Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

O Método de Polya Aplicado na Resolução de Problemas de Probabilidade do Ensino Básico

Johnny Marques de Souza

Teresina

2021

Johnny Marques de Souza

O Método de Polya Aplicado na Resolução de Problemas de Probabilidade do Ensino Básico

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI. Como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Natã Firmino Santana Rocha

Teresina

2021

JOHNNY MARQUES DE SOUZA

O MÉTODO DE POLYA APLICADO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROBABILIDADE DO ENSINO BÁSICO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Natã Firmino Santana Rocha

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha - Presidente e examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Pedro Antonio Soares Júnior

Prof. Dr. Pedro Antônio Soares Júnior - Examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Diego Cardoso dos Santos

Prof. Me. Diego Cardoso dos Santos - Examinador Externo
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

TERESINA
Fevereiro/2021

S719m Souza, Johnny Marques de.
O método de Polya aplicado na resolução de problemas de probabilidade do ensino básico / Johnny Marques de Souza. - 2021.
50 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática, 2021.
"Área de Concentração: Matemática."
"Orientador(a): Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha."

1. Resolução de problemas. 2. Probabilidade. 3. Métodos de Polya. I. Título.

CDD: 519.2

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz Oliveira (Bibliotecária) CRB 3/1067

Johnny Marques de Souza graduou-se em licenciatura plena em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí (IFPI) no ano de 2016. Atualmente, é professor da rede municipal de Teresina-PI.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a deus, que me deu a força e coragem necessárias durante todas as etapas que tive que percorrer para concluir meu curso e este trabalho.

Agradeço a meus pais, pessoas humildes, que sempre me incentivaram e que com muito esforço tornaram possível chegar onde estou hoje.

Agradeço a meu orientador pelo apoio e tempo disponibilizado para conclusão deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de curso, em especial ao Elienay, Erimar e Thigo, pelo apoio e companheirismo demostrado desde início desta nossa caminhada, que chegou ao fim, mas nossa amizade ainda vai longe.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para tornar possível esta minha conquista. OBRIGADO!

“Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema”

George Polya

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de divulgar o método de Polya na resolução de problemas de probabilidade voltada para o ensino básico, subsidiada pelas ideias e as 4 etapas estabelecidas por Polya para resolução de problemas. Para alcançar-se este objetivo, no capítulo 2, fazemos um estudo teórico sobre resolução de problemas, onde se é discutido o que é um problema, a diferença entre exercício e problema matemático, tipos de problemas, as contribuições da resolução de problemas para o ensino-aprendizagem dos alunos, e as 4 etapas para resolução de problemas propostas por Polya, quais sejam: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer um retrospecto ou verificação da solução. No capítulo 3, apresentamos um curso introdutório ao estudo de probabilidade, abordando conceitos e propriedades de probabilidade contemplados no ensino básico, como a ideia de experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos, definição clássica e axiomática de probabilidade, propriedades da probabilidade, probabilidade condicional, probabilidades totais e de Bayer e independência de eventos. No capítulo 4 abordamos vários problemas, a fim de, por meio destes, mostrar uma proposta para resolução de problemas de probabilidade.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Probabilidade. Métodos de Polya.

ABSTRACT

This work has the objective of publicizing Polya's method in solving probability problems focused on basic education, subsidized by the ideas and the 4 steps established by Polya for problem solving. To achieve this objective, in the chapter 2, a theoretical study on problem solving is done, where it is discussed what it is a problem , the diference between exercise and mathematical problem, types of problems, the contributions of problem solving to teaching learning of students, and the 4 problem solving steps proposed by Polya, these being: understanding the problem, drawing up a plan, executing the plan and doing a retrospective or verifcation of the solution. In the chapter 3, an introductory course to the study of probability is made, covering concepts and properties of probability in basic education, such as the idea of random experiments, sample space and events, classic and axiomatic definition of probability, properties of probability, conditional probability, Total and Bayer odds and event independence. In the chapter 4 a lot of problems are addressed, in order to formulate a proposal for solving probability problems.

Keywords: Problem Solving. Probability. Polya's Methods.

Sumário

1 Introdução

É notório que a resolução de problemas é algo comum nas aulas de matemática, desde o início da vida escolar, não importando o tema proposto pelo professor a resolução de problemas está sempre presente.

Em minha experiência como professor, percebi, ao trabalhar os conteúdos de probabilidade, que existe uma grande dificuldade por parte dos alunos neste tema, principalmente, no que diz respeito à resolução de problemas. A partir desta observação me motivei a investigar meios que possam contribuir para a solução deste problema. Para isto, resolvi elencar algumas perguntas norteadoras para dar início a minha pesquisa. Por que resolver problemas? Qual o papel da resolução de problemas nas aulas de matemática? Existem métodos ou técnicas que podem auxiliar na resolução de problemas?

A partir destas perguntas moldou-se este trabalho, que se propõe em fazer uma abordagem teórica sobre a resolução de problemas e probabilidade, e divulgar o método de polya na resolução de problemas de probabilidade voltada para o ensino básico, subsidiadas pelas ideias de alguns autores e as 4 etapas estabelecidas por Polya para resolução de problemas.

No capítulo 2 deste trabalho será feito um estudo teórico sobre resolução de problemas à luz de alguns autores, focando principalmente, nas ideias de Polya e Dante, onde é discutido o que é problema, a diferença entre exercício e problema matemático, tipos de problemas, as contribuições da resolução de problemas para o ensino-aprendizagem dos alunos, e principalmente, as 4 etapas para resolução de problemas propostas por Polya, sendo estas: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer um retrospecto ou verificação da solução.

No capítulo 3 é feito um curso introdutório ao estudo de probabilidade, abordando conceitos e propriedades de probabilidade contemplados no ensino básico, como a ideia de experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos, definição clássica e axiomática de probabilidade, propriedades da probabilidade, probabilidade condicional, probabilidades totais e de Bayer e independência de eventos. Todos direcionados para dar embasamento à resolução de problemas no capítulo 4.

No capítulo 4 são abordados vários problemas de concursos, vestibulares e livros didáticos, resolvidos detalhadamente à luz do que foi trabalhado nos capítulos 2 e 3, a fim de, por meio destes, demonstrar-se as contribuções do Método de Polya para resolução de problemas de probabilidade do ensino básico.

2 Resolução de Problemas e o método de Polya

2.1 Resolução de Problemas

Os problemas são assuntos corriqueiros nas aulas de matemática, a todo momento tem-se contato com eles, desde os anos iniciais até os anos finais. Mas para melhor entender este conteúdo, questiona-se quais são os objetivos da presença desses problemas nas aulas de matemática? Eles estão contribuindo para a aprendizagem do aluno, ou servem apenas para avaliar a aprendizagem? Se estão contribuindo para aprendizagem do aluno, de que forma fazem isso?

Como foi supracitado acima, ao pensar na resolução de problemas, pode observar-se que várias questões podem ser levantadas a partir deste assunto, principalmente, no que diz respeito à utilização dos problemas no ensino da matemática. Logo, pensando nisso, nesta seção, busca-se discutir as potencialidades da resolução de problemas no ensino de matemática à luz de autores como Polya e Dante.

Para iniciar esta discussão, é importante primeiro definir o que é um problema e o que é um problema matemático, bem como citar as especificidades de cada um, apontando as principais diferenças existentes. Então, segundo Dante (1989, p. 9) [7] “um problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la”. Continuando o raciocínio do autor “um problema matemático é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la.”(DANTE, 1989, p. 10) [7] Os Parâmetro Curriculares Nacionais-PCN definem um problema matemático como “uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la".(BRASIL, 2000, p. 41) [2].

A partir das definições acima pode ser feita uma diferenciação entre problemas matemáticos de exercícios de matemática, enquanto um problema exige a construção de uma solução através de saberes matemáticos, o exercício restringe-se à pratica de algum algoritmo ou até mesmo um procedimento. Daí para que uma determinada situação seja considerada um problema, deverá implicar em um processo de reflexão, de tomada de decisões quanto ao caminho a ser utilizado para sua resolução, onde automatismos não permitam a sua solução imediatamente. Aqui é importante destacar que o professor deve sempre atentar-se para a metodologia correta dependendo do que se quer trabalhar, se um exercício ou um problema.

Segundo Dante (1999) [9], os problemas podem ser classificados de 6 formas diferentes: exercícios de reconhecimento: seu objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma definição ou uma propriedade. Exercícios de algoritmo: são aqueles que podem ser resolvidos passo a passo. Geralmente pedem a execução de algoritmos da adição, subtração, divisão ou multiplicação; Problemas padrão: sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige qualquer estratégia. Problemas processos ou heurísticos: são problemas cuja solução envolve operações que não estão contidas no enunciado exigindo um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levar à solução. Problemas de aplicação: são aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da Matemática para resolvê-los, sendo chamados de situações-problemas. Problemas de quebra cabeça: são problemas que envolvem e desafiam grande parte dos alunos. Constituem a chamada matemática recreativa. Dependem, quase sempre de truques para resolvê-los.

Levando em consideração as diferenças já mencionadas, no que se refere aos conceitos de problema e problema matemático, pode perceber-se que, o problema matemático necessita da matemática para ser resolvido ou mesmo para ser pensado e solucionado.

Sobre a resolução de problema no ensino da matemática Dante (1999) [9] nos diz que:

> "[...] embora tão valorizada, a resolução de problemas é um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados na sala de aula. É muito comum os alunos saberem efetuar os algoritmos e não conseguirem resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos. Isso se deve à maneira com que os problemas matemáticos são trabalhados na sala de aula e apresentados nos livros didáticos, muitas vezes apenas como exercícios de fixação dos conteúdos trabalhados". (DANTE, 1999, p. 8) [9]

Baseando-se no que é citado por Dante no parágrafo anterior, por mais que a resolução de problemas tenha um papel importante para o ensino, ainda é uma das competências mais difíceis de serem abordadas pelo educador, evidenciando que o educando ainda tem muita dificuldade quanto à resolução destes. O que pode ser justificado pelo fato dos problemas serem trabalhados de forma errônea, sendo utilizado somente como fixação de conteúdo, desconsiderando todas as potencialidades da resolução de problemas na construção da aprendizagem do aluno.

