modelagem Matemática no ensino como Modelação Matemática, ou, simplesmente, Modelagem.

Permitindo a interação entre o mundo real e a matemática escolar, a Modelagem propicia um “aprender matemática” problematizando contextos sociais, culturais e políticos, possibilitando a abordagem de questões tão importantes quanto a própria matemática para o desenvolvimento do cidadão pleno.

Quando trabalhamos não só com problemas matemáticos, mas com Modelagem, em que o aluno é o sujeito do processo cognitivo, esse, com certeza, vai poder enxergar além (...) poderá ver como esse conteúdo matemático é importante nos processos decisórios em sociedade (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011).

Bassanezi (2002), enumera argumentos do porquê utilizar a Modelagem no ensino. Desses, destacamos o que consideramos ser os principais:

- Argumento formativo – enfatiza aplicações matemáticas, a performance da modelagem matemática e a resolução de problemas como processos para desenvolver capacidade em geral e atitudes dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.
- Argumento de competência crítica – focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.

- Argumento de utilidade – enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.
- Argumento de aprendizagem – garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática.

Uma das características da Modelagem na perspectiva da Educação Matemática é o estudante como sujeito do processo cognitivo. Assim, podemos também pensar na Modelagem como uma motivação na aprendizagem, visto que o papel de protagonista pode trazer ao discente a melhora em sua autoestima, um maior envolvimento nas atividades propostas, e o desenvolvimento de sua autonomia. “O que precisamos fazer é habilitar os alunos a aprender e a ter confiança em si próprios de que conseguirão fazê-lo. Aprender a formular e resolver uma situação, e com base nela fazer uma leitura crítica da realidade.” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011)

Para implementar a Modelagem, Biembengut e Hein (2018) sugerem a realização de um diagnóstico sobre os alunos: sua realidade socioeconômica, tempo disponível para se dedicarem a trabalhos extraclasse, e conhecimento matemático prévio. Após esse levantamento, o professor poderá planejar suas aulas considerando também o número de estudantes – para a organização do trabalho em grupos – bem como o turno da disciplina, o qual interfere diretamente na dinâmica da aula, principalmente ao considerarmos o turno noturno. A seguir, é realizada a escolha do tema. Nesse momento, deve-se ter o cuidado de, “ao optar por um tema único para o período letivo, este deve ser abrangente o suficiente para desenvolver o conteúdo programático e ao mesmo tempo ser interessante para não abalar o estado motivacional dos alunos” (BIEMBENGUT; HEIN, 2018).

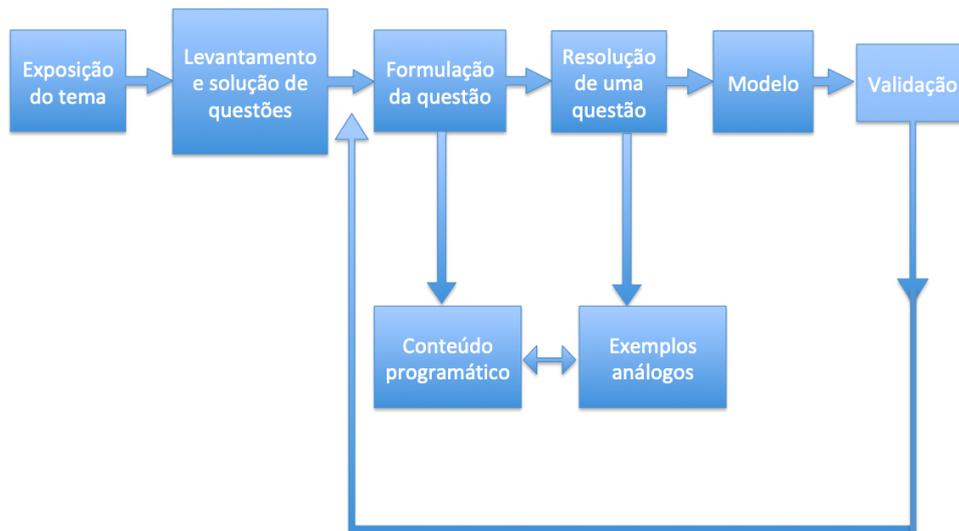
Para o desenvolvimento do conteúdo programático, deve-se seguir as seguintes etapas:

- Interação – reconhecimento da situação problema e familiarização. Fase em que é feita a exposição do tema e levantamento de questões, com o objetivo de incentivar os estudantes a participar da atividade.
- Matematização – formulação e resolução do problema; dada uma questão ou problema, esse é o momento de descontração e criatividade, o qual levará os educandos a proporem respostas. Nessa fase também poderão ocorrer pesquisas, bem como o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), ampliando as possibilidades de experimentação e investigação. Uma vez que o conteúdo foi desenvolvido e a questão solucionada, pode-se propor exemplos análogos com o objetivo de suprir possíveis lacunas quanto ao entendimento do conteúdo.

- Modelo Matemático – interpretação e validação. O modelo matemático permitirá a resolução do problema inicial, bem como de tantos outros similares. Na validação, os alunos devem analisar o resultado obtido, reconhecendo o modelo em diferentes situações, percebendo a importância de sua construção.

A Figura 5 ilustra as etapas do desenvolvimento do conteúdo descritas acima:

Figura 5: Desenvolvimento do conteúdo programático.



Fonte: Biembengut e Hein (2018).

Além do uso das TICs, consideramos que a abordagem de alguns temas possibilitam o trabalho com a Modelagem numa perspectiva da Educação Integral, que, segundo a BNCC¹ (2018), se refere “à construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea”. Sendo a Educação Ambiental um dos temas que traz inúmeras questões referentes aos desafios da sociedade atual, entendemos que a Modelagem sob essa perspectiva é outro elemento importante a ser considerado ao elaborar uma sequência didática.

A Educação Ambiental se inicia com o reconhecimento de que o cotidiano e as relações com o meio estão sempre presentes na sala de aula e na escola. (...) Nas relações sociedade-aluno, escola-aluno, professor-aluno se fazem presentes os poderes políticos de uns e de outros, as suas competências, suas paixões e compromissos, sua sobrevivência (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011).

Portanto, propiciar o espaço de discussão de temas transversais é imprescindível para que valores tão necessários para Educação Integral - cidadania, compromisso ético,

¹Base Nacional Comum Curricular

visão crítica - não sejam excluídos do processo de aprendizagem. Assim, podemos dizer que a Modelagem e a Educação Ambiental atingem esse objetivo, promovendo o desenvolvimento pessoal e social dos educandos, “por meio da consolidação e construção de conhecimentos, representações e valores que incidirão sobre seus processos de tomada de decisão ao longo da vida.” (BRASIL, 2018).

Existem diversas perspectivas sobre a Modelagem. Algumas delas consideram essencial que a situação problema seja trazida pelo aluno, aproximando-a da Etnomatemática². Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) ponderam que a principal diferença entre essas perspectivas é como é realizada a escolha do problema a ser investigado – partindo do professor, de um acordo entre o professor e os alunos, ou apenas dos estudantes. Porém, entre todos esses pontos de vista há um objetivo comum: estudar, resolver e compreender um problema da realidade, utilizando não só a matemática, mas outras disciplinas e ideias. Destacamos, então, mais uma vantagem desse método de ensino: promover a interdisciplinaridade.

Embora a experiência de Modelagem, como um todo, possa ser pensada de forma mais aberta, no sentido de não sabermos que matemáticas serão mobilizadas durante o processo, nesta pesquisa não houve esse objetivo. Devido a intenção do estudo de sistemas de equações lineares, elementos da Modelagem foram utilizados ao elaborar os problemas propostos, onde todos os dados apresentados foram obtidos nos veículos de comunicação, ou por meio de consulta a órgãos competentes.

3.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Raymond Duval ingressou, em 1970, no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática - IREM de Estrasburgo, França. Desde então desenvolveu importantes estudos relativos à Psicologia Cognitiva, e, a partir de 1986, dedicou-se à linha de pesquisa que culminou, em 1995, na obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* - primeira apresentação sistematizada de sua teoria.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica³ tem contribuído no estudo da complexidade da aprendizagem de matemática, e propõe métodos para a abordagem dos conteúdos a serem trabalhados na matemática escolar. Segundo Duval (2008), “há uma

²A Etnomatemática é um campo da Educação Matemática que surgiu na década de 70, a partir de estudos de Ubiratan D’Ambrósio. Segundo o autor, a Etnomatemática lida com os “[...] processos de geração, organização e transmissão de conhecimento em diversos sistemas culturais e as forças interativas que agem entre os três processos” (1990).

³Segundo Colombo, Flores e Moretti (2008), a noção dos Registros de Representação Semiótica chegou no Brasil no início da década de 1990. Na segunda metade desta, as primeiras pesquisas utilizando esse referencial teórico começaram a ser publicadas.

pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para compreensão em matemática”. Porém, mesmo após esses diferentes registros serem bastante utilizados no processo de ensino,

A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não tem nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos estudantes. (DUVAL, 2009)

Assim, não basta abordar as diferentes representações de um objeto de estudo. É preciso elaborar uma sequência didática que inclua tarefas de reconhecimento desses diversos registros, bem como explore muitas formas de coordenação entre eles. Desse modo evitamos que a compreensão do conteúdo por parte dos alunos fique limitada à forma de representação utilizada.

Os Registros de Representação Semiótica são classificados em duas categorias, subdivididas em outras duas, resultando em quatro diferentes sistemas:

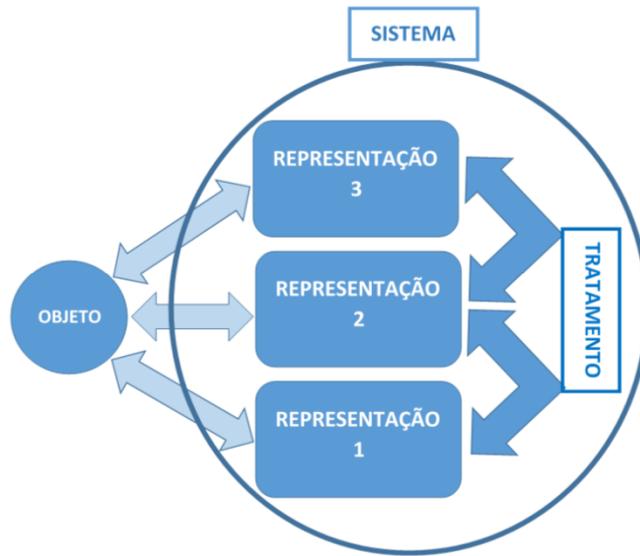
- **Registros Multifuncionais:** as transformações não são algoritmizáveis.
 - *Representação discursiva:* língua natural.
 - *Representação não discursiva:* figuras geométricas planas ou em perspectivas.
- **Registros Monofuncionais:** as transformações são principalmente algoritmos.
 - *Representação discursiva:* sistema de escritas (numéricas, algébricas, simbólicas).
 - *Representação não discursiva:* gráficos cartesianos.

As transformações entre as representações de um objeto matemático podem ser denominadas de tratamentos ou conversões.

Um tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação. A conversão é, ao contrário, uma transformação que faz passar de um registro a outro. Ela requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua. (DUVAL, 2009)

O diagrama da Figura 6 ilustra as transformações dentro do mesmo sistema de registros.

Figura 6: Diagrama representando a transformação de tratamento.



Fonte: Silva (2017).

Portanto, podemos citar como exemplo de transformações de tratamento, as seguintes equivalências:

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25 = 25\%.$$

Veamos agora na Figura 7, o diagrama que representa a transformação entre diferentes sistemas de registro.

Figura 7: Diagrama representando a conversão.



Fonte: Silva (2017).

Logo, podemos citar como exemplo, a conversão de uma expressão na língua natural para a linguagem algébrica. Ou seja: a expressão *o dobro de um número* é equivalente, na linguagem algébrica, à expressão $2x$.

Assim, as tarefas nas quais os alunos apresentam maior dificuldade, por não re-

conhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes, são aquelas em que a conversão é necessária. Duval (2008) a considera, do ponto de vista cognitivo, como “a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão”.

