Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Gerson Bruno Pinto de Aguiar

A CIRCUNFERÊNCIA ESCRITA COMO O PRODUTO E SOMA DE MATRIZES: UMA NOVA ABORDAGEM DO ENSINO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO

Teresina - 2021

PROFMAT

Gerson Bruno Pinto de Aguiar

Dissertação de Mestrado:

A CIRCUNFERÊNCIA ESCRITA COMO O PRODUTO E SOMA DE MATRIZES: UMA NOVA ABORDAGEM DO ENSINO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida à Coordenaçao do Programa de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática na modalidade profissional.

Orientador:
Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Souza.

Teresina - 2021

Universidade Federal do Piauí - UFPI, Centro de Ciência da Natureza - CCN, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Mestrado Profissional em Matemática. Cep 64049-550 - Teresina, PI.

Ficha Catalográfica

A283c Aguiar, Gerson Bruno Pinto de.
A circunferência escrita como o produto e soma de matrizes: uma nova abordagem do ensino de matrizes no ensino médio / Gerson Bruno Pinto de Aguiar. - 2021.
96 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT, 2021.
"Orientador: Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Souza."
1. matrizes. 2. Circunferências. 3. Ensino Médio. I. Souza, Cleidinaldo Aguiar. II. Titulo.

CDD 512.943

Gerson Bruno Pinto de Aguiar

Título da Dissertação

Dissertação submetida à banca examinadora abaixo discriminada em defesa pública e aprovada em 26/02/2021.

BANCA EXAMINADORA

Cleidinaldo Aguiar Souza

Prof. Dr. Cleidinaldo Aguiar Souza (Orientador)
Universidade Federal do Piauí

Ítalo Dowell Lira Melo

Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo
Universidade Federal do Piauí

José Santana C. Costa

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
Universidade Federal do Maranhão

Teresina - 2021

Dedico esta dissertação à minha família, principalmente minha mãe que me criou, dona Maria do Carmo Ferreira da Silva, a minha esposa, Raylane Karoline Martins Sousa, que quando eu mais precisei sempre estavam dispostas a ajudar como podiam. Dedico a meu pai que me criou, Joaquim Joel Abrel, que hoje "não está mais entre nós", entretanto foi graças a seus ensinamentos de valores e moral que consegui conquistar esse sonho. Dedico também ao meu querido colega de turma, Francisco Daniel de Sousa Cavalcante, que foi a alegria da turma e que nos deixou com saudades.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, que em muitas ocasiões foi quem me deu forças para continuar trabalhando e estudando, que fez também com que os problemas se tornassem pequenos. Agradeço ao meu orientador, que foi um dos meus primeiros professores na UFPI, ainda na graduação, e que abriu as portas para orientar-me, dedicando muito tempo e paciência. Ao professor e doutor Ítalo Dowell Lira, que ainda na graduação conseguiu despertar em mim uma vontade de "crescer na matemática", indo atrás de descobrir novos caminhos para resolução de problemas. Em geral, agradeço a todos os professores do mestrado.

Agradeço também ao meus amigos de turma, que são todos. Aprendi muita coisa com cada um. São professores excelentes, e com toda certeza fizeram de mim mais um de seus alunos. Ao meu amigo Rodrigo, agradeço muito, pois quando eu mais precisei ele estava disposto a ouvir e aconselhar.

Agradecimentos especiais para minha mãe,que juntamente com meu pai foram muito importantes na minha vida, pois eles me criaram e deram-me um lar cheio de amor, e que mesmo em tempos difíceis nunca deixaram faltar nada. Minha esposa também tem um papel importante nessa nova conquista, pois graças a ela consegui tempo para estudar. Meus filhos também me ajudaram nessa caminhada, pois a partir deles compreendi que as vezes o simples significa muito e é parte fundamental de algo maior.

Resumo

Neste trabalho mostraremos que uma circunferência centrada em um ponto qualquer, pode ser escrita através de operações com matrizes. Isto fornece uma caracterização de uma circunferência, diferente da caracterização usual, apresentada para estudantes da educação básica.

Desta forma, conseguimos uma interpretação geométrica para algumas operações com matrizes. Por meio desta interpretação geométrica, introduziremos a noção de trajetória, e consequentemente a ideia de deslocamento de pontos sobre um plano através de matrizes.

Aplicaremos a ideia de deslocamento de pontos sobre um plano para estudarmos a trajetória descrita por um robô móvel autônomo.

Palavras-Chave: circunferência; matrizes; determinantes; veículos autônomos.

Abstract

In this work, we will show that a circumference centered on any point can be written using matrix operations. This provides a characterization of a circumference, different from the usual characterization, presented to students of basic education.

In this way, we achieved a geometric interpretation for some matrix operations. Through this geometric interpretation, we will introduce the notion of trajectory, and consequently the idea of displacement of points on a plane through matrices.

We will apply the idea of displacement of points on a plane to study the trajectory described by an autonomous mobile robot.
Key-words: circumference; matrices; determinants; autonomous vehicles.

Sumário

Resumo **iii**

Abstract **iv**

Sumário **v**

1 Definições e Propriedades das Circunferências e Matrizes **3**

1.1 Preliminares 3

1.1.1 O Plano Cartesiano 3

1.1.2 Circunferência 8

1.1.3 Matrizes 11

1.1.4 Determinante 33

2 Uma Nova Maneira de Escrever as Circunferências **41**

2.1 A Circunferência Escrita Como Produto e Soma de Matrizes 41

2.1.1 Escrevendo A Circunferência Através de Matrizes - Conhecendo o Seu Centro e um Ponto da Cirncunferência Centrada na Origem. 43

2.1.2 Escrevendo A Circunferência Através de Matrizes- Conhecendo o centro e um de Seus Pontos 55

3 O Deslocamento de Pontos Sobre a Circunferência **57**

3.1 O Deslocamento de Pontos Atráves das Operações com Matrizes 57

3.2 Deslocamento de Robôs Móveis Através de Operações com Matrizes 77

Prefácio

Falando um pouco sobre a minha trajetória, sempre estudei em escola pública. Fui criado pelos meus tios, que considero como meus pais, eles deram todo o suporte para que eu pudesse estudar. Cursei o Ensino Fundamental na Escola Municipal Simões Filho, que apesar de ser pública tinha professores apaixonados por ensinar, e foi graças a alguns dele que comecei a gostar de matemática. Na graduação, conheci muitos professores excelentes que me ajudaram muito, alguns deles mostraram-me a beleza da matemática, fazendo com que eu cada vez mais me apaixonasse pelo cálculo algébrico e pela geometria. Quando comecei nas primeiras aulas da universidade logo percebi que não sabia de praticamente nada, tinha muita dificuldade em coisas básicas, por exemplo, eu não sabia se $O^1 = 0$ ou se $1^0 = 0$. Foi graças a paciências e ajuda dos primeiros professores da graduação que eu ganhei um pouco de maturidade e consegui que algumas dessas questões básicas fossem resolvidadas. Esse caminho que tive foi fundamental para a escrita desse trabalho, pois a partir das relações e dos caminhos 'duros' que tive que percorrer para aprender o básico é que desenvolvi um trabalho com uma linguagem simples e com riqueza de detalhes que ajudarão o leitor.

Esta dissertação de mestrado tem como o objetivo servir de instrumento para que professores da educação básica tenham mais uma ferramenta para transformar o ensino de matrizes em algo mais prazeroso, uma vez que associamos o ensino desse conteúdo com a geometria, e depois a tecnológia, através de deslocamento de robôs. Como será mostrado, essa é uma boa conexão dos conteúdos, principalmente em tempos atuais onde se busca cada vez mais professores capazes de fazer uma bela ligação entre as diversas áreas do conhecimento. Essa é a busca da interdiciplinaridade, fazer com que os alunos percebam, cada vez mais, que os conteúdos podem se relacionar, e com isso conseguir que eles tenham uma visão menos fragmentada dos mesmos.

Optamos, eu o meu orientador, por fazer um trabalho dedicado não somente aos professores da educação básica, mas também aos alunos, dedicando muitas figuras e exemplos para melhor compreensão. Provamos a maioria dos teoremas e preposições com muitos detalhes, mostrando a maioria dos cálculos feitos. Isso, sem dúvidas, ajuda o leitor, principalmente aquele que não está familiarizado com argumentos matemáticos.

A primeira parte desta dissertação, Capítulo 1, trás as principais definições e preposições que serão de fundamental importância para o decorrer desse trabalho. Nesse capítulo temos as definições preliminares, como o plano cartesiano, circunferências, matrizes e determinantes. A maior parte desses conteúdos são ensinados no Ensino Básico, entretanto resolvi optar por desenvolver o conteúdo que envolve o plano cartesiano como é visto no ensino de Geometria analítica, definindo primeiramente o eixo ϵ, e a partir disso ganhamos uma correlação(biunívoca) com esse eixo e o conjunto dos números reais. No Capítulo 2 temos os principais teoremas desenvolvidos, que relacionam as circunferências com as operações com matrizes, esse capítulo sem dúvidas é o mais importante desse trabalho, pois a partir da descrição das circunferências por meio de operações com matrizes podemos trabalhar o Capítulo 3, que é estudar deslocamento dos pontos pertencentes à circunferência de centro qualquer, também atráves de operações matrizes. Finalmente, no capítulo 4, associaremos o estudo dos capítulos anteriores ao deslocamento de robôs autônomos.

Introdução

Um problema recorrente na educação básica, consiste em encontrar uma ligação, entre os diversos conteúdos que são ensinados em sala de aula e a vida prática. Por vezes estas ligações acabam não sendo trabalhadas, pois foca-se apenas na teoria. Como consequência, atualmente as escolas procuram cada vez mais professores que para além do domínio do conteúdo exigido em sala de aula, consigam fazer uma bela ligação entre estes conteúdos, através das diversas áreas do conhecimento. Muitas destas exigências são atendidas através de projetos realizados dentro das escolas.

Pensando na interdisciplinaridade, vamos conectar o ensino o ensino de matemática, mais precisamente o ensino de álgebra e geometria para resolver um problema clássico no campo da robótica, que é guiar um robô autônomo de uma determinada configuração inicial até uma dada configuração final, na presença de obstáculos. Uma das alternativas para resolver este tipo de problema, é encontrar uma trajetória por onde o robô irá se deslocar.

Encontrar trajetórias em geral não é tarefa fácil, porém para estudantes que já possuem uma boa maturidade com a disciplina de Cálculo Avançado, o entendimento do comportamento da trajetória é facilitado. Entretanto, para estudantes da educação básica, esta tarefa pode ser bastante complicada, devido a falta de ferramentas que são necessárias.

Neste trabalho, utilizaremos matrizes para encontrar trajetórias para o deslocamento de um robô autônomo. Mais precisamente, mostraremos que uma circunferência de centro qualquer e raio $r > 0$, é dada através de operações com matrizes. Desta forma, obteremos uma nova maneira de escrever uma circunferência.

Em [4] Oliveira, mostrou que uma circunferência com centro na origem é obtida através do produto de matrizes ortogonais por um ponto fixo pertencente a circunferência. No ano de 2020, em [4] Oliveira e Souza descreveram através do produto de matrizes a trajetória de um robô autônomo, descrita por uma circunferência centrada na origem.

Generalizaremos os trabalhos [4] e [5] de Oliveira e Souza, para tanto, o trabalho está divido da seguinte maneira: o Capítulo 1, é dedicada aos estudos preliminares, onde apresentaremos o plano cartesiano, a circunferência do modo usual, matrizes e suas propriedades, assim como determinantes e suas propriedades. Na Capítulo 2, apresentaremos os resultados que generalizam o trabalho [4] de Oliveira-Souza. No Capítulo 3, faremos aplicações dos resultados apresentados no Capítulo 2, generalizaremos a noção de deslocamento/ trajetória através de operações com matrizes, finalizando a seção com aplicação de deslocamento de um veículo autônomo para perseguição de uma nuvem de poluição. O Capítulo 4, é dedicado à conclusão desta dissertação.

Capítulo 1

Definições e Propriedades das Circunferências e Matrizes

1.1 Preliminares

Neste Capítulo apresentaremos resultados trabalhados na educação básica que são de fundamental importância para o entendimento deste trabalho.

Dividiremos este Capítulo em quatro subcapítulos da seguinte maneira: no primeiro subcapítulo, apresentaremos de um modo formal o plano coordenado; no subcapítulo seguinte, será a vez de trabalharmos com a circunferência, definida através da distância entre dois pontos em um plano; no terceiro subcapítulo, definiremos matrizes e enunciaremos suas propriedades; por sua vez, o último subcapítulo será dedicada a teoria de determinante de uma matriz. Para mais detalhes sobre toda teoria apresentada neste capítulo, você pode consultar as referências [1], [2] e [3].

1.1.1 O Plano Cartesiano

Introduziremos coordenadas na reta e no plano para representar pontos por meio de números reais. A representação dos pontos por suas coordenadas torna possível resolver algebricamente diversos problemas geométricos.

Dada uma reta **r**, aos pontos desta reta associamos números reais da seguinte maneira. Sejam O e A pontos distintos em **r**. A reta **r** sobre a qual foi escolhida uma semirreta $\vec{OA}$, denomina-se **eixo** ϵ de **origem** O com **sentido de percurso induzido pela semirreta** $\vec{OA}$, como ilustra a Figura (1.1).

À distância entre dois pontos $X, Y \in r$ será denotada por $d(X, Y)$, assim obtemos uma correspondência (biunívoca) entre o eixo ϵ e o conjunto dos números reais dada por:

(i) à origem O associamos o número real 0 (zero): $O \longleftrightarrow 0$;

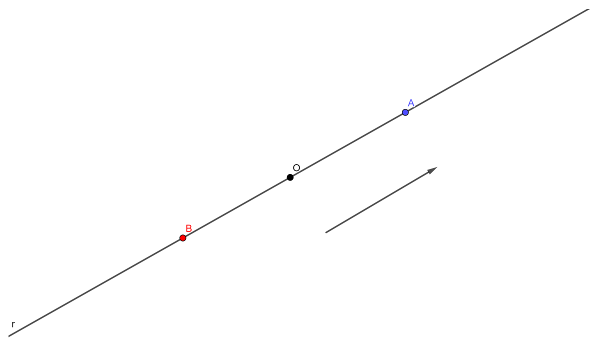

Figura 1.1: Reta **r** com origem O .

(ii) a cada ponto $X \neq O$ da semirreta $\vec{OA}$ associamos o número real positivo $x = d(O, X)$: $X \longleftrightarrow x$;

(iii) a cada ponto $Y \neq O$ da semirreta $\vec{OB}$, oposta a semirreta $\vec{OA}$, associamos o número real negativo $y = -d(O, Y)$: $Y \longleftrightarrow y$.

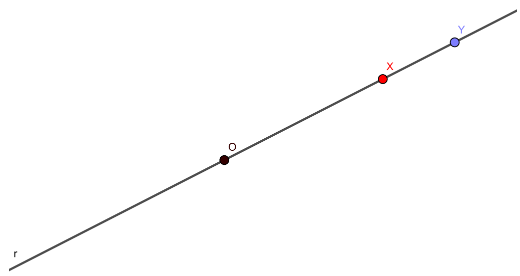

Figura 1.2: X está à esquerda de Y.

Como consequência da definição acima, temos que

- O número real 0 (zero) tal que $O \longleftrightarrow 0$, é denominada coordenada da origem O no eixo ϵ.
- O número real x tal que $X \longleftrightarrow x$, é denominada coordenada do ponto X no eixo ϵ.

Como os pontos que estão sobre uma reta r podem ser representados por um número real, então naturalmente em relação à ordem podemos comparar os elementos sobre uma reta r, da seguinte maneira.

Sejam $X, Y \in \mathbf{r}$ e sejam x e y suas, respectivas, coordenadas no eixo ϵ. Dizemos que Y está à direita (ou X está à esquerda de Y, como ilustra a Figura (1.2)) de X quando $x < y$, como ilustra a Figura (1.3). Desta forma se $\vec{OB}$ é semirreta oposta a $\vec{OA}$, então os pontos distintos de O na semirreta $\vec{OA}$ estão à direita de O, e os pontos distintos de O na semirreta $\vec{OB}$ estão à esquerda de O.

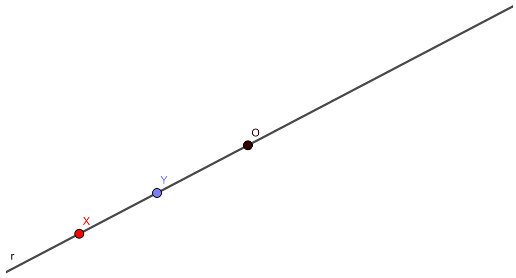

Figura 1.3: Y está à direita de X.

A proposição a seguir, fornece uma maneira de calcular a distância entre dois pontos sobre uma reta através de suas coordenadas reais.

Proposição 1.1.1. Se x e y são as coordenadas dos pontos X e Y sobre o eixo ϵ, respectivamente, então

$$d(X,Y) =\mid x - y \mid .$$

Demonstração. Se $X = Y$, então imediatamente temos que $d(X,Y) = 0 =\mid x - y \mid$. Suponhamos que, $X = O$ ou $Y = O$, então

$$d(X,Y) = d(O,Y) =\mid y \mid=\mid 0 - y \mid=\mid x - y \mid$$

ou

$$d(X,Y) = d(X,O) =\mid x \mid=\mid x - 0 \mid=\mid x - y \mid .$$

Sejam X, Y e O três pontos distintos. Sem perda de generalidade, suponhamos que X está à esquerda de Y, isto é, $x < y$. Temos três casos a considerar:

caso 1. X e Y estão à direita da origem. Isto é, $0 < x < y$.

Neste caso, X está entre O e Y, pois caso contrário, Y estaria entre O e X e $d(O,Y) = y < x = d(O,X)$, o que contraria nossa hipótese. Logo,

$$d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y) \iff y = x + d(X,Y) \iff d(X,Y) = y - x =\mid x - y \mid .$$

caso 2. X e Y estão à esquerda de O. Isto é, $x < y < 0$.

