



**ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET - FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT - UNEMAT - SINOP**



JÔNATAS DA SILVA SOARES

**MODELAGEM MATEMÁTICA: Um Estudo Sobre o Comportamento dos Dados da
COVID-19 no Brasil no Ano de 2020**

**Sinop/MT
2021**

JÔNATAS DA SILVA SOARES

MODELAGEM MATEMÁTICA: Um Estudo Sobre o Comportamento dos Dados da COVID-19 no Brasil no Ano de 2020

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, na Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dra. Vera Lucia Vieira de Camargo

**Sinop/MT
2021**

S676m SOARES, Jonatas da Silva.
Modelagem Matemática: Um Estudo Sobre o
Comportamento dos Dados da Covid-19 no Brasil no Ano de 2020
/ Jonatas da Silva Soares - Sinop, 2021.

127 f.; 30 cm. (ilustrações) Il. color. (sim)

Trabalho de Conclusão de Curso
(Dissertação/Mestrado) - Curso de Pós-graduação Stricto Sensu
(Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e
Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato
Grosso, 2021.
Orientador: Vera Lucia Vieira de Camargo

1. Método dos Mínimos Quadrados. 2. Modelo Sir. 3.
Pandemia. 4. Ensino Medio. I. Jonatas da Silva Soares.
II. Modelagem Matemática: Um Estudo Sobre o Comportamento
dos Dados da Covid-19 no Brasil no Ano de 2020: .
CDU 517



ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET - FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT - UNEMAT - SINOP



JÔNATAS DA SILVA SOARES

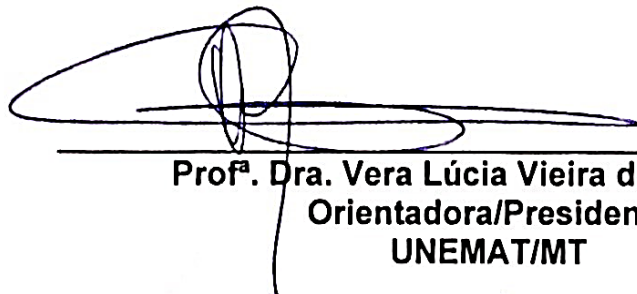
**MODELAGEM MATEMÁTICA: Um Estudo Sobre o Comportamento dos Dados
da COVID-19 no Brasil no Ano de 2020**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT – Campus Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

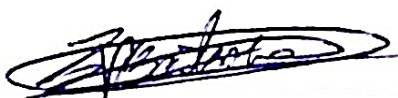
Orientadora: Dra. Vera Lucia Vieira de Camargo

Aprovado em 19/03/2021

BANCA EXAMINADORA:



Prof.^a. Dra. Vera Lúcia Vieira de Camargo
Orientadora/Presidente
UNEMAT/MT



Prof. Dr. Edson Pereira Barbosa
Avaliador Externo
UFMT /MT



Prof. Dr. Emivan Ferreira da Silva
Avaliador Interno
UNEMAT /MT

SINOP/MT – MARÇO/2021

Dedico este trabalho a todos aqueles que tornaram possível a obtenção do título de mestre em Matemática. Diversos obstáculos se passaram ao longo do curso, entretanto, graças a vocês nunca fraquejei: esposa (Cristiane), filha (Beatriz), pais (Claudio e Margarete), amigos de curso e professores do programa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus todo poderoso, que é o centro e alicerce de tudo que faço em minha vida, por ter me guiado desde que iniciei esta jornada acadêmica, me guardado nas viagens e sempre que pedi força, sabedoria e discernimento o senhor não me abandonaste.

Em seguida, agradeço minha esposa/companheira Cristiane de Oliveira Santos por ter ficado ao meu lado durante toda essa caminhada, sem você querida nada disso teria sido possível. Sua presença foi essencial para construção deste trabalho, obrigado pelas conversas de incentivo e apoio incondicional, principalmente na etapa final. Você foi capaz de suportar todos os meus momentos de estresse e minhas ausências como pai e esposo, minha gratidão infinita por isso. Agradeço a Deus por ter colocado você em minha vida e ter nos dado uma filha linda. Te amo.

Presto também meus agradecimentos a minha orientadora, Prof^ª. Dra. Vera Lúcia Vieira de Camargo, inicialmente por ter acreditado em mim e me aceitado como seu orientando, por sempre ouvir minhas opiniões a respeito do trabalho, ter me motivado durante todo o período de construção deste trabalho, por não ter medido esforços para me orientar mesmo durante a pandemia, por responder meus questionamentos prontamente mesmo que fora do seu horário de trabalho e por ter compartilhado suas experiências e saberes docente. Expresso aqui minha total admiração que tenho por sua pessoa pela competência, qualificação e humanidade para com o próximo.

A todos os meus colegas de curso, em especial aos amigos que ganhei, Eduardo Castro, Eduardo Gevisier da Silva, Fábio de Freitas Fernandes, Gledson Nilton Emiliano, Itamara Dall Belo, Josimara Riva e Silvio Luiz Almeida. Itamara e Josimara, meus sinceros agradecimentos por terem possibilitado empregar-me em Sorriso-MT, viabilizando assim minha mudança de cidade. Meus amigos, saibam que as experiências trocadas valem tanto quanto os conhecimentos, e a amizade que construímos não se finda com o curso. Que Deus abençoe a vida de cada um de vocês.

Ao Prof^º. do curso Dr. Rogério dos Reis Gonçalves, deixo meus sinceros agradecimentos por ter-me possibilitado usufruir de conhecimentos específicos da Matemática, pelos momentos de socialização e troca de experiências, saiba que o

tenho como modelo a seguir. Obrigado por mostrar tanta dedicação à profissão de professor em especial pelo apoio que nos deu no Exame Nacional de Qualificação (ENQ).

Ao coordenador do programa, Prof^a. Dr. Oscar Antonio Gonzalez Chong, que nunca mediu esforços para atender nossas necessidades pessoais e acadêmicas, mostrando empenho e dedicação frente a coordenação e a disciplina de Geometria. Sou muito grato pelos seus ensinamentos na área da Matemática, me fizeram melhorar a minha prática pedagógica e buscar cada vez mais o aperfeiçoamento.

E aos demais docentes que se fizeram presentes durante o programa, Adriana Souza Resende, Emivan Ferreira da Siva, Giovane Maia do Vale, Inédio Arcari, Miguel Tadayuki Koga, Sílvio César Garcia Granja e ao egresso Diogo Albino de Queiroz, agradeço todos os ensinamentos que foram/são imprescindíveis para minha formação.

A Joseni do Nascimento, pessoa que me acolheu em seu lar, quando vim para Sorriso-MT, sem ao menos me conhecer, apenas por recomendação. Serei imensamente grato a você pelo que fez num momento tão conturbado de minha vida, nada do que eu faça será capaz de retribuir tudo o que fez por mim. Ter aceito um “estranho” em sua casa com carinho, afeto e atenção, me faz acreditar em um mundo melhor, que tenhamos mais pessoas assim como você Joseni, humana e caridosa.

Obrigado!

É necessário dizer que não é a quantidade de informações, nem a sofisticação em Matemática que podem dar sozinhas um conhecimento pertinente, mas sim a capacidade de colocar o conhecimento no contexto.

(Edgar Morin)

RESUMO

A Modelagem Matemática é um processo que visa por meio de etapas e procedimentos adequados encontrar um modelo que possa representar da melhor maneira uma determinada situação-problema. Os modelos são úteis para diferentes áreas, pois buscam descrever e explicar o comportamento de um fenômeno da maneira mais próxima à realidade e podem, em muitos casos, realizar previsões do problema em que está sendo estudado. Nesse contexto, este trabalho buscou a partir da Modelagem Matemática, compreender o comportamento dos dados dos números de casos e óbitos relativos a COVID-19 no Brasil em 2020, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) para o ajuste de curvas e o Modelo SIR (Suscetíveis – Infectados – Removidos) discretizado. Os dados da pesquisa foram coletados junto ao *site* do Ministério da Saúde entre os dias 26/02 a 29/12/2020. O desenvolvimento da pesquisa amparou-se na abordagem de investigação exploratória com o intuito de aprofundar o conhecimento sobre o tema. Inicialmente, os resultados da pesquisa indicaram quais os modelos que mais se ajustaram aos dados pelo MMQ para diferentes tipos de curvas de ajustes e, em um segundo momento, devido à natureza do problema, obteve-se modelos considerando as partições do período considerado. Com as partições, obteve-se dados e informações relevantes sobre a característica da curva epidêmica no país. Foram criados também, alguns cenários da evolução do contágio no país utilizando o Modelo SIR discretizado. No final, com o intuito de transpor os resultados obtidos neste trabalho para o contexto educacional, é apresentada uma sequência didática destinada a estudantes do Ensino Médio, envolvendo o tema estudado na perspectiva da Modelagem Matemática.

Palavras-chave: Método dos Mínimos Quadrados. Modelo SIR. Pandemia. Ensino Médio.

ABSTRACT

Mathematical Modeling is a process that aims, through appropriate steps and procedures find a model that can represent a given situation in the best way. The models are useful for different areas, as They seek to describe and explain the behavior of a phenomenon in the closest way to te reality and, in many cases, can make predictions of the problem in which it is being studied. In this contexto, this paper aimed, sought from the Mathematical Modeling, understand the behavior of the data numbers of the cases and deaths related to COVID-19 in Brazil in 2020, using the Least Squares Method (MMQ) for the adjustment of curves and the Model SIR (Susceptible – Infected – Removed) discretized. The survey data were colleted from the Ministry of Health website from 02/26 to 12/29/2020. The development of the research was supported by the exploratory investigation approach in order to deepen the knowledge on the theme. Initially, the research results indicated which models fit the data by MMQ for different types of adjustment curves and, in a second moment, due to the nature of the problem, models obtained considering the partitions of the period considered. With the partitions, relevant data and information about the characterists of the epidemic curve in the country were obtained. Some scenarios of the contagion's Evolution in the country were also created using the SIR Model. At the end, in order to transpose the results obtained in this work to the educational contexto, a didactic sequennce for high school students is presented, involving the theme studied from the perspective of Mathematical Modeling.

Key-Words: Minimum Squares Method. SIR model. Pandemic. High School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Novo Coronavírus (SARS-CoV-2).....	38
Figura 2 - Dinâmica Entre os Grupos do Modelo SIR.....	53
Figura 3 - Gráfico das Curvas dos Suscetível, Infectados e Removidos - Modelo SIR.....	59
Figura 4 - Representação Gráfica de 3 Cenários do Modelo SIR Discretizado Alterando o Valor de β	60
Figura 5 - Gráfico do Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020.....	68
Figura 6 - Representações Gráficas dos Ajustes de Curvas do Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020.....	69
Figura 7 - Gráfico - Ajuste Quadrático do N° de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020.....	72
Figura 8 - Número de Casos Acumulados de COVID-19 em Escala Logarítmica.....	74
Figura 9 - Representação Gráfica das Curvas Exponenciais por Intervalos.....	75
Figura 10 - Gráfico com as Projeções das Curvas Exponenciais por Intervalos.....	76
Figura 11 - Representação Gráfica do Modelo Matemático do Número de Casos Acumulados de COVID-19 Ajustado por Partes.....	78
Figura 12 - Projeções das Curvas Por Intervalo do Modelo Matemático Definido Por Partes.....	79
Figura 13 - Gráfico da Média Móvel do N° de Casos Novos da COVID-2019 no Brasil em 2020.....	80
Figura 14 - Curva dos Infectados - Modelo SIR.....	82
Figura 15 - Cenários obtidos com o Modelo SIR com Diferentes Valores de β	83
Figura 16 - Gráfico do Número de Óbitos Acumulados por COVID-19 no Brasil em 2020.....	85
Figura 17 - Representações Gráficas dos Ajustes de Curvas do Número de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020.....	86
Figura 18 - Gráfico - Ajuste Quadrático do N° de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020.....	89
Figura 19 - Representação Gráfica do Modelo Matemático do Número de Óbitos Acumulados de COVID 19 Ajustado por Intervalos.....	92
Figura 20 - Exemplo Gráfico de uma Reta.....	97
Figura 21 - Gráfico Ilustrativo de Dispersão de Pontos e Uma Reta Aproximada.....	99
Figura 22 - Representação Gráfica da Função Quadrática $g(x)$ e os Dados.....	101
Figura 23 - <i>Print</i> da Planilha do Excel com Inserção dos Dados.....	102
Figura 24 - <i>Print</i> da Planilha Excel para Obtenção do Gráfico de Dispersão.....	102

Figura 25 - <i>Print</i> da Planilha para Adicionar a Linha de Tendência.....	103
Figura 26 - Obtenção da Linha de Tendência e Equação do Modelo Linear.....	104
Figura 27 - Obtenção do Coeficiente de Determinação r^2	104
Figura 28 - Obtenção da Linha de Tendência e do Ajuste a Função Quadrática.....	105
Figura 29 - Representação Gráfica dos Ajustes às Funções Linear e Quadrática....	106
Figura 30 - Dinâmica entre os Grupos do Modelo SIR.....	108
Figura 31 - Representação Gráfica do Modelo SIR discretizado.....	111
Figura 32 - Curvas do Número de Infectados com Diferentes Valores de Taxa de Infecção.....	112
Figura 33 - Gráfico Ilustrativo de Dispersão de Pontos e Reta Aproximada.....	114

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Desenvolvimento do Conteúdo Programático.....	25
--	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de I_{max} e t_{max} para 3 Cenários de β	60
Tabela 2 - Síntese dos Resultados Obtidos dos Modelos Ajustados do nº de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020.....	70
Tabela 3 - Cálculos Auxiliares - Ajuste Quadrático do Nº de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020.....	71
Tabela 4 - Erro Relativo do Ajuste Quadrático dos Casos Acumulados de COVID-19.....	73
Tabela 5 - Valores Estimados de Tempo para as Curvas Exponenciais de cada Intervalo para Atingir 6 Milhões de Casos.....	76
Tabela 6 - Modelo Matemático por Partes do Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020.....	77
Tabela 7 - Valores Aproximados do Tempo Necessário para se Atingir 6 Milhões de Casos para Cada Curva do Modelo Matemático da Equação 43.....	79
Tabela 8 - Síntese dos Resultados Obtidos dos Modelos Ajustados do nº de Óbitos Acumulados por Complicações a COVID-19 no Brasil em 2020.....	87
Tabela 9 - Cálculos Auxiliares - Ajuste Quadrático do Nº de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020.....	88
Tabela 10 - Erro Relativo do Ajuste Quadrático dos Óbitos Acumulados por COVID-19.....	89
Tabela 11 - Modelo Matemático por Partes do Número de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020.....	91
Tabela 12 - Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil entre 01/04 a 21/07/20.....	95
Tabela 13 - Taxa de Variação da Figura 18.....	97
Tabela 14 - Simulação das Equações de Recorrência (45), (46) e (47).....	110
Tabela 15 - Valores de I_{max} e t_{max} para Três Cenários de b	112
Tabela 16 - Cálculos dos Somatórios do Ajuste Linear da Média Móvel dos Óbitos de COVID-19.....	115
Tabela 17 - Período Correspondente a Semana dos Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020.....	122
Tabela 18 - Cálculos Auxiliares para Determinação da Capacidade de Suporte (Y^*) do Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020.....	123
Tabela 19 - Período Correspondente a Semana dos Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020.....	124
Tabela 20 - Cálculos Auxiliares para Determinação da Capacidade de Suporte (Y^*) do Número de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020.....	125
Tabela 21 - Planilha dos Cálculos do Exemplo Numérico do Modelo SIR.....	126

LISTA DE SIGLAS

COVID	Corona Vírus Disease
OMS	Organização Mundial da Saúde
SBP	Sociedade Brasileira de Pediatria
EUA	Estados Unidos da América
IAL	Instituto Adolfo Lutz
HIV	Vírus da Imunodeficiência Humana
DST	Doença Sexualmente Transmissível
GRID	Deficiência Imunológica Relacionada a Gays
AIDS	Síndrome da Imunodeficiência Adquirida
UNAIDS	Programa Conjunto das Nações Unidas sobre HIV/AIDS
IgG	Imunoglobulina G
IgM	Imunoglobulina M
PCR	Proteína C- Reativa
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	17
2. MODELAGEM MATEMÁTICA E HISTÓRICO DAS PANDEMIAS	20
2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA	20
2.1.1 Modelagem e Modelos Matemáticos	21
2.1.2 Modelagem Matemática como Método de Ensino	23
2.2 BREVE RELATO DAS PANDEMIAS AO LONGO DA HISTÓRIA	29
2.2.1 Peste Negra	30
2.2.2 Cólera	31
2.2.3 Varíola	32
2.2.4 Gripe Espanhola	33
2.2.5 Gripe Asiática	34
2.2.6 Gripe de Hong Kong	35
2.2.7 AIDS	36
2.2.8 Gripe Suína	37
2.2.9 COVID-19	38
3. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS E MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR	42
3.1 AJUSTE DE CURVAS POR MEIO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS	42
3.1.1 Ajuste Linear	43
3.1.2 Ajuste Quadrático	44
3.1.3 Ajuste Polinomial	45
3.1.4 Ajuste Linear do Modelo Exponencial	46
3.1.5 Ajuste Linear do Modelo Logarítmico	47
3.1.6 Ajuste Linear da Função Potência	47
3.1.7 Ajuste Linear do Modelo Exponencial Assintótico	48
3.1.8 Ajuste Linear do Modelo Logístico (Verhulst)	49
3.1.9 Qualidade do Ajuste	51
3.2 MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR	52
3.2.1 Conceitos sobre o Modelo SIR	53
3.2.2 Resultados Analíticos do Modelo Matemático SIR	54
3.2.3 Discretização do Modelo Matemático SIR	57
4. METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	62
4.1 O DELINEAMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA	62
4.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	64
4.2.1 Procedimentos de coleta de Dados	64
4.2.2 Formulação dos Modelos Matemáticos	64
4.2.3 Metodologia da Proposta de Ensino	65
5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	67
5.1 MODELAGEM DOS CASOS ACUMULADOS DE COVID-19 NO BRASIL EM 2020	67
5.1.1 Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020	67

5.1.2 Ajustes do Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil Considerando Todos os Dados de 2020.....	68
5.1.3 Ajuste do Número de Casos de COVID-19 Considerando o Intervalo de Tempo Particionado.....	74
5.1.3.1 <i>Determinação dos Intervalos de Tempo para o Estudo.....</i>	74
5.1.3.2 <i>Estudo do Comportamento das Curvas Exponenciais Ajustadas dos Intervalos Considerados.....</i>	75
5.1.3.3 <i>Modelagem Matemática do Número de Casos de COVID 19 a Partir do Ajuste de Diferentes Curvas.....</i>	77
5.1.4 Ajuste do Número de Casos de COVID-19 para Gerar Cenários com o Modelo Epidemiológico SIR Discretizado	81
5.2 MODELAGEM DO NÚMERO DE ÓBITOS ACUMULADOS POR COMPLICAÇÕES COM A COVID -19 NO BRASIL EM 2020.....	84
5.2.1 Dados dos Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020.....	85
5.2.2 Ajustes do Número de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020.....	85
5.2.3 Modelagem Matemática do Número de Óbitos por COVID-19 com Intervalos de Tempo Particionados.....	90
6. PROPOSTA DIDÁTICA DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO.....	93
6.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 1 - MMQ.....	94
6.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 - MODELO SIR..	107
6.3 ESTUDO COMPLEMENTAR: AJUSTE LINEAR COM O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.....	113
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS	116
REFERÊNCIAS.....	120
APÊNDICE A	122
APÊNDICE B	123
APÊNDICE C	124
APÊNDICE D	125
APÊNDICE E	126

1 INTRODUÇÃO

Uma nova crise de saúde pública se alastrou no mundo no ano de 2020, devido ao surgimento de um novo coronavírus, SARS-CoV-2, que causa a doença denominada de COVID-19 e que resultou em uma pandemia. Neste cenário, difundiu-se nos meios de comunicação muitas informações a respeito da evolução da doença utilizando ferramentas da Matemática, como, percentuais, uso de gráficos e média móvel, isso para ilustrar o comportamento da doença e a dinâmica do “achatoamento da curva” e também sensibilizar a população para a necessidade do distanciamento, para que não viesse a colapsar os serviços de saúde, dentre outros.

Diante desse contexto, percebe-se que a Matemática pode contribuir fortemente no âmbito de se entender, pelo menos a curto prazo, como está se comportando a pandemia no país, nos estados e cidades. Nesse sentido, a área da Modelagem Matemática pode ser uma boa aliada, uma vez que seu objetivo é justamente obter modelos que busquem expressar as características de um problema da realidade por meio de modelos matemáticos.

A Modelagem Matemática possibilita fazer previsões, orienta nas tomadas de decisões e ajuda a explicar e entender as características de um problema estudado. Ter modelos matemáticos que expressem a natureza do fenômeno sob análise, ajuda na tomada de decisões, que para o caso de uma epidemia, pode ser feito a partir de cenários que mostrem o comportamento da propagação da doença ao longo do tempo, que pode auxiliar nas medidas para a contenção do avanço da doença e/ou reforçar ações que já estão sendo feitas no combate.

Neste contexto, a presente pesquisa buscou compreender, a partir da Modelagem Matemática, como se comportaram os dados dos números de casos e óbitos relativos a COVID-19 durante o ano de 2020 no Brasil.

As motivações para o desenvolvimento deste trabalho, deu-se inicialmente pelo desejo pessoal em trabalhar com a Modelagem Matemática e, também profissional, pois durante a atuação como professor do Ensino Médio, sempre foi percebido o anseio dos alunos em saber/relacionar a Matemática com a realidade. Desta forma, pensou-se que com essa perspectiva metodológica de ensino aplicada a pandemia permitiria explorar possibilidades didáticas envolvendo modelagem para leva-la para sala de aula com um tema bastante atual. Além disso, poderia ajudar os alunos a

interpretar as informações divulgadas pela mídia por meio de gráficos e também a perceber que estes recursos tratam de um processo de coleta, organização, tratamento e interpretação de dados.

A escolha do tema a ser modelado ocorreu em função de coincidir com o início do desenvolvimento deste trabalho com o começo da pandemia, momento em que muitas informações eram veiculadas na imprensa, o que inspirou a desenvolver um trabalho em que os conceitos da Modelagem Matemática pudessem ser aplicados aos números de casos e óbitos relativos a COVID-19 do Brasil, pois estes eram de fácil obtenção junto ao Ministério da Saúde. Além disso, como a pandemia impactou consideravelmente a forma de vida das pessoas, é um tema que se relaciona diretamente com o momento em que a população está passando e se mostra potencialmente relevante de ser discutido e refletido na escola.

Entretanto, lidar com dados que estão em processo de mudanças, caso da COVID-19, foi um tanto quanto desafiador, mas também instigante. Requereu muita atenção, dedicação e perseverança, pois conforme se desenvolvia a pandemia, requereu-se mudanças constantes na obtenção dos modelos, ocasionando em novas tomadas de decisões durante todo o processo. Inicialmente buscou-se trabalhar com todos os dados do ano, no entanto, como ao longo do tempo percebeu-se várias mudanças no comportamento dos dados dos números de casos da COVID-19, então tornou-se necessário dividir o estudo em intervalos de tempo menores, de acordo com as orientações sinalizadas pela curva na escala logarítmica.

Buscou-se utilizar neste trabalho ferramentas que não exigissem conceitos matemáticos muito complexos e que pudessem ser levados alguns de seus resultados para o ensino da Matemática da graduação e do Ensino Médio. Desta forma, optou-se em trabalhar com o Método dos Mínimos Quadrados e o Modelo Epidemiológico SIR (suscetível-infectado-recuperado) básico discretizado. Claro que há modelos epidemiológicos na literatura muito mais robustos, o que aumentaria o grau de complexidade também de sua solução, mas fugiria do objetivo deste trabalho, que teve finalidade acadêmica e didática na busca de se compreender por meio da modelagem a aplicabilidade da Matemática em problemas reais, cujos resultados podem ser transpostos para a sala de aula.

Este trabalho está assim organizado:

No Capítulo 2 apresenta-se o referencial teórico sobre a Modelagem Matemática, conceitos esses que nortearam o percurso da pesquisa. Também um breve relato histórico sobre as pandemias que atingiram a sociedade até chegar no novo coronavírus (SARS-CoV-2).

No Capítulo 3 trata-se dos conceitos matemáticos que deram sustentação ao desenvolvimento dos modelos matemáticos deste estudo e está organizado em duas partes. A primeira parte traz uma abordagem sobre o MMQ e as deduções das fórmulas dos ajustes, linear, quadrático, polinomial, da função potência, exponencial, logarítmico, assintótico, logístico e qualidade do ajuste. Na segunda parte, aborda sobre o Modelo Epidemiológico SIR básico, inicial utilizando sistemas de equações diferenciais acoplados com o objetivo de se chegar ao seu modelo discretizado.

O Capítulo 4 é composto da metodologia e dos procedimentos metodológicos para coleta e sistematização dos dados para a obtenção dos modelos e o viés de ensino utilizado para a elaboração da proposta de atividades do Ensino Médio.

No Capítulo 5 apresenta-se os resultados da pesquisa, por meio da trajetória, análise e discussão dos modelos obtidos do número de casos e óbitos relacionados a COVID-19.

No Capítulo 6, aborda-se uma proposta didática de Modelagem Matemática associada com o tema do trabalho que está direcionada a alunos do Ensino Médio.

O Capítulo 7 finaliza com as considerações finais a respeito da trajetória e resultados obtidos no percurso de desenvolvimento deste estudo e aponta também, algumas possibilidades de trabalhos futuros relacionado ao tema.

Por fim, este trabalho destina-se ao público interessado em estudos relacionados com a Modelagem Matemática e, em especial, o Capítulo 6, aos professores de Matemática que pretendem inserir o contexto da COVID-19 em suas atividades pedagógicas.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA E HISTÓRICO DAS PANDEMIAS

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Segundo Bassanezi (2014) a Matemática é uma ciência constituída de ideias e abstrações criadas pela mente humana, que das quais à priori satisfazem um objeto de estudo idealizado por ela própria. O autor ainda enfatiza, se tais conceitos são tratados apenas visando a abstração, estanque a situação de origem, acaba por tornar esta ciência algo complexo e que contém pouca significância.

O objetivo fundamental do “uso” de matemática é de fato extrair a parte essencial da Situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Desta forma, a matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância. (BASSANEZI, 2014, p. 18)

Não é de hoje que a educação vem recebendo diversos desafios, dentre eles, o de formar um cidadão capaz de compreender a economia, a produção, o lazer e entres outras atividades. Deste modo, são crescentes os processos de reestruturação curricular e a busca por metodologias que potencialize e possibilite o pensamento crítico e independente dos alunos (BIEMBENGUT e HEIN, 2009).

Nesse sentido, a Matemática é uma ciência que possibilita aos estudantes o desenvolvimento de habilidades de criação e resolução de problemas, que no caso são fundamentais para indivíduos em formação. Essa capacidade do desenvolvimento cognitivo e criação que possibilita a Matemática, não somente essencial para o indivíduo lidar em possíveis adversidades, mas também fundamental para que ele possa lidar em outras áreas do conhecimento, visto que a Matemática também é base para entendimento de outros conceitos (BIEMBENGUT e HEIN, 2009).

Dessa forma, como desenvolver no estudante essa capacidade de saber lidar/resolver situações problemas, sejam de ordem social ou da natureza, que cada vez mais são comuns na sociedade? Uma das possibilidades pode ser a Modelagem Matemática, conforme abordada a seguir.

2.1.1 Modelagem e Modelos Matemáticos

Segundo Granger (1969 *apud* BIEMBENGUT; HEIN, 2005) o modelo é uma representação humana construído com intuito de compreender ou relacionar de forma abstrata algo existente. A noção do modelo se faz presente em várias áreas, na Arte, Arquitetura, História, Economia, Matemática, etc. Dessa forma, os modelos se constituem como aspecto em que o homem estabelece conexões com a realidade. Assim, a arte de modelar é um processo que surge da razão e segue na vida como meio de demonstração do conhecimento (BIEMBENGUT e HEIN, 2009).

O termo *modelo* é usado nas mais diversas situações e pode ser considerado como representação de um sistema. Bassanezi (2014) apresenta dois tipos de modelos. O primeiro é o *modelo objeto*, representação de um objeto ou fenômeno, se caracteriza pela estabilidade e a homogeneidade das variáveis. O segundo é o *modelo teórico*, ligado a teorias existentes e gerado em torno de um *modelo objeto*, que deve possuir as mesmas características do sistema real, ou seja, ele representa as variáveis do fenômeno e suas interações obtidas por meio de hipóteses ou experimentos. Sobre as finalidades dos modelos Almeida, Silva e Vertuan (2012) destacam que

[...] O que pode variar é a finalidade para a qual os modelos são construídos, podendo prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito), ser descritivo de algo, entre outras. Independentemente da finalidade, o modelo é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se “torna presente” por meio deste modelo. (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 13)

Na Matemática os modelos servem para representar, explicar e tornar factível situações-problema, isto é, analisar um fenômeno por meio das ferramentas matemáticas. Assim, um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, conjecturado por meio de uma sistematização Matemática e que tem por objetivo descrever ou explicar o comportamento de uma situação problema, sendo possível realizar previsão do objeto estudado (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012).

A validade do modelo não se restringe ao refinamento matemático, a eficiência da modelagem está ligada a conscientização do modelador de que, o modelo matemático trabalha com aproximações da situação real, assim elabora-se representações da situação problema ou de sua parte. Entretanto, vale salientar que

a utilização de conceitos matemáticos assim como o tipo de problema tem de ser dosada ao objetivo que se pretende alcançar (BASSANEZI, 2014).

No que tange o processo para a obtenção de modelos matemáticos, Bassanezi (2014), denomina tal ação de Modelagem Matemática. Para o autor a modelagem é a arte de possibilitar que situações reais sejam transformadas em uma linguagem matemática, cujas soluções devem ser interpretadas. Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), a modelagem é uma perspectiva/proposta que busca mudar essa relação estanque dos conceitos matemáticos e o contexto do cotidiano.

Bassanezi (2014) propõe que a modelagem de uma situação problema deva seguir uma sequência de etapas apresentadas a seguir:

i) Experimentação

- Obtenção dos dados.

ii) Abstração

- Seleção das variáveis;
- Problematização ou formulação numa linguagem em que se está trabalhando;
- Formulação de hipóteses;
- Simplificação.

iii) Resolução

- Substituição da linguagem natural das hipóteses por uma linguagem Matemática.

iv) Validação

- Processo de aceitação ou não do modelo obtido.

v) Modificação

- Devido adaptações a problemática as soluções podem não ser condizentes, assim, se faz alterações no modelo obtido.

Com a Modelagem Matemática é possível, fazer previsões, ajudar na tomada de decisões, explicar e entender fatos sobre o problema abordado. A aplicação do modelo depende consideravelmente do contexto em que foi desenvolvido, pois um modelo pode ser ideal para um biólogo, mas não para o matemático e vice-versa. Um modelo parcial pode suprir a necessidade inicial de um pesquisador, mesmo que não contenha à priori todas as variáveis que represente o problema estudado (BASSANEZI, 2014).

Bassanezi (2015, p. 13) complementa,

[...] Saber trabalhar com a modelagem matemática é quase como conseguir pintar bons quadros, no sentido de que não basta conhecer as técnicas (de misturar as tintas ou obter efeitos com pincel) ou reproduzir alguma obra de outro pintor, é preciso aliar às habilidades técnicas uma boa dose de talento. (BASSANEZI, 2015, p. 13)

2.1.2 Modelagem Matemática como Método de Ensino

Para que a Matemática seja um instrumento de promoção do conhecimento é necessário que o processo de ensino não fique restrito a metodologia que foca somente na resolução de exercícios. Nessa perspectiva, a Modelagem Matemática no ensino pode ser uma forma de despertar no estudante a valia dos conceitos matemáticos, aprender a arte de modelar e estimular seu senso crítico por meio da resolução de situações-problema. Contudo, essa perspectiva metodológica demanda algumas adaptações para sua efetivação em sala de aula, pois esbarra nos moldes “tradicionais” da escola, seja pelo nível de conhecimentos prévios dos alunos, o tempo disponível, o currículo, a preparação dos professores, dentre outros. Esse processo da utilização da Modelagem Matemática no ensino regular é denominado por Biembengut e Hein (2009) de Modelação Matemática.

A Modelação Matemática busca desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema e conduzir o aluno no processo de modelagem. Tal ferramenta equivale a uma metodologia de ensino na Matemática, que pode ser utilizada nos níveis da educação básica e superior (BIEMBENGUT e HEIN, 2009).

O desenvolvimento da modelagem nas aulas de Matemática, principalmente na educação básica, favorece a utilização das tecnologias, a realização de trabalhos cooperativos, o desenvolvimento do conhecimento crítico e reflexivo, o uso de diferentes registros de apresentação e a ocorrência de aprendizagem significativa. Dessa forma, a escolha por essa metodologia evidencia a potencialidade que a Modelagem Matemática pode ter para o processo de ensino aprendizagem. (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012).

Por meio da Modelagem Matemática, o aluno é capaz a partir dos resultados matemáticos associado ao fenômeno estudado, gerar algumas estimativas que possam auxiliá-lo na tomada de decisão, levando em conta a base quantitativa da situação. Quando se trabalha com a Modelagem Matemática, isto favorece o aluno

como sujeito do processo de ensino aprendizagem, favorece ao aluno enxergar além, tanto em relação ao conteúdo matemático, quanto em perceber como esses conceitos são importantes nos processos decisórios em sociedade (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2011).

Para que o processo de Modelação Matemática ocorra de forma sistemática, adiante apresenta-se cinco passos sugeridos por Biembengut e Hein (2009).

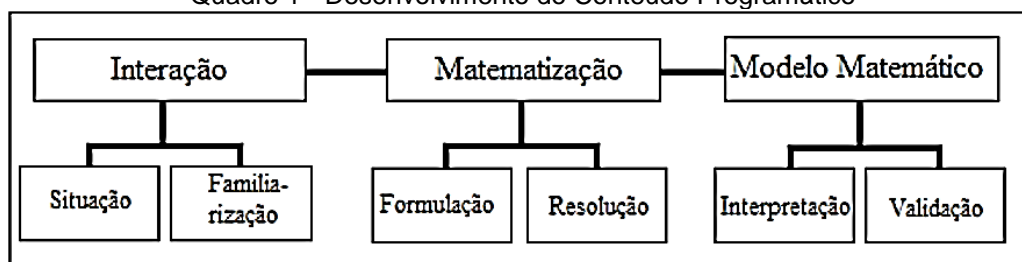
i) Diagnóstico: Nesta fase é feito um levantamento inicial a respeito de alguns aspectos para se planejar a implementação da modelação matemática, como: condições socioeconômicas, interesses, metas e grau de conhecimentos matemáticos dos alunos; horário em que a disciplina será ofertada e a disponibilidade dos alunos para o desenvolvimento de atividades extraclasse. Estes fatores são importantes para se programar a dinâmica das aulas.

ii) Escolha do tema ou modelo matemático. Neste quesito, o desenvolvimento do conteúdo programático envolverá um tema único, que adiante será transformado em um modelo matemático. Caso o assunto a ser trabalhado seja para o ano letivo, deve-se pensar em uma proposta ampla para o período e que mantenha o interesse do aluno. A escolha do tema pode ser feita tanto pelo professor quanto pelos alunos. Existem vantagens e desvantagens caso a escolha seja feita pelos alunos. A vantagem é que favorece o interesse do aluno no estudo e a desvantagem é que pode ser escolhido um tema ainda não conhecido pelo docente ou complexo demais, o que demandaria mais tempo de estudo para o professor. Independente da forma adotada para a escolha do tema é importante que o professor se inteire do tema e prepare antecipadamente um cronograma do processo.