Para a efetiva aprendizagem dos estudantes, é preciso também abordar dois aspectos nas conversões: a congruência/não-congruência, e a variação entre os seus sentidos. Para uma conversão ser considerada congruente, três condições devem ser preenchidas:

Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significativa da representação de partida em uma só unidade significativa na representação de chegada. (DUVAL, 2009)

Vejamos um exemplo:

Tabela 1: Conversão Congruente e Não Congruente

Registro de Saída	Registro de Chegada	Conversão
Conjunto de pontos cuja ordenada é superior à abcissa.	$y > x$	Congruente.
Conjunto de pontos que têm abcissa e ordenada de mesmo sinal.	$xy > 0$	Não congruente.

Observamos que no caso congruente há uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes de partida e chegada. Além disso, é possível reencontrar a expressão inicial ao inverter o sentido da conversão. No caso de não congruência, ao inverter os registros de partida e chegada, não reencontramos a expressão inicial, pois a tradução natural de $xy > 0$ é “o produto da abcissa e da ordenada é positivo”. Porém, sem grande rigor, para classificar uma conversão como congruente ou não congruente, basta comparar as representações dos registros de saída e chegada: se a representação de chegada transparecer na representação de saída, a conversão está próxima de uma codificação e, portanto, há congruência. Caso contrário, a conversão será de não congruência.

Destacamos também o cuidado de, no ensino, não privilegiar apenas um sentido na transformação de registros, pois é comum que os estudantes deixem de reconhecer o objeto matemático ao inverter os registros de partida e chegada. Esse fato acaba prejudicando

uma compreensão mais ampla do problema, a utilização de conhecimentos prévios para resolvê-lo, e a aprendizagem para situações futuras.

Além do tratamento e conversão, a formação de representações num registro semiótico, seja no campo das ideias, seja expressando um objeto real, são as três atividades cognitivas fundamentais da semiósis.

Essas diferentes atividades são reagrupadas e confundidas nas que chamamos geralmente de tarefas de produção e tarefas de compreensão. A produção de uma resposta, (...) mobiliza simultaneamente a formação de representações semióticas e seu tratamento. A compreensão de uma questão, aquela de um texto ou aquela de uma imagem mobilizam seja aquelas de conversão e de formação, seja as três atividades cognitivas. (DUVAL, 2009)

Além disso,

Quando se trata da articulação entre dois registros em relação à representação de um objeto matemático, duas condições devem ser efetivamente respeitadas: primeiramente, a sequência deve ser constituída de uma série de tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão; em segundo lugar, para cada sentido da conversão deve haver casos de congruência e casos mais ou menos complexos de não congruência. Se o objetivo é acentuar a compreensão de uma noção matemática, pode ser importante que tais sequências sejam constituídas por dois ou três pares de registros. (DUVAL, 2008)

Portanto, é nas transformações de conversão – e a inversão dos seus sentidos – que estamos mais interessados neste trabalho. Dos quatro tipos de registros existentes, abordamos três deles nesta pesquisa: língua natural, sistema de escritas, e gráficos cartesianos.

4 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS ELABORADAS NESTE TRABALHO

Neste capítulo abordaremos o conceito de sequência didática, bem como apresentaremos as sequências didáticas aplicadas nesta pesquisa, elucidando o objetivo de cada atividade proposta. As tarefas foram desenvolvidas sob a ótica da Modelagem Matemática, dos Registros de Representação Semiótica, e da BNCC (2018).

4.1 O QUE É A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), “uma sequência didática é um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito”. Substituindo o gênero textual por diferentes objetos de estudo, o uso da sequência didática se ampliou para diversas áreas do conhecimento. Ainda no entendimento de Dolz, Noverraz e Schneuwly, a estrutura de base de uma sequência didática possui quatro fases: apresentação da situação, produção inicial, módulos e produção final.

É na fase de apresentação que deve ser descrita de maneira detalhada a tarefa que os alunos deverão realizar, bem como expor para os mesmos como será a produção final. A etapa da produção inicial tem, como principal meta, avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes para assim ajustar as atividades previstas na sequência didática. Como os sujeitos envolvidos na pesquisa já haviam sido avaliados no objeto de estudo abordado, não houve a necessidade dessa produção. Assim, os alunos fizeram duas pesquisas: a primeira, com o intuito da apropriação de conceitos por parte dos discentes, necessárias para a resolução das atividades posteriores. A segunda, uma pesquisa de campo na escola, com a finalidade de motivar nos educandos o interesse na realização dos problemas propostos. Além disso, o trabalho foi realizado em módulos.

Os módulos são constituídos de atividades que possam dar aos alunos, gradativamente, instrumentos necessários para superar as dificuldades apresentadas na avaliação inicial. Como a principal dificuldade observada foi a grande dependência por parte dos discentes – onde comumente os estudantes solicitam auxílio para equacionar os problemas mesmo antes de tentar interpretar e iniciar uma estratégia para a resolução deles – nos módulos foram elaborados três problemas de níveis diferentes baseados na Modelagem Matemática.

A última fase da sequência didática é a produção final. Nela, será exigido dos alunos que coloquem em prática os conhecimentos construídos na etapa dos módulos.

Nessa pesquisa, elaboramos como produção final atividades sob o referencial dos Registros de Representação Semiótica, sendo o objeto de estudo apresentado na forma de problemas (língua natural), equações (linguagem algébrica), e gráficos.

4.2 ATIVIDADES PROPOSTAS

4.2.1 Atividade da Produção Inicial

Atividade 1. *Os extintores de incêndio são normalmente a melhor ferramenta para combater pequenos incêndios, principalmente na sua fase inicial. O preço de um extintor será sempre menor do que você pode vir a perder em casos de acidentes com fogo. Existem diversos tipos de extintores, cada um indicado para uma ou mais classes de incêndio. São eles:*

- *Extintor de Água Pressurizada (AP): indicado para incêndios de classe A (madeira, papel, tecido, materiais sólidos em geral).*
- *Extintor de Gás Carbônico (CO₂): Age por abafamento, suprimindo e isolando o oxigênio do ar. Baixando os níveis de oxigênio, conseqüentemente é reduzido o poder da combustão. Ao utilizar este extintor precisamos ficar atentos com uma possibilidade de reinício de incêndio caso permaneçam brasas vivas ou superfícies metálicas aquecidas. Indicado para incêndios de classe C (equipamento elétrico energizado), por não ser condutor de eletricidade.*
- *Extintor de Pó Químico - BC (PQS-BC): Indicado para incêndios de classe B (líquidos e gases inflamáveis) e C (equipamento elétrico energizado).*
- *Extintor de Pó Químico ABC (PQS-ABC): indicado para qualquer classe de incêndio, pois extinguem princípios de incêndio em materiais sólidos, líquidos inflamáveis e gases inflamáveis. Podem ser utilizados em equipamentos elétricos energizados.*

a) *Com base nas informações anteriores, preencha a tabela indicando os extintores apropriados para cada tipo de incêndio:*

Tipos de Incêndio	Substâncias Utilizadas nos Extintores	Opções de Extintor
Classe A - Todos os incêndios que além de queimarem deixam resíduos (madeiras, papel, borrachas, etc).		
Classe B - Incêndios que ardem em superfícies, no entanto não deixam resíduos (álcool, gasolina, tintas inflamáveis, etc).		
Classe C - Incêndios onde a eletricidade é um elemento presente.		

Tabela 2: Extintores apropriados para cada classe de incêndio.

b) *Pesquise o valor dos extintores abaixo:*

(i) *AP de 10 litros:*

Marca	Valor	Validade

Tabela 3: Pesquisa de preço do extintor AP de 10 litros.

(ii) CO_2 de 4kg:

Marca	Valor	Validade

Tabela 4: Pesquisa de preço do extintor CO_2 de 4 quilos.

(iii) PQS-BC de 4kg:

Marca	Valor	Validade

Tabela 5: Pesquisa de preço do extintor PQS-BC de 4 quilos.

(iv) PQS-ABC de 4kg;

Marca	Valor	Validade

Tabela 6: Pesquisa de preço do extintor PQS-ABC de 4 quilos.

- c) *Observando os tipos de extintores e sua função, faça uma estimativa dos extintores que podem proteger a escola por um menor custo.*
- d) *Percorra a escola observando os extintores. Qual(is) o(s) tipo(s) encontrado(s)? São os mesmos que você estimou?*
- e) *Qual o total de extintores na escola?*

Essa atividade foi elaborada com o objetivo de os alunos conhecerem os diferentes tipos de extintores e classes de incêndio, para que assim pudessem interpretar mais facilmente os problemas apresentados nos módulos. Além disso, os itens *c* e *d* trazem como meta que os estudantes se posicionem no papel de gestores da instituição, criando estratégias para garantir a segurança tendo em vista uma melhor utilização dos recursos financeiros da escola.

4.2.2 Atividade dos Módulos

Atividade 2. *Em uma noite, a qual a escola foi invadida, todos os lacres dos extintores foram rompidos e os rótulos retirados. Sabe-se pelo extrato do banco que o total gasto na compra desses 36 equipamentos, dos tipos AP e PQS - BC, foi de R\$ 3.820,00 (três mil, oitocentos e vinte reais). Para tornar a escola segura novamente, é necessário descobrir a quantidade de cada tipo de extintor. Assim, serão adquiridos novos rótulos, e, posteriormente, serão efetuadas as recargas.*

- a) *Sabendo que a unidade do extintor AP custa 120 reais, e a unidade do extintor PQS - BC custa 95 reais, quantos extintores há de cada tipo?*
- b) *Pesquise o valor de cada adesivo de identificação.*
- c) *Pesquise o valor de cada recarga, AP e PQS - BC.*
- d) *Qual o valor gasto para arrumar os 36 extintores?*

Espera-se com o item *a* dessa atividade, iniciar os alunos na conversão de registros: da língua natural para a linguagem algébrica. Além disso, os itens subsequentes tem o objetivo de aproximar os estudantes no tratamento de problemas do “mundo real”, visto que muitos deles não fazem a ligação da matemática com seu dia a dia. O principal objetivo do item *d* foi conscientizar os alunos do custo de conservação dos extintores no caso de vandalismo, visto que na escola é comum essa prática. Assim, posteriormente, os mesmos poderiam fazer um trabalho de conscientização com as outras turmas da instituição.

Atividade 3. *Ao negligenciar o Plano de Proteção Contra Incêndio (PPCI) e as determinações das autoridades competentes, estamos colocando em risco vidas e os bens materiais. Um exemplo de um grande desastre causado devido a essas negligências foi o incêndio na Boate Kiss, o qual centenas de jovens morreram. Podemos apontar algumas falhas que colaboraram com essa catástrofe, como:*

- *O isolamento acústico utilizado pelo proprietário não era adequado, pois a espuma libera gás cianídrico quando exposta ao fogo - o mesmo utilizado nas câmaras de gás nazistas durante a II Guerra Mundial.*
- *Os fogos utilizados no show pirotécnico da banda Gurizada Fandangueira não eram apropriados para ambientes fechados.*
- *Não havia na casa noturna um sistema de evacuação eficiente.*

A falta de investimento nos materiais adequados para segurança e a falta de conscientização das pessoas envolvidas possibilitaram essa tragédia.

Um proprietário de uma casa noturna, consciente de suas responsabilidades, comprou o material adequado para isolar a área do palco de sua boate. Assim, adquiriu 12 placas de espuma acústica anti-chama e 4 fogos para uso indoor com efeito de chispas, investindo, ao todo, R\$ 1.096,00. Ao perceber que instalar a espuma apenas na área do palco de seu estabelecimento não foi suficiente para um bom isolamento, retornou à loja e adquiriu mais 36 placas e 8 fogos, totalizando, nessa segunda compra, R\$ 3.176,00.