> “A resolução de problemas na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como de ampliar a visão que tem dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança". (BRASIL, 2001, p. 40) [4].

Nos conceitos citados acima, pode observar-se que as possibilidades da resolução de problemas são muito maiores do que a de aplicação de exercícios, porém, no decorrer da história do ensino de matemática se observa que estas possibilidades pouco têm sido aproveitadas, como podemos ver quando os PCNs, ao fazerem um retrospecto sobre o ensino de matemática, afirmam que:

> “as orientações sobre a abordagem de conceitos, ideias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda são bastante desconhecidas; outras vezes, a resolução de problemas tem sido incorporada como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução conhecidas pelos alunos". (BRASIL, 1997, p. 22) [1].

Pode se ver ainda que havia um distanciamento da resolução de problemas do ensino de matemática, fazendo com que os alunos ainda tenham dificuldade na resolução dos problemas, e ao analisar as salas de aula de hoje pode se ver que isso não mudou. Porém, quais são os objetivos de trabalhar-se a resolução de problemas no ensino de matemática? Quais são seus benefícios?

Segundo Dante (1999) [9] os objetivos da resolução de problemas são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno oportunidade de envolver-se com as aplicações da Matemática;
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base de Matemática às pessoas.

É claro que para que tais objetivos sejam alcançados é necessária uma maior aptidão do professor, tanto no que diz respeito ao desenvolvimento da aula como na escolha dos problemas adequados que serão apresentados para os alunos. Fazendo com que estes alunos não aprendam só a efetuar algoritmos, mas que aprendam de fato, a resolver problemas.

É necessário reconhecer qual é a melhor forma de propor cada problema, precisando que ele seja real, desafiador e interessante para o aluno, devendo buscar coisas novas, não constituindo apenas na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas, e é claro, possuir um nível adequado de dificuldade.

Ainda de acordo com o autor, na elaboração de um problema deve sempre contornar fatores que dificultam desnecessariamente o problema, como por exemplo: a linguagem usada deve ser acessível ao aluno, as estruturas das frases devem ser simples e não devem ser longas, o vocabulário matemático usado no problema deve ser explicitado pelo professor, o tamanho e a complexidade dos números usados devem ser cuidadosamente pensados e além disso, o problema deve ser apresentado de forma que o aluno se sinta motivado a respondê-lo.

Como se pode ver, há inúmeros aspectos a serem observados ao trabalhar-se um problema, todos estes, é claro, para alcançar-se todas as suas potencialidades no aspecto do ensino-aprendizagem.

Logo, a partir da leitura e da interpretação dos problemas, torna-se possível o envolvimento do aluno em buscar estratégias de resolução de problemas, na persistência em encontrar uma solução, na ampliação e na ressignificação de conceitos e ideias que ele já conhece. Por este motivo, vários autores evidenciaram a importância do uso desta metodologia nas aulas de matemática. Alves (2004, apud, ONUCHIC, 2007) [11] coloca como um dos objetivos da educação básica, desenvolver no aluno a capacidade de solucionar problemas.

Segundo Onuchic (1999, apud, ONUCHIC, 2007) [11], "o problema não deve ser tratado como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza interna da Matemática, assim como seus usos e aplicações. Ele define como problema tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver."

Diante de um problema de extrema relevância, o levantamento de hipóteses, a testagem dessas hipóteses e a análise dos resultados obtidos, que são procedimentos que devem ser enfatizados pelos professores. Só assim é possível garantir o desenvolvimento da autonomia frente às situações com as quais eles terão de lidar dentro e fora da escola. Conseguindo assim, resolver a maioria dos problemas.

No que se refere ao ensinar a resolver problemas, Pozo acrescenta que não é suficiente "[...] dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas também em criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta" (POZO, 1998, p. 14) [13].

Assim, não basta apenas ensinar a resolver problemas, mas deve-se incentivar que o aluno também proponha situações-problema, partindo da realidade que o cerca, que mereçam dedicação e estudo. Além de incentivar o hábito pela problematização e a busca de respostas de suas próprias indagações e questionamentos, como forma de aprender, tentando desenvolver um raciocínio lógico, ao invés de só ensiná-los a resolver problemas.

2.2 Método de Polya

O Método de Polya apresentado no livro a arte de resolver problemas, consiste na realização de algumas etapas e questionamentos na resolução de um problema, a fim de auxiliar na compreensão, resolução e reflexão sobre o mesmo. Para assim não só resolver o problema, mas também para aprender com ele. O Método de Polya (1978) [12] é baseado na execução das seguintes etapas:

1- Compreender o problema:

- O que se pede no problema?
- Quais são os dados e as condições do problema?
- É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
- É possível estimar a resposta?

2- Elaborar um plano:

- Qual é seu plano para resolver o problema?
- Que estratégia você tentará desenvolver?
- Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?
- Tente organizar os dados em tabelas ou gráficos.
- Tente resolver o problema por partes

3- Executar o plano:

- Execute o plano elaborado, verificando passo a passo;
- Efetue todos os cálculos indicados no plano;
- Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

4- Fazer o retrospecto ou verificação

- Examine se a solução obtida está correta.
- Existe outra maneira de resolver o problema?
- É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

No capítulo 4 será feita a aplicação do Método de Polya na resolução de problemas de probabilidade, mas antes, será realizado um estudo teórico sobre probabilidade no próximo capítulo para subsidiar esta aplicação e a resolução de problemas de probabilidade.

Diante do exposto, nota-se a importância do professor conhecer todas as potencialidades da resolução de problemas como parte do ensino da matemática, onde a proposta é de um trabalho centrado no aluno, para que ele possa desenvolver sua aprendizagem e construir seu conhecimento, cabendo ao professor o papel de mediador nessa construção.

3 Probabilidade

O presente capítulo se destina a uma apresentação introdutória do conteúdo de probabilidade, com o intuito de servir de base para os problemas matemáticos que serão apresentados posteriormente nesse trabalho.

3.1 Espaço Amostral e Eventos

Nesta seção iremos abordar os conceitos relacionados à definição de espaço amostral e apresentar alguns exemplos e resultados. A primeira dessas definições é a de experimento aleatório, fundamental na construção de um espaço amostral.

Definição 3.1. Experimentos que, ao serem repetidos nas mesmas condições, não produzem o mesmo resultado são denominados experimentos aleatórios.

Dessa forma, segue abaixo alguns exemplos simples e cotidianos de experimentos aleatórios.

Exemplo 3.2. O lançamento de uma moeda, o resultado pode variar, no caso, cara ou coroa.

Exemplo 3.3. Escolher uma carta em um truque de mágica, neste caso, temos vários resultados possíveis.

Exemplo 3.4. Retirar um lote de peças num processo de produção, e observar que o número de peças defeituosas varia de lote para lote.

Baseado no estudo de um experimento aleatório (ver Definição 3.1), apresentamos abaixo a definição do espaço amostral desse experimento.

Definição 3.5. Denominaremos um espaço amostral associado a um experimento o conjunto de seus resultados possíveis.

A partir deste momento vamos representar o espaço amostral como sendo o conjunto S, onde cada elemento será denominado de evento simples. Segue alguns exemplos de espaços amostrais.

Exemplo 3.6. Ao lançarmos uma moeda nossas possibilidades são: cara ou coroa. Logo, o espaço amostral é o conjunto $S = \{\text{cara, coroa}\}$.

Exemplo 3.7. No lançamento de um dado pode obter-se os seguintes resultados: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Logo, o espaço amostral é o conjunto $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

Exemplo 3.8. Um casal ter três filhos, sendo meninos representados por M e meninas sendo representadas por m, o espaço amostral será o conjunto

$$S = \{MMM, MMm, MmM, Mmm, mMM, mMm, mmM, mmm\}.$$

Agora, destacamos um importante conceito relacionado à definição 3.5.

Definição 3.9. Denominaremos de evento a todo resultado ou subconjunto de um experimento.

O evento de um experimento aleatório será representado por um subconjunto A do seu espaço amostral S.

Exemplo 3.10. No Exemplo 3.8 considerando o evento A: o casal ter exatamente duas meninas. Temos:

$$A = \{Mmm, mMm, mmM\}.$$

Neste caso, dizemos que o evento A ocorre quando acontecer qualquer um dos eventos simples Mmm, mMm, mmM.

As próximas definições desta seção são sobre as operações que podem ocorrer a partir da relação entre dois ou mais eventos.

Definição 3.11. A reunião de dois eventos A e B, denotada $A \cup B$, é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorre.

Definição 3.12. A interseção de dois eventos A e B, denotada $A \cap B$, é o evento que ocorre se ambos ocorrerem.

Definição 3.13. O complementar do evento A, denotado A^c, é o evento que ocorre quando A não ocorre.

Exemplo 3.14. Um dado de seis lados numerado de 1 a 6 é lançado. Sejam A e B os seguintes eventos:

- A: o resultado é par;
- B: o resultado é maior que 4.

O espaço amostral desse experimento é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. São exemplos de eventos desse espaço amostral os seguintes conjuntos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$, $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$, $A^c = \{1, 3, 5, \}$

Definição 3.15. Dizemos que o evento A implica o evento B, que denotamos $A \subset B$, se para todo $x \in A$ tivermos $x \in B$.

Definição 3.16. Os eventos A e B são iguais se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Definição 3.17. Dizemos que dois eventos A e B são mutuamente exclusivos quando eles não podem ocorrer simultaneamente, neste caso $A \cap B = \emptyset$.

