UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DIEGO PAULI DE PAULA

O USO DE DÍGITOS VERIFICADORES E DE CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS NO ENSINO BÁSICO DE MATEMÁTICA

VITÓRIA
2021

DIEGO PAULI DE PAULA

O USO DE DÍGITOS VERIFICADORES E DE CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS NO ENSINO BÁSICO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho.

VITÓRIA

2021

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

P327 Pauli de Paula, Diego, 1991 -
O uso de dígitos verificadores e de códigos corretores de erros no ensino básico de Matemática / Diego Pauli de Paula – 2021.
107 f. : il.

Orientador: Moacir Rosado Filho.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Dígitos verificadores. 2. Códigos corretores de erros. 3. Educação. 4. Matemática. 5. Ensino básico. 6. Sala de aula. 7. Sequência didática. I. Pauli de Paula, Diego, 1991 -. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU: 51/37

DIEGO PAULI DE PAULA

O USO DE DÍGITOS VERIFICADORES E DE CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS NO ENSINO DE BÁSICO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

____

Prof. Dr. Eleonesio Strey
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro externo

____

Prof. Dr. Alancardek Pereira Araujo

Universidade Federal do Espírito Santo
Membro interno

A Deus, por me guiar, aos meus pais, Laide Luzia Pauli e Zaqueu de Paula, por sempre estarem ao meu lado. À minha esposa, Karla Ronconi Rasseli, por me apoiar nas horas mais difíceis, e à minha filha, Ana Clara Rasseli de Paula, por abrilhantar os meus dias de cansaço com um lindo sorriso.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, que sempre escuta minhas orações e não permite que eu desanime e perca o foco do meu caminho.

Aos meus Pais, Laide Luzia Pauli e Zaqueu de Paula, que mesmo com pouco estudo incentivaram e se orgulham do filho que sempre busca.

À minha esposa, Karla Ronconi Rasseli, que abdicou de muitas coisas para me dar suporte nos mais variados momentos.

À minha filha, Ana Clara Rasseli de Paula, por conseguir me dar ânimo de continuar com um simples sorriso.

Ao meu professor e orientador Moacir Rosado Filho, agradeço o incentivo e a confiança.

Aos meus amigos de longa data e padrinhos João Carlos Furlani e Monica Cattafesta, que sempre estiveram ao meu lado me aconselhando e me orientando.

Aos amigos da turma do PROFMAT, em especial Fábio Ramos Manhaes, Geyson Suzano, Lenise Júlia Fassini e Thais de Moura, pelo tempo e força despendida, fator essencial para que todos pudessem realizar o sonho de concluir o mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, por isso, também agradecemos a instituição.

“Cientistas de hoje substituíram a Matemática por experiências, e eles afastam-se, equação depois de cada equação, e eventualmente constroem uma estrutura que não tem nenhuma relação com a realidade”.

Nikola Tesla

RESUMO

Nesta dissertação, tivemos como objetivo apresentar os códigos verificadores e os códigos corretores de erros na educação básica, em especial o código de Hamming e sua relação com as matrizes, o que inclui alguns exemplos de suas funções no cotidiano. Defendemos que a baixa aplicabilidade do ensino de Matemática no dia a dia leva ao desinteresse dos alunos pela disciplina e que a intervenção didática por meio do uso dos dígitos verificadores e dos códigos corretores de erros, por outro lado, gera um maior interesse. Além da pesquisa bibliográfica, para comprovar nossa hipótese, elaboramos uma sequência didática aplicada em uma turma de 2º ano do ensino médio de uma escola estadual do município de Santa Teresa, Espírito Santo. Para envolver os alunos e repensar o ensino tradicional, foi realizado um trabalho de contextualização e desenvolvimento do tema, no qual os discentes se tornavam parte ativa do processo de ensino e aprendizagem. Por fim, este trabalho fomenta a reflexão sobre os atuais modelos de educação e o baixo desempenho dos alunos em Matemática.

Palavras-chave: Dígitos verificadores. Códigos corretores de erros. Ensino de Matemática. Educação básica. Sequência didática.

ABSTRACT

In this dissertation, we aimed to present the verification codes and the error-correcting codes in basic education, especially the Hamming code and its relationship with the matrices, which includes some examples of their daily functions. We argue that the low applicability of Mathematics teaching on a daily basis leads to students' lack of interest in the discipline and that didactic intervention through the use of check digits and error-correcting codes in the study of Mathematics, on the other hand, generates greater interest. In addition to bibliographic research, to prove our hypothesis, we developed a didactic sequence applied to a 2nd year high school class at a state school in the municipality of Santa Teresa, Espírito Santo, Brazil. To captivate students and rethink traditional teaching, work was carried out to contextualize and develop the theme, in which students became an active part of the teaching and learning process. Finally, the work encourages reflection on the current models of education and the low performance of students in Mathematics.

Keywords: Checks digits. Error correcting codes. Mathematics teaching. Basic education. Following teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ANEXOS

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

a.C.	Antes de Cristo
ASA	*American Standards Association*
ASCII	*American Standard Code for Information Interchange*
BIT	*Binary Digit*
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
Byte	*Binary term*
CD	*Compact disc*
COVID-19	*Coronavirus disease 2019*
CPF	Cadastro de Pessoa Física
d.C.	Depois de Cristo
DV	Dígito Verificador
EAN	*European Article Number*
EJA	Educação de jovens e adultos
EMA	Escala de Motivação Acadêmica
EMA-EF	Escala de Avaliação da Motivação para Aprender para Alunos do Ensino Fundamental
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
ES	Espírito Santo
EUA	Estados Unidos da América
GPS	*Global Positioning System*
GS1	Associação Brasileira de Automação
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

Ifes	Instituto Federal do Espírito Santo
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
ISBN	*International Standard Book Number*
mdc	Máximo divisor comum
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PAEBES	do Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIB	Produto Interno Bruto
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PROFMAT	Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional
QR Code	*Quick Response Code*
RFB	Receita Federal Brasileira
s.d.	Sem data
SARS-CoV-2	*Severe acute respiratory syndrome coronavirus 2*
SciELO	*Scientific Electronic Library Online*
SEDU	Secretaria Estatual de Educação do Espírito Santo
SRE	Superintendência Regional de Ensino
TSE	Tribunal Superior eleitoral
UF	Unidade Federativa

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por volta de 3500 a.C., em civilizações como a egípcia, já eram utilizadas técnicas para dimensionar objetos, cultivar terras, armazenar alimentos e criar animais.[1] As distintas sociedades estavam em contínuo desenvolvimento e precisavam organizar suas habilidades e conhecimentos. Essa necessidade impulsionou os povos antigos a elaborar um sistema que deu origem ao que chamamos de Matemática. De modo geral, a Matemática surgiu por necessidades da vida cotidiana, mas, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 2001, p. 26), converteu-se em "um imenso sistema de variadas e extensas disciplinas", capaz de refletir as leis sociais e servir como instrumento "para o conhecimento do mundo e domínio da natureza".

A história e o contexto do desenvolvimento da Matemática demonstram que ela foi estabelecida como uma "resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática", como a divisão de terras e o cálculo de créditos, mas consolidada por questões vinculados a outras ciências, tais como a Filosofia, a Física e a Astronomia, além de problemas relacionados ao campo de investigações da própria disciplina (BRASIL, 1998, p. 40).

É importante pontuar que a disciplina Matemática não possui um único criador, mas vários colaboradores, pois seus métodos foram criados pela necessidade de diferentes povos, em diferentes momentos. Todavia, se precisarmos citar alguns nomes, podemos evocar importantes figuras como Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides, Arquimedes, Al-Khwarizmi, Gottfried Leibniz, Isaac Newton, René Descartes, Leonhard Euler, Carl Gauss e, mais recentemente, Alan Turing. Todos esses pesquisadores legaram a nós as suas relevantes descobertas para que, hoje, pudéssemos desfrutar das diversas disciplinas que compõem o campo matemático.

Apesar da importância da Matemática, muitos não levam em consideração que ela está presente ao nosso redor, seja na sistematização de datas, horários, recursos financeiros, dimensões de objetos, desenvolvimento de tecnologias, entre outros inúmeros exemplos. Alguns bem óbvios, outros nem tanto, mas todos igualmente importantes.

[1] Todas as datas mencionadas nesta dissertação são d.C., exceto quando houver indicação.

Os números dialogam entre si, acarretando em constantes operações e transformações que nem sempre percebemos. Um caso exemplar dessa situação reside na utilização de dígitos verificadores, responsáveis por averiguar se uma operação numérica está correta ou não.

Ao fazermos compras num mercado, usarmos a internet, realizarmos cadastros e até mesmo na hora de votarmos, o dígito verificador está presente, certificando se as operações estão corretas, se os números dos códigos de barras são válidos, para que, assim, nossas compras sejam feitas com segurança, que uma pessoa não gere um número aleatório e use como Cadastro de Pessoa Física (CPF) falso e que tenhamos nosso título de eleitor com a numeração correta. Em resumo, os dígitos verificadores são de extrema importância para nos alertar sobre um erro na digitação ou na leitura de um código. Aliados a esses dígitos, encontram-se os chamados códigos corretores de erros, que, como o nome sugere, corrigem erros por meio de cálculos matemáticos não aparentes.

A falta de significado no estudo da Matemática e a relação dessa com o cotidiano é algo que distancia os alunos da aprendizagem, fato constatado na literatura por alguns autores, como Bessa (2007), Lorenzato (2010), Vasconcellos (2000), Machado (2005), Martins (2009), Morin (2004) e Moura (2002), bem como por nossa experiência de anos de sala de aula, por relatos de colegas de profissão e por discentes que diariamente se queixam conosco. Acreditamos que a falta de conexão com a realidade não seja o único fator que impede a aprendizagem dos alunos, a própria maneira pela qual a disciplina é transmitida também se apresenta como um problema. Essa é uma questão que será melhor abordada ao longo desta dissertação.

Diante do exposto, nosso trabalho pretende contextualizar o desenvolvimento dos códigos, em especial os dígitos verificadores e os códigos corretores de erros, demonstrando o histórico de desenvolvimento de tais conteúdos, bem como suas características. Além disso, abordamos as funções práticas dos dígitos verificadores no cotidiano no intuito de conceder mais significado àquilo que os alunos estudam. Por fim, apresentamos uma sequência didática, sua aplicação em sala de aula e discutimos os seus resultados.

Como hipótese de trabalho, defendemos que a baixa aplicabilidade do ensino de Matemática no cotidiano e a maneira pela qual é ensinada leva ao desinteresse pela disciplina, como verificado na própria fala dos alunos, que constantemente questionam a utilidade das matérias aprendidas em sala de aula. Além disso, argumentamos que mediante uma intervenção didática que exponha o contexto histórico, o desenvolvimento e aplicabilidade da disciplina, é possível aumentar o interesse dos alunos pela Matemática, uma vez que a humanização do conhecimento permite aproximá-lo da realidade.

Como metodologia, realizamos uma pesquisa bibliográfica sobre os temas aqui abordados, utilizando operadores booleanos em indexadores e bancos de dados, como o *Google Scholar*, o *Scientific Electronic Library Online* (SciELO) e o Portal de Periódicos Capes. Os termos inseridos para busca foram: aprendizagem AND matemática AND ("ensino básico" OR "ensino médio"); ("dígito verificador" OR "dígitos verificadores" OR "código corretor" OR "códigos corretores") AND matemática AND ("ensino básico" OR "ensino médio").

Para comprovar nossas hipóteses, realizamos um estudo com uma turma do 2º ano do ensino médio de uma escola estadual do município de Santa Teresa, Espírito Santo, com duração de 5 aulas de cinquenta e cinco minutos cada. Para a realização de nossos objetivos, foi preciso superar alguns contratempos referentes à aplicação da sequência didática, uma vez que a pandemia de COVID-19 afetou profundamente o processo de ensino-aprendizagem. A princípio, havíamos planejado a sequência para o ensino presencial, mas isso não se mostrou possível devido à suspenção das aulas e à transição para o ensino remoto. Apesar de ter havido um período de retorno à modalidade presencial, esse não foi obrigatório, o que fez com que a frequência dos alunos fosse baixíssima ou até mesmo nula. Assim, foi preciso adaptar nossos planos de aulas para o ensino remoto e EAD, sendo essas realizadas por meio do *Google Classroom*, plataforma adotada pela rede estadual de ensino do Espírito Santo como oficial.

Durante a intervenção, aplicamos um questionário de Escala de Avaliação da Motivação, também chamada de Escala de Motivação Acadêmica (EMA), que traz importantes perguntas ao alunado. Trata-se de uma versão adaptada da Escala de Avaliação da Motivação para Aprender para Alunos do Ensino Fundamental (EMA-EF), desenvolvida por Boruchovitch (2006) e Neves (2007). O instrumento que utilizamos, que pode ser encontrado no Anexo 1, é composto por 31 itens a serem respondidos em uma escala Lickert de três pontos (nunca, às vezes e sempre). Em seguida, aplicamos uma avaliação diagnóstica a fim de saber mais sobre o conhecimento dos alunos naquele momento, posto que acreditamos que conhecer o estágio de aprendizagem dos educandos possibilita tomadas de decisão mais eficazes no enfrentamento de deficiências (LUCKESI, 2011). Durante a intervenção, empregamos uma sequência didática, que pode ser definida como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos seus alunos" (ZABALA, 1998, p. 18).

Nossa dissertação foi dividida em três capítulos, sendo o primeiro dedicado à contextualização histórica dos dígitos verificadores e ao desenvolvimento e às novas descobertas da disciplina. Em outras palavras, abordamos a origem dos dígitos e como eles se desenvolveram e foram aprimorados, além de apresentar exemplos práticos de sua utilização no cotidiano.

No segundo capítulo, discutimos os códigos corretores de erros, uma vez que esses apresentam relação direta com os códigos verificadores. Abordamos a história do código de Hamming – responsável por estabelecer o código propriamente dito – e sua utilização prática. Também apresentamos conteúdos específicos sobre matrizes, os quais são importantes para o emprego do código de Hamming.

Já no terceiro e último capítulo, apresentamos um estudo conduzido com uma turma do ensino básico da rede estadual do Espírito Santo (ES), abordando de forma lúdica os tópicos discutidos nesta dissertação. Por fim, apresentamos a sequência didática desenvolvida e discutimos os resultados obtidos a partir de sua aplicação.

CAPÍTULO 1:

OS DIGÍTOS VERIFICADORES: DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO

1. TRANSMISSÃO DE MENSAGENS

Desde a origem de nossa espécie, a comunicação foi uma aliada para a sobrevivência e desenvolvimento das sociedades. Por meio dela, foi possível realizar receber e fornecer informações de todo tipo de conhecimento, seja por meio de sons, desenhos, fala ou escrita. A comunicação, entendida como o processo de transmissão e recuperação de informações, nos permitiu sobreviver, evoluir e criar novos conhecimentos e experiências (MARQUES DE MELO, 1973, p. 31).

Entre as várias transformações ocorridas ao longo dos séculos, destaca-se a forma de comunicação humana. Assim como afirma Alcântara Neto (2014, p. 3), “desde o início dos tempos, a necessidade de transmitir palavras a grandes distâncias conduziu o homem à busca de meios mais rápidos de fazê-lo”. A humanidade se comunicava, inicialmente, por meio de grunhidos, gestos e expressões. Diante da necessidade de relatar sua rotina, valeram-se de desenhos. O cotidiano de nossos ancestrais era extremamente significante, visto que incidia diretamente na sobrevivência da espécie. Logo, era preciso expressá-lo da maneira mais fidedigna possível, o que incluía gestos, sons e ações (DÍAZ BORDENAVE, 1982, p. 24). Assim, nasceram os signos, que nada mais são do que representações da realidade dotadas de sentido, com o objetivo basilar de comunicar algo a alguém.

Com o tempo, o uso de signos se tornou mais recorrente, o que pressupõe a evolução da maneira de organizá-los e compreendê-los. De tal modo, como declara Díaz Bordenave (1982, p. 25), “de posse de repertórios de signos, e de regras para combiná-los, o homem criou a linguagem”. A comunicação, a partir do desenvolvimento das linguagens, se tornou tão relevante que, hoje, existe até mesmo um campo inteiro de estudo dedicados a ela: a Teoria da Comunicação, área que reúne distintas disciplinas, como a Psicologia, a Sociologia, a Matemática, a Comunicação, a História, as Letras e as Ciências tecnológicas.

Não há uma data exata para quando o homem aprendeu a se comunicar por meio de um sistema complexo de símbolos, muito menos quando desenvolveu a escrita, uma vez que tal atividade ocorreu em diferentes lugares do planeta, de distintas maneiras e em diversos níveis de complexidade e organização. Apesar disso, o registro mais antigo encontrado até o momento data do século XIV a.C., sendo este escrito em símbolos cuneiformes da língua acadiana. Tal evidência foi encontrada num pedaço de barro em Jerusalém durante uma expedição arqueológica israelense (THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM, 2010).[2] Na China, foram encontrados 11 caracteres gravados em um casco de tartaruga e um deles era semelhante à escrita primitiva da Dinastia Shang. Todavia, não há um consenso se estes sinais são um tipo de escrita ou não. Caso se comprove, este passaria a ser o registro mais antigo da humanidade, com cerca de 8600 anos (ANGELO, 2003). A maior parte dos especialistas acredita que a escrita, num sistema mais complexo e funcional, se desenvolveu de forma independente em pelo menos quatro regiões do planeta: na Mesopotâmia, antes de 3400 a.C.; no Egito, antes de 3200 a.C.; na China, antes de 1300 a.C.; e na América Central, antes de 900 a.C. (PERLES, 2007, p. 6).

A alfabetização somente se difundiu entre camadas mais significativas das populações após a o fim da Idade Média, na medida em que, antes disso, era quase que restrita aos membros da aristocracia e do clero. Um ponto de virada importante para a utilização efetiva da escrita é a invenção da imprensa, que tem como principal expoente Johannes Gutenberg, responsável por desenvolver um sistema mecânico de tipos móveis que deu início à chamada Revolução da Imprensa e a consequente disseminação em massa do conhecimento por meio de jornais, panfletos e outras mídias impressas (FEBVRE; MARTIN, 1997). Nas palavras de Gontijo (2004, p. 167) “quando foi possível mecanizar esse processo através da prensa e reproduzir em série, o livro tornou-se portátil e o saber extrapolou os limites dos mosteiros, feudos e nações”.

Além da rápida informação, conseguir se comunicar, principalmente a longas distâncias, e com certa segurança, sempre esteve entre um dos anseios da humanidade. Muitos métodos e instrumentos foram inventados para reduzir o tempo de transmissão das mensagens e garantir o recebimento seguro delas. Em 1667, o físico inglês Robert Hooke, por exemplo, sugeriu o emprego do fio esticado para transmitir o som. Anos mais tarde, em 1684, Dom Gauthier, um monge francês da abadia de Citeaux, realizou experiências de telefonia acústica, utilizando tubos pneumáticos (ALCÂNTARA NETO, 2014, p. 2). Todavia, dificuldades econômicas

[2] Disponível em: <www.sciencedaily.com/releases/2010/07/100712102816.htm>. Aceso em: 11 mar. 2021.

impediram o desenvolvimento de tais projetos, que se mostravam muito custosos e pouco eficientes. Desde então, várias foram as tentativas de se criar uma forma de comunicação ampla e viável, mas muitas fracassaram, seja por causa dos custos, da distância ou até mesmo do método proposto. Não obstante, foi em meio a essas tentativas que surgiu o código Morse, objeto de nosso interesse no tópico a seguir.

1.1 CÓDIGO MORSE

Um dos métodos de comunicação de longa distância mais conhecidos e que é utilizado até hoje é o Código Morse. Criado em 1835 pelo inventor Samuel Finley Breese Morse, o Código Morse é um sistema binário que utiliza sons curtos e longos para transmitir mensagens. Para Francisco (2019, p. 1), a relevância do desenvolvimento do Código Morse é incontestável, posto que, em meados do século XIX, a sua utilização se popularizou tanto que foi capaz de atingir praticamente todos os países europeus. Em 1865, após algumas modificações no sistema, o Congresso Internacional Telegráfico regulamentou o Código Morse Internacional, o que conferiu maior dinamismo às comunicações humanas.

Sabemos que até o século XIX, o mundo carecia de um sistema de troca de informações de forma rápida e acessível. Como o Código Morse é relativamente simples, qualquer pessoa com o ouvido treinado e com uma tabela de codificação em mãos é capaz de decifrar a mensagem, isso o tornou eficiente e popular. Sendo assim, por volta dos anos de 1890, o Código Morse se tornou uma ferramenta amplamente utilizada para comunicações ágeis. Nesse momento, contudo, ainda não era possível o envio de mensagens por voz. Fernandes, Lunazzi e Franco (2011, p. 2) argumentam que, ao refletir historicamente, pode-se perceber que o Código Morse foi passo embrionário na direção desse tipo de comunicação, uma vez que se apresentava como uma codificação de sinais curtos e longos separados pela ausência de sinal. Em outras palavras, podemos dizer que o seu formato é semelhante ao digital: com sinal e sem sinal.

Findadas as questões históricas e contextuais que possibilitaram o desenvolvimento e popularização do Código Morse, podemos nos perguntar: afinal, como este sistema funciona? Em resumo, trata-se de uma espécie de comunicação sonora produzida por pulsos elétricos transmitidos em um cabo, onde cada letra do alfabeto é codificada por um som mais curto ou mais longo. Dependendo do que se quer se representar, a duração de um traço é igual ao triplo do tempo de um ponto (FERNANDES; LUNAZZI; FRANCO, 2011, p. 2). No quadro abaixo, apresentamos todas as letras do alfabeto e algarismos em Código Morse.

Quadro 1 – Letras do alfabeto e algoritmos representados em Código Morse

A	.-	**J**	.---	**S**	...	**2**	..---
B	-...	**K**	-.-	**T**	-	**3**	...--
C	-.-.	**L**	-..	**U**	..-	**4**	...-
D	-..	**M**	--	**V**	...-	**5**	.....
E	.	**N**	-.	**W**	.--	**6**	-....
F	..-.	**O**	---	**X**	-..-	**7**	--...
G	--.	**P**	.--.	**Y**	-.--	**8**	---..
H	....	**Q**	--.-	**Z**	--..	**9**	----.
I	..	**Q**	.-.	**1**	.----	**0**	-----

Fonte: Adaptado de Snodgrass e Camp (1922).

Para casos de emergências, o Código Morse pode ser usado com equipamentos improvisados, o que viabiliza o processo em situações onde pouco recursos estão à disposição. Assim, por exemplo, a palavra conhecida mundialmente como pedido de socorro, “SOS”, poderia ser enviada com o formato de três pontos, três traços e três pontos, se apresentando da seguinte maneira: “...---...”.

