UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Introdução à Lógica Matemática com Aplicações na Educação Básica

Lindberg Barbosa Lira de Almeida

Instituto de Matemática

Maceió, março de 2021

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

LINDBERG BARBOSA LIRA DE ALMEIDA

INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA COM APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Maceió – AL,
Março de 2021

LINDBERG BARBOSA LIRA DE ALMEIDA

INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA COM APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. André Luiz Flores

Maceió

2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

A447i Almeida, Lindberg Barbosa Lira de.
Introdução à lógica matemática com aplicações na educação básica / Lindberg Barbosa Lira de Almeida. - 2021.
140, 55 f. : il.

Orientador: André Luiz Flores.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2021.

Bibliografia: f. 126-128.

1. Lógica matemática. 2. Teoria axiomática. 3. Educação básica. I. Título.

CDU: 510.6

Folha de Aprovação

LINDBERG BARBOSA LIRA DE ALMEIDA

Introdução à Lógica Matemática com Aplicações na Educação Básica

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 18 de março de 2021.

Prof. Dr. André Luiz Flores – UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra – UFAL (Examinador Interno)

Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento - IFAL (Examinador Externo)

Dedico este trabalho ao meu grande mestre prof.: Joábil Lira de Almeida, meu falecido Pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me escolheu e preparou para fazer este curso iluminando meu caminho e ideias me dando a maturidade e resiliência necessárias para concluir esta etapa da minha trajetória acadêmica.

Aos meus pais, Cilene Lourdes Barbosa de Almeida e Joábil Lira de Almeida, pelo amor, dedicação e esforço ao longo dos anos para me dar uma boa educação.

A minha amada esposa, Maria Lidiane Gomes de Almeida pelo apoio, compreensão e incentivo nos momentos de ausência durante as aulas e estudos.

Ao meu filho, Lindberg Barbosa Lira de Almeida Júnior, que me deu a motivação necessária a começar, recomeçar e avançar no curso.

A minha irmã, Lígia Barbosa Lira de Almeida Melo pelo seu incentivo e acolhimento em seu apartamento durante as aulas.

Aos meus colegas de turma, em particular a minha parceira de estudos Allanny Karla Barbosa Vasconcelos, pelo companheirismo, união e solidariedade que minimizaram as dificuldades que surgiram durante o curso.

Ao meu amigo Prof. Rangel Messias da Cruz pelo incentivo e revisão ortográfica do texto deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. André Luiz Flores, que acompanha minha trajetória desde o início do curso contribuindo de forma excepcional à minha formação, a todos os meus outros professores do mestrado que têm uma contribuição indireta, mas imensa neste trabalho e aos membros da banca examinadora Prof. Dr. Arlyson Alves do Nascimento e Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra, por estarem sempre atentos ao avaliarem meu trabalho e pelas sugestões que contribuíram imensamente pra a melhoria do mesmo.

A todos os servidores técnico-administrativos da UFAL pelo importante e indispensável trabalho que realizam.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM, pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e a CAPES pelo apoio financeiro.

Havendo somente uma verdade em cada coisa, qualquer um que a encontre saberá tanto quando pode saber.

René Descartes (1596-1650)
Filósofo, físico e matemático francês.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução à Lógica utilizada no desenvolvimento das Teorias Axiomáticas associadas ao Currículo de Matemática da Educação Básica segundo a Base Nacional Comum Curricular. É dada ênfase à discussão a respeito dos Métodos de Demonstração mais utilizados para a justificativa dos principais resultados matemáticos apresentados neste nível. Destaca, entre outros, os Métodos de Demonstração por Prova Direta, Redução ao Absurdo e Indução Matemática sendo que, diferentemente de grande parte da literatura, apresenta toda a relação desses métodos com a Lógica, seus princípios, operações e regras de inferência pré-requisitos fundamentais a justificativa do uso dos mesmos. Em particular, faz uma discussão mais abrangente do Método de Indução Matemática associando-o tanto ao Princípio ou Axioma de Indução quanto ao Teorema de Indução, demonstrando-o e apresentando suas diversas aplicações, seja na definição rigorosa de objetos matemáticos ou como poderoso instrumento para demonstrar os mais variados resultados envolvendo números naturais na educação básica. Além disso, traz exemplos de Teorias Axiomáticas desenvolvidas neste nível e enuncia diversos Teoremas fazendo suas respectivas demonstrações utilizando um ou mais dos métodos de demonstração apresentados incluindo a demonstração na notação padrão de argumento, explicitando assim sua relação direta com a lógica e sua álgebra. O trabalho pode ser utilizado como um material de apoio para o docente da educação básica ou graduando do Curso de Licenciatura em Matemática que deseje aprofundar-se no que diz respeito as Técnicas de Demonstração de Teoremas e toda Lógica por trás destes processos.

Palavras-chave: Lógica; Teorias Axiomáticas; Métodos de Demonstração; Educação Básica.

ABSTRACT

This work aims to present an introduction to the Logic used in the development of the Axiomatic Theories associated with the Basic Education Mathematics Curriculum according to the Common National Curriculum Basis. Emphasis is given to the discussion of the most used demonstration methods to justify the main mathematical results presented at this level. It highlights, among others, the Methods of Demonstration by Direct Proof, Reduction to Absurdity and Mathematical Induction, which, unlike most of the literature, presents the entire relationship of these methods with Logic, its principles, operations and inference rules prerequisites justification for their use is fundamental. In particular, it makes a more comprehensive discussion of the Mathematical Induction Method associating it both to the Principle or Axiom of Induction and to the Induction Theorem, demonstrating it and presenting its various applications whether in the rigorous definition of mathematical objects or as a powerful instrument to demonstrate the most varied results involving natural numbers in basic education. In addition, it brings examples of Axiomatic Theories developed at this level and enunciates several Theorems making their respective demonstrations using one or more of the demonstration methods presented including the demonstration in standard argument notation, thus explaining its direct relationship with logic and its algebra. The work can be used as a support material for the teacher of basic education or graduating from a Mathematics Degree Course who wishes to go deeper in what concerns the Techniques of Demonstration of Theorems and all the Logic behind these processes.

Keywords: Logic; Axiomatic Theories; Demonstration Methods; Basic Education.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\in$	pertence
$\notin$	não pertence
$\emptyset$	conjunto vazio
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais com $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\cup$	união
$\cap$	interseção
$\subset$	está contido
$\not\subset$	não está contido
$\sim$	negação, não
$\veebar$	disjunção exclusiva, ou... ou...
$\vee$	disjunção, ou
$\wedge$	conjunção, e
$\Leftrightarrow$	equivale logicamente a
$\Longrightarrow$	implica logicamente em
$\nRightarrow$	não implica
$\longleftrightarrow$	bicondicional, se, e somente, se
$\longrightarrow$	condicional, implica, se…então
$\exists$	existe
$\nexists$	não existe
;	tal que
!	existe único
$\forall$	para todo
$\vdash$	traço de asserção do argumento
$\neq$	diferente de, não é igual a
$\geq$	maior ou igual do que
$>$	maior do que
$\leq$	menor ou igual do que
$<$	menor do que
$\equiv$	congruente a
$\sim$	semelhante a
!	fatorial
$\parallel$	paralelo a
$\therefore$	portanto, donde
$\perp$	perpendicular a
$\overline{AB}$	segmento de reta de extremos nos pontos A e B ou o comprimento do segmento
$\angle$ABC	ângulo de vértice B
$\triangle\, ABC$	triângulo de vértices A, B e C
$\blacksquare$	final da prova

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho surgiu de um questionamento próprio como professor de Matemática da Educação Básica há mais de duas décadas: Será que estamos apresentando de forma eficaz os objetos de conhecimento e conteúdos sem apresentar nenhuma noção, ao menos intuitiva, dos princípios da Lógica, operações e regras de inferências básicas e de como, a partir delas, é desenvolvida uma teoria matemática axiomaticamente?

Segundo BARBOSA [2]:

> A Geometria, como qualquer sistema dedutivo, é muito parecida com um jogo: partimos com um certo conjunto de elementos (pontos, retas, planos) e é necessário aceitar algumas regras básicas que dizem respeito às relações que satisfazem estes elementos, as quais são chamadas de axiomas. O objetivo final deste jogo é o de determinar as propriedades das figuras planas e dos sólidos no espaço. Tais propriedades, chamadas Teoremas ou Proposições, devem ser deduzidas somente através do raciocínio lógico a partir dos axiomas fixados ou a partir de outras propriedades já estabelecidas.

Assim, este trabalho apresenta o usa da lógica num estudo introdutório a respeito das teorias matemáticas desenvolvidas axiomaticamente na educação básica, servindo de material de estudo e consulta para aprimoramento da formação do docente na sua prática diária, propondo como na analogia feita na citação anterior a apresentação de “regras básicas” aos seus alunos, diminuindo assim a sensação de impotência e elevando a autoestima dos mesmos no “jogo” da aprendizagem matemática.

Motivou-nos também os resultados alcançados pela grande maioria dos estudantes nas avaliações externas de matemática do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e do Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (Saepe) nos últimos anos, principalmente à questões relacionadas a habilidades e competências envolvendo, nos anos finais Ensino Fundamental, a expressão de regularidades encontradas em sequências numéricas, demonstração de relações simples e reconhecimento de condições necessárias e suficientes - e no Ensino Médio - envolvendo a investigação, identificação de padrões e estabelecimento de conjecturas para generalização e expressão algébrica de relações e deduções de fórmulas. Sendo tais resultados consequências prováveis da notória falta de interesse por parte dos alunos, em deduções e demonstrações de Teoremas e outros resultados, motivada pela dificuldade em compreender, sem uma noção intuitiva da Lógica e dos seus princípios básicos, apresentações de teorias axiomáticas fragmentadas sendo elaboradas com muitas lacunas em boa parte dos livros didáticos utilizados atualmente, ignorando demonstrações de teoremas, deduções de fórmulas e algoritmos frequentemente utilizados na resolução de problemas, bem como a ausência ou pouco conhecimento a respeito da estrutura de uma teoria axiomática, das técnicas utilizadas nas deduções e demonstrações de teoremas por significativa parte dos professores desses níveis incumbidos de trabalhar competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como a quinta específica de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, a qual estabelece que o aluno deverá ser capaz de:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. [4]

Sendo assim, note que, a BNCC aponta para a importância que deve ser dada à validação dos conhecimentos matemáticos por meio do pensamento lógico dedutivo. Ficando assim evidenciado a necessidade de estudos complementares a respeito de Lógica, Teorias Axiomáticas e Métodos de Demonstração por parte dos Professores da Educação Básica com pouco conhecimento a respeito destes temas.

O presente trabalho apresenta no capítulo um o que diz a BNCC a respeito de conjecturas, generalizações e demonstrações na educação básica, nas suas competências e habilidades de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. No capítulo dois, traz uma introdução aos princípios básicos da Lógica, operações, regras de inferência, técnicas de demonstração de argumentos e demais ferramentas. Em seguida, no capítulo três, descreve como funciona o método axiomático com exemplos na teoria dos conjuntos, Geometria e Física desenvolvida na Educação Básica. O capítulo quatro relaciona a lógica com teoria dos conjuntos e defini o conjunto dos números naturais a partir dos Axiomas de Peano. Apresentando seu último axioma como Princípio de Indução Matemática, mostrando dessa forma uma ponte de fundamental importância a travessia da Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental a Matemática do Ensino Médio. No capítulo cinco, apresentamos o conjunto dos números naturais definido axiomaticamente, com destaque para o axioma de indução, bem como o princípio da boa ordenação. No capítulo seis, fazemos um estudo detalhado a respeito do método de demonstração por indução matemática. E por fim, no capítulo sete, apresentamos diversas aplicações na educação básica de tudo que foi abordado com exemplos de demonstrações detalhadas, utilizando as técnicas apresentadas, de alguns teoremas de matemática com ênfase no uso das técnicas de prova direta, por redução ao absurdo e por indução matemática. Assim, percebe-se no decorrer do trabalho a importância da lógica e cada uma das técnicas de demonstração utilizadas em teoremas apresentados tão necessárias à justificativa e aplicabilidade destes resultados. Mostrando, a partir daí, que há um caminho seguro que nos leva de um problema à sua solução, do que é dado ao que é pedido, da hipótese à tese, com raras incertezas e sem superestimar nem menosprezar a habilidade de cada um seguir tal caminho que leva a, digamos, um "elo perdido" entre a Matemática na Educação Básica e o raciocínio lógico-dedutivo tão presente nas suas unidades temáticas, conteúdos, objetos de conhecimento, competências e habilidades.

1 SOBRE LÓGICA E DEMONSTRAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

O documento de caráter normativo que define atualmente o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica é a BNCC. Portanto, nessa seção foi usada como referência [4].

Das recomendações gerais ao ensino de matemática, a BNCC pontua inicialmente que o conhecimento matemático é necessário a todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos e cientes de suas responsabilidades sociais.

Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, pois suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática.

No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental.

O Ensino Fundamental deve manter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.

A seguinte competência específica de matemática para o ensino fundamental a seguir também ilustra a importância da Lógica no desenvolvimento das mesmas.

- Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento.

Nessa direção, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental - Anos Iniciais e Finais. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização. São elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística.

Portanto, a BNCC orienta-se nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos.

Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. Assim, algumas das habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”. Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos.

Da mesma forma que na fase anterior, a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação.

Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto.

A seguir exemplos de habilidades que explicitam e evidenciam a necessidade de um conhecimento prévio da noção de Lógica, desenvolvimento de uma Teoria Axiomática e Métodos de Demonstração nos anos finais do Ensino Fundamental.

- (EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

- (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
- (EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do Princípio Multiplicativo.
- (EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
- (EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
- (EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe no ensino médio a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade.

Assim, para o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado. Daí associadas a quinta competência específica de matemática e suas tecnologias para o ensino médio, já citada na introdução, estão os seguintes exemplos de habilidades que evidenciam mais uma vez a necessidade da abordagem no ensino médio de uma Noção de Lógica, Teorias Axiomática e Técnicas de Demonstração:

- (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

- (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o Princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
- (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
- (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Portanto agora, bem como no decorrer do trabalho, fica evidente, de acordo com o exposto, a necessidade de uma formação sólida dos professores de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio no que diz respeito a Lógica e sua aplicabilidade no desenvolvimento de Teorias Axiomáticas e em particular nas Técnicas de Dedução ou Demonstração de Argumentos.

2 NOÇÕES DE LÓGICA

O texto a seguir, bem como toda a teoria apresentada neste capítulo, foi elaborado baseado nas seguintes obras: [1], [3], [5], [6], [15] e [22].

A lógica, para fins didáticos, pode ser definida como a ciência que estuda os princípios e os métodos que permitem deduzir e estabelecer as condições de validade e invalidade de argumentos dando atenção especial não aos seus conteúdos em si, mas a forma ou estrutura dos mesmos, bem como em que condições surgem novos argumentos a partir de outros.

Apesar de, na maioria das vezes, não nos darmos conta a lógica está presente todos os dias em nossas vidas. Por exemplo ao escolher uma calça e camisa pra vestir entre as demais que se possui, ao planejar uma viagem com a família ou amigos, ao fazer compras no supermercado, na instalação de uma rede elétrica doméstica, ao brincar com um simples quebra-cabeças, ao explicar aos seus filhos a importância de tomarem vacinas contra doenças, ao expor suas ideias e pensamentos fazendo com que outras pessoas vejam as coisas sob a mesma perspectiva, nas disciplinas que estudamos na escola em particular filosofia e matemática, na oratória, etc.

Mesmo sem perceber a lógica é algo natural para nós humanos nos diferenciando de outras criaturas e que nos faz sobreviver e prosperar há tanto tempo num planeta cheio de adversidades ao fornecer ferramentas que nos permitem utilizar o que já conhecemos (premissas) para sair de onde estamos (inferindo) a próxima etapa (conclusão) na qual queremos chegar. A lógica também é maravilhosa por ajudar-nos a identificar as falhas do pensamento, discurso e oratória, bem como na construção e inferência de resultados (argumentos).

É exatamente nessa Lógica que integra a matemática, e tem seus fundamentos intrinsicamente ligados a mesma, que desenvolveremos nosso trabalho a partir de agora utilizando-a para criar métodos para a construção e análise de argumentos matemáticos.

2.1 PROPOSIÇÕES

Definição 2.1. *Chamamos frase a um conjunto de palavras (incluindo os sinais de acentuação e pontuação) ou símbolos matemáticos, que se relacionam para comunicar uma ideia.*

Definição 2.2. *Uma proposição é uma frase declarativa formada de palavras e/ou símbolos que exprime um pensamento de sentido completo e que pode ser classificada em verdadeira* (V) *ou falsa* (F).

Sendo usualmente denominado valor-verdade (ou valor-lógico) tal resultado.

Exemplo 2.1.

a) $\cos 90° = 0$ (V)
b) Maceió é a capital de Pernambuco (F)
c) O Brasil é o país com mais títulos de campeão em copas do mundo de futebol (V em certo período de tempo)

Exemplo 2.2.

a) Que horas são?
b) Desça daí!
c) Não faça isso!

Não são proposições, pois é impossível estabelecer um valor-verdade para elas.

2.2 PRINCÍPIOS DA LÓGICA

A Lógica Matemática adota como regras fundamentais do pensamento os três seguintes princípios:

2.1(Princípio da Identidade). *Toda proposição é idêntica a si mesma.*

2.2(Princípio da não Contradição). *Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.*

2.3(Princípio do Terceiro Excluído). *Toda a proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.*

2.3 PROPOSIÇÕES SIMPLES E PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Definição 2.3. *Uma proposição é dita simples quando é formada por uma única frase declarativa.*

Definição 2.4. *Uma proposição é dita composta quando é formada por outras proposições.*

As proposições simples costumam ser representadas por letras minúsculas do alfabeto latino: a, b, ... , z; enquanto que as compostas por letras maiúsculas: A, B, ..., Z.

Exemplo 2.3.

p: O número 16 é um número par.

q: José é médico.

r: $2 + 3 = 5$.

Exemplos 2.4.

P: O número 16 é um número par e também é maior que o número 15.

Q: José é médico, mas também é professor.

R: Se $2 + 3 = 5$, então $3 + 2 = 5$.

As proposições compostas também recebem a denominação de fórmulas proposicionais ou simplesmente fórmulas.

Definição 2.5. *Os conectivos são palavras utilizadas para formar uma nova proposição a partir de outra(s).*

*São cone*ctivos usuais em Lógica Matemática: *"e", "ou", "ou... ou...", "não", "se... então..." e o "... se e somente se...".* Tais palavras são representadas, respectivamente, por símbolos denominados conectivos lógicos: $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\sim$, $\rightarrow$, e $\leftrightarrow$.

Exemplo 2.5.

P: O número 3 é impar e o número 12 é múltiplo de 4.

Q: O triangulo ABC é equilátero ou é escaleno.

R: Ou José é alagoano ou pernambucano.

S: Não vamos à praia.

T: Se Pedro é arquiteto, então sabe Geometria.

U: O triangulo ABC é equilátero se e somente se é equiângulo.

Os conectivos também podem ser chamados de operadores ao considerarmos uma proposição composta como resultado de uma operação realizada entre outras duas proposições conforme veremos a seguir.

2.4 OPERAÇÕES LÓGICAS

Quando pensamos, efetuamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas *operações lógicas*. Estas obedecem a regras de um cálculo, denominado *cálculo proposicional*; semelhante ao da aritmética sobre números. Veremos a seguir as operações lógicas fundamentais. Tais operações com proposições permitem, como veremos, o estabelecimento de uma linguagem que facilita sobremaneira o discurso matemático.

Definição 2.6. *Chama-se conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por "p e q", cujo valor lógico é a verdade* (V) *quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade* (F) *nos demais casos. Simbolicamente, temos:* $p \wedge q$ *(lê-se: p e q).*

Exemplo 2.6. A neve é branca e 7 é um número primo (V)

Definição 2.7. *Chama-se disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por "p ou q", cujo valor lógico é a verdade* (V) *quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a falsidade (F) quando as proposições p e q são ambas falsas. Simbolicamente, temos* $p \vee q$ *(lê-se: p ou q).*

Exemplo 2.7. Paris é a capital da França ou $3 > 5$ (V)

Definição 2.8. *Chama-se disjunção exclusiva de duas proposições p e q a proposição representada por "ou p ou q", cujo valor lógico é a verdade* (V) *somente quando o valor lógico de p e q forem ambos distintos simultaneamente.* Simbolicamente, temos: $p \veebar q$ (lê-se: ou p ou q).

Exemplo 2.8. Ou Pedro é alagoano ou Pedro é gaúcho (V)

Definição 2.9. *Chama-se condicional de duas proposições p e q a proposição representada por "se p então q", cujo valor lógico é a falsidade* (F) *no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a verdade* (V) *nos demais casos.* Simbolicamente, temos: p → q (lê-se: Se p, então q).

Exemplo 2.9. Se o mês de maio tem 30 dias, então a Terra é plana (V)

Definição 2.10. *Chama-se bicondicional de duas proposições p e q a proposição representada por "p se, e somente se, q", cujo valor lógico é a verdade* (V) *quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade* (F) *nos demais casos. Simbolicamente, temos:* p ↔ q *(lê-se: p se, e somente se, q).*

Exemplo 2.10. Lisboa é a capital da Espanha se, e somente se, $3 + 2 = 7$ (V)

Definição 2.11. *Chama-se negação de uma proposição p a proposição representada por "não p", cujo valor lógico é a verdade* (V) *quando p é falsa e a falsidade* (F) *quando p é verdadeira. Simbolicamente, temos:* ~ p (lê-se: não p)

Exemplo 2.11. p: O Sol é uma estrela (V)

~p: O Sol não é uma estrela (F)

2.5 TABELAS-VERDADE

É fácil perceber que a definição de cada uma das operações lógicas dadas se baseia no seguinte princípio:

Princípio 2.4. *Cada valor lógico possível de toda proposição composta depende apenas dos valores lógicos das proposições simples que a compõe, estando assim determinados de forma única por eles.*

Tomando o princípio acima como princípio básico para determinação dos possíveis valores lógico de uma proposição composta dada e levando em conta o Princípio do terceiro excluído, isto é, toda proposição simples é verdadeira ou é falsa, podemos organizar uma tabela que definiremos a seguir.

Definição 2.12. *Denomina-se tabela-verdade, a tabela onde figuram todos os valores lógicos possíveis de uma proposição composta resultante de alguma das operações* *lógicas dadas em função dos valores lógicos possíveis das proposições simples que a compõe.* Assim, usando uma tabela-verdade, podemos resumir todas as operações lógicas aqui definidas em:

Tabela 2.1 - Operações Lógicas.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
V	V	V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ou ainda construir a tabela verdade associada a qualquer proposição composta, por exemplo: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Tabela 2.2 - Tabela verdade proposição composta.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

De forma simplificada, temos:

Tabela 2.3 - Tabela verdade proposição composta versão simplificada

$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$[(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\rightarrow$	$p)]$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V	F	V	F
1	3	2	4	6	5	10	7	9	8

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que a última linha é opcional e seus números indicam a ordem de construção da tabela coluna a coluna.

Outra observação relevante é a *ordem de precedência* em que as operações devem ser realizadas em proposições compostas com mais de um conectivo. No caso de usar-se apenas parentes devemos realizar primeiro as operações dos mais internos pros mais externos. Caso não se use tais símbolos a ordem de precedência é a seguinte:

$$(1) \sim \qquad (2) \wedge \text{ e } \vee \text{ e } \underline{\vee} \qquad (3) \rightarrow \qquad (4) \leftrightarrow$$

Ou seja, primeiro resolvemos as negações, depois as conjunções e disjunções (exclusivas) na ordem que aparecerem, depois as condicionais e finalmente as bicondicionais.

Exemplo 2.12.

- $\mathbf{p \rightarrow q \leftrightarrow r \vee s}$
  é uma proposição composta bicondicional, isto é, resolve-se por último a bicondicional.

Exemplo 2.13.

- $\mathbf{(p \rightarrow q \leftrightarrow r) \vee s}$
  é uma conjunção devido ao uso dos parênteses, isto é, resolve-se por último a conjunção.

2.5.5. Número de Linhas de uma Tabela-Verdade

Tomando como base o princípio 2.4, é fácil ver, esgotando-se todas as possibilidades para os valores lógicos das proposições envolvidas, que o número de linhas da tabela verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a compõe. Além disso, do princípio multiplicativo[1], segue-se que o número de linhas da tabela verdade de uma proposição composta formada por **n** proposições simples é 2^n linhas uma vez que toda proposição simples tem dois valores lógicos: V e F, que se excluem. Portanto, para uma proposição composta P formada por n proposições simples p_1, p_2, ..., p_n há tantas possibilidades de atribuição dos valores lógicos V e F a tais proposições simples quantos são os arranjos com repetição *n* a *n* dos dois elementos V e F, isto é, $A_{2,n} = 2''$.

2.6 TAUTOLOGIAS, CONTRADIÇÕES E CONTINGÊNCIAS

Definição 2.13. *Denomina-se tautologia ou proposição tautológica toda proposição composta que sempre tem valor lógico* (V) *quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições que a compõe.*

Definição 2.14. *Denomina-se contradição toda proposição composta que sempre tem valor lógico* (F) *quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições que a compõe.*

Definição 2.15. *Denomina-se contingência toda proposição composta que não seja tautologia nem seja contradição.*

Exemplo 2.14. p ↔ p, ~(p ∧ ~p), (p ∨ ~p) e p ∨ ~(p ∧ q) são tautologias.

De fato, construamos suas tabelas verdades para verificação desse fato:

Tabela 2.4 – Tautologia 1

p	↔	p
V	V	V
F	V	F

Tabela 2.5 – Tautologia 2

~	(p	∧	~	p)
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F

Tabela 2.6 – Tautologia 3

(p	∨	~	p)
V	V	F	V
F	V	V	F

Tabela 2.7 – Tautologia 4

p	∨	~	(p	∧	q)
V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F

Fonte: Elaboradas pelo autor.

Note que as três primeiras proposições tautológicas representam, respectivamente, os *princípios da identidade, da não contradição* e do *terceiro excluído.*

Exemplo 2.15. p ∧ ~p, p ↔ ~q e ~p ∧ (p ∧~q) são contradições.

De fato, construamos suas tabelas verdades para verificação desse fato:

Tabela 2.8 – Contradição 1

(p	∧	~	p)
V	F	F	V
F	F	V	F

Tabela 2.9 – Contradição 2

(p	↔	~	p)
V	F	F	V
F	F	V	F

Tabela 2.10 – Contradição 3

~	p	∧	(p	∧	~	q)
F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F

Fonte: Elaboradas pelo autor.

Exemplo 2.16. $p \vee q \rightarrow p$ é uma contingência.

De fato, construamos sua tabela verdade para verificação desse fato:

Tabela 2.11 – Contingência 1

p	∨	q	→	p
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Fonte: Elaborada pelo autor.

2.7 IMPLICAÇÕES LÓGICAS, EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

Definição 2.16. *Denomina-se implicação lógica toda condicional tautológica.*

Definição 2.17. *Denomina-se equivalência lógica toda bicondicional tautológica.*

Exemplo 2.17. (a) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é uma implicação lógica. Indica-se: $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ (lê-se: $p \wedge q$ *implica logicamente* em $p \vee q$).

De fato, basta construir a tabela verdade e mostrar que a condicional $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é uma tautologia.

Tabela 2.12 – Implicação Lógica

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

(b) $p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ é uma equivalência lógica. Indica-se: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ *(lê-se: $p \leftrightarrow q$ equivale logicamente a* $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$*)*.
De fato, basta construir a tabela verdade e mostrar que a bicondicional $p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ é uma tautologia.

Tabela 2.13 – Equivalência Lógica

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$p\leftrightarrow q$	$(p\rightarrow q) \wedge (q\rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 2.1. *A relação de equivalência lógica tem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, para quaisquer proposições p, q e r vale:*

(i) $p \Leftrightarrow p$

(ii) $p \Leftrightarrow q \rightarrow q \Leftrightarrow p$

(iii) $p \Leftrightarrow q$ e $q \Leftrightarrow r \rightarrow p \Leftrightarrow r$

Demonstração.

De fato, basta construir as respectivas tabelas-verdade de cada uma das condicionais e bicondicionais e verificar que as mesmas são todas tautológicas.

2.8 REGRAS DE INFERÊNCIA FUNDAMENTAIS

Proposição 2.2(Regras de Inferência Fundamentais). *Sejam p, q e r proposições quaisquer e c uma contradição, valem as seguintes implicações e equivalências lógicas:*

1) $p \Rightarrow p \vee q$	e	$q \Rightarrow p \vee q$	(Adição)
2) $p \wedge q \Rightarrow p$	e	$p \wedge q \Rightarrow q$	(Simplificação)
3) $p \wedge q \Rightarrow p \wedge q$	e	$p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$	(Conjunção)
4) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$	ou	$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$	(Silogismo disjuntivo)
5) $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$			(Modus ponens[1])
6) $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$			(Modus tollens[2])
7) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$			(Silogismo hipotético)
8) $p \wedge \sim p \Rightarrow q$			(Inconsistência)
9) $\sim\sim p \Leftrightarrow p$			(Dupla negação)
10) $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$			(CLAVIUS[3])
11) $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$			(Absorção)
12) $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$,		com c contradição	(Redução ao absurdo)
13) $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$			(Exportação-Importação)

Demonstração.

Análoga a anterior.

As regras de inferência aqui apresentadas são parte do que chamaremos de *ferramentas* na nossa *álgebra de proposições* que será utilizada para justificar, sem utilizar tabelas verdades muitas vezes longas, outras regras, implicações e equivalências lógicas, de uma forma prática como veremos adiante.

A seguir mais algumas ferramentas bem relevantes dessa álgebra de proposições.

---

[1] Modus ponendo ponens, do latim significa "a maneira que afirma afirmando", muitas vezes abreviado para MP ou modus ponens.
[2] Modus tollens do latim significa "modo que nega por negação" ou negação do consequente, é o nome formal para a prova indireta.
[3] Christophorus Clavius ou Christopher Clavius (Bamberg, 25 de março de 1538 — Roma, 2 de fevereiro de 1612) foi um sábio e matemático jesuíta alemão.

2.9 RECÍPROCA, CONTRÁRIA E CONTRA POSITIVA DE UMA PROPOSIÇÃO CONDICIONAL

Definição 2.18. *Dada a condicional* p → q*, definimos:*

a) *Proposição recíproca de* p → q *a proposição:* q → p
b) *Proposição contrária (ou inversa) de p → q a proposição:* ~p → ~q
c) *Proposição contra positiva (ou contrária da recíproca) de* p → q *a proposição:* ~q → ~p

Note que podemos estabelecer a seguinte equivalência lógica, propriedade fundamental da conjunção e base, como veremos em maiores detalhes no capítulo seguinte, do *método demonstração por contra posição*:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

De fato, para justifica-la basta construir a tabela verdade abaixo:

Tabela 2.14 – Contra positiva

p	→	q	⇔	~	q	→	~	p
V	V	V	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F	V	V	F
1	7	2	9	5	3	8	6	4

Fonte: Elaborada pelo autor.

Mostrando com isso que temos uma tautologia pra bicondicional o que prova equivalência lógica apresentada.

2.10 NEGAÇÃO CONJUNTA E NEGAÇÃO DISJUNTA DE DUAS PROPOSIÇÕES

Definição 2.19. *Denomina-se negação conjunta, e respectivamente, negação disjunta de duas proposições p e q, a proposição* ~p ∧~q e *a proposição* ~p ∨~q.

Indica-se a primeira por p ↓ q e a segunda por p ↑ q.

Definidas dessa maneira note que p ↓ q só é verdadeiro quando *p e q* são ambas falsas. Enquanto que p ↑ q é falsa somente quando ambas são verdadeiras. Na tabela verdade temos:

Tabela 2.15 – Negação conjunta

~	p	∧	~	q
F	V	F	F	V
F	V	F	V	F
V	F	F	F	V
V	F	V	V	F
3	1	5	4	2

Tabela 2.16 – Negação disjunta

~	p	∨	~	q
F	V	F	F	V
F	V	V	V	F
V	F	V	F	V
V	F	V	V	F
3	1	5	4	2

Os símbolos ↓ e ↑ são chamados conectivos de SCHEFFER[4].

Usando os conectivos de SCHEFFER, teremos:

Tabela 2.17 - Scheffer

p	q	p ↓ q	p ↑ q
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Fonte: Elaboradas pelo autor.

É fácil ver que, utilizando tabelas verdade, a negação conjunta e a negação disjunta gozam da *propriedade comutativa*, isto é,

$$p \downarrow q \Leftrightarrow q \downarrow p \quad \text{e} \quad p \uparrow q \Leftrightarrow q \uparrow p.$$

[4] Henry Maurice Sheffer (Ucrânia, 1882 — EUA, 1964) foi um lógico estado-unidense. A principal contribuição de Sheffer à lógica, e (sobre seus protestos) à filosofia, foi sua demonstração da influência que a notação exerce na aparência das estruturas relacionais e, com isso, é claro, nas formas em que os problemas se apresentam.

2.11 PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES LÓGICAS

A seguir mais equivalências e implicações, que também são consideradas importantes regras de inferência, agora separadas por operação lógica.

Proposição 2.3(Propriedades da Conjunção). *Sejam p, q e r proposições quaisquer, c uma contradição e t uma tautologia, valem as seguintes implicações e equivalências lógicas:*

1. $p \wedge p \Rightarrow p$	(Idempotente)
2. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	(Comutativa)
3. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	(Associativa)
4. $p \wedge t \Leftrightarrow p$	(Elemento neutro, t tautologia)
5. $p \wedge c \Leftrightarrow c$	(Elemento absorvente, c contradição)

Proposição 2.4(Propriedades da Disjunção). *Sejam p, q e r proposições quaisquer, c uma contradição e t uma tautologia, valem as seguintes equivalências lógicas:*

6. $p \vee p \Leftrightarrow p$	(Idempotente)
7. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	(Comutativa)
8. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	(Associativa)
9. $p \vee t \Leftrightarrow t$	(Elemento absorvente, t tautologia)
10. $p \vee c \Leftrightarrow p$	(Elemento neutro, c contradição)

Proposição 2.5(Propriedades da Conjunção e da Disjunção). *Sejam p, q e r proposições quaisquer, valem as seguintes equivalências lógicas:*

11. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(Distributiva da conjunção em disjunção)
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(Distributiva da disjunção em conjunção)
12. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	(Absorção)
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	
13. $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	(Regras DE MORGAN[5])
$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$	
14. $\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$	(Negação da Condicional em conjunção)

[5] Augustus De Morgan (Madura, Índia, 27 de junho de 1806 — Londres, 18 de março de 1871) foi um matemático e lógico britânico. Formulou as leis de De Morgan e foi o primeiro a introduzir o termo e tornar rigorosa a ideia da indução matemática.

15. $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ (Negação da Bicondicional em disjunção)

Proposição 2.6(Propriedades da Condicional). *Sejam p, q e r proposições quaisquer, valem as seguintes equivalências lógicas:*

16. $p \rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ (Distributiva em relação a conjunção)
17. $p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ (Distributiva em relação a disjunção)

Proposição 2.7(Propriedades da Bicondicional). *Sejam p, q e r proposições quaisquer, valem as seguintes equivalências lógicas:*

18. $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \sim q$ (Negação da Bicondicional)
    $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \leftrightarrow q$
19. $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$ (Comutativa)
20. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ (Associativa)

2.12 MÉTODO DEDUTIVO

Todas as implicações e equivalências apresentadas até agora, como vimos, podem ser justificadas facilmente construindo-se a respectiva tabela verdade associada a condicional ou bicondicional tautológica. Tal procedimento de demonstração chamamos, de *método das tabelas-verdade.*

A partir de agora também utilizaremos outro tipo de procedimento, chamado *método dedutivo*, baseado apenas no uso da *álgebra das proposições*, isto é, das regras de inferência fundamentais (proposição 2.2) e propriedades das operações lógicas (proposições 2.3 a 2.7) para, a partir delas, inferir e justificar outras implicações e equivalências lógicas.

Para exemplificar tal método e compará-lo com o das tabelas verdade vamos mostrar, utilizando ambos, a seguinte equivalência lógica:

Exemplo 2.18. $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$, com **c** contradição (Reductio ad absurdum[6])

---

[6] Reductio ad absurdum (latim para "redução ao absurdo", é um tipo de argumento lógico no qual alguém assume uma ou mais hipóteses e, a partir destas, deriva uma consequência absurda ou ridícula, e então conclui que a suposição original deve estar errada.

Demonstração.

- **Método Dedutivo** (versão detalhada)

De fato,

$p \wedge \sim q \to c \quad \Leftrightarrow \quad \sim(p \wedge \sim q) \vee c$ (propriedade 15 operações lógicas)

$\sim(p \wedge \sim q) \vee c \Leftrightarrow \quad \sim(p \wedge \sim q)$ (propriedade 10 operações lógicas)

$\sim(p \wedge \sim q) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim p \vee \sim\sim q)$ (propriedade 13 operações lógicas)

$(\sim p \vee \sim\sim q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \vee q$ (propriedade 8 operações lógicas)

$\sim p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad p \to q$ (propriedade 14 operações lógicas)

Finalmente, aplicando a transitividade da relação de equivalência lógica sucessivas vezes, temos:

$p \wedge \sim q \to c \quad \Leftrightarrow \quad p \to q.$

- **Método Dedutivo** (versão simplificada)

$p \wedge \sim q \to c \quad \Leftrightarrow \quad \sim(p \wedge \sim q) \vee c \Leftrightarrow \quad \sim(p \wedge \sim q) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim p \vee \sim\sim q)$

$\Leftrightarrow \quad \sim p \vee q \Leftrightarrow \quad p \to q.$

- **Demonstração pelo Método das Tabelas-verdade**

Tabela 2.18 – Tabela-verdade simplificada

(p	∧	~	q	→	c)	↔	(p	→	q)
V	F	F	V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F
1	7	6	2	8	3	10	4	9	5

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.13 ARGUMENTOS

Definição 2.20. *Denomina-se argumento toda proposição condicional onde o antecedente é um conjunto finito de proposições* $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ $(n \geq 2)$ *e o consequente uma proposição* q_n. As proposições $p_1, p_2,..., p_{n-1}$ chamam-se *premissas* do argumento, e a proposição final

q_n chama-se *conclusão* do argumento. Indica-se: $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1} \vdash q_n$. O símbolo $\vdash$, é chamado de *traço de asserção*. É também habitual escrever um argumento colocando as premissas sobre um traço horizontal e, em seguida, a conclusão sob o mesmo traço:

(1) p_1		(1) p_1
(2) p_2		(2) p_2
.		.
.	ou ainda	.
.		.
(n-1) p_{n-1}		(n) p_n
___________		___________
$\therefore$ (n) q_n $\quad (n \geq 2)$		$\therefore$ q $\quad (n \geq 1)$

Definição 2.21. *Um argumento que se constitui apenas de duas premissas e uma conclusão é chamado silogismo.*

Exemplo 2.19.