- a) Qual o valor de cada placa de espuma e cada fogo de artifício indoor?*
- b) Sabendo que o sócio da Boate Kiss comprou cada placa de espuma por R\$ 60,00, e cada fogo de artifício por R\$ 2,00, qual o total gasto em 48 placas e 12 fogos?*
- c) Você considera que o sócio da Boate Kiss economizou ao escolher esses materiais? Explique.*

O objetivo do item *a* dessa atividade é que os alunos a concluíssem construindo o modelo matemático, visto que o grau de dificuldade para encontrar as soluções apenas testando valores aumentou significativamente. Os itens subsequentes foram elaborados para abordar temas transversais que possibilitassem desenvolver duas das Competências Gerais da Educação Básica da BNCC (2018), apresentadas em sua introdução:

- 7) *Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns*

que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

10) Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Visando a Educação Integral dos educandos, espera-se, então, abrir um espaço de discussão a fim de conscientizar os estudantes que não seguir as regras estabelecidas legitimamente não é uma forma de economia, e pode trazer consequências graves.

Atividade 4. *Recentemente um incêndio de grandes proporções atingiu o Hospital Badim, no Rio de Janeiro. De acordo com a direção do hospital, a principal suspeita é que ocorreu um curto-circuito no gerador do prédio 1, espalhando fumaça para todos os andares do prédio antigo. Em matéria de um canal televisivo, câmeras de segurança registram o que pode ter contribuído para que o incêndio se propagasse. O perito judicial José Ricardo Bandeira analisa: “Eles começam a trazer de outros andares os extintores, então é possível que próximo ao gerador não existissem extintores suficientes para poder combater aquele incêndio, isso chama bastante a atenção”.*

Segundo a Resolução Técnica nº 14/2016 que estabelece critérios de proteção contra incêndio, existem distâncias máximas a serem percorridas conforme o risco do incêndio e capacidade extintora mínima. Observe a tabela para risco baixo de fogo do tipo B.

Risco	Extintor	Distância Máxima a Ser Percorrida
Baixo	PQS 4 kg	20 metros
	PQS 8 kg	25 metros

Tabela 7: Risco Baixo Classe B

O corredor do Hospital de Clínicas de Porto Alegre (HCPA) tem uma extensão de 155 metros, tendo suporte para a instalação de sete extintores. Quantos extintores PQS de 4kg e 8kg deverão ser adquiridos para que seja respeitada a Resolução 14/2016?

Ao fornecer informações de forma mais técnica, essa atividade procura desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas envolvendo textos os quais a linguagem apresentada não é comum a eles. Além disso, após a Atividade 3, espera-se que os estudantes elaborem o modelo matemático do problema, havendo assim a conversão de registros da língua natural para a linguagem algébrica.

4.2.3 Atividade da Produção Final

O objetivo das atividades subsequentes é investigar a compreensão matemática dos estudantes segundo a teoria de Duval. Assim, foram elaboradas questões para testar o reconhecimento do sistema de equações lineares em diferentes representações.

A característica desse tipo de atividade é que ele (**reconhecimento**)¹ deve ser rápido para ser eficaz ou útil. O nível de compreensão matemática que um aluno pode ser capaz de alcançar e o grau de iniciativa ou de exploração do qual ele pode dispor na resolução de um problema dependem do conjunto do que ele pode reconhecer rapidamente. Tarefas de estrito reconhecimento são, então, tão importantes para a aprendizagem quanto às tarefas de produção. (DUVAL, 2008)

Atividade 5. Usando a linguagem matemática reescreva o problema da **Atividade 2**. Utilize as letras indicadas abaixo:

- Incógnita **x**: quantidade de extintores AP.
- Incógnita **y**: quantidade de extintores PQS
- Coeficiente **a**: preço de cada extintor AP.
- Coeficiente **b**: preço de cada extintor PQS.

Essa tarefa foi elaborada para analisar se os alunos identificam o sistema de equações lineares em sua forma generalizada, visto que o sentido de conversão de registros permanece sendo o comumente utilizado em sala de aula: da língua natural para a linguagem algébrica. Assim, a atividade tem o intuito de verificar a velocidade de reconhecimento dos coeficientes e variáveis durante a leitura e interpretação do problema.

Atividade 6. O problema da **Atividade 3** foi traduzido para linguagem matemática da seguinte forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Interprete o problema e escreva o que representa cada uma das letras.

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| • Incógnita x : | • Coeficiente a : |
| • Incógnita y : | • Coeficiente b : |

¹Grifo da autora.

- *Coefficiente c:*
- *Coefficiente e:*
- *Coefficiente d:*
- *Coefficiente f:*

Segundo Duval (2008), “a sequência deve ser constituída de uma série de tarefas que tratem dos dois sentidos da conversão”, pois equivocadamente “no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido”. Portanto, a atividade busca analisar a aprendizagem dos alunos ao inverter os registros de saída e chegada, aliado à conversão não congruente de registros: do modelo matemático de sistema de equações lineares para a língua natural.

Atividade 7. *Crie um problema que possa ser resolvido por meio de um sistema de equações lineares. Após, resolva e verifique se a resposta encontrada faz sentido no contexto do problema criado.*

Espera-se que, com o aprendizado obtido nas atividades anteriores, os alunos definam duas incógnitas e formulem um problema que forneça os dados necessários para a resolução do mesmo. Consideramos que essa tarefa apresenta o maior grau de dificuldade da sequência didática, pois exige dos alunos a compreensão global do objeto de estudo, visto que não é fornecido ao estudante uma representação inicial do sistema de equações lineares.

Atividade 8. *Mais importante que resolver um problema, é reconhecer o modelo matemático que pode descrevê-lo. Assim, poderemos utilizar recursos computacionais e chegar à solução de um modo muito mais prático e rápido.*

a) *Acesse o site “<http://www.calculadoraonline.com.br/sistemas-lineares>”*

b) *Escreva as equações obtidas nos problemas anteriores e confira suas respostas.*

Essa atividade foi acrescentada ao longo da implementação da sequência didática, após os estudantes concluírem as tarefas anteriores sem o apoio de recursos computacionais. Acreditamos que esse estímulo deve ser realizado posteriormente à compreensão dos conceitos, e após adquiridas as habilidades necessárias para resolução das questões. Considerando que uma das Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental presente na BNCC (2018) é “utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados”, essa tarefa tem o objetivo de incentivar os alunos a mudarem seu método de resolução de problemas, pois

geralmente os mesmos testam valores até satisfazer as condições apresentadas. Assim, com o recurso computacional, será possível compreender que o mais importante é construir o modelo matemático, para que assim se possa usar as ferramentas tecnológicas disponíveis.

Atividade 9. *Vimos anteriormente que uma equação com duas incógnitas geram infinitas soluções. Siga os seguintes passos para visualizar as soluções das equações obtidas nos problemas anteriores:*

- a) *Acesse o site “<http://www.geogebra.org/graphing>”.*
- b) *Digite a primeira equação: $x + y = 36$.*
- c) *Marque sobre o objeto um ponto. Movimente esse ponto e observe as infinitas soluções que satisfazem a equação.*
- d) *Digite a segunda equação obtida no problema.*
- e) *Marque outro ponto e movimente. Observe as infinitas soluções que satisfazem a segunda equação.*
- f) *As retas se interceptam? Em que ponto? Qual o significado do ponto de intersecção?*

Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), há uma incorporação natural das TICs na Modelagem, onde novas opções tecnológicas propiciam um maior leque de possibilidades. Além disso, Franchi (2007) afirma que

Os recursos utilizados, as diferentes abordagens adotadas, as análises e as comparações feitas propiciam um constante “ir e vir” entre a Modelagem e a Informática que enriquece os processos de construção do conhecimento matemático, contribuindo para o desenvolvimento das potencialidades dos envolvidos.

Sendo assim, finalizamos a sequência didática explorando tais tecnologias, abordando a representação gráfica da solução de sistemas de equações lineares, bem como a representação de infinitas soluções de uma equação linear com duas incógnitas.

5 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática foi aplicada em uma turma do terceiro ano do terceiro ciclo, equivalente ao nono ano do ensino fundamental. A carga horária semanal da disciplina de matemática é de 2h45, distribuída em um dia de 1h50 e outro de 55 minutos. Assim, os encontros foram realizados semanalmente às segundas feiras, dia que há um maior tempo disponível para o desenvolvimento das produções dos alunos. Sendo uma das Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental presente na BNCC (2018),

Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

optamos por realizar o trabalho organizando os estudantes em oito grupos compostos por três ou quatro indivíduos. Apesar dos discentes disporem de liberdade para se organizar por afinidade, foram realizadas algumas intervenções a fim de que ao menos um integrante de cada grupo tivesse um celular disponível para pesquisa.

5.1 ATIVIDADE 1

A atividade foi realizada em 04/11/2019. Tendo em vista que a sequência didática foi concebida sob a concepção da Modelagem Matemática, na fase de apresentação apenas foi exposto o tema principal das atividades propostas, sem abordar um objetivo explícito, a fim de incorporar na sala de aula a construção do conhecimento por parte dos estudantes. Nesse dia, após expor a temática a ser abordada na sequência didática, houve uma discussão da importância da prevenção contra incêndios. A seguir, o primeiro trabalho foi distribuído entre os grupos.

Nessa tarefa os alunos deveriam caracterizar extintores, fazer pesquisa de preço, estimar os extintores que deveriam ser adquiridos pela escola, bem como averiguar quantos extintores – e de quais tipos – há na instituição. Os educandos compreenderam que existem diferentes tipos de incêndio, e que portanto diferentes tipos de extintores deveriam ser adquiridos. Ao percorrerem a escola para fazer a contagem, a turma percebeu que, com exceção de um, todos os extintores haviam sido retirados ou estavam vazios. Nesse momento houve uma discussão entre eles. Não só foi constatado o perigo que todos

estavam correndo no caso de um incêndio, mas também destacado que foram os próprios estudantes da escola os responsáveis por tê-los colocados nessa situação. Sugeri aos alunos que, finalizada nossa sequência de trabalho, poderíamos fazer uma campanha de conscientização na escola, com informações de quais extintores usar no caso de incêndio, bem como a importância da preservação dos mesmos.

5.2 ATIVIDADE 2

Essa tarefa, realizada no dia 11/11/2019, apresenta uma situação problema em que a escola é invadida e seus 36 extintores, entre AP e PQS-BC são danificados. Com o valor total pago pelos 36 extintores e o preço unitário de cada tipo, os alunos deveriam descobrir quantos extintores há de cada, bem como quanto custará para consertá-los.

Os oito grupos concluíram a atividade. Porém, cinco deles resolveram o problema testando os valores. Apesar do objetivo principal ser a construção do modelo matemático, com o trabalho sob a perspectiva da Modelagem, não impus aos educandos um método de resolução. Além disso, a atividade seguinte exigiria dos mesmos essa construção. Observe na Figura 8 uma das resoluções testando valores.

Figura 8: Atividade 2 - solução por tentativas.

a) Sabendo que a unidade do extintor AP custa 120 reais, e a unidade do extintor PQS - BC custa 95 reais, quantos extintores há de cada tipo?

NÓS CALCULAMOS OS NÚMEROS QUE DAVAM 36 PRIMEIRO. DEPOIS NÓS PEGAMOS O PRIMEIRO NÚMERO E FAZIA VEZES 120 E ANOTAVA O RESULTADO. E O OUTRO NÚMERO FAZIA VEZES 95 E ANOTAVA OS RESULTADOS. DEPOIS SOMÁVAMOS DOIS E ACHAVA O RESULTADO CERTO. ATÉ ACHAR O RESULTADO CERTO.

QUE $1900 + 1920 = 3.820$

↓ ↓

20×95 16×120

Fonte: Resposta Grupo 8

“Nós calculamos os números que davam 36 primeiro. Depois nós pegamos o primeiro número e fazia vezes 120 e anotava o resultado. E o outro número fazia vezes 95 e anotava o resultado. Depois somávamos os dois e achava o resultado certo. Até achar o resultado correto.”

Percebe-se que nesse grupo há uma escrita que poderá facilitar a transição da

língua natural para a linguagem algébrica, onde os “números” citados pelos alunos são as incógnitas do problema. Na Figura 9, apresenta-se a solução construindo o sistema.