Vejamos abaixo algumas propriedades das operações entre eventos.

Proposição 3.18. *Sejam A, B e C eventos do espaço amostral S, temos:*

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar o item **a)**. Se $m \in (A \cup B) \cap C$, então $m \in (A \cup B)$ e $m \in C$. Como $m \in (A \cup B)$, temos que $m \in A$ ou $m \in B$. Já que $m \in C$ temos então duas possibilidades $m \in A$ e $m \in C$ ou $m \in B$ e $m \in C$, ou seja, $m \in (A \cap C)$ ou $m \in (B \cap C)$. Logo $m \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Dessa forma, pela definição 3.15, inferimos que

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C). \tag{1}$$

Por outro lado, se $m \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, então $m \in (A \cap C)$ ou $m \in (B \cap C)$. Daí, $m \in A$ e $m \in C$ ou $m \in B$ e $m \in C$. Consequentemente, podemos afirmar que $m \in C$ e $m \in A$ ou $m \in B$. Por fim, como $m \in C$ e $m \in (A \cup B)$, então $m \in (A \cup B) \cap C$. Logo, pela definição 3.15, inferimos que

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C. \tag{2}$$

Pela definição 3.16, por (1) e (2) concluímos que $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

Agora, provaremos **b)**. Se $m \in (A \cap B) \cup C$, então $m \in (A \cap B)$ ou $m \in C$. Logo, temos que $m \in A$ e $m \in B$ ou $m \in C$. Dessa forma, existem dois casos possíveis:

1. $m \in A$ ou $m \in C$;

2. $m \in B$ ou $m \in C$.

Ou seja, $m \in (A \cup C)$ e $m \in (B \cup C)$. Portanto, $m \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Com isso, pela Definição 3.15 chegamos à inclusão $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Repetindo os mesmos argumentos na ordem inversa, podemos garantir a validade da inclusão contrária. Portanto, pela Definição 3.16, a prova deste item está completa.

A demonstração do item **c)** é dada a seguir. Se $m \in (A \cup B)^c$, então $m \notin (A \cup B)$. Isto é, $m \notin A$ e $m \notin B$. Daí, se $m \notin A$ podemos afirmar que $m \in A^c$ e se $m \notin B$ podemos afirmar que $m \in B^c$. Logo, podemos concluir que $m \in (A^c \cap B^c)$. Com isso, mostramos que $(A \cup B)^c \subset (A^c \cap B^c)$ (ver Definição 3.15). O argumento recíproco continua válido. Dessa forma, a definição 3.16 garante a igualdade dos eventos.

Por fim, vamos mostrar o item **d)**. Se $m \in (A \cap B)^c$, então $m \notin (A \cap B)$. Ou seja, $m \notin A$ ou $m \notin B$. Daí, se $m \notin A$ podemos afirmar que $m \in A^c$ ou se $m \notin B$

podemos afirmar que $m \in B^c$. Logo, podemos concluir que $m \in (A^c \cup B^c)$. Sendo válido o argumento recíproco fica concluída a demonstração desse item.

$\square$

Por fim, segue abaixo as definições de reunião e interseção enumerável de eventos.

Definição 3.19. O evento $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ é o evento que ocorre quando pelo menos um dos eventos A_i ocorrem, para $i = 1, 2, ...$

Definição 3.20. O evento $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ é o evento que ocorre quando todos dos eventos A_i ocorrem, para $i = 1, 2, ...$

3.2 Definições de Probabilidade

Iniciaremos esta seção com a ideia clássica de probabilidade, que se baseou no estudo de eventos igualmente possíveis. Neste caso, intuitivamente, atribuímos a mesma chance de ocorrência a cada um dos eventos simples de um experimento.

Definição 3.21. Consideremos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja A um evento de S composto de m eventos simples. A probabilidade de A, que denotaremos $P(A)$, é definida por:

$$P(A) = \frac{m}{N}. \tag{3}$$

Exemplo 3.22. Um baralho de cartas convencional é formado por 52 cartas divididas em quatro naipes (copas, espadas, ouros e paus) sendo 13 cartas de cada naipe. Escolhendo-se ao acaso uma carta do baralho, pode-se atribuir a probabilidade de $\frac{1}{52}$ para cada evento simples deste experimento. Dito isto, o evento A: escolher uma carta de ouros tem probabilidade igual a $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Observe que na definição acima, a probabilidade relaciona para cada subconjunto de S (evento) é um valor numérico que satisfaz as propriedades contidas no seguinte resultado.

Proposição 3.23. Seja S um espaço amostral finito satisfazendo as condições da Definição 3.21 A probabilidade definida por 3 satisfaz:

i) $P(A) \geq 0$, para todo $A \subset S$;

ii) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

iii) $P(S) = 1$.

Demonstração. O item **i)** é facilmente verificado, pois $N > 0$ e $m \geq 0$. Logo, $P(A) \geq 0$.

Agora, vamos mostrar **ii)**. Supondo que A e B tenham m e n eventos simples, respectivamente. Pela Definição 3.17, se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então, eles não tem eventos simples em comum. Daí, $A \cup B$ tem $m + n$ eventos simples. Portanto, ao utilizarmos a probabilidade definida em 3, temos que

$$P(A \cup B) = \frac{m+n}{N} = \frac{m}{N} + \frac{n}{N} = P(A) + P(B).$$

A prova do item **iii)** é estabelecida da seguinte maneira: como S tem N eventos simples, temos que $P(S) = 1$.

□

Nos casos em que a definição acima se aplica, para calcular a probabilidade de um evento A será necessário contar o número de eventos simples de A e do seu espaço amostral. Para este caso teremos a Seção 3.3. Para os demais casos, utilizaremos a definição axiomática de probabilidade dada a seguir.

Definição 3.24. Probabilidade é uma função definida numa classe $\mathcal{F}$ de eventos de S que satisfaz as seguintes condições:

a) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$;

b) Se $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de eventos de $\mathcal{F}$, que são mutuamente exclusivos, então:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n);$$

c) $P(S) = 1$.

Observe que o tem **b)** substitui a propriedade **ii)** da Proposição 3.23. Além disso, esta é uma definição geral e abrange todos os problemas abordados neste trabalho.

3.3 Métodos de Contagem

Vimos na seção anterior que a definição clássica de probabilidade (ver Definição 3.21) associa a um evento A, que contém m eventos simples, a probabilidade $\frac{m}{N}$, onde N é o número de eventos simples do espaço amostral do evento A. Portanto, para calcular a probabilidade de qualquer evento que atenda os requisitos da definição 3.21 é preciso contar o número de eventos deste evento. Nesta seção iremos estudar alguns métodos que auxiliarão essa contagem.

Axioma 3.25 (Princípio Fundamental da Contagem)**.** *Considere um evento composto por n etapas sucessivas e independentes. Se a primeira etapa pode ser realizada de x maneiras* *e a segunda de y maneiras, o número total de possibilidades do evento ocorrer é o produto $x \cdot y$.*

Exemplo 3.26. Carlos pretende comprar um remédio e depois almoçar, sabendo que perto de onde ele está há três farmácias e dois restaurantes. De quantas maneiras Carlos pode comprar o remédio e almoçar nas proximidades? De 6 formas, pois sejam F_1, F_2 e F_3 as farmácias na proximidade de Carlos e R_1 e R_2 os restaurantes, as possibilidades de Carlos ir a uma farmácia e a um restaurante é: $F_1R_1, F_1R_2, F_2R_1, F_2R_2, F_3R_1$ e F_3R_2.

Definição 3.27. Uma amostra de tamanho n de um conjunto C que tem N elementos é um subconjunto de n elementos retirados de C

Podemos retirar essas amostras de um conjunto com reposição ou sem reposição. No caso da amostra ser retirada com reposição, cada elemento selecionado é reposto no conjunto antes da próxima retirada. Em amostras retiradas sem reposição, os elementos retirados não são repostos a cada retirada.

Em uma amostra seus elementos podem ser ordenados ou não ordenados.

Definição 3.28. Uma amostra é dita ordenada se os seus elementos forem ordenados, isto é, se duas amostras com os mesmos elementos, porém, em ordens distintas, forem consideradas diferentes.

Exemplo 3.29. Na votação para escolher um representante e um vice representante de uma turma com 20 alunos, o mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice representante. Note que se escolhendo uma amostra de dois alunos ela será ordenada, pois mesmo se a amostra for composta pelas mesmas pessoas uma ordem diferente gera atribuições diferentes para cada pessoa, portanto amostras diferentes.

Amostras ordenadas sem reposição são chamadas de *arranjos*. Para calcularmos o número de arranjos de um conjunto de N elementos de tamanho n segue o resultado.

Proposição 3.30. *O número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho n, de um conjunto com N elementos, que será denotado por $(N)_n$, é dado por:*

$$(N)_n = N \cdot (N-1) \cdots (N-n+1). \tag{4}$$

Demonstração. Se as amostras são retiradas sem reposição, o primeiro elemento da amostra pode ser retirado de N maneiras, o segundo elemento da amostra pode ser retirado de $(N-1)$ maneiras e assim por diante até o n-ésimo termo retirado, que poderá ser retirado de $N-(n-1)$ maneiras. Pelo princípio fundamental da contagem, teremos que o número de maneiras de retirarmos uma amostra de tamanho n é obtido através do produto desses números.