(1) Se é homem, então foi feito a imagem de Deus.

(2) Se foi feito a imagem de Deus, então é perfeito.

____

(3) Logo, se é homem, então é perfeito.

Da definição de argumento e da seguinte equivalência lógica $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ concluímos imediatamente que todas as regras de inferências básicas, e quaisquer outras implicações e equivalências lógicas, sendo as últimas escritas nas formas $(p \leftrightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$ ou $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$, apresentadas são exemplos de argumentos.

Exemplo 2.20. A regra de inferência $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$ conhecida por Silogismo hipotético (proposição 2.8.1 - 7) corresponde ao argumento $(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \vdash p \rightarrow r$.

2.13.1 Critério de Validade de um Argumento

Definição 2.22. *Dizemos que um argumento é válido se, e somente se, a sua conclusão é verdadeira todas as vezes que as premissas são verdadeiras. Nos demais casos é dito não-válido ou sofisma. Não usamos valores lógicos para argumentos. Apenas os termos válido ou não-válido.*

A validade de um argumento depende apenas do modo como estão relacionadas as premissas e a conclusão, isto é, da sua forma e não dos valores lógicos das proposições que o compõe.

Da definição de argumento, validade de um argumento, conjunção e implicação lógica estabelece-se o seguinte *princípio ou critério de validade* de um argumento:

2.5(Princípio de Validade de um Argumento)**.** *Um argumento* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1} \vdash q_n$ *é valido se e somente se a condicional* $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \rightarrow q_n$ *é tautológica.*

Diz-se que $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \rightarrow q_n$ *é a condicional associada ao argumento* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1} \vdash q_n$.

Exemplo 2.21. Seja o argumento $p \rightarrow q , q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$. Temos que a condicional associada a ele é $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ que de acordo com a tabela verdade abaixo é tautológica.

Tabela 2.19 – Tabela-verdade simplificada

(p	→	q)	∧	(q	→	r)	→	(p	→	r)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, de acordo com o critério de validade, o argumento apresentado é valido.

2.14 REGRAS E MÉTODOS PARA DEMONSTRAÇÃO OU DEDUÇÃO DA VALIDADE DE ARGUMENTOS

2.14.1 Demonstração ou Dedução de um Argumento

Definição 2.23. *Dado um argumento* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1} \vdash q_n$, *chama-se demonstração ou dedução de* q_n*, por meio das regras de inferência ou substituição, a partir das premissas* $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, *toda sequência finita de proposições* $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ *tais que cada* x_i *ou é uma premissa ou resulta de proposições anteriores da sequência pelo uso de uma Regra de Inferência, e de tal modo que a última proposição* x_k *da sequência seja a conclusão* q_n *do argumento dado.*

Estabeleçamos que a partir de agora é indiferente utilizar o termo *demonstração ou dedução da validade* de um argumento ou simplesmente *demonstração ou dedução do argumento*. Assim podemos classificar as regras e métodos para demonstração ou dedução de um argumento como segue.

2.14.2 Demonstração ou prova direta

Sendo $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \rightarrow q_n$ a condicional associada ao argumento $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1} \vdash q_n$. Note que, as regras de inferência apresentadas anteriormente podem ser todas, como vimos, associadas a argumentos. Assim as mesmas podem ser utilizadas para 'inferir', isto é, executar as etapas de uma *demonstração* ou *dedução* de outros argumentos. Tal método é conhecido com o nome de *prova direta*.

Exemplo 2.22. Demonstrar a validade do argumento $p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash p \wedge r$ usando o método da prova direta.

Demonstração.

(1) $p \rightarrow (q \wedge r)$ (Premissa)

(2) p (Premissa)

---

(3) $q \wedge r$ (Modus ponens em 1 e 2)

(4) r (Simplificação em 3)

(5) $p \vee r$ (Conjunção em 2 e 4: Conclusão)

2.14.3 Demonstração com uso das tabelas verdade

A verificação da validade ou não validade de argumentos pode ser feita também utilizando o *método das tabelas verdade* da forma apresentada anteriormente, uma vez que cada argumento está ligado a uma condicional associada (implicação) bastando então mostrar que essa implicação é tautológica para provar sua validade e caso contrário sua não validade, isto é, será um sofisma. Porém, podemos tornar esse método mais prático, bastando para isso, construir uma tabela verdade apenas com as premissas e conclusão do argumento dado e da definição de validade verificar se há pelo menos uma linha na qual o valor lógico da conclusão é (F) e o valor lógico de todas as premissas nessa mesma linha é (V). Havendo o argumento é não válido, caso contrário, será válido.

Exemplo 2.23. Demonstrar a validade do argumento $p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash p \wedge r$ usando o método das tabelas verdade.

Demonstração. Construamos a seguinte tabela verdade

Tabela 2.20 – Tabela verdade validade de argumento

((p	→	(q	∧	r))	∧	p)	→	(p	∧	r)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando todas as linhas em que as premissas são simultaneamente verdadeiras, neste caso só a segunda linha e em seguida verificando que o valor lógico da conclusão nesta linha é verdadeiro, conclui-se que o argumento é válido.

Ou ainda também poderíamos analisar se a implicação associada é tautológica, que pode ser visto comparando as colunas 6 e 9(ou 1). Daí, novamente conclui-se que o argumento é válido.

É fácil ver que, dependendo da forma de fazer escolhida, poderíamos suprimir algumas colunas da tabela apresentada.

Exemplo 2.24. Demonstrar a *não validade* do argumento $(p \rightarrow q) \vee \sim (r \wedge s), p \vee s \vdash r \rightarrow q$ pelo método das tabelas- verdade.

Demonstração.

Parar demonstrar a não validade, de acordo tal método, devemos apresentar pelo menos uma linha na qual o valor lógico da conclusão é (F) e o valor lógico de todas as premissas nessa mesma linha é (V). O que pode ser feito sem ter de se construir toda a tabela verdade, mas apenas apresentando tal linha que pode ser obtida, por tentativas, com a seguinte atribuição de valores lógicos as proposições que compõem o argumento dado mediante uma tabela um pouco diferente da convencional na qual as proposições e os valores lógicos "trocam" de lugares:

V	**F**
r	q
s	p

O preenchimento da primeira linha é justificado pelo fato de que $r \rightarrow q$ tem valor lógico (F) se, e somente se, r tem valor lógico (V) e q tem valor lógico (F). Restando-nos apenas duas opções para a segunda linha, que rapidamente podemos concluir que tem a distribuição dada acima, que torna tanto a primeira quanto a segunda premissas verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento dado não é válido.

2.14.4 Demonstração com uso da regra de substituição

Há ainda argumentos cuja validade não pode ser demonstrada, verificada ou testada apenas com o uso das regras de inferência apresentadas até aqui nem tão pouco é conveniente o uso de tabelas verdades sendo necessário recorrer a um princípio de inferência adicional, a *regra da substituição*.

2.6(Princípio ou Regra da Substituição). *Uma proposição qualquer P ou apenas uma parte de P pode ser substituída por uma proposição equivalente, e a proposição R que assim se obtém é equivalente à P.*

As equivalências utilizadas na regra da substituição são as equivalências apresentadas inicialmente como propriedades de algumas das operações lógicas anteriormente definidas.

É importante notar que podemos combinar as regras de inferência e substituição, notando apenas que a diferença na aplicação das regras de inferência e a regra da substituição é que a primeira só pode ser aplicada a linhas completas de uma demonstração ou dedução, ao passo que a segunda pode ser aplicada tanto a linhas completas como a partes de linhas completas.

Exemplo 2.25. Demonstrar, fazendo uso da regra da substituição, que é válido o argumento $p \rightarrow \sim q, q \vdash \sim p$

Demonstração.		
	(1) $p \rightarrow \sim q$	(Premissa)
	(2) q	(Premissa)
	(3) $\sim\sim q \rightarrow \sim p$	(Substituição contra positiva de 1 em 3)
	(4) $q \rightarrow \sim p$	(Substituição dupla negação em 3)
	(5) $\sim p$	(Modus ponens em 2 e 4: Conclusão)

Definição 2.24. *Duas ou mais proposições que não podem ser simultaneamente verdadeiras dizem-se inconsistentes.*

Definição 2.25. *Um argumento se diz inconsistente se as premissas não podem ser simultaneamente verdadeiras, isto é, se as premissas forem inconsistentes.*

Exemplo 2.26. Mostre, utilizando o método das tabelas verdade, que as proposições $\sim (p \vee \sim q)$, $p \vee \sim r$ e $q \rightarrow r$ são inconsistentes.

Demonstração.

De fato, construindo a tabela verdade de tais proposições percebemos que em nenhuma linha nas três colunas destacadas dessa tabela admite-se simultaneamente o valor lógico V para cada uma das três proposições dadas. Portanto, as proposições são inconsistentes.

Tabela 2.21 – Tabela verdade proposições inconsistentes

~	(p	∨	~	q)	p	∨	~	r	q	→	r
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 2.27. Demonstre, utilizando as regras de inferência e/ou substituição, que as proposições ~ (p ∨ ~q), p ∨ ~r, q → r são inconsistentes.

Demonstração.

De fato, podemos deduzir do conjunto das proposições dadas uma contradição qualquer, do tipo p ∧ ~p mediante o uso das regras de inferência e regras de substituição, que a partir de agora chamaremos de *regras de dedução.* Assim, temos, sucessivamente:

(1) ~ (p ∨ ~q)

(2) p ∨ ~r

(3) q → r

---

(4)	~ p ∧ ~ ~ q	Regras de Morgan em (1)
(5)	~ p ∧ q	Dupla Negação em (4)
(6)	q	Simplificação em (5)
(7)	r	Modus Ponens em (3 e 6)
(8)	~ p	Simplificação em (5)
(9)	~ r	Silogismo Disjuntivo em (2,8)
(10)	r ∧ ~ r	Conjunção em (7,9)

Contradição a própria em (10)

Como as regras de dedução preservam a verdade, a contradição que se obtém prova que estas três proposições não podem ser conjuntamente verdadeiras. Portanto, as proposições são inconsistentes.

2.14.5 Demonstração Condicional

Método utilizado para demonstrar a validade de um argumento cuja conclusão tem a forma condicional, isto é, $p_1, p_2, ..., p_n \vdash q \rightarrow r$. É baseado no princípio fundamental de que um argumento é válido se e somente se a condicional associada, isto é, $(p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n) \rightarrow (q \rightarrow r)$ que, pela *Regra de Importação* é equivalente a $[(p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n) \wedge q] \rightarrow r$, é tautológica. Isto é, mostrar que o argumento $p_1, p_2, ..., p_n, q \vdash r$ é válido.

Exemplo: **2.28.** Demonstrar a validade do seguinte argumento

$$p \vee (q \rightarrow r), \sim r \vdash q \rightarrow p$$

Demonstração.

Do método de demonstração condicional basta provar que

$$p \vee (q \rightarrow r), \sim r, q \vdash p$$

Isto é, que a implicação $p \vee (q \rightarrow r) \wedge \sim r \wedge q \rightarrow p$ é tautológica.

Utilizemos uma tabela verdade para isso:

Tabela 2.21 – Tabela verdade proposições inconsistentes

(p	∨	(q	→	r)	∧	~	r)	∧	q	→	p
V	V	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	V	F	F	F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.14.6 Demonstração Indireta ou Redução ao Absurdo

Dado um argumento qualquer $p_1, p_2, ..., p_n, \vdash q$ tal método consiste em supor falsa a conclusão q, isto é, supor a negação $\sim q$ verdadeira e daí deduzir uma contradição qualquer *c* a partir das premissas $p_1, p_2, ..., p_n$ e $\sim q$, isto é, demonstrar que é válido o argumento: $p_1, p_2, ..., p_n, \sim q \vdash c$. Daí, pelo método de demonstração condicional, o argumento $p_1, p_2, ..., p_n \vdash \sim q \rightarrow c$ também será válido. Por outro lado, das *Leis de Morgan*, da *dupla negação* e *elemento neutro da disjunção*, temos que $\sim q \rightarrow c \Leftrightarrow \sim\sim q \vee c \Leftrightarrow q \vee c \Leftrightarrow q$. Logo, por transitividade, $\sim q \rightarrow c \Leftrightarrow q$. Assim, substituindo a última equivalência em $p_1, p_2, ..., p_n \vdash \sim q \rightarrow c$ que é válido teremos portanto, $p_1, p_2, ..., p_n, \vdash q$ também válido.

Segundo POLYA [19], autor do livro A arte de resolver problemas:

> A demonstração por absurdo mostra a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante. É um procedimento matemático, mas se assemelha à ironia, que é um procedimento predileto do satirista. A ironia adota, com todas as aparências, uma determinada opinião, que é exagerada e repetida até conduzir a um manifesto absurdo.

Note que tal método consiste na seguinte equivalência lógica entre as condicionais associadas a cada um dos argumentos:

$$p_1, p_2, ..., p_n, \vdash q$$

e

$$p_1, p_2, ..., p_n, \sim q \vdash c$$

que são respectivamente:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n \rightarrow q$$

e

$$p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n \wedge \sim q \rightarrow c$$

o que também podemos provar facilmente, por substituição, considerando a proposição composta $p \Leftrightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge .... \wedge p_n)$. Daí temos que mostrar agora a equivalência lógica entre as condicionais abaixo (o que justifica o nome dado a regra de inferência 12 da proposição 2.8.1 *Redução ao Absurdo*).

$$p \rightarrow q \qquad \text{e} \qquad p \wedge \sim q \rightarrow c$$

O que pode ser feito pelo método das tabelas verdade.

Tabela 2.22 – Tabela verdade Redução ao Absurdo

p	→	q	↔	p	∧	~	q	→	c
V	V	V	V	V	F	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	F	V	F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 2.29. Demonstre que o argumento abaixo é válido, utilizando o método de demonstração indireta ou redução ao absurdo.

Se $x = \sqrt{2}$, então x é irracional. ($\sqrt{2}$ é irracional)

Demonstração.

Em símbolos, temos: p: $x = \sqrt{2}$; q: x é irracional; $p \rightarrow q$: Se $x = \sqrt{2}$, então x é irracional. Utilizando o método de redução ao absurdo, isto é, sabendo que $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow c$. Basta provarmos $p \wedge \sim q \rightarrow c$, que estaremos demonstrando $p \rightarrow q$. Isto é, basta provarmos que:

Se $x = \sqrt{2}$ e x é racional, então temos uma contradição.

De fato,

(1) $x = \sqrt{2}$	(Premissa)
(2) $x = a/b$, com a, b inteiros e $b \neq 0$	(Premissa)
(3) $\sqrt{2} = a/b$	(Silogismo hipotético em 1 e 2)
(4) $2 = a^2/b^2$	(Substituição: elevando ao quadrado em 3)
(5) $2a^2 = b^2$	(Substituição: multiplicação por a^2 em 4)
(6) $2a^2 \neq b^2$	(Teorema fundamental da aritmética em 5)
(7) $2a^2 = b^2 \wedge 2a^2 \neq b^2$	(Conjunção em 5 e 6)
(8) c	(Contradição em 7: Conclusão)

Portanto, pelo método de redução ao absurdo, se $x = \sqrt{2}$, então x é irracional.

Ou ainda:

De fato, $x = \sqrt{2}$ e x racional $\Rightarrow\sqrt{2} = a/b \Rightarrow a^2/b^2 = 2 \Rightarrow 2a^2 = b^2$ com a, b números inteiros e $b \neq 0$, o que obviamente é uma contradição uma vez que, pelo *Teorema Fundamental Da Aritmética*, *é única a decomposição de um número em fatores primos* e como na última igualdade vê-se claramente que o número de fatores 2 a esquerda da igualdade é um número ímpar enquanto que do lado direito a quantidade de fatores 2 é um número par.

Portanto, pelo método de demonstração indireta ou redução ao absurdo, o argumento: "*Se* $x = \sqrt{2}$, *então x é irracional*" é válido!

2.14.7 Demonstração por contraexemplo

Como vimos, na demonstração de um argumento com uso de tabelas verdade, se há pelo menos uma linha na qual o valor lógico de sua conclusão é (F) e o valor lógico de todas as suas premissas nessa mesma linha é (V) o argumento é não válido. Bastando obter a referida linha para provar tal fato. Ou alternativamente, basta apenas encontrar um *argumento da mesma forma* e que tenha, no entanto, premissas verdadeiras e conclusão falsa. Esta maneira de demonstrar a não-validade de um argumento chama-se *Método do contraexemplo*.

Exemplo 2.30. Verificar a validade do argumento utilizando o método do contraexemplo:

Se $x = 0$ e $y = z$, então $y > 1$	(Premissa)
$y < 1$	(Premissa)

Portanto, $y \neq z$	(Conclusão)
Fazendo $x = y = z = 0$, temos:	
Se $1 = 0$ e $0 = 0$, então $0 > 1$	(Premissa verdadeira)
$0 < 1$	(Premissa verdadeira)

Portanto, $0 \neq 0$	(Conclusão falsa)

Note que ambos os argumentos acima têm a mesma forma: $p \wedge q \rightarrow r, \sim r \vdash \sim q$, porém claramente no segundo as premissas são verdadeiras, mas a conclusão obviamente falsa. Logo, o segundo argumento é um contraexemplo do primeiro. Portanto, esse argumento é não-válido (sofisma). Consequentemente, qualquer argumento da forma: $p \wedge q \to r, \sim r \vdash \sim q$ é não-válido.

2.14.8 Demonstração por contraposição

Dado um argumento qualquer $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$ tal método consiste em transformar a condicional associada ao argumento dado $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$ na sua contra positiva $\sim q \to \sim (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$ e demonstrá-la. Logo, como a contra positiva de uma condicional equivale logicamente a condicional, o argumento estará demonstrado.

Interessante notar que tal método é usado quando a contra positiva obtida for mais 'simples' de ser demonstrada que a condicional associada dada.

Exemplo 2.31. Demonstrar, por contraposição, o seguinte argumento abaixo.

Se x^2 é um ímpar, então x é ímpar.

Demonstração.

Em símbolos, temos: p: x^2 é um ímpar; q: x é ímpar; $p \to q$: Se x^2 é um ímpar, então x é ímpar. Note que, $\sim q$: x é par; $\sim p$: x^2 é par. Daí, sua contra positiva é dada por $\sim q \to \sim p$: Se x é par, então x^2 é par. Note que esta última pode ser demonstrada facilmente.

De fato,

(1)	x é par	(Premissa)
(2)	$x = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$	(Substituição em 1: definição paridade)
(3)	$x^2 = 2.2n^2$	(Substituição de 2: elevando ao quadrado)
(4)	x^2 é par	(Substituição de 3: definição paridade - Conclusão)

Portanto, pelo método da contraposição, 'se x^2 é um ímpar, então x é ímpar' é um argumento válido.

2.14.9. Demonstração por vacuidade

Existem argumentos que, pela sua construção, facilmente percebe-se que não possuem contraexemplos, já que a condicional associada ao argumento tem como antecedente uma contradição. Quando isso ocorre, dizemos que o argumento é válido por *vacuidade*.

Exemplo 2.32. Os argumentos abaixo são todos válidos por vacuidade.

- $\sim (p \vee \sim p) \vdash q$
- Se um pentágono tem quatro lados, então sua área é 2021.
- Se um número natural é menor do que 0 então ele é múltiplo de 2.
- Se é idoso com 200 anos de idade, então não pega COVID19.

Exemplo 2.33. Para todo x real, se $x^2 + 1 < 0$ então $x^5 \geq 4$.

Demonstração.

Seja x um real arbitrário. Sabemos que $x^2 \geq 0$, logo $x^2 + 1 > 0$. Portanto, por vacuidade, se $x^2 + 1 < 0$ então $x^5 \geq 4$.

Notemos que a contra positiva do teorema acima afirma que se $x^5 < 4$ então $x^2 + 1 \geq 0$. Como a conclusão é sempre verdadeira a implicação também será.

2.14.10 Demonstração por exaustão

Método aplicado em argumentos com condicional associada da forma $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$ que equivale a $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \rightarrow q)$, isto é, quando as suas premissas são um número finito de disjunções. Tal método consiste em demonstrar uma a uma todas as disjunções separadamente utilizando o método de demonstração direta. Fazendo com isso n demonstrações diretas exaurindo todos os casos a serem analisados concluindo assim a demonstração do argumento.

Exemplo 2.33. Se k é um número inteiro da forma 3k, ou 3k+1, ou 3k+2, então o produto deste número com seus dois sucessores é múltiplo de 3.

Demonstração.

Observe que a hipótese(premissa) (p) é constituída pelas seguintes disjunções de sentenças: números inteiros p_1 : 3k ou p_2 : 3k + 1 ou p_3 : 3k + 2, devemos concluir a seguinte tese(conclusão) (q): o produto deste número com seus dois sucessores é múltiplo de 3. Assim devemos por exaustão demonstrar os seguintes teoremas, isto é, Se p_1 (vale), ou se p_2 (vale), ou se p_3 (vale), então q (vale). De fato, tal teorema tem uma demonstração simples e basta notar que se o número é 3k (vale), então $3k(3k + 1)(3k + 2) = 3(k(3k + 1)(3k + 2))$ é múltiplo de 3 (vale), e se o número é 3k + 1 (vale), então $(3k + 1)(3k + 2)(3k + 3) = 3((3k + 1)(3k + 2)(k + 1))$ é múltiplo de 3 (vale), e se o número é $3k+2$ (vale), então $(3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3((3k+2)(k+1)(3k+4))$, é múltiplo de 3 (vale), portanto a validade dos teoremas parciais garante a validade do teorema de hipóteses(premissas) disjuntivas.

2.14.11 Demonstração de argumentos com conclusão conjuntiva

Argumentos com conclusão conjuntiva são argumentos com condicional associada da forma $p \rightarrow (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n)$ que equivale a $(p \rightarrow q_1) \wedge (p \rightarrow q_2) \wedge \ldots \wedge (p \rightarrow q_n)$, isto é, quando a sua conclusão é expressa por um número finito de conjunções. A demonstração de argumentos desse tipo consiste em mostrar que a premissa (p) implica em cada uma das conclusões (q_n), sendo $n = 1, 2, \ldots, n$; como a equivalência dada sugere.

Exemplo 2.34. Se um número é múltiplo de 12, então é múltiplo de 3 e de 4.

Demonstração.

Usando a demonstração direta basta provar que se um número é múltiplo de 12, então é múltiplo de 3, e se um número é múltiplo de 12, então é múltiplo de 4. E é fácil notar que se N é múltiplo de 12, então é divisível por 12, e pode ser escrito $N = 12 \cdot m$, sendo m inteiro. Desta maneira, se $N = 12m$ (vale), então 3 divide N (vale), logo N é múltiplo de 3 e se $N = 12m$ (vale), então 4 divide N (vale), logo N é múltiplo de 4, portanto se um número que é múltiplo de 12, então é múltiplo de 3 e de 4.

2.14.12 Demonstração de argumentos com conclusão disjuntiva

Argumentos com conclusão disjuntiva são argumentos com condicional associada da forma $p \rightarrow (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n)$ que equivale a $(p \rightarrow q_1) \vee (p \rightarrow q_2) \vee \ldots \vee (p \rightarrow q_n)$, isto é, quando a sua conclusão é expressa por um número finito de disjunções. A demonstração de argumentos desse tipo consiste em mostrar que a premissa (p) implica em cada uma das conclusões (q_n), sendo $n = 1, 2, \ldots, n$; como a equivalência dada sugere.

Exemplo 2.35. Se x e y são números reais tais que $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$.

Demonstração.

Considere a hipótese x, y são números reais onde $x^2 = y^2$, mostre que a tese $x = y$ ou $x = -y$. Para essa demonstração basta usar a manipulação algébrica dos produtos notáveis, ou seja, $x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$ ou $x + y = 0$, ou seja $x = y$ ou $x = -y$.

2.15 SENTENÇAS ABERTAS E QUANTIFICADORES

Definição 2.26. Chama-se **sentença aberta com uma variável x em um conjunto A** ou apenas **sentença aberta em A**, uma expressão $p(x)$ tal que p é uma proposição qualquer e $p(a)$ é falsa ou verdadeira para todo $a \in A$, não sendo possível determinar o valor lógico de $p(x)$ a menos se referida um elemento particular de A.

Exemplo 2.36. São sentenças abertas no conjunto IN:

- $2x + 3 = 10$
- $x + 2 > 5$
- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- x é raiz quadrada de 36

Definição 2.27. Chama-se **conjunto verdade** de uma sentença aberta $p(x)$ em um conjunto A, o conjunto de todos os elementos $a \in A$ tais que $p(a)$ é uma proposição verdadeira, isto é,

$$\{x|\ x \in A \wedge p(x) = V\}.$$

Exemplo 2.37. $x^2 - 5x + 6 = 0$ em IR tem conjunto verdade: $\{2, 3\}$.

Note que a frase “Este número não é primo” também é uma sentença aberta. Além disso uma sentença aberta pode conter mais de uma variável livre por exemplo: $x^2 + y^2 > 1$.

Uma das maneiras de transformar uma sentença aberta numa sentença, é quantificar, em um determinado conjunto, cada variável livre que aparece na sentença aberta. Ou seja, indicar a quantidade de elementos de determinado conjunto que gozam da propriedade correspondente a cada variável que aparece na sentença aberta. Uma das formas de conseguir isso e utilizando as palavras ‘**existe**’ ou a expressão ‘**para todo**’.

Exemplo 2.38. Uma maneira de transformar a sentença aberta, ‘$2x + 6 = 3$’, em uma proposição, seria escrever:

"Existe $x \in R$, tal que $2x + 6 = 3$."

Dessa maneira, temos uma proposição!

Semelhantemente, poderíamos ter escrito

"Para todo $x \in R$, temos $2x + 6 = 3$",

frase que agora também é uma proposição.

Observe que a primeira das duas últimas sentenças ´ e verdadeira, enquanto a segunda é falsa. Os termos '*para todo*' e '*existe*' são, com muita razão, chamados, respectivamente, de *quantificador universal* e *quantificador existencial* e são, respectivamente, denotados pelos símbolos $\forall$ e $\exists$. Os quantificadores tem uma importância muito grande dentro da Linguagem Matemática. O quantificador universal é usado para definir propriedades que valem para todos os elementos de um conjunto. Já o quantificador existencial é usado para definir propriedades que valem para pelo menos um elemento de um conjunto ou que vale para apenas um. Nesse último caso é chamado *quantificador existencial de unicidade*, denotado pelo símbolo $\exists!$ Lê-se: '*existe um e um só*'.

Note ainda que outras expressões que podem substituir 'para todo' são, por exemplo: '*dado*', '*para qualquer*', '*(para) qualquer que seja*', '*para cada*'. Outras expressões que podem substituir '*existe*' são, por exemplo: '*existe algum*', '*existe pelo menos um*'.

As operações lógicas e propriedades que definimos para proposições no início deste capítulo estendem-se de forma natural à sentenças abertas quantificadas que podem ser demonstradas utilizando-se qualquer um dos métodos de demonstração apresentados até aqui, em particular, usaremos o *método de demonstração indireto* ou *redução ao absurdo* nas demonstrações de sentenças quantificadas existencialmente com a expressão '*existe um e um só*' conhecidas por *demonstrações de unicidade* e simplesmente apresentar pelo menos um exemplo verdadeiro, nas demonstrações de sentenças quantificadas existencialmente com a expressão '*existe pelo menos um*' conhecidas por *demonstração de existência*.

2.16 COMO NEGAR PROPOSIÇÕES

Baseando-nos nas regras de inferências e noutras equivalências lógicas já estabelecidas destacamos, nos exemplos seguintes, processos para negar proposições.

Exemplo 2.39. *Negação de uma conjunção*. Tendo em vista que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Exemplo 2.40. *Negação de uma disjunção.* Tendo em vista que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$.

Exemplo 2.41. *Negação de um condicional.* Já que $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \rightarrow q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.

Exemplo 2.42. *Negação de proposições quantificadas.*

a) Uma sentença quantificada com o quantificador universal, do tipo $(\forall x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador universal pelo existencial e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\exists x)(\sim p(x))$. Onde $(\forall x)(p(x))$ lê-se: para todo x temos $p(x)$; e $(\exists x)(\sim p(x))$ lê-se: existe x tal que $\sim p(x)$.
b) Uma sentença quantificada com o quantificador existencial, do tipo $(\exists x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador existencial pelo universal e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\forall x)(\sim p(x))$. Onde $(\exists x)(p(x))$ lê-se: existe x tal que $p(x)$; e $(\forall x)(\sim p(x))$ lê-se: para todo x temos $\sim p(x)$.

3 O DESENVOLVIMENTO DE UMA TEORIA AXIOMÁTICA

O texto dessa seção foi adaptado de [6] e [17].

A criação de certos tipos de conjuntos e teorias matemáticas durante muito tempo dependeu diversas vezes única e exclusivamente das necessidades dos povos, tal processo de criação foi chamado de *processo sintético*. Desenvolvida a teoria pelo processo sintético, os matemáticos sentiam a necessidade de eliminar dessa teoria causas estranhas à matemática e reconstruir a teoria somente com recursos da Lógica e sem nenhuma influência externa. Tal processo foi denominado *processo analítico* ou *axiomático*.

Uma teoria desenvolvida axiomaticamente é formada por: *noções não definidas* ou *entes primitivos*, *definições*, *proposições não demonstradas* ou *axiomas*, *regras de inferência* e *proposições demonstradas*: *lemas, teoremas e corolários* que definiremos a seguir.

Uma teoria axiomática é dita *consistente*, se nela não for possível deduzir afirmações contraditórias. E dita *inconsistente*, caso contrário.

Uma teoria matemática desenvolvida axiomaticamente é apresentada com eficácia, uma vez que a princípio, uma das vantagens de empregá-la, além de fornecer um tratamento fundamentado num rigor logico, é que, em geral, não se pede dos leitores conhecimentos extras ou qualquer experiencia matemática anterior naquele assunto para compreensão do mesmo.

Definir é enunciar os atributos essenciais e específicos de “uma coisa”, de modo que a torne inconfundível com outra. Para que o objetivo de uma definição seja atingido, devem ser observados dois aspectos: uma definição só pode conter termos que foram definidos previamente e uma definição de um objeto não pode conter um termo cuja definição contenha referência ao próprio objeto.

Entretanto, é possível fugir dessas armadilhas ou círculos viciosos parando nas definições seguintes a objetos matemáticos mais simples, cujos conceitos se aceitem naturalmente, sem explicações, e que sejam evidentes por si mesmo. Nesse momento, não definimos mais estes primeiros objetos, e os aceitamos como noções primitivas ou entes primitivos.

As *noções primitivas* são conceitos adotados sem ser preciso defini-los. As noções primitivas não surgem de opiniões pessoais isoladas, elas são frutos da experiencia, da observação e de um certo "consenso coletivo". Por esses motivos, as vezes também são chamadas de noções comuns.

Axioma ou *postulado* é uma sentença que não é uma definição, mas é aceita sem precisar ser justificada dada sua simplicidade sendo evidente por si mesma. São usados sempre em menor número possível no desenvolvimento de uma teoria e são independentes, isto é, nenhum deles pode ser deduzido dos demais.

Regras de Inferência são regras estabelecidas previamente numa teoria axiomática acerca da manipulação de definições e axiomas para desenvolver tal teoria, deduzindo mais regras e afirmações iniciais e a partir destas outras.

Definição 3.1. *Um teorema é uma sentença matemática condicional 'Se P, então Q' ou implicativa* '$P \Rightarrow Q$'*, da qual existe uma demonstração que garanta sua validade. Nesse caso, chama-se hipótese a sentença P e tese a sentença Q.*

Tal proposição condicional recebe essa denominação devido a sua relevância dentro da teoria ou no contexto histórico em que surgiu, podendo esses ser unidos a outras proposições, definições e/ou entes primitivos formando assim novas proposições que podem ser demonstradas, isto é, possíveis novos teoremas.

Um teorema é considerado um argumento válido que tem condicional associada da forma $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q$, com n natural tal que $n \geq 1$. As premissas $P_1, \ldots, P_n$ são as hipóteses do teorema e a conclusão Q é sua tese.

Muitas vezes, dependendo do contexto e para não abusar da palavra 'teorema', que frequentemente aparece na Matemática, alguns teoremas recebem outros nomes:

Definição 3.2. *Corolário é um teorema obtido como consequência de outro recém provado*.

Neste caso, o segundo teorema é chamado corolário do teorema provado;

Definição 3.3. *Lema é um teorema usado para provar outro que lhe sucede, isto é, um teorema auxiliar ou preparatório, que é usado na demonstração de outro teorema.*

Definição 3.4. *Proposição* é um teorema que não é central no contexto e tem importância limitada.

Exemplo 3.1. *A Geometria Euclidiana Plana* do Ensino Fundamental é um exemplo de teoria matemática desenvolvida axiomaticamente, sendo:

- Ponto, reta e plano são as *noções não definidas* ou *entes primitivos*;
- Segmento de reta, semirreta, segmentos colineares, ângulo, triângulo e circunferência são as denominações dadas a alguns exemplos de *definições*;
- Os Postulados da existência, determinação e Inclusão (anexo I – itens 4, 7 e 8) *são* exemplos de *proposições não demonstradas ou axiomas*;
- O teorema do ângulo externo de um triangulo (anexo I – item 60), teorema da desigualdade triangular (anexo I – item 65), Teorema de Tales[7] (anexo I – item 97) e o Teorema de Pitágoras[8] (anexo I – item 110) são exemplos de *proposições demonstráveis* ou *teoremas*.

Exemplo 3.2. *Mecânica Newtoniana* do Ensino Médio é um exemplo de teoria física desenvolvida axiomaticamente, sendo:

- tempo, distância e massa são exemplos de *noções não definidas* ou *entes primitivos*;
- velocidade, aceleração e movimento uniforme são as denominações dadas a alguns exemplos de *definições*;
- "não há movimento nem repouso absolutos" é um exemplo de *proposição não demonstrada* ou *axioma*;
- A função horária do espaço (s) do movimento uniforme é dada por $s = s_0 + v.t$ com velocidade (v) e tempo (t), e a função horária do espaço do movimento

---

[7] Tales de Mileto, (em grego: Θαλῆς ὁ Μιλήσιος; c.624 — 546 a.C.) foi um filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga, considerado, por alguns, o primeiro filósofo ocidental.

[8] Pitágoras de Samos (em grego: Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, ou apenas Πυθαγόρας; Πυθαγόρης em grego jônico; c. 570 – c. 495 a.C.) foi um filósofo e matemático grego jônico creditado como o fundador do movimento chamado Pitagorismo.

uniformemente variado é dada por $s = s_0 + v_0 . t + (a.t^2)/2$ com aceleração (a) são exemplos de *proposições demonstradas* ou *teoremas*.

Exemplo 3.3. *A Teoria dos Conjuntos* do ensino médio é um exemplo de teoria matemática desenvolvida axiomaticamente, sendo:

- Conjunto é um exemplo de *noção não definida* ou *ente primitivo*.
- Elemento, conjuntos disjuntos e subconjunto de um conjunto são as denominações dadas a alguns exemplos de *definições*.
- 'Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos.' É um exemplo de *proposição não demonstrada* ou *axioma* (da extensão).
- "A união, a interseção e a diferença simétrica entre conjuntos são operações comutativas" e "Existe um único conjunto vazio" são exemplos de *proposições demonstradas* ou *teoremas.*

Numa teoria desenvolvida axiomaticamente a demonstração de um teorema é feita deduzindo sua tese a partir de sua(s) hipótese(s) apresentada(s) fazendo uso de axiomas, definições, teoremas já demonstrados, passos da demonstração que já foram previamente provados, regras de inferência estabelecidas inicialmente e as técnicas de demonstração apresentadas. Dependendo da preferência de quem organiza a apresentação da teoria, uma determinada proposição pode ser adotada como axioma ou então provada como teorema, a partir de outra proposição que a substituiu na lista dos axiomas. A seguir veremos um resumo da teoria matemática dos conjuntos e sua relação com a lógica e em particular o conjunto dos números naturais, onde os conceitos primitivos são número natural e sucessor e os axiomas são os de Peano[9].

[9] Giuseppe Peano (27 de agosto de 1858 – Turim, 20 de abril de 1932) foi um matemático e glottologista italiano.

4 TEORIA DOS CONJUNTOS E SUA RELAÇÃO COM A LÓGICA

4.1 A NOÇÃO DE CONJUNTO

A teoria exposta nesse capítulo apresenta uma noção da teoria dos conjuntos relacionada à Lógica e pode ser encontrada com maiores detalhes em [14].

O objetivo desta seção é introduzir a linguagem básica de conjuntos, sem se aprofundar em Teoria de Conjuntos. Em particular, visamos evidenciar as relações entre a linguagem básica da álgebra de conjuntos com a linguagem básica de lógica matemática de proposições. Assim, vamos assumir o conceito conjunto como uma noção primitiva, sem definição. Podemos, neste caso, simplesmente pensar em um conjunto como estamos acostumados, a saber, como sendo formado por seus elementos. Partindo desta noção primitiva sem definição, definiremos os outros conceitos e demonstraremos os principais teoremas associados.

Toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjuntos é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas. Um conjunto é formado por elementos. Na verdade, podemos dizer mais do que isso. Um conjunto é definido por seus elementos (e nada mais). Este fato se reflete claramente na noção de igualdade entre conjuntos: dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos. Isto é, não pode haver dois conjuntos diferentes que tenham os mesmos elementos. Em Teoria de Conjuntos, esta propriedade corresponde ao chamado *Axioma da Extensão*.

Dados um conjunto A e um objeto qualquer a, a única pergunta cabível é se a é ou não *um elemento do conjunto* A. Esta pergunta só admite duas respostas possíveis: *sim* ou *não*. No caso afirmativo, diz-se que *a pertence* ao conjunto A e escreve-se $a \in A$. Caso contrário, diz-se que *a não pertence* ao conjunto A e põe-se $a \notin A$.

Em Matemática, qualquer afirmação é *verdadeira ou falsa*, não pode haver uma terceira opção, e nem as duas ao mesmo tempo. Estes fatos básicos são conhecidos como *Princípio do Terceiro Excluído e Princípio da Não Contradição* e estão na base da estrutura lógica da Matemática como vimos na seção 2. Diferentemente do que ocorre com outras modalidades de lógica (como as que empregamos informalmente no dia a dia), para avaliar a veracidade de uma afirmação matemática, não há outras variações possíveis de respostas, tais como mais ou menos, depende ou às vezes.

A Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço. Portanto, os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática (especialmente na Matemática do ensino básico) são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas (que são conjuntos de pontos) e os conjuntos que se derivam destes, como os conjuntos de funções, de matrizes etc.