Figura 9: Atividade 2 - solução por sistemas de equações.

a) Sabendo que a unidade do extintor AP custa 120 reais, e a unidade do extintor PQS - BC custa 95 reais, quantos extintores há de cada tipo? Há 16 extintores AP e 20 extintores PQS - BC

Extintor AP \rightarrow X
Extintor BC \rightarrow Y

$$\begin{aligned} X + Y &= 36 \\ 120X + 95Y &= 3,820 \\ 120 \cdot (-Y + 36) + 95Y &= 3,820 \\ -120Y + 4,320 + 95Y &= 3,820 \\ -120Y + 95Y &= 3,820 - 4,320 \\ -25Y &= -500 \\ Y &= \frac{-500}{-25} = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= -Y + 36 \\ X &= -20 + 36 \\ X &= 16 \end{aligned}$$

$$S = \{(16, 20)\}$$

Fonte: Resposta Grupo 5

5.3 ATIVIDADES 3 E 4

Devido a Semana da Consciência Negra, evento realizado na escola de 18 a 22 de novembro, os problemas 3 e 4 foram aplicados no dia 25/11/2019.

5.3.1 Atividade 3

Contextualizado no incêndio da Boate Kiss/RS, na Atividade 3 são informados os gastos de um empresário cujos materiais adquiridos são adequados para o ambiente de uma casa noturna. Os alunos deveriam descobrir o valor unitário dos fogos de artifício para uso indoor e das placas de espuma antichama. Após, o investimento desse empresário deve ser comparado com o dos sócios da Boate Kiss. De todos os grupos, apenas um não construiu o sistema de equações lineares, levando um maior tempo para a conclusão da tarefa, ilustrada na Figura 10.

Figura 10: Atividade 3 - solução testando valores.

a) Qual o valor de cada placa de espuma anti-chama e cada fogo de artifício indoor?

Placas = 82
Fogos = 28

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 82 \\ \hline 2.952 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 28 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 224 \\ + 2.952 \\ \hline 3.176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 82 \\ \hline 984 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 28 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 984 \\ + 112 \\ \hline 1.096 \end{array}$$

Fonte: Resposta Grupo 7

Os demais grupos escreveram o modelo matemático esperado, conforme Figura 12, com exceção de um deles, que optou por denominar o preço de 12 placas pela incógnita “x” e o preço de 4 fogos pela incógnita “y” (Figura 11). Porém, ao concluir o problema, os alunos consideraram “x” e “y” como solução da atividade. Percebendo a incoerência do seu resultado durante a verificação da solução, o grupo me questionou sobre o que havia de errado. Enfatizei o significado de “x” e “y” no modelo matemático construído por eles, e os mesmos concluíram sozinhos que para chegar ao resultado deveriam dividir o valor obtido em “x” por 12 e o valor obtido em “y” por 4.

Figura 11: Atividade 3 - solução com coeficientes proporcionais ao modelo original.

12 Placas \rightarrow total \rightarrow 2.056,00
4 fogos \rightarrow

36 Placas \rightarrow total \rightarrow 3.176,00
8 fogos \rightarrow

$$\begin{aligned} x + y &= 1.096 \\ 3x + 2y &= 3.176 \\ y &= 1.096 - x \\ 3x + 2(1.096 - x) &= 3.176 \\ 3x - 2x &= 3.176 - 2.192 \\ x &= 984 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 3.176 \\ 3.584 + 2y &= 3.176 \\ 2.952 + 2y &= 3.176 \\ 2y &= 3.176 - 2.952 \\ 2y &= 224 \\ \frac{2y}{2} &= \frac{224}{2} \\ y &= 112 \\ 1 \text{ fogo} &= 28 \end{aligned}$$

984 (??)
82
1 placa é igual a 82

Fonte: Resposta Grupo 8

Figura 12: Atividade 3 - solução por sistema de equações.

a) Qual o valor de cada placa de espuma anti-chama e cada fogo de artifício indoor?

①

$$\begin{cases} 12x + 4y = 1096 \\ 36x + 8y = 3176 \end{cases} \quad (-2)$$

$$\begin{cases} 12x + 4y = 1096 \\ 24 - 8y = -2192 \end{cases}$$

$$\frac{12x}{12} = \frac{984}{12} \quad x = 82$$

②

$$\begin{cases} 12x + 4y = 1096 \\ 12 \cdot 82 + 4y = 1096 \\ 984 + 4y = 1096 \\ + 4y = 1096 - 984 \\ + 4y = 112 \\ \frac{4y}{4} = \frac{112}{4} \quad y = 28 \end{cases}$$

CADA	PLACA	CUSTO
82,00	REAIS	6
CADA	FOGO	CUSTO
28,00	REAIS	

Fonte: Resposta Grupo 2

Quanto à discussão sobre a responsabilidade ao equipar um estabelecimento comercial com os materiais adequados, metade dos grupos não considerou o contexto do problema, em que, por negligência, o proprietário da Boate Kiss provocou uma catástrofe. Talvez, a forma que a questão foi formulada, contribuiu para que nas respostas não fosse considerado tal contexto. Além disso, é comum a desconexão entre a aula de matemática e o dia a dia dos alunos, em que, na maioria das vezes, os educandos se atém apenas aos números durante a resolução das tarefas.

Assim, verificamos a importância de planejar atividades que propiciem aos discentes extrapolar essa perspectiva, para estar de acordo não só com os objetivos da BNCC (2018), onde consta, no capítulo 4.2, uma das competências específicas da matemática para o ensino fundamental,

Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

mas também ir ao encontro com os objetivos do ENEM, o qual diz que aborda a matemática em uma avaliação contextualizada e interdisciplinar, exigindo dos estudantes o desenvolvimento do raciocínio matemático também aplicado a questões sociais.

Portanto, observando a interação dos alunos em um dos grupos, fiz uma intervenção:

A₁: Ele não economizou, porque depois teve o processo.

A₂: Nada a ver, economizou sim, é o que interessa.

P: Concordo com a A₁, não acho que comprar materiais errados seja uma economia, pois coloca os outros em risco.

Assim, obtivemos a seguinte resposta na Figura 13:

Figura 13: Atividade 3 - resposta após mediação.

- c) Compare os gastos dos dois proprietários. Você considera que o sócio da Boate Kiss economizou ao escolher esses materiais? Explique.

O velho Proprietário → 2,904,
 O novo Proprietário → 4,272,
 Ele economizou na hora da compra, pois depois da catástrofe só veio problemas em relação a processos e etc.

Fonte: Resposta Grupo 2

Nas Figuras 14 e 15, observa-se exemplos de respostas considerando o contexto.

Figura 14: Atividade 3 - resposta contextualizada.

- c) Compare os gastos dos dois proprietários. Você considera que o sócio da Boate Kiss economizou ao escolher esses materiais? Explique.

Proprietário consciente → 4272
 Sócio da Boate Kiss → 2904

Na hora da compra economizou 1368 reais. Porém teve um prejuízo milionário por não ter sido consciente.

Fonte: Resposta Grupo 1

Figura 15: Atividade 3 - resposta esperada.

- c) Compare os gastos dos dois proprietários. Você considera que o sócio da Boate Kiss economizou ao escolher esses materiais? Explique. Comparando os preços o sócio economizou errado, ele comprou os materiais errado e por isso morreu em torno de 242 pessoas.

Fonte: Resposta Grupo 4

Na Figura 16, vemos uma das respostas que não considerou o contexto.

Figura 16: Atividade 3 - solução considerando apenas os cálculos numéricos.

c) Compare os gastos dos dois proprietários. Você considera que o sócio da Boate Kiss economizou ao escolher esses materiais? Explique.

Nós achamos que o sócio da Boate Kiss economizou ao escolher esses materiais, pois o proprietário gastou 4.272,00 R\$ e o sócio da Boate teve o gasto de 2.904,00 R\$ sendo assim, o sócio economizou 1.368,00 R\$.

Fonte: Resposta Grupo 7

Na aula seguinte, retomei com os alunos o que pode ou não ser considerado uma economia: “se eu faço uma pesquisa de preços e compro o material correto do fornecedor mais barato, eu fiz uma economia. Usar um material proibido por lei, que coloca as pessoas em risco, é uma economia, ou um crime?”. Assim, a turma discutiu não só as questões da Boate Kiss, mas também outras tragédias ocorridas devido atitudes negligentes visando o lucro. Os estudantes citaram o caso do acidente do avião que transportava a equipe da Chapecoense, e também os incêndios florestais – os quais muitas vezes são criminosos – como, por exemplo, as queimadas em área de preservação ambiental. Esses momentos de discussão devem ser planejados e oportunizados, pois

Reconhecer a Educação Ambiental em um ambiente de Educação Matemática é, então, aceitar que sentimento e consciência étnicos são parte fundamental da aprendizagem de conceitos matemáticos, abstratos ou práticos, teóricos ou concretos, úteis de imediato ou em longo prazo. São, portanto, parte fundamental a ser considerada em seu ensino. (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011)

Além disso,

Ao ressaltar os aspectos sociais, essa nova perspectiva cria um ambiente pedagógico rico de possibilidades e prioriza como objetivos do ensino a construção de conceitos que capacitem os estudantes a compreender e a interferir criticamente na sociedade. Os conteúdos passam a ser ferramentas para uma função muito mais ampla que o mero saber técnico, que é a compreensão crítica de nosso estar no mundo, é a construção de nossa cidadania. (MONTEIRO; POMPEU, 2001)

Portanto, destacamos uma importante característica da Modelagem, já mencionada anteriormente: a possibilidade da abordagem de temas transversais durante o ensino de matemática.

5.3.2 Atividade 4

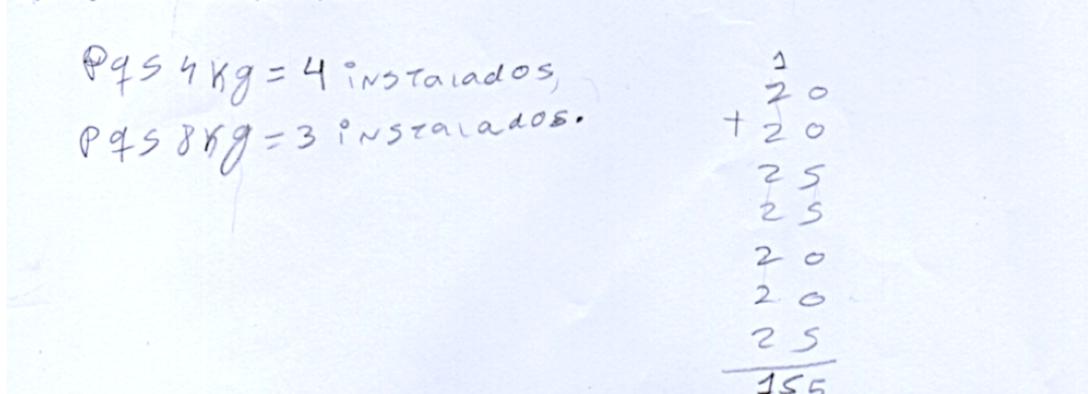
O próximo problema foi contextualizado no incêndio do Hospital Badim/RJ. Os educandos deveriam interpretar uma tabela obtida na Resolução Técnica no 14/2016, a qual informava a distância máxima a ser percorrida por uma pessoa até que ela encontre um extintor de incêndio. Essa distância depende da capacidade extintora: 4kg ou 8kg. Sabendo o total de extintores a serem fixados no corredor do hospital cujo comprimento é fornecido, os estudantes deveriam calcular quantos extintores de cada tipo comprar para cobrir o caminho que será percorrido.

Entretanto, muitos alunos não conseguiram interpretar o problema. Foi a primeira atividade que, antes de tentar resolver, os grupos procuravam auxílio dizendo que não haviam entendido. Talvez esse fato tenha ocorrido devido a uma linguagem não acessível a eles, como “Resolução Técnica no 14/2016” e “capacidade extintora”. Assim, comentei com a turma:

- Vocês viram que as câmeras de vigilância gravaram os funcionários buscando extintores em outros andares? Pois então: existe uma resolução que diz o quanto a gente pode caminhar, no máximo, até encontrar um extintor. Naquela tabela há dois tipos de extintores: um de 4kg e outro de 8kg. Se o extintor tem uma capacidade maior, ele pode estar mais afastado, pois vai durar mais enquanto apagamos o fogo. Agora vocês tem que descobrir quantos extintores de cada tipo tem que ter para que todo o corredor do Hospital de Clínicas esteja protegido.