Para Porto (s.d.),[3] o Código Morse teve grande relevância na Segunda Guerra Mundial, entre 1939 e 1945, principalmente na transmissão de mensagens entre os navios de guerra e as bases navais de diversos países, onde as mensagens por voz ainda não eram muito confiáveis. Como era de se esperar, a tecnologia atual não é a mesma de décadas atrás. Hoje, podemos transmitir mensagens por computadores e celulares, que além das mensagens de texto, enviam áudios, fotos, vídeos e arquivos criptografados em centenas de linguagens e fazem chamadas instantâneas com áudio e vídeo. Certamente, da década de 1940 até os dias atuais, ocorreu um salto tecnológico sem precedentes.

[3] Disponível em: <https://www.infoescola.com/comunicacao/codigo-morse>. Acesso em: 07 jan. 2021.

1.2 OUTROS CÓDIGOS E TECNOLOGIAS

Sem dúvidas, outros métodos de transmissão eram usados ao redor do planeta, como o famigerado rádio. Apesar de ser um dos meios de comunicação mais difundidos e hoje ser visto como uma tecnologia simples, o rádio já foi motivo de transtornos devido à quantidade de ruídos em sua comunicação (KOCHHANN; FREIRE; LOPEZ, 2011, p. 1-12).[4] Para exemplificar, pensemos na transmissão da palavra "pato", que constantemente era entendida como "rato". Se uma palavra tão pequena, com apenas quatro letras, é capaz de gerar um erro tão significante, seria mais difícil ainda transmitir como fidelidade códigos mais complexos, como comandos estratégicos em guerras ou informações bancárias importantes. De tal forma, com a maior demanda, surgiu a necessidade de verificar se o que estava sendo transmitido estava correto, garantindo maior confiabilidade no processo e economia de tempo e recursos.

Sabemos que muitas tecnologias existentes foram criadas ou aprimoradas em virtude de conflitos bélicos ou da iminência desses, o que certamente inclui os meios de comunicação. Apesar de não garantir a vitória, é fato que um exército que possui melhor comunicação – mais rápida e precisa – possui uma vantagem sobre o seu adversário. Foi pensando nisso que os americanos começaram a utilizar a redundância para dar mais confiabilidade para o processo de transmissão de informações (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015, p. 184).

Embora algumas tecnologias tenham sido desenvolvidas para fins militares, frequentemente são atribuídos usos domésticos para elas. Assim como afirma Kenski (2007, p. 16), "[...] dos centros de pesquisa, essas invenções migram para o uso ampliado em nossas casas e alteram nossas vidas". Muitas vezes, nem sabemos a origem dos equipamentos e utensílios que utilizamos, mas, mesmo assim, eles fazem parte do nosso cotidiano, como é o caso dos computadores, GPS, forno de micro-ondas, entre vários outros exemplos.

Segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 189), proveniente da Primeira Guerra Mundial temos um modelo de como as mensagens eram transmitidas por rádio. Se um soldado dissesse: "Echo, Romeo, Romeo, Oscar", quem recebia a mensagem decodificaria os termos e o resultado seria o vocábulo "erro". Este é um exemplo simples, mas que retrata a situação vivida pelos combatentes, na qual, para evitar erros de transmissão, era necessário pronunciar palavras

---

[4] Aqui não entendemos ruído como uma simples emissão sonora desagradável ao ouvido, mas como "[...] qualquer fonte de erro, distúrbio ou deformação da fidelidade na comunicação de uma mensagem, seja ela sonora, seja visual, seja escrita etc. A origem do ruído pode ser devida ao emissor ou a seu codificador, à transmissão, ao receptor ou a seu decodificador" (GIL, 2001, p. 74).

inteiras para transmitir apenas uma letra, o que tornava a comunicação custosa e lenta. Importa ressaltar que esta ideia de multiplicar o que se almeja transmitir também é conhecida como redundância e está diretamente ligada aos códigos detectores e corretores de erros, assunto este que abordaremos mais especificamente no capítulo 2 desta dissertação.

Apesar de as tecnologias supracitadas terem sido essenciais no passado, hoje elas são encaradas como obsoletas. Com o advento e a consequente popularização do smartphone, até mesmo leigos consideram tecnologias de poucas décadas atrás como rudimentares, uma vez que num telefone móvel atual, é possível fazer quase tudo o que um computador de mesa ou laptop faz, mas com a facilidade de caber na palma da mão (FARIA *et al*., 2012 p. 4). A esse respeito, Miller (2012, p. 224) declara que os smartphones “não são apenas telefones celulares com acesso a e-mail”. Segundo o autor:

> Desde sua invenção pela IBM, os smartphones passaram por duas fases. A primeira denominou-se “phone-centric” e englobou o período de sua invenção até o lançamento do iPhone em 2007. Nesse período, o dispositivo era utilizado como aparelho de telefonia com alguns aplicativos computacionais. A segunda fase, a partir do lançamento da primeira geração de iPhones em 2007, dinamizada pelo desenvolvimento do sistema operacional de código aberto Android, em 2008, denominou-se “data-centric”. A partir dessa fase, os smartphones começaram a ser entendidos e utilizados como dispositivos computacionais com acesso à internet que também possuíam a funcionalidade de realizar chamadas telefônicas (MILLER, 2012, p. 224).

Os smartphones, portanto, são um dos responsáveis por uma das maiores transformações da humanidade no que se refere à comunicação e acesso à informação. Por meio deles, podemos nos comunicar, jogar, pagar contas, tirar fotos, gravar, receber e assistir a vídeos, entre uma série de outras funções, que incluem *Global Positioning System* (GPS), barômetro, reprodutor de mídia e lanterna. Tudo isso de maneira acessível e eficiente, bem diferente dos meios de comunicação da primeira metade do século XX, pelos quais enviar uma simples frase era cansativo e custoso, além de nem sempre atingir o resultado esperado.

Pensando nas informações expostas até o momento, pretendemos evidenciar, nos próximos tópicos e também no segundo capítulo, alguns dos mecanismos que ajudaram a chegar aos níveis atuais de velocidade, confiabilidade e baixo custo na troca códigos, mensagens, fotos, vídeos, entre outros arquivos. Os códigos, por mais atuais que sejam, ainda podem apresentar algum tipo de erro, comprometendo a inteligibilidade da comunicação. Nesse sentido, a partir de agora, discutiremos como esses códigos são verificados para que erros de digitação ou de leitura não atrapalhem o processo de codificação.

1.3 O SURGIMENTO DOS DÍGITOS VERIFICADORES

Os dígitos verificadores surgiram da necessidade de se ter mais segurança nas informações escritas e, hoje, se tornaram indispensáveis em nosso cotidiano, como, por exemplo, na detecção de números de um boleto digitados incorretamente ou até mesmo de um Cadastro de Pessoa Física (CPF) (HEFEZ; VILLELA, 2008, p. 1).

O dígito verificador nada mais é do que uma espécie de "seguro" das informações que se quer digitar ou transmitir. Para Hefez e Villela (2008, p. 1), ele é um número adicional para detectar eventuais erros, sendo encontrado a partir de fórmulas que variam de acordo com o tipo de código. Segundo Costa e Veloso (2014, p. 1), o dígito verificador é determinado por algoritmos que utilizam conceitos simples da Teoria dos Números.[5]

2. OS DÍGITOS VERIFICADORES NO COTIDIANO

Existem vários processos que utilizam os dígitos verificadores, alguns utilizam um ou dois dígitos, usam fórmulas variadas, entre outras distinções, mas a ideia central é sempre a mesma: trazer confiabilidade na transmissão das informações. Posto isso, abordaremos algumas funções práticas dos dígitos verificadores no dia a dia, as quais poderão ser observadas nos três exemplos descritos a seguir.

2.1 CADASTRO DE PESSOA FÍSICA (CPF)

Um dos exemplos de códigos que são utilizados constantemente no cotidiano dos brasileiros se refere ao CPF. Apesar da obrigatoriedade da referida documentação, muitos dos usuários cadastrados não sabem como os onze dígitos que o compõem são formados, há até quem acredite que os números do CPF são gerados aleatoriamente.

O CPF foi criado pela portaria nº GB-155, de 27 de março de 1968, do Ministro da Fazenda, publicada no Diário Oficial da União de 20 de junho de 1968. Essa portaria atribuiu à Direção-Geral da Fazenda Nacional a competência para elaborar a minuta de projeto de lei, instruções e

[5] A teoria dos números, nas palavras de Bertone (2014, p. 7), é "uma área específica da Matemática que estuda as propriedades dos números inteiros, tais como a divisibilidade e números primos".

normas complementares necessárias à implantação do cadastro. Em primeira instância, o Cadastro Geral das Pessoas Físicas foi criado com o intuito de melhor organizar a arrecadação do imposto de renda (NÓBREGA, 2014, p. 86).

O cadastro foi definitivamente instituído por força do Decreto-Lei nº 401, em 30 de dezembro de 1968, e recebeu o nome de Cadastro de Pessoas Físicas, como pode-se observar nos artigos a seguir:

> Art. 1º: O Registro de Pessoas Físicas criado pelo artigo 11 da Lei número 4.862 de 29 de novembro de 1965 é transformado no Cadastro de Pessoas Físicas.
>
> Art. 2º: A inscrição no Cadastro de Pessoas Físicas, a critério do Ministro da Fazenda, alcançará as pessoas físicas, contribuintes ou não do imposto de renda e poderá ser procedido.[6]

De acordo com Nóbrega (2014, p. 87), com o passar dos anos, o CPF começou a ter maior relevância, até que no dia 1 de janeiro de 1971, passou a ser informação obrigatória no documento de licenciamento dos veículos automotores. Desde então, a lista de locais, documentos e instituições que exigem a menção do número do CPF não parou de crescer.

Importa ressaltar que o antigo Registro das Pessoas Físicas apresentava seis dígitos, mas com a criação do CPF, foi introduzido o sétimo dígito, e criados o oitavo, que era obtido por meio de um cálculo, e o nono, que representava a região fiscal de inscrição. Em 1972, foram introduzidos dois dígitos no número de inscrição, os quais receberam o nome de controle, pois também eram calculados. Assim, o CPF passou a contar com onze dígitos. Curiosamente, a 8ª Região Fiscal do Estado de São Paulo esgotou o estoque de números e o oitavo dígito deixou de ser calculado. Com o passar do tempo, o CPF extrapolou suas funções originais, que envolviam o imposto de renda e licenciamento dos veículos automotores, e tornou-se um dos documentos mais importantes no cotidiano dos cidadãos brasileiros (NÓBREGA, 2014, p. 87).

Após essa contextualização da implantação do CPF, chegou o momento de o analisarmos matematicamente. Em primeiro lugar, é importante saber que o CPF é um código que armazena informações sobre os indivíduos, sendo ele composto por 11 números, segundo o padrão EAN-11 (*European Article Number*).[7] Para Nascimento *et al.* (2015, p. 130), a geração do número de

---

[6] Cf. PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA. CASA CIVIL. SUBCHEFIA PARA ASSUNTOS JURÍDICOS. Decreto-Lei n° 401, de 30 de dezembro de 1968.

[7] O padrão EAN-11 (*European Article Number*) é um código que usa o módulo 11 para a verificação da informação.

CPF segue uma sequência lógico-matemática de maneira que não possua outro código igual, o que o caracteriza como um número confiável, único e intransferível entre cidadãos.

Figura 1 – Modelo de "Comprovante de inscrição no CPF" emitido pela RFB

Fonte: Brasil; RFB (2017).

Tendo a Figura 1 como apoio, vamos elucidar alguns pontos fundamentais para a compreensão da emissão de um CPF. Vejamos abaixo.

- Os 11 números podem ser escritos da seguinte forma: ABCDEFGHI/JK ou ABCDEFGHIJK;
- Os oito primeiros algarismos (ABCDEFGH) representam o número-base;
- O nono algarismo (I) representa a federação, onde o CPF foi cadastrado.
- 0 – Rio Grande do Sul
  1 – Distrito Federal, Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Tocantins
  2 – Amazonas, Pará, Roraima, Amapá, Acre e Rondônia
  3 – Ceará, Maranhão e Piauí
  4 – Paraíba, Pernambuco, Alagoas e Rio Grande do Norte
  5 – Bahia e Sergipe
  6 – Minas Gerais
  7 – Rio de Janeiro e Espírito Santo
  8 – São Paulo
  9 – Paraná e Santa Catarina
- Os dois algarismos restantes (JK) são conhecidos como dígitos verificadores.

No que se refere especificamente aos dígitos verificadores, não há dúvidas que eles são peças fundamentais para se obter a certeza de que estamos lidando com um CPF válido, pois caso o cálculo do(s) verificadores apresentem erro, o número é descartado. Caso contrário, não será possível prosseguir com a ação desejada, seja ela a abertura de uma conta em um banco, ou cadastro em algum sítio governamental ou a realização de compras em lojas virtuais que solicitem o CPF.

Para localizarmos os dígitos verificadores é preciso realizar uma série de procedimentos, sendo eles variáveis, dependendo do qual digito se almeja obter, como veremos adiante.[8]

Para obter o décimo dígito (J) do CPF, que é o primeiro digito verificador:

- Multiplicamos ABCDEFGHI por $10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$, respectivamente, assim obteremos: $(10A, 9B, 8C, 7D, 6E, 5F, 4G, 3H, 2I)$.
- Somamos os resultados obtidos: $(10A + 9B + 8C + 7D + 6E + 5F + 4G + 3H + 2I)$.
- Dividimos o resultado da soma do passo anterior por 11.
- Verificamos o resto da divisão: se for 0 ou 1, o dígito J é [0] (zero); se for 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10, o dígito J é [11 – resto da divisão].

Para obter o décimo primeiro dígito (K) do CPF, que é o segundo digito verificador:

- Multiplicamos ABCDEFGHIJ por $11,10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$, respectivamente, assim obteremos: $(11A, 10B, 9C, 8D, 7E, 6F, 5G, 4H, 3I, 2J)$.
- Somamos os resultados obtidos: $(11A + 10B + 9C + 8D + 7E + 6F + 5G + 4H + 3I + 2J)$.
- Dividimos o resultado da soma do passo anterior por 11.
- Verificamos o resto da divisão: se for 0 ou 1, o dígito K é [0] (zero); se for 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10, o dígito K é [11 – resto da divisão].

---

[8] Para mais informações sobre como validar um CPF, consulte: <https://exceldoseujeito.com.br/validar-cpf-cnpj-e-titulo-de-eleitor-parte-i>.

Vejamos um exemplo prático. Na Figura 1, podemos notar que o nono algarismo (I) do número do CPF é 9, isso indica que temos um CPF cadastrado em Paraná/Santa Catarina. O número do referido documento é 123.456.789-10, mas será que ele é válido? Vamos verificá-lo:

- $(1 \times 10) + (2 \times 9) + (3 \times 8) + (4 \times 7) + (5 \times 6) + (6 \times 5) + (7 \times 4) + (8 \times 3) + (9 \times 2) = 10 + 18 + 24 + 28 + 30 + 30 + 28 + 24 + 18 = 210$
- $210/11 = 19 \times 11 + 1.$

O resto 1 indica que o primeiro dígito verificador deveria ser 0, mas o CPF apresenta número 1. Isso quer dizer que esse CPF é inválido. Mas e se o número fosse 121.415.297-00, será que ele teria validade? Vamos testá-lo:

- $(1 \times 10) + (2 \times 9) + (1 \times 8) + (4 \times 7) + (1 \times 6) + (5 \times 5) + (2 \times 4) + (9 \times 3) + (7 \times 2) = 10 + 18 + 8 + 28 + 6 + 25 + 8 + 27 + 14 = 144$
- $144/11 = 13 \times 11 + 1.$

Como resultado, encontramos que o resto foi 1, dígito J é 0 e é correspondente. Até agora temos um CPF válido. Todavia, é preciso ainda encontrar o segundo dígito verificador, o K. Prossigamos:

- $(1 \times 11) + (2 \times 10) + (1 \times 9) + (4 \times 8) + (1 \times 7) + (5 \times 6) + (2 \times 5) + (9 \times 4) + (7 \times 3) + (0 \times 2) = 11 + 20 + 9 + 32 + 7 + 30 + 10 + 36 + 21 + 0 = 176$
- $176/11 = 16 \times 11 + 0.$

Com base nos cálculos, o resto da divisão foi 0, assim como o dígito anteriormente mencionado. Logo, esse CPF, que foi registrado no Rio de Janeiro/Espírito Santo, é válido.

Por fim, mesmo com apenas alguns exemplos, é perceptível que a ferramenta dos dígitos verificadores é indispensável quando se trata da validação da numeração do CPF. Tal procedimento nos livra de erros de digitação e também de possíveis fraudes relacionadas à tal documento.

2.2 CÓDIGOS DE BARRAS

Outro exemplo da utilização dos dígitos verificadores pode ser encontrado nos códigos de barras, sendo este último um dos códigos mais constantes na vida das pessoas, pois podemos encontrá-lo em diversos produtos, desde alimentos a livros. Tais códigos têm a função de trazer maior confiabilidade e controle para as empresas, além de serem "mais eficientes do que os nomes para armazenar e transmitir dados", visto que "os números transpõem a barreira dos idiomas, pois são usados internacionalmente" (FINI, 2009, p. 71).

Os conceitos embrionários da codificação automática, até onde se tem conhecimento, foram desenvolvidos nos Estados Unidos da América (EUA), em 1948, por Joseph Woodland, estudante de Engenharia Mecânica, e Bernard Silver, estudante de Engenharia Elétrica. Mais tarde, com o avanço da tecnologia, no dia 26 de junho de 1974, em Ohio, tem-se o primeiro registro da venda de um produto pela leitura do código de barras (GS1-BRASIL, 2017).[9]

No Brasil, o modelo mais utilizado de códigos de barras é o EAN-13. Tal código é formado por 13 dígitos, sendo os primeiros 12 dígitos reservados às informações do prefixo do país de origem, código do fabricante e sequência do produto. Já o último número trata-se do dígito verificador, como podemos ver na Figura 2 (TAKAHASHI, 2013).

Figura 2 – Código de barras EAN-13

Fonte: MUNDO DO CÓDIGO DE BARRAS. Como funciona o código de barras GS1 GTIN 13.[10]

[9] Disponível em: <https://blog.gs1br.org/codigo-de-barras-conheca-sua-historia-de-evolucao>. Acesso em: 15 jan. 2020.
[10] Disponível em: <https://www.mundodocodigodebarras.com.br/como-funciona-o-codigo-de-barras>. Acesso em: 05 jan. 2020.

As barras são dispostas de tal forma que, ao passar o código pelo leitor de código de barras, o computador lê as barras brancas como 0 e as pretas como 1. Em outros termos, o computador faz a leitura de uma sequência binária e a transforma em algarismos do sistema decimal (FINI, 2009). Esse sistema de leitura, a olho nu, não é tão simples, pois existem uma série de regras para dispor as barras brancas e pretas, mas para um computador esse é um processo tão simples que mesmo de cabeça para baixo o código será lido normalmente.

Também é possível ver um número localizado abaixo das barras brancas e pretas. Este é o mesmo número que é lido pelo computador, sua presença ali, mesmo que redundante, serve de auxílio, pois caso o leitor apresente algum problema, o operador poderá digitar a numeração do código de barras.

Na figura abaixo, segue uma rápida explicação mais detalhada do que significa cada grupo de números.

Figura 3 – Código de barras explicado

Fonte: CSJ – OITAVO. Mundo tecnológico: a matemática dos códigos de barras.[11]

Como observado, o último dígito é verificador, também chamado de dígito de segurança ou controle. Para o encontrarmos, deve-se realizar alguns procedimentos simples, os quais listaremos a seguir:

- Tomemos como exemplo o código de barras ABCDEFGHIJKLM, no qual cada letra do alfabeto representa o algarismo do código em sua respectiva posição. Neste código, M é o digito de segurança, desta forma, utilizaremos apenas os 12 primeiros dígitos.

[11] Disponível em: <http://csj-oitavo.blogspot.com/2012/02/mundo-tecnologico-matematica-dos.html>. Acesso em: 22 ago. 2019.

- Excluído o último dígito, deve-se multiplicar cada algarismo pelos números: 1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3. Tais números, dispostos da seguinte forma, são chamados de vetores de pesos, um vetor fixo. Têm-se, então, após a multiplicação: $A \times 1, B \times 3, C \times 1, D \times 3, E \times 1, F \times 3, G \times 1, H \times 3, I \times 1, J \times 3, K \times 1, L \times 3$.

- Em seguida, soma-se os resultados obtidos a partir das multiplicações do passo anterior: $A \times 1 + B \times 3 + C \times 1 + D \times 3 + E \times 1 + F \times 3 + G \times 1 + H \times 3 + I \times 1 + J \times 3 + K \times 1 + L \times 3$.

- Se a soma for um número divisível por 10, o dígito verificador será igual a zero; mas se não for divisível por 10, então, o dígito verificador será a diferença entre 10 e o resto da divisão por 10.

Para ilustrar de forma mais clara, vejamos o exemplo a seguir, no qual utilizamos o número 9788576755616, o mesmo que está representado na Figura 2. Neste exemplo o dígito verificador é de fato igual a 6, já que:

$$(9 \times 1) + (7 \times 3) + (8 \times 1) + (8 \times 3) + (5 \times 1) + (7 \times 3) + (6 \times 1) + (7 \times 3) + (5 \times 1) + (5 \times 3) + (6 \times 1) + (1 \times 3) = 9 + 21 + 8 + 24 + 5 + 21 + 6 + 21 + 5 + 15 + 6 + 3 = 144$$

$$144 = 14 \times 10 + 4, \text{ e então } 10 - 4 = 6$$

Este procedimento de verificação, contudo, é válido para os códigos de barras EAN-13. Não podemos esquecer que existem outros tipos de códigos de barras, como o EAN-8 ou EAN-14. Apesar disso, o modelo de códigos de barras mais utilizado nos Brasil é o EAN-13 (GS1-BRASIL, 2017).[12]

Por fim, importa ressaltar que uma nova tecnologia criada em 1994 está ganhando cada vez mais espaço entre os usuários: o *QR Code*, que é uma espécie de código de barras onde seu "tamanho" importa por ser bidimensional e pode conter vários números, até textos dependendo da sua versão (DENSOWAVE, 2016).[13] O *QR Code* não comunga com os códigos de barras

[12] Disponível em: <https://blog.gs1br.org/codigo-de-barras-conheca-sua-historia-de-evolucao>. Acesso em: 15 jan. 2020.
[13] Disponível em: <http://www.densowave.com/qrcode/aboutqr-e.html>. Acesso em: 10 fev. 2021

em relação aos dígitos verificadores e usa outro algoritmo para correção de erros, o de Reed-Solomon.

2.3 TÍTULO DE ELEITOR

O título de eleitor, importante documento que confirma o cadastro na Justiça Eleitoral do Brasil e que dá condições para que o cidadão exerça um dos importantes papéis na democracia – o voto –, também é um ótimo exemplo de código a ser analisado.