De maneira análoga ao caso anterior, podemos verificar que Y está entre X e O. Assim,

$$d(X,O) = d(X,Y) + d(Y,O) \iff -x = d(X,Y) - y \iff d(X,Y) = y - x = \mid x - y \mid .$$

caso 3. X está à esquerda de O e Y está à direita de O. Isto é, $x < 0 < y$. Neste caso, Y está na semirreta $\vec{OA}$ e X está na semirreta oposta a $\vec{OA}$. Portanto, O está entre X e Y e

$$d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y) \iff d(X,Y) = -x + y = y - x = \mid x - y \mid .$$

$\square$

Um **sistema de eixos ortogonais** num plano π é um par de eixos, eixo OX e eixo OY, com unidade de medida de igual comprimento, que intersectam-se perpendicularmente na origem comum O. O eixo OX é denominado **eixo horizontal** e o eixo OY é denominado, **eixo vertical**. O Plano π com o sistema de eixos ortogonais acima, será chamado **sistema de eixos ortogonais** OXY, ou simplesmente **sistema** OXY, como ilustra a Figura (1.4).

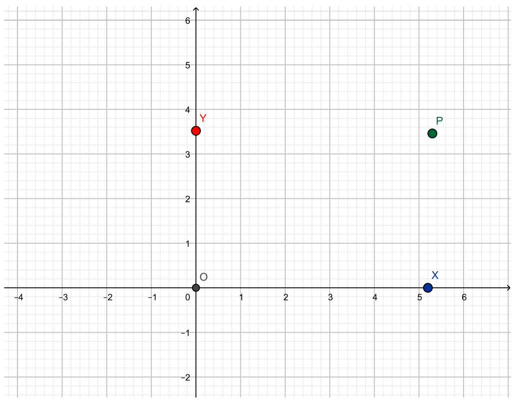

Figura 1.4: Sistema de eixos ortogonais .

A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid \quad x, y \quad \in \mathbb{R}\},$$

da seguinte maneira.

Dado arbitrariamente um ponto $P_0 \in \pi$, traçamos as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ passando por P_0, tal que:

(i) **r** seja paralela ao eixo OY e toque o eixo OX em um ponto X_0;

(ii) **s** seja paralela ao eixo OX e toque o eixo OY em um ponto Y_0.

Por coordenada na reta, o ponto X_0 está em correspondência biunívoca com um número real x_0 e o ponto Y_0 está em correspondência biunívoca com um número real y_0. Assim, obtemos a correspondência

$$P_0 \quad \longleftrightarrow \quad (x_0, y_0).$$

Como $P_0 \in \pi$ é arbitrário, segue que para todo ponto $P \in \pi$ existe uma correspondência biunívoca

$$P \quad \longleftrightarrow \quad (x, y).$$

Os números $x, y \in \mathbb{R}$ do par ordenado (x, y) associado ao ponto P são chamados **coordenadas cartesianas** do ponto P: x é a **primeira coordenada** ou **abscissa** de P e y é a **segunda coordenada** ou **ordenada** de P, como ilustra a Figura (1.4).

O complementar dos eixos no plano é a união de quatro regiões denominadas **quadrantes** e enumerados, como ilustra a Figura (1.5).

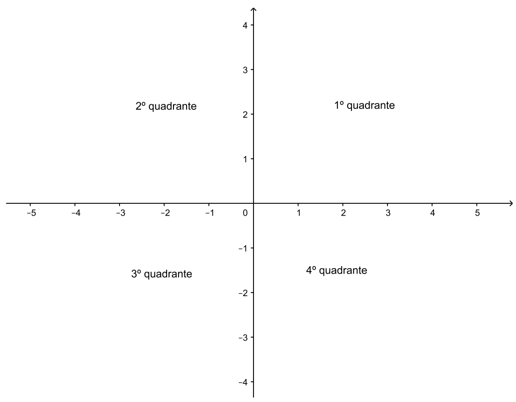

Figura 1.5: Um plano dividido em quadrantes .

Note que os pontos do eixo OX têm coordenadas $(x, 0)$, os pontos do eixo OY têm coordenadas $(0, y)$ e os quadrantes, dados em coordenadas, são:

1^0 quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \;\; e \;\; y > 0\}$;

2^0 quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \;\; e \;\; y > 0\}$;

3^0 quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \;\; e \;\; y < 0\}$;

4^0 quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \;\; e \;\; y < 0\}$;

Assim, a numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas, como ilustra a Figura (1.5).

1.1.2 Circunferência

Agora definiremos um subconjunto do plano, que terá papel central no decorrer de todo este trabalho. Para tal definição utilizaremos as coordenadas de um ponto no plano. Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos do plano π dados por suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY. Dado um ponto $R = (c, b)$ no plano π, consideramos o triângulo retângulo PQR, com hipotenusa PQ e catetos PR e QR paralelos aos eixos OX e OY, respectivamente.

Como os catetos PR e QR estão sobre eixos e a distância entre dois pontos de um eixo é igual ao módulo da diferença de suas coordenadas, as medidas desses catetos são dadas por:

$$d(P,R) = \mid a - c \mid \quad e \quad d(Q,R) = \mid b - d \mid .$$

Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d(P,Q) = \sqrt{(d(P,R))^2 + (d(Q,R))^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}. \tag{1.1.1}$$

Assim, a distância do ponto $P = (a, b)$ ao ponto $Q = (c, d)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

Exemplo 1.1.1. Calcule a distância do ponto $A = (-2, 1)$ ao ponto $B = (3, -2)$.

Solução.
Temos que

$$d(A,B) = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}.$$

Através do cálculo da distância em coordenadas podemos obter uma caracterização algébrica da circunferência.

Definição. Uma **circunferência** $\mathcal{C}_r(P_0)$ de centro no ponto $P_0 \in \pi$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos do plano π situados à distância r do ponto P_0, como ilustra a Figura (1.6), ou seja:

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{P \in \pi : \quad d(P, P_0) = r\}.$$

Se $P_0 = (a, b)$ são as coordenadas do centro de uma circunferência, num sistema de eixos ortogonais OXY do plano π, segue que

$$P = (x,y) \in \mathcal{C}_r(P_0) \iff d(P,P_0) = r \iff d(P,P_0)^2 = r^2 \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Assim, associamos à circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ a equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

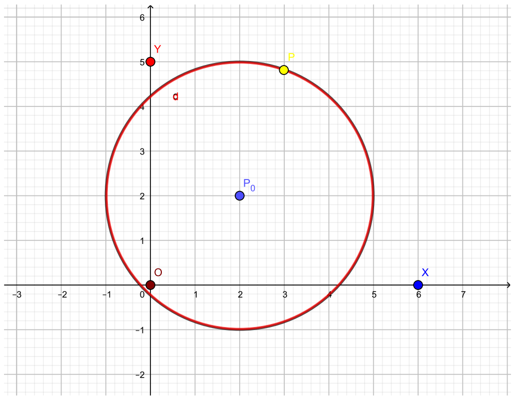

Figura 1.6: Circunferência centrada no ponto P_0, com raio $r > 0$.

que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Isto é,

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{(x, y) \in \pi : \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}.$$

Por meio dessa equação, as propriedades geométricas da circunferência podem ser deduzidas algebricamente.

Exemplo 1.1.2. A equação da circunferência de centro sobre um ponto $P_0 = (0, 0)$ e raio de medida 3, como ilustra a Figura (1.7), é dada por:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2,$$

isto é $x^2 + y^2 = 9$.

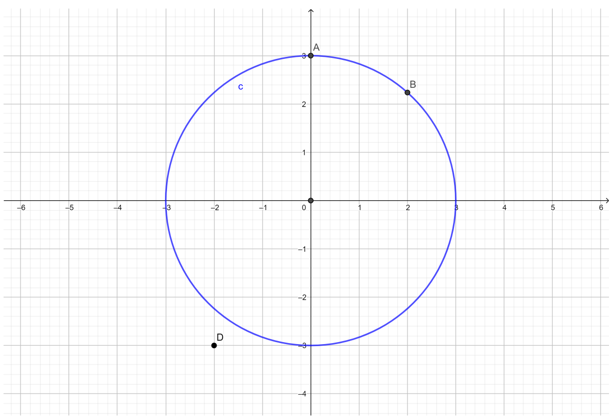

Figura 1.7: Uma circunferência de raio 3 e centro $P_0 = (0, 0)$.

Note que o ponto $A = (0, 3)$ pertence a circunferência $\mathcal{C}_3(0, 0)$, pois

$$(0-0)^2 + (3-0)^2 = 9.$$

Da mesma forma, o ponto $B = (2, \sqrt{5})$ também pertence, pois

$$2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9.$$

Já o ponto $D = (-2, -3)$ não pertence à circunferência, pois

$$(-2)^2 + (-3)^2 = 13 \neq 9.$$

Exemplo 1.1.3. A equação da circunferência de centro sobre o ponto $P_0 = (3, 4)$ e raio de medida 3, como ilustra a Figura (1.8), é dada por:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

Note que o ponto $A = (0, 4)$ pertence a circunferência $\mathcal{C}_4(3, 4)$, pois:

$$(0 - 3)^2 + (4 - 4)^2 = 9.$$

O ponto $D = (4, 3)$ não pertence, pois

$$(4 - 3)^2 + (3 - 4)^2 \neq 9.$$

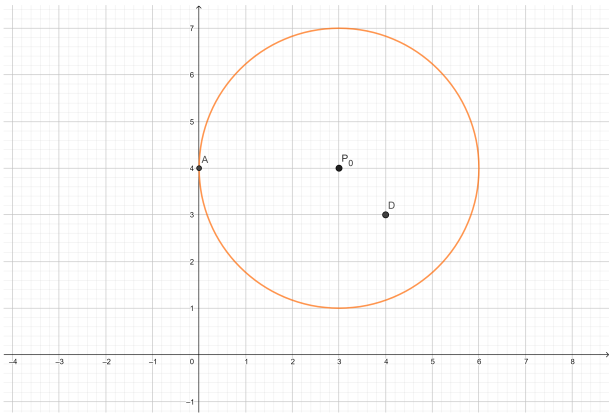

Figura 1.8: Circunferência centrada no ponto $(3, 4)$ e raio 3 .

Considere dois pontos A e B na circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$. O arco anti-horário com origem sobre o ponto A, denotado por $\overleftarrow{\Gamma}(A, B)$, é o conjunto de todos os pontos de $\mathcal{C}_r(P_0)$ entre os pontos A e B, percorrido de A até B no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 1.9.

Por sua vez, o arco horário com origem sobre o ponto A, denotado por $\overrightarrow{\Gamma}(A, B)$, é o conjunto de todos os pontos de $\mathcal{C}_r(P_0)$ entre os pontos A e B, percorrido de A até B no sentido horário, como ilustra a Figura 1.10

O nosso objetivo não é estudar a circunferência através de sua equação algébrica como a definição dada acima, mas como veremos, é obter uma nova caracterização para

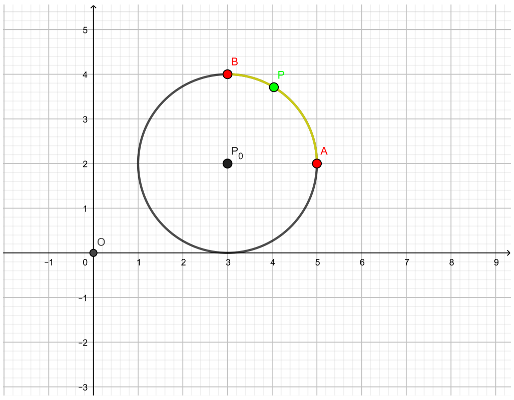

Figura 1.9: Arco anti-horário descrito em amarelo .

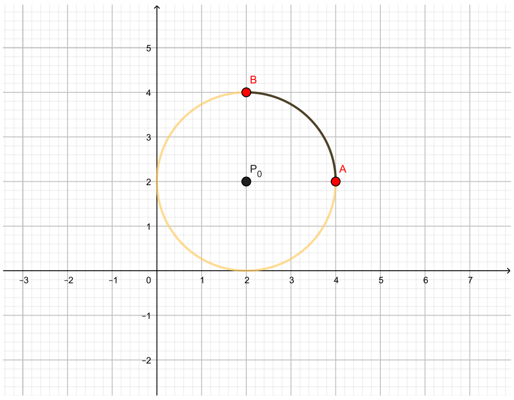

Figura 1.10: Arco horário descrito em amarelo .

a circunferência.

1.1.3 Matrizes

Definiremos matrizes formadas por elementos reais, assim como as operações envolvendo matrizes. Apresentaremos algumas matrizes, chamadas matrizes especiais. Enunciaremos os principais resultados envolvendo as operações com matrizes. O objetivo principal deste capítulo é definir matriz ortogonal.

Sejam **m** e **n** números naturais não nulos, uma tabela de **m** x **n** números reais dispostos em **m** linhas (filas horizontais) e **n** colunas (filas verticais) é uma matriz do tipo (ou formato, ou ordem) m **x** n, ou simplesmente matriz $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$. Denotaremos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números reais) entre parênteses ou entre colchetes.

Exemplo 1.1.4. A tabela

- $A = \begin{bmatrix} 31 & 0 & 8 & 18 \\ 34 & 1 & 13 & 0 \\ 90 & \pi & 56 & 11 \\ 0 & 0 & 34 & 1 \end{bmatrix}$, é uma matriz do tipo 4×4.

- $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 & 0 & 12 \\ 20 & 1 & 13 & 0 & 23 \\ 90 & \pi & 56 & 11 & 29 \end{bmatrix}$, é uma matriz do tipo 3×5.

Seja A uma matriz do tipo **m** x **n**, denotaremos um elemento qualquer desta matriz da seguinte maneira: a_{ij} ; no qual o índice i refere-se à linha e o índice j refere-se à coluna em que se encontra tal elemento.

Convencionaremos que as linhas são numeradas de cima para baixo, e as colunas, da esquerda para à direita. De um modo geral, uma matriz A do tipo **m** x **n** é representada por $A = (a_{ij})_{m \text{ x } n}$, em que i e j são números inteiros positivos tais que $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, e a_{ij} é um elemento qualquer de A.

Exemplo 1.1.5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 8 & 9 \\ 12 & 23 \end{bmatrix}_{3 \text{ x } 2}.$$

- O elemento que está na linha 1, coluna 1, é $a_{11} = -5$;
- O elemento que está na linha 1, coluna 2, é $a_{12} = 7$;
- O elemento que está na linha 2, coluna 1, é $a_{21} = 8$;
- O elemento que está na linha 2, coluna 2, é $a_{22} = 9$;
- O elemento que está na linha 3, coluna 1, é $a_{31} = 12$;
- O elemento que está na linha 3, coluna 2, é $a_{32} = 23$.

As matrizes apresentadas a seguir, são chamadas de **matrizes especiais**.

1. **Matriz Linha**: é uma matriz formada por uma única linha.

   Exemplo 1.1.6. $A = \begin{bmatrix} \pi & -12 & 20 \end{bmatrix}$, é uma matriz linha 1 x 3.

   Exemplo 1.1.7. $B = \begin{bmatrix} 0 & -17 \end{bmatrix}$, é uma matriz linha 1 x 2.

2. **Matriz Coluna**: é uma matriz formada por uma única coluna.

Exemplo 1.1.8. $A = \begin{bmatrix} 34 \\ 90 \\ 41 \\ -4 \end{bmatrix}$, é uma matriz coluna 4 x 1.

Exemplo 1.1.9. $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \\ \sqrt{7} \end{bmatrix}$, é uma matriz coluna 2 x 1.

3. **Matriz Nula**: é uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero. Pode-se indicar uma matriz nula m x n por $0_{m \text{ x } n}$.

   Exemplo 1.1.10. $0_{2\text{x}4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, é uma matriz nula 2 x 4.

   Exemplo 1.1.11. $0_{3 \text{ x } 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, é uma matriz nula 3 x 3.

4. **Matriz Quadrada**: é uma matriz que possui o número de linhas iguais ao número de colunas. Se A é uma matriz quadrada do tipo $n \times n$, diremos que A é uma matriz quadrada de ordem n.

   Exemplo 1.1.12. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, é uma matriz quadrada de ordem 2.

   Exemplo 1.1.13. $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & \frac{1}{3} \\ \\ -2 & 0 & 7 \\ \\ \sqrt{3} & 1 & 4 \end{bmatrix}$, é uma matriz quadrada de ordem 3.

   Seja A uma matriz quadrada de ordem n, temos que:

   i. Os elementos de A cujo índice da linha é igual ao índice da coluna constituem a **diagonal principal** de A.

      Exemplo 1.1.14. Se A é uma matriz quadrada de ordem 3, os elementos $\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{33}$ formam a diagonal principal de A.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{bmatrix}.$$

ii. Os elementos da matriz A cuja soma dos índices da linha e da coluna é igual a $n+1$ constituem a **diagonal secundária** de A. Retornando ao exemplo anterior, os elementos $\mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{22}, \mathbf{a}_{31}$ formam a diagonal secundária de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{33}} & a_{32} & a_{13} \end{bmatrix}.$$

5. **Matriz Identidade.** Seja A uma matriz quadrada de ordem n, A é denominada **matriz identidade de ordem** n (indica-se por I_n) se os elementos de sua diagonal principal são todos iguais 1, e os demais elementos são iguais a **zero**. Assim:

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 3.
- $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de ordem n.

Introduziremos as seguintes operações com matrizes: adição de matrizes, produto de um número real por uma matriz e produto entre matrizes. Em seguida demonstraremos as propriedades para estas operações. Iniciaremos definindo quando duas matrizes são iguais.

Duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ são iguais se todos os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, temos que $A = B$ se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Exemplo 1.1.15. Para que $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & d \\ c & -5 \end{pmatrix}$ sejam iguais, devemos ter

$$\begin{cases} a = 3 \\ 1 = d \\ 2 = c \\ b = -5 \end{cases}$$

Adição de matrizes.