Há de ressaltar que é valioso quando a escolha do tema é feita pelos alunos, isso transparece responsabilidade para eles com o processo de aprendizagem, o que torna sua atuação no processo de modelagem mais concreta. Entretanto, a participação/orientação do professor nessa etapa é essencial, pois dele depende analisar se o tema proposto terá facilidade na coleta de dados, visitas, bibliografia etc (BASSANEZI, 2015).

iii) Desenvolvimento do conteúdo programático: Neste campo o professor seguirá as etapas e subetapas da modelagem, sendo elas: interação, matematização e modelo matemático. Adiante apresenta-se um quadro sintetizando essa etapa (BIEMBENGUT e HEIN, 2009).

Quadro 1 - Desenvolvimento do Conteúdo Programático



Fonte: BIEMBENGUT e HEIN (2009, p. 22).

- iv) *Orientação de Modelagem*: É imprescindível que haja orientação e acompanhamento aos alunos durante o desenvolvimento do trabalho de modelagem. Ter um planejamento sobre a interação com assunto e seu andamento, norteará os alunos. Esse planejamento deve estar de acordo com números de horas-aula da disciplina, para que essas aulas sejam inseridas no período letivo. É recomendável que as etapas de escolha do tema, estudo, levantamento, formulação do problema, elaboração do modelo matemático, resolução, exposição do trabalho, bem como o tempo destinado para cada uma delas sejam planejados e orientados pelo professor.
- v) *Avaliação do processo*: O processo avaliativo pode ser um fator de direcionamento do trabalho docente ou para averiguar o grau de aprendizado do aluno. Dessa forma, nessa última etapa pode-se analisar sob os aspectos, subjetivo (a observação do professor) ou objetivo (provas, exercícios e trabalhos realizados). Se for subjetivo, o professor pode avaliar: a participação, a assiduidade, o cumprimento das tarefas e o espírito comunitário. Caso objetivo sugere-se que sejam avaliados: a produção e conhecimento matemático, a produção de um trabalho de modelagem em grupo e extensão e aplicação do conhecimento. É importante que os alunos conheçam antes os aspectos avaliativos que serão adotados (BIEMBENGUT e HEIN, 2009).

No que se refere ao processo de implementação das atividades de modelagem Almeida, Silva e Vertuan (2012) aponta que é necessário levar em consideração as características do contexto da escola, especificamente o professor, os alunos e a estrutura escolar. Assim, os autores propõem três fatores importantes a serem considerados no processo de incorporação da Modelagem Matemática, em especial, na educação básica.

- *O espaço e a condução das atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar e/ou nas aulas de Matemática:*

A incorporação da Modelagem Matemática nas atividades escolares segue diferentes circunstâncias, três em particulares, a) no âmbito da própria aula de Matemática e, nessa perspectiva os conteúdos matemáticos podem ser incorporados ou aplicados por meio de atividades de Modelagem Matemática nas aulas regulares; b) em horários e espaços extraclasse, isto favorece uma melhor interação entre professor e aluno no que se refere ao atendimento de programas e currículos predeterminados; c) uma combinação destas duas perspectiva e, neste ponto as atividades são desenvolvidas parte em horários regulares e parte nos encontros extraclasse (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012).

- *Atuação do professor nas aulas com Modelagem Matemática:*

No que se refere ao papel do professor nas aulas de Modelagem Matemática, o mesmo deve agir como orientador. Isto significa que

a) orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos; b) orientar não é dar respostas prontas e acabadas, orientar não é sinalizar que “vale-tudo”; c) orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos; d) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da Função; e) orientar não é despir-se da autoridade de professor. (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 24).

- *A familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática:*

Nessa etapa é essencial que a familiarização do aluno com a modelagem seja feita de forma gradativa, dividida em três momento distintos. A priori insere-se o estudante em contato com a problemática e na fase de análise e dedução, faz-se necessário o suporte do professor. A seguir é proposta a situação problema aos grupos de alunos para que seja complementada a coleta de dados para investigação da situação problema, definição de variáveis e formulação de hipóteses. No momento final, os alunos são responsáveis pela condução do processo, realiza-se a obtenção, validação e uso do modelo matemático (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012).

Para finalizar sobre o processo de implementação da Modelagem Matemática, os autores, dizem que

Esse encaminhamento para a introdução de atividade de Modelagem Matemática em salas de aula com alunos ainda não familiarizados com esse tipo de atividade, embora não seja uma prescrição rigorosa, tem se mostrado

adequado em inúmeras experiências realizadas. A principal argumentação subjacente a essa introdução “gradativa” de atividades de modelagem reside na possibilidade que o aluno tem de desenvolver a habilidade de fazer modelagem. (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 27)

Portanto, a utilização da Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem pode ser um meio agradável para o aluno, pois ela confere significado aos conceitos matemáticos na perspectiva do tema estudado. Em certas ocasiões são necessárias algumas adaptações, mantendo as perspectivas da pesquisa e da obtenção de modelos. Na Modelagem o professor pode escolher certos modelos, e recriá-los em sala juntamente com os alunos (BIEMBENGUT e HEIN, 2009).

Para Bassanezi (2015, p.15), a utilização da Modelagem Matemática no processo de ensino aprendizagem “valoriza o ‘saber fazer’ do cursista e desenvolve sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos em seus diferentes contextos de aplicações, a partir da realidade de seu ambiente.”

Almeida Silva e Vertuan (2012) apresentam que a Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem

[...] trata-se de uma “maneira” de trabalhar com atividades na aula de Matemática. Argumentos que em atividades conduzidas segundo essa alternativa identificam-se características fundamentais: a) envolve um conjunto de ações cognitivas do indivíduo; b) envolve a representação e manipulação de objetos matemáticos; c) é direcionada para objetos e metas estabelecidas e/ou reconhecidas pelo aluno. (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 17)

O momento propício para o professor implementar a modelagem no ensino é sempre que possível, basta ter audácia, o anseio de querer mudar sua prática de ensino e principalmente interesse de conhecer e aprender. Ter um embasamento teórico sobre Modelagem Matemática, conhecer os modelos clássicos, realizar pesquisas e experiências no ensino são essenciais. A habilidade e segurança advém com a experiência, e essa realizada de forma gradativa e de acordo com tempo disponível (BIEMBENGUT e HEIN, 2009).

Entretanto, podem surgir alguns obstáculos na implementação da Modelagem Matemática, principalmente em curso regulares. *Obstáculos instrucionais*: cursos regulares tem um programa a cumprir, a modelagem pode ser demorada prejudicando o cumprimento do currículo. *Obstáculos para os estudantes*: o uso da modelagem é diferente da rotina escolar, como os estudantes não são acostumados podem se

perder durante a modelagem e perder o interesse. *Obstáculos para os professores*: vários docentes não se sentem confortáveis a trabalhar com a modelagem, seja por falta de conhecimento ou por receio de se estar em situações matemáticas que desconhecem (BASSANEZI, 2014).

Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), inserir a Modelagem Matemática no currículo da escola gera alguns problemas que não se tem solução a priori. É necessário discutir essa junção e suas especificidades com cuidado, por exemplo, como tratar uma situação em que se tenha discutido, debatido e resolvido os problemas propostos, e ainda falte conteúdo a serem contemplados conforme o programa? Ou ainda, o que fazer quando os alunos pressionam o docente para lecionar conteúdos que irão estudar somente em outros níveis?

Uma forma de enfrentar alguns desses obstáculos no trabalho de modelagem em sala seria, o “professor, fazendo uso da sua autonomia na construção do projeto político pedagógico da escola, ignora não esses conteúdos, mas a sequência de sua Aprendizagem conforme o currículo dominante, ou faz uma mescla entre a modelagem que vista à Matemática e o que temos chamado de “Ensino tradicional”: apresenta tais conteúdos desvinculados da realidade – a modelagem pela Matemática - sem uma justificativa para seu uso. Riscos existem em ambas as opções” (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2011, p. 41).

Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) a Matemática pode ser visualizada como um conjunto de ferramentas capaz de quantificar fenômenos para compreendê-los. Nesse sentido a modelagem pode ensinar a Matemática de forma diferente, que a partir das ações dos estudantes se criem mecanismos de ensino, reflexão e ação. Assim, nessa abordagem não existirá um currículo neutro e descontextualizado.

É essencial que os alunos aprendam a aprender, serem capazes por si só de lidar com as situações-problema que irão se defrontar, pois o professor não consegue abordar todo os conteúdos matemáticos que os alunos precisarão para lidar com diferentes problemas. O que compete ao professor é preparar os alunos para aprenderem formular e resolver um problema levando em conta uma leitura crítica da realidade. A maneira de cativar os alunos com essa proposta, é lidar com problemas do cotidiano extraescolar, foco esse o principal da Modelagem Matemática (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2011).

Seria relevante que o professor em sala proponha atividades de Matemática a partir de situações não matemáticas, ou seja, ir além da resolução diária de problemas com resposta definidas. A ideia é que o professor seja capaz de mostrar esta perspectiva aos alunos, relacionando a realidade vivida por eles com os conceitos matemáticos. Uma das ferramentas que pode conectar o mundo real com o universo matemático, é a modelagem (MEYER, CALDEIRA e MALHEIROS, 2011).

Finalizada a abordagem teórica sobre Modelagem Matemática apresenta-se a seguir as diferentes pandemias que aconteceram ao longo do tempo até chegar na da COVID-19, com o intuito de inteirar-se a respeito da situação-problema abordada.

2.2 BREVE RELATO DAS PANDEMIAS AO LONGO DA HISTÓRIA

O ano de 2020 iniciou com a notícia do aparecimento de uma nova doença, a COVID-19 (*Corona Vírus Disease*), transmitida por um novo coronavírus denominado SARS-CoV-2, o vírus causa uma doença potencialmente grave para o ser humano, em específico no sistema respiratório de alguns indivíduos. Os primeiros registros da doença são originários de Wuhan, na província de Hubei, China, em pessoas que se contaminaram em um mercado de frutos do mar e de animais vivos (SBP, 2020). A doença altamente infecciosa levou a OMS (Organização Mundial da Saúde) a declarar em 11/03/2020 estado de pandemia devido ao rápido aumento de casos e disseminação global (OMS, 2020).

Segundo Rezende (1998) pandemia, palavra de origem grega, formada com o prefixo neutro *pan* e *demos*, é uma definição utilizada para referir-se a uma doença que se disseminou em escala global de forma que a transmissão é sustentada. Isto significa que a doença circula livremente em vários países e continentes e é transmitida de pessoa para pessoa. O uso do termo serve para que os países sem exceção adotem medidas e ações para conter a disseminação da doença e cuidados para com os pacientes infectados.

Durante a história da humanidade ocorreram diversos surtos de doenças infecciosas causada por vírus, bactérias e outros micro-organismos. Algumas delas declaradas como epidemias e outras que evoluíram para pandemias. Essas doenças se espalharam rapidamente pelo mundo causando a morte de milhares de pessoas, em tempos em que a Medicina era pouco avançada. Adiante, apresenta-se um breve

relato histórico sobre as pandemias que assolaram o mundo e causaram grandes estragos semelhante as grandes guerras.

As doenças a seguir foram destacadas como pandemias considerando os textos de Rezende (2009), Mendes (2007), Toledo (2005), Costa e Hamann (2016), Leite, et al. (2006) e OMS (2020).

2.2.1 Peste Negra (1346-1353)

O texto a seguir está baseado em Rezende (2009).

A peste bubônica mais conhecida como peste negra, foi uma doença causada pela bactéria *Yersinia pestis*, que assolou a humanidade principalmente em meados do século XIV.

Sugere-se que registros da peste Justiniana, assim denominada devido seu surgimento nos tempos do imperador Justiniano em 542 d.C. no Império bizantino, tenha sido um dos primeiros indícios da doença (peste negra). Nessa época a peste Justiniana se espalhou pelos países asiáticos e europeus e quando atingiu Constantinopla, capital do império bizantino, causou cerca de 10 000 mortes por dia. As poucas informações que se tem sobre esta peste se deve ao relato de Procópio, um arquivista do império.

A peste negra no século XIV foi a maior e mais trágica pandemia da história já registrada, foi assim denominada devido as manchas escuras que apareciam nos infectados, a disseminação da doença ocorreu principalmente por vias terrestres e marítimas. Segundo o autor, em 1334 a doença causou 5 milhões de mortos na Mongólia e China. Houve também registros de mortos na Mesopotâmia, Síria, Cairo e Alexandria, estima-se que 24 milhões de pessoas morreram nos países do Oriente.

Em 1347 a Crimeia, o arquipélago grego e a Sicília também foram atingidos pela doença. Em 1348 as embarcações da Crimeia ao aportar em Marselha, sul da França, disseminaram a doença no país. Em 1349 a peste chegou a Itália e se disseminou por toda a Europa e estima-se que a Europa tenha perdido 1/3 da população naquela época.

Durante a pandemia a população desesperada buscava uma explicação para a calamidade. Diziam se tratar de um castigo divino, punição pelos pecados da humanidade, chegaram a culpar os judeus, nos quais foram perseguidos e

massacrados. Atribuía-se também a disseminação da peste a pessoas que estariam contaminando as portas, bancos, paredes, com unguento pestífero. Muitos suspeitos foram queimados vivos e enforcados.

Entretanto, em meio a tanta irracionalidade, houve relatos positivos, como de muitos médicos que arriscando a própria vida se disponibilizaram a atender os enfermos e frades e jesuítas cuidaram de doentes em Marselha. Foi criada a *Confraria dos Loucos* que buscava a proteção de São Sebastião e São Roque, que foram os escolhidos como padroeiro dos enfermos em decorrência da doença.

A doença continuou presente na forma endêmica por muitos anos e outras epidemias menores ocorreram no século seguinte. Os surtos mais relevantes ocorreram em Milão, Brescia e Veneza no século XVI, Nápoles em 1656, Londres em 1655, Viena em 1713 e Marselha em 1720. Entre 1894 e 1912 ocorreu uma outra pandemia que iniciou na Índia e estendeu-se à China e Estados Unidos. No Brasil, a peste chegou em 1889 pelo Porto de Santos e se propagou pelas cidades litorâneas. A partir de 1906 a peste foi banida dos centros urbanos, permanecendo em pequenos focos endêmicos.

2.2.2 Cólera (1817-1923)

A Cólera é uma doença causada pela bactéria *Vibrio cholerae*, a transmissão ocorre devido a ingestão de alimentos ou água contaminados por secreções de uma pessoa infectada. Os sintomas apresentados pela doença são a diarreia e o vômito, em casos mais graves, desidratação severa, choque hipovolêmico (perda excessiva de líquidos e sangue), coma e morte. Na maioria dos casos a infecção está relacionada as condições sanitárias, principalmente relacionadas a água (MENDES, 2007).

A literatura registra o início da Cólera no século XIX, em 1817 que se alastrou até 1823, marcando assim a primeira pandemia da doença. Originária dos nichos ecológicos da Índia, a doença se propagou pela região de Bengala e do Delta do Ganges e por toda a Europa e Américas, devido as operações militares e das novas rotas de comércio dos ingleses (SANTOS, 1994).

A segunda pandemia da cólera ocorreu de 1829 a 1851, originando novamente do Delta do Ganges a doença refez seu trajeto, que devido as campanhas militares

veio a infectar a Polônia e com o transporte marítimo disseminou a doença na Inglaterra. Em 1832 a pandemia chegou na América devido à corrente migratória da Irlanda, que àquela altura já possuía a doença e dali a doença prosseguiu atingindo o México em 1833 (COLWELL, 1996, *APUD*, MENDES, 2007).

A terceira pandemia desta doença ocorreu entre 1852 e 1859. Em 1855 esta pandemia atingiu o Brasil pela primeira vez. A quarta pandemia se deu entre 1863 e 1879 e a quinta entre 1881 e 1896 e a sexta entre 1899 e 1923. Em 1884 o bacteriologista alemão Robert Koch (1843-1910) identificou o agente causador da doença a partir da água de um tanque em Calcutá, Índia. A água era destinada para consumo e foi contaminada devido à lavagem de roupa de cama de um doente da região. Devido as melhorias no saneamento básico de diversos países, acreditou-se na época que, não haveria outra pandemia de cólera, no entanto, em 1961 ocorreu outra pandemia que surgiu na Indonésia espalhando-se rapidamente pelo mundo (COLWELL, 1996, *APUD*, MENDES, 2007).

2.2.3 Varíola (Século XIV)

O texto a seguir está baseado em Toledo Júnior (2005).

A Varíola é causada pelo vírus *Poxvirus variolae*, a doença permeou a sociedade entre os séculos X e XX. Como outras doenças causadas por vírus, a transmissão da varíola ocorreu por vias respiratórias, isto é, geralmente um indivíduo é infectado quando inala gotículas expelidas de uma pessoa contaminada pelo vírus.

Os relatos iniciais da doença ocorreram na era cristã, a partir do século IV, devido a concentração de pessoas e o surgimento de grandes cidades ao longo dos vales dos rios Nilo, Tigre, Eufrates, Ganges, Amarelo e Vermelho. Entretanto, lesões cicatriciais de 3 múmias do período de 1580 a 1100 a.C sugerem que a origem da doença ocorreu no Egito. Nos séculos IV e V d.C, devido as rotas mercantilistas a doença se propagou entre a atual Grécia e Itália. No século VIII e IX a expansão islâmica introduziu a doença na África e na Península Ibérica. Ainda no século VIII a doença foi disseminada na Europa devido a volta dos Mouros para casa. Entre os séculos XI e XV, a varíola alcança aproximadamente todo território europeu.

As mais trágicas epidemias dessa doença ocorreram nos séculos XVII e XVIII, o primeiro caso da doença nas américas, ocorreu em 1507, importado da Espanha, a

doença dizimou metade da população da atual República Dominicana e Taiti. Em muitos países, a propagação da doença era devido ao tráfico de escravos, que apresentavam condições que favorecia a transmissão do vírus.

Em todo o continente os povos nativos foram os mais atingidos, ocasionando até a extinção de alguns deles. No Brasil os relatos iniciais ocorreram em 1555 no estado do Maranhão, a doença foi introduzida por colonos franceses. Em 1560 ocorreu uma epidemia no país devido ao tráfico de escravos africanos, já em 1562 a doença foi introduzida no país pelos próprios portugueses. Graças as sucessivas campanhas de vacinação, a varíola foi erradicada em 1980.

2.2.4 Gripe Espanhola (1918-1920)

O texto a seguir está baseado em Costa e Hamann (2016).

A gripe espanhola, causada pelo vírus Influenza A do subtipo H1N1, foi umas das mais severas pandemias que ocorreu no planeta, a doença esteve presente nos anos de 1918 e 1919 e gerou milhões de mortes, principalmente entre a população mais jovem. Segundo os autores é possível que a origem da gripe espanhola tenha ocorrido na China ou em campos militares dos Estados Unidos.

Na Europa os registros iniciais da doença ocorreram em 1918 em tropas francesas, transmitida provavelmente pelos auxiliares chineses. O transporte de trabalhadores entre EUA (Estados Unidos da América), Europa e outras partes do mundo durante a 1ª Guerra Mundial contribuiu para a propagação da doença. O nome de “gripe espanhola” é devido ao fato das maiores informações sobre a doença terem transmitidas pela Espanha que estava neutra nesta guerra.

Em agosto de 1918 teve início a 2ª onda da gripe que atingiu o pico de contágio entre os meses de setembro e novembro. Mais violenta que a 1ª, essa nova pandemia se alastrou pela Europa, EUA, Índia, Japão, China, África, América Central e do Sul, provocando elevados índices de mortalidade. A última pandemia da doença ocorreu em fevereiro de 1919 e finalizando em maio do mesmo ano. Estima-se que a pandemia tenha infectado cerca de 50% do mundo, 25% tenham sofrido uma infecção clínica e a mortalidade esteve entre 40 e 50 milhões de pessoas, 38 milhões dos óbitos ocorreram na Europa e América.

A epidemia chegou ao Brasil em setembro de 1918 por meio dos navios europeus que atracaram nos portos brasileiros. Em pouco tempo a doença atingiu várias cidades do nordeste e ao final de outubro as maiores cidades do país já haviam sido infectadas. A expansão da doença ocasionou o isolamento das pessoas com medo do contato humano, sem saber lidar com o problema as autoridades brasileiras e imprensa colocaram em dúvida a ocorrência da doença, mostrando a fragilidade das políticas de saúde do país. A doença causou caos sanitário, desordem social, crise política e inúmeras mortes.

No Brasil os números da doença foram informados parcialmente, visto a gravidade da situação e por vários óbitos não serem notificados para as autoridades sanitárias. Nas cidades de São Paulo e Rio de Janeiro estimam-se que morreram 35.240 pessoas no mínimo, número bem inferior ao contexto e gravidade da doença. Segundo a diretoria de saúde, ocorreram 600 mil casos de pessoas infectadas pela doença e que a mortalidade foi próxima de 2%.

2.2.5 Gripe Asiática (1957-1960)

O texto a seguir está baseado em Costa e Hamann (2016).

A gripe asiática teve origem em fevereiro de 1957 na China e se disseminou também em 1958, em ambas as ocorrências as infecções e mortalidades foram grandes, mesmo que menor que a pandemia de 1918, levou a óbito cerca de 4 milhões de pessoas. Em maio de 1957 a OMS recebeu as primeiras notificações da doença e previu uma epidemia em grande escala. Amostras do novo vírus foram localizadas e encaminhadas aos laboratórios para produção de vacinas.

A disseminação da doença pelo mundo foi rápida, estima-se que em seis meses o mundo inteiro estava contaminado, muito devido as rotas marítimas de Hong Kong a Cingapura e Japão e a ferrovia transiberiana para União Soviética. A gripe afetou entre 40 e 50% da população mundial, desse percentual, de 25 a 30% apresentaram a forma clínica típica da doença, benigna. A incidência da doença foi de mais de 50% nas pessoas de 5 a 19 anos de idade.

O vírus causador da pandemia era denominado Influenza A/Cingapura/1/57(H2N2), com as glicoproteínas HA e NA diferentes de todos os tipos anteriores. A identificação do vírus ocorreu inicialmente no Japão em 1957 e adiante

no Reino Unido e EUA. O pico da doença nesses respectivos países ocorreu em outubro de 1957.

Os primeiros casos no Brasil foram registrados em julho e agosto de 1957, o surto inicial ocorreu em Uruguaiana, Rio Grande do Sul, o vírus foi identificado e isolado. Um estudo realizado em Porto Alegre entre 15/08 a 31/10/1957, indicou que 1/3 da população foi infectada, a maior incidência ocorreu em indivíduos de baixa renda. O estudo ainda apontou que 34% da população de Porto Alegre contraiu a gripe asiática. O vírus da gripe asiática que circulou até 1968, seguiu-se a variante do agente viral da "Gripe de Hong Kong".

2.2.6 Gripe de Hong Kong (1968-1969 e 1977-1978)

Em 1968 ocorreu o surgimento de um novo vírus, o microrganismo era uma variação/mutação da influenza A (H3N2). A epidemia da doença atingiu inicialmente Hong Kong em julho de 1968, mas se expandiu por todo o mundo. A hipótese é que o vírus tenha surgido na China seguindo a mesma linha de propagação da gripe asiática.

O vírus foi isolado em Hong Kong neste mesmo ano (1968) e observado uma maior incidência em pessoas de 10 a 14 anos, a mortalidade era maior entre idosos, jovens e pessoas com doenças cardiopulmonares. No Brasil o vírus foi identificado e isolado em janeiro de 1969 pela IAL/SP (Instituto Adolfo Lutz). Durante esse período foram definidos por decretos as incumbências do Ministério da Saúde, se tratavam de medidas com intuito de ação preventiva perante a pandemia (COSTA e HAMANN, 2016).

Em outubro de 1968 o vírus atingiu parte da Ásia e África, nos EUA os primeiros casos foram registrados na Califórnia e se alastrando por todo o país ao final desse ano. A Europa foi atingida somente ao final de 1968 e início de 1969, tendo assim duas ondas da epidemia, de forma geral a doença foi moderada causando poucos óbitos em vista de outras pandemias de influenza. Pesquisas coordenadas pela Organização Mundial de Saúde - OMS analisaram as características do vírus mas não conseguiram determinar a grau de disseminação da doença nem se estava associado a gripe de 1957, gripe asiática. Estima-se que a pandemia tenha causado a morte de cerca de 1 milhão de pessoas (GEORGE, 2006).

2.2.7 AIDS (1980)

O texto a seguir está baseado em Leite, *et al.* (2006).

A AIDS é causada pelo Vírus da Imunodeficiência Humana (HIV), é um retrovírus com genoma RNA, da família *Lentiviridae*, são citopáticos e não-oncogênicos [...] transmissão ocorre através do sangue, fluido vaginal e seminal, sêmen e o leite materno contaminados pelo HIV. A probabilidade de contrair o vírus aumenta quando o indivíduo está exposto a situações de risco, tais como: manter relações sexuais com pessoa infectada sem proteção; continuar mantendo relações sexuais sem proteção mesmo sabendo que tem DST; compartilhar a mesma agulha ou seringa ao utilizar drogas injetáveis. (LEITE, *ET AL.*, 2006, p. 7)

Em 1980 começou a ser registrado vários casos em homossexuais com Sarcoma de Kaposi, pneumonia por *Pneumocystis carinii* e comprometimento do sistema imune, a síndrome foi denominada de GRID – *Gay Related Immunodeficiency* (Deficiência imunológica relacionada a Gays). Em junho de 1981 nos EUA foi publicado em um artigo que uma nova doença estava levando a falência do sistema imunológico dos pacientes, ainda nesse ano foram registrados os 2 primeiros casos da doença (AIDS) na Dinamarca e Reino Unido.

Em 1982 a doença foi rebatizada como AIDS - *Acquired Immunodeficiency Syndrome* (Síndrome da Imunodeficiência Adquirida) devido ao aparecimento da doença em usuário de drogas e pessoas que receberam transfusão de sangue. No mesmo ano foi registrado o primeiro caso no Brasil, um homossexual de São Paulo.

Em 1983 foi detectado o agente etiológico da AIDS, o vírus foi isolado em um paciente que continha a doença. O laboratório americano Abbot começa a testar em 1984 o primeiro teste sorológico para identificar o vírus no organismo. No Brasil em 1985 foi criado o Programa Nacional de Combate à AIDS, ainda nesse ano foi divulgado a estrutura química do vírus. Em 1987 com a criação da Comissão Nacional de AIDS tornou-se obrigatório a testagem de todo sangue doado. Em 1988 no Brasil ocorre a primeira campanha de esclarecimentos sobre a doença, contou com apoio da TV e rádio além da entrega de folhetos e cartazes. Ainda nesse ano uma portaria do Ministério do Trabalho concede benefícios portadores da doença.

Em 1990 existiam 19.662 pessoas doentes pelo mundo entre homens, mulheres e crianças. Os EUA aprovam um medicamento ddl (inibidor de transcriptase reversa), para combater a doença e a OMS informa que pelo menos 10 milhões de

peças continha o vírus da AIDS, isso em 1991. A AIDS se tornou a doença infecciosa mais letal do mundo, ultrapassando a tuberculose se tornando a quarta causa de mortes segundo a OMS. Em 1999 a Nevirapine se torna o principal tratamento para prevenir a transmissão vertical da doença. Segundo a UNAIDS cerca de 40 milhões de pessoas conviviam com a doença até 2003.

É importante lembrar que aparecem sinais e sintomas comuns a outras doenças, por isso faz-se necessário a avaliação de um profissional para seu diagnóstico juntamente com resultados de exames laboratoriais. São eles: suor noturno intenso; febre diária (de até 38,5°C); sensação constante de cansaço mesmo em repouso; diarreia persistente e duradoura; aumento dos linfonodos da cabeça, pescoço, axilas, região genital; emagrecimento superior a 10% em 30 dias, sem causa aparente; dispnéia; falta de apetite; perda de massa muscular; tosse persistente; dermatites; herpes, e outros”.

2.2.8 Gripe Suína (2009-2010)

A gripe suína teve origem no México em 2009 e rapidamente se espalhou pelo mundo, dando origem a uma pandemia declarada pela OMS em 11 de junho de 2009. No primeiro ano (2009) de circulação o vírus influenza A (H1N1) causou o óbito de cerca de 12.800 pessoas, com a maior taxa de mortalidade ocorrendo nos EUA, com cerca de 76,9 mortos a cada 10.000 habitantes (BELLEI E MELCHIOR, 2011).

A doença foi denominada “gripe suína” devido em abril de 2009 nos EUA quando identificado os primeiros casos, o CDC (*Centers for Disease Control and Prevention*) de Atlanta confirmou que o vírus que causara a pandemia de gripe foi transmitido pelos suínos aos seres humanos, devido a mutação genética, o vírus tinha em seu genoma estruturas muito parecidas com as do vírus Influenza A que ocorre com frequência todos os anos (CLAUDINO, TANAKA E AMARAL, 2010).

Claudino, Tanaka e Amaral (2010) afirmam que no Brasil as notificações iniciais da doença ocorreram em abril de 2009, os primeiros casos confirmados foram em São Paulo, Rio de Janeiro e Minas Gerais, devido as visitas recentes a países contaminados como México e EUA. Entre abril e agosto de 2009 tiveram quase 20.000 casos de pessoas com sintomas de algum tipo de gripe, desse total, 2.959 tiveram a confirmação de Influenza A, colocando o país como um dos mais infectados pela

doença, no mesmo período, a OMS colocou o Brasil em terceiro no ranque de mortes. Segundo Bellei e Melchior (2011) durante a pandemia de 2009 ocorreram 2.051 óbitos e mais 44.000 casos confirmados da doença, com maior incidência em crianças e jovens.

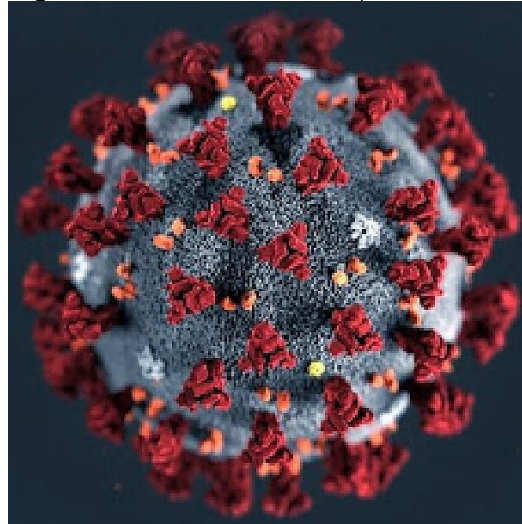
A pandemia de gripe suína foi considerada uma doença de moderada severidade, com sintomas parecidos da gripe sazonal, tosse, febre elevada e dor de garganta. Os jovens foram os mais afetados, predominando os casos mais graves e fatais, uma particularidade, já que as gripes costumam afetar com mais gravidade pessoas com mais de 65 anos. Também houve uma baixa letalidade em gestantes e pessoas com algum tipo de comorbidade. A pandemia de 2009 mostrou a necessidade de um sistema de vigilância eficaz para detectar vírus emergentes com potencial pandêmico (COSTA e HAMANN, 2016).

2.2.9 COVID-19 (2019)

O texto a seguir está baseado em Singhal (2020) e informações da OMS.

Segundo o referido autor, os coronavírus são vírus de RNA de sentido positivo com envelope, seu diâmetro gira em torno de 60 *nm* a 140 *nm*, compostos em sua superfície por projeções pontosas, esse aspecto fornece ao vírus uma aparência de coroa, daí o nome, coronavírus, conforme ilustra a Figura 1. Até então circulavam entre a população mundial 4 vírus corona, HKU1, NL63, 229E e OC43, causadores de doença respiratória leve.

Figura 1 - Novo Coronavírus (SARS-CoV-2)



Fonte: <https://www.gov.br/pt-br>.

Nas últimas décadas ocorreram dois eventos associados ao vírus betacorona que culminaram em infecções graves nos seres humanos. O primeiro em 2002-2003 quando um novo coronavírus, com origem em morcegos, afetou cerca de 8.422 pessoas na China e Hong Kong, causando 916 óbitos. O segundo ocorreu em 2012 o coronavírus da síndrome respiratória do Oriente Médio (MERS-CoV), também de origem morcego, afetou 2494 pessoas e gerou 858 mortes.

Em dezembro de 2019, foi registrado em Wuhan, capital da província de Hubei, China, casos de pneumonia grave por causas desconhecidas, muitos desses casos foram de indivíduos que foram expostos em um mercado atacadista de frutos do mar de Huanan, que também comercializava animais vivos. O sistema de vigilância sanitária entrou em ação para investigações, e em 31/12/2019 a China comunicou a OMS de um possível surto de SARS, imediatamente o mercado de frutos do mar foi fechado.

Em janeiro de 2020 o vírus foi identificado como um novo coronavírus, possuía cerca de 95% de homologia com o coronavírus de morcego e 70% de similaridade com o SARS-CoV. Os aumentos de casos ocorreram de forma rápida, registrados inclusive em pessoas que não foram expostas ao mercado de Wuhan, o que sugeria uma transmissão comunitária sustentada, isto é, o vírus está circulando entre as pessoas. A migração de chineses devido ao ano novo chinês fez com que a epidemia se alastrasse a outras províncias da China e a outros países como Tailândia, Japão e Coreia do Sul. Inicialmente, os 11 milhões de habitantes de Wuhan foram colocados sobre restrições de entrada e saída da cidade.

Casos começaram a ser registrados também em pessoas que não viajaram para China, reforçando que a transmissão estava ocorrendo de pessoa para pessoa. Dessa forma, os aeroportos de vários países começaram a fazer triagem de pessoas que vieram da China para testagem de COVID-19. Os aumentos de casos continuaram e estima-se que a duplicação de casos ocorria a cada 1,8 dias. Em 05/03/2020 já tinham sido registrados 96.000 casos em todo o mundo, 80.000 somente na China.

Todos são suscetíveis a infecção, que ocorre geralmente por meio de gotículas expelidas durante a tosse ou espirro de uma pessoa infectada, entretanto, a transmissão pode ocorrer também por pessoas assintomáticas e antes de apresentar os sintomas. A transmissão pode ocorrer enquanto durar os sintomas e até mesmo

durante a recuperação. Estudos comprovam que as maiores cargas virais estão localizadas na cavidade nasal e não na garganta.

As gotículas expelidas podem se espalhar por até 2 metros e se fixar em superfícies e continuar ativo por dias, desde que em condições favoráveis. A eliminação pode ser feita por desinfetantes comuns que contenha hipoclorito de sódio, peróxido de hidrogênio, etc. A infecção ocorre quando um indivíduo inala uma dessas gotículas ou ao tocar em superfícies contaminadas e leva a mão aos olhos, nariz ou boca. O período de incubação da doença gira em de 2 a 14 dias.