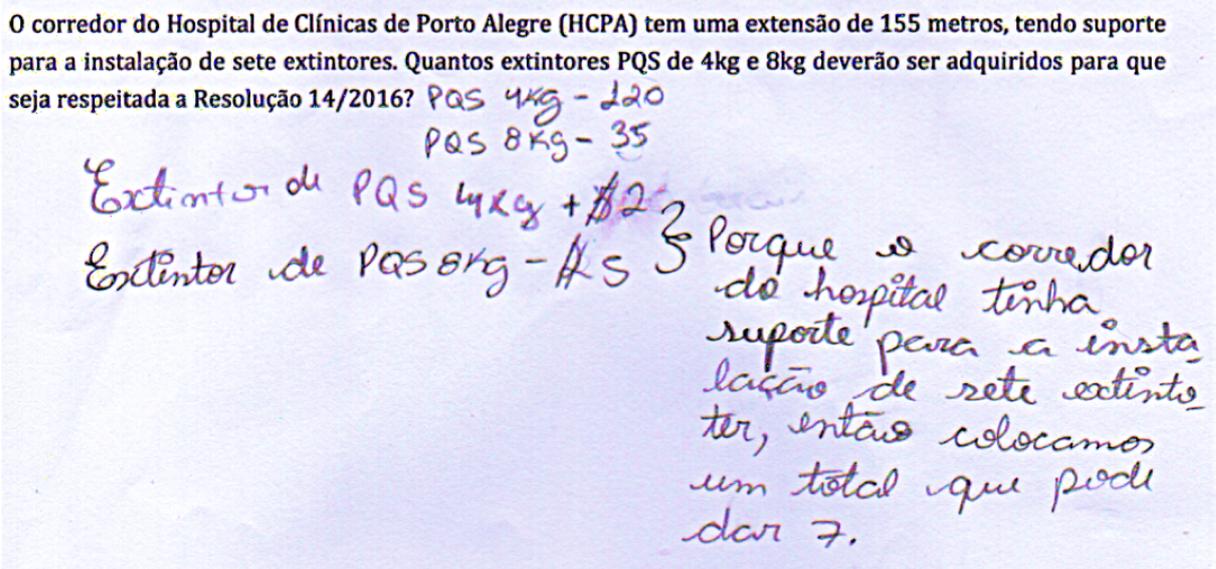
Após essa fala, sete dos oito grupos concluíram a atividade corretamente, porém sem escrever o sistema de equações lineares (Figura 17).

Figura 17: Atividade 4 - solução correta sem a construção do modelo matemático. O corredor do Hospital de Clínicas de Porto Alegre (HCPA) tem uma extensão de 155 metros, tendo suporte para a instalação de sete extintores. Quantos extintores PQS de 4kg e 8kg deverão ser adquiridos para que seja respeitada a Resolução 14/2016?



Apenas um grupo não considerou o comprimento do corredor do hospital. Ao perceber que os estudantes só estavam considerando a quantidade de extintores, questionei: “por que cinco extintores de 4kg e dois de 8kg? E se fosse um extintor de 4kg e seis extintores de 8kg também não daria um total de sete? Observem os outros dados do problema”. Porém, os alunos entregaram a atividade apenas invertendo a resposta anterior, conforme ilustra a Figura 18.

Figura 18: Atividade 4 - solução sem verificação das duas condições apresentadas.



Fonte: Resposta Grupo 3

Para conscientizar os estudantes da importância da passagem da língua natural para a linguagem algébrica, as últimas atividades desta sequência didática foram realizadas com o apoio de softwares de resolução de sistemas lineares. Assim, foi abordada a eficácia dessas ferramentas em solucionar problemas de nosso cotidiano, porém, para que isso ocorra, é necessário que saibamos construir o modelo matemático que os representa.

5.4 ATIVIDADES 5, 6 E 7

As três tarefas iniciaram em 02/12/2019, porém foram finalizadas no dia seguinte, na aula de 55 minutos.

5.4.1 Atividade 5

O exercício solicitava que os alunos reescrevessem o Problema 2 – dos 36 extintores vandalizados – substituindo os coeficientes numéricos pelos coeficientes “a” e “b”.

Os estudantes questionavam, dizendo que não haviam entendido “o que era pra

fazer”. Respondia que não era para efetuar nenhum cálculo, apenas ler o problema e traduzir para a linguagem matemática utilizando as letras indicadas na tarefa. Considero que, como os grupos resolveram o Problema 2 testando valores, houve uma maior dificuldade na generalização, visto que o treinamento da transformação de registros não foi concretizado na etapa anterior. Além disso, a língua natural é um registro multifuncional, onde a transformação para a linguagem algébrica é caracterizada como uma conversão de não congruência. Segundo Duval (2008),

A situação se torna mais complexa quando um dos registros é plurifuncional, como o da língua natural ou o das figuras geométricas. Basta lembrar, aqui, as questões – há decênios recorrentes – de compreensão dos mais simples enunciados de problemas de aplicação de aritmética ou álgebra, em que seria suficiente “traduzir” os dados do enunciado. Na realidade, a passagem de um enunciado em língua natural a uma representação em um outro registro toca um conjunto complexo de operações para designar os objetos.

Três dos oito grupos concluíram a atividade satisfatoriamente, como ilustram as Figuras 19 e 20.

Figura 19: Atividade 5 - solução esperada.

1) Usando a linguagem matemática reescreva o problema da **Atividade 2**. Utilize as letras indicadas abaixo:

- Incógnita **x**: quantidade de extintores AP.
- Incógnita **y**: quantidade de extintores PQS.
- Coeficiente **a**: preço de cada extintor AP.
- Coeficiente **b**: preço de cada extintor PQS.

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x a + y b = 3.120 \end{cases}$$

Fonte: Resposta Grupo 4

Apesar do grupo não apresentar o coeficiente à frente da incógnita, conforme convenção algébrica, consideramos essa solução satisfatória.

Figura 20: Atividade 5 - solução válida.

1) Usando a linguagem matemática reescreva o problema da **Atividade 2**. Utilize as letras indicadas abaixo:

- Incógnita **x**: quantidade de extintores AP.
- Incógnita **y**: quantidade de extintores PQS.
- Coeficiente **a**: preço de cada extintor AP.
- Coeficiente **b**: preço de cada extintor PQS.

$AP = x$ (preço \cdot 120 = a)
 $PQS = y$ (preço \cdot 95 = b)
 $36 = c$
 $3,820,00 = d$
 $x + y = c$
 $ax + by = d$

Fonte: Resposta Grupo 1

Apesar de utilizar as letras “c” e “d” no lugar dos valores esperados, essa resolução indica que $c = 36$ e $d = 3820$. Portanto, também a consideramos satisfatória.

Três dos grupos não identificaram o coeficiente “a” como 120 e o coeficiente “b” como 95, como mostram as Figuras 21 e 22.

Figura 21: Atividade 5 - solução sem identificar o valor dos coeficientes.

1) Usando a linguagem matemática reescreva o problema da **Atividade 2**. Utilize as letras indicadas abaixo:

- Incógnita **x**: quantidade de extintores AP.
- Incógnita **y**: quantidade de extintores PQS.
- Coeficiente **a**: preço de cada extintor AP.
- Coeficiente **b**: preço de cada extintor PQS.

$$\begin{cases} ax + by = 36 \\ 120x + 95y = 3.820 \end{cases}$$

Fonte: Resposta Grupo 3

Figura 22: Atividade 5 - solução com modelo incorreto.

1) Usando a linguagem matemática reescreva o problema da **Atividade 2**. Utilize as letras indicadas abaixo:

- Incógnita **x**: quantidade de extintores AP.
- Incógnita **y**: quantidade de extintores PQS.
- Coeficiente **a**: preço de cada extintor AP.
- Coeficiente **b**: preço de cada extintor PQS.

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ a + b = 3.820 \end{cases}$$

Fonte: Resposta Grupos 5 e 6

Dois dos grupos utilizaram as letras indicadas no problema de modo aleatório. Observamos uma dessas soluções na Figura 23.

Figura 23: Atividade 5 - solução com tradução incompreensível.

1) Usando a linguagem matemática reescreva o problema da **Atividade 2**. Utilize as letras indicadas abaixo:

- Incógnita **x**: quantidade de extintores AP.
- Incógnita **y**: quantidade de extintores PQS.
- Coeficiente **a**: preço de cada extintor AP.
- Coeficiente **b**: preço de cada extintor PQS.

$$\begin{aligned} \text{Ext. AP} &= 36x + 120a = 3820 \\ \text{Ext. PQS} &= 36y + 95b = 3820 \end{aligned}$$

Fonte: Resposta Grupo 2

Buscando retomar as dificuldades apresentadas nessa tarefa, na aula da semana seguinte, dia 09/12/2019, escrevi os três sistemas lineares apresentados nas figuras anteriores:

$$(1) \begin{cases} ax + by = 36 \\ 120x + 95y = 3820 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y = 36 \\ a + b = 3820 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 36y + 120a = 3820 \\ 36y + 95b = 3820 \end{cases}$$

- Discussão da resposta (1)

Perguntei aos alunos o que era o coeficiente “a”. Os mesmos responderam ser o preço de cada extintor AP. Solicitei, então, que eles lessem o problema e verificassem se nele constava essa informação. Assim, a turma constatou que “a” era o mesmo que 120. Com o mesmo raciocínio, foi concluído que o valor do coeficiente “b” era 95. Assim, reescrevi o sistema (1) substituindo “a” e “b” por seus respectivos valores:

$$\begin{cases} 120x + 95y = 36 \\ 120x + 95y = 3820 \end{cases}$$

Afirmei que, de imediato, pode-se perceber que há algo errado: “como duas expressões iguais podem ter resultados diferentes?” A seguir, questionei o que significa a expressão “ $120x + 95y$ ”.

P: O que é o “x”?

A: São os extintores AP.

P: O que dos extintores? Preço, peso, quantidade...

A: São quantos tem.

P: E o que é o 120?

A: É o preço de cada um.

P: Então o que obtemos ao multiplicar 120 pelo total de extintores AP? Por exemplo: se forem dois extintores AP, o que é o 240?

Escrevi $120 \cdot 2 = 240$

A: É quanto gastou nos dois extintores.

P: E se forem três extintores, o que é o 360?

Escrevi $120 \cdot 3 = 360$

A: É quanto gastou pra comprar três extintores.

P: E se fossem “x” extintores, o que é $120 \cdot x$?

A: É quanto gastou pra comprar x extintores.

P: De qual tipo?

A: AP

P: Então o que é o $120 \cdot x$?

A: É quanto gastou pra comprar x extintores do tipo AP.

P: E o que é o $95 \cdot y$?

A: É quanto gastou pra comprar y extintores PQS.

P: E o que é $120x + 95y$?

A: É quanto gastou no total.

Assim, concluímos que a equação correta é a $120x + 95y = 3820$.

P: O que é o 36? Como podemos representar matematicamente?

A: É o total dos extintores, $x + y$.

P: Exato! Então a primeira equação deve ser $x + y = 36$.

A seguir, iniciei a discussão do segundo sistema de equações.

- Discussão da resposta (2)

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ a + b = 3820 \end{cases}$$

P: E esse aqui, qual o problema?

A: Tá faltando x e y .

P: Vamos entender o significado da expressão “ $a + b$ ”. Se “ a ” é o preço de um extintor AP, e “ b ” é o preço de um extintor PQS, estamos dizendo que comprando dois extintores gastamos 3.820 reais. Isso está correto?

A: Não, faltou multiplicar pelas letras.

P: Se eu fosse escrever só $a + b$, essa expressão deveria ser igual a quanto?

Devido o silêncio, continuei:

P: Quanto é o “ a ”?

A: 120.

P: E o “ b ”?

A: 95.

P: Então quanto vale a expressão “ $a + b$ ”?

A: 215.

Escrevi $a + b = 215$.