Dadas duas matrizes de mesma ordem, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, a soma de **A** com **B** (representa-se por $A + B$) é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para

$1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Em outras palavras, a matriz soma **C** tem mesma ordem que **A** e **B** e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de **A** e **B**.

Exemplo 1.1.16.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & \sqrt{1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -6 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -8 & 14 & \sqrt{1}+1 \end{pmatrix}$$

Apresentaremos as propriedades da adição de matrizes.

Propriedade 1.1.17. *Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem $(m \times n)$ e $0_{m\times n}$ a matriz nula, de ordem $m \times n$, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:*

(I). **Comutativa:** $A + B = B + A$

(II). **Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$

(III). **Existência do elemento neutro:** Existe M tal que $A + M = A$, qualquer que seja a matriz $A_{m\times n}$. (Observe que, nesse caso, M é a matriz nula do tipo $m \times n$.)

(IV). **Existência do oposto (ou simétrico):** existe A' tal que $A + A' = 0_{m\times n}$.

Prova:

(I) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, temos:

$$A + B = C = (c_{ij})_{m\times n} \text{ e } B + A = D = (d_{ij})_{m\times n}.$$

Mostraremos que

$$C = D.$$

Veja que para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, temos

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Usando a propriedade comutativa dos reais

$$c_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = d_{ij},$$

e, então

$$C = D,$$

isto é

$$A + B = B + A.$$

Mostrando assim que vale a comutatividade.

(II) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{m\times n}$, temos:

$$(A + B) + C = D = (d_{ij})_{m\times n} \text{ e } A + (B + C) = E = (e_{ij})_{m\times n}.$$

Mostraremos que

$$D = E.$$

Veja que para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos:

$$d_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Usando a propriedade associativa da adição de números reais, podemos escrever:

$$d_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = e_{ij},$$

logo

$$D = E,$$

isto é

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

O que mostra a associatividade.

(III) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $M = (a_{ij})_{m\times n}$, suponha que

$$A + M = A,$$

então

$$\begin{aligned} a_{ij} + m_{ij} = a_{ij} \quad &\Leftrightarrow \quad m_{ij} = a_{ij} - a_{ij} \\ &\Leftrightarrow \quad m_{ij} = 0 \end{aligned}$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Assim,

$$M = 0_{m \times n},$$

ou seja, o elemento neutro da adição é M a matriz nula.

(IV) Agora mostraremos a existência de um elemento simétrico. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $A' = \left(a'_{ij}\right)_{m \times n}$ e $0_{m \times n}$ a matriz nula de ordem $m \times n$. Suponha que

$$A + A' = 0_{m \times n}$$

então,

$$a_{ij} + a'_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = 0 - a'_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad a'_{ij} = -a_{ij}$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
Assim,

$$A' = -A.$$

Como consequência da existência do elemento simétrico, obtemos as seguintes definições.

Definição 1.1.1. Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Chama-se **oposta** de A a matriz representada por -A, tal que

$$A + (-A) = 0_{m \times n}$$

onde $0_{m \times n}$ é a matriz nula do tipo $m \times n$.

Note que, se B é oposta de A, então

$$A + B = 0$$

e daí, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos

$$a_{ij} + b_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = -b_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = -a_{ij}.$$

Observe que a matriz $-A$ é obtida de A trocando-se o sinal de cada um de seus elementos:

Exemplo 1.1.18. Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \sqrt{5} \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

A matriz oposta de A e oposta de B é representada, respectivamente, por:

$$-A = \begin{pmatrix} -13 & 9 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \text{ e } -B = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\sqrt{5} \\ 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.1.2. Dadas duas matrizes de mesma ordem $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se diferença entre A e B (representa-se por $A - B$) a matriz soma de A com a oposta de B, isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo 1.1.19.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Outra operação envolvendo matrizes é o produto de um número real por uma matriz, que definiremos a seguir

Definição 1.1.3. Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e k um número real, o produto de k pela matriz A (indica-se $k \cdot A$) é a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ onde $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Isto significa que B é obtida multiplicando-se cada um dos elementos de A por k.

Exemplo 1.1.20. Seja a matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} 3 \cdot A &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 9 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 12 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.21. Seja a matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 7 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} -2 \cdot A &= \begin{pmatrix} -2 \cdot (-5) & -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 7 & -2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -14 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Em relação ao produto de um número real por uma matriz, temos as seguintes propriedades.

Proposição 1.1.2. Sejam k e l números reais e A e B matrizes de mesma ordem, valem as seguintes propriedades:

i. $k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$;

ii. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$;

iii. $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$;

iv. $1 \cdot A = A$.

Demonstração. Para o item i, sejam k e $l \in \mathbb{R}$ e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz de ordem m x n, temos

$$\begin{aligned} k\cdot(l\cdot A) &= k\cdot(l\cdot a_{ij})_{m\times n} \\ &= (k\cdot l\cdot a_{ij})_{m\times n} \\ &= (k\cdot l)\,(a_{ij})_{m\times n} \\ &= (k\cdot l)\cdot A. \end{aligned}$$

No item ii, sejam $k\in\mathbb{R}$ e $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{m\times n}$ duas matrizes de ordem m x n, temos

$$\begin{aligned} k\cdot(A+B) &= k\cdot\big((a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}\big) \\ &= k\cdot(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} \\ &= (k\cdot(a_{ij}+b_{ij}))_{m\times n} \\ &= (k\cdot a_{ij}+k\cdot b_{ij})_{m\times n} \\ &= (k\cdot a_{ij})_{m\times n}+(k\cdot b_{ij})_{m\times n} \\ &= k\cdot(a_{ij})_{m\times n}+k\cdot(b_{ij})_{m\times n} \\ &= k\cdot A+k\cdot B. \end{aligned}$$

Mostraremos agora os itens iii e iv. Sejam **k** e **l** $\in\mathbb{R}$ e $A=(a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m\times n$, temos

$$\begin{aligned} (k+l)\cdot A &= (k+l)\cdot(a_{ij})_{m\text{ x }n} \\ &= ((k+l)\cdot a_{ij})_{m\times n} \\ &= (k\cdot(a_{ij})+l\cdot(a_{ij}))_{m\text{ x }n} \\ &= k\cdot(a_{ij})_{m\text{ x }n}+l\cdot(a_{ij})_{m\text{ x }n} \\ &= k\cdot A+l\cdot A. \end{aligned}$$

O que prova o item iii. Seja $A=(a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz de ordem $m\times n$, temos

$$\begin{aligned}1 \cdot A &= 1 \cdot (a_{ij})_{m\times n}\\ &= (1 \cdot a_{ij})_{m\times n}\\ &= (a_{ij})_{m\times n}\\ &= A.\end{aligned}$$

□

Assim, como à adição de matrizes e o produto de um número real por uma matriz, faz sentido falar em produto de matrizes.

Definição 1.1.4. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, chama-se **produto de A por B**, e se indica $A \cdot B$, a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$, em que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + a_{i4} \cdot b_{4k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk},$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Note que

- A definição garante a existência do produto $A \cdot B$ se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.
- A matriz produto $C = A \cdot B$ é uma matriz cujo números de linhas é igual ao número de linhas de A e o número de colunas é igual ao número de colunas de B, ou seja,

$$A_{(m\times n)} \cdot B_{(n\times p)} = C_{(m\times p)}.$$

Exemplo 1.1.22.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 5 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vejamos as propriedades do produto de matrizes, assim com as demonstrações dessa propriedades.

Proposição 1.1.3. Se A é quadrada de ordem n, então

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Demonstração. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ uma matriz quadrada de ordem n e I_n a matriz identidade de ordem n, temos:

$$\begin{aligned}
A \cdot I_n &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + \cdots + a_{1n}\cdot 0 & \cdots & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + \cdots + a_{1n}\cdot 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\cdot 1 + a_{n2}\cdot 0 + \cdots + a_{nn}\cdot 0 & \cdots & a_{n1}\cdot 0 + a_{n2}\cdot 0 + \cdots + a_{nn}\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11} + 0\cdot a_{12} + \cdots + 0\cdot a_{1n} & \cdots & 0\cdot a_{11} + 0\cdot a_{12} + \cdots + 1\cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1\cdot a_{n1} + 0\cdot a_{n2} + \cdots + 0\cdot a_{nn} & \cdots & 0\cdot a_{n1} + 0\cdot a_{n2} + \cdots + 1\cdot a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= I_n \cdot A.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.1.4. Se $A = (a_{ij})_{n \text{ x } m}$, com $m \neq n$, então

$$I_n \cdot A = A \text{ e } A \cdot I_m = A.$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
I_n \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_n \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \\
&= \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11} + 0\cdot a_{21} + \cdots + 0\cdot a_{n1} & \cdots & 1\cdot a_{1m} + 0\cdot a_{2m} + \cdots + 0\cdot a_{nm} \\ 0\cdot a_{11} + 1\cdot a_{21} + \cdots + 0\cdot a_{n1} & \cdots & 0\cdot a_{1m} + 1\cdot a_{2m} + \cdots + 0\cdot a_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ 0\cdot a_{11} + 0\cdot a_{21} + \cdots + 1\cdot a_{n1} & \cdots & 0\cdot a_{1m} + 0\cdot a_{2m} + \cdots + 1\cdot a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \\
&= A.
\end{aligned}
$$

O caso em que $A \cdot I_m$, basta proceder de maneira análoga. □

Definição 1.1.5. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, a matriz A é dita inversível (ou invertível) se existe uma matriz B (quadrada de ordem n), tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

onde I_n representa a matriz identidade de ordem n.

Neste caso, B é dita **inversa** de A e é indicada por A^{-1}.

Exemplo 1.1.23. A inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2;$$

e

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Para verificar se uma matriz quadrada é ou não é inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa, utilizamos um processo baseado na definição de matriz inversa e na resolução de sistemas. Vejamos um exemplo no caso da matriz 2×2.

Exemplo 1.1.24. Determine, se existir, a inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Devemos verificar se existe

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$A \cdot A^{-1} = I_2.$$

Temos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 2d \\ 5a + 4c & 5b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do conceito de igualdade de matrizes seguem os sistemas:

$$\begin{cases} 3a + 2c & = & 1 \\ 5a + 4c & = & 0 \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = 2 \text{ e } c = -\frac{5}{2}$$

e

$$\begin{cases} 3b + 2d & = & 0 \\ 5b + 4d & = & 1 \end{cases}$$

cuja solução é

$$b = -1 \text{ e } d = \frac{3}{2}.$$

Assim,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1.1.25. Determine, se existir, a inversa de $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Devemos verificar se existe

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que

$$X \cdot X^{-1} = I_2.$$

Temos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{pmatrix} 4a+2c & 4b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} 4a+2c &= 1 \\ 2a+c &= 0 \end{cases} (1) \text{ e } \begin{cases} 3b+2d &= 0 \\ 5b+4d &= 1. \end{cases} (2)$$

Resolvendo o sistema (1):

$$\begin{cases} 4a+2c &= 1 \\ 2a+c &= 0 \ (\times 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2c &= 1 \\ 4a+2c &= 0. \end{cases}$$

É fácil ver que o sistema acima não admite soluções, pois não existem **a** e **c** reais tais que $0 \cdot a \ + \ 0 \cdot c = 1$. Desse modo, já podemos concluir que não existe a inversa de X.

Observação: O processo apresentado nesses exemplos pode ser aplicado a matrizes quadradas de ordem n, $n \geq 2$. No entanto, para $n \geq 3$ o processo é, em geral, trabalhoso.

Definição 1.1.6. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se **transposta de** A (indica-se por A^t) a matriz:

$$A^t = \left(a'_{ij}\right)_{n \times m}.$$

tal que $a'_{ij} = a_{ji}$ para todo i e todo j.
Em outras palavras, a matriz A^t é obtida a partir de A trocando-se, ordenadamente, suas linhas pelas colunas.

Exemplo 1.1.26. A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ é $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

Exemplo 1.1.27. A transposta da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Proposição 1.1.5. Dadas as matrizes A e B do tipo $n \times m$, então:

I - $(A^t)^t = A$.

II - $(A+B)^t = A^t + B^t$.

III - Dado $k \in \mathbb{R}$, $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$.

IV - Considere a matriz C de ordem $m \times r$, então $(AC)^t = C^t A^t$.

Demonstração. Para o item I, temos que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}.$$

Daí,

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Aplicando a definição de matriz transposta seque que

$$\begin{aligned} (A^t)^t &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m} \\ &= A. \end{aligned}$$

Para o item II, temos que

$$X_{n\times m}+Y_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}(X+Y)^t &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{n2}+b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}+b_{1m} & a_{2m}+b_{2m} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} \\ &= X^t+Y^t.\end{aligned}$$

Quanto ao item III, temos que

$$k\cdot A=\begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \cdots & k\cdot a_{1m} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\cdot a_{n1} & k\cdot a_{n2} & \cdots & k\cdot a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}(k\cdot A)^t &= \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{21} & \cdots & k\cdot a_{n1} \\ k\cdot a_{12} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k\cdot a_{1m} & k\cdot a_{2m} & \cdots & k\cdot a_{nm} \end{pmatrix} \\ &= k\cdot A^t.\end{aligned}$$

Agora mostraremos o item IV, observe que

$$
\begin{aligned}
AC &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \cdots + a_{1m}c_{m1} & \cdots & a_{11}c_{1r} + a_{12}c_{2r} + \cdots + a_{1m}c_{mr} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} + \cdots + a_{2m}c_{m1} & \cdots & a_{21}c_{1r} + a_{22}c_{2r} + \cdots + a_{2m}c_{mr} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}c_{11} + a_{n2}c_{21} + \cdots + a_{nm}c_{m1} & \cdots & a_{n1}c_{1r} + a_{n2}c_{2r} + \cdots + a_{nm}c_{mr} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
(AC)^t &= \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \cdots + a_{1m}c_{m1} & \cdots & a_{n1}c_{11} + a_{n2}c_{21} + \cdots + a_{nm}c_{m1} \\ a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + \cdots + a_{1m}c_{m2} & \cdots & a_{n1}c_{12} + a_{n2}c_{22} + \cdots + a_{nm}c_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11}c_{1r} + a_{12}c_{2r} + \cdots + a_{1m}c_{mr} & \cdots & a_{n1}c_{1r} + a_{n2}c_{2r} + \cdots + a_{nm}c_{mr} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_{11}a_{11} + c_{21}a_{12} + \cdots + c_{m1}a_{1m} & \cdots & c_{11}a_{n1} + c_{21}a_{n2} + \cdots + c_{m1}a_{nm} \\ c_{12}a_{11} + c_{22}a_{12} + \cdots + c_{m2}a_{1m} & \cdots & c_{12}a_{n1} + c_{22}a_{n2} + \cdots + c_{m2}a_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1r}a_{11} + c_{2r}a_{12} + \cdots + c_{mr}a_{1m} & \cdots & c_{1r}a_{n1} + c_{2r}a_{n2} + \cdots + c_{mr}a_{nm} \end{pmatrix} \\
&= C^tA^t.
\end{aligned}
$$

□

Definição 1.1.7. Uma matriz quadrada A de ordem n é dita **simétrica** se

$$A = A^t.$$

Exemplo 1.1.28. • Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, temos que $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, então A é uma matriz simétrica.

• Seja a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, temos que $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, então B é uma matriz simétrica.

Proposição 1.1.6. A matriz identidade, de qualquer ordem, é simétrica.

Demonstração. Seja I_n a matriz identidade de ordem n, assim:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n^t.$$

□

Proposição 1.1.7. Seja **A** uma matriz quadrada de ordem n. Então:

I - Se **A** é simétrica, então para qualquer escalar k, a matriz $k \cdot A$ também é simétrica.

II - A *matriz nula*, de qualquer ordem, é simétrica.

Demonstração. Provaremos apenas o item I. Seja $k \in \mathbb{R}$ e

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

uma matriz quadrada de ordem n tal que $A = A^t$. Por igualdade de matrizes, temos que

$$a_{ij} = a_{ji},\ \forall\ i,j = \{1,2,\ldots,n\}.$$

Assim

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{n1} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{1n} & \cdots & k \cdot a_{nn} \end{pmatrix} = k \cdot A^t.$$

Portanto $k \cdot A$ é uma matriz simétrica. □

Definição 1.1.8. Uma matriz quadrada A de ordem n é dita **antissimétrica** se

$$A = -A^t.$$

Equivalentemente, os termos a_{ij}, satisfazem

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Observação: Considerando que uma matriz A quadrada de ordem n é antissimétrica, como $a_{ij} = -a_{ji}$ então os elementos da diagonal principal devem ser nulos. De fato,

$$a_{kk} = -a_{kk} \Leftrightarrow a_{kk} = 0.$$

onde k é inteiro, $1 \leq k \leq n$.

Exemplo 1.1.29. Seja a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -7 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que

$$B^t = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 7 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $B = -B^t$ o que implica que B é antissimétrica.

Exemplo 1.1.30. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $A = -A^t$, o que implica que A é antissimétrica.