Antes de realizarmos alguma inferência, importa ressaltar que até 1875 não havia título de eleitor do Brasil, apenas qualificação eleitoral (FERREIRA, 2001, p. 251). O título de eleitor foi criado neste ano, mas se tornou obrigatório após a promulgação da Lei Saraiva, Decreto no 3.029, de 9 de janeiro de 1881, que também estipulou modificações para as eleições (BRASIL, 1881). Ao longo dos anos, várias mudanças foram feitas em seu formato e nas leis, como, por exemplo, a inclusão de mulheres, analfabetos e pessoas de baixa renda no processo eleitoral, posto que por séculos não puderam votar.

Nas eleições de 1986, os membros da Assembleia Nacional Constituinte estipularam a criação dos títulos de eleitor no formato que temos hoje, por meio de um novo alistamento. Desde então, não temos mais mudanças tão significativas no documento. Atualmente, o alistamento eleitoral é obrigatório para os brasileiros maiores de 18 anos e facultativo para analfabetos, maiores de 70 anos e menores entre 16 e 18 anos de idade (TSE, s.d.).[14]

As mudanças no título de eleitor tiveram o intuito de tornar o voto mais seguro e, consequentemente, o processo mais confiável. Uma dessas mudanças – esta mais recente –, foi o cadastramento biométrico, que já está disponível em várias cidades brasileiras, como informa o Tribunal Superior Eleitoral (TSE, s.d.).[15]

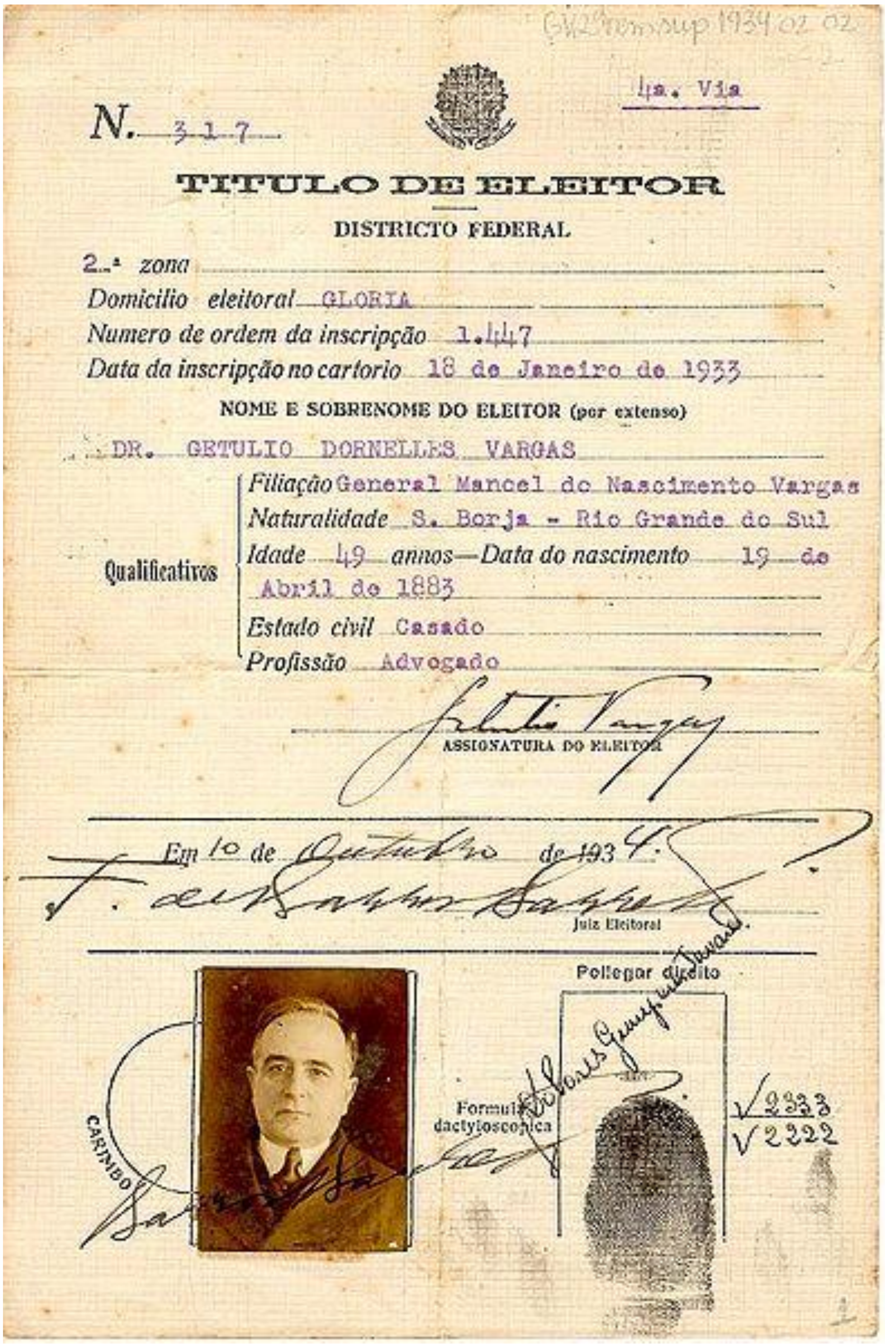
Na Figura 4, temos uma fotografia do famoso título eleitoral do então presidente Getúlio Vargas, emitido em 18 de janeiro de 1933. Já na Figura 5 é exibido o título de eleitor nos moldes atuais, mais compacto e acessível aos brasileiros.

---

[14] Disponível em: <https://www.tse.jus.br/jurisprudencia/julgados-historicos/assembleia-constituinte-1946>. Acesso em: 20 jun. 2020.

[15] Disponível em: <https://www.tse.jus.br/jurisprudencia/julgados-historicos/assembleia-constituinte-1946>. Acesso em: 20 jun. 2020.

Figura 4 – Título de eleitor de Getúlio Vargas, emitido em 18 de janeiro de 1933



4a. Via

N. 317

TITULO DE ELEITOR

DISTRICTO FEDERAL

2.ª zona

Domicilio eleitoral GLORIA

Numero de ordem da inscripção 1.447

Data da inscripção no cartorio 18 de Janeiro de 1933

NOME E SOBRENOME DO ELEITOR (por extenso)

DR. GETULIO DORNELLES VARGAS

Qualificativos
Filiação General Manoel do Nascimento Vargas
Naturalidade S. Borja - Rio Grande do Sul
Idade 49 annos—Data do nascimento 19 de Abril de 1883
Estado civil Casado
Profissão Advogado

Getulio Vargas

ASSIGNATURA DO ELEITOR

Em 10 de Outubro de 1934

Juiz Eleitoral

Pollegar direito

Formula dactyloscopica

V 2333
V 2222

CARIMBO

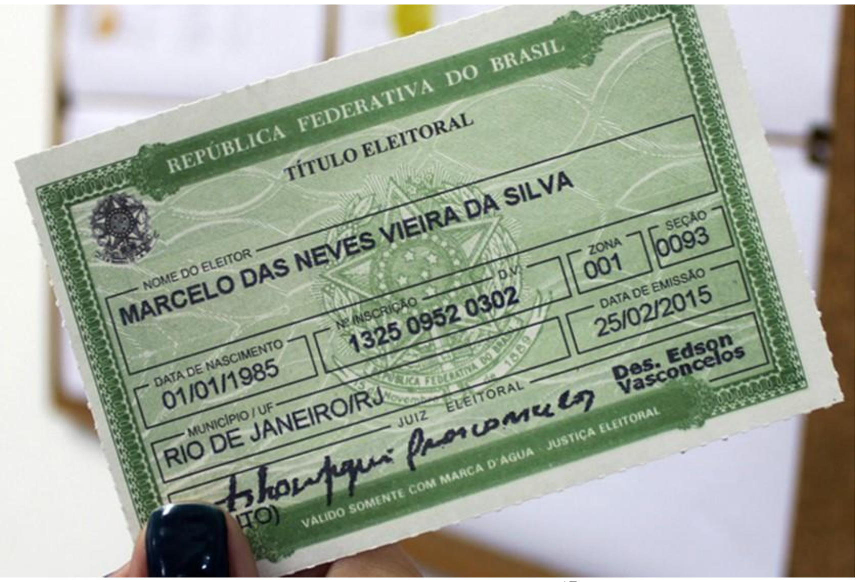
Fonte: Centro de Pesquisa e Documentação de História Contemporânea do Brasil (CPDOC/GV remsup 1934.02.02).[16]

Diante do histórico apresentado, é possível perceber o aumento da preocupação com a confiabilidade do sistema eleitoral, motivo pelo qual mudanças foram feitas ao longo do tempo. Assim, chegamos ao modelo atual de título de eleitor, que depende da utilização de dígitos para sua criação e validação.

[16] Disponível em: <https://cpdoc.fgv.br/producao/dossies/AEraVargas1/anos30-37/RevConstitucionalista32/CodigoEleitoral>. Acesso em: 28 dez. 2020.

Agora, podemos nos perguntar: como são formados os números para tão importante documento? Podemos responder a essa pergunta de forma simples e objetiva. Vejamos. O número do título eleitoral é formado por 12 algarismos, sendo que os 8 primeiros identificam o eleitor; os algarismos da posição 9 e 10 representam a Unidade Federativa (UF) – o estado de onde o título foi emitido –; e os algarismos das posições 11 e 12 representam os dígitos verificador (DV). Abaixo temos um exemplo de um título de eleitor atual, onde constam as informações mencionadas.

Figura 5 – Título eleitoral atual



Fonte: Metrópoles (2017).[17]

Na figura acima, o número 1325 0952 identifica o eleitor; 03 a UF – no caso, o estado do Rio de Janeiro –; e 02 os dígitos verificadores, os quais verificam a validade do título de eleitor. Dito isso, demonstraremos a seguir como é feito o cálculo dos dígitos verificadores para o documento em questão.[18]

Primeiro Dígito Verificador (DV):

- Inicialmente, multiplicamos os 8 primeiros dígitos, que identificam o eleitor, por $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ,9)$;

[17] Disponível em: <https://www.metropoles.com/brasil/eleicoes-2018/tse-lanca-titulo-de-eleitor-digital>. Acesso em: 24 jun. 2019.
[18] Para mais informações sobre como validar um título de eleitor, consulte: <https://exceldoseujeito.com.br/validar-cpf-cnpj-e-titulo-de-eleitor-parte-ii>.

- Soma-se os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado obtido na soma anterior por 11;
- O resto obtido com a divisão é o primeiro DV, que ocupa a posição 11.

Segundo dígito verificador:

- Multiplica-se os números das posições 9, 10 e 11 por (7, 8 e 9), respectivamente;
- Soma-se os resultados obtidos;
- Divide-se o resultado obtido na soma anterior por 11;
- O resto obtido com a divisão é o segundo DV, que ocupa a posição 12.

Tomando como exemplo a numeração 0257 9355 14**14** para um título de eleitor**,** descobriremos se os dígitos verificadores (em negrito) estão corretos. Observemos que na posição 9 e 10 (sublinhado) os algarismos 1 e 4 representam a UF onde o título foi emitido, no caso, o Espirito Santo. Continuemos:

Primeiro dígito verificador:

- $(0 \times 2) + (2 \times 3) + (5 \times 4) + (7 \times 5) + (9 \times 6) + (3 \times 7) + (5 \times 8) + (5 \times 9) = 0 + 6 + 20 + 35 + 54 + 21 + 40 + 45 = 221$
- $221/11 = 11 \times 20 + 1$
- $\text{Assim, o resto é } 1.$

Segundo dígito verificador:

- $(1 \times 7) + (4 \times 8) + (1 \times 9) = 7 + 32 + 9 = 48$
- $48/11 = 11 \times 4 + 4$
- $\text{Assim, o resto é } 4.$

No exemplo acima, foi possível identificar que o título é válido, logo, o eleitor cadastrado com o código informado poderá utilizá-lo plenamente para exercer seu papel de cidadão no regime democrático da República Federativa do Brasil.

Assim como em outros documentos, tecnologias e sistemas que fazem parte do cotidiano dos brasileiros, provavelmente poucos brasileiros portadores do título de eleitor conhecem profundamente suas características ou as operações matemáticas existentes na construção dos seus números e a importância destes.

3. ERROS DETECTÁVEIS E NÃO DETECTÁVEIS

Importa mencionar que aproximadamente 90% dos erros ocorridos em transmissões de mensagens numéricas são divididos em apenas dois tipos: o erro singular, que acontece em 79% dos casos, e o erro de transposição, que advém sobre os 11% restantes. O mais comum, o erro singular, acontece quando um caractere é digitado de forma errada, substituindo o dígito correto por outro qualquer (MILIES, 2009, p. 9). Já o erro de transposição divide-se em duas categorias: o erro de transposição adjacente e o erro por transposição intercalada. A primeira categoria corresponde à troca de posição de dois dígitos diferentes postos lado a lado, enquanto o segundo corresponde à troca de posição de dois dígitos diferentes intercalada por um terceiro dígito. Por exemplo, digitar 4536 ao querer digitar 4356 configura um erro de transposição adjacente, já digitar 4653 representa um erro de transposição intercalada (COSTA; VELOSO, 2017, p. 253). Os demais erros representam apenas 10% e estão distribuídos em diversas categorias, sendo que nenhuma delas abarca mais de 1% do total.

Apesar da importância dos dígitos verificadores, devemos estar atentos ao fato de que eles também são passíveis de falhas, como veremos a seguir. Um exemplo digno de nota é relacionado ao EAN-13 com apenas um dígito verificador, o qual pode ser encontrado no sistema internacional de identificação de livros e *softwares*, que utiliza números para classificá-los por título, autor, país, editora e edição, também conhecido como *International Standard Book Number* ou simplesmente ISBN (INTERNATIONAL ISBN AGENCY, 2011).[19]

---

[19] Por meio dessa combinação, é possível individualizar e catalogar as informações de cada uma das diversas publicações produzidas em todo o mundo. Essa série numérica permite o compartilhamento de metadados das obras em diferentes sistemas, representando um marco no mercado editorial, posto que impactou significativamente os processos de distribuição, análise de vendas e armazenamento dos dados bibliográficos (INTERNATIONAL ISBN AGENCY, 2011).

O ISBN-13 utiliza os pesos (1; 3; 1; 3; 1; 3; 1; 3; 1; 3; 1; 3; 1), sendo a soma da multiplicação do peso pelo número dividida por 10. O sistema ISBN-13 detecta todo erro singular, pois como afirmam Costa e Veloso (2017, p. 254), "um sistema de identificação módulo k, com pesos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, detecta todo erro singular $a \rightarrow a_1'$, n a i-ésima posição, se, e somente se, mdc (p_i; k) = 1" e como temos o máximo divisor comum (mdc) (1; 10) = 1 e mdc (3; 10) = 1, 100% dos erros são detectáveis. Para os erros de transposição adjacente, os autores declaram que "um sistema de identificação módulo k, com pesos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, detecta todos os erros de transposição dos algarismos a_i e a_j nas posições i e j se, e somente se, mdc ($p_i - p_j$; k) = 1". Se a_9 = 6 e a_8 = 1 forem trocados teríamos $S' - S$ = 2($a_9 - a_8$) = =2,5 = 10[20] e o erro não seria detectado. Logo, o sistema ISBN-13 não detecta os seguintes casos de transposição adjacente: "05", "50", "16", "61"; "27", "72"; "38", "83"; "49" e "94" (COSTA; VELOSO, 2017, p. 254).

Para minimizar as chances de não detecção de erros, como os acima relatados, foi desenvolvido um sistema que utiliza mais de um dígito verificador. O CPF, assim como mencionamos nos tópicos anteriores, se vale de dois dígitos verificadores, o que lhe confere maior segurança para a validação do documento. Todavia, mesmo com um aumento significativo da eficiência da verificação dos dígitos, ainda existem pontos negativos e a possibilidade de ocorrerem falhas (PICADO, 2001, p. 56).

Em verdade, nenhum dos dígitos verificadores utilizados no Brasil detecta totalmente os cinco principais tipos de erros (singular, transposição de dígitos adjacentes, transposição de dígitos alternados, gêmeos adjacentes e gêmeos alternados) que ocorrem na digitação e na leitura dos identificadores. Não obstante a isso, códigos que usam dois dígitos verificadores, como o CPF, possuem uma média de apenas 0,21% de não detecção de erros, o que já é consideravelmente menor que outros códigos que não usam dois dígitos, mesmo sendo eles de módulo 11, como no caso do título de eleitor, que possui média de não detecção de 1,67% (SOUZA, 2003, p. 48-50).

Ressaltamos que existem métodos mais sofisticados e eficientes que curiosamente não são utilizados para a verificação de erros, como o método de Verhoeff.[21] Assim como ressalta Souza (2003, p. 50), não são nítidos os motivos para essa escolha, mas eles possivelmente estão

[20] Para uma leitura mais aprofundada sobre o assunto, e com demonstrações, consultar Costa e Veloso (2017, p. 254-255).
[21] Apesar da eficiência do método, ele não faz parte dos objetivos de nossa dissertação. Por isso, não o abordaremos aqui. Para mais informações sobre o método de Verhoeff, sugerimos a leitura de Souza (2003).

relacionados a complexidade do método e os elevados custos envolvidos, o que dificultaria sua compreensão e implementação.

4. CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

Sem dúvida, a transmissão das informações mostrou-se, e ainda se mostra, como de suma importância para o desenvolvimento das sociedades. Se hoje temos confiança para realizar pagamentos, transações, compras de produtos, entre outras operações, é graças à aplicação da Matemática em nosso dia a dia.

Os processos cotidianos, sem a confiabilidade proporcionada pela Matemática dos dígitos verificadores, seriam muito demorados e custosos. Várias coisas que hoje fazemos não seriam possíveis, como, por exemplo, usar um cartão de crédito para fazer compras *online* ou até mesmo se cadastrar num *site* – talvez nem mesmo existiriam esses *sites*.

Por fim, é importante ressaltar que os dígitos verificadores não são a única ferramenta para combater os erros. Apesar de serem bem eficientes, existem outros meios que vão além dos dígitos verificadores, que são os códigos verificadores e corretores de erros, tema do nosso próximo capítulo, no qual abordaremos, especialmente, o código de Hamming.

CAPÍTULO 2:

CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS

1. OS CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS

Até aqui, visualizamos um aumento do interesse e da necessidade da humanidade em se comunicar de maneira mais segura e eficiente. Ao entendermos o processo de criação dos dígitos verificadores atribuídos ao CPF, aos códigos de barras e ao título de eleitor, também foi possível enxergarmos com mais clareza a relevância de tais dígitos na vida contemporânea. Apesar disso, algumas importantes perguntas ainda precisam ser respondidas, tais como: o que acontece quando o dígito verificador aponta o erro? O número, mensagem ou código é descartado? É feita uma nova tentativa? Todas essas indagações são pertinentes e merecem ser respondidas. Não por acaso, são exatamente tais questões que norteiam este capítulo, uma vez que nos dedicaremos, a partir de agora, aos códigos corretores de erros.

Mencionamos anteriormente que os soldados, desde a Primeira Guerra Mundial, utilizavam uma linguagem pautada na redundância para transmitir mensagens de maneira inteligível e com menos chances de erro. Por esse método, a palavra "Matemática", por exemplo, poderia ser transmitida da seguinte maneira: **M**IKE, **A**LFA, **T**ANGO, **E**CHO, **M**IKE, **A**LFA, **T**ANGO, **I**NDIA, **C**HARLIE, **A**LFA. Mesmo que ocorresse algum ruído na comunicação, pela redundância, a letra seria compreendida. Todavia, apesar de funcionar, este sistema não era satisfatório, sobretudo em situações de guerra. No exemplo mencionado, para transmitir apenas uma palavra seriam necessárias dez palavras, o que dificultaria a transmissão de mensagens longas.

A redundância é eficaz para evitar erros na transmissão, mas acaba não sendo eficiente. Assim, com os avanços tecnológicos surgiram outras opções, como as transmissões feitas por computadores, os quais utilizam uma linguagem universal baseada em números binários. Por meio dos números binários, textos, áudios, vídeos entre outros são convertidos para os dígitos "1" (um) e o "0" (zero). Em seguida, os computadores fazem uma leitura bem simples dessas duas informações e identificam como ligado (1) e desligado (0). Cada elemento desse se chama *bit* (***Bi**nary Digi**t***) e caso agruparmos 8 desses *bits* teremos 1 *byte* (GONICK, 1984, p. 115-122). O sistema binário também é chamado de base 2, pois só possui dois dígitos: "1" (um) e "0" (zero). Vale lembrar que os números decimais podem ser transformados em binários por meio da codificação. Com isso, percebemos que, mesmo numa era digital, os sistemas de sinais ainda são mantidos por meio de codificação, porém agora por meio de uma codificação binária (SCHUBRING, 2016, p. 125).

É importante mencionar que os números binários não são apenas importantes para a linguagem computacional, eles são a base para seu funcionamento, posto que essa última utiliza apenas números binários em sua programação (MURDOCCA; HEURING, 2000, p. 8). Uma maneira prática de compreender essa informação é visualizarmos a tabela de codificação ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*),[22] que é um código binário, instituído American Standards Association (ASA), em 1963, para normalizar a transmissão e armazenamento de texto, sendo capaz de codificar um conjunto de 128 sinais, dos quais 95 são sinais gráficos, como letras do alfabeto latino, algarismos arábicos, sinais de pontuação e sinais matemáticos, e 33 são sinais de controle, utilizando apenas 7 bits para representar todos os seus símbolos (ASA, 1963).[23] Vejamos a Tabela 1.

Tabela 1 – Fragmento da tabela de conversão de números ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*)

Decimal	Binário	Algarismo	Decimal	Binário	Algarismo
64	1000000	@	96	1100000	`
65	1000001	A	97	1100001	a
66	1000010	B	98	1100010	b
67	1000011	C	99	1100011	c
68	1000100	D	100	1100100	d
69	1000101	E	101	1100101	e
70	1000110	F	102	1100110	f
71	1000111	G	103	1100111	g
72	1001000	H	104	1101000	h
73	1001001	I	105	1101001	i
74	1001010	J	106	1101010	j
75	1001011	K	107	1101011	k

[22] Em português, "Código Padrão Americano para o Intercâmbio de Informação".
[23] Disponível em: <2020https://web.archive.org/web/20160617012149/http://worldpowersystems.com/J/codes/X3.4-1963>. Acesso em: 15 mar. 2021.