A linguagem dos conjuntos, hoje universalmente adotada na apresentação da Matemática, ganhou esta posição porque permite dar aos conceitos e às proposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica. A partir de agora representaremos tanto as proposições simples e quanto as compostas com consoantes maiúsculas do alfabeto latino. Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizermos que "o objeto x tem a propriedade P" ou o "objeto y satisfaz a condição Q", podemos escrever $x \in A$ e $y \in B$, em que A é o conjunto dos objetos que têm a propriedade P e B é o conjunto dos objetos que satisfazem a condição Q.

Em Teoria de Conjuntos, esta propriedade corresponde ao chamado *Axioma da Especificação*, indica-se: $A = \{x \in U: P(x)\}$ e $B = \{y \in U: Q(y)\}$, sendo U o conjunto universo.

Então, dizer que x tem a propriedade P e y satisfaz a condição Q é o mesmo que afirmar que $x \in A$ e $y \in B$.

A esse respeito, uma pergunta fundamental para entender a importância da linguagem de conjuntos é a seguinte: *Qual é a vantagem que se obtém quando se prefere dizer que* $x \in A$ *e* $y \in B$*, em vez de dizer que x tem a propriedade P e y satisfaz a condição Q?*

A vantagem de se utilizar a linguagem e a notação de conjuntos é que entre estes existe uma álgebra, montada sobre as operações de reunião ($A \cup B$) e interseção ($A \cap B$), além da relação de inclusão ($A \subset B$). As propriedades e regras operatórias dessa álgebra, como por exemplo,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ e } A \subset A \cup B,$$

não são difíceis de manipular e representam um enorme ganho em simplicidade e exatidão quando comparadas ao manuseio de propriedades e condições. Por exemplo, mostrar que um conjunto está contido em outro equivale a mostrar que a propriedade que define o primeiro implica na propriedade que define o segundo (P ⇒ Q); e aplicar a propriedade antissimétrica da inclusão de conjuntos para demonstrar a igualdade entre conjuntos (*se* $A \subset B$ *e* $B \subset A$*, então* $A = B$) equivale a demonstrar a equivalência entre as condições que os definem (P ⇔ Q).

Existe um conjunto excepcional, único e intrigante: o conjunto vazio, designado pelo símbolo $\emptyset$. Em Teoria de Conjuntos, a existência desse conjunto corresponde ao chamado *Axioma do Vazio* e é fácil ver sua unicidade, usando redução ao absurdo. Ele é aceito como conjunto porque cumpre a utilíssima função de simplificar as proposições, evitando uma longa e tediosa menção de exceções. Qualquer propriedade contraditória serve para definir o conjunto vazio. Por exemplo, tem-se $\emptyset = \{x;\ x \neq x\}$, ou seja, $\emptyset$ é o conjunto dos objetos x tais que x é diferente de si mesmo. Seja qual for o objeto x tem-se sempre $x \notin \emptyset$. Em muitas questões matemáticas é importante saber que um determinado conjunto X não é vazio. Para mostrar que X não é vazio, deve-se simplesmente encontrar um objeto x tal que $x \in X$. Outros conjuntos curiosos são os conjuntos unitários. Dado um objeto x qualquer, o conjunto unitário {x} tem como único elemento esse objeto x. Estritamente falando, x e {x} não são a mesma coisa o primeiro pode ser um elemento e o segundo pode ser um elemento ou um conjunto.

4.2 A RELAÇÃO DE INCLUSÃO

Definição 4.5. *Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um subconjunto de B, que A está contido em B, ou que A é parte de B. Para indicar este fato, usa-se a notação* $A \subset B$.

A relação de $A \subset B$ chama-se *relação de inclusão*. Quando A não é um subconjunto de B, escreve-se $A \not\subset B$. Isto significa que nem todo elemento de A pertence a B, ou seja, que existe pelo menos um objeto a tal que $a \in A$ e $a \notin B$.

Exemplo 4.4.

(a) Sejam T o conjunto dos triângulos e P o conjunto dos polígonos do plano. Todo triângulo é um polígono, logo $T \subset P$.

(b) Sejam A o conjunto dos números pares e B o conjunto dos múltiplos de 3. Tem-se $A \not\subset B$ porque $2 \in$ A, mas $2 \notin B$. Tem-se também $B \not\subset A$ *pois* $3 \in B$ mas $3 \notin A$.

Há duas inclusões extremas. A primeira é óbvia: para todo conjunto A, vale $A \subset A$ (pois é claro que todo elemento de A pertence a A). A outra é, no mínimo, curiosa: tem-se $\emptyset \subset A$, seja qual for o conjunto A. Com efeito, se quiséssemos mostrar que $\emptyset \not\subset A$, teríamos que obter um objeto x tal que $x \in \emptyset$, mas $x \notin A$. Como $x \in \emptyset$ é impossível, somos levados a concluir que $\emptyset \subset A$, ou seja, que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro.

Diz-se que *A é um subconjunto próprio de B* quando A é subconjunto de B e a inclusão não corresponde a nenhum desses dois casos extremos, isto é, quando se tem $A \subset B$ com $A \neq \emptyset$ e $A \neq B$.

A relação de inclusão tem três propriedades fundamentais. Dados quaisquer conjunto A, B e C tem-se:

(i) *reflexividade:* $A \subset A$;

(ii) *antissimetria: se* $A \subset B$ *e* $B \subset A$, *então* $A = B$;

(iii) *transitividade: se* $A \subset B$ *e* $B \subset C$, *então* $A \subset C$.

De fato,

(i) Como $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in A)$, então $A \subset A$.

(ii) Como $A \subset B$ e $B \subset A$, então $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$, e $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$. Como vale a implicação nas duas direções, isso é equivalente a dizer que $(\forall x)(x \in B \Leftrightarrow x \in A)$, ou seja, que $A = B$. Observe que a recíproca é óbvia, ou seja, $A = B \Rightarrow A \subset B$ e $B \subset A$.

(iii) $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ e $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in C)$. Pela transitividade da operação condicional temos $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subset C$.

A propriedade antissimétrica é constantemente usada nos raciocínios matemáticos. Quando se deseja mostrar que os conjuntos A e B são iguais, prova-se que $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, que todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a *A*. Na realidade, a propriedade antissimétrica da relação de inclusão contém, nela embutida, a condição de igualdade entre os conjuntos: os conjuntos *A* e *B* são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos (*Axioma da Extensão*).

Por sua vez, a propriedade transitiva da inclusão é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de *silogismo*. Um exemplo de silogismo é o seguinte: *todo ser humano é um animal, todo animal é mortal, logo todo ser humano é mortal.* Na linguagem de conjuntos, isso seria formulado assim: sejam *H, A* e *M* respectivamente os conjuntos dos seres humanos, dos animais e dos mortais. Temos $H \subset A$ e $A \subset M$, *logo* $H \subset M$.

A relação de inclusão entre conjuntos está estreitamente relacionada com a implicação lógica. Vejamos como. Sejam *P* e *Q* propriedades aplicáveis a elementos de um conjunto *U*. Essas propriedades definem os conjuntos *A*, formado pelos elementos de *U* que gozam de *P*, e *B*, formado pelos elementos de *U* que têm a propriedade *Q* (*Axioma da Especificação*). Se todos os elementos que possuem a propriedade *P* também têm a propriedade *Q*, dizemos que a propriedade *P* implica (ou acarreta) a propriedade *Q* e escrevemos $P \Rightarrow Q$. Isto é equivalente a dizer que todo elemento que pertence a *A* também pertence a *B*, isto é, que $A \subset B$.

Exemplo 4.5. Seja *U* o conjunto dos quadriláteros convexos do plano. Designemos com *R* a propriedade de um quadrilátero ter seus quatro ângulos retos e por *P* a propriedade de um quadrilátero ter seus lados opostos paralelos (isto é, ser paralelogramo). Então podemos escrever $R \Rightarrow P$. Neste caso, *A* é o conjunto dos retângulos e *B* é o conjunto dos paralelogramos, logo $A \subset B$.

Exemplo 4.6. Podemos escrever a implicação:

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$.

Ela significa que toda raiz da equação $x^2 + x - 1 = 0$ é também raiz de $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Há diferentes maneiras de se ler a relação $P \Rightarrow Q$. Pode-se dizer *P implica Q*, *se P então Q*, *P é condição suficiente para Q*, *Q é condição necessária para P* ou *P somente se Q*.

A compreensão dos significados do termo necessário e do termo suficiente em Matemática é de fundamental importância. Em $P \Rightarrow Q$ dizemos que a condição *P* é suficiente para a condição *Q*, ou, de forma equivalente, que a condição *Q* é necessária para a condição *P*.

Exemplo 4.7. *n múltiplo de 4* $\Rightarrow$ *n par* *e* *n par* $\nRightarrow$ *n múltiplo de 4, com* $n \in \mathbb{Z}$

Lê-se: ser par é necessário, mas não suficiente para ser múltiplo de 4.

A implicação Q $\Rightarrow$ P chama-se a *recíproca* de P $\Rightarrow$ Q. Evidentemente, a recíproca de uma implicação verdadeira pode ser falsa. A recíproca do exemplo 4.7, por exemplo, é falsa.

Quando são verdadeiras ambas as implicações P $\Rightarrow$ Q e Q $\Rightarrow$ P, dizemos *P se, somente se, Q*, ou que *P é equivalente a Q* ou, ainda, que *P é necessário e suficiente para Q.* Neste caso, escreve-se P $\Leftrightarrow$ Q. Em linguagem de conjuntos, isto significa que o conjunto dos elementos que têm a propriedade *P* é igual o conjunto dos elementos que têm a propriedade *Q*.

Exemplo 4.8. *Sejam P a propriedade de um triângulo, cujos lados medem* $x, y < z$*, ser retângulo e Q a propriedade de valer* $z^2 = x^2 + y^2$*. Então* P $\Leftrightarrow$ Q*. (Teorema de Pitágoras e sua recíproca)*

Note que a propriedade transitiva da inclusão de conjuntos constitui a base do raciocínio dedutivo em Matemática. De fato, esta propriedade pode ser expressa em termos de implicações lógicas. Se *P*, *Q* e *R* são três afirmações, temos: Se P $\Rightarrow$ Q e Q $\Rightarrow$ R, então P $\Rightarrow$ R.

A propósito, a resolução de uma equação é um caso típico em que se tem uma sequência de implicações lógicas.

Exemplo 4.9. Para resolver a equação $x^2 - x - 2 = 0$, podemos seguir os passos abaixo:

$$(P)\ x^2 - x - 2 = 0;$$

$$(Q)\ (x-2)(x+1) = 0;$$

$$(R)\ x = 2 \text{ ou } x = -1;$$

$$(S)\ x \in \{2, -1\}.$$

Se chamarmos respectivamente de P, Q, R e S as condições impostas sobre o número x em cada uma das linhas acima, os passos que acabamos de seguir significam que $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow S$.

Isto é, se o número x satisfaz P então satisfaz Q e assim por diante. Por transitividade, a conclusão a tirar é $P \Rightarrow S$, ou seja, se $x^2 - x - 2 = 0$, então $x \in \{2, -1\}$.

No exemplo acima, estritamente falando, a armação a que chegamos não significa que as raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$ são 2 e -1. O que está dito acima é que se houver raízes desta equação elas devem pertencer ao conjunto $\{2, -1\}$. No caso desse exemplo, não é difícil ver que todos os passos acima podem ser revertidos. Isto é, valem as implicações recíprocas $S \Rightarrow R \Rightarrow Q \Rightarrow P$. Logo, $S \Rightarrow P$. Concluímos que $P \Leftrightarrow S$, ou seja, 2 e -1 são de fato as (únicas) raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$.

Quando se resolve uma equação, é importante ter em mente que cada passo do processo representa uma implicação lógica. Pode acontecer dessas implicações não poderem ser revertidas, isto é, de suas recíprocas não serem verdadeiras. Nesses casos, o conjunto obtido no final apenas contém (mas não é igual a) o conjunto das raízes, este último, podendo até mesmo ser vazio. Para maiores esclarecimentos desse fato observe o exemplo a seguir.

Exemplo 4.10. Escrevamos as implicações lógicas que correspondem à resolução da equação $\sqrt{x} + x = 2$. Verifiquemos quais são reversíveis e o porquê do aparecimento de raízes estranhas.

Inicialmente, observemos que para a equação $\sqrt{x} + 2 = x$ ter sentido em R, devemos assumir $x \geq 0$. Assim, $(\sqrt{x})^2 = |x| = x$. Então:

$$\sqrt{x} + 2 = x \Rightarrow \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x-2)^2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4.$$

Uma verificação fácil mostra que $x = 1$ é a raiz estranha. De fato, a equação $\sqrt{x} + 2 = x$ não é satisfeita para $x = 1$. Isto se explica, pois a implicação $\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x-2)^2$ não é reversível, já que $\sqrt{(\sqrt{x})^2} = \sqrt{(x-2)^2} \Rightarrow \sqrt{x} = |x-2|$ e não igual $x - 2$.

4.3 O COMPLEMENTAR DE UM CONJUNTO

A noção de complementar de um conjunto só faz pleno sentido quando se fixa um conjunto *U*, chamado o *universo do discurso*, ou *conjunto-universo*. O universo *U* pode ser visto como o assunto da discussão ou o tema em pauta: *estaremos falando somente dos elementos de U*. Uma vez fixado *U*, todos os elementos a serem considerados pertencerão a *U* e todos os conjuntos serão subconjuntos de *U*, ou derivados destes. Por exemplo, na Geometria Plana, *U* é o plano; na teoria aritmética da divisibilidade, *U* é o conjunto dos números inteiros.

Definição 4.6. *Dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de U), chama-se complementar de A ao conjunto A^C formado pelos objetos de U que não pertencem a A.*

Uma propriedade imediata do complementar é a seguinte:

$$U^C = \emptyset \text{ e } \emptyset^C = U.$$

Lembramos que, uma vez fixado o conjunto *A*, para cada elemento x em *U*, vale uma, e somente uma, das alternativas: $x \in A$, ou $x \notin A$. Como já observamos, o fato de que, para todo $x \in U$, não existe uma outra opção além de $x \in A$ ou $x \notin A$ é conhecido em Lógica como o *Princípio do Terceiro Excluído*; e o fato de que as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser ambas verdadeiras ao mesmo tempo chama-se o *Princípio da Não Contradição*.

Desses Princípios, decorrem as regras operatórias básicas referentes ao complementar:

(i) Para todo conjunto $A \subset U$, tem-se $(A^C)^C = A$. (Todo conjunto é complementar do seu complementar.)

(ii) Se $A \subset B$ então $B^C \subset A^C$. (Se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém esse outro.

A regra (ii) pode ser escrita com notação ⇒, assumindo a forma seguinte:

$A \subset B \Rightarrow B^C \subset A^C$.

Na realidade, na presença da regra (i), a regra (ii) pode ser reforçada, valendo a equivalência abaixo

$A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$.

Esta equivalência pode ser olhada sob o ponto de vista lógico, usando-se as propriedades P e Q que definem respectivamente os conjuntos A e B. Então, o conjunto A é formado pelos elementos de U que têm a propriedade P, enquanto que os elementos de B são todos os que pertencem a U e têm a propriedade Q. As propriedades que definem os conjuntos A^C e B^C são respectivamente a *negação* de P, representada por $\sim P$, e a *negação* de Q, representada por $\sim Q$. Assim, dizer que um objeto x tem a propriedade $\sim P$ significa (por definição) afirmar que x não tem a propriedade P (e analogamente, para Q). Com estas convenções, a relação acima lê-se assim:

$\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ se, e somente se, $\sim \mathrm{Q} \Rightarrow \sim \mathrm{P}$.

Em outras palavras, a implicação $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ (P implica Q) equivale a dizer que $\sim \mathrm{Q} \Rightarrow \sim \mathrm{P}$ (a negação de Q implica a negação de P).

A implicação $\sim \mathrm{Q} \Rightarrow \sim \mathrm{P}$ chama-se a *contra positiva* da implicação $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$. Como já vimos na seção 2, a contra positiva é um equivalente lógico da implicação original. Isto é, a contra positiva de uma implicação nada mais é do que a mesma implicação dita com outras palavras sendo muitas vezes útil, substituir uma implicação por sua contra positiva, a fim de tornar seu significado mais claro ou mais manipulável.

Formar o complementar de um conjunto é um caso particular da operação de formar a diferença entre dois conjuntos dados, cuja definição damos a seguir.

Definição 4.7. *A diferença entre dois conjuntos A e B é definida por:* $\mathrm{B} \backslash \mathrm{A} = \{\mathrm{x};\, \mathrm{x} \in \mathrm{B} \text{ e } \mathrm{x} \notin \mathrm{A}\}$.

Note que em geral, essa operação entre conjuntos não é comutativa, isto é, nem sempre $\mathrm{B} \backslash \mathrm{A} = \mathrm{A} \backslash \mathrm{B}$. A formação do complementar A^C de um conjunto A se obtém com a diferença $\mathrm{U} \backslash \mathrm{A}$, em que U é o conjunto universo. A seguir algumas propriedades fundamentais.

Proposição 4.1. Sejam A e B conjuntos temos:

(i) $\mathrm{B} \backslash \mathrm{A} = \emptyset$ se, e somente se, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$;

(ii) $\mathrm{B} \backslash \mathrm{A} = \mathrm{B}$ se, e somente se, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$;

(iii) $\mathrm{B} \backslash \mathrm{A} = \mathrm{A} \backslash \mathrm{B}$ se, e somente se, $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Demonstração.

De fato,

(i) $B \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow (\nexists\, x)(x \in B \text{ e } x \notin A) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow B \subset A$.

(ii) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow B \setminus A = B$.

(iii) $A = B \Leftrightarrow B = A \Leftrightarrow (\nexists\, x;\, x \in B \text{ e } x \notin A) \Leftrightarrow (\nexists\, x;\, x \in A \text{ e } x \notin B) \Leftrightarrow B \setminus A = A \setminus B$.

4.4 REUNIÃO E INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

Definição 4.8. *Dados os conjuntos A e B:*

(i) *a reunião* $A \cup B$ *é o conjunto formado pelos elementos de A ou de B;*

(ii) *a interseção* $A \cap B$ *é o conjunto formado pelos elementos de A e de B.*

Portanto, se considerarmos as afirmações

$x \in A$ e $x \in B$

veremos que $x \in A \cup B$ quando pelo menos uma dessas afirmações for verdadeira e, por outro lado, $x \in A \cap B$ quando ambas as afirmações acima forem verdadeiras. Mais concisamente:

$x \in A \cup B$ significa $x \in A$ ou $x \in B$;

$x \in A \cap B$ significa $x \in A$ e $x \in B$.

Nota-se, deste modo, que as operações $A \cup B$ e $A \cap B$ entre conjuntos constituem a contrapartida matemática, em linguagem de conjuntos, dos conectivos lógicos *ou* e *e* (às vezes representados pelos símbolos $\vee$ e $\wedge$, respectivamente). Assim, se P é a propriedade que define o conjunto A e Q é a propriedade que define o conjunto B, então, $A \cup B$ e $A \cap B$ são os conjuntos definidos pelas propriedades “P ou Q” e “P e Q”, respectivamente.

Exemplo 4.11. Diremos que $x \in \mathbb{R}$ tem a propriedade P se $x^2 - 3x + 2 = 0$, e tem a propriedade Q se $x^2 - 5x + 6 = 0$.

O conjunto dos números que possuem a propriedade P é $A = \{1, 2\}$ e o conjunto dos números que têm Q é $B = \{2, 3\}$. Assim, a afirmação “$x^2 - 3x + 2 = 0$ ou $x^2 - 5x + 6 =$

0” equivale a “$x \in \{1, 2, 3\}$”; e a afirmação “$x^2 - 3x + 2 = 0$ e $x^2 - 5x + 6 = 0$ equivale a “$x \in \{2\}$ ou $x = 2$”. Noutras palavras, $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ e $A \cap B = \{2\}$.

As propriedades relacionadas com as operações de união e interseção constituem teoremas cujas demonstrações, em geral, não são difíceis. A comutatividade e associatividade decorrem diretamente das definições, e a distributividade é de verificação um pouco menos imediata.

(i) Comutatividade da união e da interseção: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(ii) Associatividade da união e da interseção: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(iii) Distributividade, de cada uma em relação à outra: $A\cap(B \cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B \cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Estas propriedades constituem, na realidade, regras que regem o uso combinado dos conectivos lógicos “ou” e “e”.

A conexão entre as operações de união e interseção e a relação de inclusão é dada pelas seguintes equivalências:

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

De fato, para provarmos as equivalências propostas, basta provarmos que $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$. Antes, observemos que se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, então as implicações acima são verdadeiras. Suponhamos, então, ambos A e B não vazios. $A\cup B = B \Rightarrow A \subset B$: Tome $x \in A$. Então, $x \in A\cup B$. Como $A\cup B = B$, segue que $x \in B$. Isto mostra que $A \subset B$. $A \subset B \Rightarrow A\cap B = A$: Para provarmos que $A\cap B = A$, temos que mostrar $A \cap B \subset A$ e $A \subset A \cap B$. Sendo a primeira implicação clara, provemos a segunda. De fato, tome $x \in A$. Por hipótese, $A \subset B$. Assim, $x \in B$. Portanto, $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, $x \in A \cap B$, provando o desejado. $A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$: Para provarmos que $A \cup B = B$, temos que provar $A \cup B \subset B$ e $B \subset A \cup B$. Como a segunda implicação ´e clara, vamos provar a primeira. De fato, tome $x \in A \cup B$. Então, $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in B$, já temos o desejado. Se $x \in A$, então $x \in A \cap B$, por hipótese. Daí, $x \in B$.

E, finalmente, se A e B são subconjuntos do universo U, tem-se

(i) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(ii) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

De fato, claramente, ambos os itens (i) e (ii) se verificam para $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Suponhamos, então, ambos A e B não vazios.

(i) Como $x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A$ e $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^C$ e $x \in B^C \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$, segue que $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

(ii) Como $x \in (A \cap B)^C \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Leftrightarrow x \in A^C$ ou $x \in B^C \Leftrightarrow x \in A^C \cup B^C$, segue que $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Estas últimas relações, atribuídas ao matemático inglês Augustus de Morgan, significam que a negação de *"P ou Q"* é *"$\sim P$ e $\sim Q$"* e a negação de *"P e Q"* é *"$\sim P$ ou $\sim Q$".*

4.5 RESUMO DAS RELAÇÕES FUNDAMENTAIS ENTRE A LINGUAGEM DA ÁLGEBRA DE CONJUNTOS E A LINGUAGEM DAS IMPLICAÇÕES LÓGICAS

Em matemática, a principal regra de dedução, aquela que talvez mais usamos, é o chamado "Modus Ponens" que diz o seguinte "$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$ ", ou seja, se em uma teoria sabe-se que $(P \rightarrow Q) \wedge P$ são teoremas, então Q também é um teorema (proposição demonstrável); esta regra parece bastante natural se refletirmos sobre a maneira como raciocinamos e se observarmos que quando P é verdadeiro, $P \rightarrow Q$ é verdadeiro se e somente se Q for verdadeiro. Daí é de fundamental importância sabermos representar não só o "Modus Ponens," mas também outras regras de inferência dadas na linguagem da álgebra de conjuntos.

Apresentamos a seguir um resumo das relações fundamentais entre a linguagem da álgebra de conjuntos e a linguagem das implicações lógicas já apresentadas e outras decorrentes destas. Chamamos atenção para as vantagens, em certas situações, de expressar implicações lógicas em termos de conjuntos.

Consideremos P e Q duas condições, aplicáveis aos elementos de um conjunto U. Consideremos A e B subconjuntos de U, cujos elementos satisfazem P e Q, respectivamente. As principais equivalências entre a linguagem de implicações e a linguagem de conjuntos podem ser resumidas no quadro a seguir.

Quadro 1 – Conjuntos e Lógica

LINGUAGEM DE CONJUNTOS	LINGUAGEM DE IMPLICAÇÕES LÓGICAS	DENOMINAÇÃO
$A = B$	$P \Leftrightarrow Q$	Igualdade/Bicondicional
$A \subset B$	$P \Rightarrow Q$	Inclusão/Condicional
A^C	$\sim P$	Complementar/Negação
$A \cup B$	$P \vee Q$	União/Disjunção
$A \cap B$	$P \wedge Q$	Interseção/Conjunção
$A \subset B = (A \cap B^C) \subset \emptyset$	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \rightarrow C$	Redução ao absurdo
$A \subset B = B^C \subset A^C$	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$	Contra positiva
$((A \subset B) \cap A) \subset B$	$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$	Modus Ponens
$(AUB)^C = A^C \cap B^C$	$\sim(P \vee Q) = \sim P \wedge \sim Q$	Lei de Morgan
$(A \cap B)^C = A^C U B^C$	$\sim(P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$	Lei de Morgan
$(A \cap A^C)^C = \emptyset^C = U$	$\sim (P \wedge \sim P)$	Princípio da não contradição
$(A \cup A^C) = U$	$(P \vee \sim P)$	Princípio do 3º excluído

Fonte: Elaborado pelo autor.

5 O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Apresenta-se nesta seção; baseada em [6], [16] e [17]; o conjunto dos números naturais por meio dos Axiomas de Peano, com destaque para o Axioma da Indução como hipótese para a demonstração do Princípio da Boa Ordenação.

As necessidades provocadas por um sistema social cada vez mais complexo e as longas reflexões, possíveis graças à disponibilidade de tempo trazida pelo progresso econômico, conduziram, através dos séculos, ao aperfeiçoamento do extraordinário instrumento de avaliação que é o conjunto dos números naturais.

Decorridos muitos milênios, podemos hoje descrever concisa e precisamente o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, valendo-nos da notável síntese feita pelo matemático italiano Giuseppe Peano no limiar do século 20.

$\mathbb{N}$ é um conjunto, cujos elementos são chamados *números naturais*. A essência da caracterização de $\mathbb{N}$ reside na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando n, n' $\in \mathbb{N}$, dizer que n' é *o sucessor* de n significa que n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n'. Evidentemente, esta explicação apenas substitui "sucessor" por "logo depois", portanto não é uma definição. O termo primitivo "sucessor" não é definido explicitamente. Seu uso e suas propriedades são regidos por algumas regras, abaixo enumeradas:

a) Todo número natural tem um único sucessor;

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

c) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

As afirmações (a), (b), (c) e (d) acima são conhecidas como os axiomas de *Peano*. Tudo o que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência desses axiomas.

5.1 O AXIOMA DA INDUÇÃO

O último dos axiomas de Peano é conhecido como o axioma da *indução*. Ele é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais (demonstrações por indução, ou por recorrência, como veremos no capítulo seguinte). Enunciado sob a forma de propriedades em vez de conjuntos, ele se formula assim:

Seja $P(n)$ *uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que*

i) $P(1)$ *é válida;*

ii) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, a validez de* $P(n)$ *implica a validez de* $P(n')$*, onde n' é o sucessor de n.*

Então $P(n)$ *é válida qualquer que seja o número natural n.*

Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais P(n) é válida, veremos que:

- $1 \in X$ em virtude de (i); e que
- $n \in X \Rightarrow n' \in X$ em virtude de (ii).

Logo, pelo axioma da indução, concluímos que $X = \mathbb{N}$.

Definição 5.1. *Esta formulação do Axioma da Indução é chamada de Princípio de Indução Matemática* (PIM).

5.2 AS DUAS OPERAÇÕES: ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

Entre os números naturais estão definidas duas operações fundamentais: a adição, que aos números $n, p \in \mathbb{N}$ faz corresponder a soma $n + p$ e a multiplicação, que lhes associa o produto np.

A soma $n + p$ é o número natural que se obtém a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar o sucessor. Em particular, $n + 1$ é o sucessor de n, $n + 2$ é o sucessor do sucessor de n, etc. Por exemplo, tem-se $2 + 2 = 4$ simplesmente porque 4 é o sucessor do sucessor de 2.

De agora em diante, o sucessor do número natural n será designado por $n + 1$.

Quanto ao produto, põe-se $n \cdot 1 = n$ por definição e, quando $p \neq 1$, np é a soma de p parcelas iguais a n.

Em última análise, a soma $n + p$ e o produto np têm mesmo os significados que lhes são atribuídos pelas explicações dadas acima. Entretanto, até que saibamos utilizar os números naturais para efetuar contagens, não tem sentido falar em "p vezes" e "p parcelas". Por isso, as operações fundamentais devem ser definidas por indução, como se segue.

Adição: $n + 1 =$ sucessor de n e $n + (p + 1) = (n + p) + 1$. Esta última igualdade diz que se sabemos somar p a todos os números naturais n, sabemos também somar $p+1$: a soma $n+ (p+ 1)$ é simplesmente o sucessor $(n +p) + 1$ de $n + p$. O axioma da indução garante que a soma $n + p$ está definida para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$.

Multiplicação: $n \cdot 1 = n$ e $n(p + 1) = np + n$. Ou seja: multiplicar um número n por 1 não o altera. E se sabemos multiplicar todos os números naturais n por p, sabemos também multiplicá-los por $p + 1$: basta tomar $n(p + 1) = np + n$. Por indução, sabemos multiplicar todo n por qualquer p.

Estas operações gozam das conhecidas propriedades de associatividade, comutatividade e distributividade. Na seção seguinte realizaremos as demonstrações de tais propriedades utilizando o método de demonstração por indução abordado na seção seguinte.

5.3 A ORDENAÇÃO NOS NÚMEROS NATURAIS

Nossa breve descrição do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais termina com a relação de ordem $m < n$.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, diz-se que m é *menor* do que n, e escreve-se $m < n$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. (Isto quer dizer que n é o sucessor do sucessor... do sucessor de m, o ato de tomar o sucessor sendo iterado p vezes.).

A relação $m < n$ tem as seguintes propriedades:

(i) *Transitividade*: Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.

(ii) *Tricotomia*: Dados m, n $\in$ N, vale uma, e somente uma, das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.

(iii) *Monotonicidade*: Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$.

(iv) *Boa-ordenação*: Todo subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento. Isto significa que existe um elemento $m_0 \in X$ que é menor do que todos os demais elementos de X. A boa-ordenação pode muitas vezes substituir com vantagem a indução como método de prova de resultados referentes a números naturais.

Demonstração.

(i) Se $m < n$ e $n < p$ então $n = m + p$ e $p = n + q$ para alguns p, q $\in$ N, logo $p = (m + p) + q = m + (p + q)$, portanto $m < p$.

(ii) Se $m < n$ e $m = n$, então $n = m + p$ e $m =n$ o que implicaria em $m = m + p$, donde $m + 1 =m + p + 1$ e daí $1 = p + 1$, um absurdo, pois 1 não é sucessor de nenhum número natural, em particular não é sucessor de p. Portanto $m < n$ (e analogamente $m > n$) é incompatível com $m = n$. Por outro lado, se $m < n$ e $m > n$ tem-se $n = m + p$ e $m = n + q$, donde obtém-se $n = n + q + p$, e daí $n + 1 = n + q + p + 1$, o que implica $1 = (q + p) + 1$, um absurdo.

(iii) Monotonicidade Adição: Por definição, quando $m < n$ tem-se $n = m + k$, o que implica $n + p = (m + k) + p$. Isto equivale a $n + p = (m + p) + k$ e consequentemente $m + p < n + p$. Pela Tricotomia existem apenas três possibilidades para a relação entre m e n. (1ª) m=n. Então $m + p= n + p$ o que uma contradição. (2ª) $m > n$. Implica em $m + p > n + p$, o que é absurdo, pois foi assumido que $m + p < n + p$. (3ª) $m < n$. Pela tricotomia, resta apenas esta relação.

Monotonicidade Multiplicação: Supondo que $m < n$, tem-se que $n = m + k$ para algum k $\in$ N, o que acarreta $n . p = p . n = p . (m + k) = p . m + p . k$, logo $m . p < n . p$, novamente pela tricotomia, tem-se que $m = n$, $m > n$ ou $m < n$, então $m . p > n . p$ o que é uma contradição. A relação $m < n$ é a única que resta, isto encerra a demonstração.

(iv) Seja $B \subset \mathbb{N}$ não vazio. Supõe-se por absurdo que B não possua elemento mínimo. Em particular, $1 \notin B$ (senão 1 seria elemento mínimo de B). Seja $A = \{n \in \mathbb{N}; n < m \ \forall \ m \in B\}$.

Tomando inicialmente que $A \cap B = \varnothing$. De fato, se $A \cap B \neq \varnothing$, então existe $n \in A \cap B$. Tendo $n \in A$ temos também $n < m$ qualquer que seja $m \in B$, em particular, tomando $m = n \in B$ obtemos $n < n$ o que é um absurdo. Concluímos que $A \cap B = \varnothing$.

Obtém-se a seguir que $A = \mathbb{N}$. Isto é suficiente para concluir a demonstração. Neste caso temos $\varnothing = A \cap B = N \cap B = B$ contradizendo a hipótese $B \neq \varnothing$.

Mostra-se, por indução, que $A = \mathbb{N}$. Já se sabe que $1 \notin B$ e, portanto, $1 < m$ qualquer que seja $m \in B$, ou seja, $1 \in A$. Tomemos $n \in A$. Por definição de A temos $n < m$ qualquer que seja $m \in B$, logo $n + 1 \leq m$ para todo $m \in B$. Se $n + 1 \in B$ então $n + 1$ é um elemento mínimo de B. Como, por hipótese, B não possui elemento mínimo, segue que $n + 1 \notin B$ e, portanto, $n + 1 < m$ para qualquer $m \in B$. Pode-se concluir que $n + 1 \in A$ e, pelo Princípio da Indução, que $A = \mathbb{N}$.

O Princípio da Boa Ordenação aliado ao método de demonstração por Redução ao Absurdo, visto na seção anterior, também é um excelente instrumento para realizar demonstrações de proposições a respeito de números naturais como a do exemplo a seguir.

Exemplo 5.1. Lembremos que um número natural p chama-se *primo* quando não pode ser expresso como produto $p = m \cdot n$ de dois números naturais, a menos que um deles seja igual a 1 (e o outro igual a p); isto equivale a dizer que os fatores m, n não podem ser ambos menores do que p.

O Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) *diz que todo número natural ou é primo ou é um produto de fatores primos.*

Provaremos isto por boa ordenação. Usaremos a linguagem de conjuntos. Seja X o conjunto dos números naturais que são primos ou produtos de fatores primos. Observemos que se m e n pertencem a X então o produto $m \cdot n$ pertence a X. Seja Y o complementar de X. Assim, Y é o conjunto dos números naturais que não são primos nem são produtos de fatores primos. Queremos provar que Y é vazio. Isto será feito por *redução ao absurdo* (como sempre se dá nas demonstrações por boa ordenação). Com efeito, se Y não fosse vazio, haveria um menor elemento $a \in Y$. Então todos os números menores do que a pertenceriam a X. Como a não é primo, ter-se-ia $a = m \cdot n$, com $m < a$ e $n < a$, logo $m \in X$ e $n \in X$. Sendo assim, $m \cdot n \in X$. Mas $m \cdot n = a$, o que daria $a \in X$, uma contradição. Segue-se que $Y = \emptyset$, concluindo a demonstração.

6 O MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção estudaremos mais detalhadamente o Método de Demonstração por Indução Matemática que tem como base o Princípio da Indução Matemática visto anteriormente. Toda teoria e exemplos exibidos a partir de agora foram adaptados de [16] e [21].

Definição 6.1 Ao processo de passagem de proposições gerais à proposições particulares denominamos *dedução*. Enquanto que o processo de passagem de proposições particulares a proposições gerais denominamos *indução*.

A indução pode levar a conclusões verdadeiras e a conclusões falsas. A partir de agora nos ocupemos da verificação do valor lógico das mesmas.

Exemplo 6.1.

(I) 320 é múltiplo de 5.

Poderíamos deduzir, a partir das proposições (I):

a) Todo número que termina em 0 é múltiplo de 5
b) Todo número com três dígitos é múltiplo de 5

Da proposição particular (I) obtivemos a proposição geral (a) que é verdadeira e a proposição geral (b), que é falsa.

Exemplo 6.2.

(I) O trinômio $x^2 + x + 41$, para $x = 1$ obtemos o número 43 que é primo.
(II) O trinômio $x^2 + x + 41$, para $x = 2$ obtemos o número 47 que é primo.

E substituindo x no trinômio sucessivamente por 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, obtemos em cada substituição um número primo (53, 61, 71, 83, 97, 113, 131 e 151, respectivamente).

Poderíamos inferir, a partir de (II), (III) e dos resultados seguintes obtidos:

$P(n)$*: Se n é um número natural qualquer então, o trinômio* $n^2 + n + 41$ *é um número primo.*

Efetivamente, analisando com maior atenção o trinômio $n^2 + n + 41$, convencemo-nos de que ele é igual a um número primo para $n = 1, 2, ..., 39$, mas para $n = 40$ seu valor é $40^2 + 40 + 1 = 40(40 + 1) + 41 = 40.41 + 41 = 41(40 + 1) = 41.41 = 41^2$, ou seja, um número composto. Logo, nos deparamos com uma proposição que, mesmo sendo verdadeira em 40 casos particulares, não o é em geral. Portanto, a proposição é falsa.

A indução é amplamente utilizada na Matemática, mas é preciso ter cuidado em sua aplicação, pois a precipitação pode conduzir a conclusões falsas.

Os exemplos acima permitem tirar uma conclusão simples e ao mesmo tempo importante. *Uma proposição pode ser verdadeira em uma série de casos particulares e não ser verdadeira em geral.*

Surge, então, uma pergunta. Se temos uma proposição verdadeira em vários casos particulares e é impossível analisar todos os casos, quando podemos afirmar empregando a indução em Matemática, que essa proposição é verdadeira em geral?

Às vezes, tem-se a resposta aplicando um argumento especial, conhecido como *método de indução matemática.*

Esse método se baseia no *Princípio de indução Matemática* (PIM).

Segundo KRERLEY e ADÁN [18], autores do livro Iniciação à Matemática:

> Uma grande vantagem do Princípio da Indução Matemática é poder provar que uma quantidade infinita de afirmações são verdadeiras, simplesmente verificando que uma quantidade finita destas afirmações são verdadeiras.

O axioma da indução apresentado na seção 5.1 apresentado sob a forma de proposições passou a ser definido como Princípio de Indução Matemática e foi utilizado como axioma para demonstrar o Princípio da Boa ordenação. Porém, pode também ser tratado como teorema, caso admita-se o Princípio da Boa Ordenação com axioma. É o que faremos a partir de agora.

6.1 O TEOREMA DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Seja $\mathrm{P(n)}$ *uma proposição relativa ao número natural n. Suponhamos que*

(i) P(1) *é verdadeira;*

(ii) *Para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, P(n) *verdadeira implique* P(n+1) *verdadeira.*

Então P(n) *é verdadeira qualquer que seja o número natural n.*

Demonstração

Suponha que P(n) seja falsa para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, que exista o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} ; P(x) = F\} \neq \emptyset$ apesar das hipóteses (i) e (ii) ocorrerem. Daí, pelo PBO, existe o número natural *a* menor elemento de A. Como, por (i), P(1) = V, então $1 \notin A$ e $a > 1$, uma vez que 1 é menor elemento de $\mathbb{N}$. Logo, do segundo axioma de Peano, *a* é sucessor de *a – 1*, mas como *a* é o menor elemento de A, então $a - 1 \notin A$. Daí, $P(a - 1) = V$. Mas, por (ii), $P(a - 1) = V \Rightarrow P(a - 1 + 1) = P(a) = V$, isto é, $a \notin A$. Absurdo! Uma vez que afirmamos inicialmente que $a \in A$. Logo, $A = \emptyset$.