Os sintomas registrados causados pela COVID-19, incluem, febre (não em todos), tosse, coriza, dor de garganta, dor de cabeça, fadiga, mialgia, conjuntivite, falta de ar, anosmia, ageusia, etc. Já o estado do infectado pode variar de assintomático a síndrome do desconforto respiratório agudo e disfunção de múltiplos órgãos. Em alguns casos a doença pode progredir para pneumonia, insuficiência respiratória e morte. Os óbitos são mais comuns em idosos e em pessoas com comorbidades subjacentes, com taxa de letalidade entre 2 e 3%.

Os casos suspeitos são definidos a partir dos sintomas de febre, dor de garganta e tosse, entretanto, os casos podem ser assintomáticos ou mesmo sem febre. O diagnóstico preciso deve ser feito com bases em testes sanguíneos ou amostras respiratórias. O PCR (Proteína C- Reativa) é um teste molecular que identifica o material genético do vírus, para tanto, retira-se uma amostra de secreção nasal, garganta ou escarro. Indica-se para os primeiros dias após o início dos sintomas, não recomendado após sete dias. No caso dos testes sorológicos, IgG (imunoglobulina G) e IgM (imunoglobulina M), verifica-se os anticorpos presentes no sangue, substância produzida pelo organismo para neutralizar o vírus. No caso da COVID-19 os anticorpos só aparecem cerca de 7 dias após os sintomas.

Não existe no momento nenhum tratamento aprovado para pessoas infectadas pelo novo coronavírus, inicialmente deve-se isolar adequadamente o paciente a fim de evitar a transmissão para outras pessoas. O tratamento se restringe a administração de oxigênio a pacientes em estado graves e suporte respiratório como ventilação mecânica em casos críticos (OMS, 2020).

Para prevenir a infecção causada pelo novo coronavírus recomenda-se: lavar as mãos com água e sabão ou limpar com gel hidroalcoólico com frequência, manter uma distância mínima de 1 metro entre as pessoas que tosse ou espirram, evitar

tocar no rosto, cobrir a boca e o nariz ao tossir ou espirrar, ficar em casa se não estiver bem, evitar fumar e outras atividades que enfraquecem os pulmões, respeitar o distanciamento físico evitando viagens desnecessárias e mantendo-se longe de grandes grupos de pessoas (OMS, 2020).

As vacinas funcionam como um mecanismo de preparação para que o organismo (sistema imunológico) reconheça e possa combater vírus e bactérias que o atacam. Existem mais de 60 vacinas em desenvolvimento contra a COVID-19, o trabalho está sendo executado em conjunto OMS, cientistas, empresas e organizações globais de saúde. Até o momento (15/02/2021) existem duas vacinas aprovadas pela OMS para uso emergencial, a mRNA Comirnaty desenvolvida pela *Pfizer/BioNTech* listada em 31/12/2020 e duas versões da vacina AstraZeneca/Oxford COVID-19 produzidas pela AstraZeneca-SKBio (República da Coréia) e pelo *Serum Institute of India*, incluída em 15/02/2021 (OMS, 2021).

3 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS E MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR

Este capítulo é dedicado a apresentar a fundamentação teórica para obtenção de modelos matemáticos utilizando o Método dos Mínimos Quadrados para ajuste de curvas com dados conhecidos e também do Modelo Epidemiológico SIR (Susceptível, Infectado e Removido) básico.

3.1 AJUSTE DE CURVAS POR MEIO DO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Segundo Bassanezi (2014) no século XIX, Sir Francis Galton realizou um estudo sobre a relação entre a altura de pais e filhos e constatou que havia um decréscimo na média dos valores encontrados entre as gerações. Ele estabeleceu este fato de regressão genética, e por algum motivo desconhecido descreveu este achado como “*regression to mediocrity*”. Uma regressão ou ajuste de curvas busca expressar alguma tendência da variável y quando relacionada com a variável independente x .

Segundo o autor, quando estamos modelando uma situação problema com dados numéricos, em geral, busca-se compreender as informações contidas na curva de regressão $y = f(x)$ e também verificar se é possível fazer previsões da variável dependente y quando a variável independente x vai além do intervalo dos dados. No entanto, como para se fazer um ajuste de curvas é escolhido, a priori, o tipo de curva que se deseja expressar a relação funcional entre as variáveis, nem sempre são garantidas as condições para a realização de previsões.

Em geral um modelo depende de parâmetros que são obtidos de modo que a curva ajustada, represente, o mais próximo, o fenômeno que está sendo estudado. Um método utilizado para a determinação destes parâmetros é o Método dos Mínimos Quadrados, conforme detalhado a seguir.

Considere um conjunto de n dados observados $\{\bar{x}_i, \bar{y}_i\}, i = 1, 2, 3, \dots, n$ e uma função $y(x) = f(x; a_1, a_2, \dots, a_k)$, onde $a_j (j = 1, \dots, k)$ são os parâmetros - o **Método dos Quadrados Mínimos** consiste em determinar estes parâmetros de modo que minimize o valor de

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i; a_1, \dots, a_k) - \bar{y}_i]^2 \quad (1)$$

isto é, devemos minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores \bar{y}_i , observados e os valores $y_i = f(\bar{x}_i; a_1, \dots, a_k)$ ajustados. (BASSANEZI, 2014, p. 57).

3.1.1 Ajuste Linear

Sejam n pontos $(\bar{x}_i, \bar{y}_i), i = 1, 2, 3, \dots, n$ distribuídos em \mathbb{R}^2 , o ajuste linear consiste em determinar a melhor equação da reta $y(x) = f(x; a, b) = ax + b$, por meio do Método dos Mínimos Quadrados, que se ajusta aos n pontos tabelados. Como são conhecidas as coordenadas dos pontos, é possível encontrar os valores dos parâmetros a e b que tornam o mínimo o valor da soma dos Quadrados dos desvios. Portanto, é necessário determinar os pontos críticos da função, ou seja, pontos onde as derivadas parciais resultam em zero.

Logo, seja S uma função de duas variáveis a e b :

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i; a, b) - \bar{y}_i]^2 = \sum_{i=1}^n [(a\bar{x}_i + b) - \bar{y}_i]^2 \quad (2)$$

Para obter os pontos críticos, tais valores devem satisfazer às condições:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n (a\bar{x}_i + b - \bar{y}_i) \cdot (\bar{x}_i) = 0 \quad (I) \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n (a\bar{x}_i + b - \bar{y}_i) \cdot (1) = 0 \quad (II) \end{cases} \quad (3)$$

Da equação (I):

$$\sum_{i=1}^n a\bar{x}_i^2 + \sum_{i=1}^n b\bar{x}_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i\bar{y}_i = 0$$

Da equação (II):

$$\sum_{i=1}^n a\bar{x}_i + \sum_{i=1}^n b - \sum_{i=1}^n \bar{y}_i = 0$$

Resultando em um sistema de equações com duas equações e duas variáveis:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + b \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i\bar{y}_i \\ a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i + nb = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \end{cases} \quad (4)$$

Reescrevendo o sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 & \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \\ \sum_{i=1}^n \bar{x}_i & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i \\ \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \end{bmatrix}$$

Aplicando a Regra de Cramer para determinar os parâmetros a e b obtém-se:

$$D = n \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \right)^2; D_a = n \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i - \left(\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \right); D_b = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i \right)$$

Logo:

$$\begin{cases} a = \frac{D_a}{D} \\ b = \frac{D_b}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{n \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \sum_{i=1}^n \bar{y}_i}{n \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 - (\sum_{i=1}^n \bar{x}_i)^2} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i}{n \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 - (\sum_{i=1}^n \bar{x}_i)^2} \end{cases} \quad (5)$$

3.1.2 Ajuste Quadrático

O ajuste quadrático consiste em determinar a melhor equação da parábola $y(x) = f(x; a, b, c) = ax^2 + bx + c$ que se ajusta aos n pontos dados. Assim, é necessário encontrar os valores dos parâmetros a , b e c que tornam mínimo o valor da soma dos quadrados dos desvios.

Seja:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i; a, b, c) - \bar{y}_i]^2 = \sum_{i=1}^n [(a\bar{x}_i^2 + b\bar{x}_i + c) - \bar{y}_i]^2 \quad (6)$$

Para o mínimo de S :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n [(a\bar{x}_i^2 + b\bar{x}_i + c) - \bar{y}_i] \cdot (\bar{x}_i^2) = 0 \quad (I) \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n [(a\bar{x}_i^2 + b\bar{x}_i + c) - \bar{y}_i] \cdot (\bar{x}_i) = 0 \quad (II) \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n [(a\bar{x}_i^2 + b\bar{x}_i + c) - \bar{y}_i] \cdot (1) = 0 \quad (III) \end{cases} \quad (7)$$

Da equação (I):

$$\sum_{i=1}^n a\bar{x}_i^4 + \sum_{i=1}^n b\bar{x}_i^3 + \sum_{i=1}^n c\bar{x}_i^2 - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 \bar{y}_i = 0$$

Da equação (II):

$$\sum_{i=1}^n a\bar{x}_i^3 + \sum_{i=1}^n b\bar{x}_i^2 + \sum_{i=1}^n c\bar{x}_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i\bar{y}_i = 0$$

Da equação (III):

$$\sum_{i=1}^n a\bar{x}_i^2 + \sum_{i=1}^n b\bar{x}_i + \sum_{i=1}^n c - \sum_{i=1}^n \bar{y}_i = 0$$

Resultando em um sistema três por três:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^4 + b \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^3 + c \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 \bar{y}_i \\ a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^3 + b \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + c \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i \\ a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + b \sum_{i=1}^n \bar{x}_i + nc = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \end{cases} \quad (8)$$

Portanto, para obter os valores dos parâmetros a , b e c de $y(x) = ax^2 + bx + c$, basta resolver o sistema da equação 8.

3.1.3 Ajuste Polinomial

Usando o ajuste quadrático, pode-se generalizar a ideia para um polinômio de grau m . Portanto, sejam n pontos $(\bar{x}_i, \bar{y}_i), i = 1, 2, 3, \dots, n$ e $y(x) = f(x; a_0, a_1, a_2, \dots, a_m) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ o polinômio aproximar que se quer determinar, sendo assim, faz-se necessário determinar as incógnitas $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$.

Então, seja S uma função de m variáveis, definida por:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(x; a_0, a_1, a_2, \dots, a_m) - \bar{y}_i]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{x}^2 + \dots + a_m\bar{x}^m) - \bar{y}_i]^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Para que ocorra o mínimo de S tem-se que:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + \dots + a_m \bar{x}_i^m) - \bar{y}_i] \cdot (1) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + \dots + a_m \bar{x}_i^m) - \bar{y}_i] \cdot (\bar{x}_i) = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0 \Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n [(a_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + \dots + a_m \bar{x}_i^m) - \bar{y}_i] \cdot (\bar{x}_i^m) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Resultando no sistema a seguir:

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i + a_2 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^m = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i + a_1 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \bar{x}_i \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^{2m} = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \bar{x}_i^m \end{cases} \quad (11)$$

3.1.4 Ajuste Linear do Modelo Exponencial

Para um conjunto de pontos, o Ajuste de Curvas do tipo exponencial é da forma:

$$y(x) = be^{ax}, b > 0 \quad (12)$$

A Função $y(x)$ pode ser ajustada por meio da seguinte transformação:

$$\ln(y) = \ln(be^{ax}) = \ln b + ax$$

Considerando a mudança de variável $z = \ln(y)$ e $\beta = \ln b$, obtém-se a equação na forma de uma reta:

$$z = ax + \beta \quad (13)$$

Considerando a equação (4) do ajuste linear:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + n\beta = \sum_{i=1}^n z_i \end{cases} \quad (14)$$

Logo:

$$\begin{cases} a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i z_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n z_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ \beta = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i z_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \end{cases} \quad (15)$$

Assim pode-se determinar os valores de a e b e tomando $\beta = \ln b \Leftrightarrow b = e^\beta$.

3.1.5 Ajuste Linear do Modelo Logarítmico

De forma análoga ao ajuste exponencial, o Ajuste de Curvas do tipo logarítmico é da forma:

$$y(x) = a \cdot \ln(x) + b \quad (16)$$

Considerando a mudança de variável $\theta = \ln(x)$, obtém-se a equação na forma de uma reta:

$$y(x) = a \cdot \theta + b \quad (17)$$

Considerando a equação (4) do ajuste linear:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n \theta_i^2 + b \sum_{i=1}^n \theta_i = \sum_{i=1}^n \theta_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n \theta_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (18)$$

Logo:

$$\begin{cases} a = \frac{n \sum_{i=1}^n \theta_i y_i - \sum_{i=1}^n \theta_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n \theta_i^2 - (\sum_{i=1}^n \theta_i)^2} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n \theta_i^2 - \sum_{i=1}^n \theta_i \sum_{i=1}^n \theta_i y_i}{n \sum_{i=1}^n \theta_i^2 - (\sum_{i=1}^n \theta_i)^2} \end{cases} \quad (19)$$

3.1.6 Ajuste Linear da Função Potência

Sejam um conjunto de n pontos (x_i, y_i) , de forma análoga ao ajuste exponencial e logarítmico, no ajuste linear da função potência (ou de um modelo geométrico) é preciso fazer a linearização da curva do tipo:

$$y(x) = b \cdot x^a, b > 0 \quad (20)$$

Sendo assim, aplicando a função \ln em ambos os membros da equação (20), tem-se:

$$\ln(y) = \ln(b \cdot x^a) = a \cdot \ln x + \ln b \quad (21)$$

Fazendo a mudança de variável $z = \ln(y)$, $\beta = \ln b$ e $\delta = \ln x$, obtém-se a equação na forma de uma reta:

$$z = a\delta + \beta \quad (22)$$

Considerando novamente a equação (4) do ajuste linear:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n \delta_i^2 + \beta \sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n \delta_i z_i \\ a \sum_{i=1}^n \delta_i + n\beta = \sum_{i=1}^n z_i \end{cases} \quad (23)$$

Logo:

$$\begin{cases} a = \frac{n \sum_{i=1}^n \delta_i z_i - \sum_{i=1}^n \delta_i \sum_{i=1}^n z_i}{n \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - (\sum_{i=1}^n \delta_i)^2} \\ \beta = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - \sum_{i=1}^n \delta_i \sum_{i=1}^n \delta_i z_i}{n \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - (\sum_{i=1}^n \delta_i)^2} \end{cases} \quad (24)$$

Assim pode-se determinar os valores de a e b e tomando $\beta = \ln b \Leftrightarrow b = e^\beta$.

3.1.7 Ajuste Linear do Modelo Exponencial Assintótico

O ajuste assintótico é utilizado quando existe uma tendência de estabilidade dos dados, neste caso, a curva é dada pelo modelo exponencial assintótico da forma:

$$y = Y^* - be^{ax} \quad (Y^* > 0 \text{ e } a < 0) \quad (25)$$

Sendo Y^* o valor da capacidade suporte que pode ser obtido pelo Método de Ford-Walford, tratado a seguir.

Aplicando a função logarítmica em ambos os membros da igualdade, tem-se:

$$\ln(y - Y^*) = \ln(-be^{ax}), \text{ se } b < 0$$

$$\ln(Y^* - y) = \ln(-be^{ax}), \text{ se } b > 0$$

Fazendo a mudança de variável:

$$\begin{cases} z = \ln(y - Y^*), \text{ se } b < 0 \\ z = \ln(Y^* - y), \text{ se } b > 0 \end{cases}$$

Tem-se que:

$$z = \ln(|b|e^{ax}) = \ln|b| + \ln e^{ax}$$

Considerando $\beta = \ln b$, obtém-se a equação na forma de uma reta:

$$z = ax + \beta \quad (26)$$

O valor de Y^* pode ser obtido pelo Método de Ford-Walford apresentado a seguir:

Método de Ford-Walford

Considere um conjunto de dados $\{(x_n, y_n)\}, n = 1, 2, \dots, k$, supondo que y_n tenha crescimento Assintótico, ou seja, na medida que x_n aumenta, y_n converge para um valor limite Y^* de modo que:

$$Y^* = \lim_{x_n \rightarrow \infty} y_n$$

O Método consiste em determinar uma função g que ajuste os pares (y_n, y_{n+1}) , ou seja, $y_{n+1} = g(y_n)$ (curva ajustada) e em seguida encontrar um ponto fixo. Sendo assim:

$$g(Y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = \lim_{x_n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{x_n \rightarrow \infty} y_n = Y^*$$

Desse modo, a sequência de pontos (y_n, y_{n+1}) converge para o ponto (Y^*, Y^*) , se Y^* for ponto fixo da função g . E assim, $y_{n+1} \cong y_n$ para n suficientemente grande.

Portanto, para encontrar a g para resolver o sistema a seguir:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= g(y_n) \\ y_{n+1} &= y_n \end{aligned} \quad (27)$$

3.1.8 Ajuste Linear do Modelo Logístico (Verhulst)

O modelo Logístico de Verhulst é utilizado quando os dados tendem a crescer até certo limite (capacidade suporte do meio) e tendem a se estabilizar quando a variável independente aumenta. Seja Y^* a capacidade suporte e λ a taxa de crescimento relativo, tem-se que o modelo contínuo $y = y(x)$ é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \lambda y \left(1 - \frac{y}{Y^*}\right) \\ y(0) = y_0, \lambda > 0 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$y(x) = \frac{Y^*}{1 + be^{-\lambda x}} \quad (28)$$

As características fundamentais da curva logística são:

- I) A tendência da variável y é de estabilidade, isto é, $y \rightarrow Y^*$ quando x cresce.
 II) Considerando y_0 o valor inicial da sequência monótona dos y_i , isto é, $y = y_0$ quando $x = 0$, tem-se:

$$y \text{ é crescente se } y_0 < Y^*;$$

$$y \text{ é decrescente se } y_0 > Y^*.$$

- III) A taxa de crescimento relativo de y_i é linear, ou seja,

$$\lambda_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}$$

que pode ser ajustada por uma reta:

$$\lambda = ay + b$$

Sendo $Y^* = \frac{-a}{b}$.

- IV) Se $y_0 < \frac{Y^*}{2}$ a curva muda de concavidade quando $y = \frac{Y^*}{2}$, o que implica a existência de ponto de inflexão na curva. Uma estimativa dos parâmetros da curva logística pode ser feita por meio de um ajuste linear, também usando a mudança de variável. Tomando $y = y(x)$ tem-se:

$$y = \frac{Y^*}{1 + be^{-\lambda x}}$$

$$1 + be^{-\lambda x} = \frac{Y^*}{y}$$

$$be^{-\lambda x} = \frac{Y^*}{y} - 1 \Leftrightarrow \frac{b}{e^{\lambda x}} = \frac{Y^*}{y} - 1$$

$$\frac{b}{\frac{Y^*}{y} - 1} = e^{\lambda x} \Leftrightarrow \frac{e^{\lambda x}}{b} = \frac{1}{\frac{Y^*}{y} - 1}$$

$$\ln e^{\lambda x} - \ln b = \ln \left(\frac{1}{\frac{Y^*}{y} - 1} \right).$$

$$\lambda x - \ln b = \ln \left(\frac{\frac{y}{Y^*}}{1 - \frac{y}{Y^*}} \right) = z$$

$$z = \lambda x - \ln b$$

Sendo $\beta = -\ln b$

$$z = \lambda x + \beta \quad (29)$$

3.1.9 Qualidade do Ajuste

Segundo Almeida (2015), seja um conjunto de n pontos de um determinado fenômeno. Sejam y a variável dependente, \hat{y} fornecida pelo Ajuste de Curvas e $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ a média dos valores de y . Sendo verdadeira a equação abaixo tem-se:

$$y_i = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y}) + \bar{y} \Rightarrow y_i - \bar{y} = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y}) \quad (30)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade:

$$(y_i - \bar{y})^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2 + 2(y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}) + (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

Aplicando a somatória para $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

Como $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}) = 0$, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (31)$$

O termo $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ é denominado soma de Quadrados total (SQ_{tot}) e $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ soma de Quadrados residual (SQ_{res}) e $\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ soma de Quadrados da regressão (SQ_{reg}). Assim:

$$SQ_{tot} = SQ_{res} + SQ_{reg} \quad (32)$$

O coeficiente de determinação r^2 é definido como a razão entre a soma de Quadrados da regressão e a soma de Quadrados total.

$$r^2 = \frac{SQ_{reg}}{SQ_{tot}} \Rightarrow \quad (33)$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (34)$$

Aplicando a equação (32) em (33) tem-se

$$r^2 = \frac{SQ_{reg}}{SQ_{tot}} \Rightarrow r^2 = \frac{SQ_{tot} - SQ_{res}}{SQ_{tot}} \Rightarrow r^2 = 1 - \frac{SQ_{res}}{SQ_{tot}} \quad (35)$$

Como, $SQ_{tot} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\bar{y} \sum_{i=1}^n y_i + n\bar{y}^2$ e $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$,

então, $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n y_i)^2$. Aplicando na equação (35) tem-se:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n y_i)^2} \quad (36)$$

O coeficiente de determinação r^2 é sempre positivo e varia entre $[0, 1]$, ele representa o grau de variação total dos dados em torno da média dos valores da variável dependente, isto é, o coeficiente indica a melhor curva que ajusta aos dados tabelados, o valor igual a 1 indicaria um ajuste perfeito.

Entretanto, um valor próximo de 1 para o coeficiente de determinação não significa que a função ajustada seja a mais adequada para situação problema, isso porque, na medida que se adiciona uma nova variável a tendência é que esse indicador também aumente, uma vez que a soma dos Quadrados sempre aumenta com a inserção de um novo parâmetro, independentemente de sua relevância.

Na próxima subseção será abordado sobre o Modelo Epidemiológico SIR em sua versão mais simples. Serão apresentados os conceitos sobre modelo na sua maneira clássica, em um segundo momento o sistema de equações diferenciais será discretizado (considerando o domínio do tempo pertencente ao conjunto dos números naturais) para facilitar a compreensão do modelo, a fim de que alunos do Ensino Médio ou interessados a iniciar os estudos possam entender a dinâmica de uma epidemia.

3.2 MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR

Os estudos sobre propagação de doenças transmissíveis tomaram força a partir de 1927 com os modelos de Kermack-McKendric, considerando que uma epidemia promovida por microparasitas ocorre por meio do contato entre pessoas infectadas e sadia em uma comunidade fechada (BASSANEZI, 2002).

Segundo Bassanezi (2002), o Modelo SIR é simples para descrever uma epidemia, no entanto, foi a partir dele que outros mais sofisticados começaram a ser elaborados.

O Modelo SIR apresenta uma dinâmica entre os números de indivíduos sadios (susceptíveis), infectados e removidos (ou recuperados), considerando as taxas de transmissão e de recuperação dos indivíduos de uma população, representados por equações diferenciais cujos comportamentos podem trazer informações sobre a propagação da epidemia (ABREU, 2020). A forma como interação entre os grupos de suscetíveis, infectados e removidos leva a um sistema acoplado de equações.

3.2.1 Conceitos sobre o Modelo SIR

Para esse modelo considera-se que a população é subdividida em três classes (compartimentos), sendo elas: Suscetíveis, Infectados e Removidos.

- **Suscetíveis:** Pessoas saudáveis, que podem ser contaminadas por pessoas infectadas.
- **Infectados:** Pessoas portadoras da doença e que podem contaminar os saudáveis.
- **Removidos:** Pessoas que não transmitem mais a doença, ou porque contraíram a doença e se recuperaram e ficaram imunes ou morreram ou estão isolados.

Seja $S = S(t)$: o número de suscetíveis, $I = I(t)$: o número de infectados e $R = R(t)$ o número de removidos.

Considerando a população fechada, a população total permanece constante e assim: $N = S(t) + I(t) + R(t)$.

É possível se modelar a velocidade de propagação da doença por meio das interações entre as variáveis S , I e R . A Figura 2 mostra a dinâmica de um processo epidemiológico segundo o modelo estudado.

Figura 2 - Dinâmica Entre os Grupos do Modelo SIR



Fonte: Elaboração Própria.

Sendo β a taxa de propagação da doença e α a taxa de recuperação, com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

O valor de β pode ser obtido pelo produto do número de contatos entre pessoas pela probabilidade de uma pessoa suscetível ser contaminada ao ter contato com um infectado. O valor de α está relacionado com o tempo médio de recuperação de uma pessoa infectada, mas precisamente $\alpha = 1/t_r$, onde t_r é o tempo médio de recuperação do indivíduo infectado (ABREU, 2020).

Baseado em Bassanezi (2002) e Abreu (2020), as seguintes hipóteses são consideradas:

- O tamanho da população, os valores de β e α sejam constantes;

- Os indivíduos de cada compartimento são homogêneos;
- Cada indivíduo tenha a mesma probabilidade de encontro com um suscetível;
- As mortes só sejam causadas pela doença;
- Após o indivíduo ter se recuperado da doença ele se torne imune e não contamina mais;
- O contágio se dá pelo contato entre suscetíveis e infectados.

O modelo matemático SIR para descrever uma epidemia é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \\ S_o = S(0), I_o = I(0), R_o = R(0) \end{cases} \quad (37)$$

Em que:

- $\frac{dS}{dt} = -\beta SI$ é a taxa de variação de S e indica que o número dos suscetíveis decrescem a uma taxa proporcional ao encontro entre os suscetíveis e infectados.
- $\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I$ é a taxa de variação de I e mostra que o número de infectados aumentam conforme o número de suscetíveis cai e diminui a medida que eles são curados. Em outras palavras, $\frac{dI}{dt}$ depende da quantidade de pessoas que entram neste grupo (suscetíveis que se tornam infectados) menos o número de pessoas que saem deste compartimento e se tornam recuperados.
- $\frac{dR}{dt} = \alpha I$ é a taxa de variação de R e é proporcional à quantidade de infectados.

3.2.2 Resultados Analíticos do Modelo Matemático SIR

Tomando a segunda equação do sistema para que $\frac{dI}{dt} > 0$ então

$$\beta S_o I_o - \alpha I_o > 0 \Leftrightarrow S_o > \frac{\alpha}{\beta},$$

Que indica que o número de infectados será crescente enquanto o número de suscetíveis for maior que $\rho = \frac{\alpha}{\beta}$, onde ρ é denominado por limiar epidêmico.

Outra questão importante é conhecer qual será o valor máximo do número infectados (I_{max}). Para isso, toma-se as duas primeiras equações do sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dS} &= -\frac{(\beta S - \alpha)I}{\beta SI} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S} = \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) \\ \Leftrightarrow dI &= -1 + \frac{\rho}{S} dS\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados dessa igualdade, temos: $I = -S + \rho \ln S + c$, sendo c a constante de integração.

Tomando $t = 0$, obtém-se que $c = I_o + S_o - \rho \ln S_o$.

Como $N = I_o + S_o$ para $R_o = 0$ tem-se que:

$$\begin{aligned}I &= -S + \rho \ln S + N - \rho \ln S_o \\ I &= N - S + \rho \ln \frac{S}{S_o}\end{aligned}\tag{38}$$

O valor máximo de I ocorre quando $\frac{dI}{dS} = 0$ e assim:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dS} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\beta SI - \alpha I}{-\alpha I} = -\frac{\beta S}{\alpha} + 1 = 0 \\ \Rightarrow S &= \frac{\alpha}{\beta} = \rho\end{aligned}$$

Da equação (38) resulta que:

$$\begin{aligned}I_{max} &= N - \rho + \rho \ln \frac{\rho}{S_o} \\ I_{max} &= N - \rho \left(1 - \ln \frac{\rho}{S_o}\right)\end{aligned}$$

Assim como em Abreu (2020), será considerado $S + I + R = 1$, desta forma, é razoável que no estágio inicial $S \approx 1$. Assim considerando, tem-se que a segunda equação do sistema (37) ficará no estágio inicial dado por:

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I = (\beta - \alpha) I$$

Resolvendo a equação diferencial ordinária linear homogênea de ordem 1, tem-se a seguinte solução:

$$I(t) \approx I_o e^{(\beta - \alpha)t}\tag{39}$$

O que indica que a função que descreve o número de infectados ao longo do tempo é exponencial. Considerando $I_o > 0$ na equação (39) e as características da função exponencial pode-se concluir que o número de infectados I irá aumentar se $\beta > \alpha$ e quanto maior a diferença $\beta - \alpha$ mais rápida a doença se propagará.

Como o valor de α é mais previsível, pois depende do tempo que a pessoa infectada ficará com a doença, então é mais viável buscar esforços para diminuir o valor de β , que é proporcional ao número de contato entre pessoas e à probabilidade do suscetível se contaminar ao se ter contato com um infectado.

Com a segunda equação do sistema do Modelo SIR também é possível se obter uma expressão que estima qual o número de casos secundários que cada infectado irá contaminar, conforme segue:

Seja Δt um intervalo de tempo suficientemente pequeno e desta forma pode se aproximar $\frac{dI}{dt}$ por:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &\approx \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \beta SI - \alpha I \\ I(t + \Delta t) &= I(t) + (\beta SI - \alpha I)\Delta t\end{aligned}\quad (40)$$

Considerando $t = 0$ e $\Delta t = t_r$, sendo t_r o tempo médio para um indivíduo se recuperar da infecção ($t_r = 1/\alpha$) e supondo que o número de suscetíveis seja aproximadamente a população total ($S \approx 1$), tem-se que:

$$\begin{aligned}I(t_r) &= I(0) + t_r \cdot \beta \cdot 1 \cdot I(0) - t_r \cdot \alpha \cdot I(0) \\ I(t_r) &= I(0) + \frac{1}{\alpha} \cdot \beta \cdot 1 \cdot I(0) - \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot I(0) \\ I(t_r) &= \frac{\beta}{\alpha} I(0)\end{aligned}\quad (41)$$

Considerando que não se tenha nenhuma medida de contenção da propagação da doença, a equação (41) aponta que um indivíduo infectado em $t = 0$ no intervalo $\Delta t = t_r$ transmite $\frac{\beta}{\alpha}$ novos contaminados enquanto estiver infectado, sendo $\frac{\beta}{\alpha}$ denominado por R_0 e a taxa de recuperação $\alpha = 1/t_r$. $R_0 = \frac{\beta}{\alpha}$ corresponde ao número médio de casos secundários produzido por um único indivíduo infectado em uma população totalmente suscetível (ABREU, 2020).

Assim sendo, tem-se três situações:

- i. $R_0 = 1$ ($\beta = \alpha$): o número de infectados permanecerá constante.
- ii. $R_0 > 1$ ($\beta > \alpha$): o número de infectados aumentará.
- iii. $R_0 < 1$ ($\beta < \alpha$): o número de infectados diminuirá.

Outro aspecto importante a se saber é como se comporta os suscetíveis ao longo da epidemia. Para isso, serão tomadas a segunda e terceira equações do Modelo SIR (equação 37).

$$\frac{dS}{dR} = \frac{-\beta SI}{\alpha I} = \frac{-\beta S}{\alpha}$$

$$\frac{dS}{dR} = -R_0 S$$

Que é uma equação diferencial linear homogênea que tem a seguinte solução:

$$\int \frac{dS}{S} = \int -R_0 dR$$

$$\ln S(t) = -R_0 R(t) + c, \text{ considerando } S > 0$$

$$e^{\ln S(t)} = e^{-R_0 R(t) + c}$$

$$S(t) = C e^{-R_0 R(t)}$$

O que indica que $S(t) > 0$, tendo em vista as características da função exponencial. Por outro lado, se a relacionarmos a variação dos suscetíveis com a dos infectados, tem-se que a doença continuará a se propagar até que

$$\frac{dI}{dS} > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta SI - \alpha I}{\alpha I} > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta S - \alpha}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta S}{\alpha} - 1 > 0, \text{ resultando em:}$$

$$S > \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{R_0}$$

Isto implica dizer que a doença continuará a crescer até que o número de suscetíveis seja maior que $\frac{\alpha}{\beta}$ e a diminuir quando S for menor que $\frac{\alpha}{\beta}$.

Apresentou-se até aqui as principais propriedades do Modelo SIR. Estes resultados podem ser úteis para a compreensão de como as taxas de propagação e recuperação da doença podem influenciar na dinâmica de uma epidemia. Em especial, para a COVID-19, estes índices sinalizam para a necessidade de medidas para a contenção da doença, como, quarentena, isolamento dos infectados, evitar-se aglomerações, higienização das mãos, uso de máscara e equipamentos de proteção, dentre outros.

3.2.3 Discretização do Modelo SIR

Para tornar mais acessível a compreensão da dinâmica do modelo epidemiológico SIR, buscou-se fazer a sua discretização, baseado em Mesquita et al

(2020), isto é, fazer com que a variável t assuma somente o conjunto dos números naturais, ou seja, passa-se a ter uma função discreta e as informações da dinâmica da sequência de pontos. Para isso, realizou-se as seguintes adaptações:

Tomou-se $t = n$ e a notação $f(n) = f_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $df_n = f_{n+1} - f_n$ para a variação da função do instante n para o $n + 1$.

Desta forma obtém-se a discretização do modelo dado pela equação (37) considerando $\Delta t = 1$, tem-se que:

$$\begin{cases} \frac{\Delta S_n}{\Delta t} = -\beta S_n I_n \\ \frac{\Delta I_n}{\Delta t} = (\beta I_n S_n - \alpha I_n) \\ \frac{\Delta R_n}{\Delta t} = \alpha I_n \end{cases}$$

Que é equivalente a:

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta I_n S_n - \alpha I_n \\ R_{n+1} = R_n + \alpha I_n \end{cases} \quad (42)$$

O sistema da equação (42) mostra equações recorrentes que são denominadas de equações de diferença finita, serão muito úteis para se compreender a dinâmica do processo epidemiológico do Modelo SIR, cuja projeção aproximada pode ser obtida com o uso de planilhas eletrônicas como o *Excel* ou similares.

Apresenta-se a seguir o desenvolvimento de um exemplo considerando situações hipotéticas.

Supondo que se tenha uma população de $N = 1000$ indivíduo e que no tempo zero há 3 pessoas infectadas em uma taxa de recuperação $\alpha = 0,1$ com uma taxa de propagação da infecção $\beta = 0,03\%$. A seguir mostra-se os cálculos de duas iterações.