Decimal	Binário	Algarismo	Decimal	Binário	Algarismo
76	1001100	L	108	1101100	l
77	1001101	M	109	1101101	m
78	1001110	N	110	1101110	n
79	1001111	O	111	1101111	o
80	1010000	P	112	1110000	p
81	1010001	Q	113	1110001	q
82	1010010	R	114	1110010	r
83	1010011	S	115	1110011	s
84	1010100	T	116	1110100	t
85	1010101	U	117	1110101	u
86	1010110	V	118	1110110	v
87	1010111	W	119	1110111	w
88	1011000	X	120	1111000	x
89	1011001	Y	121	1111001	y
90	1011010	Z	122	1111010	z

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Fernandes (2020).[24]

A Tabela 1 apresenta apenas alguns caracteres contidos na tabela oficial, que possui todos os caracteres supracitados, porém ela já é suficiente para exemplificar mais uma forma de dígito verificador, que é o chamado bit de paridade. Segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 185), para detectar erros, adiciona-se um oitavo dígito a cada caractere, o bit de paridade, que é colocado à esquerda para ser somado aos outros bits e resultar em um número par. Para ficar mais compreensível, vejamos os exemplos abaixo.

Assim como observado na Tabela 1, a letra “c” (minúsculo) tem sua representação decimal como “99” e em binário como “1100011”. Ao somarmos os caracteres binários temos, então, $1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 4$. Como o resultado já é um número par, utilizamos o bit “0” à esquerda e, assim, chegamos aos dígitos “01100011”, que nada mais são que o bit de paridade somado à cifra binária. Caso o resultado fosse ímpar, como na letra “C” (maiúsculo), cuja

[24] Disponível em: <https://marquesfernandes.com/desenvolvimento/codigo-ascii-tabela-ascii-completa>. Acesso em: 21 fev. 2020.

representação decimal é “67” e binária é “1000011”, a soma seria $1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3$. Assim, o dígito de paridade adicionado deve ser “1”, constituindo o código “11000011”.

Apesar de o método exposto ser eficaz em detectar erros simples, ele não realiza a correção dos erros encontrados. O processo é notadamente manual e, consequentemente, muito custoso. E é justamente para resolver essa questão que surge o método de Hamming, que além de identificar o erro, também o corrige.

2. MATRIZES

Antes de iniciarmos efetivamente nossa exposição sobre o código de Hamming, julgamos necessário abordar algumas definições sobre matrizes, na medida em que elas são essenciais para uma melhor compreensão do conteúdo.

De acordo com Hawkins (1975; 1977a; 1977b), o início dos estudos das matrizes ocorreu por volta do século II a.C., mas já era possível identificar o aparecimento do conceito entre os babilônios, no século IV a.C. Contudo, tais ideias não foram largamente difundidas, reaparecendo apenas no século XVII, quando, então, ocorreu o desenvolvimento do conceito por meios não convencionais e a posterior difusão nos estudos matemáticos.

Atualmente, as matrizes fazem parte tanto do conteúdo programático das disciplinas de Matemática de universidades quanto das grades curriculares do ensino médio. Nas escolas do estado do Espírito Santo (ES), de acordo com o Currículo Básico Comum (CBC), tal matéria costuma ser abordada na segunda série do ensino médio (SEDU, 2009, p. 775).[25]

No que interessa a esta dissertação, não há dúvidas que as matrizes apresentam um papel fundamental na codificação e correção de erros. O seu conteúdo é extenso, por isso destacamos dois tipos de matrizes: a matriz geradora e a matriz de controle. Após a exposição de cada uma delas, realizamos algumas operações para tornar o conteúdo mais inteligível. Assim como ressalta Sanches (2002, p. 7), a álgebra das matrizes tem importância expressiva na criação de conhecimento e, cada vez mais, encontra aplicação em diversas áreas, como as da Tecnologia, Engenharia e Economia. O autor também assevera que se não ocorrer um ensino- aprendizagem

---

[25] Disponível em: <https://sedu.es.gov.br/Media/sedu/pdf%20e%20Arquivos/Curr%C3%ADculo/SEDU_Curriculo_Basico_Escola_Estadual_(FINAL).pdf >. Acesso em: 30 mar. 2020.

sólida dos conceitos de matrizes, há grandes chances de os estudantes manifestarem dificuldades para compreender e aplicar outros conceitos relacionados, tais como os de "programação, computação gráfica, custos de produção, teoria dos grafos, circuitos elétricos, modelos econômicos lineares, entre centenas de outros" (SANCHES, 2002, p. 7).

Tendo essa lição em mente, acreditamos que seja importante que os alunos tenham compressão do conteúdo de matrizes e que possam dominá-lo o suficiente para ser possível realizar as abordagens necessárias sobre os códigos corretores de erros.

Para uma definição simples, podemos dizer que uma matriz se trata de uma tabela organizada em linhas e colunas no formato $m \times n$, na qual m representa o número de linhas (horizontal) e n o número de colunas (vertical). Nas palavras de Dante (2005, p. 241), "denomina-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n) uma tabela retangular formada por $m \times n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas". Por tal definição, visualmente, uma matriz seria apresentada da seguinte maneira:

$$A_{(2\times3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

A matriz acima possui duas linhas (horizontais) e três colunas (verticais) e em cada elemento há uma coordenada; o elemento "1", presente na primeira linha e na primeira coluna, deve ser representado por a_{11}, já o elemento "6", na segunda linha e terceira coluna, será representado por a_{23}. Além disso, numa matriz, é possível realizar operações como soma, subtração e multiplicação, o que faz com que tenhamos diferentes tipos de matrizes, como veremos a seguir.

2.1 MATRIZ TRANSPOSTA

Um tipo comum de matriz é aquela denominada de transposta. Nela, as linhas da nova matriz são as colunas da matriz original e as colunas da nova matriz são as linhas da antiga, sendo representada por A^T (STEINBRUCH; WINTERLE, 1995, p. 398). Como exemplo, temos:

$$A_{(2x4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T_{(4x2)} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Tomando a matriz acima como modelo, apenas trocamos a linha pela coluna e a coluna pela linha, o que faz com que a primeira linha da matriz A seja a primeira coluna da matriz A^T.

2.2 MATRIZ QUADRADA

Uma matriz é denominada quadrada, de ordem n, quando a quantidade de linhas e colunas são iguais, o que a caracteriza como uma matriz $n \times n$ (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 126), como pode ser observado no exemplo abaixo:

$$A_{(2\times2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

2.2 MATRIZ IDENTIDADE

A matriz identidade apresenta na sua diagonal principal os elementos a_{ij}, sendo $i = j$ iguais a 1. Uma matriz identidade também é aquela na qual todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos. Isto é, todos os elementos em que a posição da coluna e da linha forem de mesmo número serão iguais a um e o restante será igual a zero (DANTE, 2009, p. 299). Isso fica mais compreensível ao observarmos o seguinte exemplo:

$$A_{(3\times3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 ADIÇÃO DE MATRIZES

A adição de matrizes caracteriza-se pela soma de duas matrizes de mesmas dimensões $m \times n$ $A_{(m\times n)}$ e $B_{(m\times n)}$, resultando numa matriz $C_{(m\times n)}$, na qual os termos dessa nova matriz serão pautados por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 132), como podemos ver a seguir:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Igualmente, a subtração entre duas matrizes $A_{(m \times n)}$ e $B_{(m \times n)}$ deverá resultar numa matriz $C_{(m \times n)}$, na qual os termos dessa nova matriz serão pautados por $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 133), como no exemplo abaixo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cumpre ressaltar que as operações de adição e subtração estão definidas para matrizes de mesmas dimensões $m \times n$.

2.5 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

No que se refere ao produto entre duas matrizes A e B, esse somente será possível se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. Cumprindo tal condição, os componentes da nova matriz serão obtidos pela regra abaixo (STEINBRUCH; WINTERLE, 1995, p. 376):

$$A_{(m \times n)} \times B_{(n \times p)} = C_{(m \times p)}$$

Para fins didáticos, vamos definir o produto de uma matriz linha $A_{(1 \times 4)}$ por uma matriz coluna $B_{(4 \times 1)}$, no qual o resultado dessa multiplicação será um número. Daí, a resultante dessa multiplicação a matriz $C_{(1 \times 1)}$ será o produto da linha $i = 1$ de $A_{(1 \times 4)}$ pela coluna $j = 1$ de $B_{(4 \times 1)}$. Vejamos:

$$A_{(1 \times 4)} \times B_{(4 \times 1)} = C_{(1 \times 1)} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 4 + 1 \times 5 = 18$$

Para deixarmos esses preceitos teóricos mais inteligíveis, vejamos um exemplo de multiplicação de matrizes, no qual determinaremos AB:

$$A_{(2 \times 3)} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B_{(3 \times 2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Como A é uma matriz 2×3 e B é uma matriz 3×2, a multiplicação resultará em uma matriz 2×2:

$$AB_{(2\times 2)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Em suma, para calcular c_{11} utilizamos a primeira linha de A e a primeira coluna de B: $1 \times 2 + 5 \times 7 + 0 \times 2 = 37$. Para calcular c_{12} nos valemos da primeira linha de A e da segunda coluna de B: $1 \times 4 + 5 \times 0 + 0 \times 6 = 4$. Para calcular c_{21} usamos a segunda linha de A e a primeira coluna de B: $4 \times 2 + 7 \times 7 + 3 \times 2 = 63$. Para calcular c_{22} empregamos a segunda linha de A e a segunda coluna de B: $4 \times 4 + 7 \times 0 + 3 \times 6 = 34$. Portanto teremos:

$$C_{(2\times 2)} = \begin{pmatrix} 37 & 4 \\ 63 & 34 \end{pmatrix}$$

Embora tenhamos abordado alguns tópicos sobre matrizes, não tivemos a finalidade de discutir profundamente a definição, a aplicação ou os diferentes tipos de matrizes. Ainda assim, as discutimos na medida em que compreender seus conceitos básicos são essenciais para que possamos discutir o código de Hamming, principal objeto deste capítulo.

3. O CÓDIGO DE HAMMING

O código de Hamming originou-se a partir dos estudos de Richard Wesley Hamming, matemático nascido nos EUA. Ao publicar um artigo, em 1950, intitulado *Error detecting and error correcting codes*, no qual, após anos de estudo sobre a identificação e correção de erros, o matemático norte-americano estabeleceu o que viria a ser chamado de *Hamming code* ou, em português, código de Hamming (THOMPSON, 1983, p. 1-32).

O estudo e a publicação supracitada derivaram de uma situação que inquietava Hamming: o fato de os computadores da época reconhecerem um erro e pularem para outro trabalho, mas sem corrigir o erro. Hamming (1977) questionava: “se as máquinas podem detectar um erro, porque não podemos localizar a posição do erro e corrigi-lo?”. Em outras palavras, Hamming ambicionava um computador capaz localizar e resolver possíveis erros.

Com o problema relatado acima em mente, Hamming desenvolveu um método simples para identificação e correção de erros – inicialmente com restrição de envio de 4 letras por palavra –, mas que abriu precedentes para a criação de procedimentos mais abrangentes (THOMPSON, 1983, p. 1-32). A eficiência do seu método é tão grande, que ele é usado até os dias atuais. Assim como afirmam Hefez e Villela (2002, p. 2), “hoje em dia, os códigos corretores de erros são utilizados sempre que se deseja transmitir ou armazenar dados, garantindo a sua confiabilidade. São exemplos disso todas as comunicações internas de um computador”.

Numa transmissão de mensagens, utilizando tanto números binários quanto redundância, caso ainda apareça um erro, o decodificador elaborado por Hamming pode corrigi-lo. Tal ação é, sem dúvidas, revolucionária. Por esse motivo, Hamming ocupa uma posição ímpar na história, uma vez que sua descoberta foi capaz de transformar o mundo contemporâneo.

Dito isso, o que é exatamente o método de Hamming? Em suma, tal método consiste em transmitir uma mensagem de forma coerente e objetiva, com a possibilidade de correção, caso apresente algum erro, proporcionando uma comunicação perfeita (HAMMING, 1950, p. 149-151). Abaixo, apresentamos um fluxograma que demonstra esse processo de forma mais inteligível:

Figura 6 – Fluxograma de transmissão de mensagens pelo código de Hamming

Fonte: Bahia (2010, p. 150).

Para tornar a compreensão do código de Hamming ainda mais simples, acreditamos que um exemplo de envio de mensagem seja útil. Assim, representaremos o envio do termo (u_1, u_2, u_3, u_4). Inicialmente, nos limitaremos à transmissão de palavras que contenham precisamente quatro caracteres, posto que utilizaremos o método de Hamming C(7,4), que consiste em transformar uma mensagem de 4 bits em uma de 7 bits, acrescentando 3 bits de paridade, o que possibilita corrigir um erro único (HAMMING, 1950, p. 152).

Como estamos lidando com um sistema de numeração binário, empregaremos apenas os dígitos 0 ou 1. Além disso, não transmitiremos os quatro dígitos (u_1, u_2, u_3, u_4) mas, sim, uma codificação deles. Vejamos:

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2$$

$$v_3 = u_3$$

$$v_4 = u_4$$

$$v_5 = u_1 + u_2 + u_4$$

$$v_6 = u_1 + u_3 + u_4$$

$$v_7 = u_2 + u_3 + u_4$$

Os quatro primeiros símbolos são aqueles que realmente queremos transmitir. Mas, então, por que temos sete elementos? A resposta é simples: redundância. Os três últimos dígitos são, na verdade, dígitos redundantes responsáveis por garantir que a mensagem seja entregue com a possibilidade de correção de erros.

Como dissemos, estamos nos valendo de um sistema de numeração binário, isso quer dizer que devemos saber que na adição e na multiplicação, algumas condições precisam ser seguidas, assim como exposto no Quadro 2.

Quadro 2 – Operação de adição e de multiplicação em números binários

Adição	+	0	1	**Multiplicação**	×	0	1
	0	**0**	**1**		0	**0**	**0**
	1	**1**	**0**		1	**0**	**1**

Fonte: Adaptado de Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 189).

Com tais regras em mente, para transmitir a mensagem (1,0,1,1), devemos enviar o seguinte código:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7) = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$$

Cumpre notar que os elementos (v_5, v_6, v_7) foram obtidos por meio de algumas operações, sendo elas:

$$v_5 = u_1 + u_2 + u_4 = 1 + 0 + 1 = 0$$

$$v_6 = u_1 + u_3 + u_4 = 1 + 1 + 1 = 1$$

$$v_7 = u_2 + u_3 + u_4 = 0 + 1 + 1 = 0$$

Considerando um outro exemplo, supondo que ocorra algum erro e o receptor receba a mensagem $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$, ele terá que decodificar a informação recebida do seguinte modo:

$$W_5 = w_1 + w_2 + w_4$$

$$W_6 = w_1 + w_3 + w_4$$

$$W_7 = w_2 + w_3 + w_4$$

Ao compararmos as codificações recebidas, temos:

$$W_5 = w_1 + w_2 + w_4 = 1 + 1 + 1 = 1 = w_5$$

$$W_6 = w_1 + w_3 + w_4 = 1 + 1 + 1 = 1 \neq w_6$$

$$W_7 = w_2 + w_3 + w_4 = 1 + 1 + 1 = 1 \neq w_7$$

Ao realizar o cálculo para decodificação, o receptor encontrará diferenças e perceberá que algum erro ocorreu, sendo $W_6 \neq w_6$ e $W_7 \neq w_7$. De tal modo, será preciso descobrir onde está o erro para, então, corrigi-lo. De antemão, é eliminada a opção em que o erro estaria entre os símbolos redundantes, pois se um desses elementos for alterado uma segunda identidade também estará errada. Assim, conclui-se que o erro está em w_3, pois o cálculo de W_5, no qual não consta w_3, está correto.

No total, são oito as possibilidades para descobrir onde está o erro na mensagem enviada, já que cada caractere pode estar errado ou todos certos. No quadro a seguir observamos todas elas.

Quadro 3 – Possibilidades para detecção de erros

1º	Todos os símbolos estão corretos	$Se\ w_5 = W_5, w_6 = W_6\ e\ w_7 = W_7$
2º	w_1 está incorreto	$Se\ w_5 \neq W_5, w_6 \neq W_6$
3º	w_2 está incorreto	$Se\ w_5 \neq W_5, w_7 \neq W_7$
4º	w_3 está incorreto	$Se\ w_6 \neq W_6, w_7 \neq W_7$
5º	w_4 está incorreto	$Se\ w_5 \neq W_5, w_6 \neq W_6\ e\ w_7 \neq W_7$
6º	w_5 está incorreto	$Se\ w_5 \neq W_5$
7º	w_6 está incorreto	$Se\ w_6 \neq W_6$
8º	w_7 está incorreto	$Se\ w_7 \neq W_7$

Fonte: Adaptado de Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 189).

Com todas as possibilidades de erro apresentadas, torna-se mais fácil analisar e descobrir onde ocorreu o erro e, consequentemente, corrigi-lo de forma rápida e precisa. Aqui, vale ressaltar a declaração de Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 193), que nos dizem:

> A hipótese de que, no máximo, um símbolo está incorreto é crucial na análise. Se duas letras estiverem incorretas, então o receptor não tem como distinguir, por exemplo, o caso em que $w1$ está incorreto do caso em que ambos, $w5$ e $w6$, estão errados e, portanto, não seria capaz de efetuar uma correção. No entanto, no caso de um erro no máximo, o receptor pode sempre detectar e corrigir o erro. Após descartar os símbolos extra, o receptor está certo de ter recebido a mensagem correta.

Portanto, devemos lembrar que no código de Hamming C(7,4) temos pouquíssimas chances de acontecer mais de um erro, tornando o sistema confiável e mais eficaz. Isso fica ainda mais evidente ao compararmos com a utilização da redundância convencional de três dígitos, na qual teríamos 12 bits a serem transmitidos, em contrapartida aos 7 bits utilizados pelo método de Hamming.

4. O CÓDIGO DE HAMMING E AS MATRIZES GERADORAS E DE CONTROLE

No tópico anterior, realizamos uma abordagem mais simples da utilização do código de Hamming, sendo essa mais manual, na qual era preciso consultar uma tabela para identificar o erro. Isso só foi possível, pois utilizamos o código de Hamming C(7,4). Como afirmam Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 194), o código de Hamming C(7,4) é o primeiro da família dos códigos de Hamming C($2^k - 1, 2^k - k - 1$), no nosso estudo usaremos o código referente ao $k = 3$ e cada código da família de Hamming permite apenas a correção de um erro, dada a probabilidade baixa de acontecer mais de um (HAMMING, 1950, p. 152).

Para se aproximar mais dos objetivos desta dissertação, propomos o estudo das matrizes geradora e de controle, matrizes essas que vão nos ajudar a codificar e decodificar as mensagens enviadas ou recebidas. Isso oportunizará uma abordagem mais profunda, o que nos permitirá estudar outras famílias do código de Hamming.

Antes de prosseguirmos, convém ressaltar, assim como mencionado no início deste capítulo, que os 16 elementos do código C são obtidos ao efetuar as 16 combinações lineares possíveis das quatro linhas da matriz geradora – que definiremos a seguir. Como a matriz geradora requer apenas que suas linhas formem uma base, isso quer dizer que ela pode ser construída de diferentes maneiras. Entre outras considerações, isso evidencia a possibilidade de formar outras matrizes geradoras (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015, p. 194). Podemos ver tais possibilidades de codificação na Tabela 2.

Tabela 2 – Possibilidades de codificação por meio do código de Hamming C(7,4)

Mensagem	**Codificação**
(0,0,0,0)	(0,0,0,0,0,0,0)
(0,0,0,1)	(0,0,0,1,1,1,1)
(0,0,1,0)	(0,0,1,0,0,1,1)
(0,0,1,1)	(0,0,1,1,1,0,0)
(0,1,0,0)	(0,1,0,0,1,0,1)
(0,1,0,1)	(0,1,0,1,0,1,0)
(0,1,1,0)	(0,1,1,0,1,1,0)
(0,1,1,1)	(0,1,1,1,0,0,1)
(1,0,0,0)	(1,0,0,0,1,1,0)
(1,0,0,1)	(1,0,0,1,0,0,1)
(1,0,1,0)	(1,0,1,0,1,0,1)
(1,0,1,1)	(1,0,1,0,0,1,0)
(1,1,0,0)	(1,1,0,0,0,1,1)
(1,1,0,1)	(1,1,0,1,1,0,0)
(1,1,1,0)	(1,1,1,0,0,0,0)
(1,1,1,1)	(1,1,1,1,1,1,1)

Fonte: Elaboração própria com base nos dados de Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 194-196).

4.1 A MATRIZ GERADORA

A matriz geradora, denotada G_k, é uma matriz de dimensão $(2^k - k - 1) \times (2^k - 1)$, com coeficientes nos binários, de modo que todos os elementos codificados do código *C* são obtidos por meio da sua multiplicação pela matriz geradora (MENEGHESSO, 2012, p. 19-20).

A matriz geradora (G_k) é de tamanho $(2^k - k - 1) \times (2^k - 1)$, como usaremos $k = 3$, então G_3 será uma matriz de quatro linhas por sete colunas, como no exemplo a seguir:

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que a primeira linha de G_3 é a codificação da palavra (u_1, u_2, u_3, u_4)= (1,0,0,0) e sua forma codificada é $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$ = (1,0,0,0,1,1,0), posto que na codificação fazemos:

$$v_5 = u_1 + u_2 + u_4$$

$$v_6 = u_1 + u_3 + u_4$$

$$v_7 = u_2 + u_3 + u_4$$

A matriz G poderia ser escrita da forma padrão que é $G = (I_4\ A)$ sendo A uma matriz de ordem 4×3, cujas linhas são formadas pelos vetores binários de três dígitos diferentes de (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0) e (1,0,0). Ou seja, as linhas devem conter os vetores (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) e (1,1,1) em uma ordem qualquer. Como $G = (I_4\ A)$, a matriz $H = (A^t\ I_3)$, teremos:

$$GH^t = (I_4\ A)(A^t\ I_3)^t = (I_4\ A)\begin{pmatrix} A \\ I_3 \end{pmatrix} = A + A = 0$$

4.2 A MATRIZ DE CONTROLE

A matriz de paridade, também conhecida como matriz de controle, denotada por H_k, é uma matriz de dimensão $k \times (2^k - 1)$, com coeficientes nos binários, na qual $G_k H_k^t = 0$ = 0, na qual H_k^t denota a matriz transposta de H_k e 0 a matriz nula (MENEGHESSO, 2012, p. 19-20).

A matriz de controle é uma matriz de tamanho $k \times (2^k - 1)$ e suas linhas formam o complemento ortogonal do espaço, que tem como base a matrizes geradora (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015, p. 194). Para que ocorra a decodificação, basta que as linhas de G_3 e H_3 sejam ortogonais duas a duas, fazendo com que $G_3H_3^t = 0$, como no exemplo a seguir:

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando $k = 3$, teremos:

$$G_3H_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para esse processo ficar ainda mais inteligível, veremos adiante o passo a passo da transmissão da mensagem $u = (1,0,0,0)$.