- Discussão da resposta (3)

$$\begin{cases} 36y + 120a = 3820 \\ 36y + 95b = 3820 \end{cases}$$

P: Esse aqui também tá estranho, né? Duas expressões diferentes darem o mesmo resultado. Vamos reescrever esse sistema substituindo os valores das letras “ a ” e “ b ”.

$$\begin{cases} 36y + 120.120 = 3820 \\ 36y + 95.95 = 3820 \end{cases}$$

Calculando as multiplicações, obtivemos:

$$\begin{cases} 36y + 14400 = 3820 \\ 36y + 9025 = 3820 \end{cases}$$

P: E então gente, faz sentido? Para cada uma dessas equações darem certo, temos que ter um valor de “y” negativo. Lembrando que o “y” não pode ser negativo, porque é o total de extintores PQS da escola. Na verdade, não consigo traduzir essa expressão. Acredito que o que faltou, nesses três sistemas, foi compreender os coeficientes “a” e “b”, além de analisar, ao longo de toda construção do modelo matemático, o significado de cada expressão que vocês escreveram.

5.4.2 Atividade 6

Nesse exercício, o problema da Boate Kiss foi apresentado aos alunos na linguagem algébrica. Assim, a tarefa consistia em escrever o que representava cada letra dada.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Novamente, surgiu a dificuldade por parte dos grupos em realizar a atividade, em que os alunos diziam não entender o que era para fazer. Essa dificuldade é explicada por Duval (2008):

A natureza cognitiva, própria da atividade de conversão, aparece nos dois tipos de fenômenos que se pode observar a respeito de qualquer operação de conversão: (...) O segundo tipo de fenômeno é o da importância do sentido da conversão. Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e chegada. Isso pode mesmo conduzir a contrastes muito fortes de acerto (...) como se a maior parte dos estudantes deixasse de reconhecer a situação apresentada na representação que eles próprios tinham escolhido como “tradução”.

Inicialmente eu disse: “o problema da Atividade 3 foi traduzido para linguagem matemática desse modo. Vocês têm que interpretar o que significa cada uma dessas letras. Leiam novamente o problema e durante a leitura tentem identificar o que são as letras”. Após essa fala, dois dos grupos concluíram a atividade. Porém, identificaram a incógnita “x” como “placas” e a incógnita “y” como “fogos”, sem determinar que se tratava do preço de cada um deles (Figura 25). Na Figura 24, é possível observar que o grupo identificou o sistema de equações lineares em dois registros diferentes, realizando a conversão de não congruência entre eles.

Figura 24: Atividade 6 - anotações identificando os coeficientes durante a leitura.

Problema da Atividade 3:

Um proprietário de uma casa noturna, consciente de suas responsabilidades, comprou o material adequado para isolar a área do palco de sua boate. Assim, adquiriu ^{ax} 12 placas de espuma acústica anti-chama e ^{by} 4 fogos para uso indoor com efeito de chispas, investindo, ao todo, R\$ 1.096,00. Ao perceber que instalar ^{by} a espuma apenas na área do palco de seu estabelecimento não foi suficiente para um bom isolamento, retornou à loja e adquiriu mais ^{dx} 36 placas e ^{ey} 8 fogos, totalizando, nessa segunda compra, R\$R\$ 3.176,00.

Fonte: Resposta Grupo 7

Figura 25: Atividade 6 - solução sem identificar a grandeza das incógnitas.

Interprete o problema e escreva o que representa cada uma das letras.

- Incógnita x: *placas de espuma*
- Incógnita y: *fogos uso indoor*
- Coeficiente a: *numero das placas da 1ª compra*
- Coeficiente b: *numero dos fogos da 1ª compra*
- Coeficiente c: *valor total da 1ª compra*
- Coeficiente d: *numero dos fogos da 2ª compra*
- Coeficiente e: *nrº de placas da 2ª compra*
- Coeficiente f: *valor total da 2ª compra*

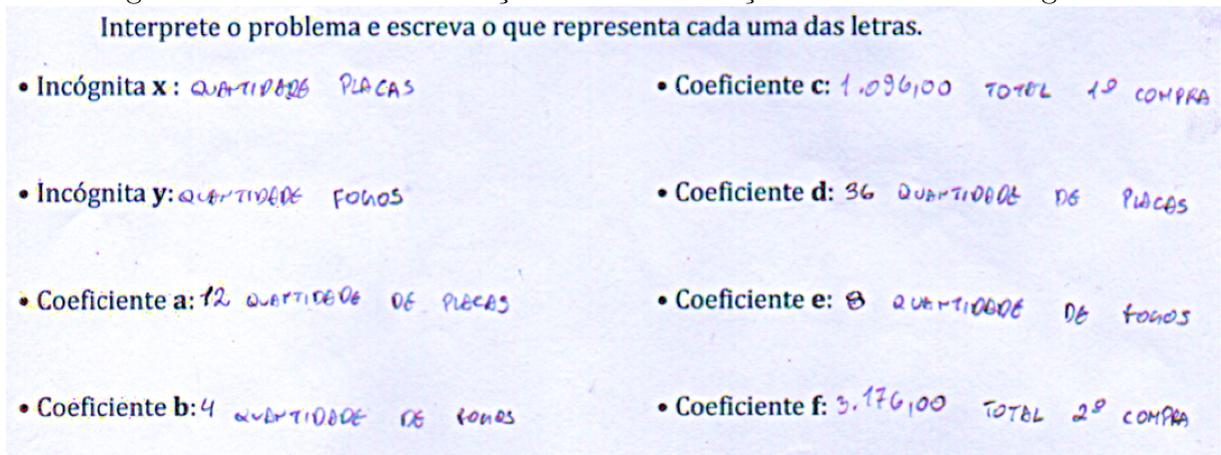
Fonte: Resposta Grupo 1

Os outros grupos continuavam dizendo que não sabiam como fazer. Assim, sugeri: “você já traduziram esse problema para a linguagem matemática. Se não conseguem identificar apenas lendo, traduzam novamente, e comparem os coeficientes de vocês com o modelo matemático”.

Com a necessidade de construir novamente o próprio sistema de equações lineares e comparar com o da questão, considero que os alunos não concretizaram a conversão no sentido inverso, e sim uma transformação de tratamento, pois foi realizada dentro do mesmo sistema de registros.

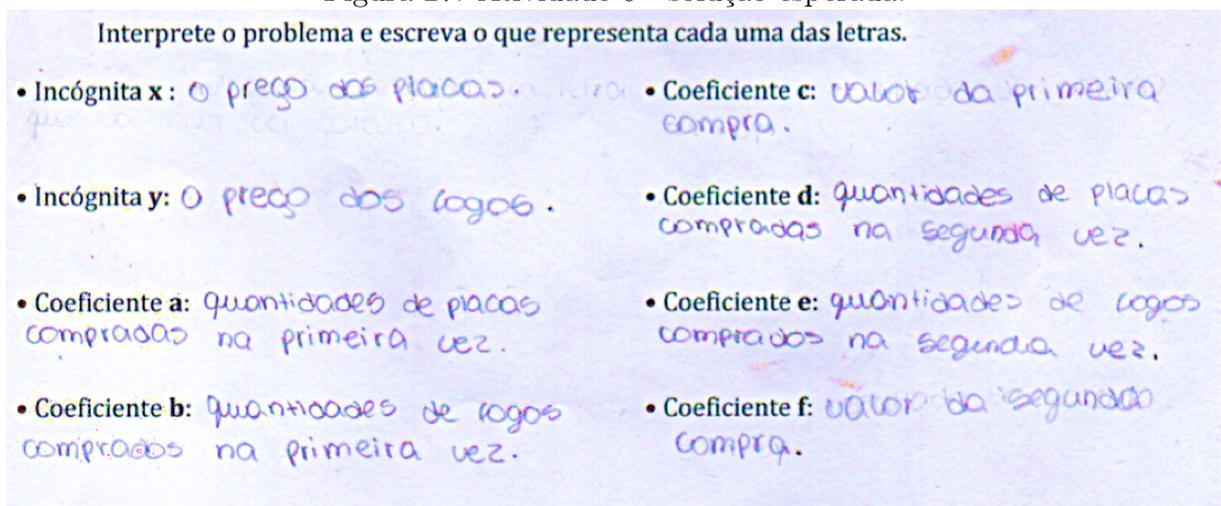
Ao perceber que a maioria dos alunos não estavam identificando as incógnitas “x” e “y” satisfatoriamente, questioneei a turma: “Vocês descreveram a incógnita “y” como “os fogos”. O que dos fogos? A cor? A duração? A quantidade? O valor? O peso? Escrevam de maneira completa o que significa cada uma das letras.” Mesmo assim, apenas três dos oito grupos responderam satisfatoriamente a questão. Abaixo, um dos exemplos de resposta incorreta (Figura 26), e outro de resposta esperada (Figura 27).

Figura 26: Atividade 6 - solução com identificação incorreta das incógnitas.



Fonte: Resposta Grupo 2

Figura 27: Atividade 6 - solução esperada.



Fonte: Resposta Grupo 5

Apesar de, no exercício anterior a resolução desse grupo não estar correta, com o auxílio da transformação de tratamento seus integrantes concluíram satisfatoriamente a tarefa 6.

5.4.3 Atividade 7

Nessa atividade os alunos deveriam criar um problema que fosse modelado por um sistema de equações lineares. Consta como habilidade da Unidade Temática de Álgebra para o 8º ano do Ensino Fundamental, no conteúdo “Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano” da BNCC (2018): “Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser

representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso”. Apesar de apenas um grupo formular um problema que possibilitasse a resolução sem utilizar como apoio os materiais já trabalhados em aulas anteriores, outros três grupos concluíram a atividade reelaborando ou adaptando essas atividades. Assim, consideramos que os estudantes desenvolveram satisfatoriamente a habilidade supracitada, pois

É importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. (...) Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto. (BRASIL, 2018)

A Figura 28 mostra a solução de um problema criado sem utilizar nenhum material de apoio.

Figura 28: Atividade 7 - criação de um problema inédito.

3) Crie um problema que possa ser resolvido por meio de um sistema de equações lineares. Após, resolva e verifique se a solução encontrada faz sentido no contexto do problema que você criou.

Em um dia, uma joalheria foi roubada 50 peças entre colares e anéis e a joalheria teve o prejuízo de 7.000. Quantos anéis foram roubados e quantos colares?

quantidade de Colares $\rightarrow x$
 quantidade anel $\rightarrow y$

$$\begin{cases} 200x + 100y = 7000 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 200(50 - y) + 100y &= 7000 \\ 10000 - 200y + 100y &= 7000 \\ -200y + 100y &= 7000 - 10000 \\ -100y &= -3000 \\ y &= \frac{-3000}{-100} \\ y &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 50 - y \\ x &= 50 - 30 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

A solução que encontramos fez sentido no problema que criamos.

Fonte: Resposta Grupo 4

“Em um dia, uma joalheria foi roubada 50 peças entre anéis e colares, no total a joalheria teve o prejuízo de 7000. Quantos anéis foram roubados e quantos colares?”

O primeiro resultado obtido ao resolver o sistemas de equações foi negativo. Os

alunos, então, questionaram o que havia de errado. Disse a eles que para dar certo, eles deveriam definir o preço de cada produto, e quanto de cada um foi roubado, para então saber o prejuízo total. Uma das integrantes do grupo disse que o valor das mercadorias estava definido, porém, não haviam ainda determinado o quanto de cada peça foi roubado. Após essa intervenção, o grupo concluiu a atividade. Contudo, no texto do problema, o grupo esqueceu de informar o valor de cada mercadoria.

Na Figura 29, observamos a solução do grupo cujos integrantes vendiam lanche na escola para arrecadar dinheiro para formatura. Assim, os alunos adaptaram um problema estudado anteriormente para essa nova temática.

Figura 29: Atividade 7 - resolução utilizando questões do cotidiano.

3) Crie um problema que possa ser resolvido por meio de um sistema de equações lineares. Após, resolva e verifique se a solução encontrada faz sentido no contexto do problema que você criou.

Dia da Semana	Bolo	Pizza	Total
Seg.	16	10	R\$ 62,00
Quar.	19	15	R\$ 83,00
Sex.	30	24	?

Na sexta-feira serão feitas 30 fatias de Bolo e 24 fatias de Pizza. E quanto eles irão faturar na sexta?