- Para $n = 0$:

$$S_0 = N - I_0 = 1000 - 3 = 997$$

$$I_0 = 3$$

$$R_0 = 0$$

Substituindo esses dados em (42), tem se que:

$$S_1 = S_0 - 0,0003 \cdot S_0 \cdot I_0 = 997 - 0,0003 \cdot 997 \cdot 3 = 996,103$$

$$I_1 = I_0 + \beta S_0 I_0 - \alpha I_0 = 3 + 0,0003 \cdot 997 \cdot 3 - 0,1 \cdot 3 = 3,597$$

$$R_1 = R_0 + \alpha I_0 = 0 + 0,1 \cdot 3 = 0,3$$

- Para $n = 1$ tem-se:

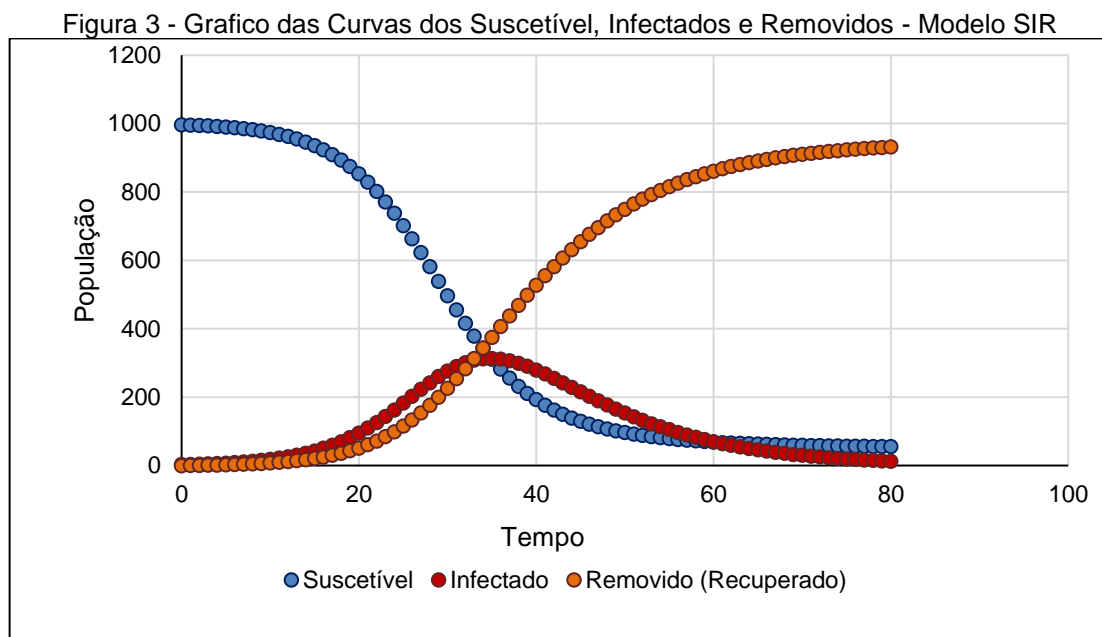
$$S_2 = S_1 - 0,0003 \cdot S_1 \cdot I_1 = 996,103 - 0,0003 \cdot 996,103 \cdot 3,597 = 995,028$$

$$I_2 = I_1 + \beta S_1 I_1 - \alpha I_1 = 3,597 + 0,0003 \cdot 996,103 \cdot 3,597 - 0,1 \cdot 3,597 = 4,313$$

$$R_2 = R_1 + \alpha I_1 = 0,3 + 0,1 \cdot 3,597 = 0,660$$

E assim por diante pode-se prosseguir, utilizando a planilha do *Excel*, para repetir este processo. (A planilha de cálculos referente a este exemplo encontra-se no Apêndice E).

A Figura 3 mostra o gráfico das funções discretas obtidas do número de suscetíveis, de infectados e removidos pelo Modelo SIR discretizado até $n = 80$.

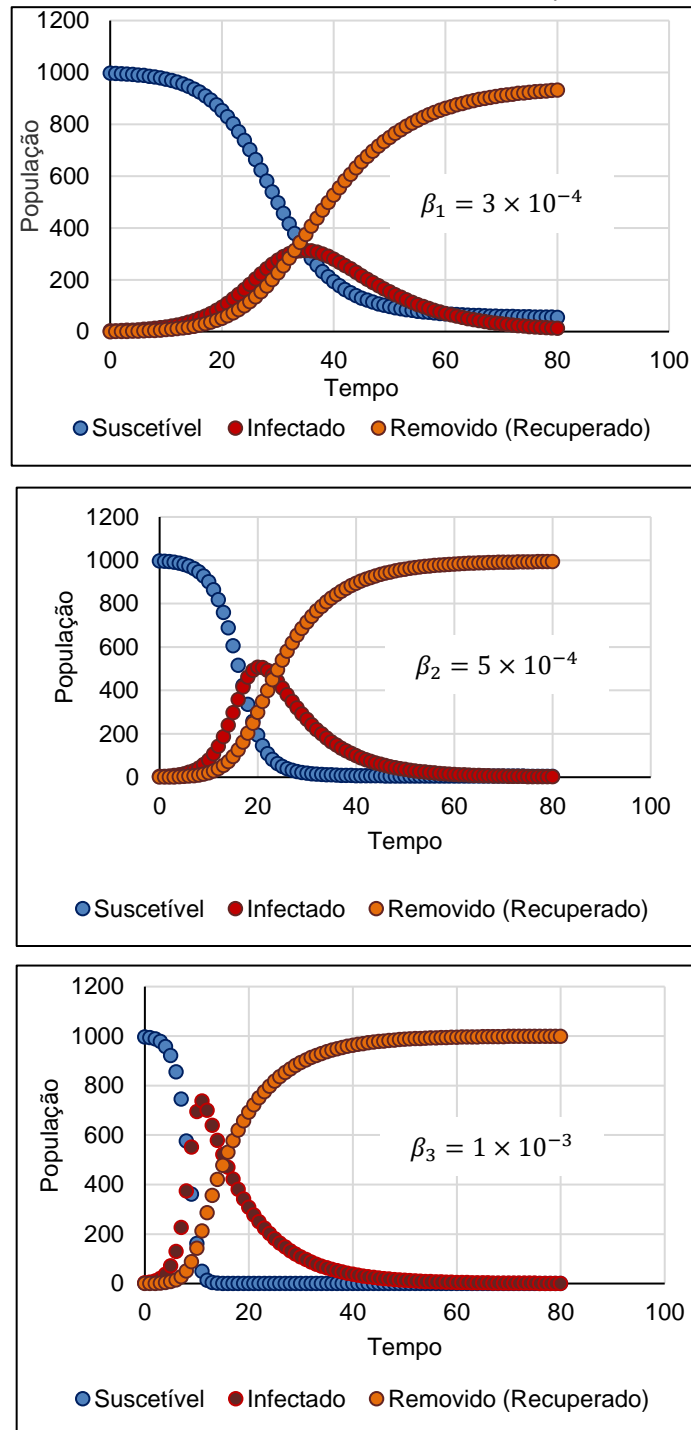


Fonte: Elaboração Própria.

Resolvendo analiticamente o valor de $I_{max} = N - \rho(1 - \ln \frac{\rho}{S_0})$ obtem-se $I_{max(calc)} \approx 301$ e com o processo de discretização $I_{max(disc)} \approx 313$, o que corresponde a um erro de aproximadamente 4% na determinação do valor máximo do número de infectados.

A Figura 4 mostra três cenários com valores de $\beta_1 = 3 \times 10^{-4}$, $\beta_2 = 5 \times 10^{-4}$ e $\beta_3 = 1 \times 10^{-3}$. A Tabela 1 mostra os valores máximo do número de infectados para cada cenário e os respectivos tempos para atingi-los.

Figura 4 - Representação Gráfica de 3 Cenários do Modelo SIR Discretizado Alterando o Valor de β



Fonte: Elaboração Própria.

Tabela 1 - Valores de I_{max} e t_{max} para 3 Cenários de β

Cenário	Valores de β_3	I_{max}	Tempo para atingir I_{max} (dias)
1	3×10^{-4}	313	35
2	5×10^{-4}	507	20
3	1×10^{-3}	738	11

Fonte: Elaboração Própria.

Considerando que o valor da taxa de propagação da doença (β) é proporcional a taxa do número de contatos e a probabilidade dos encontros entre um indivíduo do grupo suscetível com o do infectado, os cenários fictícios apresentados mostra a importância da não aglomeração e de buscar mecanismos de proteção para diminuir a probabilidade de contaminação e diminuir conseqüentemente a taxa de infecção da doença.

4 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para analisar-se um determinado caso, é necessário escolher um método para alcançar os objetivos propostos. Na maioria das vezes a metodologia selecionada pelo autor é consequência do seu domínio sobre o método em questão, ou pela maneira de constatar e pensar as abordagens teóricas (FIGUEIREDO, 2004).

De acordo com Marconi e Lakatos (2004, p. 272), a escolha do método

[...] remete para uma posição teórica (positivista, estruturalista, dialética, fenomenológica etc.) que deve ser explicada evidenciando a forma de abordagem. A teoria é constituída para explicar ou compreender um fenômeno, um processo ou um conjunto deles. O pesquisador tem liberdade de escolha do método e da teoria para realizar seu trabalho, entretanto deve, no momento de seu relatório, ser coerente, ter consciência, objetividade, originalidade, confiabilidade e criatividade no momento da coleta e análise de dados.

Assim sendo, para o desenvolvimento deste trabalho foi utilizada a pesquisa exploratória e as técnicas da Modelagem Matemática. A seguir apresentam-se os aspectos teóricos da metodologia e os procedimentos metodológicos utilizados para este estudo.

4.1 O DELINEAMENTO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Esta pesquisa buscou compreender a partir da Modelagem Matemática, como se comportam os dados de casos e óbitos relativos a COVID-19 durante o ano de 2020 e desta forma, a investigação foi realizada baseada na abordagem exploratória. A escolha deste método justifica-se pelo fato de ser mais apropriado para esta pesquisa, pois parte de uma situação-problema com meta de se conhecer/ampliar o conhecimento sobre o fenômeno observado, para tanto, faz-se necessário que o pesquisador delimite objetivos que o nortearão durante o processo de pesquisa e descobertas.

Para Triviños (1987) a pesquisa de cunho exploratório possibilita ao pesquisador ampliar seu conhecimento sobre certa situação-problema. Em algumas ocasiões busca-se delimitar certa teoria, cujo tema seja amplo, para objetivos que se deseja realizar. O estudo exploratório também é indicado caso o investigador deseje elaborar um instrumento considerando o estudo descritivo que se quer executar.

Dessa forma, o pesquisador planeja um estudo exploratório visando atingir objetivos que se espera, podendo também servir para enunciar problemas de pesquisa.

[...] são investigações de pesquisa empírica cujo objetivo é a formulação de questões ou de um problema, com tripla finalidade: desenvolver hipóteses, aumentar a familiaridade do pesquisador com um ambiente, fato ou fenômeno, para a realização de uma pesquisa futura mais precisa ou modificar e clarificar conceitos. Empregam-se geralmente procedimentos sistemáticos ou para a obtenção de observações empíricas ou para as análises de dados (ou ambas, simultaneamente). (MARCONI e LAKATOS, p. 188, 2003)

Cervo, Bervian e Silva (2007) corroboram com a definição de Triviños (1987) afirmando que, um estudo exploratório é o início de uma pesquisa, considerando que a experiência possibilita a geração de hipóteses a serem pesquisadas.

A pesquisa exploratória não requer a elaboração de hipóteses a serem testadas no trabalho, restringindo-se a definir objetivos e buscar mais informações sobre determinado assunto de estudo. Tais estudos têm por objetivo familiarizar-se com o fenômeno ou obter uma nova percepção dele é descobrir novas ideias. (CERVO, BERVIAN e SILVA, 2007. p. 63)

Um estudo exploratório realiza descrições da situação que se deseja pesquisar, buscando encontrar ligações entre os elementos da pesquisa. Esse tipo de pesquisa não requer planejamento tão rigoroso, pois visa os mais diversos aspectos de uma situação-problema (CERVO; BERVIAN; SILVA, 2007).

Sobre este tipo de abordagem, Gil (2002, p. 41) afirma que:

Estas pesquisas têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses. Pode-se dizer que estas pesquisas têm como objetivo principal o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado.

Em relação ao tipo de pesquisa utilizado para um estudo, para Marconi e Lakatos (2003) eles podem ser tanto quantitativa quanto qualitativa, cabendo ao pesquisador conceituar e relacionar o fenômeno observado. Para a coleta de dados, podem ser usadas de diversas ferramentas, entrevista, observação, análise de conteúdo etc. Para situações que exigem a manipulação de uma variável independente, a pesquisa exploratória divide-se em:

Estudos exploratório-descritivos combinados - são estudos exploratórios que têm por objetivo descrever completamente determinado fenômeno, como, por exemplo, o estudo de um caso para o qual são realizadas análises empíricas e teóricas [...] Estudos de manipulação experimental - consistem naqueles estudos exploratórios que têm por finalidade manipular uma variável independente, a fim de localizar variáveis dependentes que potencialmente estejam associadas a ela, estudando-se o fenômeno em seu meio natural. O propósito desses estudos geralmente é demonstrar a viabilidade de determinada técnica ou programa como uma solução, potencial e viável [...] (MARCONI e LAKATOS, p. 188-189, 2003)

4.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Depois de delimitado o tipo de abordagem e objetivos da pesquisa, passou-se para as etapas de coleta e sistematização dos dados, de formulação dos modelos e análise dos resultados obtidos que está apresentado no Capítulo 5. Após concluído esta parte do estudo, foram propostas algumas atividades para o Ensino Médio com temas relacionados com a pandemia e será abordado no Capítulo 6.

4.2.1 Procedimentos de Coleta de Dados

A coleta dos dados referente ao número de casos de infecção e óbitos com a COVID-19 no Brasil em 2020, foram realizadas junto ao site: <https://covid.saude.gov.br/>, no período de 26/02/2020 à 29/12/2020.

O *site* foi um dos meios de comunicação que o Governo Federal por meio do Ministério da Saúde usou para divulgar e atualizar as informações diariamente para a população sobre os números da epidemia no país. Nele ainda contêm informações relevantes como, o número de casos recuperados, em acompanhamento, taxa de letalidade da doença, incidência e mortalidade a cada 100 mil habitantes, descrições por regiões e gráficos que mostram o comportamento da doença em nível estadual e federal.

4.2.2 Formulação dos Modelos Matemáticos

Com os dados coletados e tabelados iniciou-se processo de formulação dos modelos, com o intuito de compreender o comportamento dos números de casos e óbitos relativos a COVID-19 no ano de 2020. Para o desenvolvimento desta parte do trabalho foi utilizado o Excel para a realização dos cálculos e esboço gráfico e o wx

Maxima para resolução de sistemas. O desenvolvimento deste processo aconteceu em três etapas, conforme segue:

1ª) Nesta etapa foram realizados os ajustes dos dados pelo Método dos Mínimos Quadrados, considerando as funções linear, quadrática, exponencial, potência e os modelos assintótico e logístico. Depois disso, foi selecionada a curva ajustada que melhor representava os dados de casos e óbitos, para tanto, utilizou-se o coeficiente de determinação r^2 . Como nesta primeira etapa as curvas encontradas em termos gerais não traduziam o comportamento dos dados, apresentando erros relativos com mais de 20%, optou-se então em modelar os dados particionando o intervalo de tempo considerado na modelagem, começava assim a segunda etapa da formulação, a construção de um modelo matemático por partes, conforme explicado a seguir.

2ª) Nesta parte foi realizada a partição do intervalo de tempo, utilizando o gráfico de dispersão dos dados em escala logarítmica, haja visto que pelas características dos gráficos nesta escala, é possível localizar de forma aproximada os intervalos em que os dados crescem exponencialmente. E assim, foram esboçadas as curvas exponenciais correspondentes de cada intervalo e, posteriormente, foram determinadas quais tipos de curvas se adequavam melhor a cada um dos intervalos.

3ª) Nesta etapa buscou-se verificar como se comporta o Modelo SIR discretizado para os dados de casos ativos de COVID-19 ao longo do tempo. Para encontrar o valor da taxa de infecção (β) foi utilizado a minimização dos erros quadráticos entre os dados coletados e os obtidos pelo modelo. O processo de minimização foi realizado pelo *solver* do Excel.

Inicialmente se considerou todo o intervalo para a obtenção da curva de infectados ativos, depois buscou-se fazer este processo minimizando os erros de cada trecho para criar alguns cenários com diferentes valores da taxa de infecção (β).

4.2.3 Metodologia da Proposta de Ensino

Quanto à proposta de atividades para o Ensino Médio, buscou-se organizar as atividades na perspectiva da Modelagem Matemática para o ensino conforme as ideias de Almeida, Silva e Vertuan (2013), ou seja, seguir as etapas de *inteiração* (Contato com a situação problema), *matematização* (transformação da situação-

problema para a linguagem matemática), *resolução* (fase em que se busca obter um modelo matemático) e *interpretação de resultados e validação*.

As atividades envolvem de forma intuitiva o Método dos Mínimos Quadrados para o ajuste linear e quadrático e, também a interpretação da interrelação dos suscetíveis-infectados-removidos em uma epidemia a partir do Modelo SIR discretizado.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo está dividido em duas subseções, a primeira refere-se a modelagem ao número de acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020 e na segunda, a modelagem dos dados de óbitos relativos a doença no país, no mesmo período. Para encontrar os modelos matemáticos referente ao número de casos acumulados foi utilizado inicialmente o Método dos Mínimos Quadrados, com ajustes de curvas: linear, quadrático, linear do modelo exponencial, função potência, exponencial assintótico e modelo logístico, considerando inicialmente o intervalo de tempo completo e posteriormente em intervalos de tempo particionados, que foram escolhidos mediante suas particularidades de crescimento. Posteriormente, são testados os dados para o ajuste ao Modelo SIR básico discretizado. O estudo relacionado aos dados do número de óbitos, foi tratado de maneira análoga, com exceção do Modelo SIR.

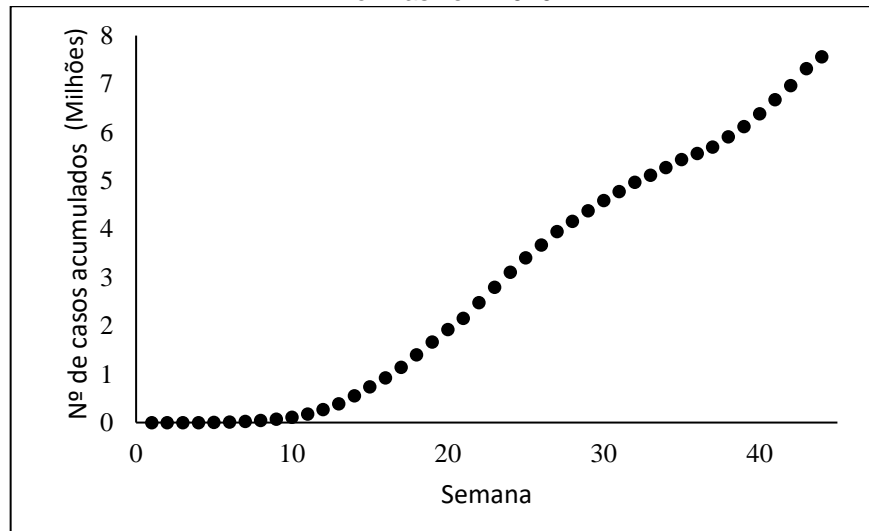
5.1 MODELAGEM DOS CASOS ACUMULADOS DE COVID-19 NO BRASIL EM 2020

Esta subseção contém os Ajustes de Curvas considerando os dados sobre o número de casos acumulados de COVID-19. Os resultados obtidos foram ajustados cuidadosamente por meio do coeficiente de determinação. Buscou-se dentre os ajustes identificar o que mais se aproximava para representar a natureza do fenômeno durante todo o período. Considerando que o comportamento da curva foi se modificando ao longo do período analisado e uma única curva não conseguia representar a dinâmica do fenômeno, foi realizado um segundo estudo considerando os intervalos de tempo particionados, com o intuito de compreender com mais precisão os modelos matemáticos que orientam a epidemia ao longo do período estudado. As escolhas dos intervalos deram-se em função do comportamento da curva logarítmica dos dados.

5.1.1 Números de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020

Apresenta-se a seguir a representação gráfica relativo aos dados coletados no site do Ministério da Saúde. Os dados representam o número de casos confirmados acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020.

Figura 5 - Gráfico do Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020



Fonte: Elaboração Própria Baseada nos Dados do Ministério da Saúde.

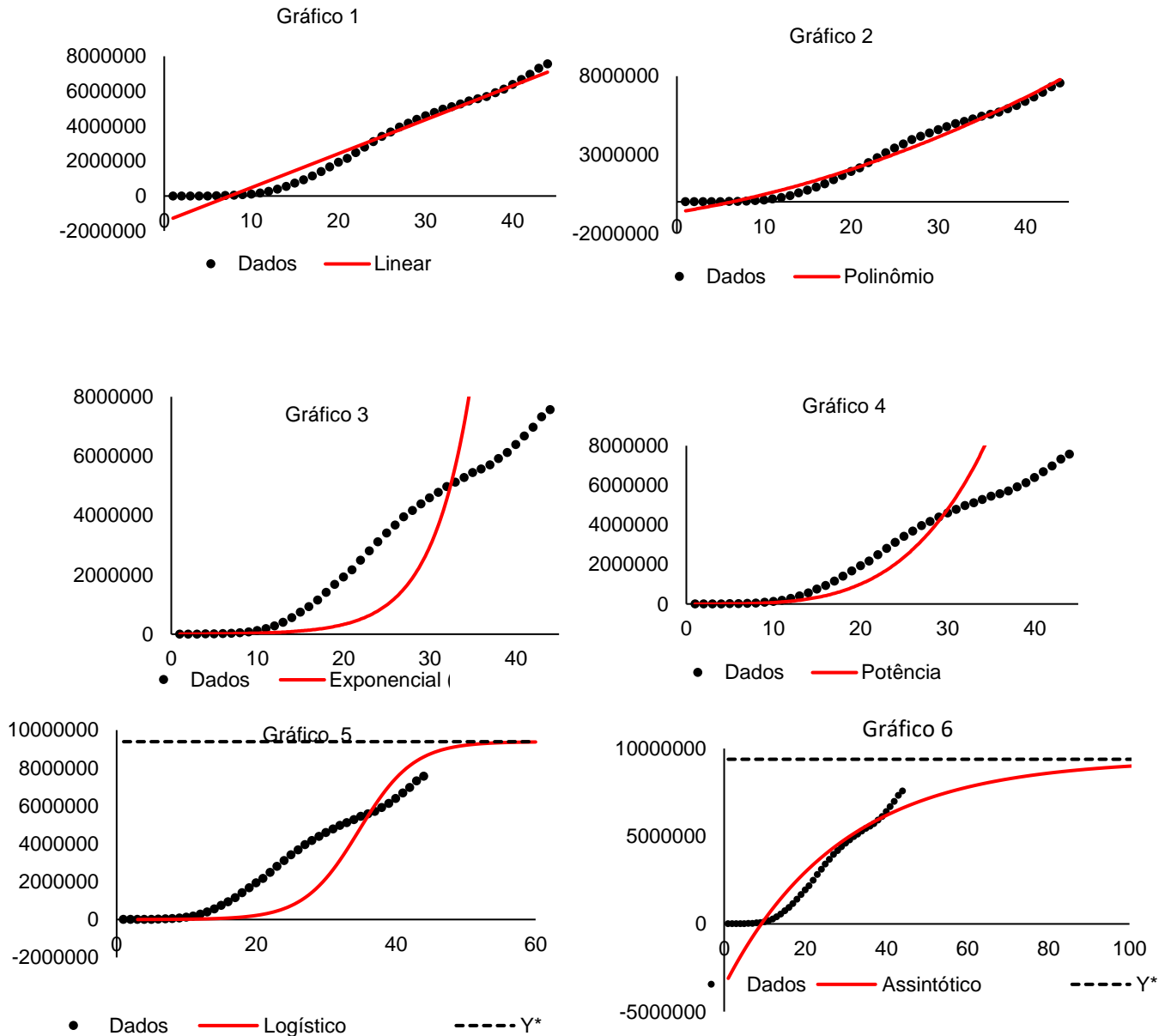
A Figura 5 exibe o gráfico do número de casos da doença ao longo do ano e ilustra também, como a epidemia avançou no país durante o período selecionado. As informações apresentadas referem-se ao período de 26/02/2020 à 29/12/2020 e foram organizadas e apresentadas no gráfico semanalmente, que resultou em 44 semanas ao todo. Os períodos referentes a cada semana estão apresentados no Apêndice A.

5.1.2 Ajustes do Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil Considerando Todos os Dados de 2020

Para este estudo foram considerados todos os dados de 2020 para a realização do ajuste de curvas pelo MMQ. Os ajustes apresentados são relacionados às curvas: linear, quadrático, linear do modelo exponencial, função potência, exponencial assintótico e modelo logístico. Na obtenção dos modelos assintótico e logístico, utilizou-se o Método Ford-Walford para encontrar o valor da capacidade de suporte Y^* , cujos cálculos estão apresentados no Apêndice B. Como resultados, obteve-se os modelos matemáticos associados aos ajustes de cada tipo de curva, os coeficientes de determinação e as representações gráficas, conforme apresentado a seguir.

Na Figura 6 cada gráfico traz a representação do modelo matemático obtido em linha contínua acompanhado da dispersão de pontos dos dados coletados e a Tabela 2 traz uma síntese sobre as informações de cada ajuste.

Figura 6 - Representações Gráficas dos Ajustes de Curvas do Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020



Fonte: Elaboração Própria.

Sendo y_c o número de casos acumulados de COVID-19, a Tabela 2, sintetiza as principais informações dos ajustes de curvas desenvolvidos.

Tabela 2 - Síntese dos Resultados Obtidos dos Modelos Ajustados do nº de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020

Modelo do Ajuste:	Equação do Modelo	r^2
Linear	$y_c(x) = 194357x - 0,000001$	0,9648
Quadrático	$y_c(x) = 2315,3x^2 + 90168x - 665562$	0,9825
Exponencial	$y_c(x) = 4018,1e^{0,22x}$	0,6672
Potência	$y_c(x) = 9,6487x^{3,8556}$	0,9628
Exponencial Assintótico	$y_c(x) = 9389308 - 12935680,74e^{-0,0349x}$	0,8754
Logístico	$y_c(x) = \frac{9389308}{1 + 3218,2725e^{-0,2549x}}$	0,8946

Fonte: Elaboração Própria.

A partir dos gráficos apresentados pode se ter uma ideia geral do comportamento das curvas ajustadas em relação aos dados coletados. Nota-se aparentemente que as curvas dos modelos exponencial, da função potência, logístico e assintótico, foram os que mais se distanciaram dos dados dos casos acumulados da COVID-19. Por exemplo, a partir das semanas 31 e 34 os modelos das curvas exponencial e da função potência (Gráficos 3 e 4), respectivamente, começam a ter uma tendência de crescimento muito superior aos dados coletados, além de que, entre as semanas 15 e 25 os valores dos modelos e os dados apresentam diferenças significativas, considerando o erro médio relativo de 4,57 e 0,88 respectivamente. Em relação ao modelo logístico, tem-se valores calculados por meio da equação muito distantes dos coletados, fato esse que se estendeu ao longo das 44 semanas, o que é refletido no seu valor do coeficiente de determinação r^2 e na média do erro relativo.

Em contrapartida, os modelos obtidos dos ajustes linear e quadrático, foram os que mais se aproximaram dos dados, considerando as 44 semanas. Observando a partir da semana 23, nota-se que ambos os ajustes obtiveram uma boa aproximação aos dados tabelados e foram os modelos que apresentaram os melhores valores para o coeficiente de determinação, conforme mostra a Tabela 2.

No que se refere a avaliação de qualidade dos ajustes entre os dados observados e calculados, foi utilizado como parâmetro o coeficiente de determinação (r^2) de cada modelo, calculado pela equação (36) da Subseção 2.5. Por fim, o modelo escolhido foi o que obteve melhor valor para esse parâmetro, ou seja, o mais próximo de 1. Portanto, diante dos dados da Tabela 2, conclui-se que o modelo matemático obtido do ajuste quadrático foi o que melhor se ajustou aos dados do número de casos

acumulados de COVID-19 no Brasil no ano de 2020, pois apresentou o melhor coeficiente de determinação.

Com a finalidade de mostrar neste trabalho como se obtém um Ajuste de Curva, escolheu-se o modelo obtido do ajuste quadrático, o que apresentou melhor resultado entre os analisados, para mostrar a seguir como se dá o processo de como este ajuste pode ser obtido.

- **Processo de Determinação do Ajuste Quadrático do Número de Casos de COVID-19**

Para o ajuste quadrático foi necessário determinar os valores dos coeficientes a, b e $c \in \mathbb{R}$ da equação da parábola $y(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, conforme já abordado na Subseção 3.1.2. Para isso, tornou-se necessário realizar alguns cálculos auxiliares, conforme mostra a Tabela 3, cujos valores da última linha refere-se aos somatórios da coluna correspondente e y_{c_i} são os valores obtidos calculados com o ajuste quadrático obtido.

Tabela 3 - Cálculos Auxiliares - Ajuste Quadrático do N° de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020

Semana (\bar{x}_i)	Nº de Casos (\bar{y}_i)	\bar{y}_i^2	\bar{x}_i^2	\bar{x}_i^3	\bar{x}_i^4	$\bar{x}_i \bar{y}_i$	$\bar{x}_i^2 \bar{y}_i$	y_{c_i}	$(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$
1	2	4,00E+00	1,00E+00	1,00E+00	1,00E+00	2,00E+00	2,00E+00	5,73E+05	3,28E+11
2	34	1,16E+03	4,00E+00	8,00E+00	1,60E+01	6,80E+01	1,36E+02	4,76E+05	2,27E+11
3	291	8,47E+04	9,00E+00	2,70E+01	8,10E+01	8,73E+02	2,62E+03	3,74E+05	1,40E+11
4	2201	4,84E+06	1,60E+01	6,40E+01	2,56E+02	8,80E+03	3,52E+04	2,68E+05	7,29E+10
5	5717	3,27E+07	2,50E+01	1,25E+02	6,25E+02	2,86E+04	1,43E+05	1,57E+05	2,64E+10
6	13717	1,88E+08	3,60E+01	2,16E+02	1,30E+03	8,23E+04	4,94E+05	4,12E+04	3,02E+09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
39	6118708	3,74E+13	1,52E+03	5,93E+04	2,31E+06	2,39E+08	9,31E+09	6,37E+06	6,44E+10
40	6386787	4,08E+13	1,60E+03	6,40E+04	2,56E+06	2,55E+08	1,02E+10	6,65E+06	6,70E+10
41	6674999	4,46E+13	1,68E+03	6,89E+04	2,83E+06	2,74E+08	1,12E+10	6,92E+06	6,17E+10
42	6970034	4,86E+13	1,76E+03	7,41E+04	3,11E+06	2,93E+08	1,23E+10	7,21E+06	5,55E+10
43	7318821	5,36E+13	1,85E+03	7,95E+04	3,42E+06	3,15E+08	1,35E+10	7,49E+06	3,02E+10
44	7563551	5,72E+13	1,94E+03	8,52E+04	3,75E+06	3,33E+08	1,46E+10	7,78E+06	4,87E+10
990	127982031	6,50E+14	2,94E+04	9,80E+05	3,49E+07	4,26E+09	1,50E+11		4,87E+12

Fonte: Elaboração Própria.

Por meio da equação (8) e dos somatórios da Tabela 3, tem-se:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^4 + b \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^3 + c \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 \bar{y}_i \\ a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^3 + b \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + c \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i \Rightarrow \\ a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + b \sum_{i=1}^n \bar{x}_i + nc = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 34885686a + 980100b + 29370c = 149597040981 \\ 980100a + 29370b + 990c = 4258556265 \\ 29370a + 990b + 44c = 127982031 \end{cases}$$

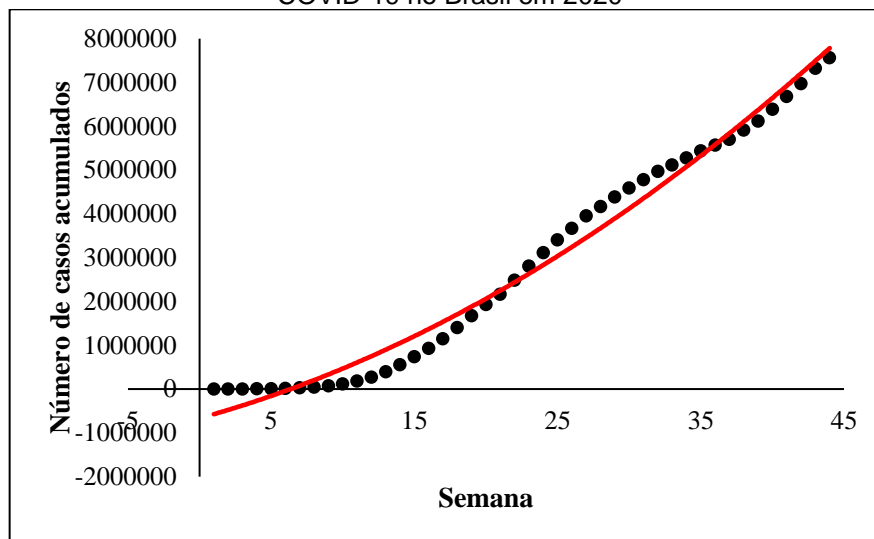
Resolvendo o sistema por meio do *wx Maxima* obtêm-se os parâmetros $a = 2315,3$, $b = 90168$ e $c = -665562$ para o ajuste quadrático. Substituindo na equação $y_c(x) = ax^2 + bx + c$, resulta-se em:

$$y_c(x) = 2315,3x^2 + 90168x - 665562, \text{ com } x \geq 0.$$

Sendo $y_c(x)$: o número de infectados pela COVID-19 no Brasil na semana x .

A Figura 7 mostra o gráfico dos dados coletados dos casos de COVID-19 e da curva produzida pelo ajuste polinomial quadrático.

Figura 7 - Gráfico - Ajuste Quadrático do N° de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020



Fonte: Elaboração Própria.

Por fim, analisando a qualidade do ajuste a partir do coeficiente de determinação, tem-se:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n \bar{y}_i)^2} \Rightarrow r^2 = 1 - \frac{4874145487534,14}{650042171540781 - \frac{1}{44} 127982031^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 09825$$

Depois de obtido este modelo do ajuste quadrático, pode-se observar que em alguns trechos a curva ajustada e os dados coletados tem comportamentos diferentes e se distanciam. Para verificar esta questão, foi calculado o erro relativo em percentuais, por meio da equação abaixo, do valor coletado em relação ao calculado, os valores estão sintetizados na Tabela 4.

$$\text{Erro relativo} = \frac{|\text{valor calculado} - \text{valor coletado}|}{\text{valor calculado}} \quad (38)$$

Embora o ajuste com a curva quadrática foi a que tenha apresentado melhor resultado, constatou-se que a curva apresentava ainda um erro relativo médio de aproximadamente 33%, conforme consta na tabela adiante. Entretanto, nota-se que nas últimas 10 semanas o erro relativo não ultrapassou 4%, mostrando que para este período o ajuste se comportou mais próximo dos dados coletados.

Tabela 4 - Erro Relativo do Ajuste Quadrático dos Casos Acumulados de COVID-19

Semana	Erro Relativo
1	1,00
2	1,00
3	1,00
4	1,01
5	1,04
6	1,33
7	0,68
8	0,79
9	0,78
10	0,75
...	
35	0,02
36	0,00
37	0,02
38	0,03
39	0,04
40	0,04
41	0,04
42	0,03
43	0,02
44	0,03
Média	0,33

Fonte: Elaboração Própria.