Para codificar a mensagem $u = (1,0,0,0)$ e obter v, multiplica-se $u = (1,0,0,0)$ pela matriz geradora do seguinte modo:

$$v = uG = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$$

1º caso: não houve erro, $v = w = (1,0,0,0,1,1,0)$.

$$Hw^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, temos a decodificação, que é $u = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (1,0,0,0)$.

2º caso: houve erro, $v = (1,0,0,0,1,1,0) \neq w = (1,0,0,0,1,1,1)$:

$$Hw^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O resultado obtido foi diferente de uma matriz nula, mas sim a matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tal resultado corresponde ao sétimo elemento de H, o que quer dizer que temos um erro no sétimo elemento de w. Assim, a resolução torna-se mais fácil, para corrigi-lo basta trocar o “1” pelo “0”: $w = (1,0,0,0,1,1,1)$, corrigindo teremos: $w = (1,0,0,0,1,1,0)$.

Tem-se, assim, a decodificação, que é $u = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (1,0,0,0)$.

Por meio desse exemplo, foi possível visualizar a possibilidade da utilização de conteúdos provindos das matrizes – em especial a matriz geradora e a de controle – na codificação e decodificação de mensagens que empregam o código de Hamming.

5. CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

No presente capítulo, apresentamos uma breve definição de alguns conceitos relacionados às matrizes e aos códigos verificadores e corretores de erros, em especial o código de Hamming, código esse usado para controle de erro em comunicações digitais e em sistemas de armazenamento de dados. Recordemos que o código de Hamming C(7,4) apesar de ser o mais simples da família de códigos ainda assim nos dá a garantia de ser seguro e é mais econômico que alguns métodos de transmissão como o de repetição de letras.

Ainda assim, é necessário ressaltar uma das desvantagens do código de Hamming, que se refere ao baixo número de bits suportados. Se o número de bits protegidos for muito grande, o impacto no desempenho do sistema decodificador e corretor pode ser muito grande, ocasionando novos erros. Uma opção para contornar esse problema e aumentar a eficiência da operação, seria implementar o código de Hamming em conjunto com outros códigos (PEREIRA; SANTIAGO JÚNIOR; MANEA, 2017, p. 62).

Um código digno de nota é o de Reed-Solomon, que é uma variação do código de Hamming para detectar múltiplos erros. Uma característica importante que o difere do código original de Hamming é o fato de ele corrigir letras inteiras, não apenas bits individuais (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015, p. 212). Sua utilização pode ser encontrada, por exemplo, na correção de gravações sonoras digitais, como aquelas encontradas em um *compact disc* (CD). Apesar de sua significância, o código de Reed-Solomon não foi abordado em nossa pesquisa devido aos objetivos didáticos propostos, os quais relacionam o conteúdo de matrizes, assim como abordado em salas de aula no ensino médio, e os códigos verificadores e corretores de erro. Para isso, o código de Hamming mostrou-se mais compreensível e objetivo.

Dito isso, os motivos pelos quais as matrizes mereceram maior destaque em nossa pesquisa residem na ligação direta delas com o código de Hamming, uma vez que elas podem ser usadas no processo de codificação e decodificação de mensagens, e na presença de tal conteúdo no currículo básico do ensino médio. Além disso, a importância das matrizes extrapola a Matemática e adentra os campos da Informática, Estatística, Física, Engenharia, Administração, Economia, entre outros. Todavia, como afirmamos anteriormente, vários conceitos e conteúdos matemáticos não são trabalhados de uma maneira que se relacionem com o mundo vivenciado pelos alunos, o que dificulta ainda mais o ensino-aprendizado crítico.

No próximo capítulo, apresentaremos a elaboração de uma sequência didática que envolve os assuntos aqui discutimos e relataremos a experiência de nosso estudo, que consistiu numa intervenção pedagógica em salas de aula do segundo ano do ensino médio da rede estadual do Espírito Santo. Por fim, discutiremos os resultados e as dificuldades e possibilidades de melhoria do ensino de Matemática no ensino básico.

CAPÍTULO 3:

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: UM ESTUDO DE CASO

1. O ENSINO DA MATEMÁTICA

“A Matemática é um bicho de sete cabeças”. Essa é, talvez, a frase mais recorrente na nossa sociedade ao se tratar da Matemática. Frequentemente, alunos que mal começaram o processo de formação educacional já a reproduzem e a tomam como verdade, o que acaba condicionando o seu modo de pensar e agir frente aos conteúdos que verão ao longo dos anos (MOURA, 2002). Em outras palavras, a aceitação e naturalização da dificuldade em se aprender Matemática gera grandes obstáculos que impactarão diretamente na formação e interesse dos alunos (MACHADO, 2005; LORENZATO, 2010).

O ensino e a aprendizagem da Matemática, de fato, não são atividades fáceis, tanto para os alunos quanto para os professores (BESSA, 2007). Ambos precisam lidar com diversas situações cotidianas que interferem no processo educacional. O professor, por um lado, recebe alunos que não tiveram incentivo ao estudo matemático; que não desenvolveram os conhecimentos básicos, mas que, mesmo assim, chegam ao ensino médio; e não possuem interesse ou bagagem necessária para a compreensão de simples operações (MACHADO, 2005). Por outro lado, temos professores que não conseguem motivar os alunos; que não estão preparados para contextualizar a Matemática; que se preocupam apenas em repassar os conteúdos curriculares; e que não percebem que o ensino-aprendizado está seriamente comprometido (BASSANEZI, 1999, p. 16).

Se apresentarmos essa discussão por meio dos números, veremos que o Brasil não é referência no ensino da Matemática em relação ao mundo. Mediante a avaliação do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), realizada em 2018 e divulgada no final de 2019, e dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), se comparado à média dos países da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o Brasil figura entre as posições 69º e 72º (considerando as margens de erros) de um total de 79 países (INEP, 2019).[26] Ou seja, entre as últimas posições.

[26] Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206#>. Acesso em: 17 fev. 2021.

Além disso, enquanto a nota média brasileira, em Matemática, gira em torno de 384 pontos, a média da OCDE é de 489 (INEP, 2019). Tal situação é extremante preocupante, uma vez que, mesmo com muito trabalho e dedicação, mudá-la está cada vez mais difícil, pois as ofertas e demandas externas cativam e ocupam mais os alunos do que o ambiente os conteúdos oferecidos em sala de aula, especialmente aqueles referentes à Matemática.

Para alguns, os números acima apresentados são alarmantes – até mesmo assustadores –, mas para quem vivencia a realidade escolar sabe que a educação de qualidade não parece ser uma prioridade para a sociedade brasileira (TAKAHASHI, 2006), sobretudo a pública e a básica. Assim como outrora afirmava Duarte (1985, p. 51), o ensino de Matemática, assim como todo ensino, possui a capacidade de contribuir para as transformações sociais não apenas por meio da socialização do conteúdo, mas também mediante uma dimensão política que é intrínseca a essa socialização, dimensão essa contida na própria relação entre o conteúdo e a forma de sua transmissão-assimilação (VASCONCELLOS, 2000; MORIN, 2004). Negligenciar esse aspecto é negar a capacidade de criação, transformação e inovação do ensino (MOURA, 2002, p. 18-23).

Infelizmente, os resultados do PISA evidenciam que a educação está caminhando para um local ainda mais inquietante, posto que:

> 68,1% dos estudantes brasileiros estão no pior nível de proficiência em Matemática e não possuem nível básico, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Mais de 40% dos jovens que se encontram no nível básico de conhecimento são incapazes de resolver questões simples e rotineiras (INEP, 2019).

Os dados do PISA também nos informam que apenas 0,1% dos 10.961 alunos participantes da avaliação apresentou nível máximo de proficiência em Matemática, o que confirma o grau que os brasileiros se encontram, que é precisamente o mais baixo (INEP, 2019).

Devemos ressaltar que, além das dificuldades derivadas da realidade do próprio alunado, há o problema da má formação dos professores (GATTI, 2010; SAMPAIO; STOBÄUS, 2017). Isso não quer dizer que os professores simplesmente não dominem os conteúdos que precisam ensinar, mas, sim, que é possível que o ensino engessado e defasado da Matemática, e de outras disciplinas, dificulte ainda mais aquilo já vem se mostrando deficiente. Nesse sentido, Druck (2010, p. 2) afirma que a combinação entre ensino tradicional, métodos defasados e a atual realidade das escolas “[...] acabou por produzir o pano de fundo para o desastre que hora assistimos: aulas monótonas e confusas, cheias de fórmulas sem sentido, com a consequente falta de interesse e baixíssimo nível de conhecimento matemático dos alunos”.

Apesar do descompasso do ensino com as demandas atuais, da falta de interesse dos alunos e da falta de efetivação do processo de ensino-aprendizagem, os professores continuam exercendo seu ofício e se desgastando em jornadas de trabalho exaustivas, que não terminam nas escolas, mas extrapolam o ambiente laboral e chegam às residências desses profissionais, que, além de tudo, sofrem com a desvalorização de seus salários e de seus papéis na sociedade (CODO, 2002; SORATTO; OLIVIER-HECEKLER, 2002) .

É com base em todo esse panorama que apresentamos até aqui e com o objetivo de aprimorar o processo de ensino-aprendizagem, que refletimos e elaboramos um projeto de intervenção pedagógica baseado na aplicação de uma sequência didática, que apresenta as matrizes e o código de Hamming como assuntos principais. Acreditamos que tal método poderá servir como sugestão de abordagem da temática mencionada, pois ele objetiva enriquecer o estudo da Matemática, em especial o conteúdo de matrizes, que costuma ser trabalhado no ensino médio, como estipula a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

Sabemos que tal assunto nem sempre é atrativo aos alunos, pois esses possuem dificuldades de compreender e aplicar empiricamente o que estão estudando, o que dificulta a construção de uma conexão entre suas realidades e o ensino de Matemática. Pensando nisso, além de desenvolvermos e sugerirmos uma sequência didática, também a aplicamos em três turmas do 2º ano do ensino médio da cidade de Santa Teresa, ES. Portanto, nos tópicos seguintes, apresentaremos a sequência didática, os métodos utilizados, a nossa experiência de aplicação e discutiremos os resultados obtidos, mas não sem antes descrevermos o sujeito desta pesquisa.

2. DESCRIÇÃO DO SUJEITO

A pesquisa foi aplicada numa escola estadual do município de Santa Teresa, cidade do interior do estado do Espírito Santo, localizada a 78 km de Vitória, capital do Espírito Santo. Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), Santa Teresa possui cerca de 23.724 habitantes, sendo a maioria deles descendentes de imigrantes italianos. Com seus 683,032 km² de área territorial, possui a 31º economia do estado do Espirito Santo com Produto Interno Bruto (PIB) *per capita* de R$ 20.612,88, provindo especialmente da atividade agrícola, com destaque para a agropecuária (IBGE, 2018).[27]

[27] Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/es/santa-teresa/panorama>. Acesso em: 16 mar. 2021.

No último censo escolar, realizado em 2018, o município de Santa Teresa possuía 919 matrículas no ensino médio, as quais eram divididas em quatro escolas. Duas dessas instituições são estaduais, sendo a primeira, localizada na sede, que é a escola estudada, e a segunda, que se encontra em um distrito a aproximadamente 20 km do centro de Santa Teresa. As demais consistem em uma escola particular de ensino fundamental e médio, localizada na sede, e um *campus* do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), localizado em um distrito municipal, que atende os ensinos médio, técnico e superior (INEP, 2020a).[28]

A maioria dos alunos atendidos pela escola estudada provém da área rural e necessitam do transporte escolar para chegar às instalações escolares. Cumpre informar que o transporte escolar em Santa Teresa é exclusivo para alunos, diferentemente do sistema coletivo e privado que existe nos grandes centros urbanos do estado do Espírito Santo. A escola em questão atende os três turnos, sendo que nos períodos matutino e vespertino são ofertados o ensino regular, já no período noturno, além do ensino regular, também é oferecida a modalidade de Educação de jovens e adultos (EJA).

Foram escolhidas três turmas de 2º ano do ensino médio da escola, todas do mesmo turno, o matutino. Um dos motivos dessa escolha é que todas eram de um mesmo professor que se dispôs a ceder as turmas durante a aplicação do projeto. Informamos que o 2º ano do ensino médio foi escolhido por conter em sua grade curricular o conteúdo de matrizes, sendo essa abordada no último trimestre (SEDU, 2009, p. 775).

No que concerne à infraestrutura da escola estudada, observamos que ela possui instalações conservadas, sendo dez salas de aula, uma biblioteca, um laboratório de informática, uma quadra esportiva coberta, um refeitório, uma sala do professor, uma diretoria entre outras instalações. Além disso, a escola tem uma vertente acessível com banheiros, salas e outros instalações adaptadas. Todas as salas de aula também possuem um computador, um *data show* e acesso à internet, o que possibilita o professor ministrar suas aulas de forma mais dinâmica e lúdica. Para os alunos, contudo, a conexão com a internet ainda está sendo instalada. No momento, a escola passa por reformas para melhorar suas instalações e providenciar mais conforto à comunidade escolar.

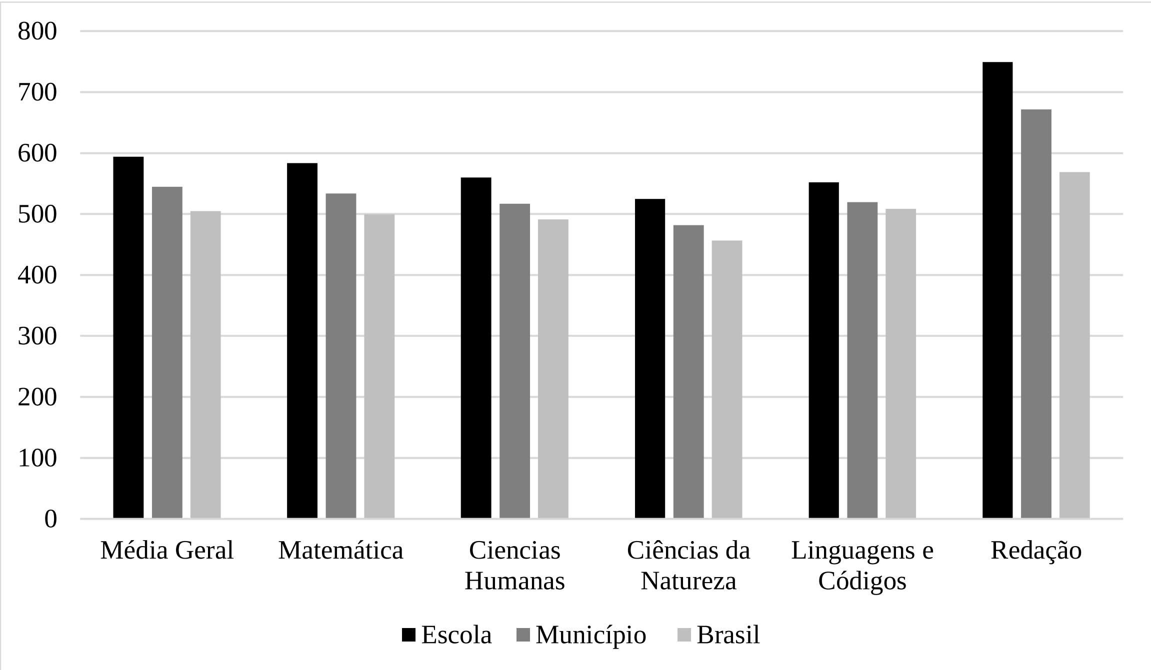
---

[28] Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/sinopses-estatisticas-da-educacao-basica>. Acesso em: 10 mar. 2021.

Cumpre ressaltar que, no momento da realização de nosso projeto, a estrutura mencionada não pôde ser utilizada, devido à pandemia de COVID-19. Não obstante a isso, acreditamos que o conforto escolar e as práticas ocorridas naquele ambiente podem ter algum grau de significância na forma de estudar e pensar os conteúdos curriculares, visto que a maioria dos alunos que participaram de nossa pesquisa já frequentavam a escola em questão há pelo menos um ano.

Estatisticamente, no ano de 2019, a escola figurou entre as cinco melhores escolas estaduais e obteve médias superiores às do município e às do Brasil em todos os itens avaliados pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), com destaque para a área de Matemática, que apresentou média ligeiramente superior às demais áreas de conhecimento, ficando atrás apenas da Redação (INEP, 2019). No gráfico abaixo, apresentamos as informações referentes ao ENEM de 2019.

Figura 7 – Desempenho da escola estudada no ENEM 2019 em relação às escolas públicas

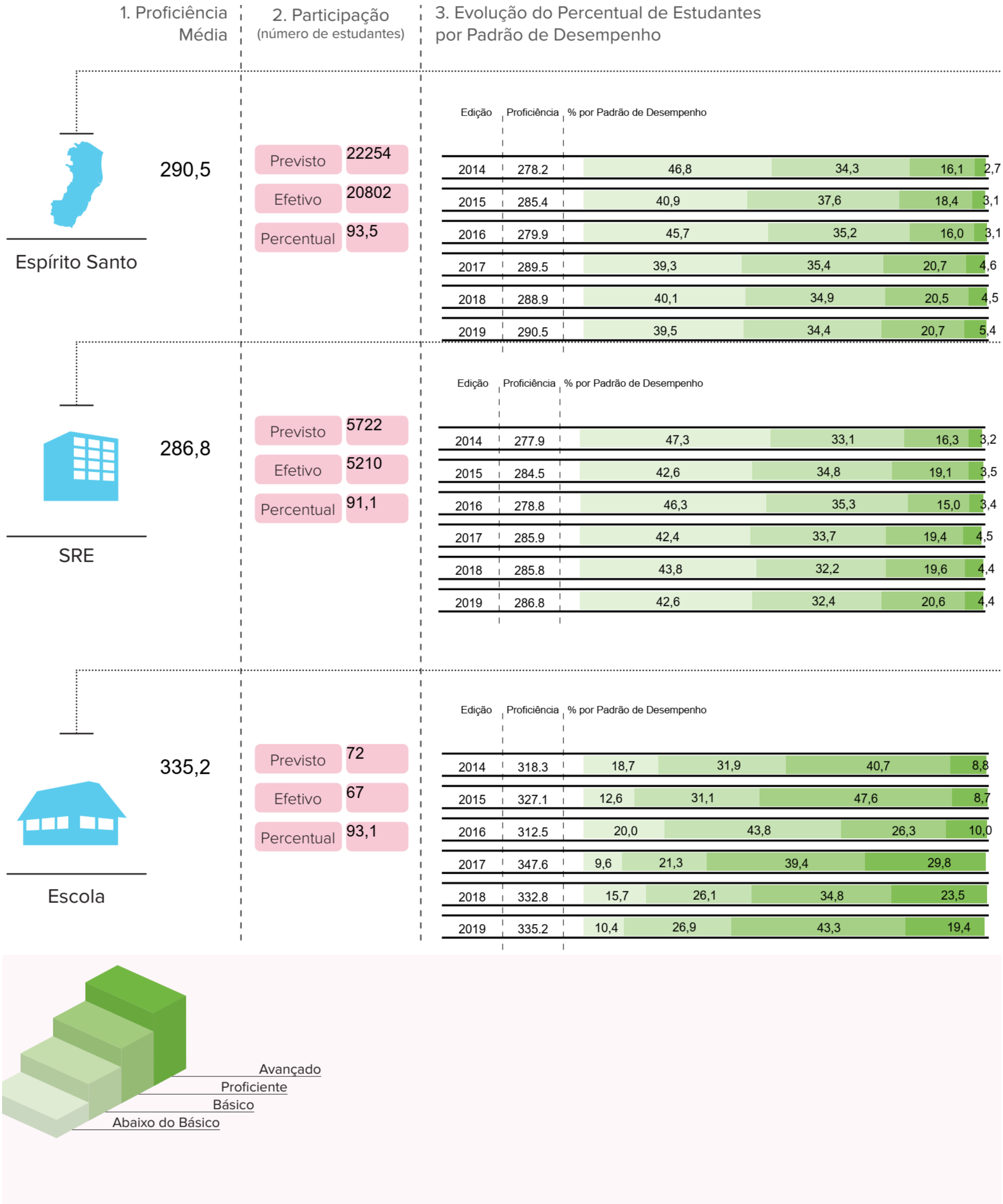


Fonte: Elaborada pelo autor com base em INEP (2020b).[29]

Outros dados disponíveis para consulta do desempenho da escola também podem ser consultados, como o Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES). Na Figura 8, podemos observar e comparar as notas em Matemática da escola estudada com a às da Superintendência Regional de Ensino (SRE) e do estado do Espírito Santo.

[29] Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/acesso-a-informacao/dados-abertos/microdados/enem>. Acesso em: 03 mar. 2020.

Figura 8 – Desempenho da escola estudada no PAEBES (2014 a 2019)



Fonte: PAEBES (2020).[30]

As turmas escolhidas para o nosso estudo totalizam 55 alunos matriculados (sendo: 2M01: 17 alunos; 2M02: 19 alunos; e 2M03: 19 alunos). Dos 55 alunos matriculados, apenas 40 alunos

[30] Disponível em: <http://www.paebes.caedufjf.net/resultado-por-escola-redes-estadual-e-municipal/>. Acesso em: 05 mar. 2020.

realizaram as atividades. Dos alunos estudados, 26 eram do sexo feminino e 14 do sexo masculino, com idades variando entre 16 a 19 anos, sendo oito alunos com 16 anos, 24 com 17 anos, 7 com 16 anos e apenas 1 com 19 anos.

Por último, é preciso advertir que nosso trabalho seria desenvolvido todo de forma presencial, mas durante a construção e a fase de aplicação ocorreu a pandemia do s*evere acute respiratory syndrome coronavirus 2* (SARS-CoV-2),[31] vírus causador da *coronavirus disease 2019* (COVID-19),[32] o que nos impossibilitou de realizar o trabalho da forma planejada e nos obrigou a fazer algumas adaptações para o ensino remoto, como explicitaremos a seguir.

3. AS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS E SUA APLICAÇÃO

Para compreendermos melhor as atividades desenvolvidas e propostas neste capítulo, é preciso, antes de mais nada, definir o procedimento escolhido para embasar nossa intervenção pedagógica. Segundo o *Guia de orientação para intervenção pedagógica*, elaborado pela Secretaria Estatual de Educação do Espírito Santo (SEDU, 2010, p. 34), podemos dizer que uma sequência didática é "um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um determinado conhecimento etapa por etapa, numa perspectiva dinâmica, intencionada, contextualizada e interdisciplinar". Além disso, uma sequência didática deve permitir vivências, "visando a atingir os aspectos conceituais, atitudinais e procedimentais propostos, fundamentais para a aprendizagem do aluno e desenvolvimento da autonomia intelectual". Em concordância, Zabala (1998, p. 18) afirma que a sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

Em consonância com os preceitos teóricos expostos acima, na aplicação da sequência didática, buscamos envolver o aluno por meio da contextualização do conteúdo trabalhado, pois acreditamos que isso é importante para proporcionar uma experiência mais agradável e significante no ensino da Matemática. Também optamos por tal ferramenta, pois ela incorpora várias etapas do ensino aprendizagem. Em nossa intervenção, por exemplo, a sequência didática

[31] Em português, "síndrome respiratória aguda grave de coronavírus 2".
[32] Em português, "doença do coronavírus 2019".

nos permitiu conhecer os alunos, trabalhar com eles e avaliar determinadas habilidades de forma planejada.