Bolo = x Pizza = y

$$\begin{cases} 16x + 10y = 62 & (.1) \\ 19x + 15y = 83 & (.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -32x - 20y = -124 \\ 38x + 30y = 166 \end{cases}$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{42}{6} \quad \boxed{x = 7}$$

$$\begin{array}{r} 16x + 10y = 62 \\ \underline{112} = 62 \\ 112 + 10y = 62 \\ 10y = 62 - 112 \\ \frac{10y}{10} = \frac{-50}{10} \quad y = -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 210 \\ \underline{120} \\ 330 \end{array}$$

Fonte: Resposta Grupo 2

Consideramos que a sequência didática elaborada nesta pesquisa propiciou que

os alunos identificassem na matemática uma ferramenta para resolver assuntos do seu cotidiano, desenvolvendo não só “a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações”, mas também a “capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos”. (BRASIL, 2018)

O grupo 7, que resolveu a atividade anterior anotando os coeficientes durante a leitura do problema, criou o seu texto utilizando a mesma técnica (Figura 30). Sob a ótica de Duval, os alunos demonstraram uma compreensão global do objeto de estudo, visto que identificaram, de forma rápida, o sistema de equações lineares em diferentes registros de representação. Infelizmente, um erro simples de cálculo e a proximidade do fim da aula impossibilitaram a conclusão da atividade.

Figura 30: Atividade 7 - resolução utilizando o aprendizado construído na etapa anterior.

3) Crie um problema que possa ser resolvido por meio de um sistema de equações lineares. Após, resolva e verifique se a solução encontrada faz sentido no contexto do problema que você criou.

Um proprietário de um novo restaurante consciente de suas responsabilidades e para abrir o seu restaurante vai precisar de materiais de prevenção contra incêndio, Ele comprou 3 extintores e 2 alarmes resultando no total de R\$ 1.288 percebendo que era pouco comprou mais 4 extintores e 3 alarmes resultando a R\$ 1.508 reais,

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1288 & \cdot 3 \\ 4x + 3y = 1508 & \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 6y = 3864 \\ -8x + (-6y) = -3016 \end{cases}$$

$$-1x = 6880$$

$$x = 6880$$

Fonte: Resposta Grupo 7

Na Figura 31, observa-se que o grupo escreveu um problema gerando um sistema de

duas equações lineares com quatro incógnitas. Logo, os alunos não conseguiram completar a atividade. Apesar desse não ser o sistema de equações solicitado no exercício, sob a ótica da Modelagem, os estudantes estavam cientes que havia um modelo matemático para representar aquela situação, e concluíram com êxito a passagem da língua natural para a linguagem algébrica.

Figura 31: Atividade 7 - problema envolvendo quatro incógnitas

3) Crie um problema que possa ser resolvido por meio de um sistema de equações lineares. Após, resolva e verifique se a solução encontrada faz sentido no contexto do problema que você criou.

Oito amigos foram em uma lancheria e compraram duas caixas com 32 coxinhas e 8 sucos, que no total deu R\$ 48,00. Depois foram ao cinema e compraram 8 ingressos e 4 pipocas grandes que no total deu R\$ 112,00. Quanto foi cada coisa que eles compraram?

Coxinhas $\rightarrow x$
 Sucos $\rightarrow y$
 Ingressos $\rightarrow a$
 Pipoca $\rightarrow b$

$$\begin{cases} 64x + 8y = 48 \\ 8a + 4b = 112 \end{cases}$$

Fonte: Resposta Grupo 5

“Oito amigos foram em uma lancheria e compraram duas caixas com 32 coxinhas e 8 sucos, que no total deu R\$ 48,00. Depois foram no cinema e compraram 8 ingressos e 4 pipocas que no total deu R\$ 112,00. Quanto foi cada coisa que eles compraram?”

Os três grupos restantes formularam problemas sem incógnitas. A Figura 32 mostra uma dessas soluções.

Figura 32: Atividade 7 - resolução sem identificação do objeto de estudo.

- 3) Crie um problema que possa ser resolvido por meio de um sistema de equações lineares. Após, resolva e verifique se a solução encontrada faz sentido no contexto do problema que você criou.

No ano de 2019 se tornou obrigatório nos veículos o extintor ABC automotivo, o extintor está em torno de 39,90\$.

Essa semana o carro do Rafael pegou fogo e não tinha os extintores. O total que ele gastou com outro carro foi muito mais que o dobro do valor dos extintores o valor seria de 40.000\$.

Se ele tivesse comprado o extintor qual seria o prejuízo com o incêndio?

$$\text{Extintor} = X$$

$$\text{Carro} = Y$$

$$\text{Carro} = Y$$

$$\begin{cases} X + Y = 40.000\$ \end{cases}$$

Fonte: Resposta Grupo 3

“No ano de 2019 se tornou obrigatório nos veículos o extintor ABC automotivo, o extintor está em torno de R\$ 39,90. Essa semana o carro do Rafael pegou fogo e não tinha os extintores. O total que ele gastou com outro carro foi muito mais que o dobro do valor dos extintores, o valor seria R\$ 40 mil. Se ele tivesse comprado o extintor, qual seria o prejuízo com o incêndio?”

Sem as incógnitas, não há como traduzir o problema para o sistema de equações. Além disso, não há sentido na equação escrita pelo grupo.

5.5 ATIVIDADES 8 E 9

No dia 09/12/2020, as atividades foram desenvolvidas no laboratório de informática da escola.

5.5.1 Atividade 8

No início da aula, conversei com a turma sobre a importância de saber escrever matematicamente os problemas apresentados na língua natural, pois após essa transformação basta utilizar os recursos computacionais existentes. Também expliquei que dificilmente seria possível encontrar soluções testando valores quando os dados do problema fossem gerados por situações reais, visto que a probabilidade dos números não serem inteiros é muito grande. Após os estudantes acessarem o site indicado para a resolução de sistemas lineares, reescrevi com a classe os modelos matemáticos dos três problemas da sequência didática, pois sete dos oito grupos realizaram o equacionamento apenas para o problema da Boate Kiss.

$$(1) \begin{cases} x + y = 36 \\ 120x + 95y = 3820 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 12x + 4y = 1096 \\ 36x + 8y = 3176 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x + y = 7 \\ 25x + 20y = 155 \end{cases}$$

Ao finalizar a escrita do terceiro sistema de equações – gerado pelo problema em que havia 7 extintores de 4kg e 8kg a serem distribuídos ao longo de um corredor de 155 metros – uma aluna questionou por que não poderia ser $4x + 8y = 155$. Perguntei para todos o que significava a expressão $4x + 8y$ no problema. Como ficaram em silêncio, perguntei apenas o significado de $4x$. Permanecendo, o silêncio, fiz a seguinte tabela:

Quantidade de extintores de 4kg	
1	
2	
3	
4	
x	4x

E assim fomos preenchendo a grade:

Quantidade de extintores de 4kg	
1	$4.1 = 4$
2	$4.2 = 8$
3	$4.3 = 12$
4	$4.4 = 16$
x	$4x$

Então questioneei:

P: Dois extintores de quatro quilos é o mesmo que 8 o quê? Três extintores de quatro quilos é o mesmo que 12 o quê?

A: os quilos.

P: Ah... então “x” extintores de 4 quilos é o mesmo que “4x”....

A: quilos.

P: Então $4x$ é o mesmo que o peso total dos extintores de 4kg.

Completei a tabela:

Quantidade de extintores de 4kg	Peso dos extintores de 4kg
1	$4.1 = 4$
2	$4.2 = 8$
3	$4.3 = 12$
4	$4.4 = 16$
x	$4x$

P: E o que significa $8y$?

A: O peso total dos extintores de 8kg.

P: Isso! E o que é $4x + 8y$?

A: É o peso de todos os extintores juntos.

P: Ótimo! E o que é o 155?

A: É o comprimento do corredor do hospital.

P: Faz sentido a gente escrever $4x + 8y = 155$? O peso total dos extintores é igual a 155 metros de comprimento?

A: Não.

P: A gente tem que sempre ter o cuidado de, quando traduzimos do português para matemática, entender o que significa cada expressão que estamos escrevendo.

Após a explicação, os alunos iniciaram a atividade 8, conforme ilustra a Figura 33.

Figura 33: Atividade 8 - solução do sistema de equações da atividade 2.

Equação 1:	<input type="text" value="x+y=36"/>
Equação 2:	<input type="text" value="120x+95y=3820"/>
<div style="display: flex; justify-content: center; gap: 10px;"> + - </div> <div style="display: flex; justify-content: center; gap: 10px; margin-top: 10px;"> Calcular Limpar </div>	
$y = 20, x = 16$	

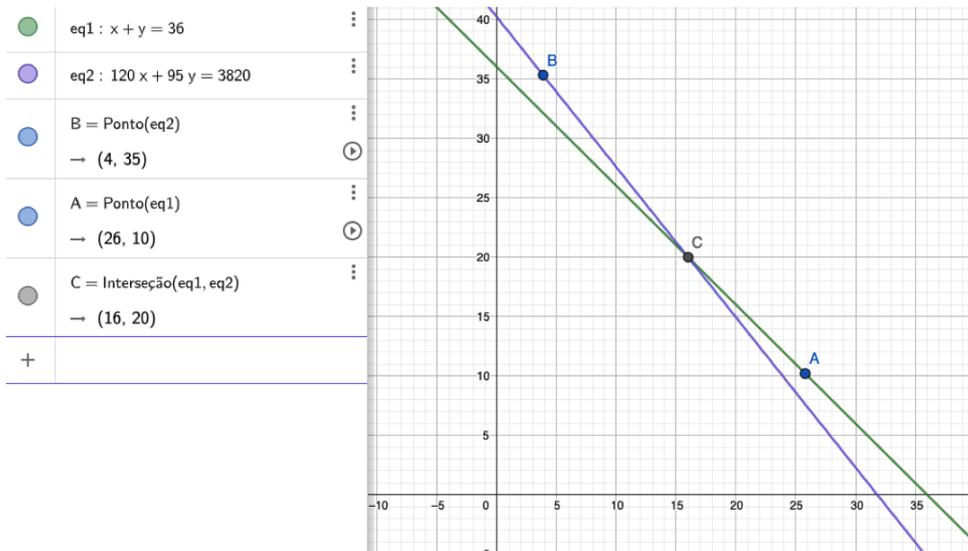
Fonte: <http://www.calculadoraonline.com.br/sistemas-lineares>

Destacamos que a dúvida apresentada pela aluna indica que alguns estudantes buscam informações numéricas no problema para assim escrever as equações, sem a preocupação de compreender o significado das mesmas na língua natural. Portanto, consideramos de extrema importância a frequência na elaboração de atividades que exijam a descrição do significado de expressões algébricas em diferentes situações.

5.5.2 Atividade 9

Associar uma equação linear com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano, bem como identificar a solução de um sistema de equações lineares no plano cartesiano, são habilidades, previstas na BNCC, a serem desenvolvidas pelos discentes. Além disso, seguindo a teoria de Duval já mencionada anteriormente, são as transformações entre os diferentes registros de representação de um objeto que possibilitam a compreensão matemática. Assim, a sequência didática é finalizada com o registro gráfico do sistema de equações lineares. Para essa atividade, os alunos usaram como ferramenta o software Geogebra, conforme ilustram as Figuras 34, 35 e 36.

Figura 34: Atividade 9 - visualização gráfica do sistema de equações da atividade 2.