Definição 1.1.9. Uma matriz quadrada A de ordem n é dita **ortogonal** se A é inversível e se

$$A^{-1} = A^t.$$

Em outras palavras, A é ortogonal se

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

Observação: Para mostrar que a uma matriz,digamos A, quadrada de ordem n é ortogonal é suficiente mostrar que

$$A \cdot A^t = I.$$

Proposição 1.1.8. A inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

Demonstração. Se A é ortogonal, então $A^{-1} = A^t$, assim

$$A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^t = A^t \cdot \left(A^t\right)^t = A^t \cdot A = I,$$

e

$$\left(A^{-1}\right)^t \cdot A^{-1} = \left(A^t\right)^t \cdot A^t = A \cdot A^t = I,$$

donde

$$A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^t = \left(A^{-1}\right)^t \cdot A^{-1} = I.$$

□

Proposição 1.1.9. O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

Demonstração. Sejam A e B duas matrizes ortogonais de ordem n. Como A e B são invertíveis, então já vimos que AB também é invertível e que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Daí

$$AB\,(AB)^t = AB\left(B^tA^t\right) = A\left(BB^t\right)A^t = AIA^t = AA^t = I,$$

e

$$(AB)^t\,AB = \left(B^tA^t\right)AB = B^t\left(A^tA\right)B = B^tIB = B^tB = I.$$

□

Exemplo 1.1.31. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois

$$A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

e

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

Exemplo 1.1.32. A matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois A é simétrica e

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$$

Exemplo 1.1.33. A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois A é simétrica e

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

Exemplo 1.1.34. A matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, pois A é simétrica e

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Portanto,

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I.$$

Colocaremos todas as matrizes de ordem $m \times n$, com elementos reais em um conjunto da seguinte maneira.

$$M_{m\times n} = \{A = (a_{ij})_{m\times n} : \quad a_{ij} \quad \in \quad \mathbb{R}\}.$$

Assim, podemos definir o conjunto das matrizes ortogonais como um subconjunto de $M_{n\times n}$ da seguinte maneira:

$$M_o = \left\{A \in M\left(n, n\right); A \cdot A^t = I\right\}.$$

1.1.4 Determinante

Finalizaremos esta seção com a definição de determinante de uma matriz, e apresentando algumas de suas propriedades. A noção de determinante será utilizada na próxima seção como condição fundamental para este trabalho.

Seja A uma matriz de ordem n, afim de definirmos o determinante da matriz A, que denotaremos por $\det A$, consideraremos os seguintes casos para $n \geq 1$:

(i) Se A é uma matriz de ordem 1, isto é, $A = [a_{11}]$, então o determinante da matriz A é dada pelo elemento a_{11}. Ou seja,

$$\det[a_{11}] = a_{11}.$$

Exemplo 1.1.35. Seja a matriz $A = [16]$, temos que $\det A = 16$.

Exemplo 1.1.36. Seja a matriz $A = [-5]$, temos que $\det A = -5$.

(ii) Se A é uma matriz de ordem 2, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então o determinante da matriz A é dado como a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemplo 1.1.37. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que $\det A = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 6 - 5 = 1$.

Exemplo 1.1.38. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que $\det A = -4 \cdot 3 - 5 \cdot 9 = -12 - 45 = -47$.

(iii) Se A é uma matriz de ordem 3, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então o determinante de A é dado por

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Exemplo 1.1.39. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det A = 1\cdot 2\cdot 8+3\cdot 3\cdot 1+2\cdot 0\cdot 0-2\cdot 2\cdot 1-1\cdot 3\cdot 0-3\cdot 0\cdot 8 = 16+9+0-4-0-0 = 21.$$

Exemplo 1.1.40. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det A = 3\cdot 1\cdot 5+2\cdot 3\cdot 2+2\cdot 1\cdot 4-2\cdot 1\cdot 2-3\cdot 3\cdot 4-2\cdot 1\cdot 5 = 15+12+8-4-36-10 = -15.$$

(iv) Para definirmos o determinante de uma matriz de ordem $n > 3$, utilizaremos a noção de cofator, dada da seguinte maneira. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $n \geq 2$, dado um elemento $a_{ij} \in A$ o cofator de a_{ij}, denotado por A_{ij}, é definido como sendo o número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}, \tag{1.1.2}$$

onde D_{ij} é o determinante da matriz resultante, obtida eliminando-se à i-ésima linha e à j-ésima coluna da matriz A.

Exemplo 1.1.41. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = D_{11} = \det[3] = 3; \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot D_{12} = -1 \cdot D_{12} = -1 \cdot \det[1] = -1.1 = -1; \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = -1 \cdot D_{21} = -1 \cdot \det[5] = -1.5 = -5; \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot D_{22} = D_{22} = \det[2] = 2. \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.42. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = 1 \cdot D_{11} &&= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -7; \\
A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot D_{12} = -1 \cdot D_{12} &&= -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 1; \\
A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot D_{13} = 1 \cdot D_{13} &&= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2; \\
A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = -1 \cdot D_{21} &&= -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = -2; \\
A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot D_{22} = 1 \cdot D_{22} &&= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 11; \\
A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot D_{23} = -1 \cdot D_{23} &&= -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 8; \\
A_{31} &= (-1)^{3+1} \cdot D_{31} = 1 \cdot D_{31} &&= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 4; \\
A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot D_{32} = -1 \cdot D_{32} &&= -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -7; \\
A_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot D_{33} = 1 \cdot D_{33} &&= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1;
\end{aligned}$$

Assim, se A é uma matriz de ordem $n > 3$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & . & & \dots & \\ & . & & \dots & \\ & . & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

então o determinante da matriz é dado da seguinte maneira: escolha uma linha ou uma coluna qualquer da matriz A, digamos que a nossa escolha seja a primeira coluna $\{a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1}\}$, segue que:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + ... + a_{n1} \cdot A_{n1}. \tag{1.1.3}$$

Exemplo 1.1.43. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 9 & 12 \end{bmatrix},$$

escolhendo a primeira coluna para aplicar a definição de determinante, temos que

$$\det A = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{44} = 1 \cdot (-15) = -15.$$

Como a noção de cofator faz sentido para todo $n \geq 2$, segue que a partir da equação (1.1.3), obtemos a definição de determinante dada para matrizes de ordem 2 e 3. Assim, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, então o determinante de A é dado por (1.1.3).

Exemplo 1.1.44. Se uma matriz de ordem $n > 1$, tiver uma linha ou uma coluna formada apenas por zeros, então esta matriz possui determinante igual à zero.

Solução. Seja A uma matriz de ordem n, dada da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ...a_{1p-1} & 0 & a_{1p+1}... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ...a_{2p-1} & 0 & a_{2p+1}... & a_{2n} \\ & . & & ... & & & \\ & . & & ... & & & \\ & . & & ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ...a_{np-1} & 0 & a_{np+1}... & a_{nn} \end{bmatrix},$$

escolhendo a coluna p que é formada apenas por zeros, por definição temos que

$$\det A = 0 \cdot A_{1p} + 0 \cdot A_{2p} + ... + 0 \cdot A_{np} = 0.$$

A seguir enunciaremos algumas propriedades de determinantes. As demonstrações serão omitidas, o leitor interessado pode consultar a referência [1].

Proposição 1.1.10. Se A é uma matriz de ordem n, então

$$\det A = \det A^t.$$

Exemplo 1.1.45. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

temos que sua transposta é dada por

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Donde $\det A^t = \det A = 7$.

Proposição 1.1.11. Seja A uma matriz de ordem n. Se λ é uma constante real, então

$$\det \lambda \cdot A = \lambda^n \cdot \det A.$$

Exemplo 1.1.46. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -8 & -10 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det A = \det \begin{bmatrix} -6 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -6 \\ -4 & -8 & -10 \end{bmatrix} = (-2)^3 . \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 120.$$

Proposição 1.1.12. Seja A uma matriz de ordem $n \geq 2$. Se trocarmos a posição de duas linhas ou de duas colunas paralelas, obtemos uma nova matriz B, tal que

$$\det B = -\det A.$$

Exemplo 1.1.47. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

trocando a primeira linha pela terceira linha, obtemos a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Segue que

$$\det B = -\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 52$$

Proposição 1.1.13. Se uma matriz de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas ou duas colunas paralelas iguais, então

$$\det A = 0.$$

Exemplo 1.1.48.

$$\det \begin{bmatrix} a & 3 & 2 & a \\ b & 1 & 10 & b \\ c & 4 & 12 & c \\ d & -23 & 18 & d \end{bmatrix} = 0.$$

Proposição 1.1.14. Se uma matriz de ordem $n \geq 2$ tem duas linhas ou duas colunas paralelas, formadas por elementos respectivamente proporcionais, então

$$\det A = 0.$$

Exemplo 1.1.49. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix},$$

temos que a primeira coluna é obtida multiplicando por 6 a segunda coluna. Assim,

$$\det A = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Exemplo 1.1.50. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & 6 \\ 2 & -23 & 18 & 9 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 4 & 12 & 6 \\ 2 & -23 & 18 & 9 \end{bmatrix} = 0.$$

A proposição a seguir é conhecida como Teorema de Binet.

Proposição 1.1.15. Se A e B são duas matrizes quadradas de ordem n, então

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Exemplo 1.1.51. Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

temos

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 6 & 29 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = -2 \cdot 10.$

Como consequência do Teorema de Binet (Proposição (1.1.15)), o corolário a seguir fornece uma maneira de calcular o determinante de matriz inversa.

Corolário 1.1.16. Se a matriz A tem determinante não-nulo, então

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Exemplo 1.1.52. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

temos que

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{2}.$$

Capítulo 2

Uma Nova Maneira de Escrever as Circunferências

2.1 A Circunferência Escrita Como Produto e Soma de Matrizes

Neste capítulo mostraremos que uma circunferência centrada em um ponto P_0 e raio $r > 0$, denotada por, $\mathcal{C}_r(P_0)$ pode ser representada algebricamente, através de matrizes ortogonais de ordem 2. Para isto, identificaremos os pontos de um plano através de matrizes. Seja um plano π com um sistema de eixos ortogonais OXY, podemos representar o plano π da seguinte maneira:

$$\pi = \{(x, y) : \quad x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, cada ponto $P \in \pi$ será representado por $P = (x, y)$. Assim, de modo natural, representaremos P por uma matriz coluna, isto é

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como uma circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ é um subconjunto do plano π, onde

$$P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

então naturalmente representaremos cada ponto P da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ por uma matriz coluna:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

tal que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

A Proposição a seguir, que terá grande utilidade nos resultados posteriores, nos diz como as matrizes ortogonais podem ser obtidas.

Proposição 2.1.1. Seja A uma matriz quadrada de ordem 2. A é ortogonal se, e somente se,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

onde $a^2 + b^2 = 1$. Além disso, podemos trocar A por A^t, na equivalência acima.

Demonstração. Considere de modo arbitrário uma matriz ortogonal $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Isto é, $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_2$, onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2. Temos que,

$$A \cdot A^t = I_2 \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ba + dc & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Disto segue que

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} A^t \cdot A = I_2 \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Obtemos através dos sistemas acima que: $a^2 + c^2 = 1$ e $a^2 + b^2 = 1$, o que implica $c^2 = b^2$, ou seja, $c = \pm b$. Obtemos ainda que: $a^2 + c^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$, donde $a^2 = d^2$, logo, $a = \pm d$. Além disso, temos ainda que $ac + bd = ab + cd = 0$, mas isto acontece se, e somente se, $d = a$ e $c = -b$ ou $a = -d$ e $c = b$. Portanto, a matriz ortogonal A é dada de uma das seguintes maneiras:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

onde $a^2 + b^2 = 1$.

Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

com $a^2 + b^2 = 1$, então

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De qualquer modo,

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

2.1.1 Escrevendo A Circunferência Através de Matrizes - Conhecendo o Seu Centro e um Ponto da Cirncunferência Centrada na Origem.

O primeiro grande resultado, garante que podemos obter a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, através do produto de matrizes ortogonais pelo ponto $P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, como ilustra a Figura (2.1).

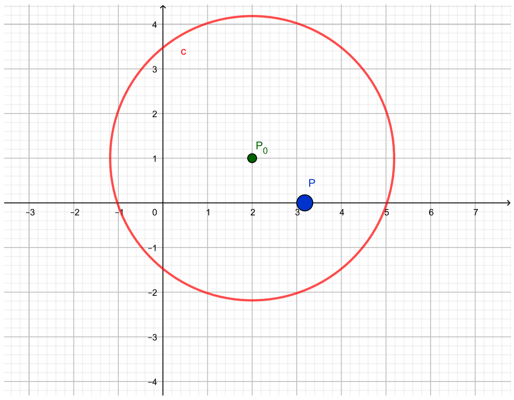

Figura 2.1: Circunferência de centro P_0 e raio 3, 18 .

Teorema 1. *Seja $\mathcal{C}_r(P_0)$ uma circunferência de centro num ponto $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Se $P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, então*

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 \quad : \quad AA^t = A^tA = I_2\}.$$

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que todos os pontos do conjunto

$$\{AP + P_0 \quad : \quad AA^t = A^tA = I_2\}$$

pertencem a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$. Para isto, considere de modo arbitrário uma matriz A, ortogonal. Pela Proposição (2.1.1), temos que

$$\begin{aligned} AP + P_0 &= \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ar + x_0 \\ br + y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} AP + P_0 &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ar + x_0 \\ -br + y_0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $a^2 + b^2 = 1$. Agora, note que

$$\begin{aligned}(ar + x_0 - x_0)^2 + (br + y_0 - y_0)^2 &= a^2r^2 + b^2r^2 \\ &= (a^2 + b^2)r^2 \\ &= r^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(ar + x_0 - x_0)^2 + (-br + y_0 - y_0)^2 &= a^2r^2 + b^2r^2 \\ &= (a^2 + b^2)r^2 \\ &= r^2.\end{aligned}$$

Com isto, fica provado que cada ponto $AP + P_0$, tal que $AA^t = A^tA = I_2$, é um ponto da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$.

Por outro lado, seja $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ um ponto arbitrário da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$. Note que

$$X \in \{AP + P_0 \;\; : \;\; AA^t = A^tA = I_2\} \Leftrightarrow \exists \;\; B \;\; : \;\; X = BP + P_0,$$

com $BB^t = B^tB = I_2$.

Observe que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{x - x_0}{r} & -\dfrac{y - y_0}{r} \\ \dfrac{y - y_0}{r} & \dfrac{x - x_0}{r} \end{bmatrix}$$

é ortogonal e $BP + P_0 = X$. Logo, o ponto X pertence ao conjunto $\{AP + P_0 \;\; : \;\; AA^t = A^tA = I_2\}$. Com isso, obtemos que

$$\mathcal{C}_r(P_0) \subset \{AP + P_0 \;\; : \;\; AA^t = A^tA = I_2\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 \;\; : \;\; AA^t = A^tA = I_2\}.$$

□

Exemplo 2.1.1. Seja $\mathcal{C}_4(P_0)$ uma circunferência de raio 4, centrada no ponto P_0 de abscissa 1 e ordenada 3, então podemos representar $\mathcal{C}_4(P_0)$ por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

onde $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é ortogonal. Como ilustra a Figura (2.2).

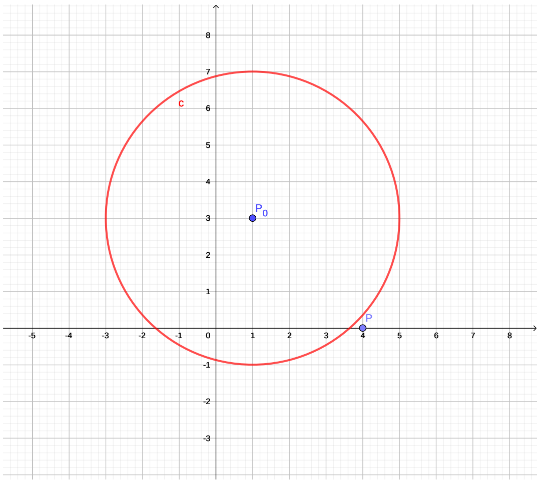

Figura 2.2: Circunferência centrada em $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e raio 4.

Como consequência direta do Teorema (1), obtemos o seguinte corolário, que apresenta duas caracterizações distintas para a mesma circunferência.

Corolário 2.1.2. Seja $\mathcal{C}_r(P_0)$ uma circunferência centrada no ponto $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Se $P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, então $\mathcal{C}_r(P_0)$ é dada de uma das seguintes maneiras:

(i)
$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 \quad : \quad AA^t = I_2 \;\; e \;\; detA = 1\}.$$

(ii)
$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 \quad : \quad AA^t = I_2 \;\; e \;\; detA = -1\}.$$

Demonstração. (i) Com feito, pelo Teorema (1) temos que cada ponto do conjunto

$$\{AP + P_0 \quad : \quad detA = 1\}$$

pertence a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$. Mostraremos apenas que cada ponto da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ pertence ao conjunto $\{AP + P_0 \quad : \quad detA = 1\}$. Para isto, tomamos arbitrariamente um ponto $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$. Observe que

$$X \in \{AP + P_0 \quad : \; \det A = 1\} \Leftrightarrow \exists \;\; B : \qquad X = BP + P_0,$$

com $BB^t = B^tB = I_2 \;\; e \;\; \det B = 1$. Veja que a matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{cases} a = \dfrac{x - x_0}{r} \\ b = \dfrac{y - y_0}{r} \end{cases},$$

cumpre a igualdade.

Portanto, fica provado o item (i).

A demonstração de (ii) é analoga, basta considerar uma matriz $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, onde $a^2 + b^2 = 1$. Daí, segue-se que dado $X \in \mathcal{C}_r(P_0)$, tem-se que

$$X \in \{AP + P_0 \quad AA^t = A^tA = I_2 \;\; e \;\; \det A = -1\}.$$

□

Exemplo 2.1.2. Considere $\mathcal{C}_3(P_0)$ a circunferência de raio 3, centrada no ponto P_0 de abscissa -1 e ordenada $-1,5$, então podemos representar $\mathcal{C}_3(P_0)$ de uma das seguintes maneiras:

(i)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} c & d \\ d & -c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \end{bmatrix},$$

onde $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$, como ilustra a Figura (2.3).

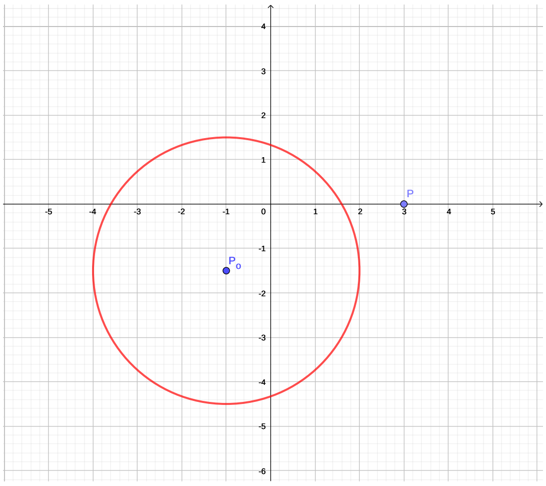

Figura 2.3: Circunferência centrada em $P_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1.5 \end{bmatrix}$ e raio 3.