Em nossa intervenção, primeiramente, os alunos foram orientados a respeito de como funcionaria o projeto, diagnosticamos o conhecimento deles sobre os temas e a motivação para estudo. Em seguida, trabalhamos especificamente os dígitos verificadores, os códigos corretores de erros e a associação desses temas com as matrizes. Por fim, novamente avaliamos o desempenho e a motivação dos alunos.

Durante o processo de desenvolvimento de nossa dissertação, como mencionado, fomos obrigados a fazer algumas adaptações, principalmente na aplicação da sequência didática, visto que a pandemia de COVID-19 fez com que tivéssemos que mudar a forma que o ensino era tratado. Inicialmente, as aulas seriam conduzidas de forma presencial, mas elas foram adaptadas para o ensino remoto. A respeito da modalidade remota de ensino, Moreira e Schlemmer (2020, p. 9) afirmam que:

> O processo é centrado no conteúdo, que é ministrado pelo mesmo professor da aula presencial física. Embora haja um distanciamento geográfico, privilegia-se o compartilhamento de um mesmo tempo, ou seja, a aula ocorre num tempo síncrono, seguindo princípios do ensino presencial. A comunicação é predominantemente bidirecional, do tipo um para muitos, no qual o professor protagoniza vídeo-aula ou realiza uma aula expositiva por meio de sistemas de webconferência. Dessa forma, a presença física do professor e do aluno no espaço da sala de aula geográfica são substituídas por uma presença digital numa sala de aula digital. No ensino remoto ou aula remota o foco está nas informações e nas formas de transmissão dessas informações.

Em teoria, essa modalidade de ensino é funcional e permite o processo de ensino-aprendizado de forma similar ao ensino presencial, uma vez que pretende ser bidirecional e síncrona. Todavia, vivemos em um país socialmente desigual, onde muitos alunos não têm acesso de qualidade à internet e outros sequer possuem algum tipo de conexão. Em números, 67% dos domicílios brasileiros possuem conexão com a internet. Porém, ao avaliar o acesso entre classes sociais, a discrepância socioeconômica se torna mais evidente, estando ela disponível para 99% para aqueles da classe A; 94% para os da B; 76% para os da C; e 40% para aqueles que se encontram nas classes D e E (CETIC, 2018).[33] Diante dessa realidade, ocorreu uma mescla de ensino remoto (aulas, debates e apresentações ao vivo) com ensino a distância (EAD), sendo esse último caracterizado como um “processo de ensino-aprendizagem, mediado por

[33] Disponível em: <https://www.cetic.br/tics/domicilios/2018/domicilios/A4>. Acesso em: 26 mar. 2020.

tecnologias, onde professores e alunos estão separados espacial e/ou temporalmente" (MORAN, 1994, p. 1).

A sequência didática foi aplicada em cinco aulas, todas elas de forma remota pelo *Google Classroom*, plataforma oficial adotada pela escola em questão. Já as atividades e exercícios foram realizados por EAD, seguindo um cronograma de postagens semanais elaborado pela escola, no qual os alunos dispunham de uma semana para apresentar as respostas. Para sanar algumas dúvidas também era utilizado o aplicativo de mensagens *WhatsApp*, pois este fornecia uma comunicação mais rápida e era a preferência dos alunos, já habituados a usá-lo em seu cotidiano. Como materiais de apoio, foram nos valemos de textos, vídeos e áudios para fornecer as informações necessárias aos alunos.

A partir de agora, apresentaremos a sequência didática elaborada para o conteúdo de matrizes, bem como nossa experiência em aplica-la. A sequência é composta por cinco aulas, as quais foram separadas por fichas, sendo cada uma correspondente a uma aula. Comecemos, então, com a primeira aula (Quadro 4).

Quadro 4 – Apresentação da sequência didática (aula 1)

<table>
<tr><th colspan="2">1º AULA</th></tr>
<tr><td>Título:</td><td>Apresentação da sequência didática.</td></tr>
<tr><td>Objetivos:</td><td>• Compreender os objetivos do projeto executado.</td></tr>
<tr><td>Materiais:</td><td>• Ensino presencial: quadro branco, pincel, data show e computador;
• Ensino remoto: computador, internet e sala virtual.</td></tr>
<tr><td>Tempo estimado:</td><td>55 minutos (1 aula).</td></tr>
<tr><td>Público alvo:</td><td>Segunda série do ensino médio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ementa:</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Explicação sobre o projeto desenvolvido;
• Aplicação da escala de avaliação motivacional;
• Aplicação da avaliação diagnóstica sobre matrizes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Avaliação diagnóstica:</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Em cada um dos quatro dias de desfile de Carnaval, a temperatura foi medida em graus Celsius, no meio da multidão, em três momentos distintos. Cada elemento a_{ij} da matriz A abaixo corresponde à medida da temperatura no momento i do dia j.</td></tr>
</table>

$$A = \begin{pmatrix} 37{,}2 & 38{,}7 & 37{,}7 & 38{,}9 \\ 38{,}1 & 40{,}3 & 39{,}8 & 40{,}1 \\ 36{,}5 & 38{,}2 & 38{,}5 & 39{,}2 \end{pmatrix}$$

Qual foi, respectivamente, o momento e o dia em que se registrou a maior temperatura durante os desfiles?

a) 2.º e 4.º

b) 2.º e 2.º

c) 3.º e 2.º

d) 3.º e 4.º

e) 4.º e 4.º

2. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, qual é número que representa o elemento $A_{(2\times3)}$ da matriz $(A + B)^t$.

a) 0

b) -2

c) 8

d) 7

e) 3

3. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, determine $D = A^2 + B - C^2$.

a) $\begin{pmatrix} 31 & 17 \\ -31 & 13 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 37 & 7 \\ -11 & -11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -37 & -11 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -31 & -17 \\ 31 & 13 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 37 & 17 \end{pmatrix}$

4. (ENEM) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso. A tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir.

	1º bimestre	**2º bimestre**	**3º bimestre**	**4º bimestre**
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
História	8,6	6,8	7,8	9,0
Geografia	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Resultados esperados: Espera-se que os alunos compreendam os objetivos do trabalho e que realizem de forma comprometida o questionário contendo a Escala de Motivação Acadêmica (EMA) e a avaliação diagnóstica.

Critério de avaliação: Os alunos serão avaliados pela avaliação diagnóstica.

Fonte: Elaboração do autor.

No primeiro momento com os alunos, além de explicarmos o funcionamento do projeto, utilizamos uma Escala de Avaliação da Motivação, também chamada de Escala de Motivação Acadêmica (EMA), que traz importantes perguntas ao alunado. Trata-se de uma versão adaptada da Escala de Avaliação da Motivação para Aprender para Alunos do Ensino Fundamental (EMA-EF), desenvolvida por Boruchovitch (2006) e Neves (2007). O instrumento que utilizamos, que pode ser encontrado no Anexo 1, é composto por 31 itens a serem respondidos em uma escala Lickert de três pontos (nunca, às vezes e sempre).[34] Para

[34] A escala de verificação de Likert consiste em tomar um construto e desenvolver um conjunto de afirmações relacionadas a sua definição, para as quais os respondentes emitirão seu grau de concordância (SILVA JÚNIOR; COSTA, 2014, p. 5).

responde-lo, os alunos foram instruídos a serem sinceros em suas respostas, as quais diziam respeito apenas a eles, não havendo alternativa certa ou errada.

Em seguida, ainda na primeira aula, aplicamos uma avaliação diagnóstica a fim de saber mais sobre o conhecimento dos alunos naquele momento, posto que acreditamos que conhecer o estágio de aprendizagem dos educandos possibilita tomadas de decisão mais eficazes no enfrentamento de deficiências (LUCKESI, 2011).

Na segunda aula, já iniciamos o conteúdo propriamente dito, focando na história dos códigos corretores de erro, como exposto no Quadro 5.

Quadro 5 – A história dos códigos corretores de erros (aula 2)

2º AULA	
Título:	A história dos códigos corretores de erros.
Objetivos:	• Compreender a história dos códigos corretores de erros; • Relacionar a Matemática com as tecnologias que estão ao nosso redor.
Materiais:	• Ensino presencial: quadro branco, pincel, *data show* e computador; • Ensino remoto: computador, internet e sala virtual.
Tempo estimado:	55 minutos (1 aula).
Público alvo:	Segunda série do ensino médio.
Ementa:	
• História dos códigos corretores de erros; • Os códigos binários; • O código Morse.	
Atividades propostas:	

1. Utilize a tabela abaixo referente ao sistema binário para marcar a opção correta da palavra "Escola", lembrando que a primeira letra da palavra deve ser maiúscula.

Fragmento da tabela de conversão de números ASCII

Decimal	**Binário**	**Algarismo**	**Decimal**	**Binário**	**Algarismo**
64	1000000	@	96	01100000	`
65	01000001	A	97	01100001	A
66	01000010	B	98	01100010	B
67	01000011	C	99	01100011	C
68	01000100	D	100	01100100	D
69	01000101	E	101	01100101	E
70	01000110	F	102	01100110	F
71	01000111	G	103	01100111	g
72	01001000	H	104	01101000	h
73	01001001	I	105	01101001	i
74	01001010	J	106	01101010	j
75	01001011	K	107	01101011	k
76	01001100	L	108	01101100	l
77	01001101	M	109	01101101	m
78	01001110	N	110	01101110	n
79	01001111	O	111	01101111	o
80	01010000	P	112	01110000	p
81	01010001	Q	113	01110001	q
82	01010010	R	114	01110010	r
83	01010011	S	115	01110011	s
84	01010100	T	116	01110100	t
85	01010101	U	117	01110101	u
86	01010110	V	118	01110110	v
87	01010111	W	119	01110111	w
88	01011000	X	120	01111000	x
89	01011001	Y	121	01111001	y
90	01011010	Z	122	01111010	z

Fonte: Elaborada pelo autor com base em Fernandes (2020).

a) 0100 0101 0111 0011 0110 0011 0110 1111 0110 1100
b) 0110 0101 0111 0011 0110 0011 0110 1111 0110 1100
c) 0100 0101 0111 0011 0110 0011 0110 1111 0100 0001
d) 0100 0101 0111 0011 0110 0011 0110 1111 0110 1001

e) 0100 0101 0101 0011 0110 0011 0110 1111 0110 1100

2. Como você enviaria a mensagem “SOS”, utilizando a linguagem do código Morse? Utilize o quadro abaixo para seu auxílio.

Letras do alfabeto e algoritmos representados em Código Morse

A	**.-**	**J**	.---	**S**	...	**2**	..---
B	**-...**	**K**	-.-	**T**	-	**3**	...--
C	**-.-.**	**L**	-..	**U**	..-	**4**	...-
D	**-..**	**M**	--	**V**	...-	**5**	.....
E	**.**	**N**	-.	**W**	.--	**6**	-....
F	**..-.**	**O**	---	**X**	-..-	**7**	--...
G	**--.**	**P**	.--.	**Y**	-.--	**8**	---..
H	**....**	**Q**	--.-	**Z**	--..	**9**	----.
I	**..**	**Q**	.-.	**1**	.----	**0**	-----

Fonte: Adaptado de Snodgrass e Camp (1922).

a) ... --- ...
b) --- ... ---
c) --- --- ---
d) ... ...
e) ... ----- ...

Resultados esperados: Espera-se que os alunos compreendam como surgiram os códigos corretores de erros.

Critério de avaliação: Os alunos serão avaliados pela execução das atividades.

Fonte: Elaboração do autor.

Para esta aula, apresentamos aos alunos onde surgiram as primeiras ideias sobre transmissão de informações e como elas eram rudimentares em comparação com o que é apreciado hoje. Realizamos uma comparação com os atuais sistemas de comunicação e demonstramos como a evolução tecnológica aconteceu. Defendemos que a história do tema, além de proporcionar informação ao aluno, faz com que ele conheça de forma mais completa e crítica aquilo que está sendo apresentado a ele.

Para discutir com os alunos como a comunicação é importante e que erros podem acontecer quando não se tem métodos verificadores de erros. Infelizmente, devido à pandemia, uma das atividades propostas não foi possível de ser aplicada, pois necessitava do ensino presencial. Porém, para os professores que desejarem utilizar a nossa sequência didática, indicamos uma brincadeira chamada de "telefone sem fio", que consiste em ordenar os alunos e uma pessoa falar uma frase para o primeiro aluno e esse repassar para o segundo, sem que os demais escutem, e assim sucessivamente, até que o último apresente a frase para todos. O intuito dessa brincadeira é mostrar aos alunos como a comunicação é complexa quando não há meios para corrigir ou até mesmo identificar os erros que podem ocorrer no processo.

Na aula seguinte, buscamos demonstrar como funcionam os dígitos verificadores, evidenciando os mecanismos matemáticos presentes neles, como é possível visualizar no Quadro 6.

Quadro 6 – Como funcionam os dígitos verificadores? (aula 3)

3º AULA	
Título:	Como funcionam os dígitos verificadores?
Objetivos:	• Conhecer os mecanismos matemáticos nos dígitos verificadores.
Materiais:	• Ensino presencial: quadro branco, pincel, *data show* e computador; • Ensino remoto: computador, internet e sala virtual.
Tempo estimado:	55 minutos (1 aula).
Público alvo:	Segunda série do ensino médio.
Ementa:	
• A Matemática nos códigos de barras; • Os dígitos verificadores do CPF.	
Atividades propostas:	

1. Considerando o número de CPF 310.295.827-34, responda se ele é válido e qual o estado da federação ele foi criado? a) Válido, ES. b) Não válido, ES. c) Válido, SP. d) Válido, MG. e) Não válido, SP. **2.** O número 590123412345X está associado código de barras de um produto. Qual é o valor de X para que se tenha o dígito verificador do código de barras? a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8	
Resultados esperados: Espera-se que os alunos consigam conhecer e compreender os processos matemáticos contidos nos dígitos verificadores.	
Critério de avaliação: Os alunos serão avaliados pela execução das atividades.	

Fonte: Elaboração do autor.

Inicialmente, realizamos uma breve introdução sobre os dígitos verificadores de erros, para, em seguida, demonstrar como eles integram o nosso dia a dia sem que, muitas vezes, saibamos disso. Com isso, buscamos descontruir a ideia de que os conteúdos da Matemática e a realidade são coisas separadas.

Para exemplificar o que estamos falando, abordamos três das principais operações que exigem dígitos verificadores, sendo elas: o cadastro de pessoa física (CPF), o código de barras e o título de eleitor. Todos esses elementos têm grande relevância no cotidiano da das pessoas. O CPF é um número constantemente solicitado, praticamente qualquer cadastro exigido tal documento; os códigos de barras estão em praticamente todos os produtos comercializados; e o título de eleitor é um documento obrigatório para o exercício pleno da cidadania nas escolhas dos representantes políticos.

Feitas as considerações sobre a importância que os códigos têm na sociedade, relacionamos os dígitos verificadores com a Matemática propriamente dita. Assim, apresentamos como é composto o mecanismo por traz de cada número e o cálculo feito para se chegar ao digito verificador dos objetos citados.

A aula seguinte aprofunda ainda mais a questão dos códigos corretores de erros, pois nela apresentamos o código de Hamming e a possibilidade de utilização das matrizes na resolução dos erros, conforme demonstra o Quadro 7.

Quadro 7 – O código de Hamming (aula 4)

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">4º AULA</td></tr>
<tr><td>Título:</td><td>O código de Hamming</td></tr>
<tr><td>Objetivos:</td><td>• Compreender o código de Hamming.</td></tr>
<tr><td>Materiais:</td><td>• Ensino presencial: quadro branco, pincel, data show e computador;
• Ensino remoto: computador, internet e sala virtual.</td></tr>
<tr><td>Tempo estimado:</td><td>55 minutos (1 aula).</td></tr>
<tr><td>Público alvo:</td><td>Segunda série do ensino médio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ementa:</td></tr>
<tr><td colspan="2">• O código de Hamming;
• As matrizes na resolução dos erros.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atividades propostas:</td></tr>
</table>

1. No C (7, 4) código Hamming, quais são as palavras a serem enviados se quisermos transmitir as palavras (1 0 1 0), (0 1 1 0) e (1 1 1 0) respectivamente? a) (1010100), (0110110) e (1110000); b) (1010101), (0110110) e (1110000); c) (1010100), (0110100) e (1110000); d) (1010100), (0110110) e (1110111); e) (1010000), (0110110) e (1110000). 2. Utilizando o algoritmo de decodificação do código *Ham*3, efetue a decodificação da mensagem 0110101 e responda onde está o erro. a) u_1 b) u_2 c) u_3 d) u_4 e) u_5
Resultados esperados: Espera-se que os alunos possam conhecer e compreender o código de Hamming e que as matrizes possam ser uma ferramenta para auxiliá-los.
Critério de avaliação: Os alunos serão avaliados pela execução das atividades.

Fonte: Elaboração do autor.

Acreditamos que a quarta aula foi uma das mais importantes para o aprendizado previsto em nossa sequência didática, pois nela realizamos a integração dos conteúdos estudados – dígitos verificadores, números binários, redundância e matrizes – com o código de Hamming.

Primeiramente, articulamos uma introdução do código, que inclui sua origem e desenvolvimento, e gradualmente integramos os conteúdos matemáticos. Assim como descrito no capítulo 2, o código de Hamming C(7,4) é um sistema que trabalha com codificação, transmissão e decodificação de até 4 letras, com redundância de três e correção de até um erro cometido. Com isso em mente, almejamos que os alunos pudessem compreender os princípios básicos do código, que inclui o envio de uma mensagem codificação, sua recepção e decodificação, tal como abordamos no capítulo 2 desta dissertação.

Em seguida, apresentamos o processo de formação dos três últimos dígitos, que são chamados de verificadores e a importância desses para a detecção de erros. Entendida a explicação teórica, demonstramos como automatizar esse processo por meio do uso de matrizes. As matrizes utilizadas para tal procedimento foram as matrizes geradora e de controle, posto que por meio delas é possível compreender o meio de envio e recebimento de palavras com mais letras. Vale ressaltar que quanto maior a quantidade de letras enviadas, mais complexo se torna o processo. De tal modo, é importante demonstrar aos alunos as possibilidades e limitações de métodos manuais de codificação e os avanços que a tecnologia nos proporcionou, pois sabemos que um computador é capaz de processar uma quantidade extremamente maior de dados e em menos tempo. Importa frisar que esse processo de ensino-aprendizado foi amparado pela resolução de atividades propostas aos alunos, tal como consta no quadro acima.

Por fim, chegamos à última aula planejada, na qual pretendeu-se, em alguma medida, avaliar o aprendizado em Matemática após a aplicação da sequência didática elaborada e aplicada por nós, assim como exposto no Quadro 8.

Quadro 8 – Avaliação da sequência didática (aula 5)

5º AULA	
Título:	Avaliação da sequência didática.
Objetivos:	• Avaliar o aprendizado em Matemática após a aplicação da sequência.
Materiais:	• Ensino presencial: quadro branco, pincel, *data show* e computador; • Ensino remoto: computador, internet e sala virtual.
Tempo estimado:	55 minutos (1 aula).
Público alvo:	Segunda série do ensino médio.
Ementa:	
• Reaplicação da escala de avaliação motivacional; • Aplicação da avaliação sobre matrizes.	
Avaliação proposta:	

1. (IFPA-2011) Considere três dias da semana, D_1, D_2 e D_3, e três medidas de temperaturas feitas em uma hortaliça, T_1, T_2 e T_3. A matriz a seguir descreve a medida de temperatura verificada nesses três dias da semana. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade da temperatura em graus Celsius T_i em cada dia D_i, sendo i ∈{1, 2, 3} e j ∈{1, 2, 3}. Analisando a matriz, não podemos afirmar que:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} D_1 & D_2 & D_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 30 & 35 & 29 \\ 35 & 37 & 39 \\ 24 & 26 & 22 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) A temperatura T_2, no dia D_2, é 37°C.

b) A temperatura T_1, no dia D_3, é de 29°C.

c) A média das temperaturas, no dia D_3, é de 30°C.

d) A soma das temperaturas T_i verificadas nos dias D_i, i = 1, 2, 3 é, aproximadamente, 30,8°C.

e) A soma das temperaturas T_1 e T_3, no dia D_1, é 54°C.

2. Considerando as matrizes $Z = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $e\ X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, qual é o número que representa o elemento $C_{(3x2)}$ da matriz $C_{(3x2)} = (Z + X)^t$?

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

3. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, determine D = $A^2 + B - C^2$.

a) $\begin{pmatrix} 31 & 17 \\ -31 & 13 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 37 & 7 \\ -11 & -11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -37 & -11 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -31 & -17 \\ 31 & 13 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 37 & 17 \end{pmatrix}$

4. (CESGRANRIO) Cláudio anotou suas médias bimestrais de Matemática, Português, Ciências e Estudos Sociais em uma tabela com quatro linhas e quatro colunas, formando uma matriz, como mostra a exposta abaixo. Sabe-se que as notas de todos os bimestres têm o mesmo peso, isto é, para calcular a média anual do aluno em cada matéria basta fazer a média aritmética de suas médias bimestrais. Para gerar uma nova matriz cujos elementos representem as médias anuais de Cláudio, na mesma ordem da matriz apresentada, bastará multiplicar essa matriz por:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Matemática} \\ \text{Português} \\ \text{Ciências} \\ \text{Est. Sociais} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1^{\text{º}}\,b & 2^{\text{º}}\,b & 3^{\text{º}}\,b & 4^{\text{º}}\,b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5{,}0 & 4{,}5 & 6{,}2 & 5{,}9 \\ 8{,}4 & 6{,}5 & 7{,}1 & 6{,}6 \\ 9{,}0 & 7{,}8 & 6{,}8 & 8{,}6 \\ 7{,}7 & 5{,}9 & 5{,}6 & 6{,}2 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Resultados esperados: Espera-se que os alunos possam conhecer e compreender o código de Hamming por meio do conteúdo de matrizes.

Critério de avaliação: Os alunos serão avaliados pela execução da avaliação.

Fonte: Elaboração do autor.

Após a quinta e última aula, reaplicamos a Escala de Avaliação Motivacional, bem como a avaliação de desempenho referente ao conteúdo de matrizes. Com isso, buscamos comprovar se houve ou não alguma melhora na aprendizagem dos alunos, especialmente sobre matrizes, e se a sequência didática aplicada causou algum impacto na motivação os alunos.