□

Exemplo 3.31. Do Exemplo 3.29 o número de maneiras que o conselho pode ser formado é igual ao número de amostra ordenadas de 20 elementos de tamanho 2. Daí, pela proposição 3.30, temos que

$$(20)_2 = 20 \cdot 19 = 380.$$

Exemplo 3.32. Um shopping possui 7 portões. O número de maneiras de uma pessoa entrar por uma porta e sair por outra diferente é igual ao número de amostras ordenadas sem repetição de tamanho 2 de um conjunto com 7 elementos. Dessa forma, aplicando a proposição 3.30, encontramos o seguinte número:

$$7_2 = 7 \cdot 6 = 42.$$

Proposição 3.33. *O número de amostras ordenadas com repetição de tamanho n, de um conjunto de N elementos é igual a*

$$N^n. \tag{5}$$

Demonstração. Se as amostras são retiradas sem reposição, o primeiro elemento da amostra pode ser retirado de N maneiras, com a reposição, o segundo elemento pode ser retirado novamente de N maneiras, e assim por diante, até o n-ésimo termo retirado, que poderá ser retirado também de N maneiras. Pelo Princípio Fundamental da Contagem (ver Axioma 3.25), teremos que o número de maneiras de retirarmos uma amostra de tamanho n é obtido através do produto desses números. Logo, teremos N^n maneiras de retirar essas amostras.

□

Exemplo 3.34. No Exemplo 3.32 o número de maneiras de uma pessoa entrar por uma porta e sair do shopping é igual ao número de amostras ordenadas com repetição de tamanho 2 de um conjunto com 7 elementos. Pela Proposição 3.33, concluímos que esse número é

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49.$$

Definição 3.35. Uma amostra ordenada sem reposição de tamanho n de um conjunto com n elementos será denominada uma permutação dos n elementos.

Proposição 3.36. *O número de permutações de n elementos, denotado P_n, é dado por:*

$$P_n = n! \tag{6}$$

onde $n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$

Demonstração. Se as amostras são retiradas sem reposição, o primeiro elemento da amostra pode ser retirado de n maneiras, o segundo elemento da amostra pode ser retirado de $(n-1)$ maneiras e assim por diante até o n-ésimo termos termo retirado, que poderá ser retirado de $n-(n-1)$ maneiras. Pelo Princípio Fundamental da Contagem (ver Axioma 3.25), teremos que o número de maneiras de retirarmos uma amostra de tamanho n é obtido através do produto desses números.

□

Exemplo 3.37. Considere 6 pessoas numa fila. Observe que o número de maneiras que essas podem formar uma fila é igual ao número de amostras ordenadas de tamanho 6 de um conjunto de 6 elementos. A Proposição 3.36 garante que esse número é calculado da seguinte forma:

$$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Definição 3.38. Uma amostra é dita não ordenada se os seus elementos não forem ordenados, assim, uma amostra não ordenada de tamanho n coincide com um subconjunto de tamanho n.

Chamamos de combinação de N elementos tomados n a n uma amostra não ordenada e sem reposição de tamanho n de um conjunto de N elementos. O número desse tipo de amostras denominamos $C_{N,n}$.

Proposição 3.39. *O número de amostras não ordenadas sem reposição de tamanho n, de um conjunto com N elementos, é dado por:*

$$C_{N,n} = \frac{(N)_n}{P_n}. \tag{7}$$

Demonstração. Considere um conjunto de N elementos. Uma amostra não ordenada e sem reposição de tamanho n é um subconjunto desse conjunto composto por n elementos, ou seja, uma combinação de N elementos tomados n a n. Pela Proposição 3.36, cada combinação de N elementos tomados n a n pode-se gerar P_n amostras ordenadas sem reposição. A reunião de todas as amostras ordenadas sem reposição de cada combinação de N elementos tomados n a n é $(N)_n$. Logo,

$$(N)_n = C_{N,n} \cdot P_n.$$

Dividindo ambos os lados da equação por P_n, chegamos a

$$C_{N,n} = \frac{(N)_n}{P_n}.$$

Note que multiplicando-se o numerador e o denominador por $(N-n)!$ na fórmula acima temos que $C_{N,n}$ pode ser escrito como segue.

$$\begin{aligned} C_{N,n} &= \frac{(N)_n \cdot (N-n)!}{P_n \cdot (N-n)!} \\ &= \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-n+1)(N-n)!}{n! \cdot (N-n)!} \\ &= \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!} \end{aligned} \tag{8}$$

□

Exemplo 3.40. Entre 8 pessoas que se candidataram para formar uma comissão organizadora de um evento, vão ser escolhidos 4 membros. De quantas maneiras diferentes poderá ser formada essa comissão?

Observe que para determinar-se o número de maneiras que essa comissão pode ser formada, basta calcular o número de amostras não ordenadas de tamanho 4 de um conjunto com 8 elementos. Logo, por (7), temos

$$C_{N,n} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70.$$

Definição 3.41. Dizemos que uma sequência é uma permutação com elementos repetidos de N objetos de um dos tipos $a_1, ..., a_k$, se n_1 deles forem iguais a a_1,..., n_k deles iguais a a_k, com $n_1 + \cdots + n_k = N$.

Note que, o problema em se calcular quantas são as permutações de N termos, com n_1 termos iguais a a_1, n_2 termos iguais a a_2,..., n_k termos iguais a a_k, é equivalente ao problema de contar quantas são as partições de um conjunto de N elementos em k subconjuntos, com $n_1, n_2, \cdots, n_k$ elementos cada. Desta forma, o próximo resultado mostra como calcular o número de permutações com elementos repetidos.

Proposição 3.42. *O número de partições de um conjunto de N elementos em k subconjuntos, com $n_1, n_2, \cdots, n_k$ elementos, respectivamente, é igual a:*

$$\frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}. \tag{9}$$

Demonstração. Selecionando do conjunto N um subconjunto de tamanho n_1 . Do conjunto remanescente $N - n_1$ selecionando um subconjunto de n_2 elementos. Do conjunto $N - (n_1 + n_2)$ selecionando n_3 elementos, e assim, sucessivamente, até na última etapa sobrarem n_k elementos e o processo termina. A primeira retirada pode ser feita de $\binom{N}{n_1}$

maneiras, a segunda retirada pode ser feita de $\binom{N-n_1}{n_2}$ maneiras, e assim, sucessivamente, até a $k-1$ e última retirada que poderá ser feita de $\binom{N-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-2})}{n_{k-1}}$ maneiras. Pelo princípio fundamental da contagem temos o número de maneiras de retirar $n_1 \cdot n_2 \cdots n_{k-1}$ sobrando n_k elementos para o último subconjunto retirado igual a:

$$\binom{N}{n_1} \cdot \binom{N-n_1}{n_2} \cdots \binom{N-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-2})}{n_{k-1}}.$$

Substituindo cada um dos coeficientes binomiais pela fórmula em forma de fatoriais tem-se:

$$\frac{N!}{n_1! \cdot (N-n_1)!} \cdot \frac{(N-n_1)!}{n_2! \cdot (N-(n_1-n_2))!} \cdots \frac{(N-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-2}))!}{n_k! \cdot (N-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})!}$$
$$= \frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

□

3.4 Propriedades da Probabilidade

Nesta seção iremos apresentar algumas das propriedades de probabilidade, que são consequência da definição 3.24.

Proposição 3.43. *Denotaremos por ϕ o evento impossível. Temos $P(\phi) = 0$.*

Demonstração. Seja A um evento de S e ϕ um evento impossível, podemos expressar o evento A como sendo

$$A = A \cup \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \phi_i\big),$$

onde $\phi_i = \phi$, para todo $i \geq 1$.

Como A e ϕ são mutuamente exclusivos, pelo item **b)** da Definição 3.24, temos que

$$P(A) = P\Big(A \cup \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \phi_i\big)\Big) = P(A) + \sum_{i=1}^{\infty} P(\phi).$$

Daí, subtraindo $P(A)$ de ambos os lados da equação, teremos

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\phi) = 0. \tag{10}$$

Pelo item **a)** da definição 3.24, temos que $P(\phi) \geq 0$. Logo, pela igualdade (10), podemos concluir que $P(\phi) = 0$.

□

Proposição 3.44. *Se os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ são mutuamente exclusivos, então:*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{11}$$

Demonstração. Observe a sequência $A_1, A_2, \cdots, A_n, A_k, \cdots$. aplicando o item **b)** da definição 3.24, temos que

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n).$$

Considerando $A_k, A_{k+1} \cdots = \phi$. Pela Proposição 3.43, temos que $\sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = 0$. Logo,

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

.

□

Proposição 3.45. Se A^c é o complementar do evento A, então:

$$P(A^c) = 1 - P(A). \tag{12}$$

Demonstração. Como A e A^c são eventos mutuamente exclusivos, $A \cup A^c = S$ e pelo item **c)** da Definição 3.24, $P(S) = 1$. Aplicando agora o item **ii)** da definição de probabilidade, temos a seguinte igualdade:

$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c).$$

Logo, subtraindo $P(A)$ dos dois extremos da igualdade, temos que $P(A^c) = 1 - P(A)$.

□

Proposição 3.46. Sejam A e B dois eventos do espaço amostral S, tais que $A \subset B$, tem-se:

$$P(A) \leq P(B).$$

Demonstração. Como $A \subset B$, pela teoria dos conjuntos $B = A \cup (A^c \cap B)$. Aplicando o item **ii)** da definição 3.24, vale a seguinte igualdade:

$$P(B) = P(A \cup (A^c \cap B)) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

Pelo item **i)** da definição axiomática de probabilidade, $P(A^c \cap B) \geq 0$. Logo, $P(A) \leq P(B)$.

□

Proposição 3.47. *Sejam A e B dois eventos quaisquer do espaço amostral S, tem-se:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{13}$$

Demonstração. Utilizando a teoria dos conjuntos, podemos escrever $A \cup B$ como a união de dois eventos mutuamente exclusivos da seguinte forma:

$$A \cup B = A \cup (A^c \cap B).$$

Aplicando **ii)** da Definição 3.24, temos a igualdade

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B). \tag{14}$$

Novamente utilizando a teoria dos conjuntos podemos escrever B como sendo $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$. Da mesma forma, obtemos a igualdade

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B). \tag{15}$$

Isolando $P(A^c \cap B)$ em (15) e substituindo em (14), chegamos a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

□

Exemplo 3.48. Numa urna há 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retirando uma bola ao acaso, qual a probabilidade da bola retirada seja múltiplo de 2 ou múltiplo de 3?