Considerando que este modelo ora apresentado ainda não conseguia representar o comportamento da evolução do número de casos da COVID 19, optou-se por modelar por partes os dados, dividindo em menores períodos de tempo, com o objetivo de se obter um modelo matemático mais próximo dos dados e também que

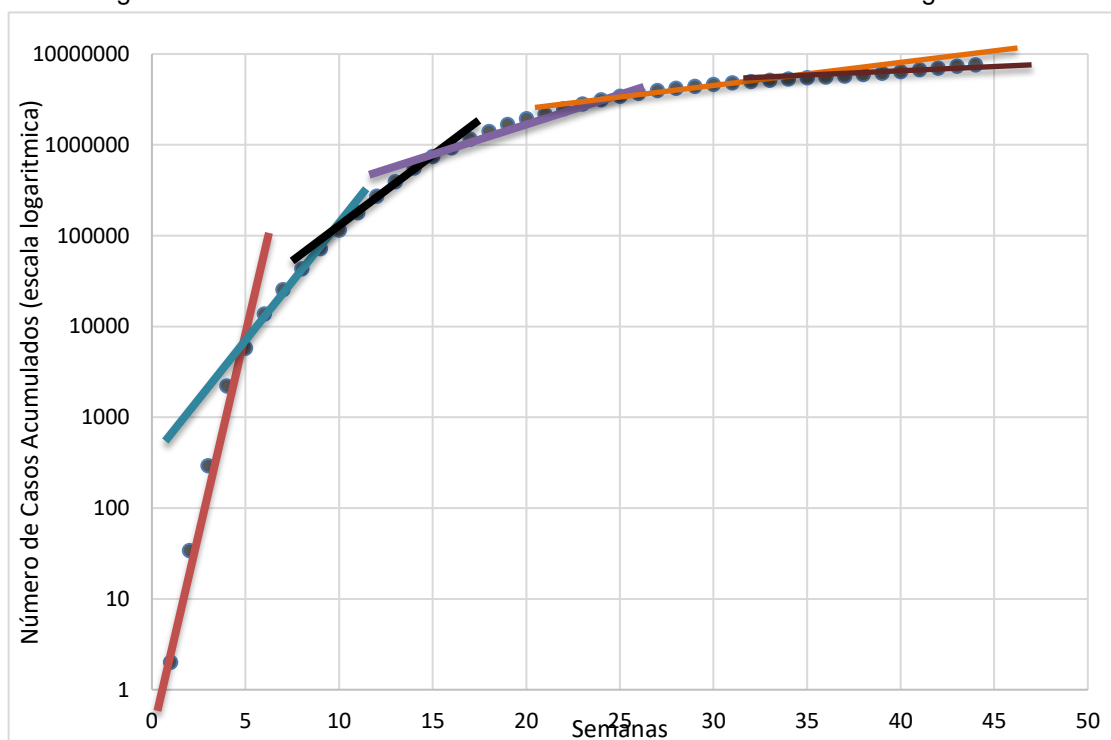
possa mostrar as particularidades dos intervalos, conforme apresentado na próxima subseção.

5.1.3 Ajuste do Número de Casos de COVID-19 Considerando o Intervalo de Tempo Particionado

5.1.3.1 Determinação dos Intervalos de Tempo para o Estudo

Os intervalos para modelagem foram definidos de acordo com a orientação dada pela curva na escala logarítmica, cujo gráfico possui o eixo vertical composto por múltiplos de 10 igualmente espaçados. Quando os dados apresentam crescimento exponencial é visto no gráfico como uma reta. Assim, para a escolha dos trechos a serem ajustados, procurou-se identificar os intervalos em que os pontos relacionados aos dados formassem aproximadamente retas, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8 - Número de Casos Acumulados de COVID-19 em Escala Logarítmica



Fonte: Elaboração Própria

Com este gráfico nota-se que as inclinações das retas traçadas vão gradativamente ficando menores, indicando que a velocidade de contágio nos diferentes intervalos considerados vai diminuindo ao longo do tempo. Diante do critério

adotado, para a obtenção do modelo foi realizado ajustes em 6 intervalos, de 1 a 5 (26/02 a 31/03/20); 5 a 10 (31/03 a 05/05/20); 10 a 16 (05/05 a 16/06/20); 16 a 24 (16/06 a 11/08/20); 24 a 36 (11/08 a 03/11/20) e finalmente de 36 a 44 (03/11 a 29/12/20). A seguir, busca-se abordar o comportamento do crescimento exponencial em cada um dos intervalos selecionados.

5.1.3.2 Estudo do Comportamento das Curvas Exponenciais Ajustadas dos Intervalos Considerados

Para esta parte do estudo fez-se o ajuste linear exponencial na base “e” de cada um desses intervalos para verificar o comportamento dos respectivos crescimentos e obteve-se os seguintes modelos matemáticos e representação gráfica:

$$y_1 = 0,4594 \cdot e^{2,00864x}, \text{ da } 1^{\text{a}} \text{ a } 5^{\text{a}} \text{ semana. } (r^2 = 0,937)$$

$$y_2 = 368,94 \cdot e^{0,5857x}, \text{ da } 5^{\text{a}} \text{ a } 10^{\text{a}} \text{ semana. } (r^2 = 0,992)$$

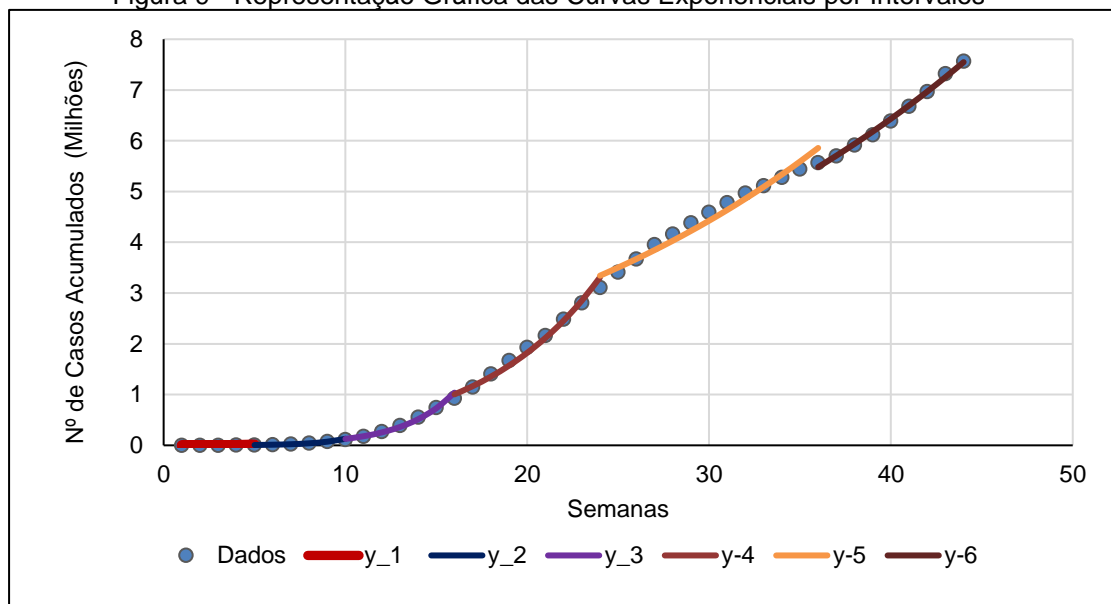
$$y_3 = 3783,65 \cdot e^{0,3509x}, \text{ da } 10^{\text{a}} \text{ a } 16^{\text{a}} \text{ semana. } (r^2 = 0,982)$$

$$y_4 = 92616,46 \cdot e^{0,149x}, \text{ da } 16^{\text{a}} \text{ a } 24^{\text{a}} \text{ semana. } (r^2 = 0,987)$$

$$y_5 = 1088161,35 \cdot e^{0,04676x}, \text{ da } 24^{\text{a}} \text{ a } 36^{\text{a}} \text{ semana. } (r^2 = 0,964)$$

$$y_6 = 1298863,23 \cdot e^{0,04x}, \text{ da } 36^{\text{a}} \text{ a } 44^{\text{a}} \text{ semana. } (r^2 = 0,995)$$

Figura 9 - Representação Gráfica das Curvas Exponenciais por Intervalos



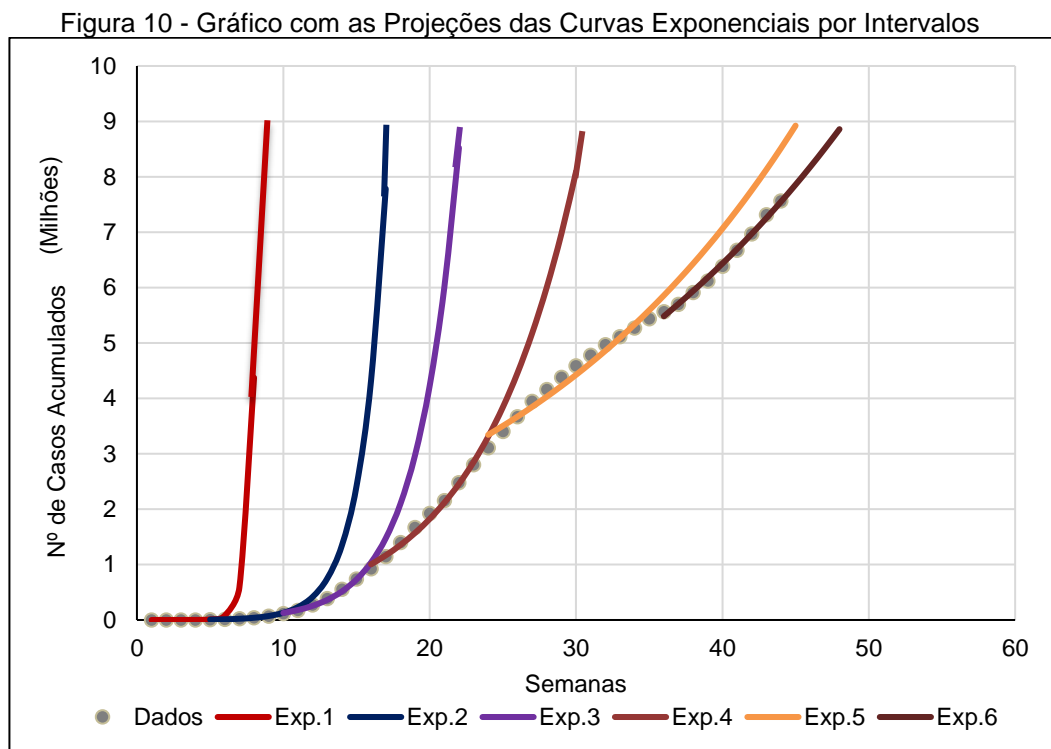
Fonte: Elaboração Própria.

Os valores de r^2 das curvas indicam que as curvas exponenciais que menos se ajustaram aos dados foram os do primeiro e quinto intervalo. O primeiro em função

do crescimento muito rápido e o quinto em função de que os dados mostram estar sofrendo decréscimo no número de casos por semana.

O mais importante do ajuste linear exponencial é conhecer o comportamento das curvas ao longo do tempo e para isso, apresenta-se a Figura 10 que mostra a representação da projeção de cada curva para as semanas seguintes

Pela representação gráfica pode-se observar que na primeira semana a curva exponencial (em vermelho) mostra uma velocidade de crescimento bastante acentuada e, para as próximas semanas, a taxa de variação da curva vai diminuindo gradativamente.



Para se ter uma ideia da velocidade de crescimento destas curvas obtidas, foi simulado quanto tempo demoraria cada curva a partir do zero para atingir o patamar de 6000000 de infectados, conforme mostra a Tabela 5.

Tabela 5 - Valores Estimados de Tempo para as Curvas Exponenciais de cada Intervalo para Atingir 6 Milhões de Casos

Curva	Exp. 1	Exp. 2	Exp. 3	Exp. 4	Exp. 5	Exp. 6
Tempo Aprox. (semanas)	8,0	16,5	21,00	28,0	36,5	38,0

Fonte: Elaboração Própria (Calculado pelo *Software Wolfram* online).

5.1.3.3 Modelagem Matemática do Número de Casos de COVID-19 a partir do Ajuste de Diferentes Tipos de Curvas

Nesta etapa do estudo foi verificado quais dos ajustes das curvas: linear, quadrático, exponencial, função potência, assintótico ou logístico melhor representava os dados em cada um dos intervalos selecionados. Os resultados obtidos apresentados na Tabela 6 foram os tipos de ajustes que produziram modelos matemáticos que se mostraram mais precisos a partir dos valores do r^2 . Para a determinação dos modelos matemáticos foi utilizado o Excel, escolhendo de forma adequada o ponto de intersecção da curva com o eixo vertical.

Os dois primeiros intervalos, de 0 a 5 e de 5 a 10 semanas, a curva de melhor ajuste foi a da função potência, enquanto os outros quatro se ajustaram com curvas do tipo quadrática. Todos os ajustes apresentaram coeficientes de determinação superiores a 0,99 e resultou em um erro médio relativo de aproximadamente 3,8%.

A Tabela 6 mostra as informações sobre os modelos obtidos dos ajustes por intervalos.

Tabela 6 - Modelo Matemático por Partes do Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020

Intervalo em Semanas	Tipo do Ajuste	Expressão do Modelo	r^2
1 a 5	Potência	$y_c = 1,5228 \cdot x^{5,0419}$	0,9903
5 a 10	Potência	$y_c(x) = 6,2511 \cdot x^{4,2613}$	0,9999
10 a 16	Quadrático	$y_c = 13614x^2 - 217078x + 920064$	0,9993
16 a 24	Quadrático	$y_c(x) = 6336,9x^2 + 19312x - 1 \cdot 10^6$	0,9996
24 a 36	Quadrático	$y_c(x) = -5019,4x^2 + 502715x - 6 \cdot 10^6$	0,9999
36 a 44	Quadrático	$y_c = 6216,4 x^2 - 237998x + 6 \cdot 10^6$	0,9964

Fonte: Elaboração Própria.

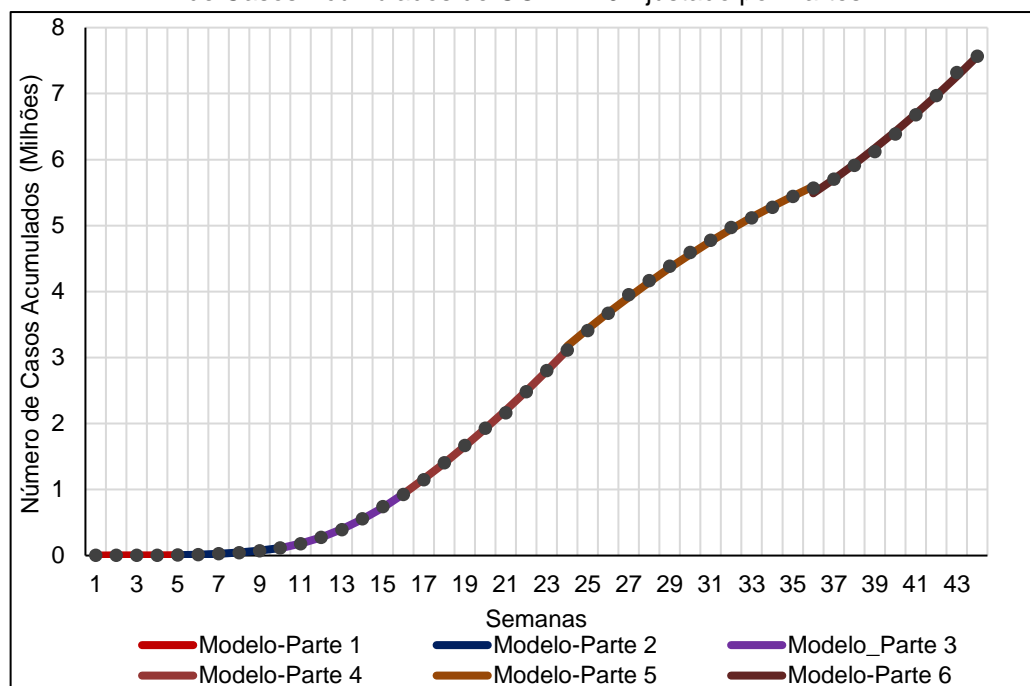
Diante dos resultados apresenta-se a seguir a equação (43) da função definida por partes que representa o modelo aproximado do número de casos acumulados de COVID da 1ª até a 44ª semana e a sua respectiva representação gráfica através da Figura 11.

$$y_c(x) = \begin{cases} 1,5228 \cdot x^{5,0419}, & \text{para } 1 \leq x \leq 5 \\ 6,2511 \cdot x^{4,2613}, & \text{para } 5 < x \leq 10 \\ 13614x^2 - 217078x + 920064, & \text{para } 10 < x \leq 16 \\ 6336,9x^2 + 19312x - 1 \cdot 10^6, & \text{para } 16 < x \leq 24 \\ -5019,4x^2 + 502715x - 6 \cdot 10^6, & \text{para } 24 < x \leq 36 \\ 6216,4x^2 - 237998x + 6 \cdot 10^6, & \text{para } 36 < x \leq 44 \end{cases} \quad (43)$$

Sendo $y_c(x)$: o número de infectados pela COVID-19 no Brasil na semana x .

Assim como no estudo com o crescimento exponencial apresentado anteriormente, pode-se observar, a partir dos intervalos adotados neste trabalho, que o comportamento da curva do número de casos acumulados da curva resultante foi se modificando ao longo do tempo.

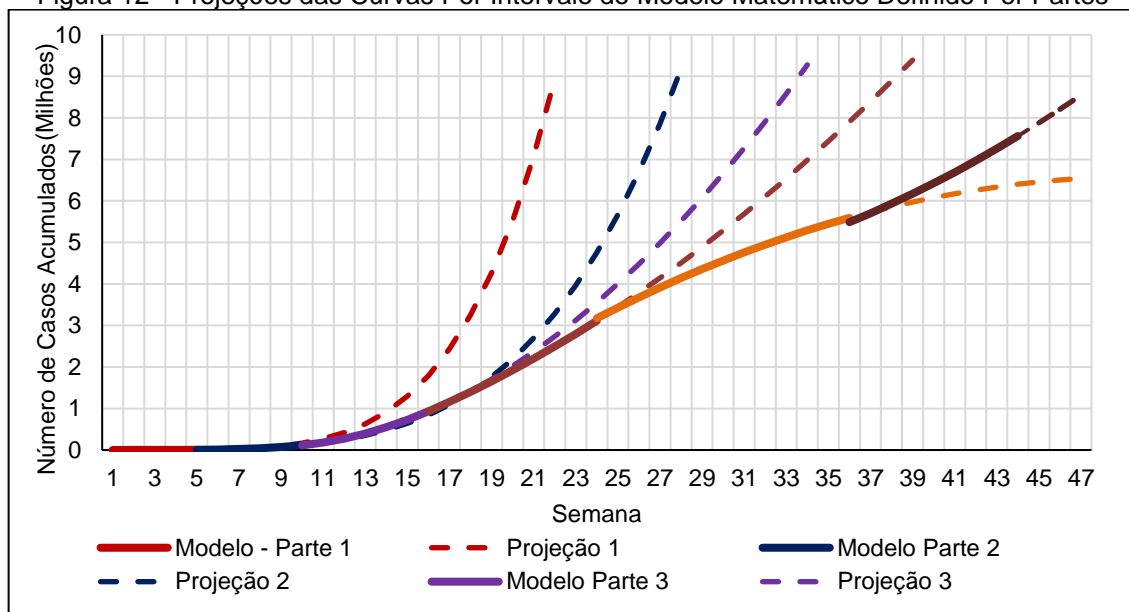
Figura 11 - Representação Gráfica do Modelo Matemático do Número de Casos Acumulados de COVID-19 Ajustado por Partes



Fonte: Elaboração Própria.

De forma similar com o que foi apresentado na subseção anterior, buscando mostrar a evolução do número dos dados caso se mantivesse a mesma forma de crescimento para cada um dos intervalos ajustados, foram construídas projeções de algumas semanas posteriores das curvas obtidas, conforme mostra a Figura 12.

Figura 12 - Projeções das Curvas Por Intervalo do Modelo Matemático Definido Por Partes



Fonte: Elaboração Própria.

Pode-se visualizar graficamente que no primeiro intervalo considerado (de 1 a 5 semanas) o modelo matemático obtido a partir do ajuste da função potência mostra a velocidade do crescimento mais rápida que as demais, quando observada a sua projeção para as semanas que segue, conforme mostra a linha tracejada vermelha. Pode se perceber que as curvas de projeções do segundo ao quarto intervalo (linhas tracejadas: azul, roxa e laranja) mostram que a velocidade de crescimento do contágio vai diminuindo gradativamente. A curva de projeção do quinto intervalo (tracejada verde) é a que apresenta a menor velocidade de crescimento em todos os intervalos analisados. No último trecho, a projeção da curva (tracejada marrom) passa a aumentar a velocidade de propagação da doença em relação ao período anterior.

Com o objetivo de ilustrar a velocidade do crescimento das curvas é apresentado a seguir o tempo que demandaria para cada expressão do modelo matemático atingir o patamar de 6 milhões de casos acumulados.

Tabela 7 - Valores Aproximados do Tempo Necessário para se Atingir 6 Milhões de Casos para Cada Curva do Modelo Matemático da Equação 43

Curva do Intervalo:	1	2	3	4	5	6
Tempo em Semanas	20	25	29	32	39	38

Fonte: Elaboração Própria.

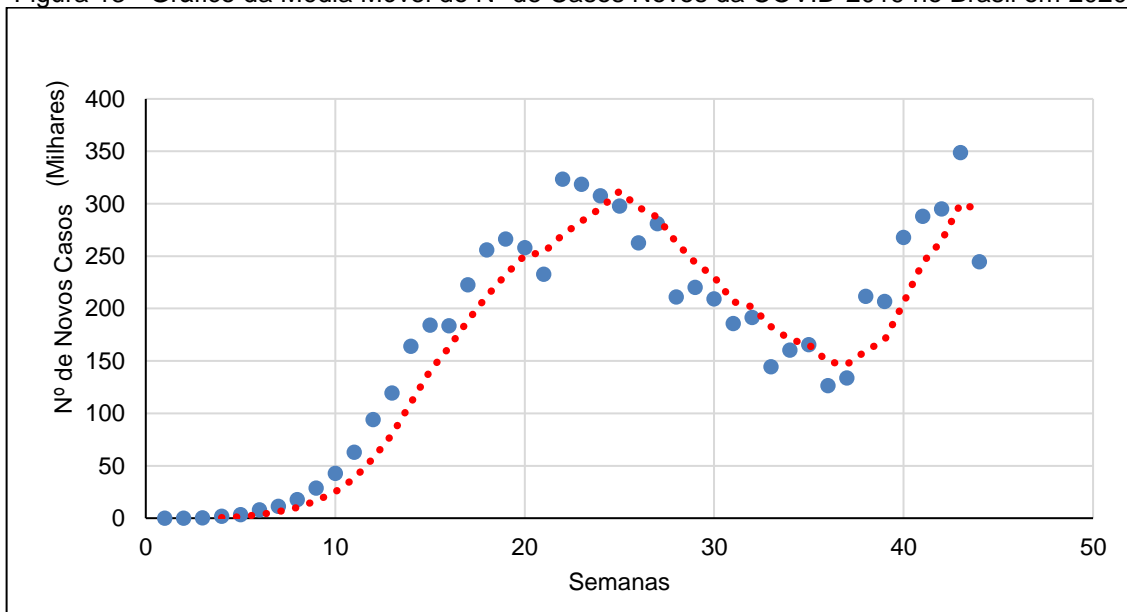
Nestes cenários, se mantivéssemos a mesma forma de crescimento da curva do intervalo 1, em aproximadamente 20 semanas se chegaria ao valor estipulado. Por

outro lado, de acordo com as informações da Tabela 7 se considerarmos as funções que orientam os demais trechos, teríamos que a curva do intervalo 2 teria mais de 3 semanas para atingir tal patamar. As curvas dos intervalos 3, 4, 5 e 6, demorariam em relação a primeira curva em torno de 5, 9, 12, 19 e 18 semanas, respectivamente para atingir o número estipulado.

Por isso a importância de medidas para desacelerar a curva de propagação da doença, pois desta forma é possível se ter um pouco mais de tempo para que o setor de saúde consiga atender os casos de complicação da saúde por conta da contaminação com o vírus.

A diminuição da velocidade do trecho de 24 a 36 semanas (05/08 a 03/11/20), deve-se ao fato de que neste intervalo o número de casos novos foram caindo, conforme mostra o gráfico da Figura 13 da curva da média móvel no período de quatro semanas e depois retorna a crescer a velocidade novamente no último intervalo.

Figura 13 - Gráfico da Média Móvel do Nº de Casos Novos da COVID-2019 no Brasil em 2020



Fonte: Elaboração Própria.

Por isso a importância de medidas de contenção para desacelerar a curva de propagação da doença, pois desta forma é possível se ter um pouco mais de tempo para que o setor de saúde consiga atender os casos de complicação da saúde por conta da contaminação com o vírus.

O valor obtido com o último modelo matemático para a 50ª semana (03 a 09/02/2021) teve um erro de aproximadamente 0,43 %, o que pode indicar que neste

período o número de casos estava ainda na mesma dinâmica do último período do ano de 2020.

5.1.4 Ajuste do Número de Casos Ativos de COVID-19 para Gerar Cenários com o Modelo Epidemiológico SIR Discretizado

Foram considerados neste trabalho, casos ativos o número de infectados acumulados – número de recuperados acumulados – número de mortos acumulados, disponíveis no *site* do Ministério da Saúde.

Conforme detalhado na Subseção 3.2.3, busca-se um modelo SIR discreto da forma:

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - \beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \beta I_n S_n - \alpha I_n \\ R_{n+1} = R_n + \alpha I_n \end{cases} \quad (42)$$

Para isso, precisa-se dos valores de β (taxa de infecção) e α (taxa de recuperação). Foi adotado o valor de taxa de recuperação igual a $\alpha = 0,1$, a partir da literatura apresentada nos trabalhos de Abreu (2020) e Mesquita, Meira e Dias Neto (2020). Este valor de α significa que um indivíduo infectado fica em média $t_r = 10$ dias com a doença para passar para o grupo de recuperados, ou seja, $\alpha = \frac{1}{t_r} = \frac{1}{10} = 0,1$.

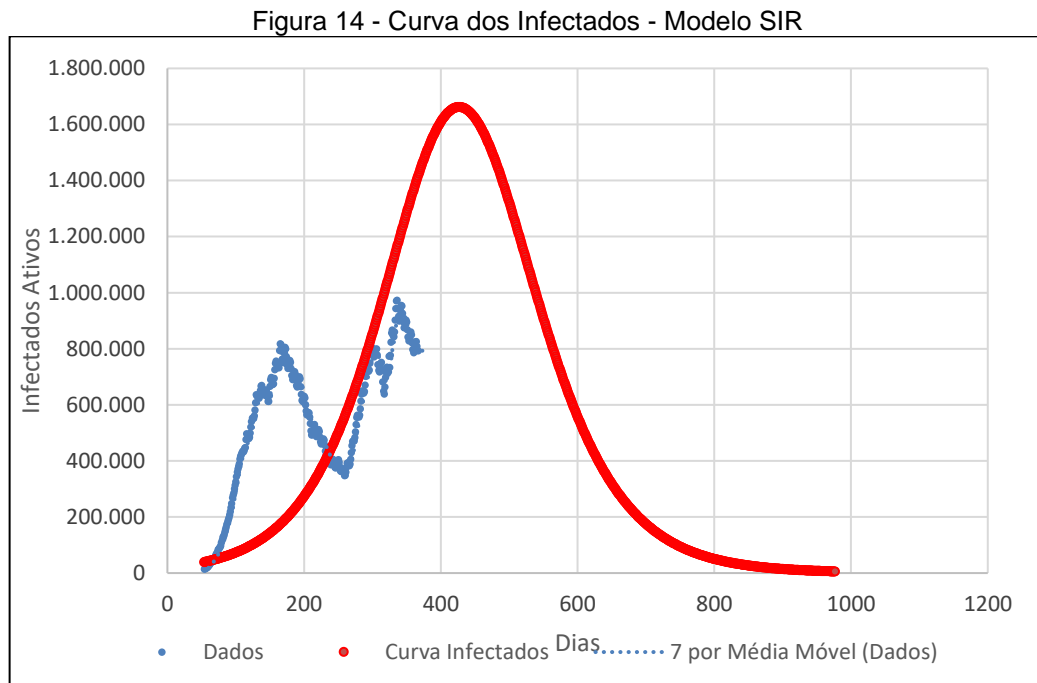
Tomou-se I_o , R_o e $S_o = N - I_o$, sendo N o valor da população do país.

Os valores de taxa de infecção β foram obtidos a partir da minimização dos erros ao quadrado entre os dados coletados (n° de infectados acumulados menos removidos acumulados) e o valor calculado pelo modelo SIR discretizado.

Nesta parte do estudo foram consideradas duas situações: A primeira tomou-se todos os dados diários do número de casos de 2020 a partir do dia 54 (em função dos dados disponíveis) para determinar os parâmetros β com valor de α fixo. Na segunda, foram gerados cenários com diferentes valores de β , cujos resultados estão apresentados a seguir

1ª) *Considerando todos os dados diários do número de casos acumulados*

Para este estudo obteve-se $\beta = 0,11382$ com valor fixo de $\alpha = 0,1$. A Figura 14 mostra a curva dos infectados (ativo) obtidas.



A curva dos infectados não produziu um bom ajuste com os dados, porém nas condições consideradas, foi o melhor parâmetro de β obtido. O que pode indicar que as medidas de contenção da doença adotadas pela população, de certo modo, foram alterando a tendência exponencial de crescimento da curva de infectados modelados pelo SIR.

É importante destacar que este trabalho não teve a intenção de fazer previsões futuras a longo prazo, até porque o fenômeno de uma epidemia envolveria muitas outras variáveis, precisando quase que de estudos em tempo real. Neste trabalho se limitou a apontar os resultados obtidos com os parâmetros e modelo matemático adotados. Desta forma, são apresentados a seguir alguns cenários com diferentes taxas de infecção.

2º) Cenários obtidos com o Modelo SIR com Diferentes Valores de β

Assim como procedeu-se para o estudo com os ajustes de curvas da Subseção 5.1.3, para esta parte do estudo foi dividido em seis intervalos de tempo e os

parâmetros de β foram obtidos considerando a minimização dos erros entre o dado e o calculado pela equação de recorrência do Modelo SIR para cada intervalo.

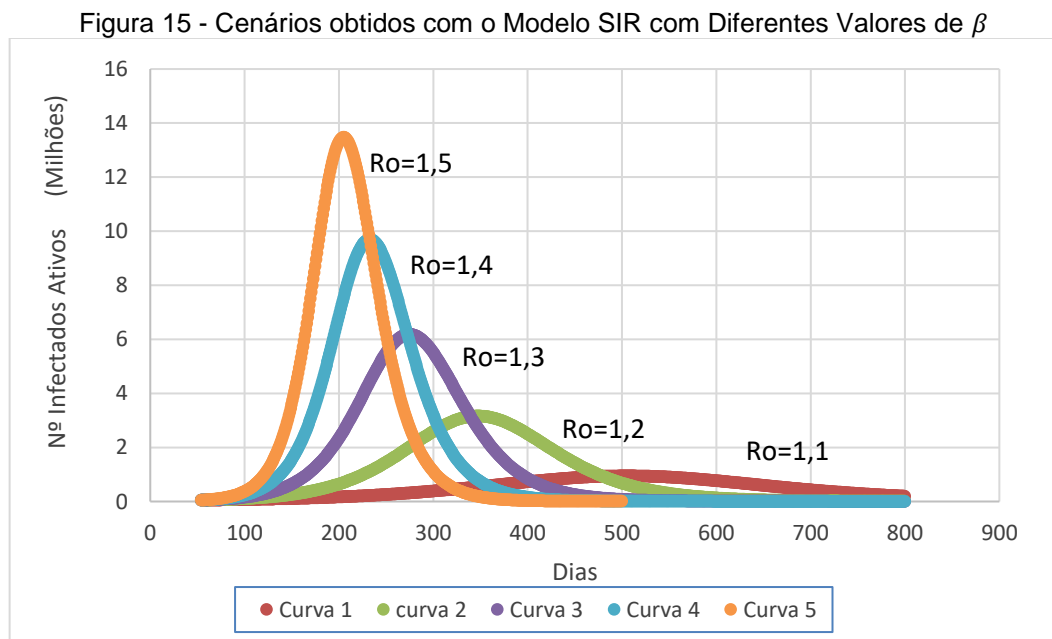
Para todos os casos, considerou-se as mesmas condições do primeiro caso I_0 , R_0 e $S_0 = N - I_0$ e sendo minimizados somente os erros quadrados correspondente a cada trecho. Talvez este resultado não são práticos para se compreender de forma precisa a curva da epidemia, no entanto, possibilita verificar o que ocorre com diferentes cenários para mostrar o que aconteceria com a curva de número de infectados para diferentes valores de taxa de infecção β .

Com a minimização de cada trecho obteve-se valores para β entre 0,11 e 0,15. Então foi simulado para os valores de $\beta = 0,11$; $\beta = 0,12$; $\beta = 0,13$; $\beta = 0,14$; $\beta = 0,15$ as curvas correspondentes.

Com estes valores de β , os respectivos números médios de pessoas suscetíveis que cada infectado contamina $Ro = \frac{\beta}{\alpha}$ seriam:

$$Ro_1 = 1,1, Ro_2 = 1,2; Ro_3 = 1,3; Ro_4 = 1,4; Ro_5 = 1,5.$$

O gráfico da Figura 15 mostra como seriam os comportamento das curvas para cada valor de Ro .



Fonte: Elaboração Própria.

Estes cenários mostram que conforme aumenta-se o valor de Ro correspondente ao número de indivíduos que cada infectado contamina, acelera o crescimento da curva e atinge o pico mais rapidamente. Além disso, conforme o valor

de R_0 vai diminuindo, a curva também vai diminuindo o valor de pico e vai atingi-lo mais lentamente, como ilustram as curvas da Figura 16.

Nestes cenários, para $R_{0_1} = 1,1$ o pico seria atingido em aproximadamente 505 dias (meados de 2021) e para os demais: $R_{0_2} = 1,2$ em 354 dias (Fevereiro/2021), $R_{0_3} = 1,3$ em 275 dias (Novembro/2020), $R_{0_4} = 1,4$ em 231 dias (Outubro/2020), $R_{0_5} = 1,5$ em 206 dias (Setembro/2020).

Em termos práticos, estes resultados mostram a importância de se diminuir os encontros entre as pessoas, usar medidas de proteção para diminuir a probabilidade de um indivíduo vir a se infectar e contribuir para o crescimento da curva do número de casos de contaminados.

Finaliza desta forma os estudos com os dados do número de casos acumulados com o MMQ com ajuste das curvas linear, quadrático, exponencial, assintótico, logístico e Modelo SIR Discretizado.

Na próxima subseção é apresentado a modelagem do número de óbitos por complicações com a COVID-19 em 2020, somente com o MMQ, uma vez que o modelo SIR neste trabalho foi utilizado para se compreender o avanço do número de casos em uma epidemia.