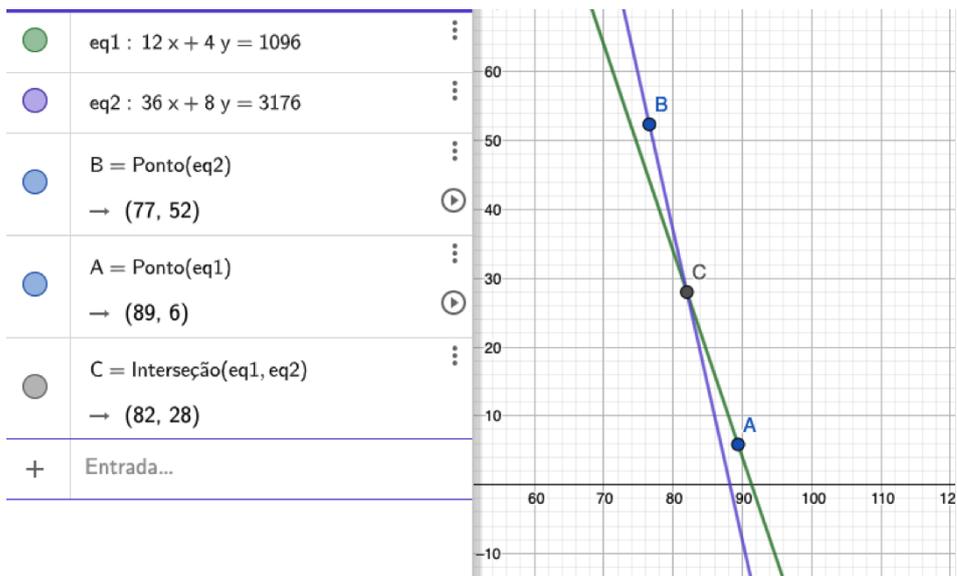


Fonte: <http://www.geogebra.org/graphing>

Ao movimentar o ponto A, pertencente à reta da equação “ $x + y = 36$ ” os alunos perceberam que os pares ordenados obtidos satisfaziam a equação. Solicitei que eles fizessem o mesmo com o ponto B, calculando três pontos à sua escolha na equação “ $120x + 95y = 3820$ ”. Não houve dificuldade na realização dessa tarefa, visto que foi testando valores que os estudantes resolveram dois dos três problemas da sequência didática.

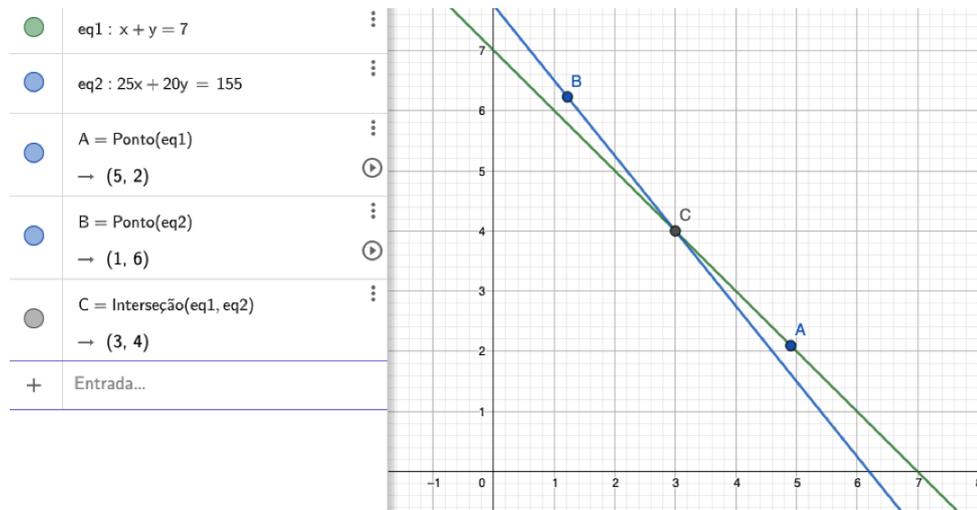
A mesma análise foi realizada nos sistemas gerados pelos problemas seguintes.

Figura 35: Atividade 9 - visualização gráfica do sistema de equações da atividade 3.



Fonte: <http://www.geogebra.org/graphing>

Figura 36: Atividade 9 - visualização gráfica do sistema de equações da atividade 4.



Fonte: <http://www.geogebra.org/graphing>

Compreendendo que uma das retas possui todas as soluções da primeira equação, enquanto a outra possui todas as soluções da segunda equação, foi fácil perceber que a solução do sistema de equações lineares é o ponto de intersecção dessas retas, indicado nas figuras anteriores como ponto **C**. Assim, corroboramos Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) que afirmam que as TICs facilitam não só a visualização, aspecto importante para a compreensão de determinados conceitos matemáticos, mas também pode colaborar com o desenvolvimento da própria Modelagem.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo foi possível elencar uma série de proveitos obtidos ao apresentar a proposta de trabalho sob a perspectiva da Modelagem Matemática. Já na atividade inicial, a qual tinha o objetivo de ambientar os alunos com os diferentes tipos de incêndio e o extintor apropriado a cada um deles, observamos o impacto positivo da tarefa na autoestima e conscientização dos educandos: além de perceberem que violar os extintores não era uma diversão, ao percorrer a escola analisando e identificando a funcionalidade dos diferentes equipamentos disponível em cada espaço, um dos estudantes comentou: “um homem ficou nos olhando pra entender o que a gente tava fazendo, nos achando inteligentes”. Verificamos, então, o papel da Modelagem Matemática na melhora da autoestima dos alunos, como citado anteriormente por Meyer, Caldeira e Malheiros (2011). Esse papel é fundamental, principalmente ao analisarmos o contexto a qual os sujeitos da pesquisa estão inseridos. Na maioria das vezes, a falta de incentivo passa pela frustração dos estudantes, por acreditarem que não são capazes de superar os desafios da aprendizagem. Além disso, percebeu-se uma conscientização dos educandos quanto ao seu papel social na escola, quando houve um engajamento em orientar os outros alunos da instituição sobre o instrumento adequado a ser utilizado em cada tipo de incêndio, e, principalmente, alertar o corpo discente sobre o quanto a escola estava vulnerável no caso de algum acidente com fogo. Percebemos, então, que atingimos outro objetivo citado anteriormente por Bassanezi (2002): competência crítica.

As três atividades seguintes visavam, entre outras finalidades, desenvolver a autonomia dos educandos na resolução de problemas. Apesar de apenas um deles ser resolvido mediante a construção do modelo algébrico, considero que tal objetivo foi atingido, visto que os grupos criaram suas estratégias e chegaram ao resultado sem solicitar auxílio. Observamos, então, os argumentos formativos e de utilidade citados por Bassanezi (2002). Além disso, o problema contextualizado no incêndio da Boate Kiss, em Santa Maria/RS, desencadeou diferentes momentos de discussão entre os estudantes. Foram abordados temas transversais concomitantemente com o conteúdo matemático, o qual na maioria das vezes é tratado de forma dissociada pelos alunos. Assim, foi possível observar o resultado do trabalho interdisciplinar, ilustrado na Figura 37, em que o professor de filosofia abordou a temática dos incêndios florestais em suas aulas, contribuindo significativamente com as discussões realizadas nas aulas de matemática.

Figura 37: Produção dos estudantes na aula de filosofia.



Fonte: Cartaz elaborado pelos estudantes.

Além disso, observou-se como efeito interessante dessa proposta de trabalho, o quanto a questão relativa aos incêndios florestais foi significativa, quando essa foi tema de uma das poesias no Slam¹ ocorrido na escola. Portanto, concluímos que a Modelagem Matemática propicia a articulação entre os saberes além da matemática, qualificando a aprendizagem sob a perspectiva da Educação Integral e interdisciplinaridade. Deixamos, então, como proposta futura, aplicar a sequência didática apresentada nesta pesquisa com a participação de outras disciplinas, tendo como objetivo qualificar e avaliar as contribuições do trabalho multidisciplinar na produção dos estudantes.

Nas atividades de produção final, objetivamos avaliar a aprendizagem dos educandos sob a perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. O envolvimento geral da turma, em relação às atividades anteriores, diminuiu. Consideramos que a dificuldade maior ocorreu justamente na inversão dos sentidos da conversão de não congruência do modelo algébrico para a língua natural, sentido o qual não costuma ser muito abordado no ensino, onde os alunos saem de uma determinada lógica em relação aos processos de ensino e aprendizagem para atuar sobre outra perspectiva. Consideramos que tal mudança refletiu na forma que os estudantes encararam e trabalharam nas questões apresentadas. Porém, em alguns grupos foi possível observar que foram desenvolvidas em seus integrantes tanto as Competências Gerais para a Educação Básica, quanto as habilidades e competências específicas para a matemática no Ensino Fundamental destacadas ao longo

¹Slam Poetry, traduzido da língua inglesa como concurso de poesias, é um movimento nascido em Chicago, EUA em 1986. Chegou ao Brasil em 2008, e consiste em um campeonato de poesia falada com regras pré-determinadas, em que um júri elege o poeta vencedor.

desta pesquisa. Além disso, consideramos que ao trabalhar com essa mesma turma numa perspectiva que siga uma estrutura próxima dessa, teremos como resultado outros elementos, visto que os educandos já terão outras habilidades que foram construídas ao longo desta experiência.

Ao inserir as TIC's não só para a pesquisa da produção inicial, mas principalmente para agregar na aprendizagem dos estudantes na produção final, verificamos que, por parte de alguns grupos, houve o reconhecimento do sistema de equações lineares nas três representações abordadas no trabalho: língua natural, linguagem algébrica e gráfica. Contudo, todos os grupos demonstraram com facilidade a compreensão da última tarefa, a qual permitia visualizar, por meio do gráfico, as infinitas soluções de uma equação com duas incógnitas, bem como a solução de um sistema de equações lineares.

Assim, concluímos que, explorando também o uso da transversalidade no ensino, constatou-se o envolvimento dos estudantes com a matemática e também o interesse em outras áreas de conhecimento. Ao realizarem suas pesquisas, tentativas e erros, e discussões envolvendo ética e cidadania, observamos principalmente a conscientização dos mesmos a respeito da importância do cuidado e a responsabilidade com o espaço que ocupam. Por fim, propomos também, como trabalho futuro, a aplicação de uma sequência didática para o estudo da geometria sob os enfoques da Modelagem Matemática e Registros de Representação Semiótica, tendo como temática multidisciplinar as hortas comunitárias.

REFERÊNCIAS

- Andrini, A.; Vasconcellos, M. J. *Praticando Matemática, v.8*. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.
- Bassanezi, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.
- Biembengut, M. S.; Hein, N. *Modelagem Matemática no ensino*, 5ª edição. São Paulo: Contexto, 2018.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base*. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Acessado em janeiro de 2021.
- Colombo, J. A. A.; Flores, C. R.; Moretti, M. T. *Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências*. ZETETIKÉ, v. 16, n. 29, p. 41-72, jan/jun 2008.
- D'ambrosio, U. *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer*. São Paulo: Ática, 1990
- Dolz J.; Noverraz, M.; Schneumly, B. *Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento*. In: Schneumly B.; Dolz, J. (Orgs.), *Gêneros orais e escritos na escola*. Campinas: Mercado de Letras, 2004.
- Duval, R. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*, 4a. edição. Campinas: Papyrus, 2008.
- Duval, R. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- Filho, A. G. D.; Fevorini, R. A. *Matemática, volume 2*. São Paulo: Scipione, 1985.
- Franchi, R. H. O. L. *Ambientes de aprendizagem fundamentados na Modelagem Matemática e a Informática como possibilidades para a Educação Matemática*. In: Barbosa, J. C.; Caldeira, A. D.; Araújo, J. L. *Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: Pesquisas e Práticas Educacionais*. Recife: SBEM, 2007.
- Justo, D. A. R.; Sauter, E.; Azevedo, F. S.; Guidi, L. F.; Konzen, P. H. A. *Cálculo numérico - um livro colaborativo - versão com scilab*. Disponível em <https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-sci/main.html>, Novembro 2016. Acessado em janeiro de 2021.
- Hefez, A.; Fernandez, S. C. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.
- Meyer, J. F. C. A.; Caldeira, A. D.; Malheiros A. P. S. *Modelagem em Educação Matemática*, 4a. Edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

Monteiro, A.; Pompeu J. G. *A Matemática e os Temas Transversais*. São Paulo: Moderna, 2001.

Silva, M. P. F. Histórias em quadrinhos em contexto matemático: uma proposta para o ensino de triângulos à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica. Dissertação de Mestrado, UFRN, 2017.

Peters, S.; Szeremeta, J. P. *Cálculo Numérico Computacional*. Florianópolis: Editora da UFSC, 2018.