Observe que cada bola tem a probabilidade $\frac{1}{10}$ de ser retirada. Para calcular a probabilidade dos eventos A: ser múltiplo de 2, B: ser múltiplo de 3 e $A \cap B$ basta notar que esses eventos tem 5, 3 e 1 eventos simples. Logo $P(A) = \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{3}{10}$ e $P(A) = \frac{1}{10}$.

Pela Proposição 3.47, temos que

$$P(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

Note que, pela Proposição 3.45, a probabilidade de $P((A \cup B)^c) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$.

3.5 Probabilidade Condicional

Nesta seção serão trabalhadas definições e fórmulas que auxiliam no cálculo de probabilidade em situações que o espaço amostral representa experimentos realizados em sequência, onde a ocorrência de um novo evento depende das ocorrências de eventos anteriores.

Definição 3.49. Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral e supondo que $P(A) > 0$, a probabilidade condicional de B dado A é definida por:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{16}$$

A partir de 16, podemos obter a expressão:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A). \tag{17}$$

Proposição 3.50. *Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ eventos do espaço amostral S, onde está definida a probabilidade P, tem-se:*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}). \tag{18}$$

Demonstração. Vamos argumentar por indução sobre n. Para $n = 2$, temos

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1).$$

Que nada mais é que a equação (17).

Supondo que (18) é verdade para $n = k$, vejamos se vale para $n = k + 1$. Aplicando (17) para calcular $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_k) \cap A_{k+1}$, obtemos que

$$\begin{aligned} P((A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_k) \cap A_{k+1}) = [P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \\ P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{k-1})] \cdot P(A_{k+1} \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_k). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.51 (Fórmula das Probabilidades Totais)**.** *Sejam $B_1, B_2, ..., B_n$ uma partição do espaço amostral S, isto é, esses eventos são mutuamente exclusivos e sua reunião é S. Seja A um evento e P uma probabilidade definida nos eventos de S, temos:*

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k). \tag{19}$$

Demonstração. Se $B_1, B_2, ..., B_n$ é uma partição do espaço amostral S, então $S = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. Como $A \cap S = A$, então

$$A = A \cap S = A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \bigcup_{k=1}^{n} A \cap B_k.$$

Aplicando (17) para calcular a probabilidade de A, temos que

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k).$$

□

Teorema 3.52 (Fórmula de Bayes)**.** *Seja B um evento e A_1 e A_2 uma partição do espaço amostral S, isto é, $A_1 \cap A_2 = S$. Seja P uma probabilidade definida nos eventos de S. Temos para $i = 1, 2$:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}. \tag{20}$$

Demonstração. A partir da Definição 3.49, temos

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}.$$

Por (17), sabemos que $P(A_i \cap B) = P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$ e expressando B pela Fórmula das Probabilidades Totais (19), teremos

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{2} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}. \tag{21}$$

□

Definição 3.53. *Sejam A e B dois eventos e suponha que $P(A) > 0$. O evento B é dito independente do evento A se:*

$$P(B \mid A) = P(B). \tag{22}$$

Esta é uma definição que representa uma noção intuitiva de independência do evento B em relação ao evento A, pois afirma que a probabilidade de B ocorrer não se altera com a ocorrência de A.

Note que se o evento B é independente do evento A, pela igualdade (17), temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{23}$$

É natural pensarmos que se o evento B é independente do evento A o inverso também ocorre, ou seja, o evento A é independente do evento B. De fato, pelo Definição 3.49 e por (23), temos valida a igualdade:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

4 Algumas Aplicações do Método de Polya

Esta seção é dedicada à resolução de problemas de probabilidade subsidiada pelos conceitos trabalhados nos capítulos anteriores. A seleção de conteúdos foi pensada de forma que cada problema contribua com ideias novas para resolução de problemas futuros.

Cada resolução de problema foi construída através do Método de Polya obedecendo suas etapas, estas relatadas no Capítulo 2 deste trabalho, omitindo a 4ª etapa (Fazer o retrospecto ou verificação), uma vez que nesta etapa foi realizada uma verificação de todas as etapas anteriores observando se estavam corretas, principalmente, o percurso e cálculos realizados na 3ª etapa, assim como, o resultado obtido. Caso encontrado algum erro, teríamos que realizar as correções necessárias, podendo até mesmo, caso necessário, elaborar e realizar um novo plano para resolução do problema. Esta etapa é fundamental para a construção e fixação do conhecimento.

Problema 4.1 (UESPI - 2011)**.** Um corretor de seguros vendeu seguros para 5 pessoas. Suponha que a probabilidade de uma dessas pessoas viver mais trinta anos seja de 3/5. Qual a probabilidade percentual de exatamente 3 das pessoas estarem vivas daqui a trinta anos?

a) 24,56%

b) 34,56%

c) 44,56%

d) 54,56%

e) 64,56%

Solução. 1- Compreender o problema:

Neste problema devemos calcular a probabilidade percentual de exatamente 3 das pessoas estarem vivas daqui a trinta anos. Para isto, sabemos que o corretor de seguros vendeu o seguro para 5 pessoas e a probabilidade de cada uma dessas pessoas viver mais trinta anos é 3/5.

2- Elaborar um plano:

Uma estratégia para resolver o problema é calcular de quantas maneiras diferentes podemos ter exatamente 3 das 5 pessoas vivendo mais que trinta anos e calcular a probabilidade de uma das possíveis maneiras de exatamente 3 das 5 pessoas viverem mais que trinta anos. Por fim, multiplicando os dois resultados acima temos a probabilidade de exatamente 3 das pessoas estarem vivas daqui a trinta anos.

3- Executar o plano:

Pela fórmula (9) podemos calcular de quantas maneiras diferentes podemos ter exatamente 3 das 5 pessoas vivendo mais que trinta anos através de uma permutação de 5 elementos, representando as 5 pessoas, com repetição de 3 e 2 elementos, representando as probabilidades de 3 pessoas que viverem mais que trinta anos e as 2 pessoas que não, respectivamente. Daí,

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ maneiras,}$$

ou seja, temos 10 maneiras de termos exatamente 3 das 5 pessoas vivendo mais que trinta anos.

Pela fórmula (18) podemos calcular a probabilidade de A: as 3 primeiras das 5 pessoas viverem mais que trinta anos e das 2 últimas não, da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3^3 \cdot 2^2}{5^5}. \tag{24}$$

Observe que a probabilidade de cada uma das maneiras de termos exatamente 3 das 5 pessoas vivendo mais que trinta anos é igual à probabilidade calculada acima.

Por fim, ao multiplicar a probabilidade acima pelo número de maneiras de termos exatamente 3 das 5 pessoas vivendo mais que trinta anos, teremos o resultado pedido no problema.

$$10.\frac{3^3.2^2}{5^5} = \frac{216}{625} = 0,3456 = 34,56\%$$

Problema 4.2 (UNIVESP - 2014)**.** Em uma indústria, trabalham 400 mulheres e 1.000 homens. A probabilidade de uma dessas mulheres ter mais de 50 anos é de 0,03 e de um homem ter mais de 50 anos é de 0,10. Analisando esses dados, a probabilidade de uma dessas pessoas ter mais de 50 anos é de:

a) 0,095.

b) 0,09.

c) 0,085.

d) 0,08.

e) 0,075.

Solução. 1- Compreender o problema:

Neste problema tem-se uma indústria, na qual trabalham 400 mulheres e 1.000 homens. É dada a informação que a probabilidade de uma das mulheres ter mais de 50 anos é de 0,03 e de um dos homens é 0,10. O problema pede para calcular a probabilidade de, ao se escolher aleatoriamente um funcionário, esta pessoa tenha mais de 50 anos.

2- Elaborar um plano:

Para resolver este problema, primeiro é necessário calcular duas probabilidades inicialmente:

I- A probabilidade de A: ao escolher aleatoriamente uma pessoa da indústria, esta ser uma mulher e ter mais que 50 anos.

II- A probabilidade de B: ao escolher aleatoriamente uma pessoa da indústria, este ser um homem e ter mais que 50 anos.

Após obter os resultados acima somando as probabilidades I e II temos a probabilidade de, ao se escolher aleatoriamente um funcionário da indústria, esta pessoa tenha mais de 50 anos.

3- Executar o plano:

A quantidade de pessoas nessa indústria é composto pelo número de homens e mulheres, ou seja, $400 + 1000 = 1400$.

Para calcular as probabilidade de A e B deve-se notar que, ao se escolher aleatoriamente, dentre os funcionários da indústria a probabilidade, pela fórmula (3), da pessoa escolhida seja uma mulher é de $\frac{400}{1400} = \frac{4}{14}$ e a probabilidade da pessoa escolhida ser um homem é $\frac{1000}{1400} = \frac{10}{14}$.
Calculando as probabilidades de A e B pela fórmula de probabilidade condicional (17), temos que:

$$P(A) = \frac{4}{14} \cdot 0,03 = \frac{12}{1400} \text{ e } P(B) = \frac{10}{14} \cdot 0,10 = \frac{112}{1400}.$$

Por fim, somando-se as probabilidades acima temos que a probabilidade de, ao se escolher aleatoriamente um funcionário da indústria, essa pessoa ter mais de 50 anos é

$$P(A) + P(B) = \frac{12}{1400} + \frac{100}{1400} = \frac{112}{1400} = 0,08.$$

Problema 4.3 (UFAC - 2010)**.** Um dado e uma urna contendo 10 bolas enumeradas de 1 a 10 são postos sobre uma mesa ampla. O dado é lançado sobre a mesa e o número m, da face que fica voltada para cima, é anotado. Em seguida, uma bola é retirada aleatoriamente da urna e o seu número n é também anotado.