Através do Corolário 2.1.2, conseguimos uma reformulação dos resultados apresentados no trabalho de Oliveira e Souza, em ([1], Proposição 4.0.1 e Proposição 4.0.2).

Proposição 2.1.3. Seja $\mathcal{C}_r(O)$ uma circunferência centrada na origem $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Se $P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, então $\mathcal{C}_r(O)$ é dada de uma das seguintes maneiras:

(i)
$$\mathcal{C}_r(O) = \{AP \quad : \quad AA^t = I_2 \;\; e \;\; detA = 1\}.$$

(ii)
$$\mathcal{C}_r(O) = \{AP \quad : \quad AA^t = I_2 \;\; e \;\; detA = -1\}.$$

Demonstração. Basta toma $P_0 = O$ no Corolário (2.1.2). □

O resultado a seguir generaliza um pouco mais o Teorema 1. Consideraremos um ponto $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e mostraremos que uma circunferência de centro $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, pode ser obtida como um produto de matrizes ortogonais por um ponto $P \in \mathcal{C}_r(O)$, como ilustra a Figura (2.4).

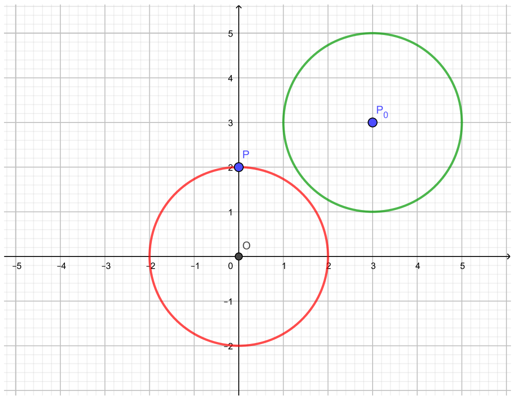

Figura 2.4: Duas circunferência de raio 2, uma centrada na origem e a outra de centro P_0.

Teorema 2. *Seja $\mathcal{C}_r(P_0)$ uma circunferência centrada num ponto* $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. *Se* $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *é um ponto fixo qualquer, em uma circunferência centrada na origem, $\mathcal{C}_r(O)$, então*

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 \quad : \quad AA^t = A^tA = I_2\}.$$

Demonstração. Considere arbitrariamente um ponto $P = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(O)$ e A uma matriz ortogonal de ordem 2.

Temos que

$$\begin{aligned} A \cdot P + P_0 &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} au + cv + x_0 \\ bu + dv + y_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} (au + cv + x_0 - x_0)^2 + (bu + dv + y_0 - y_0)^2 &= a^2u^2 + 2aucv + c^2v^2 + b^2u^2 + 2budv + d^2v^2 \\ &= (a^2 + b^2)u^2 + (c^2 + d^2)v^2 + 2uv(ac + bd) \end{aligned}$$

Como A é ortogonal, temos que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Além disso $ac + bd = 0$. Logo,

$$(au + cv + x_0 - x_0)^2 + (bu + dv + y_0 - y_0)^2 = u^2 + v^2 = r^2,$$

pois $d(P, O) = r$, onde O é a origem do plano cartesiano.

Logo, o ponto $AP + P_0$ pertence a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$. Por outro lado, dado arbitrariamente

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0).$$

O ponto X pertence ao conjunto

$$\{AP + P_0 \quad : \quad AA^t = A^tA = I_2\}$$

se, e somente se, existe uma matriz ortogonal de ordem 2, B, tal que $X = BP + P_0$. Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{u(x-x_0)+v(y-y_0)}{r^2} & \dfrac{v(x-x_0)-u(y-y_0)}{r^2} \\ -\dfrac{v(x-x_0)-u(y-y_0)}{r^2} & \dfrac{u(x-x_0)+v(y-y_0)}{r^2} \end{bmatrix}.$$

Note que

$$
\begin{aligned}
BP + P_0 &= \begin{bmatrix} \dfrac{u(x-x_0)+v(y-y_0)}{r^2} & \dfrac{v(x-x_0)-u(y-y_0)}{r^2} \\ \\ -\dfrac{v(x-x_0)-u(y-y_0)}{r^2} & \dfrac{u(x-x_0)+v(y-y_0)}{r^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{u[u(x-x_0)+v(y-y_0)]}{r^2} + \dfrac{v[v(x-x_0)-u(y-y_0)]}{r^2} + x_0 \\ \\ -\dfrac{u[v(x-x_0)-u(y-y_0)]}{r^2} + \dfrac{v[u(x-x_0)+v(y-y_0)]}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{u^2(x-x_0)+uv(y-y_0)}{r^2} + \dfrac{v^2(x-x_0)-uv(y-y_0)}{r^2} + x_0 \\ \\ -\dfrac{uv(x-x_0)-u^2(y-y_0)}{r^2} + \dfrac{vu(x-x_0)+v^2(y-y_0)}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{(u^2+v^2)(x-x_0)}{r^2} + x_0 \\ \\ \dfrac{(u^2+v^2)(y-y_0)}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{r^2(x-x_0)}{r^2} + x_0 \\ \\ \dfrac{r^2(y-y_0)}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x - x_0 + x_0 \\ y - y_0 + y_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= X.
\end{aligned}
$$

Resta apenas mostrar que B é ortogonal. Para isto, considere

$$
\begin{cases} g = \dfrac{u(x-x_0)+v(y-y_0)}{r^2} \\ h = \dfrac{v(x-x_0)-u(y-y_0)}{r^2} \end{cases}.
$$

Segue-se

$$\begin{aligned} BB^t &= \begin{bmatrix} g & h \\ -h & g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g & -h \\ h & g \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g^2+h^2 & -gh+hg \\ -hg+gh & h^2+g^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} g^2+h^2 &= \left(\frac{u(x-x_0)+v(y-y_0)}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{v(x-x_0)-u(y-y_0)}{r^2}\right)^2 \\ &= \frac{(u^2+v^2)(x-x_0)^2+(u^2+v^2)(y-y_0)}{r^4} \\ &= \frac{r^2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{r^4} \\ &= \frac{r^2r^2}{r^4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Daí,

$$BB^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do mesmo modo, mostra-se que

$$B^tB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, podemos concluir que

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP+P_0 \quad : \quad AA^t = A^tA = I_2\}.$$

□

Exemplo 2.1.3. Considere $\mathcal{C}_2(P_0)$ a circunferência de raio 2, centrada no ponto P_0 de abscissa 2 e ordenada -3. Podemos representar $\mathcal{C}_2(P_0)$ conhecendo apenas um dos pontos da circunferência $\mathcal{C}_2(O)$. Como

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_2(O),$$

segue que podemos representar $\mathcal{C}_2(P_0)$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix},$$

onde $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é ortogonal, como ilustra a Figura (2.5).

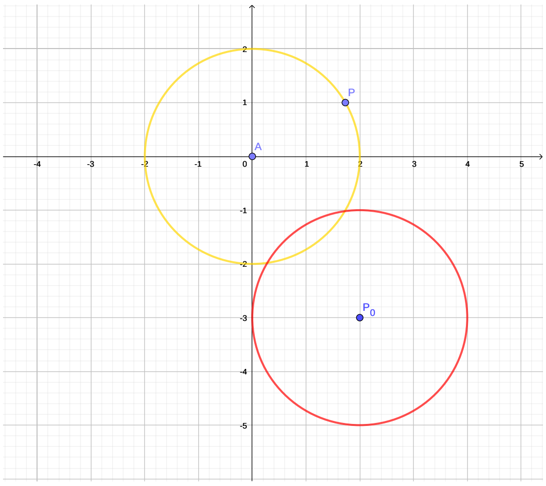

Figura 2.5: Duas circunferêcia de raio 2. Uma centrada na origem e a outra em $P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Como consequência direta Teorema 2, obtemos o seguinte corolário, que fornece duas maneiras distintas de escrever a mesma circunferência, através de matrizes .

Corolário 2.1.4. Seja $\mathcal{C}_r(P_0)$ uma circunferência de centro num ponto $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Se $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é um ponto fixo qualquer na circunferência $\mathcal{C}_r(O)$, então $\mathcal{C}_r(P_0)$ é dada de uma das seguintes maneiras:

(i)

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 \quad : \quad AA^t = I_2 \;\; e \;\; detA = 1\}.$$

(ii)

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 \quad : \quad AA^t = I_2 \;\; e \;\; detA = -1\}.$$

Demonstração. (i): Pelo Teorema (2), temos que

$$\{AP + P_0 : AA^t = I_2 \;\; e \;\; \det A = 1\} \subset \mathcal{C}_r(P_0).$$

Para mostrar que

$$\mathcal{C}_r(P_0) \subset \{AP + P_0 : AA^t = I_2 \;\; e \;\; \det A = 1\},$$

consideraremos um ponto qualquer

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0).$$

Seja a matriz ortogonal

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{u(x-x_0)-v(y-y_0)}{r^2} & -\dfrac{v(x-x_0)+u(y-y_0)}{r^2} \\ \dfrac{v(x-x_0)+u(y-y_0)}{r^2} & \dfrac{u(x-x_0)-v(y-y_0)}{r^2} \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dfrac{u(x-x_0)-v(y-y_0)}{r^2} & -\dfrac{v(x-x_0)+u(y-y_0)}{r^2} \\ \dfrac{v(x-x_0)+u(y-y_0)}{r^2} & \dfrac{u(x-x_0)-v(y-y_0)}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \dfrac{u^2(x-x_0)-vu(y-y_0)}{r^2} - \dfrac{v^2(x-x_0)+uv(y-y_0)}{r^2} + x_0 \\ \dfrac{vu(x-x_0)+u^2(y-y_0)}{r^2} + \dfrac{uv(x-x_0)-v^2(y-y_0)}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \dfrac{(u^2+v^2)(x-x_0)}{r^2} + x_0 \\ \dfrac{(u^2+v^2)(y-y_0)}{r^2} + y_0 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, existe uma matriz ortogonal, A, com $\det A = 1$, tal que $X = AP + P_0$.

Portanto,

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{AP + P_0 : AA^t = I_2 \;\; e \;\; \det A = 1\}.$$

O caso (ii), a demonstração é de forma análoga. □

Através do Corolário 2.1.2, conseguimos uma reformulação do resultado apresentado no trabalho de Oliveira-Souza, em ([1], Teorema 1).

Proposição 2.1.5. Seja $\mathcal{C}_r(O)$ uma circunferência centrada na origem $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Se $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é um ponto qualquer na circunferência $\mathcal{C}_r(O)$, então $\mathcal{C}_r(O)$ é dada das seguintes maneiras:

(i)

$$\mathcal{C}_r(O) = \{AP \;\; : \;\; AA^t = I_2 \;\; e \;\; detA = 1\};$$

(ii)

$$\mathcal{C}_r(O) = \{AP \quad : \quad AA^t = I_2 \ \ e \ \ det A = -1\}.$$

Demonstração. Basta asumir $P_0 = O$ no Corolário (2.1.4). □

2.1.2 Escrevendo A Circunferência Através de Matrizes- Conhecendo o centro e um de Seus Pontos

De um modo geral, o resultado seguinte mostra que uma circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, centrada num ponto $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, pode ser obtida através do produto de matrizes ortogonais pelo ponto $P - P_0$, onde $P \in \mathcal{C}_r(P_0)$ é um ponto fixo qualquer, como ilustra a Figura (2.6).

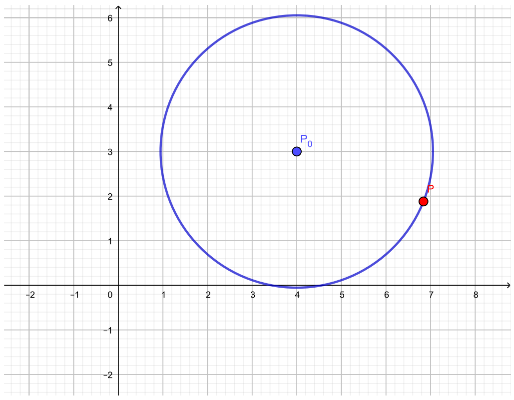

Figura 2.6: Circunferência de centro P_0 e raio 3 .

Teorema 3. *Seja $\mathcal{C}_r(P_0)$ uma circunferência de centro num ponto $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Se $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é um ponto fixo qualquer em $\mathcal{C}_r(P_0)$, então*

$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{A(P - P_0) + P_0 \quad : \quad AA^t = A^tA = I_2\}.$$

Demonstração. Note que $P - P_0 \in C_r(O)$ segue do Teorema (2) o resultado. □

Se conhecemos um ponto qualquer de uma circunferência centrada num ponto P_0, podemos representa-lá algebricamente, através de matrizes, de duas maneiras distintas.

Corolário 2.1.6. Seja $\mathcal{C}_r(P_0)$ uma circunferência de centro num ponto $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. Se

$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é um ponto fixo qualquer da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, então $\mathcal{C}_r(P_0)$ é dada de uma das seguintes maneiras:

(i)
$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{A(P - P_0) + P_0 \quad : \quad AA^t = I_2 \ \ e \ \ detA = 1\};$$

(ii)
$$\mathcal{C}_r(P_0) = \{A(P - P_0) + P_0 \quad : \quad AA^t = I_2 \ \ e \ \ detA = -1\}.$$

Demonstração. Observe que $P - P_0 \in C_r(O)$, segue do Corolário (2.1.4) o resultado. $\square$

Exemplo 2.1.4. Dados os pontos

$$P = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

O conjunto

$$A \cdot (P - Q) + Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal, com $\det A = 1$, é ilustrado na Figura 2.7.

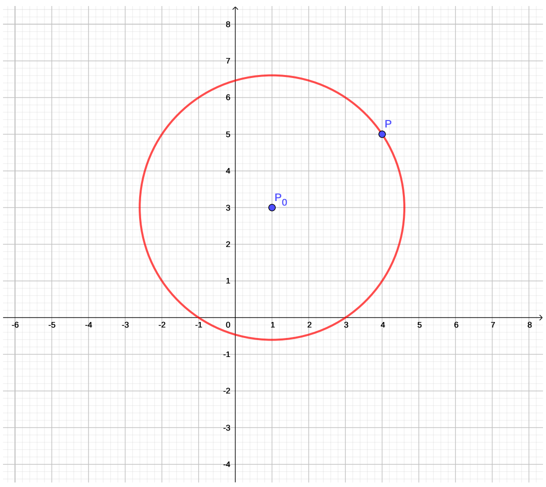

Figura 2.7: Circunferência centrada em $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e raio igual à $d(P, Q)$.

Capítulo 3

O Deslocamento de Pontos Sobre a Circunferência

Neste capítulo aplicaremos os resultados apresentados no capítulo anterior. Como aplicação, introduziremos a noção de deslocamento de pontos ao longo de uma circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, onde P_0 é um ponto qualquer; generalizando assim a ideia de deslocamento de pontos apresentada no trabalho de Oliveira e Souza em [5]. Como consequência, utilizaremos operações de matrizes para encontrar a trajetória descrita por veículos autônomos (robôs), se deslocando entre dadas posições na presença de obstáculos.

3.1 O Deslocamento de Pontos Atráves das Operações com Matrizes

Pelo Teorema (2), obtemos os pontos de uma circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ apenas considerando um ponto qualquer sobre a circunferência $\mathcal{C}_r(O)$. Mais precisamente, dado um ponto arbitrário $Q \in \mathcal{C}_r(P_0)$, existe uma matriz ortogonal A, tal que $Q = A.P + P_0$, onde P é um ponto sobre a circunferência $\mathcal{C}_r(O)$.

Por simplicidade, tomamos

$$P = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \text{ e } Q_1 = I_2.P + P_{0=} \begin{bmatrix} r + x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

onde a matriz ortogonal A é dada em [5], por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix}.$$

Segue que a trajetória descrita pelo ponto $A \cdot P$ ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r(O)$, partindo do ponto P, no sentido anti-horário; induz uma trajetória descrita pelo ponto $A.P + P_0$ ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, partindo do ponto Q_1, no sentido anti-horário.

Assim, considerando o ponto

$$Q_3 = \begin{bmatrix} x_0 - r \\ y_0 \end{bmatrix},$$

podemos nos deslocar ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, partindo do ponto Q_1, até um ponto qualquer $Q_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ pertencente ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$, através da operação com matrizes dada a seguir, como ilustra a Figura 3.1.

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \tag{3.1.1}$$

com $r \geq x \geq x_1 - x_0$.

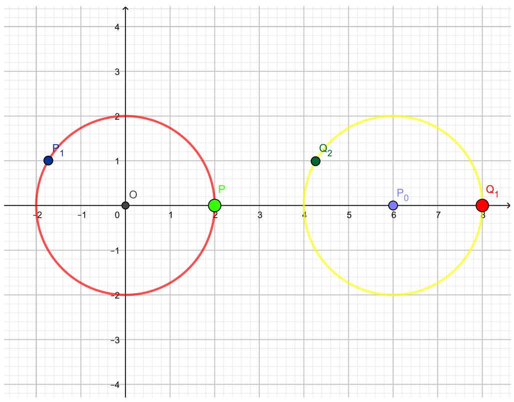

Figura 3.1: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2 .

Exemplo 3.1.1. Dado um ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ sobre a circunferência $\mathcal{C}_2((6,0))$. Através da expressão com matrizes:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} & -\frac{x}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $2 \geq x \geq -2$, percorremos todo o arco com extremidades $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $Q_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, ao longo da circunferência $\mathcal{C}_2((6,0))$, no sentido anti-horário. Em particular,

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,26 \\ 1 \end{bmatrix},$$

assim se percorremos $2 \geq x \geq -\sqrt{3}$ obtemos a trajetória desde o ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ até o ponto $Q_2 = \begin{bmatrix} 4,26 \\ 1 \end{bmatrix}$, ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r((6,0))$, no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 3.2.