Portanto, P(n) é verdadeira qualquer que seja o número natural n.

Demonstração acima adaptada pelo autor inspirado em [17].

Toda demonstração que se baseia no *Princípio de Indução Matemática* é denominada *demonstração por indução (pelo método de indução matemática)*. Tal demonstração consta necessariamente de duas hipóteses:

(i): A proposição P(n) é verdadeira para n = 1, isto é, P(1) = V.

(ii): Se a proposição P(n) é verdadeira para n = k (costuma-se substituir o n por outra letra neste caso k, onde k é um número natural qualquer arbitrário), então ela é verdadeira para n = k + 1, isto é, $P(k) = V \Longrightarrow P(k+1) = V$.

Se ambas as hipóteses ocorrerem, isto é, forem demonstradas, pode-se afirmar, em virtude do Teorema de Indução Matemática, que a proposição é verdadeira para todo número natural n.

As hipóteses (i) e (ii) do Teorema de Indução Matemática são denominados respectivamente de *base indutiva* e *passo indutivo*.

Exemplo 6.3. Observando a sequência dos números ímpares 1, 3, 5, 7, ... podemos inferir, naturalmente, a seguinte proposição:

P(n): Se a_n *é um número ímpar de ordem n, então* $\mathbf{a_n = 2n - 1}$*, com* $n \in \mathbb{N}$.

Verificar, utilizando o PIM, se a proposição acima é verdadeira $\forall$ n $\in \mathbb{N}$.

Demonstração.

(i) P(1) = V. De fato, pois se n = 1 temos $a_1 = 2.1 - 1 = 1$ que é o primeiro número ímpar.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k+1) = V$. Isto é, se $a_k = 2k - 1$, para um natural k arbitrário, então $a_{k+1} = 2(k+1) - 1$.

De fato, $a_k = 2k - 1 \Longrightarrow a_k + 2 = 2k - 1 + 2 \Longrightarrow a_{k+1} = 2(k+1) - 1$.

Portanto, pelo PIM, a proposição dada é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6.4. Queremos provar a validez, para todo número natural n, da proposição

$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Demonstração.

(i) P(1) = V. De fato, obviamente $1 = 1^2$.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k+1) = V$, para um natural k arbitrário. Isto é, se $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ então, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (2k + 1)^2$.

De fato, da hipótese, temos:

$[1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] + (2k + 1) = (k^2) + (2k + 1) = (2k + 1)^2$.

Portanto, pelo PIM, a proposição dada é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6.5.

Verificar, utilizando o PIM, se a proposição abaixo é verdadeira.

$P(n)\colon \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, com n $\in \mathbb{N}$.

Demonstração.

(i) P(1) = V. De fato, pois se n = 1 temos $P(1)\colon \frac{1}{1.(1+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Tentemos agora provar que:

(ii) P(k) = V $\Rightarrow$P(k+1) = V. Isto é, P(k): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{k.(k+1)}=\frac{k}{k+1}$ implica P(k+1): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{k.(k+1)}+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$.

Da hipótese, temos: P(k+1): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{k.(k+1)}+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=$ $=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1).(k+2)}=\frac{(K+1)^2}{(k+1).(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$.

Portanto, pelo PIM, a proposição dada é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6.6.

Verificar, utilizando o PIM, se a proposição abaixo é verdadeira.

P(n): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{n+1}{3n+1}$, com n $\in \mathbb{N}$.

Demonstração.

(i) P(1) = V. De fato, pois se n = 1 temos P(1): $\frac{1}{1.(1+1)}=\frac{1+1}{3.1+1}=\frac{1}{2}$

Tentemos agora provar que:

(ii) P(k) = V $\Rightarrow$P(k+1) = V. Isto é, P(k): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{k.(k+1)}=\frac{k+1}{3k+1}$ implica P(k+1): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{k.(k+1)}+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{k+2}{3k+4}$.

Da hipótese, temos: P(k+1): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{k.(k+1)}+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=\frac{k+1}{3k+1}+\frac{1}{(k+1).(k+2)}=$ $=\frac{k^3+4k^2+8k+2}{(k+1).(k+2)(3k+1)}\neq\frac{k+2}{3k+4}$.

Logo, o passo indutivo não se verifica apesar da base indutiva se verificar.

Portanto, não podemos usar o princípio de indução para demonstrar a validade de tal proposição.

Por outro lado, podemos apresentar um contraexemplo e concluir que ela é falsa.

De fato, pois se n = 2 temos P(2): $\frac{1}{6}=\frac{1}{2.(2+1)}\neq\frac{2+1}{3.2+1}=\frac{3}{7}$.

Acabamos de ver o Princípio de Indução Matemática na sua forma mais simples sendo a mais utilizada na educação básica. Porém, há outras formas de enunciá-lo. A seguir enunciaremos, demonstraremos e aplicaremos tais variações.

6.2 OUTRAS FORMAS DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Inicialmente mostraremos outras formas de Indução Matemática em seguida como utiliza-las como poderosos instrumentos para demonstrar os mais variados resultados envolvendo números naturais e também para definir com rigor objetos matemáticos.

Teorema 6.1. *Seja* $\mathrm{P(n)}$ *uma sentença sobre* $\mathbb{N}$*, e seja* $a \in \mathbb{N}$*. Suponha que:*

(i) $\mathrm{P(a)}$ *é verdadeira, e*

(ii) *qualquer que seja* $n \in \mathbb{N}$*, com* $n \geq a$*, sempre que* $\mathrm{P(n)}$ *é verdadeira, segue-se que* $\mathrm{P(n+1)}$ *é verdadeira.*

Então, $\mathrm{P(n)}$ *é verdadeira para todo número natural* $n \geq a$*.*

Demonstração.

Defina o conjunto $\mathrm{S} = \{\mathrm{m} \in \mathbb{N}; \mathrm{P(m + a - 1) = V}\}$.

Por (i) temos que $1 \in \mathrm{S}$, uma vez que $1 \in \mathbb{N}$ e $\mathrm{P(1 + a - 1) = P(a)}$ que, por hipótese é verdadeira. Por outro lado, se $\mathrm{m} \in \mathrm{S}$, temos que $\mathrm{P(m + a - 1)}$ é verdadeira. Logo, por (ii), $\mathrm{P(m + a - 1 + 1) = P(m + 1 + a - 1)}$ é verdadeira. Logo, $\mathrm{m} + 1 \in S$. Em vista do Princípio de Indução Matemática, temos que $\mathrm{S} = \mathbb{N}$. Consequentemente, $\mathrm{P(n)}$ é verdadeira para todo $\mathrm{n} \geq \mathrm{a}$.

Tal variação do PIM é conhecida como *Pequena Generalização do Princípio de Indução Matemática.*

Exemplo 6.7. *Vamos mostrar que a desigualdade na sentença* $\mathrm{P(n)}: 2^{\mathrm{n}} > \mathrm{n}^2$ *é verdadeira, para todo número natural* $n \geq 5$*.*

Demonstração.

Note que P(1): $2^1 > 1^2$ é verdadeira, P(2): $2^2 > 2^2$ é falsa, P(3): $2^3 > 3^2$ é falsa e P(4): $2^4 > 4^2$ é falsa. Tudo isso não importa, pois queremos verificar a veracidade dessa desigualdade para $n \geq 5$.

De fato, temos que P(5): $2^5 > 5^2$ é verdadeira. Seja $n \geq 5$ tal que $2^n > n^2$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por 2, obtemos $2^{n+1} > 2n^2$. Note que $2n^2 > (n+1)^2$, se $n \geq 3$, pois tal desigualdade é equivalente a $n(n-2) > 1$. Daí, deduzimos que $2^{n+1} > (n+1)^2$, o que significa que $P(n+1)$ é verdadeira, estabelecendo o resultado em vista do Teorema 6.2.1.

Exemplo 6.8. *Um caixa eletrônico de um banco tem um suprimento ilimitado de notas de 3 e de 5 (unidades de moeda). Mostre que ele pode pagar qualquer quantia (de unidades de moeda) maior do que 7.*

Demonstração 1.

Para isto, basta mostrar que a sentença:

P(n): A equação $3x + 5y = n$ tem solução em $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$, é verdadeira para todo $n \geq 8$.

De fato, ela é verdadeira para $n = 8$, pois a equação $3x + 5y = 8$ admite a solução $(x, y) = (1, 1)$.

Suponha agora que a equação $3x + 5y = n$ tenha uma solução (a, b) para algum $n \geq 8$; isto é, $3a + 5b = n$. Note que, para qualquer solução (a, b), devemos ter $a \geq 1$ ou $b \geq 1$.

Se $b \geq 1$, observando que $3 \times 2 - 5 \times 1 = 1$, segue que

$3(a+2) + 5(b-1) = 3a + 5b + 3 \times 2 - 5 \times 1 = 3a + 5b + 1 = n + 1$, o que mostra que a equação $3x + 5y = n + 1$ admite a solução $(a+2, b-1)$ em $(N \cup \{0\}) \times (N \cup \{0\})$.

Se, por acaso, $b = 0$, então, $a \geq 3$; usando a igualdade $-3 \times 3 + 5 \times 2 = 1$, temos:

$$3(a-3) + 5 \times 2 = 3a - 3 \times 3 + 5 \times 2 = 3a + 5b + 1 = n + 1,$$

o que mostra que a equação $3x + 5y = n + 1$ admite a solução

$$(a-3, b+2) \text{ em } (N \cup \{0\}) \times (N \cup \{0\}).$$

Mostramos assim, que, em qualquer caso, a equação $3x+5y = n+1$ admite solução, sempre que a equação $3x + 5y = n$, para algum $n \geq 8$, tenha solução. Como o resultado vale para $n = 8$, segue a conclusão desejada pelo Teorema 1. Note que $n_0 = 8$ é o menor valor de n para o qual a equação tem solução para todo $n \geq n_0$.

Demonstração 2.

Provemos, por indução sobre n, que $P(n)$: $n = 3.x + 5.y$ é verdadeira $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 8$ e $x, y \in \mathbb{N}$.

Sem perda de generalidade, seja rublo[10] a unidade de moeda em questão:

(i) $P(8) = V$. De fato, $8 = 3.1 + 5.1$, isto é, paga-se 8 rublos com uma nota de 3 mais uma nota de 5 rublos.

(ii) $P(k) = V \Rightarrow P(k + 1) = V$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $K > 8$.

De fato, para qualquer que seja a quantia de k rublos a se pagar, nas condições dadas, obviamente ocorrerá dois casos:

- A quantia de k rublos pode ser paga com notas de 3 rublos; e
- para pagar a quantia de k rublos há necessidade de pelo menos uma nota de 5 rublos.

No primeiro caso, haverá não menos de três notas de 3 rublos, já que $K > 8$. Para pagar a quantia de $k + 1$ rublos, bastará substituir três notas de 3 rublos por duas notas de 5 rublos. Logo, $P(k) = V \Rightarrow P(k + 1) = V$.

No segundo caso, para pagar a quantia de $k + 1$ rublos substituímos uma nota de 5 rublos por duas notas de 3 rublos. Logo, $P(k) = V \Rightarrow P(k + 1) = V$.

Portanto, pelo PIM, a proposição $P(n)$ é verdadeira $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 8$ e $x, y \in \mathbb{N}$.

Uma outra variante do Princípio de Indução ocorre quando convém, no passo de indução, considerar a validez não somente do antecessor direto, mas de 2 antecessores.

[10] O rublo (em russo рубль), é a moeda da Federação Russa e Bielorrússia (e antigamente da União Soviética e do Império Russo).

Teorema 6.2. Seja P(n) uma sentença aberta relativa ao natural n. Suponhamos que:

(i) P(1) e P(2) são verdadeiras.

(ii) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a validez de P(n) e P(n + 1) implicam a validez de P(n+2).

Então, P(n) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Suponha que o conjunto A dos números naturais n para os quais P(n) é falsa seja não vazio. Pelo PBO A possui menor elemento a. Então $1 < a$ e $2 < a$ e, além disso P(a – 1) e P(a – 2) são verdadeiras. Segue-se da hipótese que P(a) é verdadeira. Contradição. Logo $A = \emptyset$ e P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6.9. Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.

É natural inferir que o número de casais de coelhos em um determinado mês é igual ao número total de casais do mês anterior acrescido do número de casais nascidos no mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior ao anterior.

Se denotarmos o número de coelhos existentes no n-ésimo mês por F_n, temos, então, que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_1 = F_2 = 1$.

Essas relações definem, por recorrência(indução), uma sequência de números naturais, chamada de sequência de *Fibonacci*[11], cujos elementos, chamados de *números de Fibonacci*, possuem propriedades aritméticas notáveis, que ainda hoje são objeto de investigação.

Exemplo 6.10. Mostre que o termo geral a sequência de Fibonacci é $F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

Demonstração.

A expressão está correta para n = 1 e n = 2, já que

[11] Leonardo Fibonacci (1170 -1250) foi um matemático italiano. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa

$F_1 = 1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}}$ e $F_2 = 1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$.

Suponhamos que a expressão esteja correta para n e $n+1$. Então

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

Logo, a expressão também está correta para $n + 2$. Portanto, por indução, ela está correta para todo n natural.

Teorema 6.3. Seja P(n) uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

(i) P(1) é válida.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de P(k), para todo $k \leq n$, implica na validez de $P(n + 1)$.

Então P(n) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Consideremos a sentença aberta Q(n) : P(k) é válida, para todo natural $k \leq n$. Como, por (i), P(1) é válida, Q(1) também é. Suponhamos agora que Q(n) seja válida. Isto quer dizer que P(k) é válida, para todo $k \leq n$. Mas, por (ii), isto implica a validez de $P(n + 1)$, que por sua vez implica que P(k) seja válida para todo $k \leq n + 1$. Logo, $Q(n + 1)$ também é válida. Portanto, pela forma original do Princípio da Indução, Q(n) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde decorre a validez de P(n) para todo $n \in \mathbb{N}$.

O teorema acima variante do Princípio da Indução Matemática é muitas vezes chamado de *Princípio da Indução Completa* ou da *Indução Forte*.

Naturalmente, o mecanismo da indução completa pode ser adaptado para demonstrar propriedades que valem a partir de um número natura n_0. Neste caso, a hipótese de indução é a validez de P(k) para todo natural k tal que $n_0 \leq k \leq n$.

Exemplo 6.11(Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo número natural $n \geq 2$ ou é primo ou é um produto de números primos.*

Demonstração.

Como 2 é primo, a propriedade vale para $n = 2$. Suponhamos que ela seja válida para todo natural k tal que $2 \leq k \leq n$. Se $n + 1$ não for primo, então pode ser expresso na forma a.b, onde a e b são números naturais maiores que 1 e menores que $n + 1$. Portanto, pela hipótese de indução, cada um dos números a e b é primo ou um produto de primos, o que mostra que $n + 1$ é um produto de primos. Logo, a propriedade também vale para $n + 1$. Logo, por indução (completa), a propriedade vale para todo n natural.

6.3 DEFININDO POR INDUÇÃO OU RECORRÊNCIA

As operações de adição e multiplicação de números naturais anteriormente foram definidas por indução, bem como a Sequência de Fibonacci apresentada no exemplo 6.2.5. analisemos agora mais algumas definições para justificarmos o uso do método de indução para definir objetos matemáticos com rigor. Comecemos com a pergunta:

O que significam expressões do tipo em = a.a. ... .a e n! = 1.2. ... . (n-1).n ?

Note que as operações de adição e de multiplicação nos números naturais (ou em qualquer sistema numérico) são binárias, isto é, elas relacionam dois elementos de cada vez. Apesar disso, temos uma ideia bastante intuitiva do significado das expressões acima, até mesmo no que diz respeito aos pontinhos que nelas aparecem. Existe, contudo, um modo de tornar mais rigorosas definições desse tipo por meio do Princípio de Indução Matemática.

Para definir uma expressão Em, *para todo número natural* n*, basta definirmos* E_1 *e mostrar, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, como obter sem ambiguidade* E_{m+1} *a partir de* Em*.*

Nesse caso, dizemos que Em foi *definido por indução ou recorrência*.

Vejamos como intervém o Princípio de Indução Matemática para justificar este tipo de definição. Seja X o subconjunto de $\mathbb{N}$, determinado pela condição: $n \in X \Leftrightarrow$ Em está definido.

Pela caracterização do conjunto X, temos que $1 \in X$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$. Portanto, $X = \mathbb{N}$.

Exemplo 6.12(Definição de fatorial)**.** Definindo $0! = 1$, $1! = 1$ e pondo $(n+ 1)! = n!\,(n+ 1)$, supondo que $n!$ (lê-se: *n fatorial*) esteja definido, damos também, neste caso, um sentido matemático para a expressão: $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ para todo n natural ≥ 2.

A definição feita por indução ou recorrência é precisa e elegante, podendo ser utilizada inclusive para demonstrar proposições, que são normalmente tratadas como definição no ensino básico.

Exemplo 6.13. Demonstrar que $P(n)$: $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, para todo o número natural $n \geq 2$.

(i) $P(2) = V$. De fato, como $2! = (1+1)!$ Da definição, temos: Daí, $2! = (1 + 1)! = 1!\,(1 + 1) = 1.2$.

(ii) $P(n) = V \Rightarrow P(n + 1) = V$, isto é, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n \Rightarrow (n + 1)! = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n + 1)$

De fato, da segunda parte da definição, temos: $(n + 1)! = n!\,(n+ 1)$, mas da hipótese de indução, temos $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Logo, $(n + 1)! = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n + 1)$.

Então, pelo PIM, $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Exemplo 6.14(Definição de Potência de expoente natural). Seja a um elemento de um conjunto A munido de uma multiplicação sujeita às leis básicas da aritmética. As *potências* a^n de a, com $n \in N$, são definidas por recorrência como segue: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Quando $a \neq 0$, convenciona-se definir $a^0 = 1$.

Exemplo 6.15. Analogamente podemos demonstrar, usando o PIM e a definição anterior, que: $P(n)$: $a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ (n fatores a), para todo o número natural n.

Demonstração.

(i) $P(2) = V$. De fato, da definição, temos: $a^2 = a^{1+1} = a^1.a = a.a$ (2 fatores)

(ii) $P(n) = V \Rightarrow P(n + 1) = V$, isto é,

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n fatores) $\Rightarrow a^{n+1} = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n +1 fatores).

De fato, da definição, temos: $a^{n+1} = a^n \,.\, a$, mas da hipótese de indução, temos $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n fatores). Logo,

$$a^{n+1} = a^n. a = (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \text{ (n + 1 fatores a)}$$

Portanto, pelo PIM, P(n) é válida qualquer que seja o número natural n.

Exemplo 6.16 (Definição de Progressão Aritmética - PA). É uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r. Seja a_n um termo de ordem n da PA note que essa definição é recursiva, isto é, feita por indução. Daí, temos:

- $a_1 = a$, e
- $a_n = a_{n-1} + r,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

em que a e r são números reais dados.

Exemplo 6.17.(Definição de Progressão Geométrica - PG). É uma sequência na qual o quociente entre cada termo e o termo anterior é constante. Esse quociente constante é chamado de razão da progressão e representada pela letra q. Seja a_n um termo de ordem n da PG note que essa definição é recursiva, isto é, feita por indução. Daí, temos:

- $a_1 = a$, e
- $a_n = a_{n-1} \,.\, q,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

em que a e q são números reais dados.

Podemos obter a fórmula fechada[1] do termo geral de uma PA ou de uma PG partindo das definições acima dadas, como veremos a seguir no Capítulo 5.

Para finalizar a seção vamos enfatizar o seguinte fato já provado anteriormente: *Demonstramos que se o Princípio da Boa Ordenação vale, então o Princípio da Indução Matemática vale, e vice-versa, isto é, no desenvolvimento da Teoria Axiomática dos Números Naturais devemos tratar um dos dois resultados como axioma para a partir deste demonstrar o outro.* Ressaltamos ainda que as demonstrações feitas por indução podem também ser feitas utilizando-se Boa Ordenação conforme veremos na demonstração a seguir já realizada no início do capítulo por indução agora sendo feita por Boa Ordenação.

Exemplo 6.18. Verificar, utilizando o PB0, se a proposição abaixo é verdadeira.

P(n): $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{n}{n+1}$, com n ∈ ℕ.

Demonstração.

Seja A = {n ∈ ℕ ; P(n) = F}. Para provarmos que P(n) é válida para todo n ∈ ℕ, basta apenas provar que A é vazio. Suponhamos por absurdo que A não é vazio, com isso pelo Princípio da Boa ordenação, A tem um menor elemento, seja *a* esse menor elemento, temos que P(a) = F, isto é, $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{a.(a+1)}\neq\frac{a}{a+1}$ e também como $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$, temos que P(1) = V. Logo 1 < a. Daí podemos escrever $S_{a-1}=\frac{a-1}{(a-1)+1}=\frac{a-1}{a}$. Nessa última igualdade somamos $\frac{1}{a(a+1)}$ em ambos os lados, se obtendo $S_{a-1}+\frac{1}{a(a+1)}=\frac{a-1}{a}+\frac{1}{a(a+1)}\Rightarrow \quad S_a=\frac{a}{a+1}$, absurdo. Logo, A = ∅. Portanto, P(n) é válida para todo n ∈ ℕ.

6.4 CUIDADOS AO DEMONSTRAR POR INDUÇÃO

Como na maioria das vezes não sabemos se a propriedade a ser demonstrada é realmente verdadeira podemos ter duas situações possíveis caso o passo indutivo (condicional) se verifique:

I. [P(n) = ? ⟶ P(n + 1) = V] verdadeira com P(n) = V.

II. [P(n) = ? ⟶ P(n + 1) = V] verdadeira com P(n) = F.

Daí, a importância da verificação inicial do passo base, isto é, valor lógico de P(1). Pois, se P(1) = V, como o passo indutivo se verifica temos: [P(1) = V⟶P(1 + 1) = V] e consequentemente [P(2) = V⟶P(2 + 1) = V], ... e assim sucessivamente, segundo Peano, para todos os naturais n. Excluindo-se assim a possibilidade de [P(n) = F⟶P(n + 1) = V] verdadeira. Portanto, P(n) = V para todo natural n.

Por outro lado, digamos que P(1) = V e o passo indutivo não se verifique então teremos [P(1) = V⟶P(1 + 1) = F] falsa. Logo, P(n) = F no mínimo para n = 2. Portanto, P(n) = F para algum natural n. É o caso do exemplo a seguir.

Exemplo 6.19. Verificar a validade da proposição: P(n): $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, $\forall$ n natural.

Demonstração.

(i) P(1) = F. De fato, $1 \neq \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2$. Portanto, P(n) é falsa. Apesar de que:

(ii) P(n) = V implica em P(n + 1) = V, isto é, $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ implica

$1 + 2 + 3 + ... + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.$

De fato, $1 + 2 + 3 + ... + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) + 1 =$
$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1.$

Portanto, a proposição dada **não** é verdadeira apesar do passo indutivo se verificar.

Exemplo 6.19. Verificar a validade da proposição abaixo:

P(n): Se $a \neq 0$ então $a^{n-1} = 1$ $\forall$ n natural.

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato, $a^{1-1} = a^0 = 1$.

(ii) P(k) = V implica em P(k + 1) = V, para algum k natural, isto é, $a^{k-1} = 1$ implica $a^{(k+1)-1} = a^k = 1$.

Como, $a^{(k+1)-1} = a^k = a^k \cdot \left(\frac{a^{k-2}}{a^{k-2}}\right) = \frac{a^{k-1}a^1a^{k-2}}{a^{k-2}} = \frac{1 \cdot a^1 \cdot 1}{1} = a^1 = 1$ apenas quando a =1, e por hipótese $a \neq 0$. O passo indutivo falha, apesar do passo base se verificar. Mas se aplicarmos por exemplo n = 2 veremos que a proposição não se verifica.

Obviamente, P(2) = F.

De fato, $a^{2-1} = a^1 = a$.

Portanto, a proposição dada **não** é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6.20(O Enigma do Cavalo de Alexandre[12]). Num mosaico romano, Bucéfalo, o cavalo de Alexandre, o Grande, é representado como um fogoso corcel cor de bronze. Nesse exemplo, vamos "provar" que isso é uma falácia (uma grande mentira).

Inicialmente, "provaremos" que todos os cavalos têm mesma cor. De fato, considere a sentença: P(n): Num conjunto com n cavalos, todos têm a mesma cor.

Note que P(1) é obviamente verdadeira. Agora, suponha o resultado válido para conjuntos contendo n cavalos. Considere um conjunto $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}\}$ com $n + 1$ cavalos. Decompomos o conjunto C numa união de dois conjuntos: $C = C' \cup C'' = \{C_1, \ldots, C_n\} \cup \{C_2, \ldots, C_{n+1}\}$, cada um dos quais contém n cavalos.

Pela hipótese indutiva, segue-se que os cavalos em C' têm mesma cor, ocorrendo o mesmo para os cavalos em C''. Como $C_2 \in C' \cap C''$, segue-se que os cavalos de C' têm a mesma cor dos cavalos de C'', permitindo assim concluir que todos os cavalos em C, com $n + 1$ cavalos, têm a mesma cor. Assim, a nossa "demonstração" por indução está terminada, provando que P(n) é verdadeira para todo $n \in N$. Agora, todo mundo sabe (você sabia?) que Marengo, o famoso cavalo de Napoleão[13], era branco. Logo, Bucéfalo deveria ser branco.

Onde está o erro nessa prova?

O erro é escrevermos $\{C_1, C_2, \cdots, C_n, C_{n+1}\}$ como $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\} \cup \{C_2, \cdots, C_n, C_{n+1}\}$. Se tomarmos um conjunto $\{C_1, C_2\}$ com dois elementos não é possível escrevê-lo como a união de dois subconjuntos unitários de modo que possuam pelo menos um elemento em comum. Assim, $P(1) = V$ não implica em $P(2) = V$, invalidando a falsa demonstração.

Note ainda que, nas argumentações das demonstrações por Indução Matemática, poderia parecer que estamos usando o fato de P(n) ser verdadeira para deduzir que $P(n + 1)$ é verdadeira para em seguida concluir que P(n) é verdadeira. O que está ocorrendo? Estamos usando a tese para provar o resultado?

---

[12] Alexandre, o Grande (Pela, 356 a.C - Babilônia, 323 a.C.) ou Alexandre Magno, (em grego clássico: Ἀλέξανδρος ὁ Μέγας; romaniz.: Aléxandros ho Mégas), foi rei (basileu) do reino grego antigo da Macedônia e considerado um dos comandantes militares mais bem sucedidos da história.

[13] Napoleão Bonaparte (Ajaccio, 15 de agosto de 1769 — Longwood, 5 de maio de 1821) foi um estadista e líder militar francês que ganhou destaque durante a Revolução Francesa e liderou várias campanhas militares de sucesso durante as Guerras Revolucionárias Francesas.

A resposta é não! Preste bem atenção, pois essa é a parte mais delicada de toda a trama. Dado um número natural n, temos duas possibilidades:

(a) $P(n)$ é verdadeira, ou (b) $P(n)$ é falsa.

A hipótese (ii) do Princípio não exige em absoluto que assumamos $P(n)$ verdadeira para todo $n \in N$, podendo eventualmente ser falsa para algum valor de n, ou mesmo para todos os valores de n. O que a hipótese (ii) exige é que sempre que algum n pertença à categoria (a), acima, então $n + 1$ também pertença a essa mesma categoria; não exigindo nada quando n pertencer à categoria (b).

Por exemplo, a sentença $P(n)$: $n = n + 1$ satisfaz (por vacuidade) a hipótese (ii) do Princípio, já que nenhum $n \in \mathbb{N}$ pertence à categoria (a). O que falha para que o Princípio de Indução nos garanta que $P(n)$ é verdadeira para todo n é que a hipótese (i) não é verificada, pois $P(1) = 2$ é falsa !

Daí, de tudo que foi exposto, a necessidade de verificar-se cuidadosamente se o passo base e o passo de indução se verificam ao realizar uma demonstração utilizando-se o método de indução matemática.

7 APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Inicialmente demonstraremos a validade de um dos mais belos resultados da geometria plana, o Teorema de Pitágoras, seu recíproco e generalização, utilizando o método de demonstração ou prova direta seguido de outros teoremas e suas provas diretas. Em seguida provaremos alguns resultados utilizando o método de demonstração ou prova indireta por redução ao absurdo. No anexo I, apresentaremos todo o desenvolvimento axiomático da geometria plana no que diz respeito as definições, axiomas, proposições e teoremas que antecedem e são necessários, de forma direta ou indireta, à enunciação ou demonstração desses resultados. Finalmente apresentaremos demonstrações por indução de conhecidos teoremas da matemática do Ensino Médio.

Todos as aplicações, teoremas e demonstrações apresentados a seguir foram adaptados de [2], [6], [7], [[8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] e [16].

7.1 DEMONSTRAÇÕES COM O MÉTODO DE PROVA DIRETA

Nesta seção antes de realizar uma demonstração de fato vamos relembrar a definição dada a uma demonstração e associar ao seu argumento cada premissa e conclusão do teorema apresentado, bem como esclarecer o método de demonstração, as regras de inferência e proposições anteriores utilizadas.

Uma demonstração ou dedução de uma proposição q_n, por meio das regras de inferência ou substituição, a partir das premissas $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, como vimos no Capítulo 2, consiste na construção de um argumento $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1} \vdash q_n$ a partir de uma sequência finita de proposições $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ tais que cada x_i ou é uma premissa (com x_1 hipótese do teorema) ou resulta de proposições anteriores da sequência pelo uso de uma Regra de Inferência ou substituição, e de tal modo que a última proposição x_k da sequência seja a conclusão (tese do teorema) q_n do argumento dado.

Aplicação 7.1(Teorema de Pitágoras).

"Se um triângulo é retângulo, então a soma dos quadrados das medidas dos seus catetos é igual ao quadrado da medida de sua hipotenusa."

Demonstração 1.

Utilizaremos o método de demonstração direta.

Nesse caso teremos $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$ e $X_3 = q_3$ onde cada proposição a partir da hipótese p_1 resulta da(a) anterior(es) a partir do uso das regras de inferência: modus ponens, substituição e silogismo; bem como de propriedades algébricas usuais.

Sendo p_1: Um triângulo é retângulo;

p_2: A medida de cada um dos seus catetos é a média geométrica da medida de sua projeção sobre a hipotenusa e a medida da hipotenusa;

q_3: Se um triângulo é retângulo, então a soma dos quadrados das medidas dos seus catetos é igual ao quadrado da medida de sua hipotenusa.

E levando em conta o lema a seguir.

Lema 7.1. $p_1 \longrightarrow p_2$: Se um triângulo é retângulo então, a medida de cada um dos seus catetos é a média geométrica da medida de sua projeção sobre a hipotenusa e a medida da hipotenusa (demonstração ver anexo I: item 109 (a)).

Temos:

(1) p_1 (Premissa: hipótese)

---

(2) $p_1 \longrightarrow p_2$ (Lema 7.1.)

(3) p_2 (Modus ponens: 1 e 2)

(4) $p_2 \longrightarrow q_3$ (Propriedades da igualdade e reverso da distributiva da multiplicação em relação a adição e substituição)

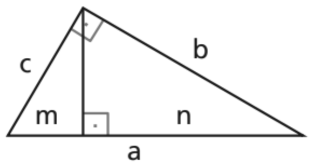
(5) $p_1 \longrightarrow q_3$ (silogismo: 2 e 4)

(6) q_3 (Modus ponens: 1 e 5 – Conclusão)

Demonstração 2.

De fato, por hipótese, o triângulo é retângulo. Sejam *b, c* e *a* as respectivas medidas dos catetos e hipotenusa desse triangulo e *n* e *m* as respectivas projeções dos catetos *b* e *c* sobre a hipotenusa (figura 7.1), de modo que n + m = a. Daí, do *lema 7.1.2.,* temos que $b^2 = a\ .\ n$, $c^2 = a\ .\ m$ e $n + m = a$. Daí, $b^2 + c^2 = a\ .\ n + a\ .\ m \Rightarrow b^2 + c^2 = a\ .\ (n + m) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$.

Figura 7.1 - Triângulo retângulo e projeções catetos



Fonte: [9], p.218

Aplicação 7.2(Teorema Recíproco de Pitágoras).

"Se um triângulo tem o quadrado da medida de um lado igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo."

Analogamente, cabe o método de prova direta.

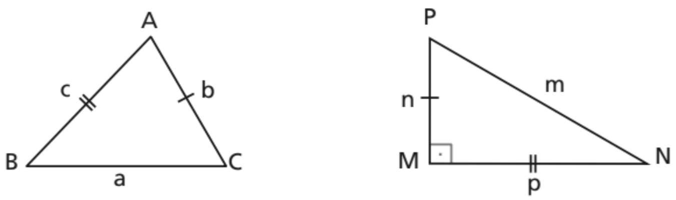
Demonstração.

A demonstração exibida do teorema decorre do teorema de Pitágoras e do lema abaixo, cuja demonstração encontra-se no **anexo I - item 55**.

Lema 7.2. *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes (3º caso de congruência de triângulos — LLL).*

Sem perda de generalidade, sejam *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo ABC, por hipótese, temos $a^2=b^2+c^2$. Consideremos um outro triângulo MNP, retângulo, de catetos de medida *n* e *p* e hipotenusa de medida *m*, tal que n = b e p = c (figura 7.1). Do teorema de Pitágoras temos: $n^2 + p^2 = m^2$. Mas, $n^2+p^2 = b^2+c^2$. Daí, $m^2 = a^2$. Donde m = a. Logo, pelo **lema 2**, os triângulos dados são congruentes. Portanto, o triangulo ABC é retângulo.

Figura 7.1 - Triângulo retângulo e projeções catetos



Fonte: [9], p.219

Nessa última demonstração, bem como a partir de agora, faremos menção apenas ao método de demonstração utilizado e dispondo o referente argumento da demonstração apenas na sua forma usual, porém cada passagem será justificada e fundamentada nas regras de inferência previamente estabelecidas e proposições anteriores (lemas).

Aplicação 7.3(Generalização do Teorema de Pitágoras – Lei dos Cossenos).

"Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado."

Demonstração.

A demonstração, método direto, exibida a seguir decorre imediatamente do Teorema de Pitágoras e do uso da definição de cosseno de um ângulo que consta no anexo I - item 112.

(i) Seja ABC um triângulo com $\hat{A} < 90^0$.

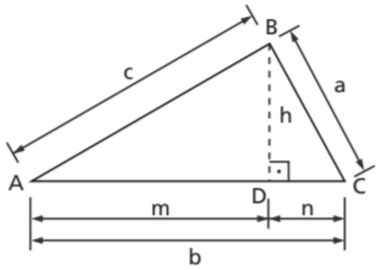
Traçando a altura h referente ao lado AC no triangulo ABC obtemos o ponto D e o triangulo BCD e o triangulo BAD, conforme figura, ambos retângulos em D por construção, daí: $a^2 = n^2 + h^2$ (1) e $h^2 = c^2 - m^2$ (2). Sejam m e n as respectivas projeções dos catetos c e a sobre a hipotenusa b do triangulo ABC, temos: $n = b - m$ (3). Daí, substituindo (3) e (2) em (1) ficamos com

$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$

mas, no triângulo BAD: $m = c \, . \cos \hat{A}$

Logo, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \hat{A}$.

Figura 7.2 – Triangulo retângulo projeções e altura



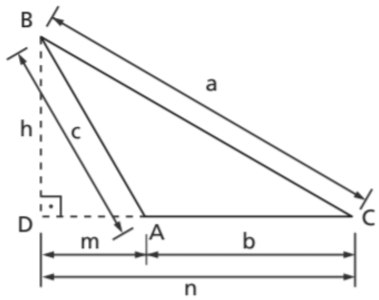
Fonte: [11], p.226

(ii) Seja ABC um triângulo de lados AB = c, AC = b e BC = a, com $90^0 < \hat{A} < 180^0$.

Traçando a altura h referente ao lado AC no triangulo ABC obtemos o ponto D na reta suporte do lado AC, tal que AD = m, DC = n e os triângulos BCD e BAD, conforme figura 7.2, ambos retângulos em D por construção, daí: $a^2 = n^2 + h^2$ (1) e $h^2 = c^2 - m^2$ (2). Note ainda que n = b + m (3). Daí, substituindo (3) e (2) em (1) ficamos com

$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$

Figura 7.3 – Triângulo Obtusângulo



Fonte: [11], p.227

mas, no triângulo BAD: $m = c \,.\, \cos(180^0 - \hat{A}) \Rightarrow m = - c \,.\, \cos \hat{A}$.

Logo, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \hat{A}$.

Analogamente, podemos provar que:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc.\cos C$.

Aplicação 7.4(Fórmula de determinação das raízes da equação quadrática)**.**

Dois números reais são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$*, com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$ *se, e somente se, um deles for* $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *e o outro for* $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$*, com* $b^2 - 4ac \geq 0$*.*

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad & \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c \\
& \Leftrightarrow 4a(ax^2 + bx) = 4a(-c) \\
& \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac \\
& \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2 \\
& \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac, \text{ como } b^2 - 4ac \geq 0 \\
& \Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\
& \Leftrightarrow 2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\
& \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

7.2 DEMONSTRAÇÕES COM O MÉTODO DE REDUÇÃO AO ABSURDO

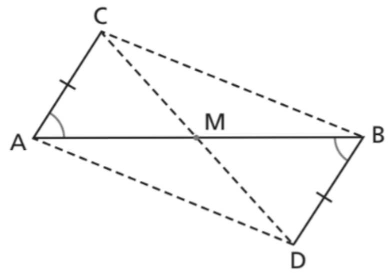
Aplicação 7.5. *O ponto médio de um segmento de reta existe e é único.*

Demonstração.

(i) Existência (Demonstração Direta)

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, usando os postulados de transporte de ângulos **(Anexo I - item 35)** e de segmentos **(Anexo I - item 18)** construímos $\angle CAB \equiv \angle DBA$ e $\overline{AC} \equiv \overline{DB}$ com C e D em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ (figura 7.4).