A probabilidade de m + n ser um número primo é igual a:

a) 1/10.

b) 1/13.

c) 7/30.

d) 13/60.

e) 23/60.

Solução. 1- Compreender o problema:

Será jogado um dado e sorteado uma bola de uma urna que contem 10 bolas numeradas de 1 a 10. O resultado obtido ao se jogar o dado é m e o resultado da bola sorteada é n. Este problema pede para calcular-se a probabilidade do evento A: $m + n$ ser um número primo.

2- Elaborar um plano:

Para facilitar a resolução do problema é possível construir uma tabela, onde na primeira linha são colocados todos os resultados possíveis do lançamento do dado e na primeira coluna são colocados todos os resultados possíveis do sorteio da urna. Ao completar as células da tabela acima com o resultado de todas as possíveis somas $m+n$ e posteriormente contando quantas somas $m+n$ da tabela são números primos e quantas somas $m+n$ há na tabela é possível determinar a probabilidade de $m+n$ ser um número primo.

bolas \ dado	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

Tabela 1: exemplo

3- Executar o plano:

Completando a tabela com todas as somas $m + n$ temos:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12
7	8	9	10	11	12	13
8	9	10	11	12	13	14
9	10	11	12	13	14	15
10	11	12	13	14	15	16

Tabela 2:

A partir da tabela acima podemos calcular a probabilidade de A, verificando quantas somas $m+n$ são números primos (23) e quantas somas $m+n$ temos na tabela (60). Logo pela fómula (3):

$$P(A) = \frac{23}{60}.$$

Problema 4.4 (UESPI - 2010)**.** Uma gaveta contém 6 meias azuis e 4 meias pretas. Escolhendo, aleatoriamente, 4 meias da gaveta, qual a probabilidade de elas formarem um par de meias azuis e outro de meias pretas?

a) 1/9

b) 1/7

c) 2/7

d) 3/7

e) 1/5

Solução. 1- Compreender o problema:

O problema pede para calcular a probabilidade de, ao retirarmos aleatoriamente, 4 meias da gaveta obtermos um par de meias azuis e outro de meias pretas. Na gaveta há 6 meias azuis e 4 meias pretas e a ordem das cores das meias retiradas importa.

2- Elaborar um plano:

Para determinar o número de elemento do evento A: ao retirarmos aleatoriamente 4 meias da gaveta obtermos um par de meias azuis e outro de meias pretas, uma alternativa é, inicialmente, calcular de quantas maneiras diferentes podem ser retiradas 2 meias azuis e 2 meias pretas da gaveta, respectivamente. Em seguida calcular de quantas maneiras diferentes é possível ordenar a retirada das 2 meias azuis e 2 meias pretas da gaveta. Daí, pelo Princípio Fundamental da Contagem, multiplicar os resultados obtidos. Podemos calcular de quantas maneiras diferentes podemos retirar 4 meias da gaveta.

A partir dos resultados obtidos acima é possível calcular a probabilidade de A.

3- Executar o plano:

Uma forma de calcular de quantas maneiras podemos retirar da gaveta 2 meias azuis é através de um arranjo de 6 elementos, que representam o total de meias azuis, tomados 2 a 2, representando as duas meias que serão escolhidas dentre as azuis, e podemos retirar 2 meias pretas da gaveta através de um outro arranjo de 4 elementos, representando o total de meias pretas, tomados 2 a 2, representando as duas meias que serão escolhidas dentre as pretas, a partir da fórmula (4):

$6_2 = 6 \cdot 5 = 30$ diferentes de retirarmos 2 meias azuis;

$4_2 = 4 \cdot 3 = 12$ diferentes de retirarmos 2 meias pretas.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (ver Axioma 3.25), podemos calcular de quantas maneiras diferentes podemos retirar, respectivamente, 2 meias azuis e 2 meias pretas multiplicando os arranjos acima. Daí, $30 \cdot 12 = 360$.

É possível calcular de quantas maneiras diferentes podemos ordenar a retirada de 2 meias azuis e 2 meias pretas da gaveta através de uma permutação de 4 elementos (as quatro cores das meias) com 2 repetições (duas das cores são azuis e duas das cores são pretas) (9). Daí:

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!.2!} = 6 \text{ maneiras diferentes.}$$

Multiplicando os últimos dois resultados acima obtemos o número de maneiras possíveis de retirar 2 meias azuis e 2 meias pretas (ver axioma 3.25). Logo, $360 \cdot 6 = 2160$ maneiras.

O número de maneiras diferentes se pode retirar 4 meias da gaveta pode ser determinado pelo arranjo de 10 elementos (o número de meias na gaveta) tomados 4 a 4(quantidade de meias retiradas). Daí pala fórmula (4):

/

$$10_4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040 \text{ maneiras.}$$

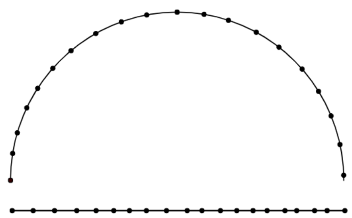
Por fim, a partir dos resultados acima podemos calcular a probabilidade de ao retirar-se aleatoriamente 4 meias da gaveta obtermos um par de meias azuis e outro de meias pretas pela definição (3.21).

$$P(A) = \frac{2160}{5040} = \frac{3}{7}.$$

Problema 4.5 (UNB - 2008(adaptada))**.** Considere um conjunto de pontos em um sistema de coordenadas cartesianas xOy, identificado com o plano complexo, sendo que cada ponto $P(x, y)$ corresponde ao número complexo $z = x + iy$, em que $i = \sqrt{-1}$. Considere ainda que esses pontos estejam distribuídos nos dois subconjuntos descritos a seguir.

Subconjunto I: Quarenta pontos, vinte dos quais encontram-se sobre uma reta e os demais em um semicírculo, como mostra a figura abaixo. Dessa forma, quaisquer três pontos que se encontraram no semicírculo nunca estão em linha reta.

Subconjunto II: N pontos, cada um deles representando um dos vértices de um polígono regular, cuja soma dos ângulos internos é igual a Θ. Esse polígono encontra-se inscrito na circunferência de centro na origem e o raio l.



Escolhendo-se ao acaso três pontos do subconjunto I, a probabilidade de ser possível formar um triângulo tendo esses três pontos como vértices é inferior a 0,75.

- Certo
- Errado

Solução. 1- Compreender o problema:

Trata-se de um problema de Verificação, onde se pede para observar se a probabilidade de formar um triângulo escolhendo aleatoriamente três pontos do subconjunto I como vértices é inferior a 0,75, sendo que o conjunto um é formado por 20 pontos sobre mesma reta e 20 pontos sobre um semicírculo.

2- Elaborar um plano:

Uma forma de facilitar a resolução deste problema é calcular a probabilidade de não se formar um triângulo escolhendo aleatoriamente três pontos do subconjunto I e aplicar a proposição 3.45 para obter o valor da probabilidade desejada.

Uma maneira de realizar o cálculo da probabilidade de não se formar um triângulo escolhendo aleatoriamente três pontos do subconjunto I é determinar o número de elementos de A: três pontos do subconjunto I não formarem um triângulo e verificar de quantos modos podemos escolher 3 pontos do subconjunto I.

3- Executar o plano:

Para determinar o número de maneiras de escolher três pontos do subconjunto I e eles não formarem um triângulo basta notar que a única forma dos três pontos não formarem um triângulo é todos os pontos escolhidos estarem presentes na reta. Como há 20 pontos sobre a reta, podemos calcular o número de maneiras que podemos escolher 3 pontos da reta a partir da fórmula (8). Daí:

$$C_{20,3} = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = 1140.$$

O número total de possibilidades de escolher 3 pontos dentre os 40 pertencentes ao subconjunto I é dada pela fómula (8). Daí:

$$C_{40,3} = \frac{40!}{37! \cdot 3!} = 9880.$$

Dos resultados acima temos que (pela definição (3.21)) a probabilidade de A é

$$P(A) = \frac{1140}{9880} = \frac{57}{494} \cong 0,1154.$$

A Proposição 3.45 garante que a probabilidade de escolher ao acaso três pontos do subconjunto I e eles formarem um triângulo tendo esses três pontos como vértices é

$$1 - 0,1154 = 88,46\%,$$

o que é superior a 0,75. Logo, a afirmação no enunciado está errada.

Problema 4.6 (UNESP - 2018)**.** Dois números reais de 0 a 4, e que podem ser iguais, serão sorteados ao acaso. Denotando-se esses números por x e y, a probabilidade de que eles sejam tais que $x^2 + y^2 \leq 1$ é igual a

a) $\frac{1}{20}$

b) $\frac{\pi}{64}$

c) $\frac{\pi}{20}$

d) $\frac{\pi}{16}$

e) $\frac{\pi}{8}$

Solução. 1- Compreender o problema:

No problema x e y são dois números reais compreendidos entre 0 e 4. O objetivo é determinar a probabilidade de que os números x e y cumpram a seguinte condição:

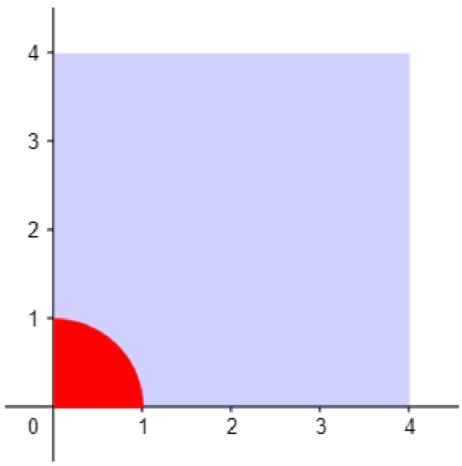
$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

2- Elaborar um plano:

Como não são enumeráveis, uma alternativa a resolução do problema é enxergá-lo geometricamente num plano cartesiano xOy e por meio de áreas calcular a probabilidade de A: $x^2 + y^2 \leq 1$.