Assim sendo, após a realização das cinco aulas planejadas, encerramos a sequência didática e partimos para a discussão dos dados obtidos a partir das respostas fornecidas pelos alunos. Os dados foram compilados e analisados estatisticamente pelo *software IBM SPSS Statistics for Windows*, versão 22.0 (Armonk, NY: IBM Corp).

Para análise descritiva dos dados da pesquisa, foram utilizados valores absolutos e percentuais para as variáveis categóricas; e média, desvio padrão (DP), mediana (p50) e intervalo interquartílico (IIQ – percentil 25 a percentil 75) para as variáveis quantitativas. A normalidade das variáveis foi testada pelo teste de Shapiro-Wilk. A fim de avaliar as associações entre as variáveis qualitativas antes e após a aplicação da sequência didática, utilizou-se o teste de McNemar. Para as variáveis quantitativas, utilizou-se o teste t de Student para amostras emparelhadas, quando variáveis paramétricas; e o teste t de Wilcoxon, quando variáveis não paramétricas. Para todas as análises o nível de significância foi de 5% ($p<0{,}05$). Após a realização da análise estatística, os resultados foram tabulados, descritos e discutidos, como apresentado no tópico a seguir.[35]

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dos 55 estudantes matriculados nas turmas avaliadas, 40 alunos preencheram os questionários aplicados, representando 72,7% de taxa de resposta. Todos os estudantes que preencheram as informações no T0 (antes da aplicação da sequência didática) completaram os questionários no T1 (após aplicação da sequência didática), não havendo, assim, perda de seguimento.

A maior parte dos alunos que participaram da avaliação era do sexo feminino (65,0%, n=26) e tinha 17 anos de idade (60,0%, n=24). A idade média dos estudantes avaliados foi de 17,03 ± 0,7 anos (mínimo 16 e máximo 19 anos), tendo na amostra 8 alunos (20,0%) com 16 anos, 7 (17,5%) com 18 anos e apenas 1 com 19 anos (2,5%) (Tabela 3).

Tabela 3 – Caracterização da amostra de estudantes que realizaram a sequência didática

Idade	**Média ± DP**	
	17,03 ± 0,7	
Anos	**n**	**%**
16	8	20,0
17	24	60,0
18	7	17,5
19	1	2,5

[35] Para a realização dos testes mencionados, utilizamos as instruções de Motta (2006) e Motta e Oliveira Filho (2009).

Sexo	n	%
Masculino	14	35,0
Feminino	26	65,0

N=40. Análise descritiva. Legenda: n: número de indivíduos; DP: desvio padrão. Fonte: Elaboração do autor.

Ao avaliar as diferenças entre as pontuações dadas às orientações motivacionais (Tabela 4), identificou-se que a motivação intrínseca apresentou diferenças antes e após a aplicação da sequência didática, com uma leve redução neste tempo (p=0,021). Apesar de não haver diferença estatística quanto à motivação extrínseca, é possível observar uma tendência de aumento discreto nesta motivação (p=0,057). A pontuação total das orientações motivacionais também não apresentou diferença estatística.

Tabela 4 – Pontuação das orientações motivacionais intrínsecas e extrínsecas antes e após a aplicação da sequência didática aos estudantes do ensino médio

Variáveis	T0				T1				p valor
	Média	**DP**	**p50**	**IIQ (p25 - p75)**	**Média**	**DP**	**p50**	**IIQ (p25 - p75)**	
Orientações motivacionais intrínsecas	42	4	43	(39 - 45)	41	4	41	(38 - 44)	**0,021**
Orientações motivacionais extrínsecas*	36	3	36	(35 - 38)	37	2	37	(35 - 39)	0,057
Orientações motivacionais	78	6	78	(75 - 82)	78	5	78	(75 - 81)	0,914

N=40. Teste t de Student para amostras emparelhadas. * Teste t de Wilcoxon. Legenda: T0: Tempo inicial (antes da aplicação da sequência didática); T1: Tempo final (após aplicação da sequência didática); DP: desvio padrão; p50: mediana; IIQ: intervalo interquartílico; p25: percentil 25; p75: percentil 75. Fonte: Elaboração do autor.

Quando avaliadas as questões da Escala de Avaliação da Motivação para Aprender de Alunos (EMA) (Tabela 5), observou-se que houve maior relato dos alunos “sempre” ou pelo menos “às vezes” terem vontade de conhecer e aprender assuntos novos (p=0,003), de “nunca” fazer os deveres de casa por obrigação (p=0,018) e de “nunca” fazer os deveres de casa porque os pais acham importante (p=0,039).

Tabela 5 – Respostas da Escala de Avaliação da Motivação para Aprender de Alunos (EMA) pelos alunos avaliados, antes e após aplicação da sequência didática

Variáveis		**T0**		**T1**		**p valor**
		n	**%**	**n**	**%**	
Orientações motivacionais intrínsecas						
Eu estudo porque estudar é importante para mim	Nunca	0	0,0	0	0,0	0,508
	Às vezes	9	22,5	6	15,0	
	Sempre	31	77,5	34	85,0	
Eu tenho vontade de conhecer e aprender assuntos novos	Nunca	1	2,5	0	0,0	**0,003**
	Às vezes	14	35,0	26	65,0	
	Sempre	25	62,5	14	35,0	
Eu gosto de estudar assuntos desafiantes	Nunca	2	5,0	2	5,0	0,717
	Às vezes	29	72,5	31	77,5	
	Sempre	9	22,5	7	17,5	
Eu gosto de estudar assuntos difíceis	Nunca	6	15,0	5	12,5	0,549
	Às vezes	30	75,0	32	80,0	
	Sempre	4	10,0	3	7,5	
Eu me esforço bastante nos trabalhos de casa, mesmo sabendo que não vão valer como nota	Nunca	0	0,0	0	0,0	0,791
	Às vezes	25	62,5	23	57,5	
	Sempre	15	37,5	17	42,5	
Eu estudo mesmo sem os meus pais pedirem	Nunca	3	7,5	1	2,5	0,261
	Às vezes	1	2,5	4	10,0	
	Sempre	36	90,0	35	87,5	
Eu me esforço bastante nos trabalhos, em sala de aula, mesmo sabendo que não vai valer como nota	Nunca	1	2,5	1	2,5	0,166
	Às vezes	19	47,5	24	60,0	
	Sempre	20	50,0	15	37,5	
Eu estudo porque estudar me dá prazer e alegria	Nunca	3	7,5	3	7,5	0,368
	Às vezes	32	80,0	34	85,0	
	Sempre	5	12,5	3	7,5	
Eu fico tentando resolver uma tarefa, mesmo quando ela é difícil para mim	Nunca	0	0,0	0	0,0	0,453
	Às vezes	24	60,0	27	67,5	
	Sempre	16	40,0	13	32,5	
	Nunca	0	0,0	1	2,5	0,999

Eu prefiro aprender, na escola, assuntos que aumentem minhas habilidades ou meus conhecimentos	Às vezes	14	35,0	13	32,5	
	Sempre	26	65,0	26	65,0	
Eu faço minhas lições de casa, mesmo que meus pais não me peçam	Nunca	0	0,0	0	0,0	0,625
	Às vezes	4	10,0	2	5,0	
	Sempre	36	90,0	38	95,0	
Eu estudo porque gosto de ganhar novos conhecimentos	Nunca	0	0,0	0	0,0	0,388
	Às vezes	14	35,0	18	45,0	
	Sempre	26	65,0	22	55,0	
Eu gosto de estudar	Nunca	0	0,0	0	0,0	0,999
	Às vezes	29	72,5	30	75,0	
	Sempre	11	27,5	10	25,0	
Eu procuro saber mais sobre os assuntos que gosto, mesmo sem minha professora pedir	Nunca	3	7,5	3	7,5	0,526
	Às vezes	21	52,5	24	60,0	
	Sempre	16	40,0	13	32,5	
Eu gosto de ir para a escola porque aprendo assuntos interessantes lá	Nunca	2	5,0	1	2,5	0,129
	Às vezes	17	42,5	25	62,5	
	Sempre	21	52,5	14	35,0	
Eu estudo porque quero aprender cada vez mais	Nunca	0	0,0	0	0,0	0,289
	Às vezes	10	25,0	14	35,0	
	Sempre	30	75,0	26	65,0	
Eu fico interessado (a) quando a professora começa uma lição nova	Nunca	0	0,0	0	0,0	0,999
	Às vezes	26	65,0	26	65,0	
	Sempre	14	35,0	14	35,0	
Orientações motivacionais extrínsecas						
Eu estudo por medo dos meus pais brigarem comigo	Sempre	0	0,0	0	0,0	0,219
	Às vezes	5	12,5	1	2,5	
	Nunca	35	87,5	39	97,5	
Eu faço os deveres de casa por obrigação	Sempre	3	7,5	6	15,0	**0,018**
	Às vezes	30	75,0	18	45,0	
	Nunca	7	17,5	16	40,0	
Eu estudo porque meus pais prometem me dar presentes, se as minhas notas forem boas	Sempre	0	0,0	0	0,0	0,999
	Às vezes	2	5,0	1	2,5	

	Nunca	38	95,0	39	97,5	
Eu estudo porque minha professora acha importante	Sempre	5	12,5	3	7,5	0,261
	Às vezes	10	25,0	11	27,5	
	Nunca	25	62,5	26	65,0	
Eu estudo porque fico preocupado(a) que as pessoas não me achem inteligente	Sempre	0	0,0	1	2,5	0,687
	Às vezes	12	30,0	9	22,5	
	Nunca	28	70,0	30	75,0	
Eu estudo por medo dos meus pais me colocarem de castigo	Sempre	0	0,0	0	0,0	0,999
	Às vezes	1	2,5	0	0,0	
	Nunca	39	97,5	40	100,0	
Eu só estudo para não me sair mal na escola	Sempre	12	30,0	10	25,0	0,558
	Às vezes	22	55,0	22	55,0	
	Nunca	6	15,0	8	20,0	
Eu estudo para os meus pais deixarem eu ir brincar com os meus amigos ou fazer as coisas que eu gosto	Sempre	0	0,0	0	0,0	0,375
	Às vezes	6	15,0	3	7,5	
	Nunca	34	85,0	37	92,5	
Eu só estudo para agradar meus professores	Sempre	1	2,5	2	5,0	0,607
	Às vezes	5	12,5	5	12,5	
	Nunca	34	85,0	33	82,5	
Eu estudo apenas aquilo que a professora avisa que vai cair na prova	Sempre	7	17,5	6	15,0	0,682
	Às vezes	28	70,0	30	75,0	
	Nunca	5	12,5	4	10,0	
Eu só faço meus deveres de casa porque meus pais acham importante	Sempre	2	5,0	0	0,0	**0,039**
	Às vezes	10	25,0	5	12,5	
	Nunca	28	70,0	35	87,5	
Eu só estudo porque quero tirar notas altas	Sempre	9	22,5	7	17,5	0,532
	Às vezes	26	65,0	29	72,5	
	Nunca	5	12,5	4	10,0	
Eu só estudo porque meus pais mandam	Sempre	1	2,5	0	0,0	0,999
	Às vezes	1	2,5	3	7,5	
	Nunca	38	95,0	37	92,5	
Eu estudo por obrigação	Sempre	2	5,0	1	2,5	0,392
	Às vezes	8	20,0	10	25,0	

	Nunca	30	75,0	29	72,5

N=40. Teste de McNeymar. Legenda: T0: Tempo inicial (antes da aplicação da sequência didática); T1: Tempo final (após aplicação da sequência didática); n: número de indivíduos. Fonte: Elaboração do autor.

Sobre a avaliação do conteúdo aplicado na sequência didática (Tabela 6), observou-se aumento na nota média obtida pelo grupo (5,3 *versus* 4,2 pontos, p=0,008). Apesar da nota média final ser de 5,3 ± 2,0 pontos (de 0 a 10 pontos), nenhum aluno atingiu nota zero, como havia ocorrido antes da aplicação da sequência didática.

Tabela 6 – Pontuação total obtida antes e após a aplicação da sequência didática

Tempo / Variáveis	Pontos sequência didática						p valor
	Média	**DP**	**p50**	**IIQ (p25 - p75)**	**Mín**	**Máx**	
T0	4,2	2,7	5,0	(2,5 - 5,0)	0,0	10,0	**0,008**
T1	5,3	2,0	5,0	(5,0 - 7,5)	2,5	10,0	

N=40. Teste t de Wilcoxon. Legenda: T0: Tempo inicial (antes da aplicação da sequência didática); T1: Tempo final (após aplicação da sequência didática); DP: desvio padrão; p50: mediana; IIQ: intervalo interquartílico; p25: percentil 25; p75: percentil 75; Mín: Mínimo; Máx: Máximo.

Ao analisar cada uma das quatro habilidades avaliadas na sequência didática (Tabela 7), a habilidade com maior taxa de acertos foi a de “identificar os elementos na matriz”, com 87,5% de acertos no T1. Entretanto, a habilidade de “Efetuar a soma de uma matriz transposta” foi a que apresentou menor taxa de acerto (20,0%), com redução dessa taxa no T1 (p=0,001). Além disso, apresentaram aumento na taxa de acertos as habilidades de “identificar os elementos na matriz” (p=0,013) e de “efetuar soma, subtração e multiplicação de matrizes” (p=0,004). Por fim, a habilidade de “efetuar a multiplicação de matrizes” não apresentou diferença entre os tempos (p=0,096).

Tabela 7 – Taxas de correção de cada habilidade avaliada na sequência didática

Variáveis		T0		T1		p valor
		n	**%**	**n**	**%**	
Identificar os elementos na matriz	Incorreto	15	37,5	5	12,5	**0,013**
	Correto	25	62,5	35	87,5	
Efetuar a soma de uma matriz transposta	Incorreto	19	47,5	32	80,0	**0,001**
	Correto	21	52,5	8	20,0	
	Incorreto	35	87,5	22	55,0	**0,004**

Efetuar soma, subtração e multiplicação de matrizes	Correto	5	12,5	18	45,0	
Efetuar a multiplicação de matrizes	Incorreto	24	60,0	16	40,0	0,096
	Correto	16	40,0	24	60,0	

N=40. Teste de McNeymar. Legenda: T0: Tempo inicial (antes da aplicação da sequência didática); T1: Tempo final (após aplicação da sequência didática); n: número de indivíduos. Fonte: Elaboração do autor.

5. CONSIDERAÇÕES PARCIAIS

Para a realização de nossos objetivos, foi preciso superar alguns contratempos referentes à aplicação da sequência didática, uma vez que a pandemia de COVID-19 afetou profundamente o cotidiano da humanidade, o que inclui o processo de ensino-aprendizagem. A princípio, havíamos planejado a sequência didática para o ensino presencial, mas isso não se mostrou possível devido à suspenção das aulas e a transição para o ensino remoto. Apesar de ter havido um período de retorno à modalidade presencial, esse não foi obrigatório, o que fez com que a frequência dos alunos fosse baixíssima ou até mesmo nula. Assim, foi preciso adaptar nossos planos de aulas para o ensino remoto e EAD, sendo, então, realizado por meio do *Google Classroom*, plataforma adotada pela rede estadual de ensino do Espírito Santo como oficial. Como dito anteriormente, com o intuito de não acumular tarefas, a escola determinava um cronograma de postagem e a quantidade de atividades por disciplinas, o que nos impediu de utilizar alguns materiais para fixação e melhor compreensão dos conteúdos estudados.

Uma das maiores dificuldades enfrentadas em nossa aplicação, e talvez ao longo do ano letivo, reside no fato de alguns alunos não possuírem uma boa conexão de internet ou mesmo nem terem acesso a ela. Além disso, com a indefinição causada pela pandemia, muitos estudantes deixaram de participar das atividades escolares, dedicaram-se a apenas algumas disciplinas ou simplesmente abandonaram a escola. Tal situação justifica a não participação de uma expressiva porcentagem de alunos em nosso projeto (27,3%), sendo que dos 55 alunos matriculados apenas 40 concluíram as atividades, ou seja, 72,7% dos alunos.

Mesmo diante das dificuldades descritas acima, foi possível obtermos alguns resultados. Em primeiro lugar, foi identificada uma leve tendência de aumento na motivação extrínseca e uma leve redução na motivação intrínseca. Também se observou uma redução em uma das quatro habilidades avaliadas, a de efetuar a soma de uma matriz transposta. Em contrapartida, houve um aperfeiçoamento nas outras três habilidades, sendo elas: identificar os elementos na matriz;

efetuar soma; subtração e multiplicação de matrizes; e efetuar a multiplicação de matrizes. Além disso, foi possível observar uma melhora na vontade de conhecer e aprender assuntos novos, de não fazer os deveres de casa por obrigação e de não fazer os deveres de casa apenas porque os pais acham importante.

Podemos ressaltar que também houve aumento da pontuação final dos alunos, pois mesmo na média (5,3 pontos), nenhum estudante atingiu nota zero, como havia ocorrido antes da aplicação da sequência didática. De certo, gostaríamos que o resultado fosse melhor, mas não podemos negar que ocorreu uma melhoria, saindo de uma média de 4,2 pontos para 5,3 pontos.

O fato de a média não ter aumentado de forma mais significativa também está relacionado com algumas limitações já apresentadas no texto, mas que cabe a nós elenca-las novamente. Em primeiro lugar, destacamos que, além da experiência ter sido desenvolvida em um ambiente diferente do presencial, habituado pelos alunos, eles também podem não ter compreendido a dinâmica das questões ou, de fato, não terem compreendido completamente o conteúdo.

Em segundo lugar, a elevada taxa de não resposta pode ter contribuído para não refletir a realidade daqueles estudantes. Como expusemos, obtivemos 40 respostas dos 55 alunos matriculados. É possível que tais respostas tenham sido fornecidas pelos alunos mais interessados em participar das atividades, levando a um viés de seleção. Tal situação também impossibilitou dividi-los em dois grupos, dos quais um seria o de intervenção, com a aplicação da sequência didática proposta, e o outro com o método de ensino tradicional de matrizes. Isso permitiria termos um grupo controle, a fim de avaliar se as diferenças do que o que foi aprendido ocorreu, de fato, pela aplicação da sequência didática ou mediante o conhecimento geral sobre matrizes.

Em terceiro lugar, houve aplicação de uma EMA validada para alunos em ensino presencial em um grupo diferente de estudantes que estão na modalidade remota e a distância. Certamente, realizamos uma adaptação da escala para a realidade atual dos alunos, mas não descartamos a possibilidade de isso também ter ocasionado algum viés. Ressaltamos que outras escalas foram averiguadas, mas nenhuma previa situações como as causadas pela pandemia atual. Escalas que refletiam parcialmente a modalidade de ensino eram focados em EAD (e não em ensino remoto), logo, elas também não se encaixavam na realidade do grupo estudado e nos objetivos desta dissertação.

Por último, ressaltamos que o ensino pela modalidade remota e EAD impossibilitou termos o controle do preenchimento do questionário inicial e final, o que pode ter interferido nas respostas fornecidas. Um cenário hipotético para isso é aquele onde, talvez, na primeira aplicação do teste, os alunos com receio de responderem errado, conferiram o conteúdo antes. Outro cenário é aquele onde os estudantes, findando o prazo de envio das respostas, responderam o questionário sem terem estudado o material indicado. Caso tenham ocorrido, essas duas situações aumentariam a pontuação no T0 e diminuiriam a pontuação no T1. Além disso, como não se tinha um controle presencial, os alunos podem até terem ajudado uns aos outros, trocando informações e, assim, não atendendo a dinâmica proposta em nosso trabalho.

Por fim, apesar das dificuldades encontradas, novas formas de ensino, que incluem atividades de contextualização histórica, aproximação da Matemática com o cotidiano, apresentação de significados e aplicações práticas contribuem para o aumento da motivação dos alunos e compreensão dos conteúdos curriculares.

CONCLUSÃO

A defasagem e as dificuldades do ensino-aprendizado de Matemática no Brasil não são meras conjunturas, mas uma realidade. Por um lado, os professores recebem alunos sem interesse, motivação ou conhecimento básico para a compreensão de simples operações. Por outro lado, alunos encontram professores com problemas de formação, comunicação e apegados a um ensino tradicional, no qual meramente se repassa os conteúdos curriculares. Isso sem falar em questões externas, que envolvem a sociedade e a família. Ao fim e ao cabo, o processo de ensino-aprendizado é comprometido, pois os alunos não adquirem conhecimentos e capacidade crítica; e a Matemática é vista como uma disciplina de difícil compreensão e sem conexão com os estudantes, fato constatado na literatura por alguns autores, como Bessa (2007), Lorenzato (2010), Vasconcellos (2000), Machado (2005), Martins (2009), Morin (2004) e Moura (2002), bem como por nossa experiência e por relatos de docentes e discentes. Não obstante, dados como os referentes ao Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) de 2018 evidenciam bem essa situação, pois em tal exame o Brasil não está apenas distante das primeiras colocações, mas, na verdade, próximo das últimas (INEP, 2019).

Tal condição é alarmante, uma vez que mudá-la vem se mostrando um desafio cada vez mais árduo. Porém, acreditamos que, dentro dos limites que competem aos professores, é possível amenizá-la ou, até mesmo, revertê-la. Por meio desta dissertação, apresentamos uma proposta de ensino diferente da tradicional, visando motivar os estudantes a aprender os conteúdos, desenvolver habilidades críticas e compreender que a Matemática está interligada ao nosso dia a dia.

Como hipótese de trabalho, defendemos que a baixa aplicabilidade do ensino de Matemática no cotidiano dos alunos e a maneira pela qual ela é ensinada em sala de aula leva ao desinteresse pela disciplina e que uma aprendizagem de qualidade exige que todas as partes estejam motivadas.

Diante do exposto, nosso trabalho pretendeu contextualizar o desenvolvimento dos códigos, em especial os dígitos verificadores e os códigos corretores de erros, demonstrando o histórico de desenvolvimento de tais conteúdos, bem como suas características. Além disso, abordamos as funções práticas dos dígitos verificadores no cotidiano no intuito de conceder mais significado ao que é estudado. Por último, foi proposta a elaboração de uma sequência didática, que apresenta as matrizes e o código de Hamming como assuntos principais. Essa abordagem foi utilizada em uma intervenção em sala de aula, a fim de demonstrar o uso prático da Matemática, e avaliar os resultados de sua aplicação. Para comprovar nossas hipóteses, realizamos esse estudo com três turmas do 2º ano do ensino médio de uma escola estadual do município de Santa Teresa, Espírito Santo, amparado por uma Escala de Motivação Acadêmica (EMA).