Figura 7.4 – Ponto médio



Fonte: [9], p.42

O segmento $\overline{CD}$ intercepta o segmento $\overline{AB}$ num ponto M. Vejamos uma sequência de congruências de triângulos:

∠CAB ≡ ∠DBA (**LAL**, AB é comum)

∠CAD ≡ ∠DBC (**ALA**, com soma de ângulos ou pelo caso LLL)

∠AMD ≡ ∠BMC (**ALA**)

Desta última congruência decorre que $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$. Daí, da definição de ponto médio (Anexo I - item 21) M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

(ii) Unicidade (Demonstração Indireta – Redução ao absurdo)

Se X e Y distintos fossem pontos médios de $\overline{AB}$, teríamos:

$\overline{AX} \equiv \overline{XB}$ (1) e $\overline{AY} \equiv \overline{YB}$ (2)

Figura 7.5 – Pontos médios

Fonte: [9], p.12

Daí,

(3) X está entre A e Y $\Rightarrow \overline{AY} > \overline{AX}$ e (4) Y está entre X e B $\Rightarrow \overline{XB} > \overline{YB}$

ou

(5) Y está entre A e X $\Rightarrow \overline{AX} > \overline{AY}$ e (6) Y está entre A e X $\Rightarrow \overline{YB} > \overline{XB}$

Logo,

De (1), (3) e (4), temos: $\overline{AY} > \overline{AX} \equiv \overline{XB} > \overline{YB}$, o que é absurdo, de acordo com (2)

De (2), (5) e (6), temos: $\overline{AX} > \overline{AY} \equiv \overline{YB} > \overline{XB}$, o que é absurdo, de acordo com (1)

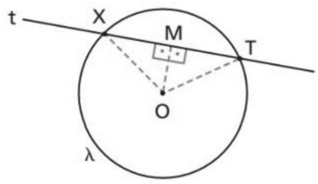
Portanto, o ponto médio de $\overline{AB}$ é único.

Aplicação 7.6. *Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.*

Demonstração.

Seja λ uma circunferência e t uma reta tangente a mesma em T.

Figura 7.6 – Reta Secante



Fonte: [I9], p.149

Se t não fosse perpendicular a $\overline{OT}$ (figura), teríamos o que segue.

Seja M pé da perpendicular à reta t por O. O ponto M seria distinto de T.

Tomando na semirreta oposta a $\overrightarrow{MT}$ um ponto X tal que $\overline{MX} = \overline{MT}$, teríamos: $\overline{OM}$ comum, $\overline{OM} \perp \overline{TX}$, $\overline{MX} \equiv \overline{MT} \Longrightarrow \Delta OMX \equiv \Delta OMT \Longrightarrow \overline{OX} \equiv \overline{OT} \Longrightarrow \overline{OX} = r \Longrightarrow X \in \lambda$.

Logo, t interceptaria λ em dois pontos distintos, T e X, o que é absurdo, de acordo com a hipótese.

Portanto, t é perpendicular a $\overline{OT}$ em T.

Aplicação 7.7. *Não existe triângulo retângulo cujas medidas dos lados, expressas numa mesma unidade de medida, são números primos.*

Demonstração.

Faremos uso do seguinte:

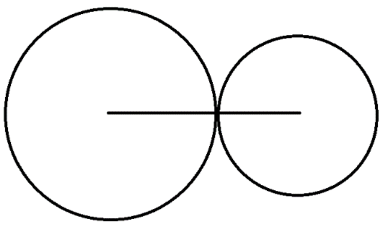
Lema 7.3. *Se x é ímpar, então x^2 é ímpar.*

De fato, x sendo ímpar temos: $x = 2n + 1$, com $n \in \mathbb{N}$. Logo, $x^2 = (2n + 1)^2 = 2(2n^2+2n) + 1$. Portanto x^2 é ímpar.

Supondo que seja possível, isto é, exista o triângulo retângulo ABC reto em Â tal que os seus lados tenham medida $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$; com a, b e c números primos e $a > b$ e $a > c$. Do Teorema de Pitágoras, temos: $a^2 = b^2 + c^2$. Sendo a, b e c primos, não podem ser todos ímpares devido ao fato de que a soma de dois ímpares é par e ao Lema anterior, temos que os números a, b e c não podem ser todos ímpares. Daí, $b = 2$ ou $c = 2$ uma vez que são todos primos com $a > b$ e $a > c$. Digamos que $c = 2$. Teremos então: $a^2 = b^2 + 4 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 4 \Leftrightarrow (a + b).(a - b) = 4$ e analisando os possíveis valores de $a + b$ e $a - b$, que são 1, 2 ou 4, chegamos a uma contradição um vez que no caso de $b \neq c = 2$ o menor valor da soma $(a + b)$ de dois números primos ímpares distintos é $3 + 5 = 8$ e no caso de $b = c = 2$ o menor valor da soma $(a + b)$ seria $3 + 2= 5$. Portanto, é impossível existir tal triângulo.

Aplicação 7.8. *Sejam dois círculos tangentes C_1 e C_2 com respectivos raios r_1 e r_2, tais que r_1 é um número racional e r_2 irracional. Inicialmente os círculos estão parados com os pontos P_1 do círculo C_1 e P_2 do círculo C_2 coincidentes. Logo após o instante inicial, os círculos C_1 e C_2 começam um movimento uniforme de rotação sem deslizamento. Uma vez o movimento iniciado, os pontos P_1 e P_2 nunca mais serão coincidentes novamente.*

Fgura 7.7 – Círculos Tangentes



Fonte: Elaborado pelo autor.

Demonstração.

Supomos, por absurdo, que P_1 e P_2 se encontram em algum momento após os círculos terem iniciados seus movimentos. Como o movimento é uniforme e sem deslizamento, podemos afirmar que as velocidades lineares de C_1 e C_2 são iguais. Então seja esse encontro dado, após C_1 ter dado m voltas e C_2, n voltas. Dessa forma temos:

$$2\pi r_1 m = 2\pi r_2 n \Leftrightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{n}{m}$$

Nesse ponto obtemos um absurdo, pois sendo r_1 um número racional e r_2 irracional, temos que a razão $\frac{r_1}{r_2}$ é um número irracional, enquanto $\frac{n}{m}$ é um número racional, já que $n, m \in \mathbb{Z}^*$. Logo, essas frações não podem ser iguais. Como nossa hipótese de que os dois pontos se encontrariam em algum momento nos levou a um absurdo, concluímos que eles nunca se encontrarão, o que prova o teorema original.

Aplicação 7.9. *O polinômio* $p(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1$*, com coeficientes inteiros, não admite raízes negativas.*

Demonstração.

Suponha por absurdo que o polinômio $p(x)$ dado admite uma raiz negativa, isto é, seja $k < 0$ esta raiz. Assim, temos:

$p(k) = k^5 - k^2 + 2k - 1 \Leftrightarrow k^5 = k^2 - 2k + 1 \Leftrightarrow k^5 = (k - 1)^2$

daí obtemos: $k^5 = (k - 1)^2$, note que $k^5 < 0$, pois por hipótese $k < 0$ e $(k - 1)^2 > 0$. Um absurdo que decorre do fato de termos assumido que o polinômio dado admitia uma raiz negativa.

Portanto, o polinômio $p(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1$, não admite raízes negativas.

Aplicação 7.10. *Existem infinitos números primos.*

Demonstração.

Supondo que existe uma quantidade finita de números primos. Digamos apenas n números primos, onde n é inteiro. Podemos colocar os primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ em ordem, de tal forma que: $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Com isto, teríamos que p_n é o maior primo de todos.

Considere o número $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Ele não é divisível por nenhum dos primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, portanto ele também é primo e, além disso, é maior do que todos os demais números primos, incluindo p_n. Mas isto contradiz a afirmação de que p_n é o maior primo de todos, o que é um absurdo! Portanto, existem infinitos números primos.

7.3. DEMONSTRAÇÕES COM O MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Aplicação 7.11. As operações adição e multiplicação são associativas e comutativas e a multiplicação é distributiva em relação à adição. Isto é, para todos n, m, p $\in \mathbb{N}$, temos

- **i)** $n + (m + p) = (n + m) + p$ (associatividade da adição);
- **ii)** $n \,.\, (m + p) = n \,.\, m + n \,.\, p$ (distributividade da multiplicação em relação à adição);
- **iii)** $n \,.\, (m \,.\, p) = (n \,.\, m) \,.\, p$ (associatividade da multiplicação);
- **iv)** $n + m = m + n$ (comutatividade da adição);
- **v)** $n \,.\, m = m \,.\, n$ (comutatividade da multiplicação);

Demonstração.

Inicialmente provemos o lema abaixo:

Lema 7.4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

- (I) $n + 1 = 1 + n$;
- (II) $n \,.\, 1 = 1 \,.\, n$.

Demonstração.

- (I) Seja P(n) a proposição (I), tal que: $P(n) = V$ se $n + 1 = 1 + n$.
  Temos que $p(1) = V$ pois, evidentemente, $1 + 1 = 1 + 1$. Suponhamos agora que $p(n) = V$ para um certo n natural e provemos, a partir daí, que $p(n + 1) = V$. De $P(n) = V$, temos $n + 1 = 1 + n$ e então $(n + 1) + 1 = (1 + n) + 1$ e, da definição de adição, temos: $(1 + n) + 1 = 1 + (n + 1)$. Portanto, $P(n + 1) = V$. Assim, pelo PIM, $P(n) = V$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **(II)** Seja P(n) a proposição (II), tal que: $P(n) = V$ se $n \,.\, 1 = 1 \,.\, n$.
  Temos que $P(1) = V$ pois, evidentemente, $1 \,.\, 1 = 1 \,.\, 1$. Suponhamos agora que $P(n) = V$ para um certo n natural e provemos, a partir daí, que $P(n + 1) = V$. De $P(n) = V$, temos $n \,.\, 1 = 1 \,.\, n$ e então $(n + 1) \,.\, 1 = n + 1 = n \,.\, 1 + 1 = 1 \,.\, n + 1$ e, da definição de multiplicação, temos: $1.n + 1 = 1.(n + 1)$. Portanto, $P(n + 1) = V$. Assim, pelo PIM, $P(n) = V$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora provemos o teorema dado:

Demonstração.

i) Seja $P(n)$ a proposição (i) tal que: $P(k) = V$ se $(n + m) + k = n + (m + k)$, para um certo natural k. Temos $P(1) = V$, pois $(n + m) + 1 = (n + m) +1 = n + (m + 1)$, onde na última igualdade foi utilizada a definição de adição. Suponhamos que $p(k) = V$, ou seja, suponhamos que $(n + m) + k = n + (m + k)$, e provemos que $p(k + 1) = V$. Temos $(n + m) + (k + 1) = ((n + m) + k) + 1 = (n + (m + k)) + 1 = n + (m + k) + 1 = n + (m + (k + 1))$.

ii) Seja $P(n)$ a proposição (ii) tal que: $P(k) = V$ se $n . (m + k) = n . m + n . k$, para um certo natural k. Temos $P(1) = V$, pois $n . (m + 1) = n . m + n = n . m + n . 1$. Suponhamos que $p(k) = V$, ou seja, suponhamos que $n . (m + k) = n . m + n. k$, e provemos que $p(k + 1) = V$. Temos $n . (m + (k + 1)) = n . ((m + k) + 1) = n . (m + k) + n = (n . m + n . k) + n = n . m + (n . k + n) = n . m + n . (K + 1)$.

iii) Seja $P(n)$ a proposição (iii) tal que: $P(k) = V$ se $(n . m) . k = n . (m . k)$, para um certo natural k. Temos $p(1) = V$, pois $(n . m) . 1 = n . m = n . (m . 1)$. Suponhamos que $p(k) = V$, ou seja, suponhamos que $(n . m) . k = n . (m . k)$, e provemos que $p(k + 1) = V$. Temos

$(n . m) . (k + 1) = (n . m) . k + (n . m)$ (definição da multiplicação)

$(n . m) . (k + 1) = n . (m .k) + n . m$ (hipótese indutiva)

$(n . m) . (k + 1) = n . (m . k + m)$ (distributividade "ao contrário")

$(n . m) . (k + 1) = n . (m . (k + 1))$ (definição de multiplicação).

iv) Seja $P(n)$ a proposição (iv) tal que: $P(n) = V$ se $n + m = m + n$, para um certo natural n. Pelo lema 1.2, temos $p(1) = V$. Suponhamos que $p(m) = V$, ou seja, suponhamos que $n + m = m + n$, e provemos que $p(m + 1) = V$. Temos

$n + (m + 1) = (n + m) + 1$ (definição adição)

$(n + m) + 1 = (m + n) + 1$ (hipótese indutiva)

$(m + n) + 1 = m + (n + 1)$ (associatividade da adição)

$m + (n + 1) = m + (1 + n)$ (lema)

$m + (1 + n) = (m + 1) + n$ (associatividade da adição)

v) Seja $P(n)$ a proposição (iv) tal que: $P(n) = V$ se $n . m = m . n$, para um certo natural n. Pelo lema 1.2, temos $p(1) = V$. Suponhamos que $p(m) = V$, ou seja, suponhamos que $n . m = m . n$, e provemos que $p(m + 1) = V$. Inicialmente, provemos que $(n + m) . p = n . p + m . p$, quaisquer que sejam os naturais n, m e p. Para isto, consideremos também a proposição $Q(k) = V$ se $(n + m) . k = n . k + m . k$, para um certo natural k. Temos que $Q(1) = V$, pois $(m + n) . 1 = m + n = m . 1 + n . 1$. Suponhamos que $Q(k) = V$ e provemos que $Q(k + 1) = V$. Temos

$(m + n) . (k + 1) = (m + n) . k + m + n$ (distributividade e associatividade da soma)

$(m + n) . (k + 1) = m . k + n . k + m + n$ (hipótese indutiva)

$(m + n) . (k + 1) = m . k + m + n . k + n$ (comutatividade da adição)

$(m + n) . (k + 1) = m . (k + 1) + n . (k + 1)$ (distributividade "ao contrário")

Agora, voltando a P(n), temos

$n . (m + 1) = n . m + n$ (definição de multiplicação)

$n . (m + 1) = m . n + n$ (hipótese indutiva)

$n . (m + 1) = m . n + 1 . n$ $(n = n . 1 = 1 .n)$ $n . (m + 1) = (m + 1) . n$ (demonstração acima).

Portanto, pelo PIM, as proposições são válidas para todos $n, m, p \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.12. *P(n): Se A é um conjunto finito com n elementos, então $\wp(A)$, conjunto das partes de A, tem 2^n elementos, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Demonstração.

(i) $P(0) = V$. De fato, pois $\wp(A) = \{\emptyset\}$, que é unitário e, portanto, tem $2^0 = 1$ elemento. E naturalmente $P(1) = V$, seja $A = \{a\}$, teremos $\wp(\{a\}) = \{\{a\},\emptyset\}$, que é binário e portanto tem 2^1 elementos.

(ii) $P(k) = V \Rightarrow P(k + 1)$, isto é, admitamos que a proposição seja verdadeira para um conjunto A com k elementos, ou seja, $\wp(A)$ tem 2^k elementos. Provemos que a proposição é verdadeira para um conjunto B com $k + 1$ elementos, ou seja, $\wp(B)$ tem 2^{k+1} elementos.

De fato, suponhamos que $B = A \cup \{b\}$, ou seja, b é o elemento que está em B e não pertence a A. Então $\wp(B)$ é formado com os subconjuntos de A (que são 2^k) e mais a reunião de $\{b\}$ com cada um desses subconjuntos (que são outros 2^k conjuntos). Logo, $\wp(B)$ possui $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ elementos.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aplicação 7.13. P(n): *Sejam a, b* $\in \mathbb{R}$ *e m, n* $\in N$. *Então,*

i) $a^{m} \cdot a^{n} = a^{n+m}$.

ii) $(a^{m})^{n} = a^{mn}$.

iii) $(a \cdot b)^{n} = a^{n} \cdot b^{n}$.

Demonstração.

(i) Fixemos $a \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, arbitrariamente. Demonstremos a propriedade por indução sobre n.

Para n = 1, a propriedade é válida, pois, pelas definições,

$a^{m} \cdot a^{1} = a^{m} \cdot a = a^{m+1}$.

Por outro lado, supondo que $a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$, temos que

$a^{m} \cdot a^{n+1} = a^{m} \cdot (a^{n} \cdot a) = (a^{m} \cdot a^{n}) \cdot a = a^{m+n} \cdot a = a^{m+n+1}$.

Isso, pelo Princípio de Indução Matemática, prova a nossa propriedade.

(ii) Para n = 1, a propriedade é válida, pois, pelas definições,

$(a^{m})^{1} = a^{m} = a^{m.1}$.

Por outro lado, supondo que $(a^{m})^{n} = a^{mn}$ e levando em conta o item (ii), temos que

$(a^{m})^{n+1} = (a^{m})^{n} . a^{m} = a^{mn}.a^{m} = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}$.

Isso, pelo Princípio de Indução Matemática, prova a nossa propriedade.

(iii) Para n = 1, a propriedade é válida, pois, pelas definições,

$(a \cdot b)^{1} = a \cdot b = a^{1} \cdot b^{1}$.

Por outro lado, supondo que $(a \cdot b)^{n} = a^{n} \cdot b^{n}$ e pela definição temos que

$(a \cdot b)^{n+1} = (a \cdot b)^{n} \cdot (a \cdot b) = a^{n} \cdot b^{n} \cdot a \cdot b = a^{n} \cdot a \cdot b^{n} \cdot b = a^{n+1} \cdot b^{n+1}$.

Isso, pelo Princípio de Indução Matemática, prova a nossa propriedade.

Definindo potência de expoente inteiro negativo, podemos estender tais propriedades para potências de expoentes inteiros.

De fato, se $\mathrm{n} = 0$ o resultado é óbvio e se $\mathrm{n} < 0$, basta usarmos $\mathrm{n} = -\mathrm{k}$ com $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ e $\mathrm{k} > 0$ e utilizarmos a proposição anterior.

Definindo raiz enésima aritmética, potências de expoentes racionais e usando a *densidade dos números racionais*[14] podemos estender tal proposição também para potências de expoentes reais. Porém, a demonstração de tal resultado foge do objetivo deste trabalho.

Aplicação 7.14. *O quadrado de um polinômio é igual à soma dos quadrados dos seus termos e do dobro de todos os produtos de seus termos tomados dois a dois, ou seja,*

P(n): $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1.a_2 + a_1.a_3 + \cdots + a_{n-1}.a_n)$,

$\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $n \geq 2$.

Demonstração.

Seja a proposição acima, com $n \in \mathbb{N}$

(i) P(2) = V. De fato, $(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2(a_1.a_2)$.

(ii) P(k - 1) = V $\Rightarrow$ P(k), isto é,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + 2(a_1.a_2 + a_1.a_3 + \cdots + a_{k-2}.a_{k-1}) \Rightarrow$$
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + 2(a_1.a_2 + a_1.a_3 + \cdots + a_{k-1}.a_k).$$

De fato, $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k)^2 = [(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + a_k]^2$.

Daí, usando P(2)=V, temos:

$$[(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + a_k]^2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})a_k + a_k^2$$

Usando agora a hipótese: P(k -1) = V, temos:

---

[14] Densidade dos números Racionais. Essa propriedade nos diz que os números racionais formam um conjunto denso nos números reais, ou seja, dados dois números reais α e β, com α < β, existe um número racional r tal que α < r < β.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})a_k + a_k^2 =$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + 2(a_1.a_2 + a_1.a_3 + \cdots + a_{k-2}.a_{k-1})$$
$$+ 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})a_k + a_k^2 =$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k-1}^2 + a_k^2 + 2(a_1.a_2 + a_1.a_3 + \cdots + a_{k-1}.a_k).$$

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.15.(Termo Geral da PA). P(n): *O n-ésimo termo de uma Progressão Aritmética pode ser determinado pela fórmula:*

$$a_n = a_1 + (n - 1).r,$$

onde $a_1 \in \mathbb{R}$ *é o primeiro termo da progressão com* $n \in \mathbb{N}$ *e* $r \in \mathbb{R}$ *a razão da mesma.*

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato, $a_1 = a_1 + (1 - 1).\ r = a_1 + 0.r = a_1$

(ii) P(k) = V $\Longrightarrow$ P(k + 1) = V, isto é, $a_k = a_1 + (k - 1).r \Longrightarrow a_{k+1} = a_1 + (k + 1 - 1).r = a_1 + rk$.

De fato, da definição de Progressão Aritmética, temos: $a_{k+1} = a_k + r$

Daí, pela hipótese de indução, temos: $a_{k+1} = a_1 + (k - 1).r + r = a_1 + rk$

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.16(Termo Geral da PG). *P(n): O n-ésimo termo de uma Progressão Geométrica pode ser determinado pela fórmula:*

$$a_n = a_1.q^{(n - 1)},$$

onde $a_1 \in \mathbb{R}$ *é o primeiro termo da progressão com* $n \in \mathbb{N}$ *e* $q \in \mathbb{R}$ *a razão da mesma.*

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato, $a_1 = a_1q^{(1 - 1)} = a_1\ q^0 = a_1$.

(ii) P(k) = V $\Longrightarrow$ P(k + 1) = V, isto é, $a_k = a_1\ q^{(k - 1)} \Longrightarrow a_{k+1} = a_1\ q^{(k + 1 - 1)} = a_1q^k$.

De fato, da definição de Progressão Geométrica, temos: $a_{k+1} = a_k q$

Daí, pela hipótese de indução, temos: $a_{k+1} = a_1\, q^{(k-1)} q = a_1 q^k$.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.17(Montante). *P(n): O montante M acumulado ao final da aplicação de um capital C no regime de juros compostos, durante n unidades de tempo à taxa i por unidade de tempo, é dado por:* $M_n = C \cdot (1 + i)^n$.

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato, $M_1 = C \cdot (1 + i)^1 = C \cdot (1 + i) = C + C \cdot i = C + C \cdot i \cdot 1$.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k+1) = V$, isto é, $M_k = C \cdot (1 + i)^k \Longrightarrow M_{k+1} = C \cdot (1 + i)^{k+1}$

com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$.

De fato, $M_{k+1} = M_k + M_k i = C \cdot (1 + i)^k + C \cdot (1 + i)^k \cdot i = C \cdot (1 + i)^k \cdot (1 + i) =$
$= C \cdot (1 + i)^{k+1}$.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.18 (Fórmula do nº de Permutações). *Q(n): O número de permutações de m elementos pode ser determinado segundo a fórmula* $P_m = m!$, *com* $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

(i) Q(1) = V.

De fato, $P_1 = 1! = 1$.

(ii) $Q(k) = V \Longrightarrow Q(k+1) = V$, isto é, $P_k = K! \Longrightarrow P_{k+1} = (K+1)!$.

De fato, entre os k + 1 elementos dados, $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$, escolhamos os k primeiros e formemos com eles todas as permutações possíveis. Por hipótese haverá k! permutações desse tipo. Acrescentemos em cada uma delas o elemento a_{k+1} diante do primeiro, do segundo, ..., do k-ésimo e depois do k-ésimo elemento. Por essa via obtemos, a partir de cada permutação de k elementos, um total de k + 1 permutações de k + 1 elementos. No total haverá k! (k + 1) = (k + 1)! permutações de K + 1 elementos.

É necessário demonstrar agora que:

1) entre as $(k + 1)!$ permutações não há duas iguais; e

2) obtivemos todas as permutações de $k + 1$ elementos.

De fato,

1) Suponhamos que entre as $(k + 1)!$ permutações haja duas iguais. Sejam elas p_1 e p_2. Suponhamos que o elemento a_{k-1} ocupa na permutação p_1 a posição s-ésima a partir da esquerda. Também em p_2 elemento a_{k-1} ocupará a posição s-ésima a partir da esquerda. Eliminemos de p_1 e p_2 o elemento a_{k+1}. Obteremos duas permutações iguais, $\overline{p_1}$ e $\overline{p_2}$, de k elementos. Assim, pois, para obter p_1 e p_2 colocamos o elemento a_{k+1} duas vezes na mesma posição e numa mesma permutação dos elementos $a_1, a_2, ..., a_k$. Mas isso contradiz a regra empregada para construir as permutações.

Logo, todas as permutações construídas são distintas.

2) Suponhamos que não obtivemos uma permutação p de $k + 1$ elementos e que o elemento a_{k+1} ocupa em p a posição s-ésima a partir da esquerda. Eliminemos de p elemento a_{k-1}. Obteremos uma permutação $\bar{p}$ formada pelos k elementos iniciais. Quer dizer, para obter p basta tomar a permutação $\bar{p}$ e colocar nela o elemento a_{k-1} na posição s-ésima a partir da esquerda. E impossível que tenhamos pulado a permutação p, já que tomamos todas as permutações dos k elementos iniciais. É impossível que não tenhamos colocado o elemento a_{k+1} na posição assinalada, pois o colocamos na primeira, na segunda, ..., na $(k + 1)$-ésima posição a partir da esquerda. Logo, não perdemos nenhuma permutação de $k + 1$ elementos.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(m) é verdadeira, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.19(Fórmula do nº de arranjos) *P(n): O número de arranjos de m elementos tomados n a n pode ser determinado segundo a fórmula*

$$A_m^n = m\,(m - 1)(m - 2) \dots (m - n + 1)\,,\ com\ n, m \in \mathbb{N}.$$

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato, $A_m^1 = m$.

(ii) P(k) = V ⟹ P(k + 1) = V, isto é, A_m^k = m (m - 1)(m – 2) ... (m – k + 1) ⟹ A_m^{k+1} = m (m - 1)(m – 2) ... (m – (k+1) + 1) = m (m - 1)(m – 2) ... (m – k).

De fato, para obter todos os arranjos de m elementos tomados k + 1 a k + 1, usando a hipótese, basta tomar os arranjos de m elementos tomados k a k e acrescentar ao final de cada um deles um dos m - k elementos restantes. É fácil convencer-se de que os arranjos de m elementos tomados k + 1 a k + 1 obtidos desse modo são distintos e de que, ademais, qualquer arranjo de m elementos tomados k + 1 a k + 1 figura entre esses. Logo,

$$A_m^{k+1} = A_m^k(\text{m-k}) = \text{m (m - 1)(m – 2) ... (m – (k+1) + 1) = m (m - 1)(m – 2) ... (m – k)}.$$

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.20(Fórmula do nº de Combinações). *P(n): O número de combinações de m elementos tomados n a n pode ser determinado segundo a fórmula*

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2).\ \ldots\ .(m-n+1)}{1.2.3.\ \ldots\ .n}, \textit{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato,. $C_m^1 = \frac{(m-1+1)}{1} = \text{m}$.

(ii) P(k) = V ⟹ P(k + 1) = V, isto é,

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2).\ \ldots\ .(m-k+1)}{1.2.3.\ \ldots\ .k} \Longrightarrow C_m^{k+1} = \frac{m(m-1)(m-2).\ \ldots\ .(m-k)}{1.2.3.\ \ldots\ .k(k+1)}$$

De fato, para obter todas as combinações de m elementos tomados k + 1 a k + 1, consideremos todas as combinações de m elementos tomados k a k e acrescentemos a cada uma delas, o (k + 1)-ésimo elemento, um dos m - k elementos restantes.

Fica evidente que dessa forma serão obtidas todas as combinações de m elementos tomados k + 1 a k + 1, aparecendo cada uma delas k + 1 vezes.

De fato, a combinação {a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}} será obtida ao acrescentarmos o elemento a_1 à combinação {a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}} ao acrescentarmos o elemento a_2 à combinação {a_1, a_3, ..., a_k, a_{k+1}} ao acrescentarmos o elemento a_3 à combinação {a_1, a_2, a_4, ..., a_k, a_{k+1}}, etc., e, por último, ao acrescentarmos o elemento a_{k+1} à combinação $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$. Donde, $C_m^{k+1} = C_m^k . \frac{m-k}{k+1}$. Mas, da hipótese, temos $C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2). \ldots .(m-k+1)}{1.2.3. \ldots .k}$. Daí,

$$C_m^{k+1} = \frac{m(m-1)(m-2). \ldots .(m-k+1)}{1.2.3. \ldots .k} . \frac{m-k}{k+1} = \frac{m(m-1)(m-2). \ldots .(m-k)}{1.2.3. \ldots .k(k+1)} .$$

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.21(Binômio de Newton[15]).

Quaisquer que sejam os números a e b e o número natural n, vale a proposição

$$P(n): (a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato,.$(a+b)^1 = a^1 + C_1^1 a^{1-1} b = (a+b)$

(ii) P(k) = V ⟹ P(k + 1) = V, isto é,

$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + b^k \implies$

$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + C_{k+1}^k a b^k + b^{k+1}$

De fato,

$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) =$

$= \left(a^k + C_k^1 a^{k-1} + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + b^k\right)(a+b) =$

$= a^{k+1} + (1 + C_k^1) a^k b + (C_k^1 + C_k^2)\, a^{k-1} b^2 + \cdots + (C_k^s + C_k^{s-1}) a^{k-s} b^{s+1} + \cdots + b^{k+1}.$

Levando em consideração que $C_k^s + C_k^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$, obtemos:

$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \cdots + C_{k+1}^{s+1} a^{k-s} b^{s+1} + \cdots + C_{k+1}^k a b^k + b^{k+1}$

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

[15] Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 4 de janeiro de 1643 — Londres, 31 de março de 1727) foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático.

Aplicação 7.22(Primeira fórmula de Moivre[16]). *P(n): Dado no número complexo* $z = p(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$*, não nulo, e o número inteiro n, temos:*

$$z^n = p^n\,(\cos n\theta + i\,\mathrm{sem}\theta)$$

Para demonstrar tal resultado faremos uso do seguinte lema demonstrado pelo método da prova direta.

Lema 7.5. *O módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores e seu argumento é congruente à soma dos argumentos dos fatores.*

Demonstração.

Suponhamos dados os números $z_1 = p_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = p_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \mathrm{sen}\,\theta_2)$ e calculemos o módulo e o argumento de: $z = z_1 \cdot z_2 = p \cdot (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Temos:

$$z = z_1 \cdot z_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \mathrm{sen}\,\theta_1)\,(\cos\theta_2 + i \cdot \mathrm{sen}\,\theta_2) =$$

$$= p_1 \cdot p_2 \cdot [(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1 \cdot \mathrm{sen}\,\theta_2) + i \cdot (\mathrm{sen}\,\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_2 \cdot \cos\theta_1)]$$

Logo:

$$z = z_1 \cdot z_2 = p \cdot (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = (p_1 \cdot p_2) \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \mathrm{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]$$

Portanto, $p = p_1 \cdot p_2$ e $\theta = (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Agora vamos a demonstração do Teorema 5.3.13.

Demonstração.

a) Inicialmente provemos a proposição P(n) para n natural.

(i) $P(1) = V$.

De fato, $z^1 = p^1(\cos(1.\theta) + i\,\mathrm{sen}(1.\theta)) = z = p(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$.

(ii) $P(k-1) = V \Longrightarrow P(k) = V$, isto é,

$$z^{k-1} = p^{k-1}\,(\cos((k-1)\theta) + i\,\mathrm{sen}((k-1)\theta)) \Longrightarrow z^k = p^k\,(\cos k\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta).$$

---

[16] Abraham de Moivre (Champagne, França, 26 de Maio de 1667 —Londres, Reino Unido, 27 de Novembro de 1754) foi um matemático francês famoso pela fórmula de Moivre.

De fato, $z^k = z^{k-1}.z$, mas por hipótese,

$z^{k-1} = p^{k-1}\,(\cos((k-1)\theta) + i\mathrm{sen}((k-1)\theta))$. Daí,

$z^k = z^{k-1}.z = p^{k-1}\,(\cos((k-1)\theta) + i\mathrm{sen}((k-1)\theta))\;.\;p(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta)$.

Assim, do lema anterior, temos:

$z^k = z^{k-1}.z = p^{k-1}.\,p\,(\cos(k\theta - \theta + \theta) + i\mathrm{sen}(k\theta - \theta + \theta)) = p^k\,(\cos k\theta + i\mathrm{sen} k\theta)$.

b) Vamos estender agora a proposição P(n) para n inteiro.

Se $n < 0$, então $n = -m$ com $m \in \mathbb{N}$; portanto a m se aplica o resultado anterior:

$$z^k = z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{(p^n\,(cosm\theta\ +\ isenm\theta)} =$$

$$= \frac{1}{p^m} \cdot \frac{(cosm\theta -\ isenm\theta)}{(cosm\theta\ +\ isenm\theta)(cosm\theta -\ isenm\theta)}$$

$$= \frac{1}{p^m} \cdot \frac{(cosm\theta -\ isenm\theta)}{(cos^2 m\theta +\ sen^2 m\theta)}$$

$$=\ p^{-m} \cdot \big((\cos(-m\theta) +\ isen(-m\theta)\big)$$

$$= p^n \cdot (\cos n\theta + isen\ n\theta)$$

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Aplicação 7.23. *P(n): A soma S_n das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n-2) \cdot 180^o$, $\forall\, n \in N$, $n \geq 3$.*

Demonstração.

(i) P(3) = V.

De fato, se $n = 3$ temos $S_3 = (3 - 2) \cdot 180^o = 180^o$ que é a soma dos ângulos internos de um triângulo.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k+1) = V$, isto é, $S_k = (k-2) \cdot 180^o \Longrightarrow S_{k+1} = ((k+1)-2)) \cdot 180^o = (k - 1) \cdot 180^o$, para um certo $k \in N$, $k \geq 3$.

De fato, observemos que, ao acrescentarmos num polígono de k vértices outro vértice, isto é, passando de k para k + 1 vértices (figura 7.8), estamos na verdade acrescentando um triângulo, por justaposição, cuja soma dos ângulos internos é 180º.

Logo, temos: $S_{k+1} = S_k + 180^o = (k - 2) \cdot 180^o + 180^o = 180^o \cdot ((k - 2) + 1) = (k - 1) \cdot 180^o$.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$.

Aplicação 7.24. *P(n): O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é* $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ *para todo* $n \geq 3$*.*

Demonstração.

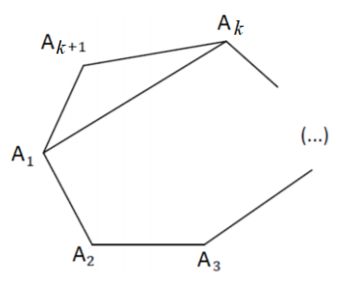
(i) P(3) = V.

De fato, $d_3 = \frac{n(3-3)}{2} = 0$ que é o número de diagonais de um triângulo.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k+1) = V$, isto é, $d_k = \frac{k(k-3)}{2} \Longrightarrow d_{k+1} = \frac{(k+1)((k+1)-3)}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$, para um certo $k \in N$, $k \geq 3$.

De fato, ao transformar um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_k$ de k lados em outro polígono convexo $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ de k+1 lados, acrescentando um lado ao inicial e tomando a diagonal A_1A_k, este fica dividido em dois polígonos: $A_1A_2A_3...A_k$ e o triângulo $A_1A_kA_{k+1}$ de acordo com a figura abaixo.

Figura 7.8 – polígono convexo de k lados



Fonte: Elaborado pelo autor.

Daí, percebe-se que todas as diagonais de $A_1A_2A_3...A_k$ são diagonais de $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$, um lado de $A_1A_2A_3...A_k$ torna-se diagonal de $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ e do vértice A_{k+1} partem $(k + 1) - 3 = k - 2$ novas diagonais.

Logo, $d_{k+1} = d_k + 1 + (k-2) = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2-3k+2k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$.

Aplicação 7.25(Relação de Euller[17]).

Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação $V - A + F = 2$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces de um poliedro.

Demonstração.

a) Por indução finita referente ao número de faces, será provado, em caráter preliminar, que, para uma superfície poliédrica limitada convexa *aberta*, vale a relação:

$V_a - A_a + F_a = 1$

em que V_a é o número de vértices, A_a é o número de arestas e F_a é o número de faces da superfície poliédrica limitada aberta.

(i) Para $F_a = 1$.

Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de n lados e, então, $V_a = n$, $A_a = n$. Temos:

$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \Rightarrow V_a - A_a + F_a = 1$.

Logo, a relação está verificada para $F_a = 1$.

(ii) Admitindo que a relação vale para uma superfície de F’ faces (que possui V’ vértices e A’ arestas), prova-se que também vale para uma superfície de F’+1 faces (que possui $F'+1 = F_1$ faces, V_a vértices e A_a arestas).

Por hipótese, para a superfície de F’ faces, A’ arestas e V’ vértices vale:

$V' - A' + F' = 1$.

[17] Leonhard Euler (Basileia, 15 de abril de 1707 — São Petersburgo, 18 de setembro de1783) foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã.

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) um face de p arestas (lados) e considerando que q dessas arestas (lados) coincidem com as arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices tais que:

$F_a = F' + 1$

$A_a = A' + p - q$ (q arestas coincidiram)

$Va = V' + p - (q + 1)$ (q arestas coincidindo, q + 1 vértices coincidem)

Formando a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituindo os valores acima, vem:

$V_a - A_a + F_a = V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + F' + 1 =$

$= V' + p - q - 1 - A' - p + q - F' + 1$

$= V' - A' + F'.$

Com $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$ prova-se que essa expressão não se altera se for acrescentada (ou retirada) uma face à superfície.

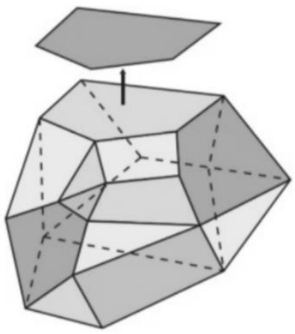
Como, por hipótese, $V' - A' + F' = 1$, vem que

$V_a - A_a + F_a = 1,$

o que prova a relação preliminar.

b) Tomando a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com V vértices, A arestas e F faces), retira-se uma face, ficando, então conforme figura, com uma superfície aberta (com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces) para a qual vale a relação $V_a - A_a + F_a = 1$.

Figura 7.9 - Poliedro Convexo



Fonte: [8], p.123

Como $V_a = V$, $A_a = A$ e $F_a = F - 1$, vem $V - A + (F - 1) = 1$, ou seja:

$V - A + F = 2$.

Aplicação 7.26(O Problema das Moedas).

(I) Em um conjunto de 2^n moedas onde figura uma falsa, com peso distinto de todas as demais, determinar o número mínimo de pesagens para descobrir qual é a única moeda falsa usando apenas uma balança de dois pratos.

Solução: Atribuindo alguns valores naturais a n e realizando algumas pesagens das 2^n moedas obtidas é fácil inferir *P(n): Para* 2^n *moedas são necessárias n pesagens.* Provemos a validade de tal proposição utilizando indução.

(i) $P(1) = V$. De fato, para $2^1 = 2$ moedas evidentemente, pondo uma em cada prato da balança, uma pesagem apenas é suficiente para descobrir a moeda falsa.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k + 1) = V$, isto é, supondo que para 2^k moedas são necessárias k pesagens provemos que para 2^{k+1} moedas são necessárias $k + 1$ pesagens. De fato, como $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$, para achar a moeda falsa dentre 2^{k+1} moedas separa-se tais moedas em dois grupos de 2^k moedas e com apenas uma pesagem colocando cada um destes grupos em cada prato da balança descobrimos assim o grupo que contém a moeda falsa. Daí, da hipótese de indução, k pesagens são suficientes para descobrir a moeda falsa no grupo de 2^k moedas que contém a falsa. Logo, contando com a pesagem inicial, precisamos ao todo de $k + 1$ pesagens.