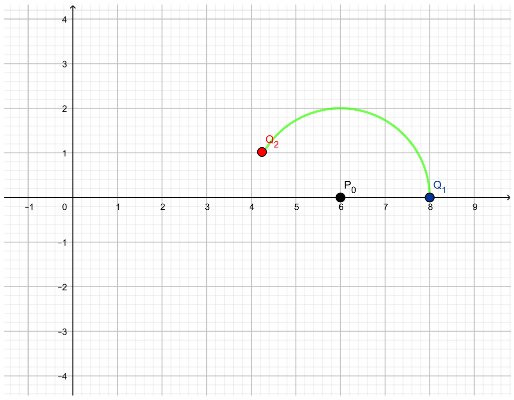

Figura 3.2: Deslocamento do ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ até o ponto $Q_2 = \begin{bmatrix} 4,26 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Do mesmo modo, podemos nos deslocar ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, partindo do ponto Q_1, até um ponto qualquer Q_2 pertencente ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(Q_3, Q_1)$, através da operação com matrizes da seguinte maneira: continuamos com o processo anterior até percorrer todo o arco $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$, através da expressão (3.1.1); em seguida completamos o percurso restante até chegar ao ponto Q_2, através da expressão abaixo:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} \\ \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} & -\frac{x}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

com $r \geq x \geq x_0 - x_1$, como ilustra a Figura 3.3.

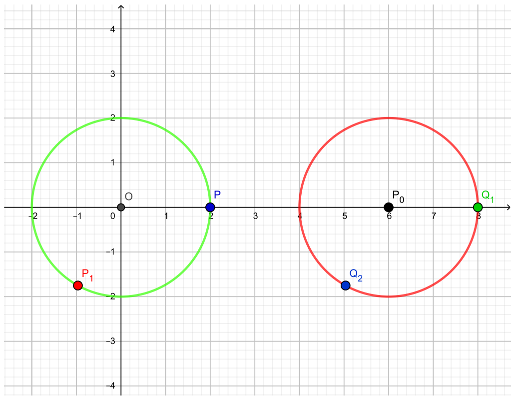

Figura 3.3: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2 .

Exemplo 3.1.2. Dado um ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ sobre a circunferência $\mathcal{C}_2((6,0))$. Através da expressão com matrizes:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2} & -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} & -\frac{x}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $2 \geq x \geq -2$, percorreremos todo o arco com extremidades Q_1 e Q_3, ao longo da circunferência $\mathcal{C}_2((6,0))$, no sentido anti-horário. Continuando com o processo, através da expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} & -\frac{x}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $-2 \leq x \leq 1,74$, percorremos no sentido anti-horário o arco com extremidades Q_3 e Q_1, até chegar ao ponto $Q_2 = \begin{bmatrix} 4,26 \\ -1 \end{bmatrix}$. Em particular,

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,26 \\ -1 \end{bmatrix},$$

representa o deslocamento do ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ até o ponto $Q_2 = \begin{bmatrix} 4,26 \\ -1 \end{bmatrix}$, ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r((6,0))$, no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 3.4.

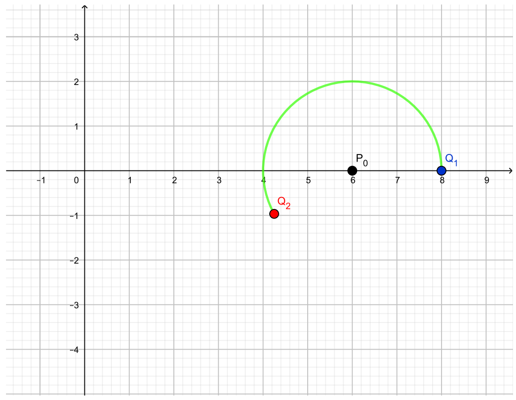

Figura 3.4: Deslocamento do ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ até o ponto $Q_2 = \begin{bmatrix} 4,26 \\ -1 \end{bmatrix}$.

O deslocamento de pontos ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, no sentido horário é feito de modo análogo. O deslocamento de um ponto ao longo de uma circunferência, como descrito acima, fornece a comodidade de deslocar simultaneamente um ponto ao longo de uma circunferência centrada na origem e um ponto ao longo de circunferência centrada em um ponto P_0, ambas como o mesmo raio $r > 0$.

De um modo geral, introduziremos a noção de deslocamento de um ponto ao longo de uma circunferência centrada em um ponto P_0, qualquer.

Pelo Teorema (3), fixado um ponto arbitrário P pertencente a uma circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, podemos obter todos os pontos de $\mathcal{C}_r(P_0)$ através de operações com matrizes. Mais precisamente, dado um ponto qualquer $Q \in \mathcal{C}_r(P_0)$, existe uma matriz ortogonal A tal que $Q = A(P - P_0) + P_0$.

Pelo Teorema (3), tomamos $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} x_0 + r \\ y_0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{(x - x_0)}{r} & \dfrac{(y - y_0)}{r} \\ -\dfrac{(y - y_0)}{r} & \dfrac{(x - x_0)}{r} \end{bmatrix}.$$

Como $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, então $(y - y_0) = \pm\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$. Daí, podemos escrever a matriz A de uma das seguintes maneiras:

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{(x - x_0)}{r} & \dfrac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} \\ -\dfrac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} & \dfrac{(x - x_0)}{r} \end{bmatrix}$$

ou

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\dfrac{(x-x_0)}{r}}{\dfrac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r}} & \dfrac{-\dfrac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r}}{\dfrac{(x-x_0)}{r}} \end{bmatrix}.$$

Sejam os pontos $P_1 = \begin{bmatrix} x_0 + r \\ y_0 \end{bmatrix}$ e $P_2 = \begin{bmatrix} x_0 - r \\ y_0 \end{bmatrix}$ pontos sobre a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$. Dado arbitrariamente um ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$, temos quatro casos a considerar:

(I) Q_1 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$. Neste caso, seja o arco $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ contido no arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$, para algum ponto $Q_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ sobre a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$. Temos que todo ponto Q pertencente a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ é dado pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(x-x_0)}{r} & -\dfrac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r} \\ \dfrac{\sqrt{r^2-(x-x_0)^2}}{r} & \dfrac{(x-x_0)}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad (3.1.3)$$

com $x_1 \geq x \geq x_3$ se, e somente se, Q é um ponto pertencente ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$.

Dessa forma, se considerarmos um ponto arbitrário $Q_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$, pertencente ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$, então a medida que percorremos a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ partindo do ponto Q_1 até chegar ao ponto Q_2, no sentido anti-horário, sempre encontraremos pontos sobre $\mathcal{C}_r(P_0)$ dados pela expressão (3.1.3). Portanto, utilizando (3.1.3) descrevemos todo o percurso ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, partindo do ponto Q_1 até chegar em Q_2, no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 3.5.

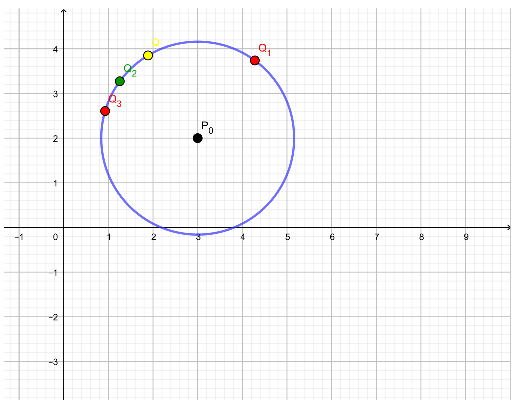

Figura 3.5: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido anti-horário .

(II) Q_1 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$. Neste caso, seja o arco $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ contido no arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$, para algum ponto $Q_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ sobre a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$. Temos que ponto Q pertencente a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ é dado pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(x - x_0)}{r} & \dfrac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} \\ -\dfrac{\sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}}{r} & \dfrac{(x - x_0)}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \tag{3.1.4}$$

com $x_1 \leq x \leq x_3$ se, e somente se, Q é um ponto pertencente ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$.

Dessa forma, se considerarmos um ponto arbitrário $Q_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$, pertencente ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$, então a medida que percorremos a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ partindo do ponto Q_1 até chegar ao ponto Q_2, no sentido anti-horário, sempre encontraremos pontos sobre $\mathcal{C}_r(P_0)$ dados pela expressão (3.1.4). Portanto, utilizando (3.1.4) descrevemos todo o percurso ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, partindo do ponto Q_1 até chegar em Q_2, no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 3.6.

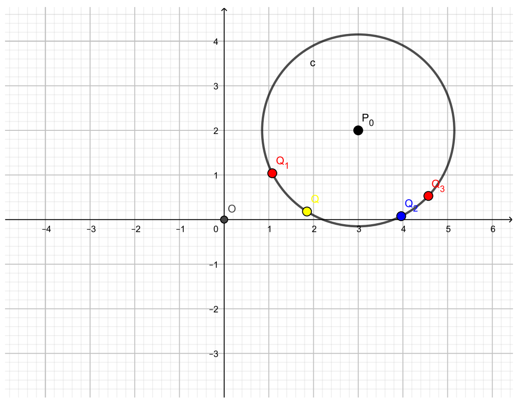

Figura 3.6: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido anti-horário .

(III) Q_1 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ e Q_2 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$. Neste caso, por (3.1.3) percorremos todo o arco $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, P_2)$, com $x_1 \geq x \geq x_0 - r$. Continuamos o processo através da expressão (3.1.4), com $x_0 - r \leq x \leq x_2$ até chegar ao ponto Q_2, como ilustra a Figura 3.7.

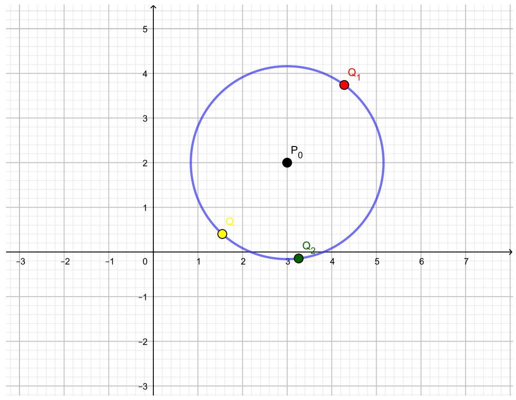

Figura 3.7: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido anti-horário .

(IV) Q_1 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ e Q_2 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$. Neste caso, por (3.1.4) percorremos todo o arco $\overleftarrow{\Gamma}(Q_1, P_1)$, com $x_1 \leq x \leq x_0 + r$. Continuamos o processo através da expressão (3.1.3), com $x_0 + r \leq x \leq x_2$ até chegar ao ponto Q_2, como ilustra a Figura 3.8.

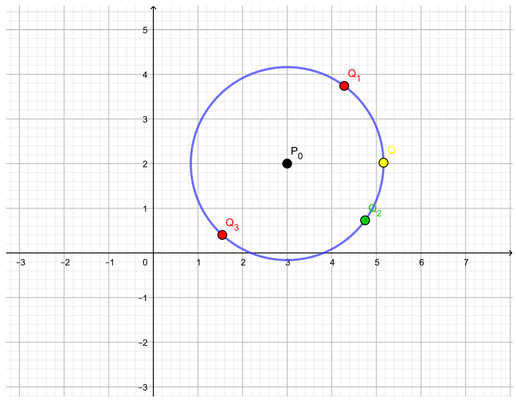

Figura 3.8: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido anti-horário .

De modo análogo, introduzimos a noção de deslocamento de pontos ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, no sentido horário. Dado arbitrariamente um ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$, temos quatro casos a considerar:

(I) Q_1 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$. Neste caso, seja o arco $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ contido no arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$, para algum ponto $Q_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ sobre a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$. Temos que todo ponto Q pertencente a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ é dado pela expressão (3.1.3) com $x_1 \leq x \leq x_3$ se, e somente se, Q é um ponto pertencente ao arco $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$.

Dessa forma, se considerarmos um ponto arbitrário $Q_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$, pertencente ao arco $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$, então a medida que percorremos a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ partindo do ponto Q_1 até chegar ao ponto Q_2, no sentido horário, sempre encontraremos pontos sobre $\mathcal{C}_r(P_0)$ dados pela expressão (3.1.3). Portanto, utilizando (3.1.3) descrevemos todo o percurso ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, partindo do ponto Q_1 até chegar em Q_2, no sentido horário, como ilustra a Figura 3.9.

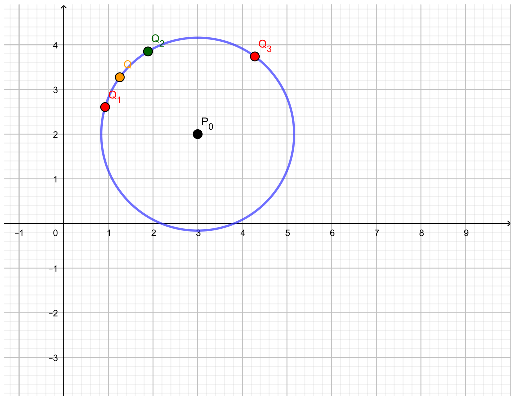

Figura 3.9: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido horário .

(II) Q_1 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$. Neste caso, seja o arco $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$ contido no arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$, para algum ponto $Q_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ sobre a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$. Temos que ponto Q pertencente a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ é dado pela expressão (3.1.4) com $x_1 \geq x \geq x_3$ se, e somente se, Q é um ponto pertencente ao arco $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$.

Dessa forma, se considerarmos um ponto arbitrário $Q_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_r(P_0)$, pertencente ao arco $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, Q_3)$, então a medida que percorremos a circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$ partindo do ponto Q_1 até chegar ao ponto Q_2, no sentido horário, sempre encontraremos pontos sobre $\mathcal{C}_r(P_0)$ dados pela expressão (3.1.4). Portanto, utilizando (3.1.4) descrevemos todo o percurso ao longo da circunferência $\mathcal{C}_r(P_0)$, partindo do ponto Q_1 até chegar em Q_2, no sentido horário, como ilustra a Figura 3.10.

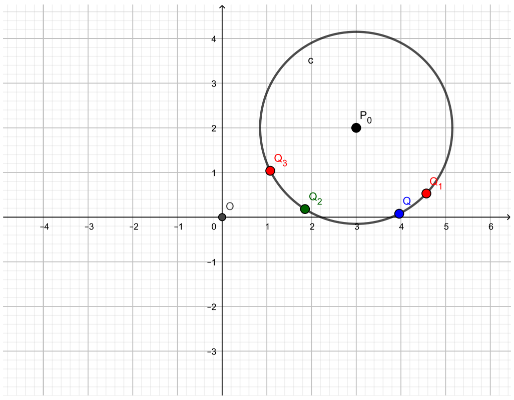

Figura 3.10: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido horário .

(III) Q_1 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$ e Q_2 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$. Neste caso, por (3.1.3) percorremos todo o arco $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, P_1)$, com $x_1 \leq x \leq x_0 + r$. Continuamos o processo através da expressão (3.1.4), com $x_0 + r \geq x \geq x_2$ até chegar ao ponto Q_2, como ilustra a Figura 3.11.

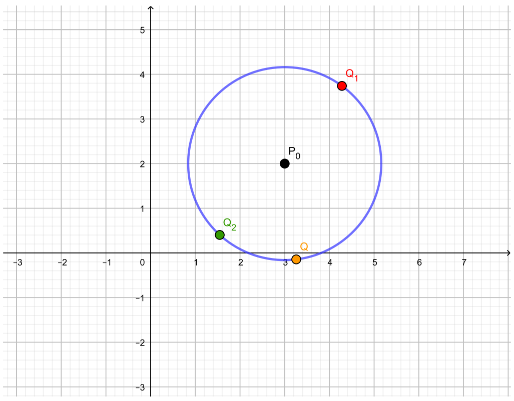

Figura 3.11: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido horário .

(IV) Q_1 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_2, P_1)$ e Q_2 pertence ao arco $\overleftarrow{\Gamma}(P_1, P_2)$. Neste caso, por (3.1.4) percorremos todo o arco $\overrightarrow{\Gamma}(Q_1, P_2)$, com $x_1 \geq x \geq x_0 - r$. Continuamos o processo através da expressão (3.1.3), com $x_0 - r \leq x \leq x_2$ até chegar ao ponto Q_2, como ilustra a Figura 3.12.

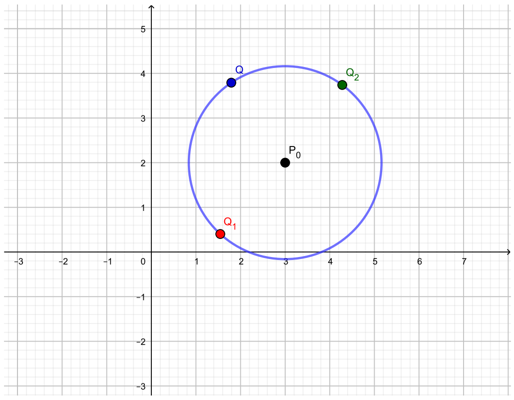

Figura 3.12: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido horário .

Exemplo 3.1.3. Seja o ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Através da expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}x & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} & \frac{2}{3}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.1.5}$$

com $0 \geq x \geq -\frac{3}{2}$, percorremos a circunferência $\mathcal{C}_{\frac{3}{2}}((0, \frac{1}{2}))$, partindo do ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, até o ponto $P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ no sentido anti-horário. Em seguida, através da expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}x & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} \\ -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4} - x^2} & \frac{2}{3}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.1.6}$$

com $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$, percorremos a circunferência $\mathcal{C}_{\frac{3}{2}}((0, \frac{1}{2}))$, partindo do ponto $P_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, até o ponto $Q_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, no sentido anti-horário. Segue que as trajetórias descritas através das expressões $(3.1.5) - (3.1.6)$, representam o deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, como ilustra a Figura 3.13.