5.2 MODELAGEM DO NÚMERO DE ÓBITOS ACUMULADOS POR COMPLICAÇÕES COM A COVID -19 NO BRASIL EM 2020

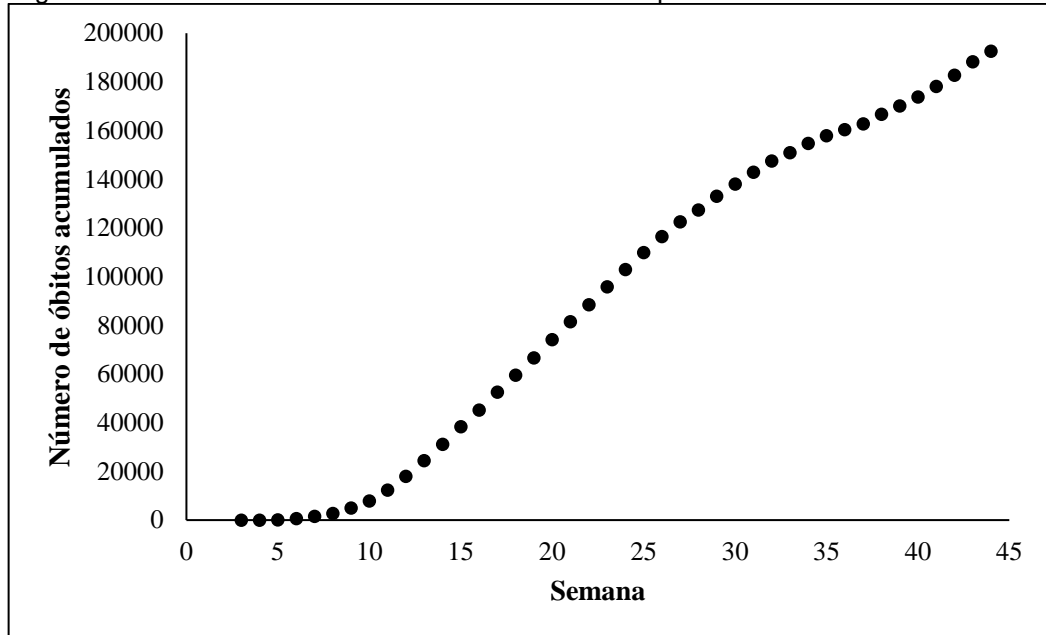
Esta subseção destina-se os resultados obtidos dos ajustes dos dados relativos ao número de óbitos de COVID-19. Assim como na Subseção anterior, apresenta-se em um primeiro momento o ajuste considerando todos os dados, em seguida, o tempo será particionado de acordo com o comportamento dos dados para realização de um estudo complementar. As possibilidades de tipo de ajuste e métodos são os mesmos utilizados para o estudo do número de casos.

5.2.1 Dados dos Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020

Na Figura 16, tem-se os dados em forma de gráfico sobre o número de óbitos acumulados por complicações com a COVID-19 no país. A coleta ocorreu no site do Ministério da Saúde, no período de 11/03/2020 à 29/12/2020. Na data de 17/03/2020

ocorreu o primeiro óbito registrado no Brasil, segundo dados do governo, mais especificamente na terceira semanas de observação dos dados. Assim como o número de casos de COVID-19, os dados sobre o número de óbitos acumulados também estão dispostos de forma semanal e foi considerada até a 44ª semana, No Apêndice C consta os períodos referentes a cada semana.

Figura 16 - Gráfico do Número de Óbitos Acumulados por COVID-19 no Brasil em 2020

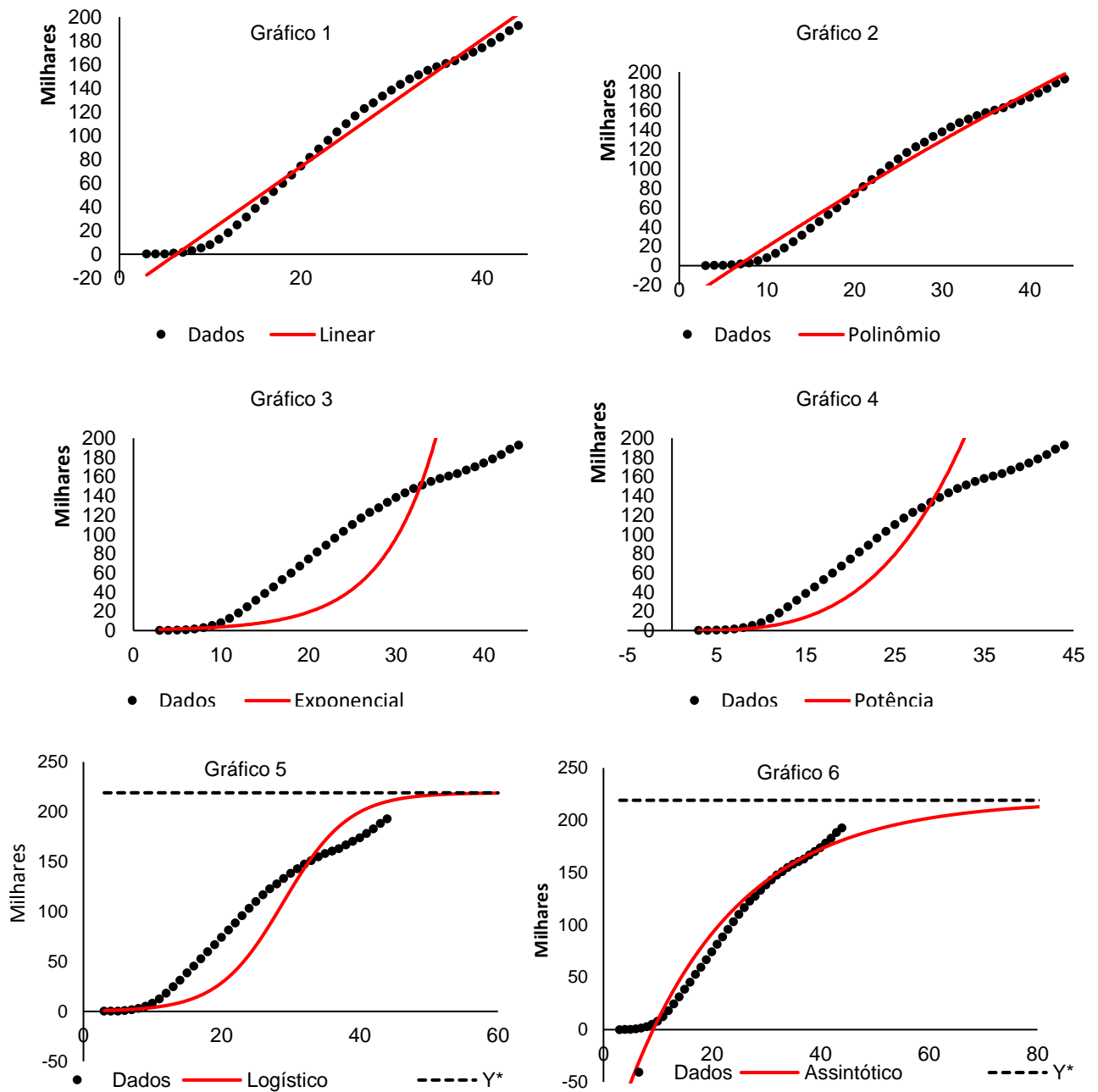


Fonte: Elaboração Própria Baseada nos Dados do Ministério da Saúde.

5.2.2 Ajustes do Número de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020

Os resultados obtidos dos ajustes do número de óbitos acumulados por complicações com a COVID-19 estão apresentados na Figura 17 e na Tabela 8, por meio das representações gráficas das curvas: linear, quadrático, linear do modelo exponencial, função potência, exponencial assintótico e o modelo logístico, pelo MMQ e das informações sobre as funções dos modelos matemáticos encontrados. Os cálculos do valor da capacidade de suporte Y^* utilizado para os modelos assintóticos estão apresentados no Apêndice D.

Figura 17 - Representações Gráficas dos Ajustes de Curvas do Número de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020



Fonte: Elaboração Própria.

A Tabela 8 adiante apresenta a equação de cada modelo juntamente com o coeficiente de determinação, com y_0 representando o número de óbitos acumulados por complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020.

Tabela 8 - Síntese dos Resultados Obtidos dos Modelos Ajustados do Nº de Óbitos Acumulados por Complicações a COVID-19 no Brasil em 2020

Modelo	Equação do Modelo	r^2
Linear	$y_o(x) = 5369x - 33607$	0,9831
Quadrático	$y_o(x) = -16,9x^2 + 6161,7x - 40443$	0,9842
Exponencial	$y_o(x) = 758,2e^{0,1615x}$	0,5998
Potência	$y_o(x) = 1,3666x^{3,4086}$	0,8648
Exponencial Assintótico	$y_o(x) = 219106 - 346729,4251e^{-0,0501x}$	0,9242
Logístico	$y_o(x) = \frac{219106}{1 + 457,1904e^{-0,2116x}}$	0,9135

Fonte: Elaboração Própria.

Pelo comportamento dos dados do número de óbitos acumulados por complicações com a COVID-19 serem semelhante aos infectados, a análise inicial dos modelos acima é um pouco análoga à feita no item 4.1. Nota-se que dentre os ajustes realizados, a curva dos modelos, linear e quadrático foram os que mais se aproximaram aos dados. Em contrapartida, ao se analisar da semana 10 à 20 e da 10 à 25, os modelos potência e exponencial, respectivamente, apresentam uma discrepância muito significativa entre o dado coletado e calculado, considerando a média dos erros relativos, 0,79 e 2,60.

No modelo logístico aconteceu o mesmo que o da função potência, nota-se pelo gráfico e confirmado pela média dos erros relativos, 2,01, que os valores calculados estão muito elevados para o período em questão. Contudo, no ajuste assintótico, acontece um fato muito relevante, se levar em conta da semana 32 à 40, tal modelo apresentou valores calculados muito próximos dos coletados neste intervalo, erro médio de 1%, percebe-se esse comportamento no gráfico de sua curva ajustada.

Portanto, o modelo que representará os dados do número de óbitos acumulados por complicações com a COVID-19, será novamente o quadrático, pois apresentou o melhor valor para o coeficiente de determinação. A seguir, apresenta-se os cálculos necessários para obtenção do ajuste polinomial de grau dois dos dados.

- **Processo de Determinação do Ajuste Quadrático do Número de Óbitos Relativos a COVID-19**

Para obtenção do modelo, precisa-se determinar os parâmetros reais a, b e c da equação $y(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. A Tabela 9 traz os cálculos auxiliares que irão possibilitar descobrir os parâmetros do referido ajuste.

Tabela 9 - Cálculos Auxiliares - Ajuste Quadrático do Nº de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020

Semana (\bar{x}_i)	Casos (\bar{y}_i)	\bar{y}_i^2	\bar{x}_i^2	\bar{x}_i^3	\bar{x}_i^4	$\bar{x}_i\bar{y}_i$	$\bar{x}_i^2\bar{y}_i$	\hat{y}_i	$(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$
3	1	1,00E+00	9,00E+00	2,70E+01	8,10E+01	3,00E+00	9,00E+00	2,21E+04	4,89E+08
4	46	2,12E+03	1,60E+01	6,40E+01	2,56E+02	1,84E+02	7,36E+02	1,61E+04	2,60E+08
5	201	4,04E+04	2,50E+01	1,25E+02	6,25E+02	1,01E+03	5,03E+03	1,01E+04	1,05E+08
6	679	4,61E+05	3,60E+01	2,16E+02	1,30E+03	4,07E+03	2,44E+04	4,08E+03	2,26E+07
7	1541	2,37E+06	4,90E+01	3,43E+02	2,40E+03	1,08E+04	7,55E+04	1,86E+03	1,03E+05
8	2751	7,57E+06	6,40E+01	5,12E+02	4,10E+03	2,20E+04	1,76E+05	7,77E+03	2,52E+07
...									
37	162829	2,65E+10	1,37E+03	5,07E+04	1,87E+06	6,02E+06	2,23E+08	1,64E+05	2,62E+06
38	166699	2,78E+10	1,44E+03	5,49E+04	2,09E+06	6,33E+06	2,41E+08	1,69E+05	7,00E+06
39	170115	2,89E+10	1,52E+03	5,93E+04	2,31E+06	6,63E+06	2,59E+08	1,74E+05	1,68E+07
40	173817	3,02E+10	1,60E+03	6,40E+04	2,56E+06	6,95E+06	2,78E+08	1,79E+05	2,73E+07
41	178159	3,17E+10	1,68E+03	6,89E+04	2,83E+06	7,30E+06	2,99E+08	1,84E+05	3,22E+07
42	182799	3,34E+10	1,76E+03	7,41E+04	3,11E+06	7,68E+06	3,22E+08	1,89E+05	3,36E+07
987	188259	3,54E+10	1,85E+03	7,95E+04	3,42E+06	8,10E+06	3,48E+08	1,93E+05	2,56E+07

Fonte: Elaboração Própria.

Assim, utilizando a equação (8) e as somas da Tabela 9, tem-se:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^4 + b \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^3 + c \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 \bar{y}_i \\ a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^3 + b \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + c \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i \Rightarrow \\ a \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 + b \sum_{i=1}^n \bar{x}_i + nc = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i \end{cases}$$

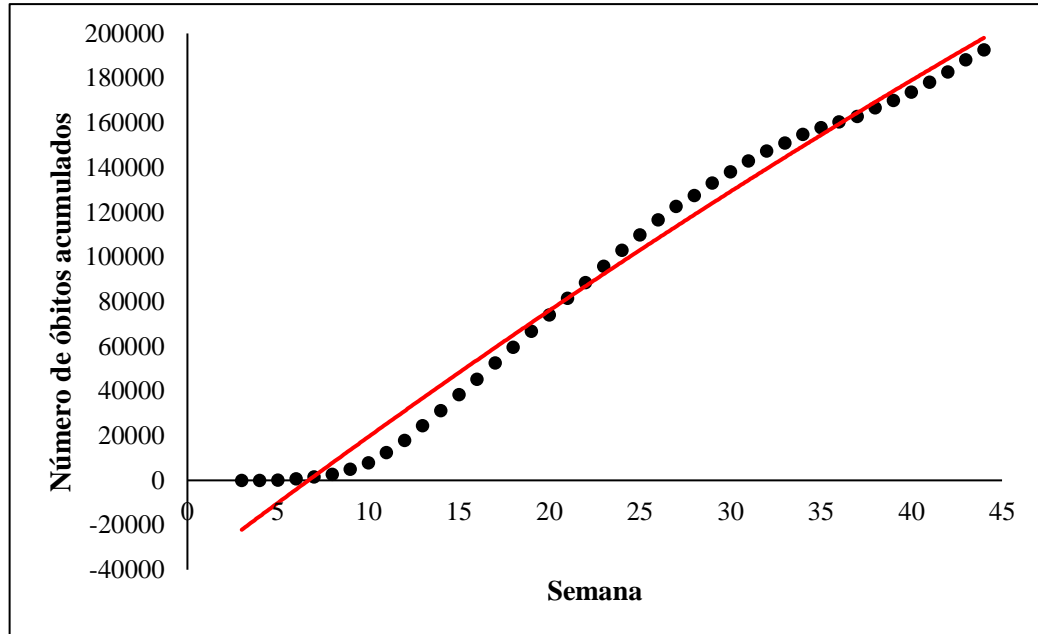
$$\Rightarrow \begin{cases} 34885669a + 980091b + 29365c = 4263022181 \\ 980091a + 29365b + 987c = 124490453 \\ 29365a + 987b + 42c = 3887708 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima encontra-se, $a = -16,9, b = 6161,7$ e $c = -40443$, logo, a equação do ajuste quadrático dos dados do número de óbitos é dada por:

$$y_o(x) = -16,9x^2 + 6161,7x - 40443, \text{ com } x \geq 0.$$

Na Figura 18, tem-se a dispersão de pontos dos dados do número de óbitos acumulados e a curva do ajuste polinomial quadrático representada pela linha contínua.

Figura 18 - Gráfico - Ajuste Quadrático do Nº de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020



Fonte: Elaboração Própria.

Analisando a qualidade do ajuste por meio do r^2 tem-se:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n \bar{y}_i)^2} \Rightarrow r^2 = 1 - \frac{2855063533}{540795441386 - \frac{1}{42} 3887708^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 0,9842$$

Análogo ao modelo obtido do número de casos de COVID-19, o ajuste do número de óbitos também demonstrou em algumas partes de sua curva, um comportamento distinto entre o dado coletado e calculado. Para validar tal afirmação, calculou-se o erro relativo considerando a equação (38) da subseção 4.1.2, os valores sintetizados estão na Tabela 10.

Tabela 10 - Erro Relativo do Ajuste Quadrático dos Óbitos Acumulados por COVID-19

Semana	Quadrático
3	1,00
4	1,00
5	1,02
6	1,17
7	0,17

Continua

Continuação - Tabela 10 - Erro Relativo do Ajuste Quadrático dos Óbitos Acumulados por COVID-19

8	0,65
9	0,63
10	0,59
11	0,51
12	0,42
...	
35	0,02
36	0,01
37	0,01
38	0,02
39	0,02
40	0,03
41	0,03
42	0,03
43	0,03
44	0,03
Média	0,22

Fonte: Elaboração Própria.

Nota-se que o ajuste quadrático para os óbitos acumulados, mostrou-se um pouco melhor que nos casos acumulados, pois apresentou um coeficiente de determinação de 0,9842, média dos erros relativos de 22% e nas últimas 10 semanas esse erro esteve entre 1% e 3%. Dessa forma, em um aspecto geral, o ajuste quadrático mostrou certa regularidade na comparação entre o dado coletado e o calculado.

Portanto, considerando as explicações acima, conclui-se que é relevante para o trabalho, realizar uma análise dos diferentes comportamentos que a curva dos óbitos acumulados teve durante o período de 11/03/2020 à 29/12/2020. Nota-se em um primeiro momento, que essa divisão possibilitará ter uma noção de como a pandemia se comportaria caso os dados seguissem na mesma linha de crescimento ou decrescimento que o período analisado. Assim, a subseção adiante tem o objetivo de analisar os dados considerando os intervalos de tempo particionados.

5.2.3 Modelagem Matemática do Número de Óbitos por COVID-19 com Intervalos de Tempo Particionados

Com o objetivo final de interrelacionar o número de casos com o de óbitos, serão considerados os mesmos intervalos do caso anterior. Também serão considerados os mesmos tipos, métodos e critério de seleção para os ajustes das curvas.

Os cinco dos seis intervalos analisados tiveram como melhor tipo o ajuste quadrático e somente o intervalo da semana 16 a 24 se adequou melhor ao ajuste linear. Todos os ajustes apresentaram coeficientes de determinação superiores a 0,99 e resultou em um erro médio relativo de aproximadamente 1,2%.

A Tabela 11 mostra as informações sobre os modelos obtidos dos ajustes por intervalos.

Tabela 11 - Modelo Matemático por Partes do Número de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020

Intervalo em Semanas	Tipo do Ajuste	Expressão do Modelo para Cada Intervalo	r^2
1 a 5	Quadrático	$y_o(x) = 55x^2 - 340x + 526$	1
5 a 10	Quadrático	$y_o(x) = 316,3x^2 - 3232,5x + 8552,7$	0,9982
10 a 16	Quadrático	$y_o(x) = 241,1x^2 + 60,095x - 17112$	0,9994
16 a 24	Linear	$y_o(x) = 7221,6x - 70297$	1
24 a 36	Quadrático	$y_o(x) = -176,37x^2 + 15380x - 164392$	0,9998
36 a 44	Quadrático	$y_o(x) = 166,22x^2 - 9209,9x + 276427$	0,9994

Fonte: Elaboração Própria.

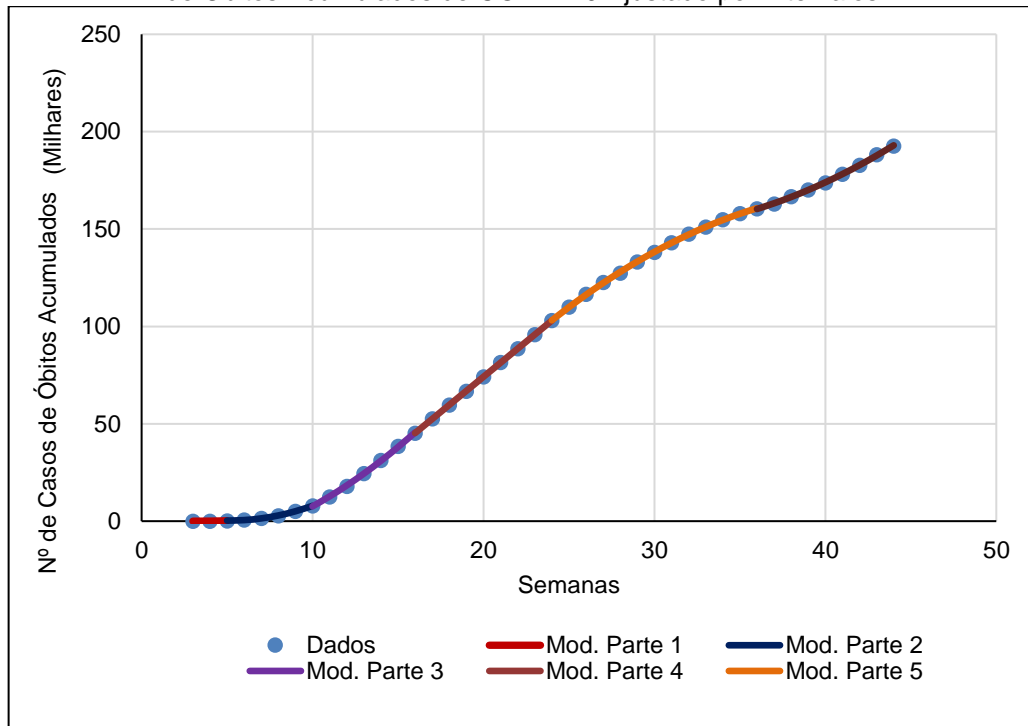
Diante dos resultados apresenta-se a seguir a equação (44) da função definida por partes que representa o modelo aproximado do número de óbitos por COVID da 3ª até a 44ª semana e a sua respectiva representação gráfica (Figura 20).

$$y_o(x) = \begin{cases} 55x^2 - 340x + 526, & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \\ 316,3x^2 - 3232,5x + 8552,7, & \text{se } 5 < x \leq 10 \\ 241,1x^2 + 60,095x - 17112, & \text{se } 10 < x \leq 16 \\ 7221,6x - 70297, & \text{se } 16 < x \leq 24 \\ -176,37x^2 + 15380x - 164392, & \text{se } 24 < x \leq 36 \\ 166,22x^2 - 9209,9x + 276427, & \text{se } 36 < x \leq 44 \end{cases} \quad (44)$$

Sendo $y_o(x)$: o número de óbitos pela COVID-19 no Brasil na semana x .

Assim como no estudo apresentado anteriormente, pode-se observar, a partir dos intervalos adotados neste trabalho, que o comportamento da curva do número de óbitos acumulados da curva resultante vai se modificando ao longo do tempo, conforme pode ser observado pelo gráfico da Figura 19.

Figura 19 - Representação Gráfica do Modelo Matemático do Número de Óbitos Acumulados de COVID 19 Ajustado por Intervalos



Fonte: Elaboração Própria.

Tomando o modelo matemático do último intervalo $y_o(x) = 166,22x^2 - 9209, x + 276427$ e calculando o número de óbitos para a 50ª semana, obteve-se como resposta 231.482 óbitos e o número apresentado pela Secretaria da Saúde é de 231.534 (08/02/21), o que equivale a um erro de aproximadamente 0,023%, o que pode indicar que os dados ainda estão apresentando comportamento de crescimento próximo ao do último intervalo analisado neste estudo (de novembro e dezembro de 2020).

Finaliza-se aqui os resultados encontrados neste estudo utilizando as ferramentas de ajuste de curvas pelo MMC que buscou compreender o comportamento do número de casos e de óbitos relacionado a COVID-19 no ano de 2020.

6 PROPOSTA DIDÁTICA DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Neste capítulo, apresenta-se sugestões de atividades que o professor pode utilizar como meio de utilizar a modelagem matemática no processo de ensino e aprendizagem. A proposta está dividida em duas partes, a primeira, denominada de Situação-Problema 1, busca encontrar um modelo matemático por meio de ajustes com as funções afim e quadrática a partir dos dados do número de casos acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020 em um período específico utilizando o *Excel*. A segunda, denominada de Situação-Problema 2 teve como objetivo mostrar a dinâmica de uma epidemia utilizando as hipóteses do Modelo SIR considerando o tempo discreto e posteriormente trabalhar os conceitos matemáticos envolvidos com exemplos fictícios numéricos. No final do capítulo há um estudo complementar, caso se tenha interesse em se conhecer como se calcula os parâmetros da função linear ajustada aos dados.

Cada atividade contém as etapas propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2013), sendo elas: i) Inteiração do problema; ii) Matematização; iii) Resolução e Interpretação dos Resultados.

Para cada atividade serão apresentadas as respectivas resoluções ou as etapas a serem seguidas. Para o desenvolvimento dessas atividades, propõe-se adiante situações-problema que objetivam mostrar aplicações de conceitos/conteúdos matemáticos que são tratados no Ensino Médio.

Busca-se ainda com essas atividades, ressaltar que a Matemática pode ser uma ferramenta em potencial no processo de resolução de problemas aplicados a diferentes contextos e que esta ciência não se restringe somente a fórmulas, exercícios e teoremas que são geralmente ensinados em sala de aula. Para atingir tais objetivos, buscou-se criar situações-problema com dados envolvendo informações sobre a pandemia do Novo Coronavírus no Brasil, o causador da doença COVID-19. Espera-se que, trabalhando com dados relacionados a situações presentes na sociedade, possa motivar e aguçar a curiosidade dos estudantes.

6.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 1 - MMQ

ETAPA 1: INTEIRAÇÃO COM A PROBLEMÁTICA

Este primeiro nível é a abordagem inicial do tema, isto é, consiste em o professor apresentar a problemática que será trabalhada pelos alunos com a finalidade de conhecer as características do problema. Assim, antes de iniciar o desenvolvimento das atividades propriamente dita, uma possibilidade seria lançar alguns questionamentos aos alunos e indicar sugestões de pesquisa relacionados com a pandemia provocada pelo Novo Coronavírus. Considera-se que, para o desenvolvimento das atividades propostas, que os alunos tenham conhecimento sobre funções afim e quadrática e resolução de sistemas lineares.

Como sugestão, apresenta-se a seguir, algumas questões ao professor para conduzir esta etapa do estudo.

Atividade 1.1: Sugestões de questões sobre a problemática para discussão inicial

- *O que é o Coronavírus?*
- *Como surgiu o novo Coronavírus e o que ele causa para o ser humano?*
- *O que é a COVID-19? Como ela é transmitida?*
- *Como podemos prevenir a propagação da COVID-19?*
- *Quais são as pessoas que são do grupo de risco para a doença?*
- *Quem não faz parte do grupo de risco não precisa se preocupar na prevenção? Por que?*
- *Você já ouviu falar de outras pandemias que já ocorreram no planeta?¹*
- *Na atualidade, cite alguns fatores que favoreceram para que a infecção por coronavírus se alastrasse rapidamente pelos países.*
- *Como cada um (dos alunos) percebe no país o crescimento do número de casos de infecção pelo vírus ao longo do tempo?*
- *Há possibilidade de se utilizar conceitos matemáticos para tratar dados de determinado período do número de infectados pela COVID-19 ao longo do tempo no país?*

¹ Para esta questão, o professor pode acessar a Subseção 2.1 deste trabalho que traz de maneira resumida a história de algumas pandemias que aconteceram ao longo da história.

Para responder esta última indagação, o professor pode solicitar aos alunos que consulte dados disponíveis sobre isso, seja em sua cidade, estado ou mesmo no país. Para viabilizar esta atividade, escolheu-se dados relacionados ao número de casos acumulados de COVID-19 no Brasil em um período específico. Esses dados serão objeto de estudo para tratar os conceitos de função polinomial do 1º e 2º grau.

ETAPA 2: MATEMATIZAÇÃO

Atividade 2.1: Esta atividade consiste em apresentar a situação-problema que dará suporte para o desenvolvimento das atividades a seguir, o intuito é que os alunos se familiarizem com o problema, que seja promovido alguns questionamentos a respeito do assunto abordado e que surja possíveis abordagens matemática com o tema.

Situação-problema 1: *Em dezembro de 2019 foi identificado em Wuhan na China um novo Coronavírus, denominado de SARS-COV-2, o vírus causa uma doença potencialmente grave ao sistema respiratório de algumas pessoas segundo a SBP. A doença denominada de COVID-19 se alastrou rapidamente pelo mundo gerando uma epidemia global. No Brasil o primeiro caso registrado pelo Ministério da Saúde foi em 26/02/2020 e os dados sobre a doença foram divulgados pelo governo no site: <https://covid.saude.gov.br/>. A Tabela 12 adiante representa parte do número dos casos acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020, organizados semanalmente. Essa forma de organização dos dados (acumulados) possibilita uma percepção de como está se comportando os números da pandemia ao longo do tempo. A semana 6 refere-se ao intervalo de 01/04 a 07/04/2020 e a Semana 21 de 15/07 a 21/07/2020.*

Tabela 12 - Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil entre 01/04 a 21/07/20

Semana (x_i)	Casos acumulados (y_i)
6	13717
7	25262
8	43079
9	71886
10	114715
11	177589
12	271628
13	391222
14	555383

Continua

Continuação - Tabela 12 - Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil entre 01/04 a 21/07/20

15	739503
16	923189
17	1145906
18	1402041
19	1668589
20	1926824
21	2159654

Fonte: Elaboração Própria.

Apresentado os dados, surge a possibilidade de se perguntar aos estudantes:

- Neste período, os aumentos do número de casos ao longo do tempo têm ocorrido na mesma proporção?

- Existe uma relação entre o número de casos acumulados com o tempo (em semanas)? Se existe, qual é?

Diante dessas questões é que se dará o desenvolvimento das atividades da etapa da Resolução, apresentada a seguir.

ETAPA 3: RESOLUÇÃO - DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO MATEMÁTICO NO CONTEXTO DO TEMA

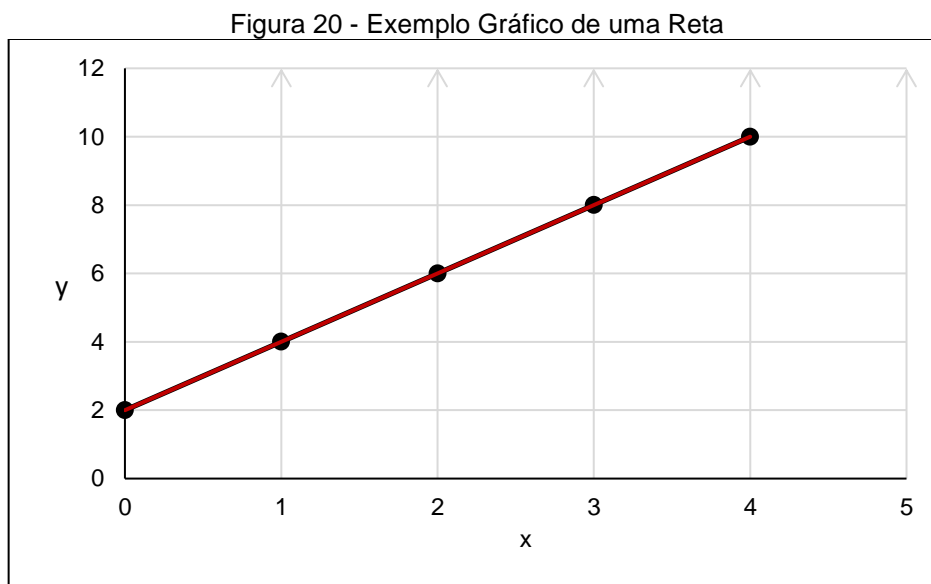
Nesta etapa serão desenvolvidos os modelos matemáticos do número de casos acumulados de COVID-19 das semanas 6 a 21, baseados na ideia do ajuste de curvas pelo Método dos Mínimos Quadrados. As atividades de 3.1 à 3.3 são propostas para serem resolvidas manualmente, enquanto a 3.4 e 3.5 requerem o uso de planilha eletrônica, que podem ser pelo Excel ou outro similar.

Atividade 3.1: Trabalhando intuitivamente a ideia geométrica do Método dos Mínimos Quadrados para se obter uma reta que melhor se adeque aos dados

A partir do gráfico é possível fazer algumas observações em conjunto, professor e estudantes, como, o tempo em semanas representado no eixo x das abscissas é a variável independente, enquanto os casos de COVID-19 correspondem a variável dependente, cujos valores estão representados no eixo y . Dessa forma,

pode-se notar uma relação entre as variáveis x e y para esse intervalo analisado, mais especificamente uma relação de dependência.

Para responder à questão se o aumento do número de casos de COVID-19 está ocorrendo de forma proporcional para o período em questão, propõe-se inicialmente, que o professor apresente o esboço de uma reta qualquer e solicite aos alunos que verifiquem como se comporta a taxa de variação média $a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ em diferentes pontos e que preencham os resultados de a_i na Tabela 13. Para exemplificar é apresentado a representação gráfica da reta a seguir:



Fonte: Elaboração Própria.

Tabela 13 - Taxa de Variação da Figura 18

$(x_i, y_i); (x_{i+1}, y_{i+1})$	a_i
(0, 2); (1, 4)	
(1, 4); (2, 6)	
(2, 6); (3, 8)	
(3, 8); (4, 10)	
(4, 10); (5, 12)	
(5, 12); (6, 14)	

Fonte: Elaboração Própria.

Agora tomando os dados da Tabela 13, solicite aos alunos que selecione alguns pontos dois a dois e que calculem as taxas de variação média do número de casos ao longo das semanas, em seguida, verifique se tais valores são constantes.

Nesta atividade os alunos constatarão que esta taxa não é constante, o que mostra que a taxa de crescimento ao longo do tempo não é linear.

Embora o crescimento do número de casos de COVID não seja linear, é possível se obter uma função linear aproximada, cuja representação gráfica é uma reta. Assim se lança a seguinte questão:

Realizada esta atividade, seguir com os seguintes questionamentos aos alunos:

- *Conhecidas as coordenadas deste número finito e discreto de pontos da Tabela 13 pode-se encontrar uma reta que mais se aproxime destes dados?*

- *Será possível determinar uma função que mostre a tendência deste conjunto dos dados?*

Para responder a essa questão, apresenta-se as atividades a seguir, que buscarão encontrar modelos matemáticos ajustados as funções linear e quadrática.

ATIVIDADE 3.2 - Obtenção da Equação da Função Linear ajustada aos dados

Objetivo: Proporcionar condições para que os alunos encontrem a equação de uma função afim conhecidas as coordenadas de dois pontos dados.

Conteúdos matemáticos envolvidos: Função afim e resolução de sistema com duas equações e duas incógnitas.