Portanto, pelo PIM, P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(II) Em um conjunto de m moedas onde figura uma falsa, com peso distinto de todas as demais, determinar o número mínimo de pesagens para descobrir qual é a única moeda falsa usando apenas uma balança de dois pratos.

Solução: Levando em conta o resultado do problema anterior, atribuindo alguns valores naturais a *m*, e realizando inúmeras pesagens das m moedas de maneira a otimizar o uso da balança para solucionar alguns casos específicos do problema, pode-se inferir P(m): n_1 pesagens bastam para evidenciar a moeda falsa num conjunto de *m* moedas, com

$m \geq 2$ e $m = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}; n \in \mathbb{N}$, isto é, n_1 maior expoente da expansão binária de m.

Provemos a validade de tal proposição utilizando indução e o resultado do problema anterior.

(i) $P(2) = V$. De fato, se $n_1 = 1$ então $m = 2^1 = 2$ e uma pesagem apenas é suficiente descobrir a falsa entre duas moedas, bastando para isso por uma em cada prato e a própria balança indica a mais leve e falsa entre as duas.

(ii) $P(k) = V, \forall\, k \leq n_1 \Longrightarrow P(k+1) = V$. De fato, separando as m moedas em dois grupos, um deles com 2^{n_1} e o outro com $2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$. Como o primeiro grupo tem um número par de moedas com uma pesagem descobrimos se ele contém a moeda falsa dividindo-o em dois subgrupos colocando um em cada prato e observando se há equilíbrio na balança. Caso a moeda falsa esteja no primeiro grupo, do problema anterior, precisamos de mais n_1 pesagens para descobrir a falsa, isto é, ao todo precisaremos de $n_1 + 1$ pesagens. Caso contrário, a moeda falsa esteja no segundo grupo, a hipótese de indução garante que mais n_2, uma vez que $n_2 \leq n_1$, pesagens são suficientes para descobrir a falsa dentre estas, isto é, ao todo precisaremos de $n_2 + 1$ pesagens.

Portanto, pelo PIM, P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.27(A Torre de Hanói).

É um jogo formado por n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base onde estão fincadas três hastes. Numa das hastes, estão enfiados os discos, de modo que nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor (veja figura abaixo).

Figura 7.10 – Torre de Hanói

Fonte: [16] p. 93

O jogo consiste em transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, a regra acima seja observada.

As perguntas naturais que surgem são as seguintes:

(a) O jogo tem solução para cada $n \in N$?

(b) Em caso afirmativo, qual é o número mínimo de movimentos para resolver o problema com n discos?

Solução (a):

Supondo que o jogo tem solução para cada $n \in N$. Provemos tal proposição usando indução matemática.

Seja P(n): O jogo tem solução para n discos, com $n \in N$.

(i) $P(1) = V$. De fato, basta transferir o disco para a pilha selecionada.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k+1) = V$, isto é, para algum $k \in N$ discos o jogo tem solução e esse fato implica o jogo ter solução para $k + 1$ discos.

De fato, para ver isso, resolva inicialmente o problema para os K discos superiores da pilha (figura 1), transferindo-os para uma das hastes livre (isso é possível, pois estamos admitindo que o problema com n discos possua solução).Em seguida, transfira o disco que restou na pilha original (o maior dos discos) para a haste vazia. Feito isto, resolva novamente o problema para os k discos que estão juntos, transferindo-os para a haste que contém o maior dos discos. Isso mostra que o problema com $k + 1$ discos também possui solução.

Portanto, pelo PIM, P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solução (b):

Observando a quantidade mínima de movimentos para resolver o jogo com 1, 2, 3 e 4 discos, percebemos que precisamos de, respectivamente, 1, 3, 7, e 15 movimentos. Daí, pode-se inferir

P(n): São suficientes $2^n - 1$ movimentos para resolver o jogo com n discos, $n \in \mathbb{N}$.

Provemos a validade de tal proposição utilizando indução.

(i) $P(1) = V$. De fato, como observado, para um disco basta transferi-lo com $2^1 - 1 = 1$ movimento.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k+1) = V$, isto é, $2^k - 1$ movimentos são suficientes para concluir o jogo com k discos implica que $2^{k+1} - 1$ movimentos são suficientes para concluir o jogo com $K + 1$ discos. De fato, dos $k + 1$ discos dados, por hipótese, podemos transferir os k desses discos, deixando o de maior diametro, com $2^k - 1$ movimentos para a aste não finalizante. Em seguida com mais um movimento transferimos o disco de maior diametro restante para a aste finalizante. Assim, com mais $2^k - 1$ movimentos, usando a hipótese novamente, transferimos os k discos para cima do disco de maior diâmetro na aste finalizante. Concluindo assim o jogo com um total de $(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2.(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$ movimentos.

Portanto, pelo PIM, P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresenta-se neste trabalho noções de Lógica, métodos de demonstração e modelos axiomáticos diretamente associados, por meio de exemplos, ao atual currículo de matemática da Educação Básica conforme a BNCC. De tudo que foi aqui exposto espera-se que o docente ao questionar e autoavaliar sua prática, assim como fez o autor deste trabalho, possa melhorá-la de posse deste material, cujo objetivo é justificar, responder aos porquês a respeito da origem de tantos entes, axiomas, definições, propriedades, teoremas, regras, algoritmos e fórmulas de matemática que parecem surgir num passe de mágica a cada etapa da Educação Básica.

O formalismo aqui exposto não deve ser tomado ao pé da letra na prática docente da Educação Básica. Certos argumentos informais, quando acompanhados de um raciocínio correto, devem ser considerados. Portanto, usemos o formalismo para ajudar e não para atrapalhar o aluno, pois se lembre: primeiro vem a investigação, em seguida a descoberta, para depois vir a formalização de alguma solução ou resultado. Inicialmente, deixe as ideias surgirem, só depois se preocupe com a sua organização, formalização e demonstração.

Além disso, a abordagem dos métodos de demonstração na educação básica não se limita apenas à realização de demonstrações cada vez mais formais por parte dos alunos, como sugere algumas competências e habilidades da BNCC, mas também como método para inferir possíveis soluções a serem testadas e depois fundamentadas por algum dos métodos estudados numa grande variedade de problemas.

O texto foi elaborado de forma detalhada o suficiente para que o docente pudesse, por meio dele, rever esse tema ou estudá-lo pela primeira vez. Tendo toda fundamentação teórica necessária para o esclarecimento a respeito da organização de uma teoria axiomática nos seus conceitos primitivos, definições, axiomas, proposições, lemas, teoremas e corolários bem como dos métodos utilizados para deduzir ou demonstrar tais resultados.

Espera-se que este trabalho venha contribuir com a prática docente na sala de aula, no que diz respeito aos alunos vislumbrarem a oportunidade de descobrir padrões, deduzir relações matemáticas definidas por indução ou recorrência e testadas com as técnicas de demonstração apresentadas e que de modo algum, tem a pretensão de esgotar o assunto. Porém, apresenta uma razoável amostra do quanto há para ser estudado e aplicado a respeito do seu tema, desenvolvidos nas unidades temáticas, conteúdos, objetos de conhecimento, competências e habilidades apresentados na BNCC da Educação Básica.

Paralelamente, esta pesquisa permitiu ao autor da dissertação ampliar seus conhecimentos a respeito de Lógica, Conjuntos e Teorias Axiomáticas e, sobretudo, a respeito das Técnicas de Demonstração utilizadas na Educação Básica. Espera-se que isto venha refletir na sua prática docente, melhorando a qualidade das aulas que ministra na Rede Municipal de Ensino da Cidade de Palmares, no estado de Pernambuco.

REFERÊNCIAS

[1] ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

[2] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Fortaleza: SBM, 1997. (Coleção do Professor de Matemática).

[3] BISPO, C.A.F.; CASTANHEIRA, L.B. **Introdução à lógica matemática.** São Paulo: Cengage Learning, 2012.

[4] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 Nov. 2020.

[5] CASTANHEIRA, L.B.; SOUZA FILHO, O.M. **Lógica simbólica e matemática.** São Paulo: Cengage Learning, 2012.

[6] EVARISTO, Jaime; Perdigão, Eduardo. **Introdução à Álgebra Abstrata.** 2 ed. Maceió: edUFAL, 2012.

[7] FREITAS, Natanael Charles Brito. **Princípio da Indução Matemática**: Fundamento Teórico e Aplicações na Educação Básica. 97 fs. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013. Disponível em <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=32027>. Acesso em 23 de janeiro de 2021.

[8] DOLCE, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**: Geometria Espacial posição e métrica. v. 10. 7 ed. São Paulo: Atual, 2013.

[9] DOLCE, Osvaldo; Pompeu, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**: Geometria Plana. v. 9. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013.

[10] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

[11] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Trigonometria. v. 3. 9 ed.. São Paulo: Atual Editora, 2013.

[12] IEZZI, G.; Dolce, O.; Murakami, C. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Logaritmos, v. 2. 10 ed. São Paulo: Atual, 2013.

[13] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Complexos, Polinômios, Equações. v. 6. 8 ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

[14] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais.** Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

[15] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro. **Um Convite à Matemática**: fundamentos lógicos com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades. 2a edição. Campina Grande EDUFCG, 2007.

[16] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

[17] OLIVEIRA, Antonio Marmo de; SILVA, Agostinho. **Biblioteca da matemática moderna.** Tomo I. São Paulo: Ed. Lisa, 1980.

[18] OLIVEIRA, K. I. M.; Fernadez, A. J. C. **Iniciação à Matemática:** um curso com problemas e soluções, 2a ed. Rio de Janeiro: SBM., 2010.

[19] POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo enfoque do método matemático**.** Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

[20] QUEVEDO, J. M.M. **Introducción a la teoria de conjuntos.** 4a ed. Bogotá: Universidade Nacional de Colombia – Departamentos de Matemáticas, 1983.

[21] SOMINSK, J. S. **Método de Indução Matemática** Tradução de Gelson Iezzi. São Paulo: Atual: Moscou: Editora: MRL, p. 59, 1996.

[22] ZEGARELLI, Mark. **Logic for dummies**. Indiana: Wiley, 2007.

ANEXO I

TÓPICOS DA TEORIA AXIOMÁTICO DESENVOLVIDA NA GEOMETRIA PLANA DO ENSINO BÁSICO

Dos Conceitos Primitivos ao Teorema de Pitágoras

1. As noções primitivas: ponto, reta e plano
2. Notação de ponto, reta e plano
3. Definição de Proposições e proposições primitivas, postulados ou axiomas.
4. Postulado da existência

   4.1 *Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.*

   4.2 *Num plano há infinitos pontos.*
5. Definição: posições de dois pontos e de ponto e reta: pontos coincidentes, distintos, pertencentes ou não pertencentes a uma reta.
6. Definição: pontos colineares.
7. Postulado da determinação

   7.1 Da reta: *Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.*

   7.2 Do plano: *Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles*.

   7.3 Definição: retas coincidentes
8. Postulado da Inclusão: *Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.*
9. Definições: Pontos coplanares, figura e figura plana.
10. Definição de Retas concorrentes e Teorema da existência de retas concorrentes.
11. Postulados da noção primitiva “estar entre”
12. Definição de segmento de reta
13. Definição de semirreta
14. Notação
15. Definição de Segmentos Consecutivos
16. Definição de Segmentos Colineares
17. Definição de Segmentos Adjacentes

18. Postulados da noção primitiva de congruência incluindo postulado do transporte de segmentos.
19. Comparação de segmentos – Definições: maior, congruente ou menor.
20. Adição de Segmentos – Definições: soma, múltiplo e submúltiplo de segmentos.
21. Ponto médio de um segmento – Definição

Um ponto M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ *se, e somente se, M está entre A e B e* $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$. *Isto é,* $\overline{MB} \in \overline{AB}$ *e* $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

21.1 Teorema de Unicidade do Ponto médio

22. Medida de um segmento — definição de comprimento e unidade de medida usual.
23. Postulado de Eudóxio [18] - Arquimedes [19] (Eudóxio: 408-355 a.C.; Arquimedes: 278-212 a.C.): "Dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um deles que supera o outro".
24. Distância entre dois pontos – Definição de distância geométrica e distancia métrica.
25. Região Convexa definição
26. Região Concava definição
27. Postulado da separação dos pontos de um plano
28. Semiplano — definição
29. Definição: Ângulo
30. Definições: Pontos internos a um ângulo e ângulo convexo
31. Definições: Pontos externos a um ângulo e ângulo côncavo
32. Definição: Ângulos consecutivos
33. Definição: Ângulos adjacentes
34. Definição: Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)
35. Definição de congruência com postulados (incluindo o de transporte de segmentos)

---

[18] Eudoxo (em grego: Ευδοξος; Cnido, entre 408 e 355 a.C.[1]) foi um astrônomo, matemático e filósofo grego.

[19] Arquimedes de Siracusa (em grego: Ἀρχιμήδης; Siracusa, 287 a.C. – 212 a.C.) foi um matemático, físico, engenheiro, inventor e astrônomo grego.

36. Comparação de ângulos – Definições de maior, congruente ou menor.
37. Adição de ângulos – Definição de soma, múltiplo e submúltiplo de ângulos.
38. Definição: Bissetriz de um ângulo
    38.1. Teorema de existência e unicidade da bissetriz
39. Definição: Ângulo suplementar adjacente
40. Definições: Ângulos: reto, agudo, obtuso
41. Definição: Medida de um ângulo ou amplitude
42. Definição: Unidades de medida de ângulos, múltiplos e submúltiplos.
43. Definição: Ângulos complementares e ângulos suplementares
44. Definição: Ângulo nulo e ângulo raso
    44.1 Teorema: Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.
45. Definição: Triângulo
46. Definição: Elementos do Triangulo
47. Definição: Interior e exterior de um triangulo e superfície triangular.
48. Classificação em relação aos lados e aos ângulos – Definição de Triângulos: equiláteros, isósceles e escalenos - Definição de Triângulos: retângulos, acutângulos e obtusângulos.
49. Definição: Congruência de Triângulos
50. Definição: Casos ou critérios de congruência
51. 1º caso congruência de triângulos — *LAL — Postulado: Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.*
52. Teorema do triângulo isósceles “Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes.”
53. 2º caso congruência de triângulos — *ALA – Teorema: “Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.”*
54. Recíproca do Teorema do Triangulo Isósceles: “Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles.”

55. 3º caso congruência de triângulos — LLL – Teorema*: Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.*

Demonstração.

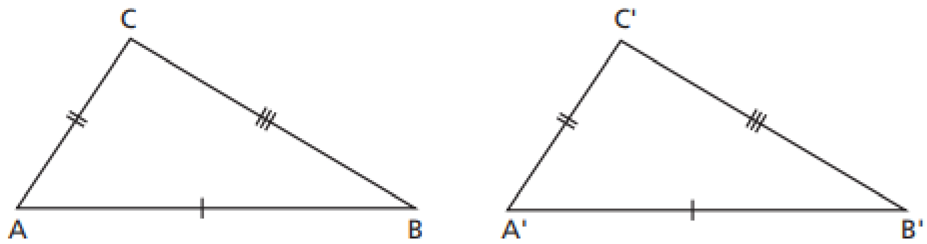
Sejam ABC e A'B'C' tais triângulos. Pelo postulado do transporte de ângulos (item35) e do transporte de segmentos (item 18), obtemos um ponto X tal que:

XÂ'B' = CÂB **(1)**

A'X = AC **(2)**

estando X no semiplano oposto ao de C' em relação à reta A'B'.

Figura 1 – Triângulos Congruentes



Fonte: [9] p. 41

De (2) e da hipótese, vem: A'X = A'C' (3)

Seja D o ponto de interseção de C'X com a reta A'B'.

A hipótese, (1) e (2) ⇒ ABC =A'B'X'(LAL) (4) ⇒ XB' = CB ⇒ (hipótese) XB' = C'B' (5)

(2) ⇒ A'C'X é isósceles de base C'X ⇒ A'C^'X = A'X^C' (6)

(5) ⇒ B'C'X é isósceles de base C'X ⇒ B'C^'X = B'X^C ' (7)

Por soma ou diferença de (6) e (7) (conforme D seja interno ou não ao segmento A'B'), obtemos: A'C^'B' = A'XB^ ' (8).

(3), (8), (5) ⇒ A'B'C' = A'B'X ⇒ (4) ABC = A'B'C'.

Portanto, os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes.

56. Teorema de Existência do ponto médio

57. Existência da bissetriz

58. Mediana de um triângulo — definição
59. Bissetriz interna de um triângulo — definição
60. Teorema do ângulo externo. *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.*
61. 4º caso de congruência — LAA_0 – Teorema: *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.*
62. Caso especial de congruência de triângulos retângulos – Teorema*: Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.*
63. Teorema: Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.
64. Teorema: Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.
65. A desigualdade triangular – Teorema: Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.
66. Corolário: Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, devemos ter as três condições abaixo: $a > b + c$, $b < a + c$ e $c < a + b$.
67. Retas paralelas — definição
68. Definições: reta transversal
69. Definições: ângulos alternos (interno e externos), correspondentes e colaterais (internos e externos).
70. Teorema: Se duas retas coplanares distintas e uma transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas.
71. Construção da paralela
72. Unicidade da paralela — postulado de Euclides - Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.

73. Teorema (Recíproco do 70): Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.
74. Teorema (Paralelismo): Uma condição necessária e suficiente para duas retas distintas serem paralelas é formarem com uma transversal ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes.
75. Teorema: Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
76. Teorema: A soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.
77. Teorema: Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são congruentes ou suplementares.
    77.1 Teorema: Num triângulo equilátero cada ângulo mede 60°.
78. Definições: Retas perpendiculares e ângulos retos.
79. Definição: Retas oblíquas
80. Teorema de Existência do ângulo reto
81. Teorema de Existência da perpendicular por um pondo dado de uma reta dada.
82. Teorema da Unicidade da perpendicular por um pondo dado de uma reta dada.
83. Teorema de Existência da perpendicular por um ponto dado fora de uma reta dada.
84. Teorema da Unicidade da perpendicular por um pondo dado fora de uma reta dada.
85. Definição: Altura de um triângulo
86. Definição: Mediatriz de um segmento
87. Projeção de um ponto sobre uma reta e “pé da perpendicular”
88. Projeção de um segmento sobre uma reta
89. Teoremas de comparação de Segmento perpendicular e segmentos oblíquos a uma reta por um ponto.
90. Definição: Distância entre um ponto e uma reta
91. Definição: Distância entre duas retas paralelas

92. Teorema: Se duas retas distintas são paralelas, os pontos de uma delas estão a igual distância (são equidistantes) da outra.
93. Teorema: Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades do segmento.
94. Teorema: Todo ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados do ângulo.
    94.1 Teorema: Ângulos de lados perpendiculares Dois ângulos de lados respectivamente perpendiculares são congruentes ou suplementares
    94.2 Teorema: A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.
95. Definições: Feixe de retas paralelas, Transversal do feixe de retas paralelas, Pontos correspondentes de duas transversais e Segmentos correspondentes de duas transversais.
96. Teorema: Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma delas é divido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal:
    a) também é dividido em p partes;
    b) e essas partes também são congruentes entre si.
97. Teorema de Tales: Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

98.a) Teorema da bissetriz interna: Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.

98.b) Teorema da bissetriz externa: Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos (subtrativos) proporcionais aos lados adjacentes.

99. Definição: Lados homólogos

100. Definição: Triângulos semelhantes

101. Definição: Razão de semelhança

102. Teorema: A relação de semelhança de triângulos é uma relação de equivalência.

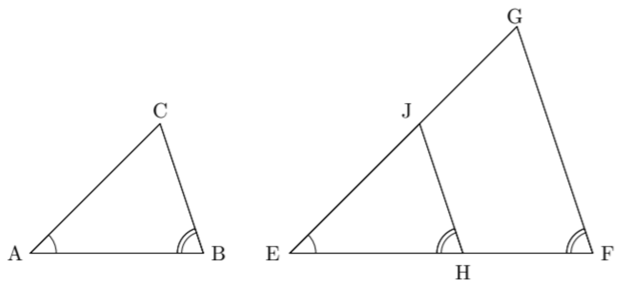
103. Teorema fundamental: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

104. Teorema de Semelhança de Triângulos - 1º caso*: "Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."*

Demonstração.

Sejam ABC e EFG tais triângulos com Â=Ê e ^B=^F. Somando membro a membro as igualdades anteriores temos A + B = E + F. Mas, do item 76, temos: A + B + C = E + F + G = 180 ∘ . Logo C = G. Resta provar que os lados são proporcionas. Supondo, sem perda de generalidade que ABC e EFG não são congruentes, tome na semirreta EF o ponto H de modo que EH = AB, conforme figura 2.

Figura 2 – Triângulos Semelhantes



Fonte: [2] p.76

Pelo ponto H trace uma reta paralela a FG. Esta corta a semirreta EG num ponto J, formando um triângulo EHJ. Note que, por hipótese, Â = Ê. Por construção AB = EH e do item 74 temos H = F, uma vez que JH é paralelo a GF. Daí, por transitividade (*silogismo*), B = H. Logo, do item 53, o triangulo EHJ é congruente ao triangulo ABC. Segue-se agora, do item 97, que (EH/EF) = (EJ/EG). E da congruência dos triângulos EHJ e ABC que EH = AB e EJ = AC então, da igualdade anterior obtém-se: (AB/EF) = (AC/EG). De maneira análoga demonstra-se que (AC/EG) = (CB/GF). Fica demonstrado o teorema.

105. Teorema de Semelhança de Triângulos - 2º caso: “Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

106. Teorema de Semelhança de Triângulos - 3º caso: “Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.”

107. Teorema: Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então: a razão entre lados homólogos é k; a razão entre os perímetros é k; a razão entre as alturas homólogas é k; a razão entre as medianas homólogas é k; a razão entre as bissetrizes internas homólogas é k; a razão entre dois elementos lineares homólogos é k; e os ângulos homólogos são congruentes.

108. Definição: Elementos do triângulo retângulo

109*.* Teorema das Relações Métricas - *Em qualquer triângulo retângulo:*

a) *cada cateto é a média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.*

b) *a altura relativa à hipotenusa é a média proporcional (ou média geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa.*

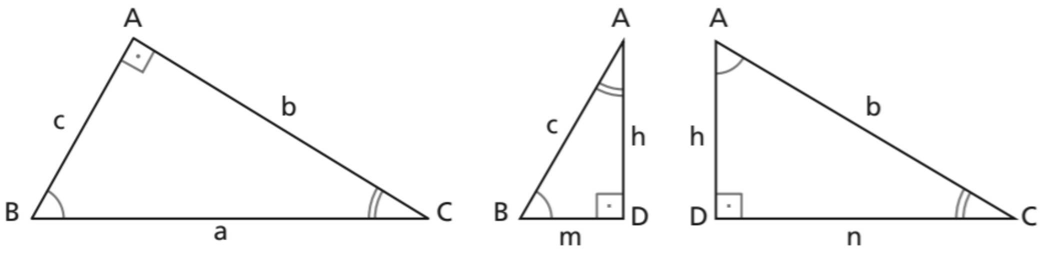
c) *o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.*

d) *o produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.*

Demonstração item (a).

De fato, seja ABC o referido triangulo, retângulo em Â, de hipotenusa a e catetos b e c. Traçando a altura h em relação a hipotenusa a obtemos o ponto D sobre a mesma. De forma a obter os triângulos DBA e DAC ambos retângulos em D, assim com dois ângulos congruentes cada um em relação ao triangulo ABC, conforme figura 3. Logo, do anexo I - item 104, ambos semelhantes a ABC.

Figura 3 – Triângulos Semelhantes Relações Métricas



Fonte: [9] p. 216

Portanto, $a/b = b/n \Rightarrow b^2 = a.n$ e $a/c = c/m \Rightarrow c^2 = a.m.$

110. Teorema de Pitágoras

A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

111. Recíproco do teorema de Pitágoras

Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

112. Definição. *Seja ABC um triângulo retângulo em A de lados medindo a, b e c, tal que ou c < b < a ou b < c < a ou b = c < a, com ângulo agudo A^CB denominado α e ângulo agudo A^BC denominado β, definimos o cosseno do ângulo agudo α, respectivamente cosseno do ângulo agudo β como a razão entre o cateto adjacente ao ângulo α "b" e a hipotenusa "a" e, respectivamente a razão entre o cateto adjacente ao ângulo β "c" e a hipotenusa "a". Indica-se:* $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ *e* $\cos\beta = \frac{c}{a}$. *No caso de o triângulo ser obtusângulo definiremos o cosseno do ângulo obtuso θ sendo igual ao oposto do cosseno de (180 – θ). Indica-se:* $\cos\theta = -\cos(180 - \theta)$.

113. Teorema (Lei dos Cossenos – Generalização do Teorema de Pitágoras):

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Todo o conteúdo do anexo pode ser encontrado em [9].

APÊNDICE A

LINDBERG BARBOSA LIRA DE ALMEIDA

SOBRE LÓGICA E DEMONSTRAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

MACEIÓ

2021

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este material apresenta uma introdução à Lógica utilizada no desenvolvimento das Teorias Axiomáticas associadas ao Currículo de Matemática da Educação Básica segundo a Base Nacional Comum Curricular. Nela é apresentada uma discussão a respeito dos métodos de demonstração mais utilizados para a justificativa dos principais resultados matemáticos apresentados neste nível. Destaca, dentre outros, os métodos de demonstração por prova direta, redução ao absurdo, indução matemática e apresenta toda a relação desses métodos com a Lógica, seus princípios, operações e regras de inferência, pré-requisitos fundamentais à justificativa do uso dos mesmos.

Pretendeu-se elaborar um texto de forma detalhada o suficiente para que o docente possa, por meio deste, rever este tema ou estudá-lo pela primeira vez. Contém fundamentação teórica necessária para o esclarecimento a respeito da organização de uma teoria axiomática nos seus conceitos primitivos, definições, axiomas, proposições, lemas, teoremas e corolários bem como dos métodos utilizados para deduzir ou demonstrar tais resultados.

Assim, percebe-se, ao consultar este material, a importância da lógica e cada uma das técnicas de demonstração utilizadas em teoremas apresentados tão necessárias à justificativa e aplicabilidade destes resultados. Buscou-se mostrar, a partir daí, que há um caminho seguro que nos leva de um problema à sua solução, do que é dado ao que é pedido, da hipótese à tese, sem superestimar nem menosprezar a habilidade de cada um seguir tal caminho que leva a, digamos, um "elo perdido" entre a Matemática na Educação Básica e o raciocínio lógico-dedutivo tão presente nas suas unidades temáticas, conteúdos, objetos de conhecimento, competências e habilidades.

Espera-se que este material venha contribuir com a prática docente na sala de aula, no que diz respeito aos alunos vislumbrarem a oportunidade de descobrir padrões, deduzir relações matemáticas definidas por indução ou recorrência e testadas com as técnicas de demonstração apresentadas e que de modo algum, tem a pretensão de esgotar o assunto. Porém, apresenta uma razoável amostra do quanto há para ser estudado e aplicado a respeito desse tema na Educação Básica.

2 NOÇÕES DE LÓGICA

2.1 PROPOSIÇÕES

Definição 2.1. *Chamamos frase a um conjunto de palavras (incluindo os sinais de acentuação e pontuação) ou símbolos matemáticos, que se relacionam para comunicar uma ideia.*

Definição 2.2. *Uma proposição é uma frase declarativa formada de palavras e/ou símbolos que exprime um pensamento de sentido completo e que pode ser classificada em verdadeira* (V) *ou falsa* (F).

Sendo usualmente denominado valor-verdade (ou valor-lógico) tal resultado.

Exemplo 2.1. São Proposições:

a) $\text{Cos } 90° = 0$ (V)
b) Maceió é a capital de Pernambuco (F)

Exemplo 2.2. Não são Proposições:

c) Que horas são?
d) Desça daí!

2.2 PRINCÍPIOS DA LÓGICA

A Lógica Matemática adota como regras fundamentais do pensamento os três seguintes princípios:

2.1(Princípio da Identidade). *Toda proposição é idêntica a si mesma.*

2.2(Princípio da não Contradição). *Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.*

2.3(Princípio do Terceiro Excluído). *Toda a proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.*

2.3 PROPOSIÇÕES SIMPLES E PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Definição 2.3. *Uma proposição é dita simples quando é formada por uma única frase declarativa.*

Definição 2.4. *Uma proposição é dita composta quando é formada por outras proposições.*

As proposições simples costumam ser representadas por letras minúsculas do alfabeto latino: a, b, ... , z; enquanto que as compostas por letras maiúsculas: A, B, ..., Z.

Exemplo 2.3.

São proposições simples:

p: O número 16 é um número par.
q: $2 + 3 = 5$.
r: Vamos à praia.
s: Não vamos à praia.

São proposições compostas:

P: O número 16 é um número par e também é maior que o número 15.
Q: Ou José é alagoano ou pernambucano.
R: Se Pedro é arquiteto, então sabe Geometria.
S: O triangulo ABC é equilátero se e somente se é equiângulo.

Definição 2.5. *Os conectivos são palavras utilizadas para formar uma nova proposição a partir de outra(s).*

*São cone*ctivos usuais em Lógica Matemática: *"e", "ou", "ou... ou...", "não", "se... então..." e o "... se e somente se...".* Tais palavras são representadas, respectivamente, por símbolos denominados conectivos lógicos: $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\sim$, $\rightarrow$, e $\leftrightarrow$.

Os conectivos também podem ser chamados de operadores ao considerarmos uma proposição composta como resultado de uma operação realizada entre outras duas proposições conforme veremos a seguir.

2.4 OPERAÇÕES LÓGICAS

Quando pensamos, efetuamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas *operações lógicas*. Estas obedecem a regras de um cálculo, denominado *cálculo proposicional*; semelhante ao da aritmética sobre números. Veremos a seguir as operações lógicas fundamentais. Tais operações com proposições permitem, como veremos, o estabelecimento de uma linguagem que facilita sobremaneira o discurso matemático.

Definição 2.6. *Chama-se conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por "p e q", cujo valor lógico é a verdade* (V) *quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade* (F) *nos demais casos. Simbolicamente, temos:* $p \wedge q$ *(lê-se: p* ***e*** *q).*

Exemplo 2.4. A neve é branca e 7 é um número primo (V)

Definição 2.7. *Chama-se disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por "p ou q", cujo valor lógico é a verdade* (V) *quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a falsidade (F) quando as proposições p e q são ambas falsas. Simbolicamente, temos* $p \vee q$ *(lê-se: p* ***ou*** *q).*

Exemplo 2.5. Paris é a capital da França ou $3 > 5$ (V)

Definição 2.8. *Chama-se disjunção exclusiva de duas proposições p e q a proposição representada por "ou p ou q", cujo valor lógico é a verdade* (V) *somente quando o valor lógico de p e q forem ambos distintos simultaneamente.* Simbolicamente, temos: $p \veebar q$ (lê-se: **ou** p **ou** q).

Exemplo 2.6. Ou Pedro é alagoano ou Pedro é gaúcho (V)

Definição 2.9. *Chama-se condicional de duas proposições p e q a proposição representada por "se p então q", cujo valor lógico é a falsidade* (F) *no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a verdade* (V) *nos demais casos.* Simbolicamente, temos: $p \rightarrow q$ (lê-se: **Se** p, **então** q).

Exemplo 2.7. Se o mês de Maio tem 30 dias, então a Terra é plana (V)

Definição 2.10. *Chama-se bicondicional de duas proposições p e q a proposição representada por "p se, e somente se, q", cujo valor lógico é a verdade* (V) *quando p e q* *são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade* (F) *nos demais casos. Simbolicamente, temos:* $p \leftrightarrow q$ *(lê-se: p se, e somente se, q).*

Exemplo 2.8. Lisboa é a capital da Espanha se, e somente se, $3 + 2 = 7$ (V)

Definição 2.11. *Chama-se negação de uma proposição p a proposição representada por "não p", cujo valor lógico é a verdade* (V) *quando p é falsa e a falsidade* (F) *quando p é verdadeira. Simbolicamente, temos:* **~ p** (lê-se: não p)

Exemplo 2.9. p: O Sol é uma estrela (V)

~p: O Sol não é uma estrela (F)

2.5 TABELAS-VERDADE

Princípio 2.4. *Cada valor lógico possível de toda proposição composta depende apenas dos valores lógicos das proposições simples que a compõe, estando assim determinados de forma única por eles.*

Definição 2.12. *Denomina-se tabela-verdade, a tabela onde figuram todos os valores lógicos possíveis de uma proposição composta resultante de alguma das operações lógicas dadas em função dos valores lógicos possíveis das proposições simples que a compõe.*

Assim, usando uma tabela-verdade, podemos resumir todas as operações lógicas aqui definidas em:

Tabela 2.1 - Operações Lógicas.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	~p
V	V	V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Outra observação relevante é a *ordem de precedência* em que as operações devem ser realizadas em proposições compostas com mais de um conectivo. No caso de usar-se apenas parentes devemos realizar primeiro as operações dos mais internos pros mais externos. Caso não se use tais símbolos a ordem de precedência é a seguinte:

(2) $\sim$ **(2)** $\wedge$ **e** $\vee$ **e** $\underline{\vee}$ **(3)** $\rightarrow$ **(4)** $\leftrightarrow$

Ou seja, primeiro resolvemos as negações, depois as conjunções e disjunções (exclusivas) na ordem que aparecerem, depois as condicionais e finalmente as bicondicionais.

Exemplo 2.10.

- $\mathbf{p \rightarrow q \leftrightarrow r \vee s}$ é uma bicondicional, isto é, equivale a $\mathbf{(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \vee s)}$.

2.5.5. Número de Linhas de uma Tabela-Verdade

Do princípio multiplicativo, segue-se que o número de linhas da tabela verdade de uma proposição composta formada por $\mathbf{n}$ proposições simples é $\mathbf{2^n}$ linhas uma vez que toda proposição simples tem dois valores lógicos: V e F, que se excluem.

2.6 TAUTOLOGIAS, CONTRADIÇÕES E CONTINGÊNCIAS

Definição 2.13. *Denomina-se tautologia ou proposição tautológica toda proposição composta que sempre tem valor lógico* (V) *quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições que a compõe.*

Definição 2.14. *Denomina-se contradição toda proposição composta que sempre tem valor lógico* (F) *quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições que a compõe.*

Definição 2.15. *Denomina-se contingência toda proposição composta que não seja tautologia nem seja contradição.*

Exemplo 2.11.

a) $p \vee \sim (p \wedge q)$ é uma tautologia.
b) $p \leftrightarrow \sim q$ é uma contradição.
c) $p \vee q \rightarrow p$ é uma contingência.

Tabela 2.2 – Tautologia

p	∨	~	(p	∧	q)
V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F

Tabela 2.3 – Contradição

(p	↔	~	q)
V	F	F	V
F	F	V	F

Tabela 2.4 – Contingência

p	∨	q	→	p
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Fonte: Elaboradas pelo autor.

2.7 IMPLICAÇÕES LÓGICAS, EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

Definição 2.16. *Denomina-se implicação lógica toda condicional tautológica.*

Definição 2.17. *Denomina-se equivalência lógica toda bicondicional tautológica.*

Exemplo 2.12.

(a) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é uma implicação lógica. Indica-se: $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ (lê-se: $p \wedge q$ *implica logicamente* em $p \vee q$).

De fato, basta construir a tabela verdade e mostrar que a condicional $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é uma tautologia.

Tabela 2.5 – Implicação Lógica

p	q	p ∧ q	p ∨ q	p ∧ q → p ∨ q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

(b) $p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ é uma equivalência lógica. Indica-se: $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ *(lê-se: $p \leftrightarrow q$ equivale logicamente a* $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$).
De fato, basta construir a tabela verdade e mostrar que a bicondicional $p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ é uma tautologia.

Tabela 2.6 – Equivalência Lógica

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 2.1. *A relação de equivalência lógica tem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, para quaisquer proposições p, q e r vale:*

i. $p \Leftrightarrow p$
ii. $p \Leftrightarrow q \to q \Leftrightarrow p$
iii. $p \Leftrightarrow q$ e $q \Leftrightarrow r \to p \Leftrightarrow r$

Demonstração.

De fato, basta construir as respectivas tabelas-verdade de cada uma das condicionais e bicondicionais e verificar que as mesmas são todas tautológicas.

2.8 REGRAS DE INFERÊNCIA FUNDAMENTAIS

Proposição 2.2(Regras de Inferência Fundamentais)**.** *Sejam p, q e r proposições quaisquer e c uma contradição, valem as seguintes implicações e equivalências lógicas:*

1) $p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$ (Adição)
2) $p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$ (Simplificação)
3) $p \wedge q \Rightarrow p \wedge q$ e $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$ (Conjunção)
4) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ ou $(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$ (Silogismo disjuntivo)
5) $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$ (Modus ponens[20])
6) $(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ (Modus tollens[21])
7) $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$ (Silogismo hipotético)

[20] Modus ponendo ponens, do latim significa "a maneira que afirma afirmando", muitas vezes abreviado para MP ou modus ponens.
[21] Modus tollens do latim significa “modo que nega por negação” ou negação do consequente, é o nome formal para a prova indireta.

8) $p \wedge \sim p \Rightarrow q$ (Inconsistência)

9) $\sim \sim p \Leftrightarrow p$ (Dupla negação)

10) $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$ (CLAVIUS[22])

11) $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$ (Absorção)

12) $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$, com c contradição (Redução ao absurdo)

13) $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (Exportação-Importação)

Demonstração.

De fato, basta construir as respectivas tabelas-verdade de cada uma das condicionais e bicondicionais e verificar que as mesmas são todas tautológicas.

2.9 RECÍPROCA, CONTRÁRIA E CONTRA POSITIVA

Definição 2.18. *Dada a condicional* $\mathbf{p \rightarrow q}$*, definimos:*

a) Proposição recíproca de $p \rightarrow q$ *a proposição:* $\mathbf{q \rightarrow p}$

b) Proposição contrária (ou inversa) de $p \rightarrow q$ *a proposição:* $\mathbf{\sim p \rightarrow \sim q}$

c) roposição contra positiva (ou contrária da recíproca) de $p \rightarrow q$ *a proposição:* $\mathbf{\sim q \rightarrow \sim p}$

Note que podemos estabelecer a seguinte equivalência lógica, propriedade fundamental da conjunção e base, como veremos em maiores detalhes no capítulo seguinte, do *método demonstração por contra posição*:

$$\mathbf{p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p}$$

De fato, para justifica-la basta construir sua tabela verdade onde obtem-se uma tautologia pra bicondicional dada o que prova a equivalência lógica apresentada.

2.10 PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES LÓGICAS

A seguir mais equivalências e implicações, que também são consideradas importantes regras de inferência, agora separadas por operação lógica.

[22] Christophorus Clavius ou Christopher Clavius (Bamberg, 25 de março de 1538 — Roma, 2 de fevereiro de 1612) foi um sábio e matemático jesuíta alemão.