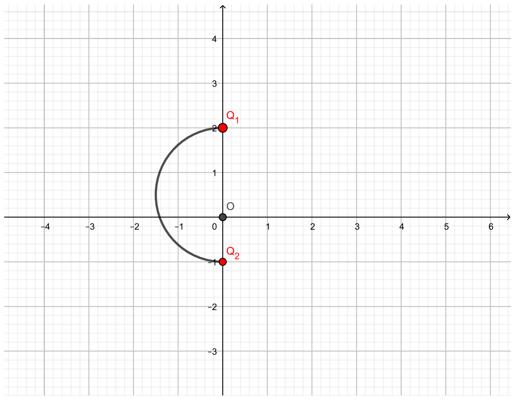

Figura 3.13: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido anti-horário .

Continuando com o processo, através da expressão:

$$\begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.1.7}$$

com $0 \leq x \leq 1$, percorremos a circunferência $\mathcal{C}_1(O)$ partindo do ponto Q_2, no sentido anti-horário, até encontrar o ponto $Q_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Em seguida,

$$\begin{bmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.1.8}$$

com $1 \geq x \geq 0$ descreve a trajetória descrita a partir do ponto $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ até o ponto Q_3. Segue que a trajetória descrita através das expressões (3.1.7) $-$ (3.1.8), representam o deslocamento do ponto Q_2 até o ponto Q_3, como ilustra a Figura 3.14.

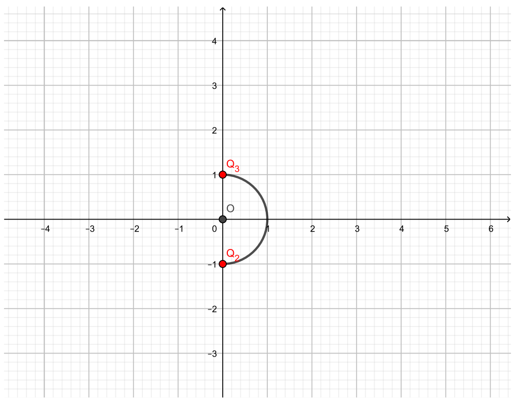

Figura 3.14: Deslocamento do ponto Q_2 até o ponto Q_3, no sentido anti-horário .

Por último, através da expressão

$$\begin{bmatrix} 2x & -2\sqrt{\frac{1}{4}-x^2} \\ 2\sqrt{\frac{1}{4}+x^2} & 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.1.9}$$

com $0 \geq x \geq -\frac{1}{2}$, percorremos a circunferência $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}((0, \frac{1}{2}))$, partido do ponto Q_3 até o ponto $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Em seguida, através da expressão

$$\begin{bmatrix} 2x & 2\sqrt{\frac{1}{4}-x^2} \\ -2\sqrt{\frac{1}{4}+x^2} & 2x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.1.10}$$

com $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ representa a trajetória descrita a partir do ponto $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ até à origem O. Segue que a trajetória descrita através das expressões (3.1.9) $-$ (3.1.10), representam o deslocamento do ponto Q_3 até a origem O, como ilustra a Figura 3.15.

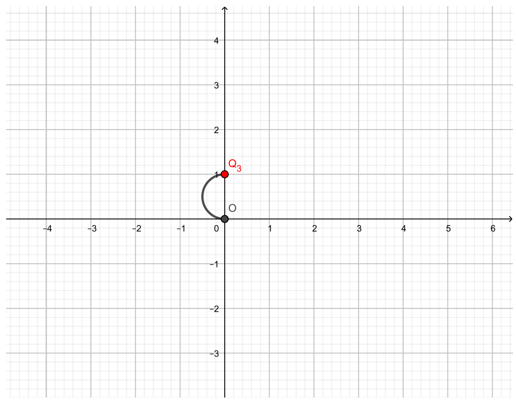

Figura 3.15: Deslocamento do ponto Q_3 até a origem O, no sentido anti-horário .

Portanto, através de operações com matrizes, conseguimos a trajetória descrita a partir do ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ até a origem O, no sentido anti-horário, como ilustra a Figura 3.16.

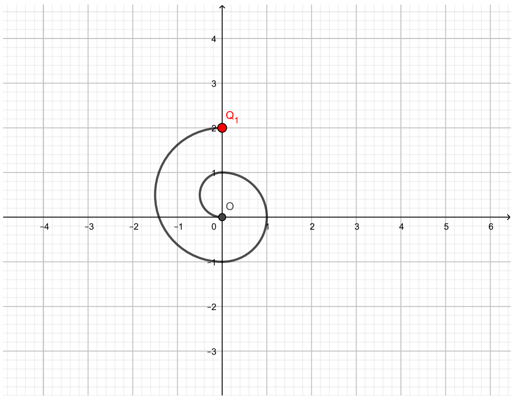

Figura 3.16: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido anti-horário .

Exemplo 3.1.4. Determine o deslocamento da origem O até o ponto P, como ilustra a Figura 3.17

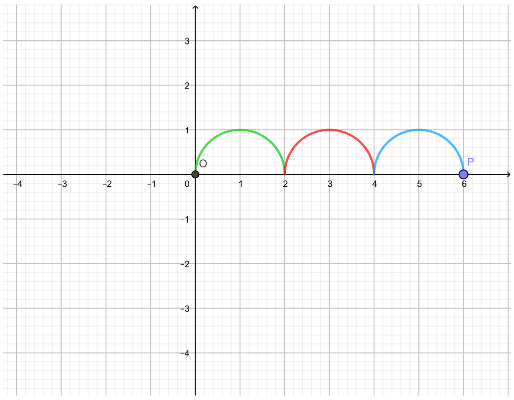

Figura 3.17: Deslocamento da origem O .

Solução. O deslocamento do ponto O até P ilustrado pela Figura 3.17 pode ser feito considerando os seguintes passos.

(Passo 1) O ponto O deloca-se sobre uma semicircunferência, de raio 1 e centro (1,0), no sentido horário até o ponto $P_1 = (2, 0)$;

(Passo 2) O Ponto P_1 desloca-se sobre uma semicircunferência, de raio 1 e centro (3,0), no sentido horário até o ponto $P_2 = (4, 0)$;

(Passo 3) O ponto P_2 desloca-se sobre uma semicircunferência, de raio 1 e centro (5,0), no sentido horário até o ponto $P = (6, 0)$

Para o (Passo 1), pelo Teorema (1) e as observações feitas sobre a equação 3.1.1, temos que a trajetória de O até P como descrita na Figura 3.17 é dada através da expressão

$$AP' + P_0 = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \\ \dfrac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} & -\dfrac{x}{r} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

com $-r \leq x \leq r$. Ou seja, o arco $\overrightarrow{\Gamma}_1(O, P_1)$ é escrito da seguinte maneira:

$$AP + P_0 = \begin{bmatrix} x & \sqrt{1 - x^2} \\ \sqrt{1 - x^2} & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $-1 \leq x \leq 1$, como ilustra a Figura 3.18.

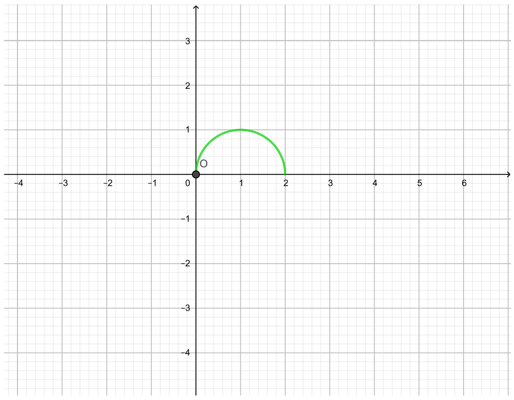

Figura 3.18: O deslocamento da origem O, após o primeiro passo .

Para o (Passo 2) Seja $\overrightarrow{\Gamma}_2(P_1, P_2)$, seguindo de modo análogo ao que foi feito no (Passo 1), a expressão:

$$\begin{bmatrix} x & \sqrt{1 - x^2} \\ \sqrt{1 - x^2} & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $-1 \leq x \leq 1$, define todo o arco $\overrightarrow{\Gamma}_2(P_1, P_2)$ de centro (1,0). Nesse caso se $x = -1$ então a expressão acima representa o ponto P_1, e se $x = 1$, então a expressão representa o ponto P_2, como ilustra a Figura 3.19.

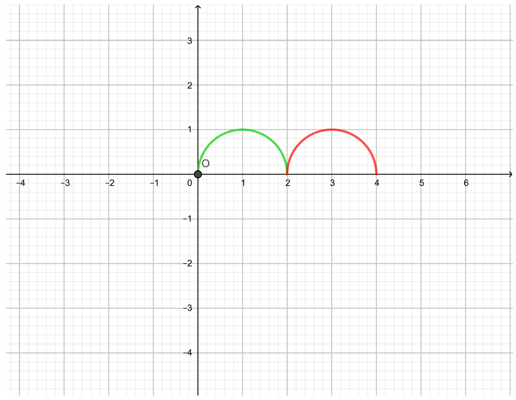

Figura 3.19: O deslocamento da origem O, após o segundo passo .

Para o (Passo 3), Seja $\overrightarrow{\Gamma}_3(P_2, P)$ de centro (3,0), seguindo novamente de modo análogo ao que foi feito nos dois passos anteriores, a expressão

$$\begin{bmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $-1 \leq x \leq 1$, descreve o deslocamento de P_2 sobre $\overrightarrow{\Gamma}_3(P_2, P)$ até o ponto P. Onde $x = -1$ define o ponto P_2 e $x = 1$ define o ponto P.

Exemplo 3.1.5. Determine o deslocamento do ponto P_1 ao longo do percurso, ilustrado na Figura 3.20.

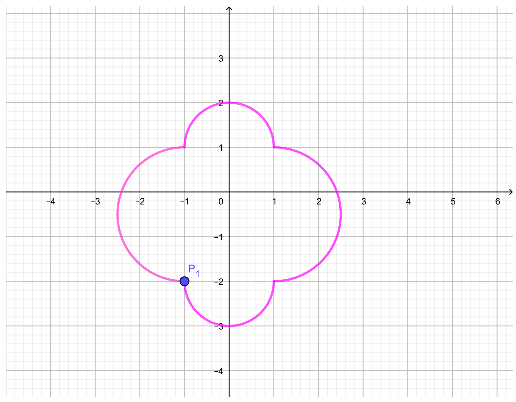

Figura 3.20: Deslocamento do ponto P_1 .

Solução. Primeiramente deve-se notar que o ponto P_1 desloca-se por semicircunferências de raios diferentes. Sendo assim vamos descrever os passos que devemos fazer:

,

(Passo 1) Deslocar $P_1 = (-1,-2)$ até $P_2 = (1,-2)$ no sentido anti-horário;

(Passo 2) Deslocar P_2 até $P_3 = (1,1)$, no sentido anti-horário;

(Passo 3) Deslocar P_3 até $P_4 = (-1,1)$, no sentido anti-horário;

(Passp 4) Deslocar P_4 até $P_5 = P_1 = (-1,-2)$, no sentido anti-horário.

Para o (Passo 1), seja $\overleftarrow{\Gamma}_1(P_1,P_2)$ de centro $(0,-2)$. Segundo a equação 3.1.3, O deslocamento de P_1 sobre $\overleftarrow{\Gamma}_1(P_1,P_2)$ é dado por

$$\begin{bmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

onde $1 \geq x \geq -1$. Nesse caso $x = 1$ define o ponto P_1 e $x = -1$ define o ponto P_2, como ilustra a Figura 3.21.

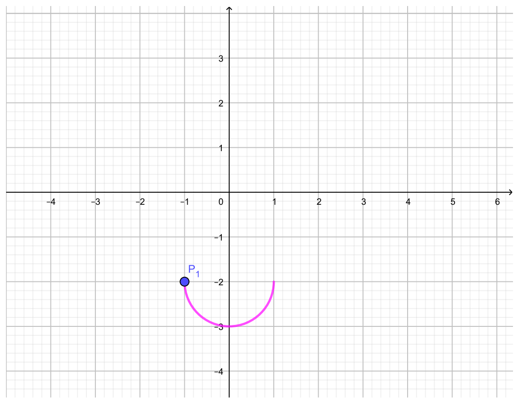

Figura 3.21: Deslocamento do ponto P_1, após o primeiro passo .

Para o (Passo 2), seguimos da mesma forma, considerando agora a expressão

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot \dfrac{x-1}{3} & -2 \cdot \dfrac{\sqrt{\frac{9}{4} - (x-1)^2}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{\frac{9}{4} - (x-1)^2}}{3} & 2 \cdot \dfrac{x-1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix},$$

onde $1 + \dfrac{3}{2} \geq x \geq 1 - \dfrac{3}{2}$. Essa expressão define o arco $\overleftarrow{\Gamma}_2(P_2,P_3)$ de centro $(1,-\dfrac{3}{2})$. Nesse caso $x = 1 + \dfrac{3}{2}$ define o ponto P_2 e $x = 1 - \dfrac{3}{2}$ define o ponto P_3, como ilustra a Figura 3.22.

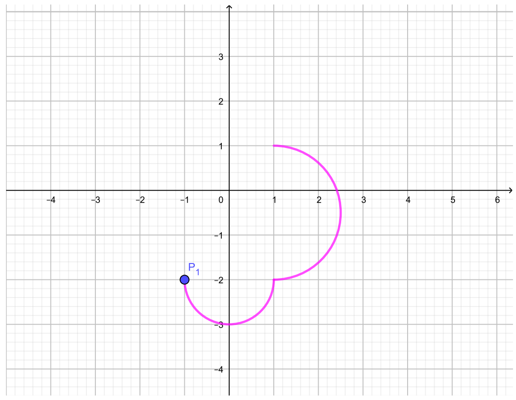

Figura 3.22: Deslocamento do ponto P_1, após o segundo passo .

Para o (Passo 3), seguimos como nos últimos dos passos, veja que a expressão,

$$\begin{bmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $1 \geq x \geq -1$, define o arco $\overleftarrow{\Gamma}_1(P_3, P_4)$ de centro $(0,1)$. Onde $x = 1$ define o ponto P_3, e o ponto P_4 é encontrado quando $x = -1$, como ilustra a Figura 3.23.

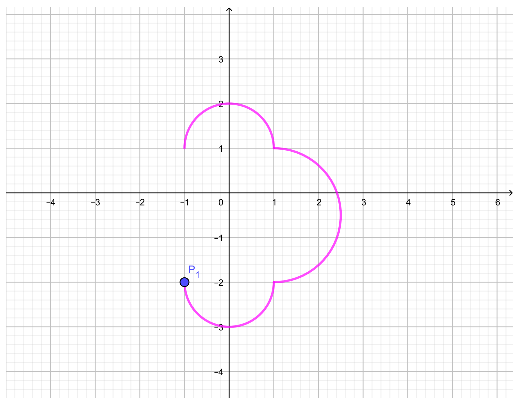

Figura 3.23: Deslocamento do ponto P_1, após o terceiro passo .

Para o (Passo 4) continuaremos de forma análoga. Ou seja, o arco $\overrightarrow{\Gamma}_4(P_4, P_1)$ é dado por:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot \dfrac{x+1}{3} & -2 \cdot \dfrac{\sqrt{\frac{9}{4} - (x+1)^2}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{\frac{9}{4} - (x+1)^2}}{3} & 2 \cdot \dfrac{x+1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix},$$

onde $-1+\dfrac{3}{2} \geq x \geq -1-\dfrac{3}{2}$. Dessa forma $x=-1+\dfrac{3}{2}$ define o ponto P_4, e $x=-1-\dfrac{3}{2}$ define o ponto P_1.

Exemplo 3.1.6. Determine o deslocamento do ponto Q_1 ao longo do percurso, ilustrado na Figura 3.24

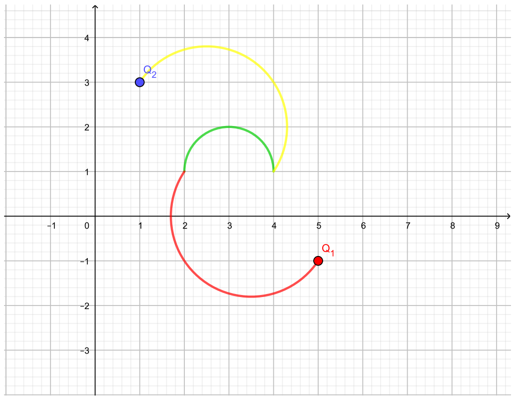

Figura 3.24: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2 .

Solução. Veja que o ponto Q_1 desloca-se por meio de 3 semicircunferência de raios distintos. Então devemos separar a trajetória de Q_1 em 3 partes:

(Passo 1) $Q_1=(5,-1)$ desloca-se até o ponto $P_1=(2,1)$, no sentido horário;

(Passo 2) o ponto P_1 desloca-se até o ponto $P_2=(4,1)$ no sentigo horário;

(Passo 3) por fim, o ponto P_2 desloca-se até o ponto $Q_2=(1,3)$, no sentigo anti-horário.

Para o (Passo 1), a expressão seguinte define o arco $\overrightarrow{\Gamma}_1(Q_1,P_1)$ de centro $\left(\dfrac{7}{2},0\right)$,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2\sqrt{13}}{13}\cdot\left(x-\dfrac{7}{2}\right) & \dfrac{2\sqrt{13}}{13}\cdot\sqrt{\frac{13}{4}-\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2} \\ -\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\cdot\sqrt{\dfrac{13}{4}-\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2} & \dfrac{2\sqrt{13}}{13}\cdot\left(x-\dfrac{7}{2}\right) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde $\dfrac{7}{2}+\dfrac{\sqrt{13}}{2} \geq x \geq \dfrac{7}{2}-\dfrac{\sqrt{13}}{2}$. No caso em que $x=\dfrac{7}{2}+\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ a expressão nos garante o ponto Q_1, e se $x=\dfrac{7}{2}-\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ então a expressão nos garante o ponto P_1, como ilustra a Figura 3.25.

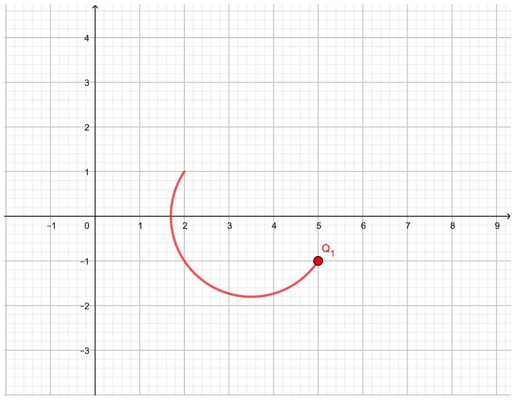

Figura 3.25: Deslocamento do ponto Q_1, após o primeiro passo.