3- Executar o plano:

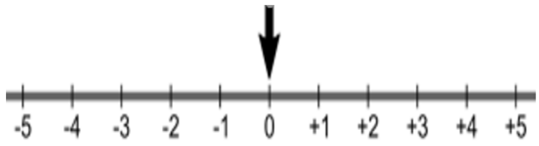
Sendo x e y pertencentes ao intervalo de números reais entre 0 e 4, num plano cartesiano xOy, temos que $x^2 + y^2 \leq 1$ corresponde a um setor circular e os pares (x, y) corresponde um quadrado como mostra a figura abaixo:



Empregando a área do setor circular como evento A e a área do quadrado como espaço amostral podemos calcular a probabilidade de A da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{\frac{\pi}{4}}{16} = \frac{\pi}{64}.$$

Problema 4.7 (FUVEST - 2018)**.** Uma seta aponta para a posição zero no instante inicial. A cada rodada, ela poderá ficar no mesmo lugar ou mover-se uma unidade para a direita ou mover-se uma unidade para a esquerda, cada uma dessas três possibilidades com igual probabilidade.



Qual é a probabilidade de que, após 5 rodadas, a seta volte à posição inicial?

a) 1/9

b) 17/81

c) 1/3

d) 51/125

e) 125/243

Solução. 1- Compreender o problema:

O problema consiste em analisar o movimento de uma seta sobre uma reta numérica que, inicialmente, aponta para a posição zero. A cada rodada a seta poderá realizar um dos seguintes feitos: ficar no mesmo lugar, mover-se uma unidade para a direita ou mover-se uma unidade para a esquerda. Cada uma dessas três possibilidades tem igual probabilidade de ocorrer. O objetivo do problema é calcular a probabilidade de A: após 5 rodadas a seta volte à posição inicial.

2- Elaborar um plano:

Uma maneira de resolver este problema é determinar o número de elementos de A calculando de quantas maneiras diferentes, em 5 rodadas, a seta possa voltar para posição inicial. em seguida determinar o número de elementos do espaço amostral calculando de quantas maneiras a seta pode mover-se em 5 rodadas. A partir das informações acima calcular a probabilidade de A.

3- Executar o plano:

Para calcular de quantas maneiras diferentes, em 5 rodadas, a seta possa voltar para a posição inicial deve-se notar que para seta finalizar as rodadas no lugar inicial o número de movimentos que ela realizar para a esquerda deve ser igual ao número de movimentos que ela realizar para a direita. Isto ocorre de três maneiras em 5 rodadas:

I. Permanecer na posição inicial em todas as rodadas.

II. Permanecer na posição inicial em 3 rodas e mover-se uma vez para direita e outra para a esquerda (em qualquer ordem possível).

III. Permanecer na posição inicial por uma rodada e mover-se duas vezes para a direita e duas vezes para a esquerda (em qualquer ordem possível).

O primeiro caso pode ocorrer de apenas 1 modo, em todas as rodadas a seta permanecer no mesmo lugar.

O segundo caso, pela fómula (9), pode ocorrer de P_5^3 modos. Daí há 20 maneiras da seta terminar na posição inicial, permanecendo 3 rodas na posição e movendo-se uma vez para direita e outra para a esquerda.

O terceiro caso, pela fómula (9), pode ocorrer de $P_5^{2,2}$ modos. Daí há 30 maneiras da seta voltar a posição inicial permanecendo uma roda na mesma posição e movendo-se duas vezes para direita e duas vezes para a esquerda.

Logo, há 51 maneiras da seta voltar à posição inicial.

como a cada rodada a seta pode mover-se de 3 modos diferentes temos pela fómula (5) que, em 5 rodadas, a seta pode mover-se de $3^5 = 243$ maneiras diferentes.

Portanto, a partir das informações acima, podemos calcular (através da fómula (3))a probabilidade de que, após 5 rodadas, a seta volte à posição inicial:

$$P(A) = \frac{51}{243} = \frac{17}{81}.$$

Problema 4.8 (UFPR - 2018)**.** Em uma reunião de condomínio, os moradores resolveram fazer um sorteio para decidir a ordem em que suas casas serão pintadas. As 8 casas desse condomínio estão dispostas conforme o esquema ao lado. Dizemos que duas casas são vizinhas quando estão dispostas de frente ou de lado. Por exemplo, a casa 3 é vizinha das casas 1, 4 e 5, enquanto a casa 8 é vizinha apenas das casas 6 e 7.

Qual é a probabilidade das duas primeiras casas sorteadas serem vizinhas?

a) 5/28.

b) 5/32.

c) 5/14.

d) 5/16.

e) 9/56.

Solução. 1- Compreender o problema:

No contexto do problema há 8 casas no condomínio e duas casas são consideradas vizinhas quando estão dispostas de frente ou de lado uma da outra. será feito um sorteio para se determinar em que ordem as casas serão pintadas. O objetivo do problema é calcular a probabilidade das duas primeiras casas sorteadas serem vizinhas.

2- Elaborar um plano:

Uma alternativa para calcular a probabilidade das duas primeiras casas sorteadas serem vizinhas é determinar o número, pelo princípio fundamental da contagem de elementos de A : as duas primeiras casas sorteadas serem vizinhas e do espaço amostral determinando o número de maneiras de se ter as duas primeiras casas sorteadas.

3- Executar o plano:

Como há 8 casas no condomínio, pela fómula (8) podemos pintar as duas primeiras casas de $C_{8,2}$ formas diferentes. Daí

$$C_{8,2} = 28 \text{ maneiras.}$$

Para facilitar a contagem de quantas maneiras diferentes se pode ter duas casas vizinhas sendo pintadas. Iremos dividir a contagem em dois casos:

Caso 1: Calcular de quantas maneiras as casas 2, 3, 6 e 7 podem ser vizinhas de outra casa.

Caso 2: Calcular de quantas maneiras as casas 1, 4, 5 e 8 podem ser vizinhas de outra casa.

No primeiro caso pode observar-se na figura que as casas 2, 3, 6 e 7 possuem três casas vizinhas cada. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem (veja o axioma

3.25) podemos pintar essa e uma casa vizinha a ela $4 \cdot 3 = 12$ modos (considerando a ordem em que foram pintadas as casas).

No segundo caso pode observar-se na figura que as casas 1, 4, 5 e 8 possuem duas casas vizinhas cada. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem (veja o axioma 3.25) podemos pintar essa e uma casa vizinha a ela de $4 \cdot 2 = 8$ modos (considerando a ordem em que foram pintadas as casas).

Porém, nestas contagens há a repetição de todos os casos uma vez. Portanto, ao somar os resultados obtidos acima é preciso dividir por 2 para desconsiderar os casos repetidos. Daí há $\dfrac{12+8}{2} = 10$ maneiras de que as duas primeiras casas pintadas sejam vizinhas.

Por fim, a partir dos resultados obtidos acima podemos calcular, pela fórmula (3) a probabilidade de A da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

Problema 4.9 (FUVEST - 2016)**.** Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. A probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome é:

a) $\dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{7}{24}$

c) $\dfrac{1}{3}$

d) $\dfrac{3}{8}$

e) $\dfrac{5}{12}$

Solução. 1- Compreender o problema:

Neste problema, quatro amigos de nomes diferentes irão participar de um amigo secreto, cada amigo sorteia (sem reposição) um nome dentre os participantes do amigo secreto. o objetivo do problema é determinar a probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome.

2- Elaborar um plano:

Uma alternativa para resolver este problema é contar, caso a caso, quantas vezes Ana, Cláudia, Paulo e Rodrigo podem sortear os nomes dos participantes no amigo secreto sem que nenhum deles retire o seu próprio nome. Em seguida, determinar de quantas maneiras possíveis Ana, Cláudia, Paulo e Rodrigo podem sortear os nomes dos participantes no amigo secreto. A partir dessas informações pode calcular-se a probabilidade de A: nenhum participante retirar seu próprio nome.

3- Executar o plano:

Verificando caso a caso temos que: Ana, Cláudia, Paulo e Rodrigo, nesta ordem, podem sortear os nomes dos participantes do amigo secreto sem que nenhum deles retire o seu próprio nome de 9 maneiras diferentes, são estes os casos:

(Cláudia, Ana, Rodrigo, Paulo)

(Cláudia, Paulo, Rodrigo, Ana)

(Cláudia, Rodrigo, Ana, Paulo)

(Paulo, Ana, Rodrigo, Cláudia)

(Paulo, Rodrigo, Ana, Cláudia)

(Paulo, Rodrigo, Cláudia, Ana)

(Rodrigo, Ana, Cláudia, Paulo)

(Rodrigo, Paulo, Cláudia, Ana)

(Rodrigo, Paulo, Ana, Cláudia)

Ana, Cláudia, Paulo e Rodrigo, nesta ordem, podem sortear, pela fórmula (6), os nomes dos participantes do amigo secreto de P_4 maneiras, ou seja, 24 possibilidades.

Logo, a partir dos resultado acima, pela fómula (3) a probabilidade de A.

$$P(A) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

Problema 4.10 (ENEM - 2018)**.** O gerente de uma empresa sabe que 70% de seus funcionários são do sexo masculino e foi informado de que a porcentagem de empregados fumantes nessa empresa é de 5% dos homens e de 5% das mulheres. Selecionando, ao acaso, a ficha de cadastro de um dos funcionários, verificou que tratar-se de um fumante.

Qual a probabilidade desse funcionário ser do sexo feminino?

a) 50,0%

b) 30,0%

c) 16,7%

d) 5,0%

e) 1,5%

Solução. 1- Compreender o problema:

70% dos funcionários da empresa são do sexo masculino e 5% dos homens e 5% das mulheres que a compõem são fumantes. Foi selecionado o cadastro de um funcionário e contatou-se que se tratava de um fumante. Com esta condição, o objetivo deste problema é calcular a probabilidade do cadastro selecionado ser de uma mulher.