O primeiro capítulo foi dedicado ao desenvolvimento e aplicação dos dígitos verificadores de erros, o que incluiu sua contextualização histórica e usos no cotidiano. Os exemplos selecionados foram o CPF, os códigos de barras e o título de eleitor, visto que são documentos e tecnologias utilizadas pelos estudantes que, muitas vezes, não as associam à Matemática.

No segundo capítulo, abordamos os números binários e apresentamos a definição de alguns conceitos básicos relacionados às matrizes e aos códigos verificadores e corretores de erros. Os motivos pelos quais as matrizes mereceram maior destaque nesta pesquisa residem na ligação direta delas com o código de Hamming, uma vez que elas podem ser usadas no processo de codificação e decodificação de mensagens, e na presença de tal conteúdo no currículo básico do ensino médio.

Mediante o terceiro capítulo, evidenciamos que os alunos tiveram uma melhora no conhecimento sobre a temática estudada, apesar de a pontuação média não ter sido tão elevada. Podemos ressaltar que também houve aumento da pontuação final dos alunos, pois mesmo na média (5,3 pontos), nenhum estudante atingiu nota zero, como havia ocorrido antes da aplicação da sequência didática. Também foi identificada uma leve tendência de aumento na motivação extrínseca. Além disso, houve um aperfeiçoamento nas outras três habilidades, sendo elas: identificar os elementos na matriz; efetuar soma; subtração e multiplicação de matrizes; e efetuar a multiplicação de matrizes. Por fim, foi possível observar uma melhora na vontade de conhecer e aprender assuntos novos, de não fazer os deveres de casa por obrigação e de não os fazer apenas porque os pais achavam importante.

Para a realização de nossos objetivos, foi preciso superar alguns contratempos referentes à aplicação da sequência didática, uma vez que a pandemia de COVID-19 afetou profundamente o processo de ensino-aprendizagem. A princípio, havíamos planejado a intervenção para o ensino presencial, mas isso não se mostrou possível devido à suspenção das aulas e à transição para o ensino remoto. Apesar das dificuldades encontradas, novas formas de ensino, que incluem atividades de contextualização histórica, aproximação da Matemática com o cotidiano, apresentação de significados e aplicações práticas contribuíram para o aumento da motivação dos alunos e compreensão dos conteúdos curriculares.

Por fim, destacamos que o trabalho aqui proposto pode ser empregado em sala de aula por outros professores, uma vez que redigimos os dois primeiros capítulos desta dissertação com o intuito de também servir como material de apoio para a aplicação da sequência didática sobre matrizes e códigos corretores de erros apresentada no terceiro capítulo, a qual busca romper com o ensino tradicional presente nas salas de aulas brasileiras.

REFERÊNCIAS

DOCUMENTOS LEGISLATIVOS

BRASIL. Decreto nº 8213, de 13 de agosto de 1881. Regula a execução da Lei nº 3029 de 9 de janeiro do corrente ano que reformou a legislação eleitoral. *Coleção das Leis do Império do Brazil*, v. 2, p. 854-923, 1881. Disponível em: <https://www.tse.jus.br/eleitor/glossario/termos/lei-saraiva>. Acesso em: 05 fev. 2021.

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA. CASA CIVIL. SUBCHEFIA PARA ASSUNTOS JURÍDICOS. Decreto-Lei n° 401, de 30 de dezembro de 1968. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/decreto-lei/del0401.htm>.

SÍTIOS INSTITUCIONAIS ONLINE E PÁGINAS DA INTERNET

BRASIL. RECEITA FEDERAL (RFB). Receita Federal lança serviço que permite atualizar dados do CPF pela internet. 2017. Disponível em: <https://receita.economia.gov.br/noticias/ascom/2017/janeiro/receita-federal-lanca-servico-que-permite-atualizar-dados-do-cpf-pela-internet>. Acesso em: 28 dez. 2020.

CENTRO REGIONAL DE ESTUDOS PARA O DESENVOLVIMENTO DA SOCIEDADE DA INFORMAÇÃO (CETIC). Pesquisa TIC Domicílios 2018. 2018. Acesso em: 26 mar. 2020. Disponível em: <https://www.cetic.br/tics/domicilios/2018/domicilios/A4>. Acesso em: 26 mar. 2020.

DENSO-WAVE. About 2D Code. Disponível em: <http://www.densowave.com/qrcode/aboutqr-e.html>. Acesso em: 10 fev. 2021.

EXCEL DO SEU JEITO. Validar CPF, CNPJ e Título de Eleitor (Parte I). s.d. Disponível em: <https://exceldoseujeito.com.br/validar-cpf-cnpj-e-titulo-de-eleitor-parte-i>. Acesso em: 26 jan. 2019.

EXCEL DO SEU JEITO. Validar CPF, CNPJ e Título de Eleitor (Parte II). s.d. Disponível em: <https://exceldoseujeito.com.br/validar-cpf-cnpj-e-titulo-de-eleitor-parte-ii>. Acesso em: 22 jul. 2019.

FERNANDES, H. M. Código ASCII – Tabela ASCII completa. 2020. Disponível em: <https://marquesfernandes.com/desenvolvimento/codigo-ascii-tabela-ascii-completa>. Acesso em: 21 fev. 2020.

GS1 BRASIL – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE AUTOMAÇÃO. Código de barras: conheça sua história de evolução. 2017. Disponível em: <https://blog.gs1br.org/codigo-de-barras-conheca-sua-historia-de-evolucao>. Acesso em: 15 jan. 2020.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Santa Teresa. 2018. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/es/santa-teresa/panorama>. Acesso em: 16 mar. 2021.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). Sinopses Estatísticas da Educação Básica. 2020a. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/sinopses-estatisticas-da-educacao-basica>. Acesso em: 10 mar. 2021.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). Microdados do Exame Nacional do Ensino Médio. 2020b. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/acesso-a-informacao/dados-abertos/microdados/enem>. Acesso em: 15 jan. 2021.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (INEP). Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no Brasil. 2019. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206>. Acesso em: 17 fev. 2021.

PORTO, G. Código Morse. *InfoEscola*. s.d. Disponível em: <https://www.infoescola.com/comunicacao/codigo-morse>. Acesso em: 07 jan. 2021.

PROGRAMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO ESPÍRITO SANTO (PAEBES). Resultado por Escola – Redes Estadual e Municipal. 2020. Disponível em:

<http://www.paebes.caedufjf.net/resultado-por-escola-redes-estadual-e-municipal/>. Acesso em: 05 mar. 2020.

RECEITA FEDERAL (RFB). MINISTÉRIO DA ECONOMIA. 1968 a 1981: começa a Era da Secretaria da Receita Federal. s.d. <https://receita.economia.gov.br/sobre/institucional/memoria/imposto-de-renda/historia/1968-a-1981-comeca-a-era-da-secretaria-da-receita-federal>. Acesso em: 23 nov. 2019.

THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM. Oldest written document ever found in Jerusalem discovered. *ScienceDaily*, 12 July 2010. Disponível em: <www.sciencedaily.com/releases/2010/07/100712102816.htm>. Aceso em: 11 mar. 2021.

TRIBUNAL SUPERIOR ELEITORAL (TSE). Assembleia Constituinte de 1946. s.d. Disponível em: <https://www.tse.jus.br/jurisprudencia/julgados-historicos/assembleia-constituinte-1946>. Aceso em: 28 abr. 2020.

IMAGENS

Código de barras EAN-13. In: MUNDO DO CÓDIGO DE BARRAS. Como funciona o código de barras. Disponível em: <https://www.mundodocodigodebarras.com.br/como-funciona-o-codigo-de-barras>. Acesso em: 05 jan. 2020.

Código de barras EAN-13. In: MUNDO DO CÓDIGO DE BARRAS. Como funciona o código de barras GS1 GTIN 13. Disponível em: <https://www.mundodocodigodebarras.com.br/como-funciona-o-codigo-de-barras>. Acesso em: 05 jan. 2020.

Código de barras explicado. In: CSJ – OITAVO. Mundo tecnológico: a matemática dos códigos de barras. Disponível em: <http://csj-oitavo.blogspot.com/2012/02/mundo-tecnologico-matematica-dos.html>. Acesso em: 22 ago. 2019.

Título de eleitor de Getúlio Vargas, emitido em 18 de janeiro de 1933. In: CENTRO DE PESQUISA E DOCUMENTAÇÃO DE HISTÓRIA CONTEMPORÂNEA DO BRASIL. A Era Vargas: dos anos 20 a 1945. Disponível em: <https://cpdoc.fgv.br/producao/dossies/AEraVargas1/anos30-37/RevConstitucionalista32/CodigoEleitoral>. Acesso em: 28 dez. 2020.

Título eleitoral atual. In: METRÓPOLES. TSE lança título de eleitor digital. 2017. Disponível em: <https://www.metropoles.com/brasil/eleicoes-2018/tse-lanca-titulo-de-eleitor-digital>. Acesso em: 24 jun. 2019.

BIBLIOGRAFIA

ALCÂNTARA NETO, P. de. *História das comunicações e das telecomunicações*. 2014. Disponível em: <http://files.sistele7.webnode.com/200000023-f0817f2712/Historia%20das%20comunicaes%20e%20das%20telecomunicaes_UPE.pdf>. Acesso em: 15 fev. 2019.

AMERICAN STANDARDS ASSOCIATION (ASA). *American Standard Code for Information Interchange*. Washington: ASA, 1963. Disponível em: <https://web.archive.org/web/20160617012149/http://worldpowersystems.com/J/codes/X3.4-1963>. Acesso em: 27 fev. 2021.

ANGELO, C. Chineses encontram escrita mais antiga do mundo, com 9.000 anos. *Folha de S. Paulo*, 18 abr. 2003

BAHIA, F. Um primeiro curso sobre códigos corretores de erros. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, I. 11-13 nov. 2010, São João del-Rei. *Anais*... São João del-Rei: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, 2010, p. 149-169.

BASSANEZZI, R. C. Modelagem matemática: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. *Biomatemática*, v. IX, p. 9-22, 1999.

BERTONE, A. M. A. *Introdução à teoria dos números*. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2014

BESSA, K. P. *Dificuldades de aprendizagem em Matemática na percepção de professores e alunos do ensino fundamental*. 2007. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2007.

BORUCHOVITCH, E. Avaliação psicoeducacional: desenvolvimento de instrumentos à luz da Psicologia Cognitiva baseada na teoria do processamento da informação. *Avaliação Psicológica*, v. 5, n. 2, p. 145-152, 2006.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Introdução. Brasília: MEC; SEF, 1998.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC; SEF, 2001.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. *Quadrante Matemática*: 2º ano. São Paulo: SM, 2016.

CODO, W. *et al.* (Coord.). *Educação*: carinho e trabalho. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

COSTA, F. R. A.; VELOSO, M. O. *Sistemas de Identificação Modular: uma aplicação no ensino fundamental*. 2014. 22 f. Monografia (Especialização em Auditoria em Saúde) – Centro de Pós-Graduação, Faculdades Integradas São Pedro, Vitória, 2014.

COSTA, F. R. A.; VELOSO, M. O. Sistemas de identificação modular: uma aplicação no ensino Fundamental. *Revista Ciências Exatas e Naturais*, v. 19, n. 2, p. 248-265, 2017.

D`AMBRÓSIO, U. História da Matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950. *Saber y Tiempo*, v. 2, n. 8, p. 7-37, 1999.

DANTE, L. R. *Matemática*. São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, L. R. *Matemática*. Volume único: livro do professor. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, L. R. *Matemática*: contexto & aplicações. São Paulo: Ática, 2000, v.3.

DÍAZ BORDENAVE, J. E. *O que é comunicação*. São Paulo: Brasiliense, 1982.

DRUCK, S. O drama do ensino da matemática. *Folha Online*, São Paulo, 25 mar. 2003. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtml>. Acesso em: 20 mar. 2021.

DUARTE, N. O compromisso político do educador no ensino de matemática. *Revista da Associação Nacional de Educação*, v. 9, p. 51-54, 1985.

FARIA, L. H. L.; GIULIANI, A. C.; PIZZINATTO, N. K.; PIZZINATTO, A. K. A aplicabilidade do modelo estendido ao consumo da teoria unificada da aceitação e uso de tecnologia (UTAUT2) no Brasil: uma avaliação do modelo a partir de usuários de Internet em smartphones. *Revista de Administração da UFSM*, v. 7, n. 2, p. 332-348, 2014.

FEBVRE, L.; MARTIN, H.-J. *The coming of the book*: the impact of printing 1450–1800. London: Verso, 1997.

FERNANDES, M. F. de O.; LUNAZZI, J. J.; FRANCO, G. *Comunicação óptica por Morse*. 2011. 33 p. Relatório final de atividades (Tópicos em Ensino de Física I) – Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011. Disponível em: <https://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F609_2011_sem1/MagdaF-Lunazzi_F609_RF2.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2020.

FERREIRA, M. R. *A evolução do sistema eleitoral brasileiro*. Brasília: Senado Federal, 2001.

FINI, M. I. Controle dos Códigos de Identificação. *Revista do Professor – Atualidades*, n. 2, p. 70-75, 2009.

FRANCISCO, W. de C. e. Código Morse. *Brasil Escola*. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/codigo-morse.htm>. Acesso em: 26 fev. 2019.

GATTI, B. A. Formação de professores no Brasil: características e problemas. *Educação e Sociedade*, v. 31, n. 113, p. 1355-1379, 2010.

GIL, A. C. *Gestão de pessoas*: enfoque nos papéis profissionais. São Paulo: Atlas, 2001.

GONICK, L. *Introdução ilustrada à Computação*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1984.

GONTIJO, S. *O livro de ouro da comunicação.* São Paulo: Ediouro, 2004.

HAMMING, R. W. Error detecting and error correcting codes. *Bell System Technical Journal*, v. 29, n. 2, p. 147-160, 1950.

HAMMING, R. W. Interview. February 3-4, 1977.

HAWKINS, T. W. Another look at Cayley and the theory of matrices. *Archives Internationales d'Historie des Sciences*, v. 26, n. 100, p. 82-112, 1977a.

HAWKINS, T. W. Cauchy and spectral theory of matrices. *History Mathematica*, v. 2, p. 1-29, 1975.

HAWKINS, T. W. Weierstrass and the theory of matrices. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 17, p. 119-163, 1977b.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. *Códigos corretores de erros*. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

INTERNATIONAL ISBN AGENCY. *The International Standard Book Number System (ISBN)*. London: International ISBN Agency, 2011.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias*: o novo ritmo da informação. 3. ed. São Paulo: Papirus, 2007.

KOCHHANN, R.; FREIRE, M.; LOPEZ, D. B. Rádio: convergência tecnológica e a evolução dos dispositivos. In: ENCONTRO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MÍDIA, 8. Guarapuava, 28 a 30 abr. 2011. *Anais*... Guarapuava: Unicentro, 2011, p. 1-12.

LORENZATO, S. *Para aprender matemática*. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

LUCKESI, C. C. *A avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MACHADO, I. A. *Algumas dificuldades do ensino da matemática na 7ª série do ensino fundamental*. 2005. 12 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Católica de Brasília, Departamento de Matemática, Brasília, 2005.

MARQUES DE MELO, J. *Comunicação social*: teoria e pesquisa. 4. ed. Petrópolis: Vozes, 1975.

MARTINS, J. S. *Situações práticas de ensino e aprendizagem significativa*. Campinas: Autores Associados, 2009.

MENEGHESSO, C. *Códigos corretores de erros*. 2012. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, Departamento de Matemática, São Carlos, 2012.

MILIES, F. C. P. A matemática dos códigos de barras: detectando erros. *Revista do Professor de Matemática*, v. 68, p. 38-42, 2009.

MILLER, G. The Smartphone Psychology Manifesto. *Perspectives on psychological science*, v. 7, p. 221-237, 2012.

MORAN, J. Novos caminhos do ensino a distância. *Informe CEAD*, ano 1, n.5, p. 1-3, 1994.

MOREIRA, J. A.; SCHLEMMER, E. Por um novo conceito e paradigma de educação digital online. *Revista UFG*, v. 20, p. 1-35, 2020.

MORIN, E. *A cabeça bem-feita*: repensar a reforma, reformar o pensamento. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2004.

MOTTA, V. T. *Bioestatística*. 2. ed. Caxias do Sul: EDUCS, 2006.

MOTTA, V. T.; OLIVEIRA FILHO, P. F. de. *SPSS*: análise de dados estatísticos. Rio de Janeiro: Medbook, 2009.

MOURA, M. O de. *O educador matemático na coletividade de formação:* uma experiência com a escola pública. 2000. Tese (Livre Docência) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

MURDOCCA, M. J.; HEURING, V. P. *Introdução à arquitetura de computadores*. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

NASCIMENTO, B. A. R.; BOTTO FILHO, M.; GOMES, V. G.; MENEZES, H. K. A.; SILVA, A. N. M. Breve histórico do Cadastro de pessoa Física – CPF e sua relação com a teoria dos números. *Ciências exatas e tecnológicas*, v. 2, n. 3, p. 125-135, 2015.

NEVES, E. R. C. Escala de avaliação da motivação para aprender para alunos do ensino fundamental. *Psicologia: reflexão e crítica*, v. 20, n. 3, p. 406-413, 2007.

NÓBREGA, C. B. da. *História do imposto de renda no Brasil*: um enfoque da pessoa física (1922-2013). Brasília: Secretaria da Receita Federal do Brasil, 2014.

PEREIRA, V. C.; SANTIAGO JUNIOR, V. A.; MANEA, S. SEU mitigation for SRAM FPGAs: a comparison via probabilistic model checking. In: WORKSHOP DE TESTES E TOLERÂNCIA A FALHAS, XVIII., 15-19 mai. 201, Belém. *Anais*... Porto Alegre: SBC, 2017, p. 56-69.

PERLES, J. B. Comunicação: conceitos, fundamentos e história. *Biblioteca on-line de ciências da comunicação*, s.n., p. 1-17, 2007.

PICADO, J. A Álgebra dos Sistemas de Identificação: da aritmética modular aos grupos diedrais. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, v. 44, p. 39-73, 2001.

ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. *Matemática e atualidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. v. 1.

SAMPAIO, A. A.; STOBÄUS, C. D. Elementos de mal-estar docente na formação acadêmica e início da docência: potenciais fontes, consequências e estratégias de enfrentamento. *Linguagens, Educação e Sociedade*, ano 22, n. 36, p. 240-263, 2017.

SANCHES, M. H. F. *Efeitos de uma estratégia diferenciada dos conceitos de matrizes*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2002.

SCHUBRING, G. From pebbles to digital signs: the joint origin of signs for numbers and for scripture, their intercultural standardization and their renewed conjunction in the digital era. In: BŸHLMANN, V.; HOVESTADT, L. (Ed.). *Symbolizing existence*: Metalithicum III. Basel: Birkhäuser, 2016, p. 114-126.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO (SEDU). *Currículo básico escola estadual*: guia de implementação. Vitória: SEDU, 2009.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO (SEDU). *Guia de orientação para intervenção pedagógica*. Ensino médio: ano 11. Vitória: SEDU, 2010.

SILVA JÚNIOR, S. D.; COSTA, F. J. Mensuração e Escalas de verificação: uma Análise Comparativa das Escalas de Likert e Phrase Completion. *Revista Brasileira de Pesquisas de Marketing, Opinião e Mídia*, v. 15, p. 1-16, 2014.

SNODGRASS, R. T.; CAMP, V. F. *Radio Receiving for beginners*. London; New York: Macmillan & Co, 1922.

SORATTO, I.; OLIVIER-HECKLER, C. Trabalho: atividade humana por excelência. In: CODO, W. *et al.* (Coord.). *Educação*: carinho e trabalho. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2002, p. 89-121.

SOUZA, N. P. *Uma análise dos esquemas de dígitos verificadores usados no Brasil*. 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Computacionais) – Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: Pearson, 1995.

TAKAHASHI, C. R. dos S. *A matemática dos códigos de barras*. 2013. 66 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Rio Claro, 2013.

TAKAHASHI, F. Fundeb falha ao não definir metas, afirma especialista. *Folha de São Paulo*, 11 dez. 2006. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/fsp/cotidian/ff1112200611.htm>. Acesso em: 28 out. 2020.

THOMPSON, T. M. *From error-correcting codes through sphere packings to simple groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

VASCONCELLOS, C. S. *Construção do conhecimento em sala de aula*. 11. ed. São Paulo: Libertad, 2000.

ZABALA, A. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ANEXOS

Anexo 1 – Escala de Avaliação da Motivação

ESCALA DE AVALIAÇÃO DA MOTIVAÇÃO PARA APRENDER DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO
Não existe resposta certa ou errada, apenas responda com sinceridade marcando um x entre os parênteses.
Eu estudo porque estudar é importante para mim ( ) nunca ( ) às vezes ( ) sempre **Eu estudo por medo dos meus pais brigarem comigo** ( ) nunca ( ) às vezes ( ) sempre **Eu tenho vontade de conhecer e aprender assuntos novos** ( ) nunca ( ) às vezes ( ) sempre **Eu faço os deveres de casa por obrigação** ( ) nunca ( ) às vezes ( ) sempre **Eu gosto de estudar assuntos desafiantes** ( ) nunca ( ) às vezes ( ) sempre

Eu gosto de estudar assuntos difíceis

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo porque meus pais prometem me dar presentes, se as minhas notas forem boas

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu me esforço bastante nos trabalhos de casa, mesmo sabendo que não vão valer como nota

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo porque minha professora acha importante

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo mesmo sem os meus pais pedirem

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo porque fico preocupado(a) que as pessoas não me achem inteligente

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu me esforço bastante nos trabalhos, em sala de aula, mesmo sabendo que não vai valer como nota

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo por medo dos meus pais me colocarem de castigo

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo porque estudar me dá prazer e alegria

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu só estudo para não me sair mal na escola

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu fico tentando resolver uma tarefa, mesmo quando ela é difícil para mim

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo para os meus pais deixarem eu ir brincar com os meus amigos ou fazer as coisas que eu gosto

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu prefiro aprender, na escola, assuntos que aumentem minhas habilidades ou meus conhecimentos

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu só estudo para agradar meus professores

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu faço minhas lições de casa, mesmo que meus pais não me peçam

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo porque gosto de ganhar novos conhecimentos

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo apenas aquilo que a professora avisa que vai cair na prova

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu gosto de estudar

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu só faço meus deveres de casa porque meus pais acham importante

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu procuro saber mais sobre os assuntos que gosto, mesmo sem minha professora pedir

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu só estudo porque quero tirar notas altas

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu gosto de ir para a escola porque aprendo assuntos interessantes lá

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu só estudo porque meus pais mandam

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo porque quero aprender cada vez mais

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu estudo por obrigação

( ) nunca

( ) às vezes

( ) sempre

Eu fico interessado (a) quando a professora começa uma lição nova
( ) nunca
( ) às vezes
( ) sempre

Fonte: Adaptado de Boruchovitch (2006) e Neves (2007).