Tomando a reta y construída anteriormente, é possível encontrar analiticamente uma expressão da forma $y = ax + b$, haja vista que os parâmetros a e b podem ser obtidos resolvendo o sistema linear:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Para exemplificar, escolheu-se dois pontos da Tabela 12, sendo eles: $A = (9; 71886)$ e $B = (19; 1668589)$ e a expressão de uma função polinomial do primeiro grau $f(x) = ax + b$ com os quais pode se construir o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 9a + b = 71886 (I) \\ 19a + b = 1668589 (II) \end{cases}$$

Obtendo-se os valores $a = 159670,3$ e $b = -1365146,7$

Cuja expressão matemática da reta obtida é:

$$y = 159670,3x - 1365146,7 \text{ para } x \geq 6$$

Uma outra abordagem para determinação dos coeficientes a e b seria inicialmente determinar a pela fórmula:

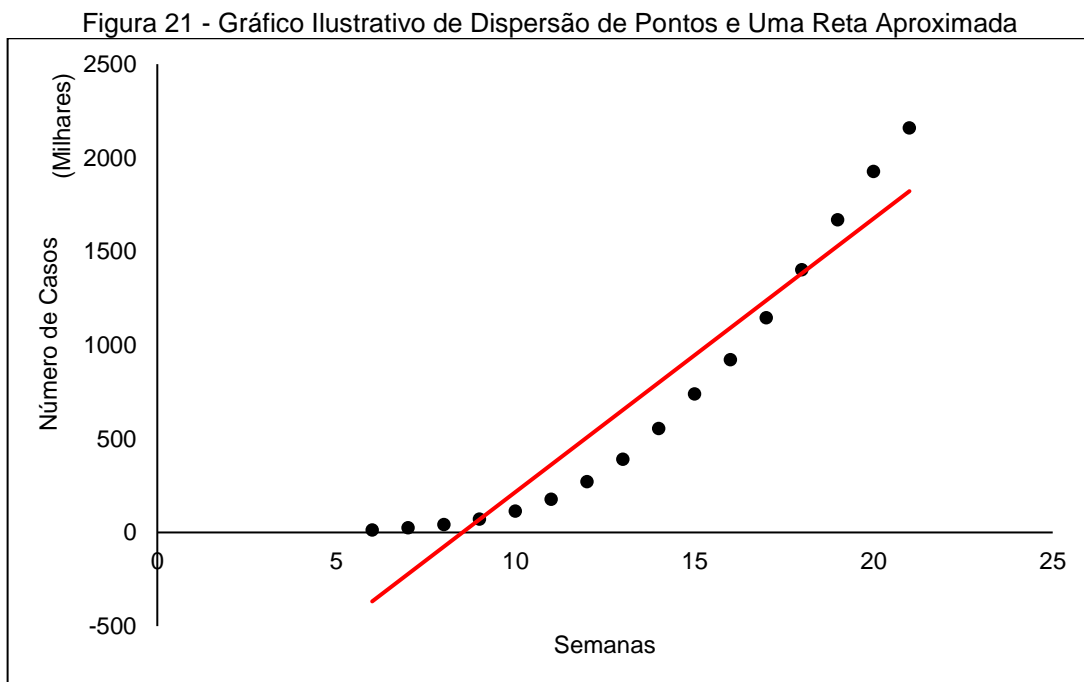
$$a = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \text{ logo:}$$

$$a = \frac{1668589 - 71886}{19 - 9} \Rightarrow a = 159670,3$$

Para determinação do valor de b basta tomar $x = 9$ e $y = 71886$.

Finalizada esta atividade, o professor pode comentar que a equação obtida representa uma curva próxima aos dados e que representa um modelo matemático linear aproximado dos dados analisados, conforme mostra o gráfico da Figura 21.

Além disso, com o modelo linear obtido possibilita a compreensão do conceito do coeficiente angular da equação da reta, relacionado com o número de casos de COVID-19 e o tempo em semanas. A validação neste caso, pode ser obtida fazendo comparações entre os valores dos dados tabelados com os calculados pelo modelo.



Fonte: Elaboração Própria.

Na Atividade 3.4 adiante, a equação linear que mais se aproxime destes dados também será obtida por meio do Excel.

ATIVIDADE 3.3 - Obtenção da Equação da Função Quadrática Ajustada aos dados

Objetivo: Proporcionar condições para que os alunos encontrem uma função polinomial quadrática conhecidas as coordenadas de três pontos.

Conteúdos matemáticos envolvidos: Função quadrática, resolução de sistema com três equações e três incógnitas, determinantes.

Tomando as coordenadas de três pontos do gráfico é possível se obter uma equação da forma $g(x) = ax^2 + bx + c$, haja vista que os parâmetros a , b e c podem

ser obtidos resolvendo o sistema linear:
$$\begin{cases} g(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c \\ g(x_2) = ax_2^2 + bx_2 + c. \\ g(x_3) = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

Para exemplificar serão tomados os pontos $A = (7; 25262)$, $B = (14; 555383)$ e $C = (21; 2159654)$ e com a expressão de uma função polinomial do segundo grau, constrói-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 49a + 7b + c = 25262 \\ 196a + 14b + c = 555383 \\ 441a + 21b + c = 2159654 \end{cases}$$

Rescrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 49 & 7 & 1 \\ 196 & 14 & 1 \\ 441 & 21 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25262 \\ 555383 \\ 2159654 \end{bmatrix}$$

Aplicando a Regra de Cramer para determinar os parâmetros a , b e c , por meio das equações:

$$a = \frac{D_a}{D}, b = \frac{D_b}{D} \text{ e } c = \frac{D_c}{D}$$

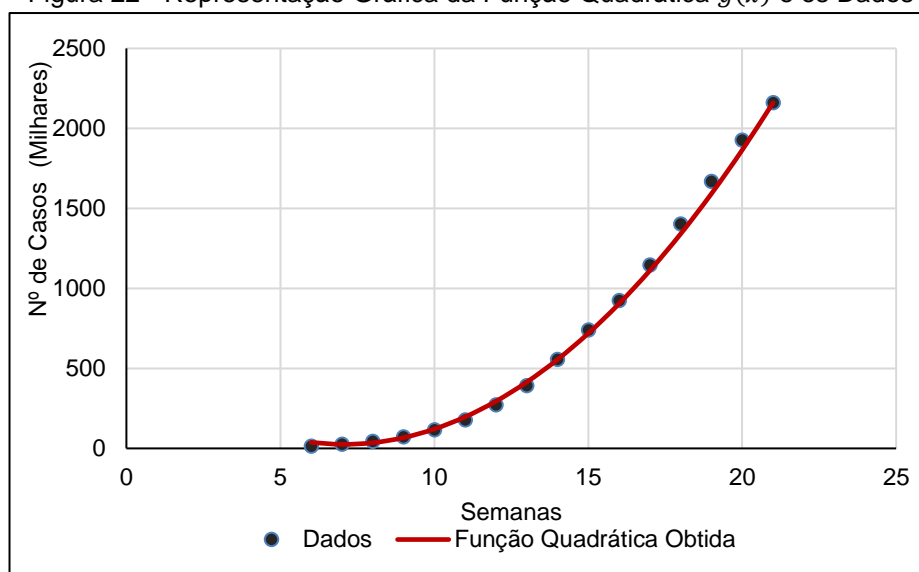
Sendo D o determinante da matriz associada, tem-se então os valores de a , b e c :

$$a = 10960,7, b = -154443,4 \text{ e } c = 569291$$

Resultando na expressão:

$$g(x) = 10960,7x^2 - 154443,4x + 569291$$

A Figura 22 mostra como gráfico de como ficariam os dados e a função polinomial quadrática obtida a partir dos três pontos escolhidos.

Figura 22 - Representação Gráfica da Função Quadrática $g(x)$ e os Dados

Fonte: Elaboração Própria.

O modelo obtido possibilita perceber os coeficientes da função quadrática. A validação também pode ser obtida fazendo comparações entre os valores dos dados tabelados com os calculados pelo modelo.

Atividade 3.4: Obtenção do Modelo Linear Com o Uso do Excel

Objetivo: Proporcionar aos alunos condições de encontrar uma função afim, cuja representação é uma reta que mais se aproxime dos dados fornecidos com o auxílio dos recursos de linha de tendência do Excel e também, que percebam esta relação matemática que representa de forma aproximada os dados, trazendo a ideia de Modelagem Matemática.

Conteúdos matemáticos envolvidos: Função afim, representação gráfica de uma função, resolução de sistema com três equações e três incógnitas, determinantes.

Na Atividade 3.1, levantou-se a hipótese se era possível dentre tantas retas, existir uma que mais se adequasse aos dados coletados da Tabela 12. Para esta atividade, busca-se determinar a representação gráfica da reta, juntamente com sua respectiva equação, que melhor represente os dados em questão. Para isso, será utilizado o *Excel* ou outro programa similar. Com o Excel aberto os passos para obtenção de uma função linear que mais se aproxima dos dados estão apresentados a apresentado a seguir:

1º) Inicialmente insere-se os dados da Tabela 12 no *Excel*, conforme a Figura 23

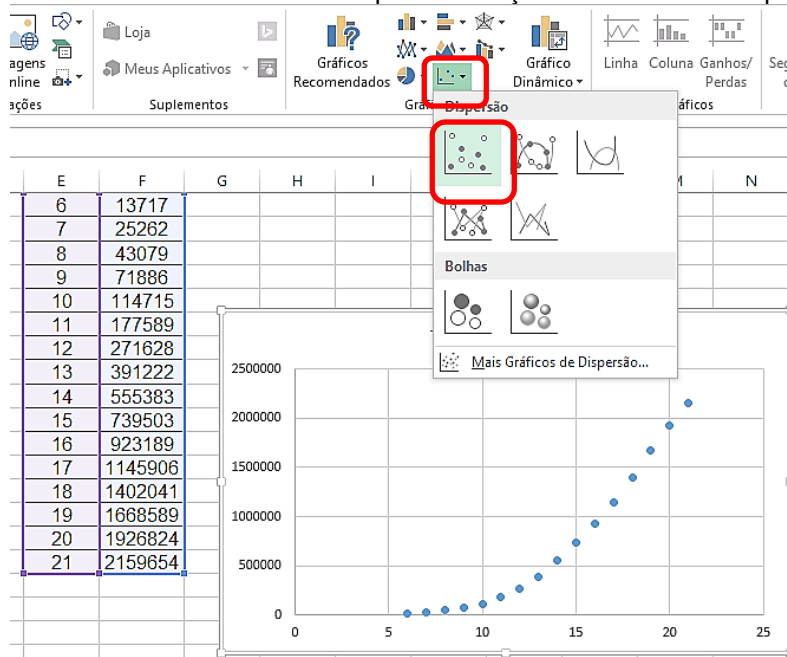
Figura 23 - *Print* da Planilha do Excel com Inserção dos Dados

D	E	F	G
	6	13717	
	7	25262	
	8	43079	
	9	71886	
	10	114715	
	11	177589	
	12	271628	
	13	391222	
	14	555383	
	15	739503	
	16	923189	
	17	1145906	
	18	1402041	
	19	1668589	
	20	1926824	
	21	2159654	

Fonte: Elaboração Própria.

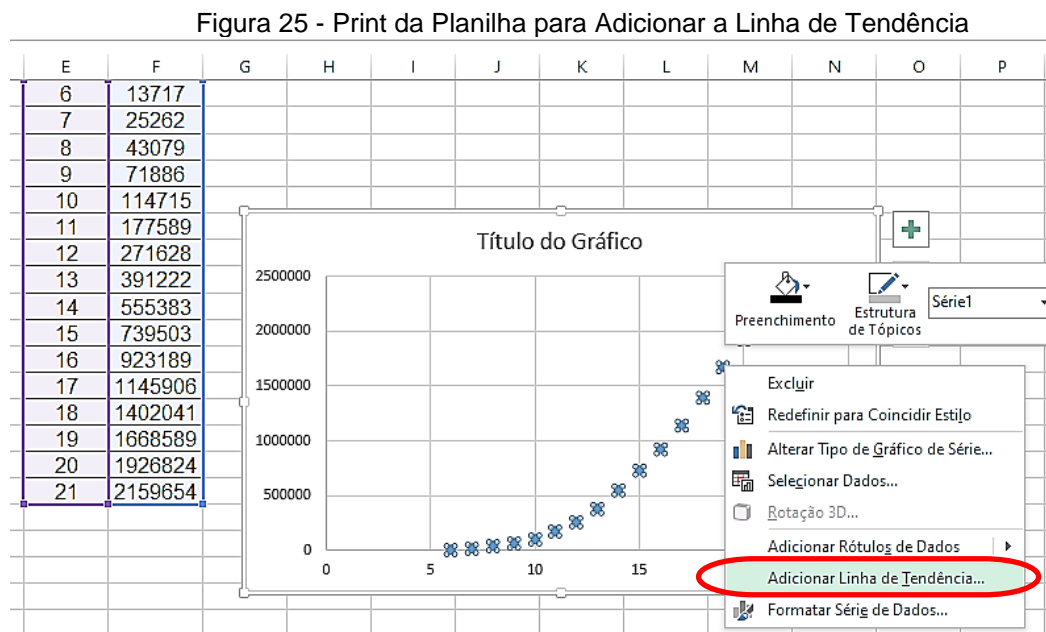
2º) Em seguida, é necessário que os dados sejam selecionados e para isso, basta clicar m nos seguintes campos: *inserir* → *gráficos* → *dispersão* e serão obtidos os pontos relacionados com os dados, conforme ilustra a Figura 24.

Figura 24 - *Print* da Planilha Excel para Obtenção do Gráfico de Dispersão



Fonte: Elaboração Própria.

3º) Obtido o gráfico de dispersão, o próximo passo será a obtenção da reta ajustada e sua expressão por meio do software *Excel* que melhor se adequa aos dados selecionados. Para isso, basta clicar sobre os pontos e clicando do lado direito do *mouse* selecionar a *linha de tendência*, conforme mostra a Figura 25.

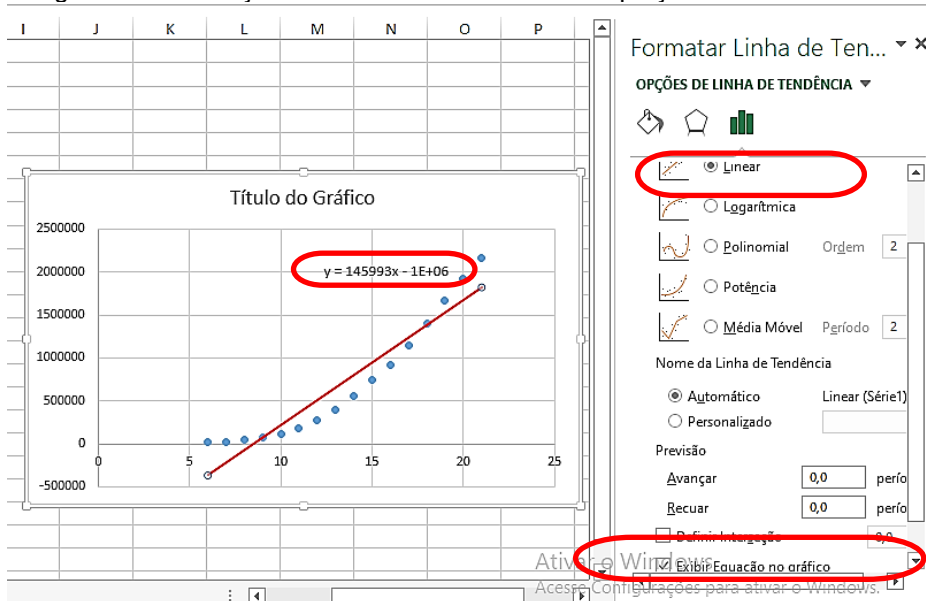


Fonte: Elaboração Própria.

4º) Se abrirá uma janela conforme mostra a Figura 26 em que mostra que o programa pode gerar a melhor curva (ajustada), com as opções de curvas: linear, logarítmica, polinomial, potência e média móvel. Para a opção da curva em forma de reta selecionar a opção *linear* e clique na caixa, *Exibir equação do gráfico*.

Conforme mostra a Figura 26, a equação $f(x) = 145993x - 0,000001$ obtida no *Excel* representa a melhor função representada pela reta que se adequa aos dados da Tabela 12 e, a forma algébrica de encontrá-la é denominada de Método dos Mínimos Quadrados. De forma resumida, este método consiste em se determinar a curva que melhor se adequa ao conjunto de pontos dados e, para isto, são obtidos os parâmetros da função de forma que minimize o quadrado da diferença entre os valores dados e calculados. Mais informações sobre o Método dos Mínimos Quadrados pode ser obtido na Subseção 3.1 deste trabalho.

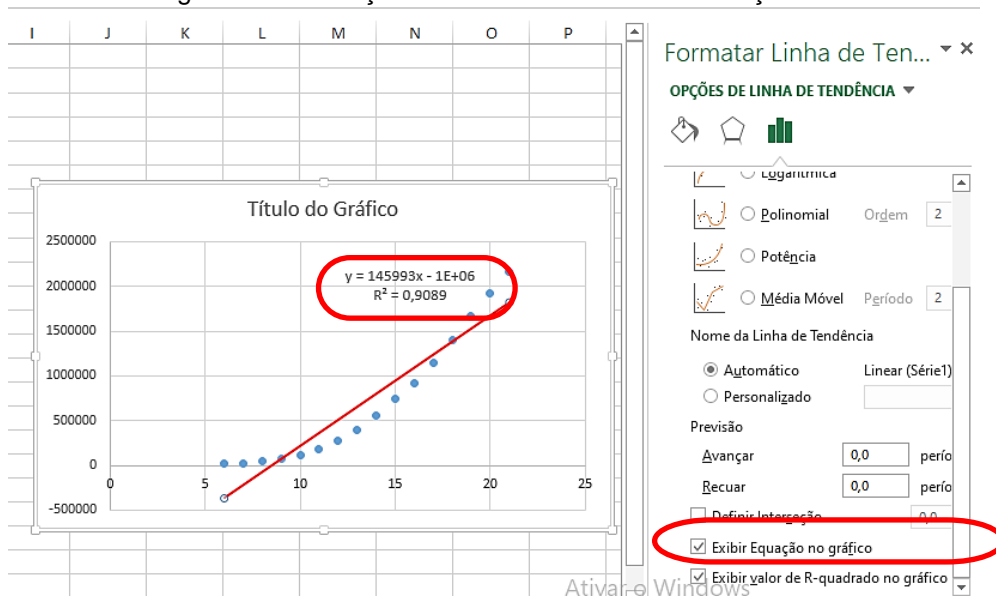
Figura 26 - Obtenção da Linha de Tendência e Equação do Modelo Linear



Fonte: Elaboração Própria.

Outro aspecto relevante que o professor pode explorar ainda no Excel, se trata do coeficiente de determinação (r^2), pois é possível a partir deste parâmetro mensurar o quão bom é o ajuste obtido. Este coeficiente varia de 0 a 1, quanto mais próximo de 1 melhor é o ajuste obtido dos dados.

Para se obter esse valor pelo Excel, a partir do gráfico obtido anteriormente, na caixa de *Formatar Linha de Tendência* clicar na opção *Exibir valor de R-quadrado*, conforme ilustra a Figura 27.

Figura 27 - Obtenção do Coeficiente de Determinação r^2 

Fonte: Elaboração Própria.

Pelo valor obtido de $r^2 = 0,9089$, nota-se que a função obtida $f(x) = 145993x - 0,000001$, para $x \geq 6$ não representa um ajuste tão bom para os dados analisados, considerando o patamar de 1.

Caso se tenha interesse em conhecer como se obtém este parâmetro algebricamente, o leitor pode consultar a Subseção 3.1.9 deste trabalho.

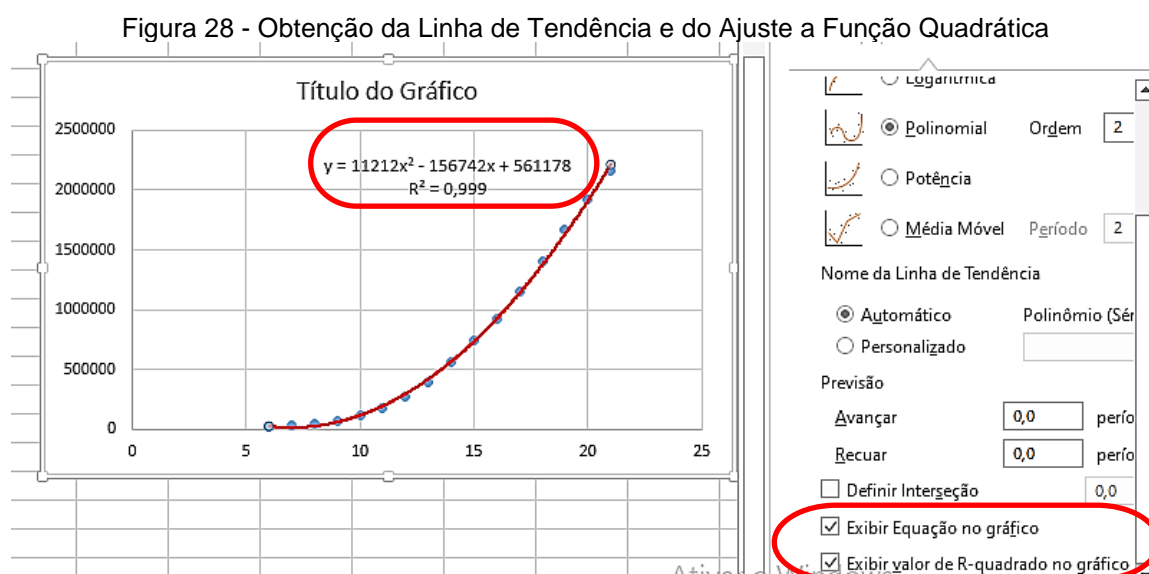
Atividade 3.5: Obtenção do Modelo na Forma de Função Quadrática Com o Uso do Excel

Objetivo: Proporcionar aos alunos condições de encontrar uma função quadrática, cuja representação é uma parábola, que mais se aproxime dos dados com o auxílio do Excel e também, que percebam esta relação matemática que representa de forma aproximada os dados.

Conteúdos matemáticos envolvidos: Função quadrática, representação gráfica de uma função.

Utilizando ainda os mesmos dados da Tabela 12, pode-se obter uma função quadrática da forma $g(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, com sua respectiva curva que melhor se ajuste aos dados.

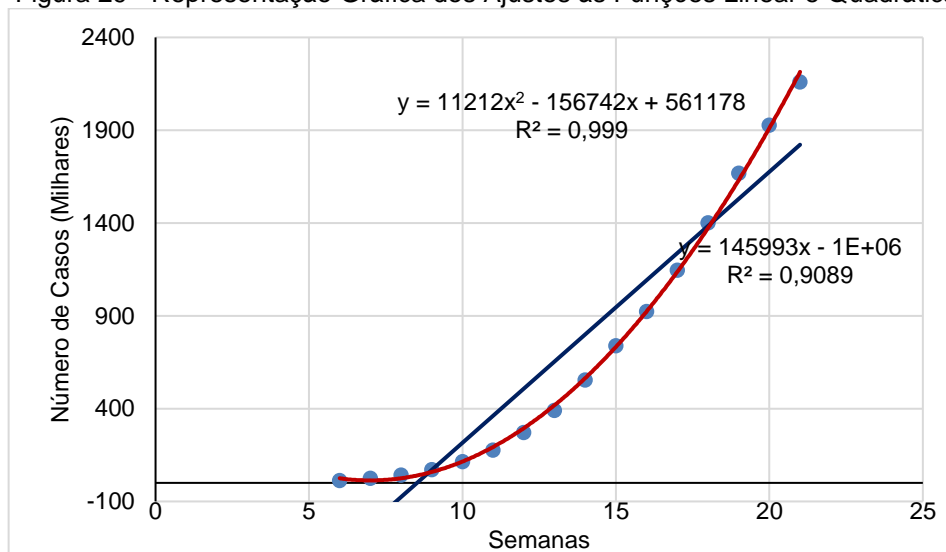
Para se obter tal função quadrática, sugere-se para que sigam os mesmos passos para obtenção da função linear da Atividade 3.4 e no momento de escolher o formato da linha de tendência optar por *Polinomial* com *grau 2*, conforme mostra a Figura 28 a seguir:



Fonte: Elaboração Própria.

Assim procedendo obtém-se a função quadrática $g(x) = 11212x^2 - 156742x + 561178$, para $6 \leq x \leq 21$. Nota-se então que, pelo valor apresentado pelo coeficiente de determinação, o ajuste quadrático, entre os dois ajustes obtidos, de fato representa melhor os dados dos casos acumulados de COVID-19 para o intervalo considerado e isso pode ser visualizado a partir das representações gráficas da Figura 29.

Figura 29 - Representação Gráfica dos Ajustes às Funções Linear e Quadrática



Fonte: Elaboração Própria.

Com os resultados obtidos pode-se transformá-lo em questões. Por exemplo calcular os valores do número de casos utilizando a função linear ajustada $f(x)$ e $g(x)$ em um determinado tempo x e verificar qual deles apresenta melhor ajuste. Como por exemplo:

- Qual das duas funções melhor representa os dados relacionados a média do número de casos acumulados de COVID-19 da semana 18?

Solução: Para responder esta questão, podemos aplicar as funções $f(x)$ e $g(x)$ no tempo $x = 18$ obtendo assim:

Com $f(x) = 145993x - 0,000001$, obtém-se que:

$$f(18) = 145993 \cdot 18 - 0,000001$$

$$f(18) \cong 2627873$$

Com a função quadrática $g(x) = 11212x^2 - 156742x + 561178$ aplicada no tempo $x = 18$, resulta em:

$$g(18) = g(x) = 11212 \cdot 18^2 - 156742 \cdot 18 + 561178 \Rightarrow g(18) = 1372450$$

Sendo o valor dado igual a 1402041, verifica-se que o modelo quadrático foi o que mais se aproximou do número de casos acumulados de COVID-19 na semana 18. Calculando o erro relativo do valor dado em relação ao valor calculado tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{Erro relativo} &= \frac{|\text{valor coletado} - \text{valor calculado}|}{\text{valor calculado}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{Erro relativo} &= \frac{|1402041 - 1372450|}{1372450} \Rightarrow \text{Erro relativo} = 0,02 \end{aligned}$$

Logo a diferença entre os valores é de apenas 2%.

6.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DA SITUAÇÃO-PROBLEMA 2 - MODELO SIR

ETAPA DA INTEIRAÇÃO

Nas mídias muito se tem difundido a ideia da necessidade de achatamento da curva de casos de indivíduos infectados, principalmente do potencial de contágio do Novo Corona Vírus, implicações muito danosas a saúde que pode saturar a capacidade dos hospitais disponíveis para tratamento.

Pensando nisso, esta atividade consiste em se exemplificar a dinâmica de uma epidemia, baseado no Modelo SIR básico em um tempo discreto para que seja compreensível para alunos do Ensino Médio.

ETAPA DA MATEMATIZAÇÃO

Este modelo considera que em uma comunidade fechada há três grupos (ou compartimentos) de indivíduos, o dos *suscetíveis* (sadios), o dos *infectados* e dos *recuperados* com taxas de recuperação a e de infecção b constantes.²

Suscetíveis: são os indivíduos sadios mas que estão suscetíveis a doença.

Infectados: são os portadores da doença.

Recuperados: São aqueles que se recuperam da doença e ficaram imunes ou morreram.

² Serão consideradas as hipóteses do Modelo SIR, ou seja que os indivíduos de cada grupo são homogêneos, que todo indivíduo tem a mesma probabilidade de encontrar um suscetível e que não ocorre nascimento e que a morte só seja causada pela doença.(BASSANEZI,2002)

Seja N : o número total da população, $S(t)$: o número de suscetíveis, $I(t)$: o número de infectados e $R(t)$: quantidade de recuperados no instante t .

O diagrama apresentado na Figura 30 mostra que se a pessoa pertence ao grupo dos suscetíveis ela tem possibilidade para contrair a doença e mudar para o grupo dos infectados. Se o indivíduo está infectado, o único caminho é seguir para o grupo dos recuperados. Conforme o tempo passa o número de pessoas em cada compartimento muda de acordo com as interações entre as pessoas de diferentes compartimentos.

Figura 30 - Dinâmica entre os Grupos do Modelo SIR



Fonte: Elaboração Própria.

Como se daria esta dinâmica?

A resposta será tratada na próxima etapa.

ETAPA DA RESOLUÇÃO

O **número de suscetíveis** $S(t)$ decrescem a uma taxa proporcional ao número de encontros com os infectados:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t)$$

Assim transcorrido um tempo Δt tem-se que o número de suscetível será:

$$S(t + \Delta t) = S(t) - \beta \cdot S(t) \cdot I(t) \Delta t$$

Considerando $\Delta t = 1$, a expressão pode ser reescrita:

$$S(t + 1) = S(t) - \beta \cdot S(t) \cdot I(t) \quad (45)$$

O **número de infectados** $I(t)$ aumentam do mesmo modo como os suscetíveis diminui e também, diminui com os que são recuperados.

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \alpha \cdot I(t)$$

$$I(t + 1) - I(t) = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \alpha \cdot I(t)$$

$$I(t + 1) = I(t) + \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \alpha \cdot I(t) \quad (46)$$

Por outro lado, a variação do **número de recuperados** é proporcional ao número de infectados, isto é.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta R}{\Delta t} &= \alpha \cdot I(t) \\ R(t+1) - R(t) &= \alpha \cdot I(t) \\ R(t+1) &= R(t) + \alpha \cdot I(t)\end{aligned}\tag{47}$$

Pode-se perceber que as equações (45), (46) e (47) são equações de recorrência, o que é possível se obter de uma forma aproximada a dinâmica dos grupos dos suscetíveis, dos infectados e dos recuperados em cada instante t a partir dos valores das taxas de infecção e de recuperação, população inicial e número de infectados iniciais nas condições dadas.

ETAPA DA INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS E VALIDAÇÃO

Objetivo da atividade: Proporcionar aos alunos condições para compreenderem matematicamente a dinâmica dos números de suscetíveis, infectado e recuperado em uma epidemia considerando as hipóteses do Modelo SIR básico com os intervalos de tempo discretizado.

Conteúdos matemáticos envolvidos: Proporção, taxa de variação, função de recorrência, lei de formação de uma função de recorrência.

Supondo uma população fechada de 100 indivíduos com 2 indivíduos inicialmente infectados em que as taxas de recuperação $\alpha = 0,2$ e de infecção $\beta = 0,01$ foram mantidas constante ao longo do tempo.

Utilizando as equações (45), (46) e (47) verifique qual será o número de suscetíveis, infectados e recuperados nos 3 primeiros dias.

Temos que $N = 100$, $I(0) = 2$, $R(0) = 0$

Para $t = 0$ tem-se:

$$S(0) = N - I(0) = 98,$$

$$I(0) = 2,$$

$$R(0) = 0$$

$$S(1) = S(0) - b \cdot S(0) \cdot I(0) = 98 - 0,01 \cdot 98 \cdot 2 = 96,04$$

$$I(1) = I(0) + b \cdot S(0) \cdot I(0) - a \cdot I(0) = 2 + 0,01 \cdot 98 \cdot 2 - 0,2 \cdot 2 = 3,56$$

$$R(1) = R(0) + b \cdot I(0) = 0 + 0,2 \cdot 2 = 0,4$$

Para $t = 1$

$$S(2) = 96,04 - 0,01 \cdot 96,04 \cdot 3,56 = 92,62$$

$$I(2) = 3,56 + 0,01 \cdot 96,04 \cdot 3,56 - 0,2 \cdot 3,56 = 6,27$$

$$R(2) = 0,4 + 0,2 \cdot 3,56 = 1,12$$

Para $t = 2$

$$S(3) = 92,62 - 0,01 \cdot 92,62 \cdot 6,27 = 86,82$$

$$I(3) = 6,27 + 0,01 \cdot 92,62 \cdot 6,27 - 0,2 \cdot 6,27 = 10,82$$

$$R(3) = 1,12 + 0,2 \cdot 6,27 = 2,37$$

Logo no final de 3 dias, a população estaria aproximadamente com 87 suscetíveis, 11 infectados e 2 recuperados.

Como pode ser cansativo realizar estes cálculos manualmente, sugere-se que seja utilizado em uma planilha eletrônica, do tipo Excel para isso.

Use células específicas para os valores dos parâmetros de N , $I(0)$, $R(0)$, a e b para que se possa variar os valores dos parâmetros sem alterar as fórmulas nas células já programadas.

Na linha para $t = 0$ na coluna dos suscetíveis, insira o valor de $N - I(0)$, na dos infectados insira $I(0)$ e na dos Recuperados entre com $R(0)$.

Na linha de $t = 1$, insira de forma adequada com a sintaxe do programa as fórmulas (45), (46) e (47) nas colunas dos suscetíveis, infectados e recuperados, respectivamente, e mantenha clicado no canto inferior direito de cada célula e arraste para baixo até se obter o número de dias desejado.

A Tabela 14 mostra os resultados obtidos pelo *Excel* para o caso hipotético estudado.

Tabela 14 - Simulação das Equações de Recorrência (45), (46) e (47)

A	B	C	D
t	Suscetíveis	Infectados	Recuperados
0	98	2	0
1	96,04	3,56	0,4
2	92,620976	6,267024	1,112
3	86,8163972	10,818198	2,3654048
4	77,4244275	18,046528	4,5290444
5	63,4520064	28,409644	8,13835003

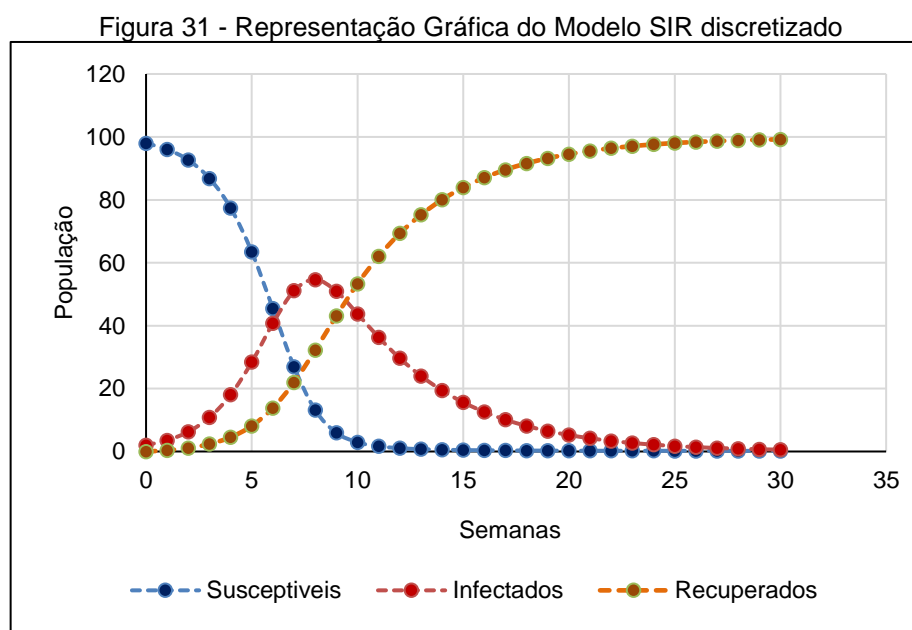
Continua

Continuação - Tabela 14 - Simulação das Equações de Recorrência (45), (46) e (47)

6	45,4255175	40,754204	13,8202787
7	26,9127096	51,116171	21,9711195
8	13,1559629	54,649683	32,1943537
9	5,96627084	50,909439	43,1242904
10	2,92887584	43,764946	53,3061781
11	1,64705491	36,293778	62,0591673
12	1,04927646	29,632801	69,3179229
13	0,73834646	24,017171	75,244483
14	0,56101653	19,391066	80,0479171
15	0,45222944	15,62164	83,9261304
16	0,38158379	12,567958	87,0504584
17	0,3336265	10,102324	89,56405
18	0,29992247	8,1155628	91,5845147
19	0,27558207	6,5167907	93,2076273
20	0,25762297	5,2313916	94,5109854
21	0,2441457	4,1985906	95,5572637
22	0,23389502	3,3691231	96,3969818
23	0,22601481	2,7031787	97,0708065
24	0,21990523	2,1686526	97,6114422
25	0,21513625	1,739691	98,0451727
26	0,21139354	1,3954955	98,3931109
27	0,20844355	1,1193464	98,67221
28	0,20611035	0,8978103	98,8960793
29	0,20425987	0,7200987	99,0756414
30	0,20278899	0,5775499	99,2196611

Fonte: Elaboração Própria.