Proposição 2.3(Propriedades da Conjunção). *Sejam p, q e r proposições quaisquer, c uma contradição e t uma tautologia, valem as seguintes implicações e equivalências lógicas:*

1) $p \wedge p \Rightarrow p$ (Idempotente)
2) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (Comutativa)
3) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (Associativa)
4) $p \wedge t \Leftrightarrow p$ (Identidade: elemento neutro, t tautologia)
5) $p \wedge c \Leftrightarrow c$ (Identidade: elemento absorvente, c contradição)

Proposição 2.4(Propriedades da Disjunção). *Sejam p, q e r proposições quaisquer, c uma contradição e t uma tautologia, valem as seguintes equivalências lógicas:*

6) $p \vee p \Leftrightarrow p$ (Idempotente)
7) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (Comutativa)
8) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (Associativa)
9) $p \vee t \Leftrightarrow t$ (Elemento absorvente, t tautologia)
10) $p \vee c \Leftrightarrow p$ (Elemento neutro, c contradição)

Proposição 2.5(Propriedades da Conjunção e da Disjunção). *Sejam p, q e r proposições quaisquer, valem as seguintes equivalências lógicas:*

11) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributiva da conjunção na disjunção)
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Distributiva da disjunção na conjunção)
12) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (Absorção)
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
13) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (Regras DE MORGAN[23])
$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
14) $\sim (p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$ (Negação da Condicional em conjunção)
15) $\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ (Negação da Bicondicional em disjunção)

Proposição 2.6(Propriedades da Condicional). *Sejam p, q e r proposições quaisquer, valem as seguintes equivalências lógicas:*

16) $p \rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ (Distributiva em relação a conjunção)

[23] Augustus De Morgan (Madura, Índia, 27 de junho de 1806 — Londres, 18 de março de 1871) foi um matemático e lógico britânico. Formulou as leis de De Morgan e foi o primeiro a introduzir o termo e tornar rigorosa a ideia da indução matemática.

17) $p \to (q \vee r) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$ (Distributiva em relação a disjunção)

Proposição 2.7(Propriedades da Bicondicional). *Sejam p, q e r proposições quaisquer, valem as seguintes equivalências lógicas:*

18) $\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \leftrightarrow \sim q$ (Negação da Bicondicional)

$\sim (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \leftrightarrow q$

19) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$ (Comutativa)

20) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ (Associativa)

2.11 MÉTODO DEDUTIVO

Todas as implicações e equivalências apresentadas até agora, como vimos, podem ser justificadas facilmente construindo-se a respectiva tabela verdade associada a condicional ou bicondicional tautológica. Tal procedimento de demonstração chamamos, de *método das tabelas-verdade.*

A partir de agora também utilizaremos outro tipo de procedimento, chamado *método dedutivo*, baseado apenas no uso da *álgebra das proposições*, isto é, das regras de inferência fundamentais (proposição 2.2) e propriedades das operações lógicas (proposições 2.3 a 2.7) para, a partir delas, inferir e justificar outras implicações e equivalências lógicas.

Para exemplificar tal método e compará-lo com o das tabelas verdade vamos mostrar, utilizando ambos, a seguinte equivalência lógica:

Exemplo 2.13. $(p \wedge \sim q \to c) \Leftrightarrow (p \to q)$, com **c** contradição **(**Reductio ad absurdum[24]**)**

- **Demonstração pelo Método Dedutivo**

De fato, aplicando a cada passagem de uma proposição a sua equivalente seguinte as seguintes propriedades e regras de inferência: Negação da condicional com disjunção,

[24] Reductio ad absurdum (latim para "redução ao absurdo", é um tipo de argumento lógico no qual alguém assume uma ou mais hipóteses e, a partir destas, deriva uma consequência absurda ou ridícula, e então conclui que a suposição original deve estar errada.

Elemento neutro da disjunção, Regra de Morgan, Dupla negação, Negação da condicional com disjunção. Temos:

$$p \wedge \sim q \rightarrow c \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \vee c \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim\sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q.$$

- **Demonstração pelo Método das Tabelas-verdade**

Tabela 2.7 – Redução ao Absurdo

(p	∧	~	q	→	c)	↔	(p	→	q)
V	F	F	V	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F
1	7	6	2	8	3	10	4	9	5

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.12 ARGUMENTOS

Definição 2.19. *Denomina-se argumento toda proposição condicional onde o antecedente é um conjunto finito de proposições* $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ $(n \geq 2)$ *e o consequente uma proposição* q_n. As proposições $p_1, p_2,..., p_{n-1}$ chamam-se *premissas* do argumento, e a proposição final q_n chama-se *conclusão* do argumento. Indica-se: $p_1, p_2,..., p_{n+1} \vdash q_n$. O símbolo $\vdash$, é chamado de *traço de asserção*. É também habitual escrever um argumento colocando as premissas sobre um traço horizontal e, em seguida, a conclusão sob o mesmo traço:

(1) p_1 (1) p_1
(2) p_2 (2) p_2
.   .
.   ou ainda   .
.   .
(n-1) p_{n-1} (n) p_n
________   ________
$\therefore$ (n) q_n $(n \geq 2)$ $\therefore$ q $(n \geq 1)$

Definição 2.20. *Um argumento que se constitui apenas de duas premissas e uma conclusão é chamado silogismo.*

Exemplo 2.14.

(1) Se é homem, então foi feito a imagem de Deus.

(2) Se foi feito a imagem de Deus, então é perfeito.

---

(3) Logo, se é homem, então é perfeito.

2.5(Princípio de Validade de um Argumento)**.** *Um argumento* $p_1, p_2, \dots, p_{n-1} \vdash q_n$ *é valido se e somente se a condicional* $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow q_n$ *é tautológica.*

Diz-se que $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{n-1}) \rightarrow q_n$ é a *condicional associada ao argumento* $p_1, p_2, \dots, p_{n-1} \vdash q_n$.

Exemplo 2.15. Seja o argumento $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$. Temos que a condicional associada a ele é $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ que de acordo com a tabela verdade abaixo é tautológica.

Tabela 2.8 – Silogismo hipotético

(p	→	q)	∧	(q	→	r)	→	(p	→	r)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, de acordo com o critério de validade, o argumento apresentado é valido.

2.13 REGRAS E MÉTODOS PARA DEMONSTRAÇÃO OU DEDUÇÃO DA VALIDADE DE ARGUMENTOS

2.13.1 Demonstração ou Dedução de um Argumento

Definição 2.21. *Dado um argumento* $p_1, p_2, \dots, p_{n-1} \vdash q_n$, *chama-se demonstração ou dedução de* q_n*, por meio das regras de inferência ou substituição, a partir das premissas*

$p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, *toda sequência finita de proposições* $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ *tais que cada* x_i *ou é uma premissa ou resulta de proposições anteriores da sequência pelo uso de uma Regra de Inferência, e de tal modo que a última proposição* x_k *da sequência seja a conclusão* q_n *do argumento dado.*

2.13.2 Demonstração ou prova direta

Sendo $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \rightarrow q_n$ a condicional associada ao argumento $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1} \vdash q_n$. Note que, as regras de inferência apresentadas anteriormente podem ser todas, como vimos, associadas a argumentos. Assim as mesmas podem ser utilizadas para 'inferir', isto é, executar as etapas de uma *demonstração* ou *dedução* de outros argumentos. Tal método é conhecido com o nome de *prova direta*.

Exemplo 2.16. Demonstrar a validade do argumento $p \rightarrow (q \wedge r), p \vdash p \wedge r$ usando o método da prova direta.

Demonstração.

(1) $p \rightarrow (q \wedge r)$ (Premissa)

(2) p (Premissa)

---

(3) $q \wedge r$ (Modus ponens em 1 e 2)

(4) r (Simplificação em 3)

(5) $p \vee r$ (Conjunção em 2 e 4: Conclusão)

2.13.3 Demonstração com uso da regra de substituição

2.6(Princípio ou Regra da Substituição). *Uma proposição qualquer P ou apenas uma parte de P pode ser substituída por uma proposição equivalente, e a proposição R que assim se obtém é equivalente à P.*

Exemplo 2.17. Demonstrar, fazendo uso da regra da substituição, que é válido o argumento $p \rightarrow \sim q, q \vdash \sim p$

Demonstração. (1) $p \rightarrow \sim q$ (Premissa)

(2) q (Premissa)

---

(3) $\sim\sim q \rightarrow \sim p$	(Substituição contra positiva de 1 em 3)
(4) $q \rightarrow \sim p$	(Substituição dupla negação em 3)
(5) $\sim p$	(Modus ponens em 2 e 4: Conclusão)

2.13.4 Demonstração Condicional

Método utilizado para demonstrar a validade de um argumento cuja conclusão tem a forma condicional, isto é, $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q \rightarrow r$. É baseado no princípio fundamental de que um argumento é válido se e somente se a condicional associada, isto é, $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow (q \rightarrow r)$ que, pela *Regra de Importação* é equivalente a $[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \wedge q] \rightarrow r$, é tautológica. Isto é, mostrar que o argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n, q \vdash r$ é válido.

Exemplo: **2.18.** Demonstrar a validade do seguinte argumento

$$p \vee (q \rightarrow r), \sim r \vdash q \rightarrow p$$

Demonstração.

Do método de demonstração condicional basta provar que

$$p \vee (q \rightarrow r), \sim r, q \vdash p$$

Isto é, que a implicação $p \vee (q \rightarrow r) \wedge \sim r \wedge q \rightarrow p$ é tautológica.

De fato, construindo sua tabela verdade verificamos imediatamente esse fato.

2.13.5 Demonstração Indireta ou Redução ao Absurdo

Dado um argumento qualquer $p_1, p_2, \ldots, p_n, \vdash q$ tal método consiste em supor falsa a conclusão q, isto é, supor a negação $\sim q$ verdadeira e daí deduzir uma contradição qualquer *c* a partir das premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e $\sim q$, isto é, demonstrar que é válido o argumento: $p_1, p_2, \ldots, p_n, \sim q \vdash c$. Daí, pelo método de demonstração condicional, o argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash \sim q \rightarrow c$ também será válido. Por outro lado, das *Leis de Morgan*, da *dupla negação* e *elemento neutro da disjunção*, temos que $\sim q \rightarrow c \Leftrightarrow \sim\sim q \vee c \Leftrightarrow q \vee c \Leftrightarrow q$. Logo, por transitividade, $\sim q \rightarrow c \Leftrightarrow q$. Assim, substituindo a última equivalência em $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash \sim q \rightarrow c$ que é válido teremos portanto, $p_1, p_2, \ldots, p_n, \vdash q$ também válido.

Exemplo 2.19. Demonstre que o argumento abaixo é válido, utilizando o método de demonstração indireta ou redução ao absurdo.

Se $x = \sqrt{2}$, então x é irracional. ($\sqrt{2}$ é irracional)

Demonstração.

Em símbolos, temos: p: $x = \sqrt{2}$; q: x é irracional; $p \rightarrow q$: Se $x = \sqrt{2}$, então x é irracional. Utilizando o método de redução ao absurdo, isto é, sabendo que $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow c$. Basta provarmos $p \wedge \sim q \rightarrow c$, que estaremos demonstrando $p \rightarrow q$. Isto é, basta provarmos que: *Se $x = \sqrt{2}$ e x é racional, então temos uma contradição*.

De fato,

(1)	$x = \sqrt{2}$	(Premissa)
(2)	$x = a/b$, com a, b inteiros e $b \neq 0$	(Premissa)
(3)	$\sqrt{2} = a/b$	(Silogismo hipotético em 1 e 2)
(4)	$2 = a^2/b^2$	(Substituição: quadrado em 3)
(5)	$2a^2 = b^2$	(Substituição: multiplicação a^2 em 4)
(6)	$2a^2 \neq b^2$	(Teorema fundamental da aritmética em 5)
(7)	$2a^2 = b^2 \wedge 2a^2 \neq b^2$	(Conjunção em 5 e 6)
(8)	c	(Contradição em 7: Conclusão)

Portanto, pelo método de redução ao absurdo, se $x = \sqrt{2}$, então x é irracional.

Ou ainda:

De fato, $x = \sqrt{2}$ e x racional $\Rightarrow \sqrt{2} = a/b \Rightarrow a^2/b^2 = 2 \Rightarrow 2a^2 = b^2$ com a, b números inteiros e $b \neq 0$, o que obviamente é uma contradição uma vez que, pelo *Teorema Fundamental Da Aritmética*, *é única a decomposição de um número em fatores primos* e como na última igualdade vê-se claramente que o número de fatores 2 a esquerda da igualdade é um número ímpar enquanto que do lado direito a quantidade de fatores 2 é um número par. Portanto, pelo método de demonstração indireta ou redução ao absurdo, o argumento: "*Se* $x = \sqrt{2}$, *então x é irracional*" é válido!

2.13.6 Demonstração por contraexemplo

Como vimos, na demonstração de um argumento com uso de tabelas verdade, se há pelo menos uma linha na qual o valor lógico de sua conclusão é (F) e o valor lógico de todas as suas premissas nessa mesma linha é (V) o argumento é não válido. Bastando obter a referida linha para provar tal fato. Ou alternativamente, basta apenas encontrar um *argumento da mesma forma* e que tenha, no entanto, premissas verdadeiras e conclusão falsa. Esta maneira de demonstrar a não-validade de um argumento chama-se *Método do contraexemplo*.

Exemplo 2.20. Verificar a validade do argumento utilizando o método do contraexemplo:

Se $x = 0$ e $y = z$, então $y > 1$	(Premissa)
$y < 1$	(Premissa)
Portanto, $y \neq z$	(Conclusão)
Fazendo $x = y = z = 0$, temos:	
Se $1 = 0$ e $0 = 0$, então $0 > 1$	(Premissa verdadeira)
$0 < 1$	(Premissa verdadeira)
Portanto, $0 \neq 0$	(Conclusão falsa)

2.13.7 Demonstração por contraposição

Dado um argumento qualquer $p_1, p_2, ..., p_n, \vdash q$ tal método consiste em transformar a condicional associada ao argumento dado $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \rightarrow q$ na sua contra positiva $\sim q \rightarrow \sim (p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n)$ e demonstrá-la. Logo, como a contra positiva de uma condicional equivale logicamente a condicional, o argumento estará demonstrado.

Interessante notar que tal método é usado quando a contra positiva obtida for mais 'simples' de ser demonstrada que a condicional associada dada.

Exemplo 2.21. Demonstrar, por contraposição, o seguinte argumento abaixo.

Se x^2 é um ímpar, então x é ímpar.

Demonstração.

Em símbolos, temos: p: x^2 é um ímpar; q: x é ímpar; $p \rightarrow q$: Se x^2 é um ímpar, então x é ímpar. Note que, $\sim q$: x é par; $\sim p$: x^2 é par. Daí, sua contra positiva é dada por $\sim q \rightarrow \sim p$: Se x é par, então x^2 é par. Note que esta última pode ser demonstrada facilmente.

De fato,

1)	x é par	(Premissa)
2)	$x = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$	(Substituição em 1: definição paridade)
3)	$x^2 = 2.2n^2$	(Substituição de 2: elevando ao quadrado)
4)	x^2 é par	(Substituição de 3: definição paridade - Conclusão)

Portanto, pelo método da contraposição, 'se x^2 é um ímpar, então x é ímpar' é um argumento válido.

2.13.8 Demonstração por vacuidade

Existem argumentos que, pela sua construção, facilmente percebe-se que não possuem contraexemplos, já que a condicional associada ao argumento tem como antecedente uma contradição. Quando isso ocorre, dizemos que o argumento é válido por *vacuidade*.

Exemplo 2.22. Os argumentos abaixo são todos válidos por vacuidade.

- $\sim (p \vee \sim p) \vdash q$
- Se um pentágono tem quatro lados, então sua área é 2021.
- Se um número natural é menor do que 0 então ele é múltiplo de 2.
- Se é idoso com 200 anos de idade, então não pega COVID19.

Exemplo 2.33. Para todo x real, se $x^2 + 1 < 0$ então $x^5 \geq 4$.

Demonstração.

Seja x um real arbitrário. Sabemos que $x^2 \geq 0$, logo $x^2 + 1 > 0$. Portanto, por vacuidade, se $x^2 + 1 < 0$ então $x^5 \geq 4$.

Notemos que a contra positiva do teorema acima afirma que se $x^5 < 4$ então $x^2 + 1 \geq 0$. Como a conclusão é sempre verdadeira a implicação também será.

2.13.9 Demonstração por exaustão

Método aplicado em argumentos com condicional associada da forma $(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$ que equivale a $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \rightarrow q)$, isto é, quando as suas premissas são um número finito de disjunções. Tal método consiste em demonstrar uma a uma todas as disjunções separadamente utilizando o método de demonstração direta. Fazendo com isso n demonstrações diretas exaurindo todos os casos a serem analisados concluindo assim a demonstração do argumento.

Exemplo 2.23. Se k é um número inteiro da forma 3k, ou 3k+1, ou 3k+2, então o produto deste número com seus dois sucessores é múltiplo de 3.

Demonstração.

Observe que a hipótese(premissa) (p) é constituída pelas seguintes disjunções de sentenças: números inteiros p_1 : 3k ou p_2 : 3k + 1 ou p_3 : 3k + 2, devemos concluir a seguinte tese(conclusão) (q): o produto deste número com seus dois sucessores é múltiplo de 3. Assim devemos por exaustão demonstrar os seguintes teoremas, isto é, Se p_1 (vale), ou se p_2 (vale), ou se p_3 (vale), então q (vale). De fato, tal teorema tem uma demonstração simples e basta notar que se o número é 3k (vale), então $3k(3k + 1)(3k + 2) = 3(k(3k + 1)(3k + 2))$ é múltiplo de 3 (vale), e se o número é 3k + 1 (vale), então $(3k + 1)(3k + 2)(3k + 3) = 3((3k + 1)(3k + 2)(k + 1))$ é múltiplo de 3 (vale), e se o número é 3k + 2 (vale), então $(3k + 2)(3k + 3)(3k + 4) = 3((3k + 2)(k + 1)(3k + 4))$, é múltiplo de 3 (vale), portanto a validade dos teoremas parciais garante a validade do teorema de hipóteses(premissas) disjuntivas.

2.13.10 Demonstração de argumentos com conclusão conjuntiva

Argumentos com conclusão conjuntiva são argumentos com condicional associada da forma $p \rightarrow (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n)$ que equivale a $(p \rightarrow q_1) \wedge (p \rightarrow q_2) \wedge \ldots \wedge (p \rightarrow q_n)$, isto é, quando a sua conclusão é expressa por um número finito de conjunções. A demonstração de argumentos desse tipo consiste em mostrar que a premissa (p) implica em cada uma das conclusões (q_n), sendo n = 1, 2, ..., n; como a equivalência dada sugere.

Exemplo 2.24. Se um número é múltiplo de 12, então é múltiplo de 3 e de 4.

Demonstração.

Usando a demonstração direta basta provar que se um número é múltiplo de 12, então é múltiplo de 3, e se um número é múltiplo de 12, então é múltiplo de 4. E é fácil notar que se N é múltiplo de 12, então é divisível por 12, e pode ser escrito $N = 12 \cdot m$, sendo m inteiro. Desta maneira, se N = 12m (vale), então 3 divide N (vale), logo N é múltiplo de 3 e se N = 12m (vale), então 4 divide N (vale), logo N é múltiplo de 4, portanto se um número que é múltiplo de 12, então é múltiplo de 3 e de 4.

2.13.11 Demonstração de argumentos com conclusão disjuntiva

Argumentos com conclusão disjuntiva são argumentos com condicional associada da forma $p \rightarrow (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n)$ que equivale a $(p \rightarrow q_1) \vee (p \rightarrow q_2) \vee \ldots \vee (p \rightarrow q_n)$, isto é, quando a sua conclusão é expressa por um número finito de disjunções. A demonstração de argumentos desse tipo consiste em mostrar que a premissa (p) implica em cada uma das conclusões (q_n), sendo n = 1, 2, ..., n; como a equivalência dada sugere.

Exemplo 2.25. Se x e y são números reais tais que $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$.

Demonstração.

Considere a hipótese x, y são números reais onde $x^2 = y^2$, mostre que a tese $x = y$ ou $x = -y$. Para essa demonstração basta usar a manipulação algébrica dos produtos notáveis, ou seja, $x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$ ou $x + y = 0$, ou seja $x = y$ ou $x = -y$.

2.14 SENTENÇAS ABERTAS E QUANTIFICADORES

Definição 2.22. Chama-se **sentença aberta com uma variável x em um conjunto A** ou apenas **sentença aberta em A**, uma expressão p(x) tal que p é uma proposição qualquer e p(a) é falsa ou verdadeira para todo $a \in A$, não sendo possível determinar o valor lógico de p(x) a menos se referida um elemento particular de A.

Exemplo 2.26. São sentenças abertas no conjunto IN:

- $2x + 3 = 10$
- $x + 2 > 5$
- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- x é raiz quadrada de 36

Definição 2.23. Chama-se **conjunto verdade** de uma sentença aberta p(x) em um conjunto A, o conjunto de todos os elementos $a \in A$ tais que p(a) é uma proposição verdadeira, isto é, $\{x |\ x \in A \wedge p(x) = V\}$.

Exemplo 2.27. $x^2 - 5x + 6 = 0$ em IR tem conjunto verdade: {2, 3}.

Note que a frase "Este número não é primo" também é uma sentença aberta. Além disso uma sentença aberta pode conter mais de uma variável livre por exemplo: $x^2 + y^2 > 1$.

Uma das maneiras de transformar uma sentença aberta numa sentença, é quantificar, em um determinado conjunto, cada variável livre que aparece na sentença aberta. Ou seja, indicar a quantidade de elementos de determinado conjunto que gozam da propriedade correspondente a cada variável que aparece na sentença aberta. Uma das formas de conseguir isso e utilizando as palavras '**existe**' ou a expressão '**para todo**'.

Exemplo 2.28. Uma maneira de transformar a sentença aberta, '$2x + 6 = 3$', em uma proposição, seria escrever:

"Existe $x \in R$, tal que $2x + 6 = 3$."

Dessa maneira, temos uma proposição!

Semelhantemente, poderíamos ter escrito

"Para todo $x \in R$, temos $2x + 6 = 3$",

frase que agora também é uma proposição.

Observe que a primeira das duas últimas sentenças ´ e verdadeira, enquanto a segunda é falsa. Os termos '*para todo*' e '*existe*' são, com muita razão, chamados, respectivamente, de *quantificador universal* e *quantificador existencial* e são, respectivamente, denotados pelos símbolos $\forall$ e $\exists$. Os quantificadores tem uma importância muito grande dentro da Linguagem Matemática. O quantificador universal é usado para definir propriedades que valem para todos os elementos de um conjunto. Já o quantificador existencial é usado para definir propriedades que valem para pelo menos um elemento de um conjunto ou que vale para apenas um. Nesse último caso é chamado *quantificador existencial de unicidade*, denotado pelo símbolo $\exists!$ Lê-se: '*existe um e um só*'.

Note ainda que outras expressões que podem substituir 'para todo' são, por exemplo: '*dado*', '*para qualquer*', '*(para) qualquer que seja*', '*para cada*'. Outras expressões que podem substituir '*existe*' são, por exemplo: '*existe algum*', '*existe pelo menos um*'.

As operações lógicas e propriedades que definimos para proposições no início deste capítulo estendem-se de forma natural à sentenças abertas quantificadas que podem ser demonstradas utilizando-se qualquer um dos métodos de demonstração apresentados até aqui, em particular, usaremos o *método de demonstração indireto* ou *redução ao absurdo* nas demonstrações de sentenças quantificadas existencialmente com a expressão '*existe um e um só*' conhecidas por *demonstrações de unicidade* e simplesmente apresentar pelo menos um exemplo verdadeiro, nas demonstrações de sentenças quantificadas existencialmente com a expressão '*existe pelo menos um*' conhecidas por *demonstração de existência*.

2.15 COMO NEGAR PROPOSIÇÕES

Baseando-nos nas regras de inferências e noutras equivalências lógicas já estabelecidas destacamos, nos exemplos seguintes, processos para negar proposições.

Exemplo 2.29. *Negação de uma conjunção*. Tendo em vista que $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$.

Exemplo 2.30. *Negação de uma disjunção.* Tendo em vista que $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$.

Exemplo 2.31. *Negação de um condicional.* Já que $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \rightarrow q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.

Exemplo 2.32. *Negação de proposições quantificadas.*

a) Uma sentença quantificada com o quantificador universal, do tipo $(\forall x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador universal pelo existencial e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\exists x)(\sim p(x))$. Onde $(\forall x)(p(x))$ lê-se: para todo x temos $p(x)$; e $(\exists x)(\sim p(x))$ lê-se: existe x tal que $\sim p(x)$.
b) Uma sentença quantificada com o quantificador existencial, do tipo $(\exists x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador existencial pelo universal e nega-se $p(x)$, obtendo: $(\forall x)(\sim p(x))$. Onde $(\exists x)(p(x))$ lê-se: existe x tal que $p(x)$; e $(\forall x)(\sim p(x))$ lê-se: para todo x temos $\sim p(x)$.

3 O DESENVOLVIMENTO DE UMA TEORIA AXIOMÁTICA

Uma teoria desenvolvida axiomaticamente é formada por: *noções não definidas* ou *entes primitivos*, *definições*, *proposições não demonstradas* ou *axiomas*, *regras de inferência* e *proposições demonstradas*: *lemas, teoremas e corolários* que definiremos a seguir.

Uma teoria matemática desenvolvida axiomaticamente é apresentada com eficácia, uma vez que a princípio, uma das vantagens de empregá-la, além de fornecer um tratamento fundamentado num rigor logico, é que, em geral, não se pede dos leitores conhecimentos extras ou qualquer experiencia matemática anterior naquele assunto para compreensão do mesmo. A seguir os elementos componentes de um teoria axiomática.

Definir é enunciar os atributos essenciais e específicos de “uma coisa”, de modo que a torne inconfundível com outra. Para que o objetivo de uma definição seja atingido, devem ser observados dois aspectos: uma definição só pode conter termos que foram definidos previamente e uma definição de um objeto não pode conter um termo cuja definição contenha referência ao próprio objeto.

Entretanto, é possível fugir dessas armadilhas ou círculos viciosos parando nas definições seguintes a objetos matemáticos mais simples, cujos conceitos se aceitem naturalmente, sem explicações, e que sejam evidentes por si mesmo. Nesse momento, não definimos mais estes primeiros objetos, e os aceitamos como noções primitivas ou entes primitivos.

As *noções primitivas* são conceitos adotados sem ser preciso defini-los. As noções primitivas não surgem de opiniões pessoais isoladas, elas são frutos da experiencia, da observação e de um certo “consenso coletivo”. Por esses motivos, as vezes também são chamadas de noções comuns.

Axioma ou *postulado* é uma sentença que não é uma definição, mas é aceita sem precisar ser justificada dada sua simplicidade sendo evidente por si mesma. São usados sempre em menor número possível no desenvolvimento de uma teoria e são independentes, isto é, nenhum deles pode ser deduzido dos demais.

Regras de Inferência são regras estabelecidas previamente numa teoria axiomática acerca da manipulação de definições e axiomas para desenvolver tal teoria, deduzindo mais regras e afirmações iniciais e a partir destas outras.

Definição 3.1. *Um teorema é uma sentença matemática condicional 'Se P, então Q' ou implicativa* '$P \Rightarrow Q$'*, da qual existe uma demonstração que garanta sua validade. Nesse caso, chama-se hipótese a sentença P e tese a sentença Q.*

Tal proposição condicional recebe essa denominação devido a sua relevância dentro da teoria ou no contexto histórico em que surgiu, podendo esses ser unidos a outras proposições, definições e/ou entes primitivos formando assim novas proposições que podem ser demonstradas, isto é, possíveis novos teoremas.

Um teorema é considerado um argumento válido que tem condicional associada da forma $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q$, com n natural tal que $n \geq 1$. As premissas $P_1, \ldots, P_n$ são as hipóteses do teorema e a conclusão Q é sua tese.

Muitas vezes, dependendo do contexto e para não abusar da palavra 'teorema', que frequentemente aparece na Matemática, alguns teoremas recebem outros nomes:

Definição 3.2. *Corolário é um teorema obtido como consequência de outro recém provado*. Neste caso, o segundo teorema é chamado corolário do teorema provado;

Definição 3.3. *Lema é um teorema usado para provar outro que lhe sucede, isto é, um teorema auxiliar ou preparatório, que é usado na demonstração de outro teorema.*

Definição 3.4. *Proposição* é um teorema que não é central no contexto e tem importância limitada.

Exemplo 3.1. *A Geometria Euclidiana Plana* do Ensino Fundamental é um exemplo de teoria matemática desenvolvida axiomaticamente, sendo:

- Ponto, reta e plano são as *noções não definidas* ou *entes primitivos*;
- Segmento de reta, semirreta, segmentos colineares, ângulo, triângulo e circunferência são as denominações dadas a alguns exemplos de *definições*;
- Os Postulados da existência, determinação e Inclusão *são* exemplos de *proposições não demonstradas ou axiomas*;

- O teorema do ângulo externo de um triangulo, teorema da desigualdade triangular, Teorema de Tales[25] e o Teorema de Pitágoras[26] são exemplos de *proposições demonstráveis* ou *teoremas*.

Exemplo 3.2. *A Teoria dos Conjuntos* do ensino médio é um exemplo de teoria matemática desenvolvida axiomaticamente, sendo:

- Conjunto é um exemplo de *noção não definida* ou *ente primitivo*.
- Elemento, conjuntos disjuntos e subconjunto de um conjunto são as denominações dadas a alguns exemplos de *definições*.
- 'Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos.' É um exemplo de *proposição não demonstrada* ou *axioma* (da extensão).
- "A união, a interseção e a diferença simétrica entre conjuntos são operações comutativas" e "Existe um único conjunto vazio" são exemplos de *proposições demonstradas* ou *teoremas.*

Numa teoria desenvolvida axiomaticamente a demonstração de um teorema é feita deduzindo sua tese a partir de sua(s) hipótese(s) apresentada(s) fazendo uso de axiomas, definições, teoremas já demonstrados, passos da demonstração que já foram previamente provados, regras de inferência estabelecidas inicialmente e as técnicas de demonstração apresentadas. Dependendo da preferência de quem organiza a apresentação da teoria, uma determinada proposição pode ser adotada como axioma ou então provada como teorema, a partir de outra proposição que a substituiu na lista dos axiomas. A seguir veremos um resumo da teoria matemática dos conjuntos e sua relação com a lógica e em particular o conjunto dos números naturais, onde os conceitos primitivos são número natural e sucessor e os axiomas são os de Peano[27].

---

[25] Tales de Mileto, (em grego: Θαλῆς ὁ Μιλήσιος; c.624 — 546 a.C.) foi um filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga, considerado, por alguns, o primeiro filósofo ocidental.
[26] Pitágoras de Samos (em grego: Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, ou apenas Πυθαγόρας; Πυθαγόρης em grego jônico; c. 570 – c. 495 a.C.) foi um filósofo e matemático grego jônico creditado como o fundador do movimento chamado Pitagorismo.
[27] Giuseppe Peano (27 de agosto de 1858 – Turim, 20 de abril de 1932) foi um matemático e glottologista italiano.

4 CONJUNTOS E SUA RELAÇÃO COM A LÓGICA

4.1 A NOÇÃO DE CONJUNTO

Dados um conjunto A e um objeto qualquer *a*, a única pergunta cabível é se *a* é ou não *um elemento do conjunto* A. Esta pergunta só admite duas respostas possíveis: *sim* ou *não*. No caso afirmativo, diz-se que *a pertence* ao conjunto A e escreve-se $a \in A$. Caso contrário, diz-se que *a não pertence* ao conjunto A e põe-se $a \notin A$.

Em Matemática, qualquer afirmação é *verdadeira ou falsa*, não pode haver uma terceira opção, e nem as duas ao mesmo tempo. Estes fatos básicos são conhecidos como *Princípio do Terceiro Excluído e Princípio da Não Contradição* e estão na base da estrutura lógica da Matemática como vimos na seção 2. Diferentemente do que ocorre com outras modalidades de lógica (como as que empregamos informalmente no dia a dia), para avaliar a veracidade de uma afirmação matemática, não há outras variações possíveis de respostas, tais como mais ou menos, depende ou às vezes.

A Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço. Portanto, os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática (especialmente na Matemática do ensino básico) são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas (que são conjuntos de pontos) e os conjuntos que se derivam destes, como os conjuntos de funções, de matrizes etc.

A linguagem dos conjuntos, hoje universalmente adotada na apresentação da Matemática, ganhou esta posição porque permite dar aos conceitos e às proposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica. A partir de agora representaremos tanto as proposições simples e quanto as compostas com consoantes maiúsculas do alfabeto latino. Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizermos que "o objeto x tem a propriedade *P*" ou o "objeto y satisfaz a condição *Q*", podemos escrever $x \in A$ e $y \in B$, em que *A* é o conjunto dos objetos que têm a propriedade *P* e *B* é o conjunto dos objetos que satisfazem a condição *Q*.

Em Teoria de Conjuntos, esta propriedade corresponde ao chamado *Axioma da Especificação*, indica-se: $A = \{x \in U: P(x)\}$ e $B = \{y \in U: Q(y)\}$, sendo U o conjunto universo.

Então, dizer que x tem a propriedade P e y satisfaz a condição Q é o mesmo que afirmar que $x \in A$ e $y \in B$.

A esse respeito, uma pergunta fundamental para entender a importância da linguagem de conjuntos é a seguinte: *Qual é a vantagem que se obtém quando se prefere dizer que* $x \in A$ *e* $y \in B$*, em vez de dizer que x tem a propriedade P e y satisfaz a condição Q?*

A vantagem de se utilizar a linguagem e a notação de conjuntos é que entre estes existe uma álgebra, montada sobre as operações de reunião ($A \cup B$) e interseção ($A \cap B$), além da relação de inclusão ($A \subset B$). As propriedades e regras operatórias dessa álgebra, como por exemplo, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \subset A \cup B$, não são difíceis de manipular e representam um enorme ganho em simplicidade e exatidão quando comparadas ao manuseio de propriedades e condições. Por exemplo, mostrar que um conjunto está contido em outro equivale a mostrar que a propriedade que define o primeiro implica na propriedade que define o segundo ($P \Rightarrow Q$); e aplicar a propriedade antissimétrica da inclusão de conjuntos para demonstrar a igualdade entre conjuntos (*se* $A \subset B$ *e* $B \subset A$*, então* $A = B$) equivale a demonstrar a equivalência entre as condições que os definem ($P \Leftrightarrow Q$).

Existe um conjunto excepcional, único e intrigante: o conjunto vazio, designado pelo símbolo $\emptyset$. Em Teoria de Conjuntos, a existência desse conjunto corresponde ao chamado *Axioma do Vazio* e é fácil ver sua unicidade, usando redução ao absurdo. Ele é aceito como conjunto porque cumpre a utilíssima função de simplificar as proposições, evitando uma longa e tediosa menção de exceções. Qualquer propriedade contraditória serve para definir o conjunto vazio. Por exemplo, tem-se $\emptyset = \{x;\ x \neq x\}$, ou seja, $\emptyset$ é o conjunto dos objetos x tais que x é diferente de si mesmo. Seja qual for o objeto x tem-se sempre $x \notin \emptyset$. Em muitas questões matemáticas é importante saber que um determinado conjunto X não é vazio. Para mostrar que X não é vazio, deve-se simplesmente encontrar um objeto x tal que $x \in X$. Outros conjuntos curiosos são os conjuntos unitários. Dado um objeto x qualquer, o conjunto unitário $\{x\}$ tem como único elemento esse objeto x. Estritamente falando, x e $\{x\}$ não são a mesma coisa o primeiro pode ser um elemento e o segundo pode ser um elemento ou um conjunto.

4.5 RESUMO DAS RELAÇÕES FUNDAMENTAIS ENTRE A LINGUAGEM DA ÁLGEBRA DE CONJUNTOS E A LINGUAGEM DAS IMPLICAÇÕES LÓGICAS

Em matemática, a principal regra de dedução, aquela que talvez mais usamos, é o chamado "Modus Ponens" que diz o seguinte "$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$ ", ou seja, se em uma teoria sabe-se que $(P \rightarrow Q) \wedge P$ são teoremas, então Q também é um teorema (proposição demonstrável); esta regra parece bastante natural se refletirmos sobre a maneira como raciocinamos e se observarmos que quando P é verdadeiro, $P \rightarrow Q$ é verdadeiro se e somente se Q for verdadeiro.

Consideremos P e Q duas condições, aplicáveis aos elementos de um conjunto U. Consideremos A e B subconjuntos de U, cujos elementos satisfazem P e Q, respectivamente. As principais equivalências entre a linguagem de implicações e a linguagem de conjuntos podem ser resumidas no quadro a seguir.

Quadro 1 – Conjuntos e Lógica

LINGUAGEM DE CONJUNTOS	LINGUAGEM DE IMPLICAÇÕES LÓGICAS	DENOMINAÇÃO
$A = B$	$P \Leftrightarrow Q$	Igualdade/Bicondicional
$A \subset B$	$P \Rightarrow Q$	Inclusão/Condicional
A^C	$\sim P$	Complementar/Negação
$A \cup B$	$P \vee Q$	União/Disjunção
$A \cap B$	$P \wedge Q$	Interseção/Conjunção
$A \subset B = (A \cap B^C) \subset \emptyset$	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \rightarrow C$	Redução ao absurdo
$A \subset B = B^C \subset A^C$	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim Q \rightarrow \sim P$	Contra positiva
$((A \subset B) \cap A) \subset B$	$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$	Modus Ponens
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$\sim(P \vee Q) = \sim P \wedge \sim Q$	Lei de Morgan
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$\sim(P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$	Lei de Morgan
$(A \cap A^C)^C = \emptyset^C = U$	$\sim (P \wedge \sim P)$	Princípio da não contradição
$(A \cup A^C) = U$	$(P \vee \sim P)$	Princípio do 3º excluído

Fonte: Elaborado pelo autor.

5 O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

$\mathbb{N}$ é um conjunto, cujos elementos são chamados *números naturais*. A essência da caracterização de $\mathbb{N}$ reside na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando n, n' $\in \mathbb{N}$, dizer que n' é *o sucessor* de n significa que n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n'. Evidentemente, esta explicação apenas substitui "sucessor" por "logo depois", portanto não é uma definição. O termo primitivo "sucessor" não é definido explicitamente. Seu uso e suas propriedades são regidos por algumas regras, abaixo enumeradas:

a) Todo número natural tem um único sucessor;

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

c) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

As afirmações (a), (b), (c) e (d) acima são conhecidas como os axiomas de *Peano*. Tudo o que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência desses axiomas.

5.1 O AXIOMA DA INDUÇÃO

O último dos axiomas de Peano é conhecido como o axioma da *indução*. Ele é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais (demonstrações por indução, ou por recorrência, como veremos no capítulo seguinte). Enunciado sob a forma de propriedades em vez de conjuntos, ele se formula assim:

Seja P(n) uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

i) P(1) *é válida;*

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n.