2- Elaborar um plano:

Para facilitar a resolução deste problema é válido supor que a empresa possui 1000 funcionários. A partir desta suposição pode calcular-se o número de funcionários representados em cada porcentagem e, a partir disso, calcular a probabilidade do cadastro selecionado ser de uma mulher.

3- Executar o plano:

Se 5% dos homens e 5% das mulheres da empresa são fumantes, podemos afirmar que 5% de todos os funcionários são fumantes. Como 70% dos funcionários da empresa são homens temos que 30% são mulheres, das quais 5% são fumantes, ou seja, $0,3 \cdot 0,05 = 0,015 = 1,5\%$ de todos os funcionários são mulheres fumantes.

Supondo que a empresa tenha 1000 funcionários, com base nas porcentagens acima há 50 funcionários fumantes na empresa, dos quais 15 funcionários são mulheres. Daí, pela fórmula (3) a probabilidade do cadastro selecionado ser de uma mulher é $\frac{15}{50} = 0,3$ ou seja 30,0%.

Problema 4.11 (ENEM - 2018)**.** O gerente do setor de recursos humanos de uma empresa está organizando uma avaliação em que uma das etapas é um jogo de perguntas e respostas. Para essa etapa, ele classificou as perguntas, pelo nível de dificuldade, em fácil, médio e difícil, e escreveu cada pergunta em cartões para colocação em uma urna. Contudo, após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna, ele observou que 25% delas eram de nível fácil. Querendo que as perguntas de nível fácil sejam a maioria, o gerente decidiu acrescentar mais perguntas de nível fácil à urna, de modo que a probabilidade do primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75

Com essas informações, a quantidade de perguntas de nível fácil que o gerente deve acrescentar à urna é igual a

a) 10.

b) 15.

c) 35.

d) 40.

e) 45.

Solução. **1-** Compreender o problema:

Para este problema é proposto um jogo de perguntas e respostas onde as perguntas foram classificadas em três níveis de dificuldade: fácil, médio e difícil. Cada pergunta foi escrita em cartões e colocados em uma urna. Após depositar vinte perguntas de diferentes níveis na urna foi observado que 25% das perguntas eram de nível fácil. O problema pede para que se determine quantas perguntas devem ser acrescentadas na urna para que a probabilidade do primeiro participante retirar, aleatoriamente, uma pergunta de nível fácil seja de 75%.

2- Elaborar um plano:

Uma alternativa para tentar resolver este problema é supor que ao adicionar x perguntas fáceis na urna a probabilidade de retirar uma pergunta de nível fácil seja igual a 75% e a partir disso determinar o valor de x através da fórmula (3).

3- Executar o plano:

Observa-se que se há 20 perguntas e 25% delas são fáceis, temos 5 perguntas fáceis, e por consequência, 15 perguntas de outros níveis de dificuldade. Se forem adicionados x fáceis na urna haverá $5 + x$ perguntas fáceis e $20 + x$ perguntas no total. Supondo que ao adicionar x cartões com perguntas fáceis na urna, a probabilidade de retirar um cartão com uma pergunta fácil da urna será de 75% temos que:

$$\frac{75}{100} = \frac{5 + x}{20 + x}.$$

Resolvendo a equação acima temos que $x = 40$.

Problema 4.12 (ENEM - 2010)**.** Para verificar e analisar o grau de eficiência de um teste que poderia ajudar no retrocesso de uma doença numa comunidade, uma equipe de biólogos aplicou-o em um grupo de 500 ratos, para detectar a presença dessa doença. Porém, o teste não é totalmente eficaz, podendo existir ratos saudáveis com resultado positivo e ratos doentes com resultado negativo. Sabe-se, ainda, que 100 ratos possuem a doença, 20 ratos são saudáveis com resultado positivo e 40 ratos são doentes com resultado negativo. Um rato foi escolhido ao acaso, e verificou-se que o seu resultado deu negativo. A probabilidade de esse rato ser saudável é

a) 1/ 5

b) 4/ 5

c) 19/ 21

d) 19/ 25

e) 21/ 25

Solução. 1- Compreender o problema:

Analisando o contexto do problema, temos um grupo de 500 ratos que foram submetidos a um teste sobre uma determinada doença e o resultado mostrou que: 100 ratos possuem a doença, 20 são saudáveis e testam positivo para a doença e 40 ratos estão doentes e testaram negativo para doença. Foi escolhido um rato cujo resultado do teste deu negativo para a doença. Dada esta condição é pedido no problema para calcular a probabilidade do rato selecionado estar saudável.

2- Elaborar um plano:

Faltam muitas informações sobre as testagens nos ratos e seus estados em relação à doença. Por isso, uma ideia para resolver este problema é, a partir das informações adquiridas, tentar deduzir as informações mais pertinentes para resolução do problema como o número de ratos que tiveram resultado negativo no teste e o número de ratos que testaram negativo para a doença e estão saudáveis. Conseguidas estas informações é possível determinar a probabilidade do rato escolhido e testado negativo para a doença seja saudável.

3- Executar o plano:

Tentando-se determinar, a partir dos resultados já conhecidos, demais dados relevantes para solução do problema temos:

Se há 500 ratos e 100 estão doentes, então 400 estão saudáveis. Se existem 20 ratos saudáveis com resultado positivo, então, destes 400 ratos saudáveis há 380 ratos saudáveis com resultado negativo. Como temos 40 ratos doentes com resultado negativo o número total de ratos com resultados negativos é $380 + 40 = 420$, sendo 40 doentes e 380 saudáveis.

A partir das informações obtidas acima, pela fómula (3) a probabilidade do rato escolhido ser um rato saudável, sabendo que seu resultado deu negativo é

$$\frac{380}{420} = \frac{19}{21}.$$

Problema 4.13 (OBMEP - 2017)**.** A professora decidiu premiar, por sorteio, dois dentre os 20 alunos da turma de João. Para o sorteio, 20 bolas com os números dos alunos foram colocadas em uma caixa. A primeira bola sorteada pela professora caiu no chão e se perdeu, sem que ninguém visse seu número. Ela decidiu fazer o sorteio com as bolas restantes. Qual é a probabilidade de que João tenha sido um dos dois alunos sorteados?

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{2}{19}$

c) $\frac{19}{200}$

d) $\frac{39}{380}$

e) $\frac{37}{342}$

Solução. 1- Compreender o problema:

Ao ser realizado um sorteio na turma de João foram sorteados dois dentre os 20 alunos da turma para receber um prêmio, para realização do sorteio foram usadas 20 bolas com os números dos alunos e colocados numa uma caixa. A primeira bola sorteada caiu no chão e se perdeu, sem que ninguém visse seu número, ou seja, a pessoa que tinha o número igual ao da bola perdida não poderá mais ser sorteada. O problema consiste em determinar a probabilidade de que João tenha sido um dos dois alunos sorteados.

2- Elaborar um plano:

Uma ideia para calcular a probabilidade de João ser sorteado e dividir o problema em dois casos: no primeiro a bolinha que caiu era o número de João e no segundo a bolinha que caiu não era a de João. Calculando-se a probabilidade de cada um dos casos e somando as probabilidades obtidas temos o resultado pedido.

3- Executar o plano: Calculando as probabilidades de:

Caso 1. A bolinha que caiu era a de João. Neste caso, a probabilidade de João ganhar é zero, pois sua bola não poderá ser sorteada.

Caso 2. A bolinha que caiu não é a de João. Pela fórmula (3) A probabilidade deste caso ocorrer é igual a $\frac{19}{20}$. Daí, pela fórmula (18):

A probabilidade de João ser sorteado na segunda bolinha retirada é

$$\frac{19}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1}{20}.$$

A probabilidade de João ser sorteado na terceira bolinha retirada é

$$\frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{20}.$$

Portanto, a probabilidade de João ser um dos ganhadores é:

$$0 + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}.$$

5 Considerações Finais

Dadas as dificuldades enfrentadas pelos alunos na resolução de problemas de probabilidade, a necessidade de novas metodologias e formas de desenvolver as habilidades e competências necessárias para o ensino-aprendizagem dos alunos é fundamental.

O Método de Polya contribui para o ensino de matemática não só por auxiliar na resolução de problemas de matemáticos, mas sim,também, por desenvolver o pensar e o refletir sobre os problemas abordados e os conhecimentos matemáticos usados para sua solução, gerando um maior significado para o seu ensino- aprendizagem.

A partir do que foi exposto neste trabalho é possivel vislumbrar um pouco da importância e as potencialidades da resolução de problemas e a aplicação do método de Polya na resolução de problemas de probabilidade.

Referências

[1] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática /Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília :MEC/SEF, 1997.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1ª a 4a. séries)**. 2ª ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

[3] BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Ministério da educação, Secretaria da Educação Fundamental**. – 3. Ed. – Brasília, 2001

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. 2. ed. Brasília: MEC/SEF, 2001.

[5] CARVALHO, P.C.P; MORGADO, A. C. **Matemática discreta**. SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

[6] DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: um curso introdutório**. 3. ed. São Paulo: Editora Edusp, 2008.

[7] DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática: 1ª a 5ª séries**. São Paulo: Ática, 1989.

[8] DANTE, Luiz Roberto. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática**. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Tese de Livre Docência, 1998.

[9] DANTE, L.R . **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12 ed. São Paulo: Editora Ática, 1999.

[10] **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Disponível em <http://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em 02/01/2021.

[11] ONUCHIC, L. R.; ZUFFI, E. M. **O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores**. Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática , 11, sept. 2007, p. 79-97. Disponível em: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/11/Union_011_009.pdf

[12] POLYA, G. A. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Interciência, 1978.

[13] POZO, Juan Ignacio (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender** . Porto Alegre: Artmed, 1998.