Com estes dados numéricos é possível se construir o gráfico discreto de $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$, conforme mostra a Figura 31.

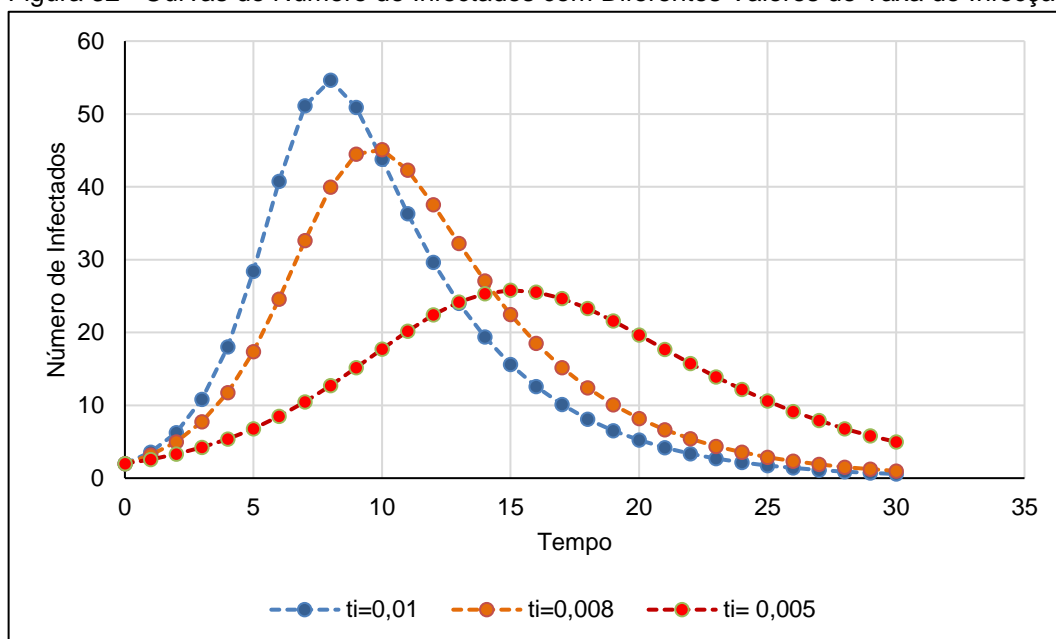


Fonte: Elaboração Própria.

Este caso pode ser testando o que aconteceria com o número de infectados para diferentes valores da taxa de infecção b .

Para exemplificar, é apresentado o comportamento da curva para $b = 0,01$, $b = 0,008$ e $b = 0,005$ o gráfico da Figura 32 mostra como se comportam as curvas.

Figura 32 - Curvas do Número de Infectados com Diferentes Valores de Taxa de Infecção



Fonte: Elaboração Própria.

Considerando que o valor da taxa de infecção b é proporcional ao número de encontros de um indivíduo suscetível com um infectado e a probabilidade de encontro entre um sadio e um infectado, este resultado apresentado no gráfico mostra uma ideia bastante difundida na imprensa sobre o “achatamento da curva”. Mostra também a importância das medidas de contenção da propagação da doença uma vez que conforme se vai diminuindo a taxa de infecção o pico máximo vai caindo e a curva vai se deslocando para a direita, ou seja, demorando mais tempo para atingir o seu pico, o que aumenta o tempo para que os hospitais se preparem para tratar os pacientes infectados.

Tabela 15 - Valores de I_{max} e t_{max} para Três Cenários de b

Cenário	Valores de b	I_{max}	Tempo para atingir I_{max} (dias)
1	1×10^{-2}	55	7
2	8×10^{-3}	45	10
3	5×10^{-3}	26	15

Fonte: Elaboração Própria.

Com estes cenários é possível sensibilizar os alunos em tempo de pandemia, a importância de não se aglomerar e manter as medidas de proteção para não se acelerar a disseminação do vírus, uma vez que até o momento da elaboração deste trabalho ainda se está iniciando o processo de vacinação no país.

6.3 ESTUDO COMPLEMENTAR: AJUSTE LINEAR COM O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

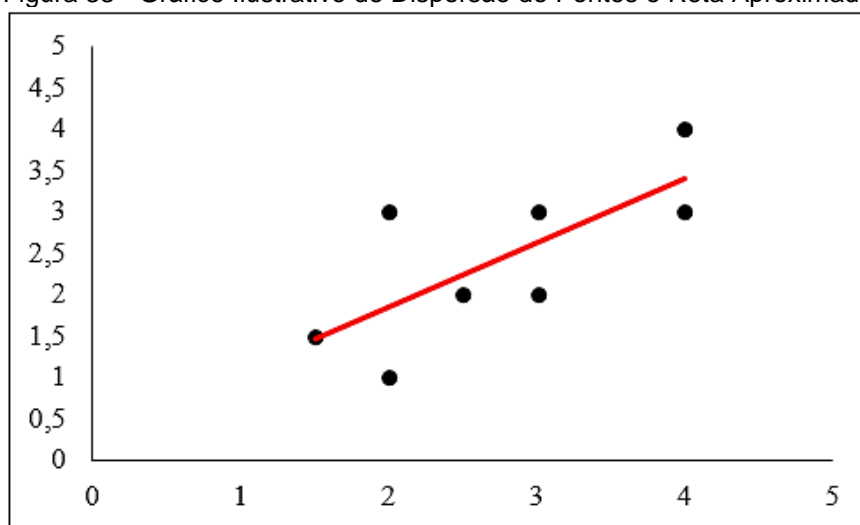
Esta atividade é uma possibilidade que pode ser explorada pelo professor, caso queira ensinar os alunos a compreenderem um pouco mais sobre o MMQ e desta forma possibilitar que sejam determinados os parâmetros a e b do ajuste linear e o valor do coeficiente de determinação (r^2) sem o auxílio de *softwares*.

- **Método dos Mínimos Quadrados**

Para apresenta o método recomenda-se que o professor esboce um gráfico de dispersão de pontos conforme Figura 33, pois facilitará a explicação algébrica. É importante relatar que o MMQ consiste em determinar a curva que melhor se adequa ao conjunto de pontos coletados e, para isto, é calculado a diferença entre o valor da variável dependente no ponto e o correspondente na curva (dado e calculado). Esse desvio pode ser negativo ou positivo e assim faz-se necessário usar o quadrado dessas diferenças. Em geral, o método busca encontrar uma curva em que a soma dessas diferenças seja a menor possível, o que permite encontrar a curva que melhor se aproxime dos pontos (dados). Dessa forma, pode se escolher a curva que produza o menor valor para a somatória dos quadrados da diferença entre os valores de \bar{y}_i dado e y_i calculado, conforme a equação a seguir:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i; a_1, \dots, a_k) - \bar{y}_i]^2$$

Figura 33 - Gráfico Ilustrativo de Dispersão de Pontos e Reta Aproximada



Fonte: Elaboração Própria.

- **Cálculo dos coeficientes do Modelo Linear**

Para o cumprimento desta etapa sugere-se que o professor apresente aos alunos a equação (5) da Subseção 3.1.1, relatar que o objetivo da atividade é determinar os coeficientes a e b do ajuste linear por meio da manipulação algébrica da equação (5). A demonstração dessas fórmulas não convém para alunos do Ensino Médio, uma vez que aborda conceitos matemáticos somente vistos no Ensino Superior. Para o cálculo das somatórias, recomenda-se o uso do *Excel*, são operações simples e o uso do programa facilitará o processo, a seguir, apresenta-se a equação (5):

$$\begin{cases} a = \frac{n \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \sum_{i=1}^n \bar{y}_i}{n \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 - (\sum_{i=1}^n \bar{x}_i)^2} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \bar{y}_i}{n \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2 - (\sum_{i=1}^n \bar{x}_i)^2} \end{cases} \quad (48)$$

Sendo \bar{x}_i os valores da variável independente e \bar{y}_i o valor da variável dependente correspondente, sendo $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Para fazer os cálculos das somatórias, insira os dados da Tabela 16 na planilha do Excel ou organize os dados em tabelas e faça os cálculos manualmente com o uso de uma calculadora para facilitar.

Tabela 16 - Cálculos dos Somatórios do Ajuste Linear da Média Móvel dos Óbitos de COVID-19

Semana (\bar{x}_i)	Média móvel (\bar{y}_i)	\bar{x}_i^2	$\bar{x}_i\bar{y}_i$
7	123,57	49	864,99
8	172,71	64	1381,68
9	325,14	81	2926,26
10	414,86	100	4148,60
11	639,86	121	7038,46
12	795,86	144	9550,32
13	934,43	169	12147,59
14	955,29	196	13374,06
84	4361,72	924	51431,96

Fonte: Elaboração Própria.

Dessa forma, por meio da equação (5), tem-se:

$$\begin{cases} a = \frac{8 \cdot 51431,96 - 84 \cdot 4361,72}{8 \cdot 924 - 84^2} \\ b = \frac{4361,72 \cdot 924 - 84 \cdot 51431,96}{8 \cdot 924 - 84^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 134,14 \\ b = -863,26 \end{cases}$$

Logo, tem-se a equação da reta:

$$y(x) = 134,14x - 863,26,6; \text{ para } 6 \leq x \leq 14$$

Caso o professor queira determinar algebricamente os parâmetros para o ajuste quadrático, todos os procedimentos estão apresentados na Subseção 3.1.2.

Finaliza-se desta forma o capítulo com a proposta para o Ensino Médio, que buscou interrelacionar o estudo desenvolvido com as possibilidades de atividades pedagógicas utilizando a Modelagem Matemática.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar este trabalho faz-se necessário tecer algumas considerações em relação ao contexto teórico e resultados obtidos neste estudo. A proposta da pesquisa foi buscar compreender com auxílio da Modelagem Matemática, como se comportou matematicamente os dados relativos a pandemia causada pelo novo coronavírus (SARS-CoV-2). Para tanto, iniciou-se com uma breve pesquisa histórica sobre as pandemias que assolaram a sociedade até a causada pela COVID-19. Esta revisão foi importante, uma vez que mostrou que as pandemias ocorrem ciclicamente no planeta e, dessa forma, a sociedade tem que aprender a lidar com os problemas causados por elas.

Nota-se a partir do estudo, que com o passar do tempo essas infecções em escala mundial (pandemia) causadas por microrganismo, tornaram-se cada vez mais frequentes, a maioria delas com origem no continente asiático. A atual pandemia da COVID-19, teve seus primeiros registros em Wuhan, China, conforme já relatado nesse trabalho. Este vírus é altamente infeccioso e se espalhou rapidamente pelo planeta causando uma pandemia de larga escala e, até o momento não se tem nenhum tratamento aprovado contra a doença, entretanto, vários países pelo mundo estão vacinando sua população com vacinas experimentais. A rapidez com que as vacinas foram elaboradas, em parte, é devido aos avanços tecnológicos e da pesquisa médica.

A Modelagem Matemática, seja como campo de pesquisa ou metodologia de ensino possui um método próprio que possibilita fazer conexão entre situações da realidade e conceitos matemáticos. De acordo com Bassanezi (2014) a modelagem é um processo dinâmico que em sua essência busca transformar situações reais em problemas matemáticos. Já a formulação de um modelo matemático tem por finalidade representar por meio de um conjunto de conceitos a natureza de um fenômeno. Analisar um fenômeno em que os dados estão em constante mudança ao longo de seu estudo é no mínimo desafiador, requer uma certa destreza do modelador nas tomadas de decisões. Sendo assim, lidar com os dados da COVID-19 exigiu refletir a todo momento sobre as medidas a serem tomadas no processo de modelagem devido a sua dinâmica de mudanças. De fato, não foi uma tarefa fácil, pois o refazer os modelos foi uma tarefa constante durante a construção desta

pesquisa, mas foi necessária devido ao comportamento dos dados que foi se modificando ao longo do tempo. Portanto, lidar com dados que não possui ainda um padrão é uma tarefa árdua, mas o resultado foi extremamente gratificante.

Em uma versão preliminar no desenvolvimento do trabalho, delimitou-se os dados dos casos e óbitos relativo a COVID-19 no período de 26/02 a 14/07/2020 para realizar o estudo, e assim foi realizado. Foram feitos os ajustes de curvas por meio do MMQ, dos modelos linear, quadrático, exponencial, da função potência, assintótico e logístico, obteve-se resultados significativos nessa primeira abordagem. O ajuste quadrático por exemplo, apresentou um coeficiente de determinação para o número de casos de mais de 0,99, sendo o melhor modelo dentre os analisados. Com o passar do tempo, as informações foram sendo atualizadas e novos cenários foram surgindo e então decidiu-se expandir o estudo para todo o ano de 2020, isto é, considerando de 26/02 a 29/12/2020. Após a inserção dos novos dados, o modelo quadrático ainda foi o que apresentou o melhor ajuste aos dados tanto para os do número de casos como para o de óbitos.

Embora o modelo quadrático obtido para o número de casos tenha apresentado coeficiente de determinação superior a 0,9, era possível se observar que o gráfico da curva ajustada destoava dos dados em alguns trechos, conforme mostra a Figura 7 da página 79. Desta forma foi calculado o erro relativo médio entre os valores calculados e dados observados e constatou-se que este valor era considerável para parar o estudo ali.

Nesse sentido emergiu-se uma nova problemática, como modelar os dados de forma que representasse de uma forma mais fiel estes dados?

Diante da situação, optou-se em subdividir o período para se realizar a modelagem, sob orientação do comportamento da curva na escala logarítmica dos dados, uma vez que nos intervalos em que os dados estão crescendo exponencialmente, estes se ajustam aproximadamente a uma reta. Nos intervalos selecionados também foram ajustadas as curvas exponenciais correspondentes.

Depois disso, foi realizado os ajustes dos dados separadamente para cada um dos intervalos considerados, considerando todos os tipos de curvas de ajustes, resultando assim em um modelo definido por partes. Com isso, obteve-se para cada partição que as melhores curvas ajustadas apresentaram valores de r^2 próximos de 1 e a curva que mais predominou nos intervalos foi a quadrática. Desta forma, conclui-

se com esta análise que para os casos de COVID-19 no Brasil durante o ano de 2020 não se teve uma única curva predominante, e sim modelos distintos devido à natureza do crescimento dos números de casos da doença sujeito a variações a todo momento.

Além de se compreender o comportamento matemático da curva pandêmica do Brasil com as partições por meio do MMQ foi possível gerar estimativas futuras a curto prazo (6 semanas futuras) do número de infectados caso a doença continuasse a propagar de acordo com o último intervalo considerado de 2020 e obteve-se um erro de menos de 0,5%. Outra relevância sobre as partições, foi a possibilidade de se criar situações problemas para que professores do Ensino Médio possam propiciar aos seus alunos a possibilidade de construir gráficos com informações de situações reais e que tenham condições de encontrar uma equação (linear ou quadrática) que mais se ajuste aos dados coletados, possibilitado inicialmente por meio da resolução de sistema a partir dos dados e posteriormente pelas planilhas eletrônicas. Com isso os conteúdos como função afim, quadrática e suas representações gráficas, sistema de equações lineares, determinantes podem ser explorados.

Na parte relacionada com o Modelo SIR, buscou-se estudar o comportamento discretizado básico para se compreender a dinâmica de uma epidemia e levar como atividade em sala de aula. O ajuste simples considerando os dados de todo intervalo por meio da minimização dos erros quadrados não se mostrou eficaz, haja vista que a pandemia foi mudando de velocidade de crescimento ao longo do tempo o que, foi bom para a população. Além disso, foi trabalhado com alguns cenários, para verificar as expectativas de picos e tempo que se levaria para cada caso atingir e os resultados mostram a importância de se manter as medidas que desacelerem a propagação da doença.

Em relação à proposta de ensino apresentada, o estudo mostrou várias possibilidades de uso do Excel ou outros programas similares que o docente pode utilizar e conforme salientado no Capítulo 6, que pode fazer essa ponte(transposição) entre os dados e a obtenção de modelos matemáticos associados a funções estudadas em sala de aula. Não se trata de eximir a obtenção dos modelos de forma analítica, até por que é necessária esta etapa também, para entender o que se estará sendo feito no programa, mas de enfatizar o quão relevante é a tecnologia quando aplicada na resolução de problemas. Certas ferramentas tecnológicas podem ser uma excelente aliada no processo de ensino aprendizagem, pois valida, respalda, interage,

possibilita novos conhecimentos ou uma abordagem diferente para se trabalhar um determinado conteúdo. Na atividade em questão, o *Excel* permite que o estudante encontre o modelo que melhor se adeque a um conjunto de dados tabelados. Isso é de extrema relevância, pois ao mesmo tempo que possibilita que o aluno tenha de imediato essa informação para refletir, analisar e discutir sobre, também permite aguçar a curiosidade de como a Matemática está por traz de tal operação.

Finaliza-se este trabalho constatando o quão relevante é a Modelagem Matemática, seja para a perspectiva de entender o comportamento de propagação da COVID-19, quanto para contextualizar e dar significância a conceitos matemáticos do Ensino Médio. Dessa forma, enfatiza-se que é possível realizar uma pesquisa com certo rigor matemático e ao mesmo tempo transpor tais conceitos a alunos do Ensino Médio, basta usar as ferramentas adequadas ao nível de conhecimento deste nível de ensino e possibilitar atividades com véis na conceitualização, manipulação e aplicação.

Fica como perspectiva futura de pesquisa a continuidade do estudo do comportamento dos dados relativos a COVID-19 no Brasil a partir do ano de 2021 e realizar a proposta didática de Modelagem Matemática para o Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

- ABREU, M.O.R. Modelagem Matemática da Covid-19 usando SIR. **Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática**. v.4, n.1, p. 27-48, 2020.
- ALMEIDA, L. W de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. 1 ed. São Paulo: Contexto, p. 1-38, 2012.
- BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3 ed. São Paulo: Editora Contexto, 2002.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 4 ed. São Paulo: Contexto, p. 1-53, 2014.
- BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, p. 1-31, 2015.
- BELLEI, N.; MELCHIOR, T. B. H1N1: pandemia e perspectiva atual. **Jornal Brasileiro Patologia e Medicina Laboratorial**. Rio de Janeiro/RJ, v.47, n.6, p. 611-617, 2011.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 4 ed. São Paulo: Contexto, 2005 apud GRANGER (1969).
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5 ed. São Paulo: Contexto, p. 1-30, 2009.
- CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; SILVA, R. da. **Metodologia científica**. 6 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, p. 63-64, 2007.
- CLAUDINO, M. V. de M.; TANAKA, S. e S.; AMARAL, W. N. do. A influenza H1N1. **Revista Goiana de Medicina**. Goiana/Goiás, v.39, n.1, 2010.
- COSTA, L.M.C.; HAMANN, E. M. Pandemias de influenza e a estrutura sanitária brasileira: breve histórico e caracterização dos cenários. **Revista Pan-Amazônica de Saúde**, v.7, n.1, p. 11-25, 2016.
- FIGUEIREDO, N. M. A. de. **Método e metodologia na pesquisa científica**. São Caetano do Sul/SP: Difusão, p. 101-107, 2004 apud MINAYO (1994) e TRIVIÑOS (1987).
- GEORGE, F. **Introdução ao estudo da gripe**. Direcção Geral da Saúde, Lisboa, 2006.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4 ed. São Paulo: Atlas, p. 41, 2002.
- LEITE, J.L. et al. AIDS: vinte quatro anos de luta. **Revista Eletrônica Semestral da Enfermaria**. Rio de Janeiro/RJ, v.5, n.2, 2006.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. de A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5 ed. São Paulo: Atlas, p. 188-189, 2003.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia científica**. 4 ed. São Paulo/SP: Atlas, p. 269-273, 2004 apud TRIVIÑOS (1987).

MENDES, C. L. **Avaliação da técnica de nested PCR em tubo único com dois genes alvos para detecção de *Vibrio cholerae* O1 diretamente do meio de cultura**. 2007. 108 f. Dissertação (Mestrado em Saúde Pública) – Fundação Oswaldo Cruz, FIOCRUZ, Rio de Janeiro/RJ, p. 16-22, 2009 apud COLWELL (1996).

MESQUITA, E.G. da C.; MEIRA, J.L.; DIAS NETO, J.R. APLICAÇÃO DO MODELO SIR À COVID-19: distanciamento social e (des)evolução da pandemia no Tocantins. **Revista Observatório**, Palmas, v.6, n.3 (Especial1), p.1-27, maio 2020.

MEYER, J. F. da C. de A.; CALDEIRA, A. D.; MALHERIOS, A. P. dos S. **Modelagem em educação matemática**. Belo horizonte: Autêntica Editora, 2011.

ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE (OMS). (2020, 10 de Novembro). Informações básicas sobre COVID-19. Disponível em: <<https://www.who.int/es/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/question-and-answers-hub/q-a-detail/coronavirus-disease-covid-19>>

ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE (OMS). (2021, 15 de Fevereiro). A OMS lista duas vacinas adicionais COVID-19 para uso de emergência e implementação COVAX. Disponível em: <<https://www.who.int/news/item/15-02-2021-who-lists-two-additional-covid-19-vaccines-for-emergency-use-and-covax-roll-out>>

REZENDE, J. M. Linguagem medica: Epidemia, endemia, pandemia e epidemiologia. **Revista de Patologia Tropical**. Goiânia/Goiás, v.27, n.1, p. 153-155, 1998.

REZENDE, J.M. **As grandes epidemias da história**. São Paulo: Editora Unifesp, p. 73-82, 2009.

SANTOS, L. A. de C. Um século de Cólera: Itinerário do medo. **PHYSIS - Revista de Saúde Coletiva**, Rio de Janeiro/RJ, v.2, n.1, p. 79-84, 1994.

SBP - SOCIEDADE BRASILEIRA DE PEDIATRIA. Departamento Científico de Infectologia (2019-2021): Novo coronavírus (COVID-19), Rio de Janeiro/RJ, n.14, 2020.

SINGHAL, T. A Review of Coronavirus Disease-2019 (COVID-19). **Indian Journal of Pediatrics**. Mumbai/Índia, p.281-286, 2020. Disponível em: <<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7090728/>>

TOLEDO JÚNIOR, A. C. de C. História da varíola. **Revista de Medicina de Minas Gerais**, Belo Horizonte/MG, v.15, n.1, p. 58-65, 2005.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, p. 109-110, 1987.

APÊNDICE A

Tabela 17 - Período Correspondente a Semana dos Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020

Período (2020)	Semana	Casos acumulados
26/02 à 03/03	1	2
04/03 à 10/03	2	34
11/03 à 17/03	3	291
18/03/ à 24/03	4	2201
25/03 à 31/03	5	5717
01/04 à 07/04	6	13717
08/04 à 14/04	7	25262
15/04 à 21/04	8	43079
22/04 à 28/04	9	71886
29/04 à 05/05	10	114715
06/05 à 12/05	11	177589
13/05 à 19/05	12	271628
20/05 à 26/05	13	391222
27/05 à 02/06	14	555383
03/06 à 09/06	15	739503
10/06 à 16/06	16	923189
17/06 à 23/06	17	1145906
24/06 à 30/06	18	1402041
01/07 à 07/07	19	1668589
08/07 à 14/07	20	1926824
15/07 à 21/07	21	2159654
22/07 à 28/07	22	2483191
29/07 à 04/08	23	2801921
05/08 à 11/08	24	3109630
12/08 à 18/08	25	3407354
19/08 à 25/08	26	3669995
26/08 à 01/09	27	3950931
02/09 à 08/09	28	4162073
09/09 à 15/09	29	4382263
16/09 à 22/09	30	4591604
23/09 à 29/09	31	4777522
30/09 à 06/10	32	4969141
07/10 à 13/10	33	5113628
14/10 à 20/10	34	5273954
21/10 à 27/10	35	5439641
28/10 à 03/11	36	5566049
04/11 à 10/11	37	5700044
11/11 à 17/11	38	5911758
18/11 à 24/11	39	6118708
25/11 à 01/12	40	6386787
02/12 à 08/12	41	6674999
09/12 à 15/12	42	6970034
16/12 à 22/12	43	7318821
23/12 à 29/12	44	7563551
30/12 à 05/01	45	7810400
06/01 à 12/01	46	8195637
13/01 à 19/01	47	8573864
20/01 à 26/01	48	8933356
27/01 à 02/02	49	9283418
03/02 à 09/02	50	9599565

Fonte: Elaboração Própria.

APÊNDICE B

Tabela 18 - Cálculos Auxiliares para Determinação da Capacidade de Suporte (Y^*)
do Número de Casos Acumulados de COVID-19 no Brasil em 2020

$y_n(x_i)$	$y_{n+1}(y_i)$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
2	34	4,00E+00	8,00E+00	1,60E+01	6,80E+01	1,36E+02
34	291	1,16E+03	3,93E+04	1,34E+06	9,89E+03	3,36E+05
291	2201	8,47E+04	2,46E+07	7,17E+09	6,40E+05	1,86E+08
2201	5717	4,84E+06	1,07E+10	2,35E+13	1,26E+07	2,77E+10
5717	13717	3,27E+07	1,87E+11	1,07E+15	7,84E+07	4,48E+11
13717	25262	1,88E+08	2,58E+12	3,54E+16	3,47E+08	4,75E+12
...						
5911758	6118708	3,49E+13	2,07E+20	1,22E+27	3,62E+13	2,14E+20
6118708	6386787	3,74E+13	2,29E+20	1,40E+27	3,91E+13	2,39E+20
6386787	6674999	4,08E+13	2,61E+20	1,66E+27	4,26E+13	2,72E+20
6674999	6970034	4,46E+13	2,97E+20	1,99E+27	4,65E+13	3,11E+20
6970034	7318821	4,86E+13	3,39E+20	2,36E+27	5,10E+13	3,56E+20
7318821	7563551	5,36E+13	3,92E+20	2,87E+27	5,54E+13	4,05E+20
120418480	127982029	5,93E+14	3,25E+21	1,89E+28	6,21E+14	3,39E+21

Resolvendo o sistema a seguir considerando a equação (8), obtêm-se os parâmetros a , b e c do ajuste quadrático e por consequência o Y^* .

$$\begin{cases} 1,89 \cdot 10^{28}a + 3,25 \cdot 10^{21}b + 5,93 \cdot 10^{14}c = 3,39 \cdot 10^{21} \\ 3,25 \cdot 10^{21}a + 5,93 \cdot 10^{14}b + 1,2 \cdot 10^8c = 6,21 \cdot 10^{14} \\ 5,93 \cdot 10^{14}a + 1,2 \cdot 10^8b + 43c = 1,28 \cdot 10^8 \end{cases}$$

Logo:

$$a = -0,00000001, b = 1,0866, c = 68477$$

Substituindo os parâmetros acima na equação $y_{n+1} = ay_n^2 + by_n + c$ e fazendo $Y^* = y_n = y_{n+1}$, obtém-se:

$$Y^* = 9.389.308$$

Fonte: Elaboração Própria.

APÊNDICE C

Tabela 19 - Período Correspondente a Semana dos Óbitos
Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020

Período (2020)	Semana	Óbitos acumulados
11/03 à 17/03	3	1
18/03/ à 24/03	4	46
25/03 à 31/03	5	201
01/04 à 07/04	6	679
08/04 à 14/04	7	1541
15/04 à 21/04	8	2751
22/04 à 28/04	9	5050
29/04 à 05/05	10	7921
06/05 à 12/05	11	12400
13/05 à 19/05	12	17971
20/05 à 26/05	13	24512
27/05 à 02/06	14	31199
03/06 à 09/06	15	38406
10/06 à 16/06	16	45241
17/06 à 23/06	17	52645
24/06 à 30/06	18	59594
01/07 à 07/07	19	66741
08/07 à 14/07	20	74133
15/07 à 21/07	21	81487
22/07 à 28/07	22	88539
29/07 à 04/08	23	95819
05/08 à 11/08	24	103026
12/08 à 18/08	25	109888
19/08 à 25/08	26	116580
26/08 à 01/09	27	122596
02/09 à 08/09	28	127464
09/09 à 15/09	29	133119
16/09 à 22/09	30	138108
23/09 à 29/09	31	142921
30/09 à 06/10	32	147494
07/10 à 13/10	33	150998
14/10 à 20/10	34	154837
21/10 à 27/10	35	157946
28/10 à 03/11	36	160496
04/11 à 10/11	37	162829
11/11 à 17/11	38	166699
18/11 à 24/11	39	170115
25/11 à 01/12	40	173817
02/12 à 08/12	41	178159
09/12 à 15/12	42	182799
16/12 à 22/12	43	188259
23/12 à 29/12	44	192681
30/12 à 05/01	45	197732
06/01 à 12/01	46	204690
13/01 à 19/01	47	211491
20/01 à 26/01	48	218878
27/01 à 02/02	49	226309
03/02 à 09/02	50	233520

Fonte: Elaboração Própria.

APÊNDICE D

Tabela 20 - Cálculos Auxiliares para Determinação da Capacidade de Suporte (Y^*) do Número de Óbitos Acumulados por Complicações com a COVID-19 no Brasil em 2020

$y_n(x_i)$	$y_{n+1}(y_i)$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	46	1,00E+00	1,00E+00	1,00E+00	4,60E+01	4,60E+01
46	201	2,12E+03	9,73E+04	4,48E+06	9,25E+03	4,25E+05
201	679	4,04E+04	8,12E+06	1,63E+09	1,36E+05	2,74E+07
679	1541	4,61E+05	3,13E+08	2,13E+11	1,05E+06	7,10E+08
1541	2751	2,37E+06	3,66E+09	5,64E+12	4,24E+06	6,53E+09
2751	5050	7,57E+06	2,08E+10	5,73E+13	1,39E+07	3,82E+10
...						
166699	170115	2,78E+10	4,63E+15	7,72E+20	2,84E+10	4,73E+15
170115	173817	2,89E+10	4,92E+15	8,37E+20	2,96E+10	5,03E+15
173817	178159	3,02E+10	5,25E+15	9,13E+20	3,10E+10	5,38E+15
178159	182799	3,17E+10	5,65E+15	1,01E+21	3,26E+10	5,80E+15
182799	188259	3,34E+10	6,11E+15	1,12E+21	3,44E+10	6,29E+15
188259	192681	3,54E+10	6,67E+15	1,26E+21	3,63E+10	6,83E+15
3695027	3887707	5,04E+11	7,52E+16	1,18E+22	5,22E+11	7,75E+16

Resolvendo o sistema a seguir considerando a equação (8), obtêm-se os parâmetros a , b e c do ajuste quadrático e por consequência o Y^* .

$$\begin{cases} 1,18 \cdot 10^{22}a + 7,52 \cdot 10^{16}b + 5,40 \cdot 10^{11}c = 7,75 \cdot 10^{16} \\ 7,52 \cdot 10^{16}a + 5,40 \cdot 10^{11}b + 3,7 \cdot 10^6c = 5,22 \cdot 10^{11} \\ 5,40 \cdot 10^{11}a + 3,70 \cdot 10^6b + 41c = 3,89 \cdot 10^6 \end{cases}$$

Logo:

$$a = -0,0000005, b = 1,0892, c = 2487,6$$

Substituindo os parâmetros acima na equação $y_{n+1} = ay_n^2 + by_n + c$ e fazendo $Y^* = y_n = y_{n+1}$, obtém-se:

$$Y^* = 219.106$$

Fonte: Elaboração Própria.

APÊNDICE E

Tabela 21 - Planilha dos Cálculos do Exemplo Numérico do Modelo SIR

Tempo	Suscetível	Infectado	Removido
-	997,000	3,000	0,000
1	996,103	3,597	0,300
2	995,028	4,313	0,660
3	993,740	5,169	1,091
4	992,199	6,193	1,608
5	990,356	7,417	2,227
6	988,153	8,879	2,969
7	985,521	10,623	3,857
8	982,380	12,701	4,919
9	978,637	15,174	6,189
10	974,182	18,112	7,706
11	968,888	21,594	9,518
12	962,612	25,711	11,677
13	955,187	30,565	14,248
14	946,428	36,267	17,305
15	936,131	42,938	20,931
16	924,073	50,702	25,225
17	910,017	59,688	30,295
18	893,722	70,014	36,264
19	874,950	81,785	43,266
20	853,482	95,074	51,444
21	829,139	109,909	60,951
22	801,800	126,257	71,942
23	771,430	144,002	84,568
24	738,104	162,928	98,968
25	702,027	182,712	115,261
26	663,546	202,922	133,532
27	623,152	223,024	153,824
28	581,458	242,415	176,127
29	539,172	260,460	200,368
30	497,042	276,543	226,414
31	455,806	290,125	254,069
32	416,134	300,785	283,081
33	378,584	308,256	313,160
34	343,574	312,441	343,985
35	311,370	313,401	375,229
36	282,095	311,336	406,569
37	255,747	306,550	437,703
38	232,227	299,415	468,358
39	211,367	290,333	498,300
40	192,957	279,710	527,333
41	176,766	267,931	555,304
42	162,557	255,346	582,097
43	150,105	242,264	607,631
44	139,195	228,947	631,858
45	129,635	215,613	654,752
46	121,250	202,437	676,314

Continua

Continuação - Tabela 21 - Planilha dos Cálculos do Exemplo Numérico do Modelo SIR

47	113,886	189,557	696,557
48	107,410	177,077	715,513
49	101,704	165,075	733,221
50	96,667	153,605	749,728
51	92,213	142,699	765,089
52	88,265	132,376	779,359
53	84,760	122,644	792,596
54	81,641	113,498	804,861
55	78,861	104,928	816,211
56	76,379	96,918	826,703
57	74,158	89,447	836,395
58	72,168	82,492	845,340
59	70,382	76,029	853,589
60	68,777	70,031	861,192
61	67,332	64,473	868,195
62	66,030	59,328	874,642
63	64,854	54,571	880,575
64	63,793	50,175	886,032
65	62,832	46,118	891,050
66	61,963	42,375	895,662
67	61,175	38,926	899,899
68	60,461	35,747	903,792
69	59,813	32,821	907,366
70	59,224	30,128	910,648
71	58,688	27,650	913,661
72	58,201	25,372	916,426
73	57,758	23,278	918,964
74	57,355	21,354	921,291
75	56,988	19,586	923,427
76	56,653	17,962	925,385
77	56,348	16,471	927,181
78	56,069	15,102	928,829
79	55,815	13,846	930,339
80	55,583	12,693	931,723

Fonte: Elaboração Própria.