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n.

Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é válida, veremos que:

- $1 \in X$ em virtude de (i); e que
- $n \in X \Rightarrow n' \in X$ em virtude de (ii).

Logo, pelo axioma da indução, concluímos que $X = \mathbb{N}$.

Definição 5.1. *Esta formulação do Axioma da Indução é chamada de Princípio de Indução Matemática* (PIM).

6 O MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO MATEMÁTICA

Uma proposição pode ser verdadeira em uma série de casos particulares e não ser verdadeira em geral.

Surge, então, uma pergunta. Se temos uma proposição verdadeira em vários casos particulares e é impossível analisar todos os casos, quando podemos afirmar empregando a indução em Matemática, que essa proposição é verdadeira em geral?

Às vezes, tem-se a resposta aplicando um argumento especial, conhecido como *método de indução matemática.*

6.1 O TEOREMA DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Seja P(n) uma proposição relativa ao número natural n. Suponhamos que

(i) P(1) é verdadeira;

(ii) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, P(n) verdadeira implique P(n+1) verdadeira.

Então P(n) é verdadeira qualquer que seja o número natural n.

Demonstração.

Suponha que P(n) seja falsa para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, que exista o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \,;\, P(x) = F\} \neq \emptyset$ apesar das hipóteses (i) e (ii) ocorrerem. Daí, pelo Princípio da Boa Ordenação[1], existe o número natural *a* menor elemento de A. Como, por (i), $P(1) = V$, então $1 \notin A$ e $a > 1$, uma vez que 1 é menor elemento de $\mathbb{N}$. Logo, do segundo axioma de Peano, *a* é sucessor de *a – 1*, mas como *a* é o menor elemento de A, então $a - 1 \notin A$. Daí, $P(a - 1) = V$. Mas, por (ii), $P(a - 1) = V \Rightarrow P(a - 1 + 1) = P(a) = V$, isto é, $a \notin A$. Absurdo! Uma vez que afirmamos inicialmente que $a \in A$. Logo, $A = \emptyset$.

Portanto, P(n) é verdadeira qualquer que seja o número natural n.

Demonstração acima adaptada pelo autor inspirado em [17].

As hipóteses (i) e (ii) do Teorema de Indução Matemática são denominados respectivamente de *base indutiva* e *passo indutivo*.

Exemplo 6.1. Observando a sequência dos números ímpares 1, 3, 5, 7, ... podemos inferir, naturalmente, a seguinte proposição:

P(n): Se a_n *é um número ímpar de ordem n, então* $\mathbf{a_n = 2n - 1}$*, com* $n \in \mathbb{N}$.

Verificar, utilizando o PIM, se a proposição acima é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

(i) $P(1) = V$. De fato, pois se $n = 1$ temos $a_1 = 2.1 - 1 = 1$ que é o primeiro número ímpar.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k + 1) = V$. Isto é, se $a_k = 2k - 1$, para um natural k arbitrário, então $a_{k+1} = 2(k + 1) - 1$.

De fato, $a_k = 2k - 1 \Longrightarrow a_k + 2 = 2k - 1 + 2 \Longrightarrow a_{k+1} = 2(k + 1) - 1$.

Portanto, pelo PIM, a proposição dada é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6.2. Queremos provar a validez, para todo número natural n, da proposição

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Demonstração.

(i) $P(1) = V$. De fato, obviamente $1 = 1^2$.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k + 1) = V$, para um natural k arbitrário. Isto é, se $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ então, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (2k + 1)^2$.

De fato, da hipótese, temos:

$[1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] + (2k + 1) = (k^2) + (2k + 1) = (2k + 1)^2$.

Portanto, pelo PIM, a proposição dada é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

6.2 OUTRAS FORMAS DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Inicialmente mostraremos outras formas de Indução Matemática em seguida como utiliza-las como poderosos instrumentos para demonstrar os mais variados resultados envolvendo números naturais e também para definir com rigor objetos matemáticos.

Teorema 6.1. Seja $P(n)$ uma sentença sobre $\mathbb{N}$, e seja $a \in \mathbb{N}$. Suponha que:

(i) $P(a)$ é verdadeira, e

(ii) qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq a$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue-se que $P(n + 1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq a$.

Demonstração.

Defina o conjunto $S = \{m \in \mathbb{N}; P(m + a - 1) = V\}$.

Por (i) temos que $1 \in S$, uma vez que $1 \in \mathbb{N}$ e $P(1 + a - 1) = P(a)$ que, por hipótese é verdadeira. Por outro lado, se $m \in S$, temos que $P(m + a - 1)$ é verdadeira. Logo, por (ii), $P(m + a - 1 + 1) = P(m + 1 + a - 1)$ é verdadeira. Logo, $m + 1 \in S$. Em vista do Princípio de Indução Matemática, temos que $S = \mathbb{N}$. Consequentemente, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Tal variação do PIM é conhecida como *Pequena Generalização do Princípio de Indução Matemática.*

Exemplo 6.3. *Um caixa eletrônico de um banco tem um suprimento ilimitado de notas de 3 e de 5 (unidades de moeda). Mostre que ele pode pagar qualquer quantia (de unidades de moeda) maior do que 7.*

Demonstração.

Provemos, por indução sobre n, que $P(n)$: $n = 3.x + 5.y$ é verdadeira $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 8$ e $x, y \in \mathbb{N}$.

Sem perda de generalidade, seja rublo[28] a unidade de moeda em questão:

i) $P(8) = V$. De fato, $8 = 3.1 + 5.1$, isto é, paga-se 8 rublos com uma nota de 3 mais uma nota de 5 rublos.

ii) $P(k) = V \Rightarrow P(k + 1) = V$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $K > 8$. De fato, para qualquer que seja a quantia de k rublos a se pagar, nas condições dadas, obviamente ocorrerá dois casos:

[28] O rublo (em russo рубль), é a moeda da Federação Russa e Bielorrússia (e antigamente da União Soviética e do Império Russo).

- A quantia de k rublos pode ser paga com notas de 3 rublos; e
- para pagar a quantia de k rublos há necessidade de pelo menos uma nota de 5 rublos.

No primeiro caso, haverá não menos de três notas de 3 rublos, já que $K > 8$. Para pagar a quantia de $k + 1$ rublos, bastará substituir três notas de 3 rublos por duas notas de 5 rublos. Logo, $P(k) = V \Rightarrow P(k + 1) = V$.

No segundo caso, para pagar a quantia de $k + 1$ rublos substituímos uma nota de 5 rublos por duas notas de 3 rublos. Logo, $P(k) = V \Rightarrow P(k + 1) = V$.

Portanto, pelo PIM, a proposição $P(n)$ é verdadeira $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 8$ e $x, y \in \mathbb{N}$.

Uma outra variante do Princípio de Indução ocorre quando convém, no passo de indução, considerar a validez não somente do antecessor direto, mas de 2 antecessores.

Teorema 6.2. Seja $P(n)$ uma sentença aberta relativa ao natural n. Suponhamos que:

(i) $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiras.

(ii) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ e $P(n + 1)$ implicam a validez de $P(n+2)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Suponha que o conjunto A dos números naturais n para os quais $P(n)$ é falsa seja não vazio. Pelo PBO A possui menor elemento a. Então $1 < a$ e $2 < a$ e, além disso $P(a - 1)$ e $P(a - 2)$ são verdadeiras. Segue-se da hipótese que $P(a)$ é verdadeira. Contradição. Logo $A = \emptyset$ e $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 6.4. Um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.

É natural inferir que o número de casais de coelhos em um determinado mês é igual ao número total de casais do mês anterior acrescido do número de casais nascidos no mês em curso, que é igual ao número total de casais do mês anterior ao anterior.

Se denotarmos o número de coelhos existentes no n-ésimo mês por F_n, temos, então, que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_1 = F_2 = 1$.

Essas relações definem, por recorrência(indução), uma sequência de números naturais, chamada de sequência de *Fibonacci*[29], cujos elementos, chamados de *números de Fibonacci*, possuem propriedades aritméticas notáveis, que ainda hoje são objeto de investigação.

Exemplo 6.5. Mostre que o termo geral a sequência de Fibonacci é $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

Demonstração.

A expressão está correta para $n = 1$ e $n = 2$, já que

$F_1 = 1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}}$ e $F_2 = 1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$.

Suponhamos que a expressão esteja correta para n e $n + 1$.

Então

$$
\begin{aligned}
F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

[29] Leonardo Fibonacci (1170 -1250) foi um matemático italiano. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa

Logo, a expressão também está correta para $n + 2$. Portanto, por indução, ela está correta para todo n natural.

Teorema 6.3. Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

(i) $P(1)$ é válida.

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(k)$, para todo $k \leq n$, implica na validez de $P(n + 1)$.

Então $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Consideremos a sentença aberta $Q(n)$: $P(k)$ é válida, para todo natural $k \leq n$. Como, por (i), $P(1)$ é válida, $Q(1)$ também é. Suponhamos agora que $Q(n)$ seja válida. Isto quer dizer que $P(k)$ é válida, para todo $k \leq n$. Mas, por (ii), isto implica a validez de $P(n + 1)$, que por sua vez implica que $P(k)$ seja válida para todo $k \leq n + 1$. Logo, $Q(n + 1)$ também é válida. Portanto, pela forma original do Princípio da Indução, $Q(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, de onde decorre a validez de $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

O teorema acima variante do Princípio da Indução Matemática é muitas vezes chamado de *Princípio da Indução Completa* ou da *Indução Forte*.

Exemplo 6.6(Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo número natural $n \geq 2$ ou é primo ou é um produto de números primos.*

Demonstração.

Como 2 é primo, a propriedade vale para $n = 2$. Suponhamos que ela seja válida para todo natural k tal que $2 \leq k \leq n$. Se $n + 1$ não for primo, então pode ser expresso na forma a.b, onde a e b são números naturais maiores que 1 e menores que $n + 1$. Portanto, pela hipótese de indução, cada um dos números a e b é primo ou um produto de primos, o que mostra que $n + 1$ é um produto de primos. Logo, a propriedade também vale para $n + 1$. Logo, por indução (completa), a propriedade vale para todo n natural.

6.3 CUIDADOS AO DEMONSTRAR POR INDUÇÃO

Como na maioria das vezes não sabemos se a propriedade a ser demonstrada é realmente verdadeira podemos ter duas situações possíveis caso o passo indutivo (condicional) se verifique: a) [P(n) = ? $\longrightarrow$ P(n + 1) = V] verdadeira com P(n) = V.

b) [P(n) = ? $\longrightarrow$ P(n + 1) = V] verdadeira com P(n) = F.

Daí, a importância da verificação inicial do passo base, isto é, valor lógico de P(1).

Exemplo 6.7. Verificar a validade da proposição: P(n): $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, $\forall$ n natural.

Demonstração.

(i) P(1) = F. De fato, $1 \neq \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2$. Portanto, P(n) é falsa. Apesar de que:

(ii) P(n) = V implica em P(n + 1) = V, isto é, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ implica

$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$.

De fato, $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) + 1 =$

$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$.

Portanto, a proposição dada **não** é verdadeira apesar do passo indutivo se verificar.

Daí, de tudo que foi exposto, a necessidade de verificar-se cuidadosamente se o passo base e o passo de indução se verificam ao realizar uma demonstração utilizando-se o método de indução matemática.

7 APLICAÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

7.1 DEMONSTRAÇÕES COM O MÉTODO DE PROVA DIRETA

Aplicação 7.1(Teorema de Pitágoras).

"Se um triângulo é retângulo, então a soma dos quadrados das medidas dos seus catetos é igual ao quadrado da medida de sua hipotenusa."

Demonstração 1.

Sendo p_1: Um triângulo é retângulo; p_2: A medida de cada um dos seus catetos é a média geométrica da medida de sua projeção sobre a hipotenusa e a medida da hipotenusa e q_3: Um triângulo tem o quadrado da medida do seu lado maior igual à soma dos quadrados das medidas dos seus outros dois lados.

E levando em conta o lema a seguir.

Lema 7.1. $p_1 \longrightarrow p_2$: Se um triângulo é retângulo então, a medida de cada um dos seus catetos é a média geométrica da medida de sua projeção sobre a hipotenusa e a medida da hipotenusa (demonstração ver anexo I: item 109 (a)).

Temos:

(1) p_1 (Premissa: hipótese)

---

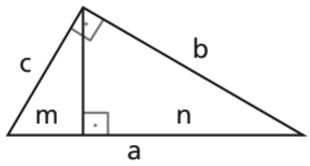
(2) $p_1 \longrightarrow p_2$ (Lema 7.1.)
(3) p_2 (Modus ponens: 1 e 2)
(4) $p_2 \longrightarrow q_3$ (Propriedades da igualdade e reverso da distributiva da multiplicação em relação a adição e substituição)
(5) $p_1 \longrightarrow q_3$ (silogismo: 2 e 4)
(6) q_3 (Modus ponens: 1 e 5 – Conclusão)

Demonstração 2.

De fato, por hipótese, o triângulo é retângulo. Sejam b, c e a as respectivas medidas dos catetos e hipotenusa desse triangulo e n e m as respectivas projeções dos catetos b e c sobre a hipotenusa (figura 7.1), de modo que $n + m = a$. Daí, do *lema 7.1.2.,* temos que

$b^2 = a \,.\, n$, $c^2 = a \,.\, m$ e $n + m = a$. Daí, $b^2 + c^2 = a \,.\, n + a \,.\, m \Rightarrow b^2 + c^2 = a \,.\, (n + m) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$.

Figura 7.1 - Triângulo retângulo e projeções catetos



Fonte: [9], p.218

Aplicação 7.2(Teorema Recíproco de Pitágoras).

"Se um triângulo tem o quadrado da medida de um lado igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo."

Analogamente, cabe o método de prova direta.

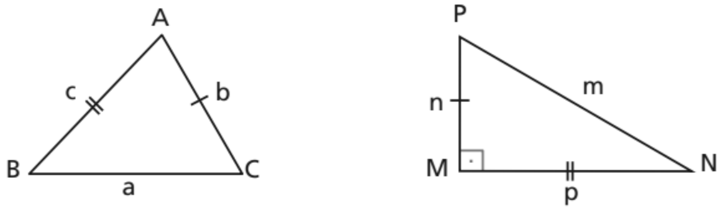
Demonstração.

A demonstração exibida do teorema decorre do teorema de Pitágoras e do lema abaixo, cuja demonstração encontra-se no **anexo I - item 55**.

Lema 7.2. *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes (3º caso de congruência de triângulos — LLL).*

Sem perda de generalidade, sejam *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo ABC, por hipótese, temos $a^2=b^2+c^2$. Consideremos um outro triângulo MNP, retângulo, de catetos de medida *n* e *p* e hipotenusa de medida *m*, tal que n = b e p = c (figura 7.1). Do teorema de Pitágoras temos: $n^2 + p^2 = m^2$. Mas, $n^2+p^2 = b^2+c^2$. Daí, $m^2 = a^2$. Donde m = a. Logo, pelo **lema 2**, os triângulos dados são congruentes. Portanto, o triangulo ABC é retângulo.

Figura 7.1 - Triângulo retângulo e projeções catetos



Fonte: [9], p.219

Aplicação 7.3(Generalização do Teorema de Pitágoras – Lei dos Cossenos).

"Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado."

Demonstração.

A demonstração, método direto, exibida a seguir decorre imediatamente do Teorema de Pitágoras e do uso da definição de cosseno de um ângulo que consta no anexo I - item 112.

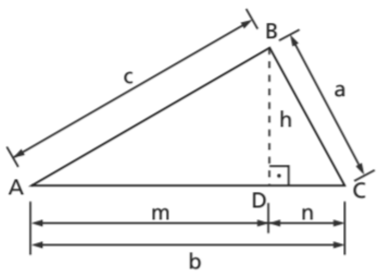
(i)Seja ABC um triângulo com $\hat{A} < 90^{0}$.

Traçando a altura h referente ao lado AC no triangulo ABC obtemos o ponto D e o triangulo BCD e o triangulo BAD, conforme figura, ambos retângulos em D por construção, daí: $a^2 = n^2 + h^2$ (1) e $h^2 = c^2 - m^2$ (2). Sejam m e n as respectivas projeções dos catetos c e a sobre a hipotenusa b do triangulo ABC, temos: $n = b - m$ (3). Daí, substituindo (3) e (2) em (1) ficamos com

$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$

mas, no triângulo BAD: $m = c \cdot \cos \hat{A}$. Logo, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \hat{A}$.

Figura 7.2 – Triangulo retângulo projeções e altura



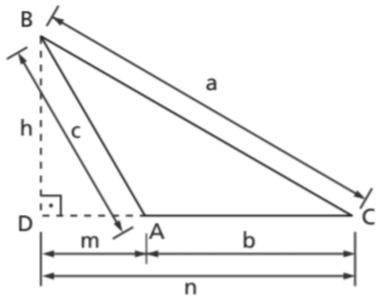
Fonte: [11], p.226

(ii) Seja ABC um triângulo de lados AB = c, AC = b e BC = a, com $90^{0} < \hat{A} < 180^{0}$.

Traçando a altura h referente ao lado AC no triangulo ABC obtemos o ponto D na reta suporte do lado AC, tal que AD = m, DC = n e os triângulos BCD e BAD, conforme figura 7.2, ambos retângulos em D por construção, daí: $a^2 = n^2 + h^2$ (1) e $h^2 = c^2 - m^2$ (2). Note ainda que $n = b + m$ (3). Daí, substituindo (3) e (2) em (1) ficamos com

$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$

Figura 7.3 – Triângulo Obtusângulo



Fonte: [11], p.227

mas, no triângulo BAD: $m = c \cdot \cos(180^0 - \hat{A}) \Rightarrow m = - c \cdot \cos \hat{A}$.

Logo, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \hat{A}$.

Analogamente, podemos provar que:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$ e $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc.\cos C$.

Aplicação 7.4(Fórmula de determinação das raízes da equação quadrática).

Dois números reais são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b, c $\in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ se, e somente se, um deles for $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e o outro for $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, com $b^2 - 4ac \geq 0$.

Demonstração.

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow ax^2 + bx = - c$

$\Leftrightarrow 4a(ax^2 + bx) = 4a(- c)$

$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$\Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$, como $b^2 - 4ac \geq 0$

$\Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Leftrightarrow 2ax = - b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Leftrightarrow x = \frac{- b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

7.2 DEMONSTRAÇÕES COM O MÉTODO DE REDUÇÃO AO ABSURDO

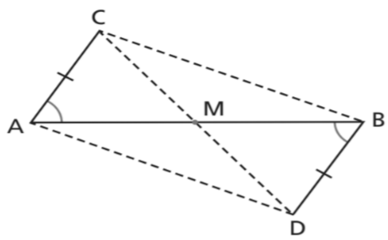
Aplicação 7.5. *O ponto médio de um segmento de reta existe e é único.*

Demonstração.

(i) Existência (Demonstração Direta)

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, usando os postulados de transporte de ângulos **(Anexo I - item 35)** e de segmentos **(Anexo I - item 18)** construímos ∠CAB ≡ ∠DBA e $\overline{AC} \equiv \overline{DB}$ com C e D em semiplanos opostos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ (figura 7.4).

Figura 7.4 – Ponto médio



Fonte: [9], p.42

O segmento $\overline{CD}$ intercepta o segmento $\overline{AB}$ num ponto M. Vejamos uma sequência de congruências de triângulos:

∠CAB ≡ ∠DBA (**LAL**, AB é comum)

∠CAD ≡ ∠DBC (**ALA**, com soma de ângulos ou pelo caso LLL)

∠AMD ≡ ∠BMC (**ALA**)

Desta última congruência decorre que $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$. Daí, da definição de ponto médio (Anexo I - item 21) M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

(ii) Unicidade (Demonstração Indireta – Redução ao absurdo)

Se X e Y distintos fossem pontos médios de $\overline{AB}$, teríamos:

$\overline{AX} \equiv \overline{XB}$ (1) e $\overline{AY} \equiv \overline{YB}$ (2)

Figura 7.5 – Pontos médios

Fonte: [9], p.12

Daí,

(3) X está entre A e Y $\Rightarrow \overline{AY} > \overline{AX}$ e (4) Y está entre X e B $\Rightarrow \overline{XB} > \overline{YB}$ ou

(5) Y está entre A e X $\Rightarrow \overline{AX} > \overline{AY}$ e (6) Y está entre A e X $\Rightarrow \overline{YB} > \overline{XB}$ Logo,

De (1), (3) e (4), temos: $\overline{AY} > \overline{AX} \equiv \overline{XB} > \overline{YB}$, o que é absurdo, de acordo com (2).

De (2), (5) e (6), temos: $\overline{AX} > \overline{AY} \equiv \overline{YB} > \overline{XB}$, o que é absurdo, de acordo com (1).

Portanto, o ponto médio de $\overline{AB}$ é único.

Aplicação 7.6. *O polinômio* $p(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1$*, com coeficientes inteiros, não admite raízes negativas.*

Demonstração.

Suponha por absurdo que o polinômio p(x) dado admite uma raiz negativa, isto é, seja $k < 0$ esta raiz. Assim, temos:

$p(k) = k^5 - k^2 + 2k - 1 \Leftrightarrow k^5 = k^2 - 2k + 1 \Leftrightarrow k^5 = (k - 1)^2$

daí obtemos: $k^5 = (k - 1)^2$, note que $k^5 < 0$, pois por hipótese $k < 0$ e $(k - 1)^2 > 0$. Um absurdo que decorre do fato de termos assumido que o polinômio dado admitia uma raiz negativa.

Portanto, o polinômio $p(x) = x^5 - x^2 + 2x - 1$, não admite raízes negativas.

Aplicação 7.7. *Existem infinitos números primos.*

Demonstração.

Supondo que existe uma quantidade finita de números primos. Digamos apenas n números primos, onde n é inteiro. Podemos colocar os primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ em ordem, de tal forma que: $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Com isto, teríamos que p_n é o maior primo de todos.

Considere o número $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Ele não é divisível por nenhum dos primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, portanto ele também é primo e, além disso, é maior do que todos os demais números primos, incluindo p_n. Mas isto contradiz a afirmação de que p_n é o maior primo de todos, o que é um absurdo! Portanto, existem infinitos números primos.

7.3. DEMONSTRAÇÕES COM O MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

Aplicação 7.8. *P(n): Se A é um conjunto finito com n elementos, então* $\wp(A)$*, conjunto das partes de A, tem* 2^n *elementos, com* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstração.

(i) $P(0) = V$. De fato, pois $\wp(A) = \{\emptyset\}$, que é unitário e, portanto, tem $2^0 = 1$ elemento. E naturalmente $P(1) = V$, seja $A = \{a\}$, teremos $\wp(\{a\}) = \{\{a\},\emptyset\}$, que é binário e portanto tem 2^1 elementos.

(ii) $P(k) = V \Rightarrow P(k + 1)$, isto é, admitamos que a proposição seja verdadeira para um conjunto A com k elementos, ou seja, $\wp(A)$ tem 2^k elementos. Provemos que a proposição é verdadeira para um conjunto B com $k + 1$ elementos, ou seja, $\wp(B)$ tem 2^{k+1} elementos.

De fato, suponhamos que $B = A \cup \{b\}$, ou seja, b é o elemento que está em B e não pertence a A. Então $\wp(B)$ é formado com os subconjuntos de A (que são 2^k) e mais a reunião de $\{b\}$ com cada um desses subconjuntos (que são outros 2^k conjuntos). Logo, $\wp(B)$ possui $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ elementos.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aplicação 7.9.(Termo Geral da PA). P(n): *O n-ésimo termo de uma Progressão Aritmética pode ser determinado pela fórmula:*

$$a_n = a_1 + (n - 1).r,$$

onde $a_1 \in \mathbb{R}$ *é o primeiro termo da progressão com* $n \in \mathbb{N}$ *e* $r \in \mathbb{R}$ *a razão da mesma.*

Demonstração.

(i) $P(1) = V$.

De fato, $a_1 = a_1 + (1 - 1).\,r = a_1 + 0.r = a_1$

(ii) $P(k) = V \Rightarrow P(k + 1) = V$, isto é, $a_k = a_1 + (k - 1).r \Rightarrow a_{k+1} = a_1 + (k + 1 - 1).r = a_1 + rk$.

De fato, da definição de Progressão Aritmética, temos: $a_{k+1} = a_k + r$

Daí, pela hipótese de indução, temos: $a_{k+1} = a_1 + (k - 1).r + r = a_1 + rk$

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.10(Termo Geral da PG). *P(n): O n-ésimo termo de uma Progressão Geométrica pode ser determinado pela fórmula:*

$$a_n = a_1.q^{(n - 1)},$$

onde $a_1 \in \mathbb{R}$ é o primeiro termo da progressão com $n \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{R}$ a razão da mesma.

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato, $a_1 = a_1q^{(1-1)} = a_1 q^0 = a_1$.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k + 1) = V$, isto é, $a_k = a_1 q^{(k - 1)} \Longrightarrow a_{k+1} = a_1 q^{(k + 1 - 1)} = a_1q^k$.

De fato, da definição de Progressão Geométrica, temos: $a_{k+1} = a_kq$

Daí, pela hipótese de indução, temos: $a_{k+1} = a_1 q^{(k - 1)}q = a_1q^k$.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.11(Montante). *P(n): O montante M acumulado ao final da aplicação de um capital C no regime de juros compostos, durante n unidades de tempo à taxa i por unidade de tempo, é dado por:* $M_n = C \cdot (1 + i)^n$.

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato, $M_1 = C \cdot (1 + i)^1 = C \cdot (1 + i) = C + C \cdot i = C + C \cdot i \cdot 1$.

(ii) $P(k) = V \Longrightarrow P(k + 1) = V$, isto é, $M_k = C \cdot (1 + i)^k \Longrightarrow M_{k+1} = C \cdot (1 + i)^{k+1}$

com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$.

De fato, $M_{k+1} = M_k + M_ki = C \cdot (1 + i)^k + C \cdot (1 + i)^k \cdot i = C \cdot (1 + i)^k \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^{k+1}$.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.12 (Fórmula do nº de Permutações). *Q(n): O número de permutações de m elementos pode ser determinado segundo a fórmula* $P_m = m!$*, com* $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

(i) Q(1) = V.

De fato, $P_1 = 1! = 1$.

(ii) $Q(k) = V \Longrightarrow Q(k+1) = V$, isto é, $P_k = K! \Longrightarrow P_{k+1} = (K+1)!$.

De fato, entre os $k + 1$ elementos dados, $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$, escolhamos os k primeiros e formemos com eles todas as permutações possíveis. Por hipótese haverá k! permutações desse tipo. Acrescentemos em cada uma delas o elemento a_{k+1} diante do primeiro, do segundo, ..., do k-ésimo e depois do k-ésimo elemento. Por essa via obtemos, a partir de cada permutação de k elementos, um total de $k + 1$ permutações de $k + 1$ elementos. No total haverá $k!\,(k+1) = (k+1)!$ permutações de $K + 1$ elementos.

É necessário demonstrar agora que:

1) entre as $(k + 1)!$ permutações não há duas iguais; e

2) obtivemos todas as permutações de $k + 1$ elementos.

De fato,

1) Suponhamos que entre as $(k + 1)!$ permutações haja duas iguais. Sejam elas p_1 e p_2. Suponhamos que o elemento a_{k-1} ocupa na permutação p_1 a posição s-ésima a partir da esquerda. Também em p_2 elemento a_{k-1} ocupará a posição s-ésima a partir da esquerda. Eliminemos de p_1 e p_2 o elemento a_{k+1}. Obteremos duas permutações iguais, $\overline{p_1}$ e $\overline{p_2}$, de k elementos. Assim, pois, para obter p_1 e p_2 colocamos o elemento a_{k+1} duas vezes na mesma posição e numa mesma permutação dos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Mas isso contradiz a regra empregada para construir as permutações.

Logo, todas as permutações construídas são distintas.

2) Suponhamos que não obtivemos uma permutação p de $k + 1$ elementos e que o elemento a_{k+1} ocupa em p a posição s-ésima a partir da esquerda. Eliminemos de p elemento a_{k-1}. Obteremos uma permutação $\bar{p}$ formada pelos k elementos iniciais. Quer dizer, para obter p basta tomar a permutação $\bar{p}$ e colocar nela o elemento a_{k-1} na posição

s-ésima a partir da esquerda. E impossível que tenhamos pulado a permutação p, já que tomamos todas as permutações dos k elementos iniciais. É impossível que não tenhamos colocado o elemento a_{k+1} na posição assinalada, pois o colocamos na primeira, na segunda, ..., na (k + 1)-ésima posição a partir da esquerda. Logo, não perdemos nenhuma permutação de k + 1 elementos.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(m) é verdadeira, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.13(Fórmula do nº de arranjos) *P(n): O número de arranjos de m elementos tomados n a n pode ser determinado segundo a fórmula* $A_m^n = m\,(m - 1)(m - 2) \ldots (m - n + 1)$ *, com n, m* $\in \mathbb{N}$.

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato, $A_m^1 = \text{m}$.

(ii) P(k) = V ⟹ P(k + 1) = V, isto é, $A_m^k = \text{m (m - 1)(m – 2) ... (m – k + 1)} \Longrightarrow$ $A_m^{k+1} = \text{m (m - 1)(m – 2) ... (m – (k+1) + 1) = m (m - 1)(m – 2) ... (m – k)}$.

De fato, para obter todos os arranjos de m elementos tomados k + 1 a k + 1, usando a hipótese, basta tomar os arranjos de m elementos tomados k a k e acrescentar ao final de cada um deles um dos m - k elementos restantes. É fácil convencer-se de que os arranjos de m elementos tomados k + 1 a k + 1 obtidos desse modo são distintos e de que, ademais, qualquer arranjo de m elementos tomados k + 1 a k + 1 figura entre esses.

Logo, $A_m^{k+1} = A_m^k\text{(m-k) = m (m - 1)(m – 2) ... (m – (k+1) + 1) = m (m - 1)(m – 2) ... (m – k)}$.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.14(Fórmula do nº de Combinações). *P(n): O número de combinações de m elementos tomados n a n pode ser determinado segundo a fórmula*

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2). \ \ldots \ .(m-n+1)}{1.2.3. \ \ldots \ .n}, \ com \ n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato, $C_m^1 = \frac{(m-1+1)}{1} = \text{m}$.

(ii) P(k) = V ⟹ P(k + 1) = V, isto é,

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2).\ \dots\ .(m-k+1)}{1.2.3.\ \dots\ .k} \Longrightarrow C_m^{k+1} = \frac{m(m-1)(m-2).\ \dots\ .(m-k)}{1.2.3.\ \dots\ .k(k+1)}$$

De fato, para obter todas as combinações de m elementos tomados k + 1 a k + 1, consideremos todas as combinações de m elementos tomados k a k e acrescentemos a cada uma delas, o (k + 1)-ésimo elemento, um dos m - k elementos restantes.

Fica evidente que dessa forma serão obtidas todas as combinações de m elementos tomados k + 1 a k + 1, aparecendo cada uma delas k + 1 vezes.

De fato, a combinação $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ será obtida ao acrescentarmos o elemento a_1 à combinação $\{a_2, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ ao acrescentarmos o elemento a_2 à combinação $\{a_1, a_3, \dots, a_k, a_{k+1}\}$ ao acrescentarmos o elemento a_3 à combinação $\{a_1, a_2, a_4, \dots, a_k, a_{k+1}\}$, etc., e, por último, ao acrescentarmos o elemento a_{k+1} à combinação $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$. Donde, $C_m^{k+1} = C_m^k . \frac{m-k}{k+1}$. Mas, da hipótese, temos $C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2).\ \dots\ .(m-k+1)}{1.2.3.\ \dots\ .k}$. Daí,

$$C_m^{k+1} = \frac{m(m-1)(m-2).\ \dots\ .(m-k+1)}{1.2.3.\ \dots\ .k} . \frac{m-k}{k+1} = \frac{m(m-1)(m-2).\ \dots\ .(m-k)}{1.2.3.\ \dots\ .k(k+1)}.$$

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.15(Binômio de Newton[30]).

Quaisquer que sejam os números a e b e o número natural n, vale a proposição

$$P(n): (a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Demonstração.

(i) P(1) = V.

De fato, $(a+b)^1 = a^1 + C_1^1 a^{1-1} b = (a+b)$

(ii) P(k) = V ⟹ P(k + 1) = V, isto é,

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \cdots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + b^k \Longrightarrow$$

[30] Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 4 de janeiro de 1643 — Londres, 31 de março de 1727) foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático.

$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^{1}a^{k}b + C_{k+1}^{2}a^{k-1}b^{2} + \cdots + C_{k+1}^{k}ab^{k} + b^{k+1}$

De fato,

$(a+b)^{k+1} = (a+b)^{k}(a+b) =$

$= \left(a^{k} + C_{k}^{1}a^{k-1} + C_{k}^{2}a^{k-2}b^{2} + \cdots + C_{k}^{k-1}ab^{k-1} + b^{k}\right)(a+b) =$

$= a^{k+1} + (1 + C_{k}^{1})a^{k}b + (C_{k}^{1} + C_{k}^{2})\, a^{k-1}b^{2} + \cdots + (C_{k}^{s} + C_{k}^{s-1})a^{k-s}b^{s+1} + \cdots + b^{k+1}.$

Levando em consideração que $C_{k}^{s} + C_{k}^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$, obtemos:

$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^{1}a^{k}b + C_{k+1}^{2}a^{k-1}b^{2} + \cdots + C_{k+1}^{s+1}a^{k-s}b^{s+1} + \cdots + C_{k+1}^{k}ab^{k} + b^{k+1}$

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aplicação 7.16. *P(n): A soma S_n das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a (n − 2) · 180º, ∀ n ∈ N, n ≥ 3.*

Demonstração.

(i) P(3) = V.

De fato, se n = 3 temos S_3 = (3 – 2) · 180º = 180º que é a soma dos ângulos internos de um triângulo.

(ii) P(k) = V ⟹ P(k + 1) = V, isto é, S_k = (k − 2) · 180º ⟹ S_{k+1} = ((k + 1) − 2)) · 180º = (k - 1) · 180º, para um certo k ∈ N, k ≥ 3.

De fato, observemos que, ao acrescentarmos num polígono de k vértices outro vértice, isto é, passando de k para k + 1 vértices (figura 7.8), estamos na verdade acrescentando um triângulo, por justaposição, cuja soma dos ângulos internos é 180º.

Logo, temos: S_{k+1} = S_k + 180º = (k − 2) · 180º + 180º = 180º · ((k − 2) + 1) = (k - 1) · 180º.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$ e n ≥ 3.

Aplicação 7.17. *P(n): O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é* $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ *para todo n ≥ 3.*

Demonstração.

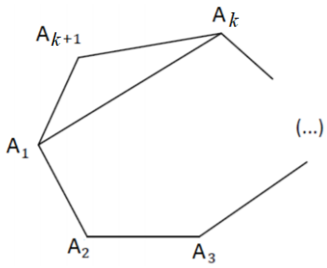
(i) P(3) = V.

De fato, $d_3 = \frac{n(3-3)}{2} = 0$ que é o número de diagonais de um triângulo.

(ii) P(k) = V $\Longrightarrow$ P(k + 1) = V, isto é, $d_k = \frac{k(k-3)}{2} \Longrightarrow d_{k+1} = \frac{(k+1)((k+1)-3)}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$, para um certo k ∈ N, k ≥ 3.

De fato, ao transformar um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_k$ de k lados em outro polígono convexo $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ de k+1 lados, acrescentando um lado ao inicial e tomando a diagonal A_1A_k, este fica dividido em dois polígonos: $A_1A_2A_3...A_k$ e o triângulo $A_1A_kA_{k+1}$ de acordo com a figura abaixo.

Figura 7.8 – polígono convexo de k lados



Fonte: Elaborado pelo autor.

Daí, percebe-se que todas as diagonais de $A_1A_2A_3...A_k$ são diagonais de $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$, um lado de $A_1A_2A_3...A_k$ torna-se diagonal de $A_1A_2A_3...A_kA_{k+1}$ e do vértice A_{k+1} partem (k + 1) - 3 = k - 2 novas diagonais.

Logo, $d_{k+1} = d_k + 1 \ + (k-2) = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2-3k+2k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Portanto, pelo PIM, a proposição P(n) é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$ e n ≥ 3.

Aplicação 7.18(Relação de Euller[31]).

Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação V – A + F = 2, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces de um poliedro.

[31] Leonhard Euler (Basileia, 15 de abril de 1707 — São Petersburgo, 18 de setembro de1783) foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã.

Demonstração.

a) Por indução finita referente ao número de faces, será provado, em caráter preliminar, que, para uma superfície poliédrica limitada convexa *aberta*, vale a relação:

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

em que V_a é o número de vértices, A_a é o número de arestas e F_a é o número de faces da superfície poliédrica limitada aberta.

(i) Para $F_a = 1$.

Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de n lados e, então, $V_a = n$, $A_a = n$. Temos:

$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \Rightarrow V_a - A_a + F_a = 1$.

Logo, a relação está verificada para $F_a = 1$.

(ii) Admitindo que a relação vale para uma superfície de F' faces (que possui V' vértices e A' arestas), prova-se que também vale para uma superfície de F'+1 faces (que possui $F'+1 = F_1$ faces, V_a vértices e A_a arestas).

Por hipótese, para a superfície de F' faces, A' arestas e V' vértices vale:

$V' - A' + F' = 1$.

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) um face de *p* arestas (lados) e considerando que *q* dessas arestas (lados) coincidem com as arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices tais que:

$F_a = F' + 1$

$A_a = A' + p - q$ (q arestas coincidiram)

$Va = V' + p - (q + 1)$ (q arestas coincidindo, q + 1 vértices coincidem)

Formando a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituindo os valores acima, vem:

$V_a - A_a + F_a = V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + F' + 1 =$

$= V' + p - q - 1 - A' - p + q - F' + 1$

$= V' - A' + F'$.

Com $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$ prova-se que essa expressão não se altera se for

Acrescentada (ou retirada) uma face à superfície.

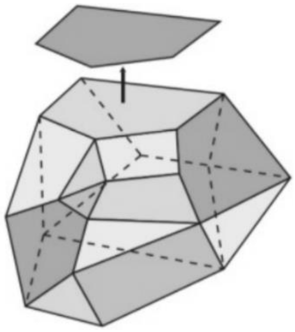
Como, por hipótese, $V' - A' + F' = 1$, vem que

$V_a - A_a + F_a = 1$,

o que prova a relação preliminar.

b) Tomando a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com V vértices, A arestas e F faces), retira-se uma face, ficando, então conforme figura, com uma superfície aberta (com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces) para a qual vale a relação $V_a - A_a + F_a = 1$.

Figura 7.9 - Poliedro Convexo



Fonte: [8], p.123

Como $V_a = V$, $A_a = A$ e $F_a = F - 1$, vem $V - A + (F - 1) = 1$, ou seja:

$V - A + F = 2$.