Para o (Passo 2), seguiremos como anteriormente, isto é, a expressão

$$\begin{bmatrix} x-3 & \sqrt{1-(x-3)^2} \\ -\sqrt{1-(x-3)^2} & x-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $4 \geq x \geq 2$, define o arco $\overleftarrow{\Gamma}_2(P_1, P_2)$ de centro $(3, 1)$. Nesse caso, $x = 4$ define o ponto P_1, e $x = 2$ define o ponto P_2, como ilustra a Figura 3.26.

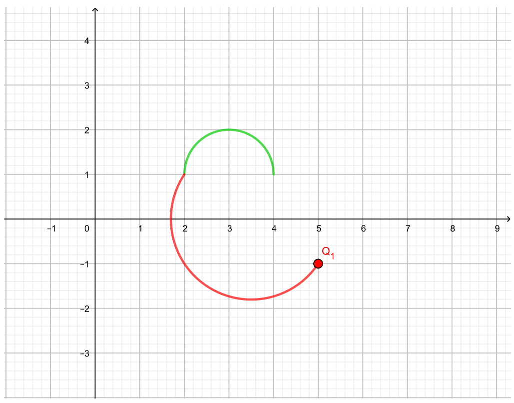

Figura 3.26: Deslocamento do ponto Q_1, após o primeiro passo.

Para o (Passo 3), seja o arco $\overrightarrow{\Gamma}_3(P_2, Q_2)$ de centro $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$, a expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) & -\frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \sqrt{\frac{13}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} \\ \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \sqrt{\frac{13}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} & \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{bmatrix},$$

onde $\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2} \geq x \geq \frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$, define $\overleftarrow{\Gamma}_3(P_2, Q_2)$, e além disso $x = \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$ define P_2 e $x = \frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$ define Q_2. Portanto, depois de seguir os 3 passos acima conseguimos que o ponto Q_1 desloque-se até o ponto Q_2 sobre a curva da figura 3.24.

3.2 Deslocamento de Robôs Móveis Através de Operações com Matrizes

Finalizaremos este capítulo, utilizando a noção de deslocamento sobre uma circunferência apresentada nesta seção, para estudar navegação de robôs autônomos.

Robôs móveis, estão cada vez mais presentes, realizando tarefas de transportes de peças, inspeção de plataforma de perfuração de petróleo, monitoramento, mapeamento, vigilância e etc... A principal característica de um robô móvel é a sua capacidade de locomoção, feita de modo autônomo, em determinado ambiente.

Um problema clássico em navegação autônoma de robôs, é fazer com que o robô navegue pelo ambiente em segurança, evitando a colisão com obstáculos, até alcançar uma ou mais posições pré-estabelecidas no ambiente. Uma proposta para o problema de navegação autônoma de robôs é dividir a navegação em quatro etapas: mapeamento do ambiente, planejamento, geração e controle da trajetória.

Na etapa de mapeamento do ambiente, analisamos o ambiente identificando os objetos nele contidos e suas respectivas localizações. A etapa de planejamento de trajetória, é onde se define uma trajetória segundo algum critério, como por exemplo, o menor caminho entre a posição de origem e a posição de destino, passando por posições intermediária que não tenha obstáculos. Para mais detalhes sobre estas duas etapas anteriores, sugiro as referências [6] e [8] Após o planejamento, a trajetória deve ser construída, onde entra a etapa de geração de trajetória. Esta etapa, constitui-se basicamente em encontrar argumentos matemáticos, como por exemplo, funções ou conjuntos de funções, que constitua com fidelidade a trajetória planejada. O grande problema desta etapa, é encontrar estes argumentos matemáticos. A geração de trajetória, constrói um caminho que deve ser rastreado e seguido pelo robô. Na etapa de controle de trajetória, corresponde em fazer o robô rastrear e seguir este caminho. Para mais detalhes sobre a etapa de controle, consulte a referência [7].

Neste trabalho, nos concentraremos apenas na etapa de geração de trajetória. Onde através de operações com matrizes determinaremos caminhos que o robô irá rastrear e seguir na etapa de controle de trajetória.

Problematização

Nuvens perigosas de contaminação atmosférica, podem ser causadas por vários fatores: como derramamento de caminhão-tanque em rodovias, acidentes de lançamento industrial, ou ataques terroristas químicos, biológicos, nucleares. Dependendo dos ventos predominantes e da flutuabilidade da nuvem, os contaminantes podem ser transportados por longas distâncias, ou permanecer em algumas regiões por um longo período.

Os perigos para a população e para o meio ambiente são altamente variáveis, uma vez que a gravidade da exposição depende do tipo de contaminação, concentração, duração da exposição, modo de contato e degradação natural da toxina. Consequentemente, as respostas a um evento como este podem variar de uma simples transmissão pela tv ou meios digitais, avisos para permanecer dentro de casa ou evitar a área, para evacuação de emergência em grande escala e subsequente quarentena e descontaminação.

A determinação imediata da espécies de toxinas, origem da nuvem, estrutura da nuvem e previsões de evolução da nuvem teria benefícios significativos na prevenção da exposição e no planejamento de solução de baixo custo.

Suponhamos que ocorra uma explosão em um caminhão tanque na estrada Teresina-União, aproximadamente 25 quilômetros do centro de Teresina. O ocorrido produziu uma nuvem de 50 metros de diâmetro, à uma altura de 60 metros, que segue em direção a cidade de Teresina a uma velocidade de 5 quilômetros por hora. Para uma tomada de decisão eficiente, a nuvem será perseguida por um veículo autônomo (para evitar a exposição do piloto com a nuvem), equipado com sensores de alta precisão e operado a baixo custo. O veículo utilizado será um MAV, que traduzido do inglês significa micro veículo aéreo, que é um veículo pequeno que pode voar por até duas horas, como ilustra a Figura 3.27.

Figura 3.27: MAV-micro veículo aéreo .
Fonte:https://www.enac.fr/en/imav-2017-international-micro-air-vehicle-conference-and-competition

Considerando um plano π em um sistema de eixos ortogonais OXY, situado a 60 metros de altura, tal que a origem O do sistema OXY coincida com o centro da nuvem. Sabemos que a cada 36 segundos o centro da nuvem desloca-se 50 metros em direção ao sul, ocupando as posições O, P_0, P_1, P_2, etc ao longo do plano π, como ilustra a Figura 3.28.

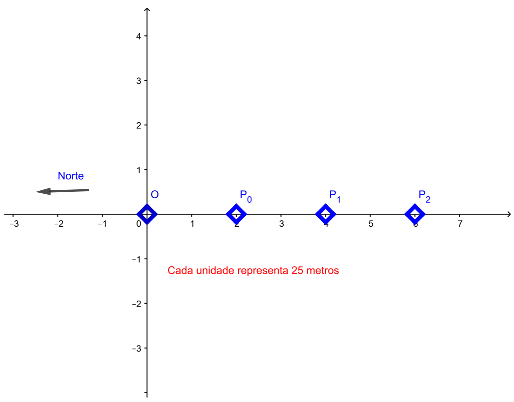

Figura 3.28: Várias posições da nuvem em direção ao sul .

Considere o seguinte problema:

Desconsiderando a velocidade do veículo, grandeza essa que pode ser deixada para a etapa de controle, cada posição Q do veículo ao longo do plano π será representado por uma matriz coluna $Q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Assumindo que no instante em que o centro da nuvem coincide com a origem O, o veículo esteja na posição $Q_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e sabendo que para uma boa coleta de dados, o veículo deve está a uma distância de 8 à 30 metros da extremidade da nuvem. Além disso, todos os lados da nuvem devem ser observados, pelo menos duas vezes.

Determinaremos uma trajetória a ser seguida pelo veículo.

De fato, escolheremos uma trajetória de tal modo que a cada lado observado pelo veículo, a nuvem tenha um deslocamento máximo de 12,5 metros para o sul. Desta forma, partindo da condição inicial Q_0, através da expressão:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $-2 \leq x \leq 2$, descrevemos a trajetória ao longo da circunferência $\mathcal{C}_2(O)$, no sentido anti-horário, partindo do ponto Q_0 até alcançar o ponto $P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, como ilustra a Figura 3.29.

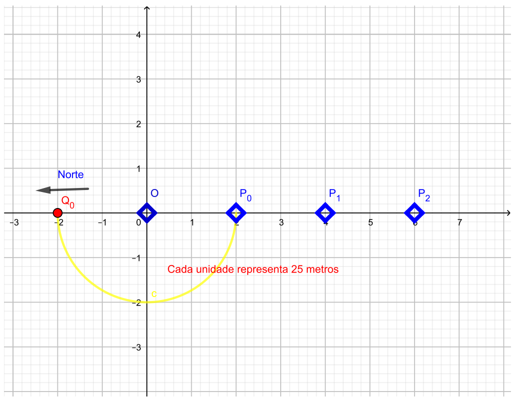

Figura 3.29: Deslocamento do ponto Q_0 até o ponto P_0, no sentido anti-horário .

Em seguida, através da expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{2x-1}{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{1}{2})^2} & \frac{2x-1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $\frac{3}{2} \geq x \geq -\frac{3}{2}$, descrevemos a trajetória ao longo da circunferência $\mathcal{C}_{1,5}((\frac{1}{2}, 0))$, no sentido anti-horário, partindo do ponto P_0 até alcançar o ponto $Q_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, como ilustra a Figura 3.30.

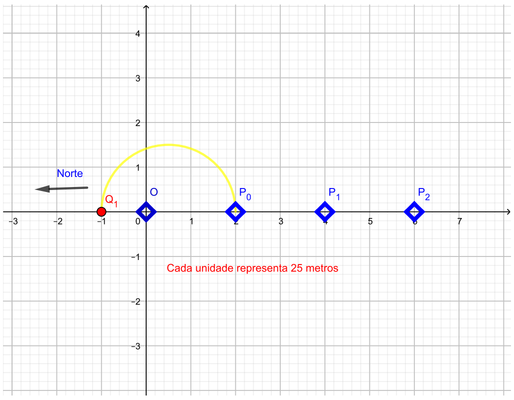

Figura 3.30: Deslocamento do ponto P_0 até o ponto Q_1, no sentido anti-horário .

Esta duas etapas feitas acima, descrevem a trajetória para a primeira observação da nuvem, como ilustra a Figura 3.31.

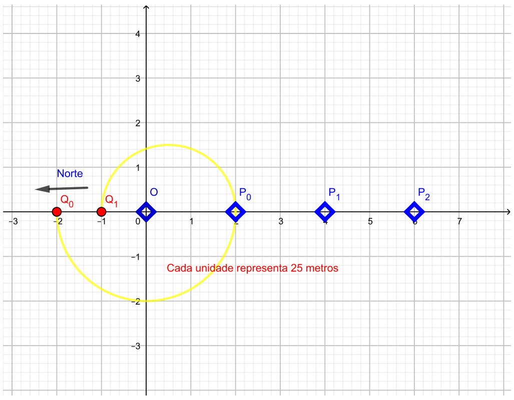

Figura 3.31: Primeira observação da nuvem no sentido anti-horário .

Agora determinaremos a trajetória para uma segunda observação da nuvem. Para isto, considere a expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{x-1}{2} & \frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{2} & \frac{x-1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $-2 \leq x \leq 2$, descrevemos a trajetória ao longo da circunferência $\mathcal{C}_2((1,0))$, no sentido anti-horário, partindo do ponto Q_1 até alcançar o ponto $Q_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, como ilustra a Figura 3.32.

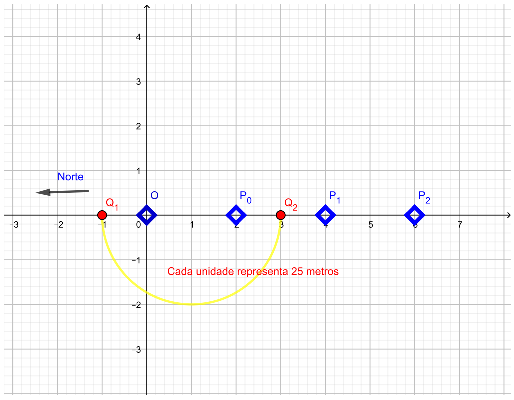

Figura 3.32: Deslocamento do ponto Q_1 até o ponto Q_2, no sentido anti-horário .

Em seguida completaremos a segunda volta. Para isto, considere a expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{2x-3}{3} & -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{3}{2})^2} \\ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{3}{2})^2} & \frac{2x-3}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $0 \geq x \geq 3$, descrevemos a trajetória ao longo da circunferência $\mathcal{C}_{1,5}((\frac{3}{2}, 0))$, no sentido anti-horário, partindo do ponto Q_2 até alcançar à origem O, como ilustra a Figura 3.33.

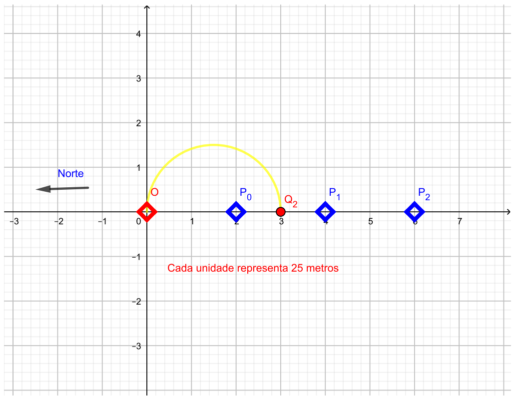

Figura 3.33: Deslocamento do ponto Q_2 até à origem O, no sentido anti-horário .

Esta duas etapas feitas acima, descrevem a trajetória para à segunda observação da nuvem, como ilustra a Figura 3.34.

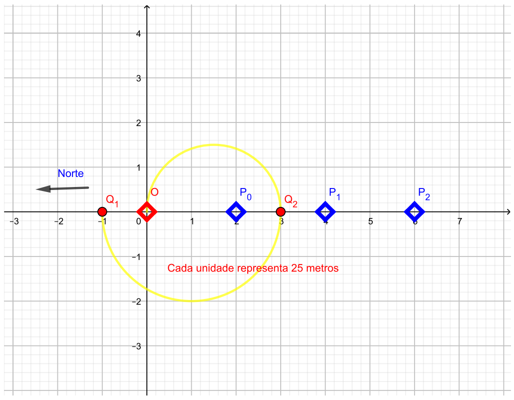

Figura 3.34: Segunda observação da nuvem no sentido anti-horário .

Portanto, obtemos uma trajetória descrita pelo veículo ao perseguir a nuvem de modo seguro e eficiente, como é ilustrado na Figura 3.35.

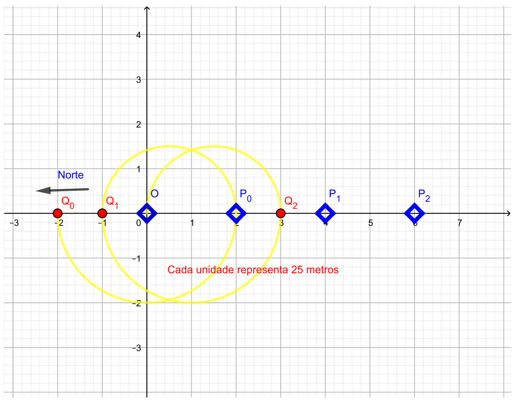

Figura 3.35: Trajetória descrita pelo veículo, no sentido anti-horário .

Conclusão

Neste trabalho conseguimos mostrar que uma circunferência, de centro em um ponto qualquer, pode ser obtida através de operações com matrizes. Além disso, olhando para o determinante de matrizes podemos caracterizar de duas maneiras diferentes a mesma circunferência. Através desta representação, trabalhos com a noção de deslocamento de pontos sobre um plano apenas considerando operações com matrizes.

Os resultados deste trabalho permitiram determinar a trajetória descrita por um robô autônomo. Trajetórias estas que antes não seriam tão simples, visto que não dispúnhamos de ferramentas suficiente.

A teoria apresentada nesta dissertação permite que estudantes da educação básica tenham uma nova visão da utilidade das matrizes, e possam associar operações com matrizes a trajetórias descrita por um veículo. Este trabalho pode ser utilizado por professores e estudantes da educação básica de ensino, como um complemento a teoria de matrizes, ou como um projeto interdiciplinar.

Referências Bibliográficas

1 Crissaff, L., Frensel, K., Delgado, J.: Geometria Analítica. Rio de Janeiro, SBM, 2017.

2 LIMA, E.; et al. A Matemática do Ensino Médio, vol. 01 e 03. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

3 IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 04. São Paulo, ed. Atual, 1993.

4 Oliveira, M. F.: A Circunferência de Centro na Origem como Produto de Matrizes. Orientador Cleidinaldo Aguiar Souza. Universidade Federal do Piauí-2019.

5 Oliveira, M. F., Souza, C. A. A Circunferência de Centro na Origem como Produto de Matrizes. Revista do Professor de Matemática-PMO. 2020. p. 535-550.

6 PIRES, E. J. S.; MACHADO, J. A. T.; OLIVEIRA, P. B. de M. Robot trajectory planning using multi-objective genetic algorithm optimization. In: Genetic and Evo- lutionary Computation Conference, Proceedings, Part I. Seattle, WA, USA: Springer, 2004. (Lecture Notes in Computer Science, v. 3102), p. 615-626. ISBN 3-540-22344-4.

7 REIS, G. A, dos. Controle H_∞ não linear de robôs móveis com rodas. Dissertação de Mestrado-Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

8 VAZ, J. M.; FABRO, J. A.; Snnap-sietema neutral de navegação em ambientes pré-mapeados. In: Proceedings of the IV Brasilian Conference on Neutral Networks-IV Congresso Brasileiro de Redes Neurais. 1999. p. 118-123.