INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

CLUBES DE MATEMÁTICA E A BNCC: ALINHAMENTOS, CONTRIBUIÇÕES, PRÁTICAS E REFLEXÕES

SANDRO YOSHIO KURIYAMA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas.

IFSP
São Paulo 2021

SANDRO YOSHIO KURIYAMA

CLUBES DE MATEMÁTICA E A BNCC: ALINHAMENTOS, CONTRIBUIÇÕES, PRÁTICAS E REFLEXÕES

Dissertação de mestrado apresentada em 15 de março de 2021 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

____

Orientador e Presidente da Banca:
Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas
IFSP – Campus São Paulo

____

Prof.ª Dr. Francisco Bruno de Lima Holanda
UFG – Goiás

____

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
IFSP – Campus São Paulo

São Paulo, 15 de março de 2021.

AGRADECIMENTOS

A Deus por dar forças para ser resiliente em todos os momentos difíceis.

A minha família que me apoiou de forma incondicional.

Ao professor Emiliano Augusto Chagas, exemplo de professor orientador, que sempre deu as devolutivas rapidamente e com opiniões assertivas, além de ministrar com maestria duas das disciplinas durante o mestrado.

Aos professores Henrique Marins de Carvalho e Lucas Casanova Silva, na qual também foram meus professores e mostraram que a aprendizagem da matemática é, antes de tudo, humana, além de ensinar novas possibilidades nos trabalhos em grupo.

Ao professor Bruno Holanda, pela disponibilidade de fazer parte da Banca e contribuir para uma finalização mais rica desta dissertação, principalmente por estar em sintonia com as olimpíadas de matemática, tema abordado nessa dissertação.

Ao professor e coordenador do Profmat no IFSP, Rogério Ferreira da Fonseca que sempre se mostrou disposto a ajudar nos trâmites burocráticos e no incentivo para que os discentes finalizassem o mestrado.

Agradeço também a todos os outros professores envolvidos no Profmat desta instituição, pela dedicação, organização e respeito para com os colegas da profissão.

Aos colegas do curso que propiciaram um ótimo clima de aprendizagem, amizade e dando forças uns para os outros nos momentos mais difíceis.

RESUMO

Esta dissertação tem o objetivo de destacar os clubes de matemática com as metodologias ativas e alinhadas com a BNCC ensino fundamental, como um dos caminhos de oportunizar uma aprendizagem mais significativa. Essa mudança no processo de ensino foi desencadeada diante os resultados insatisfatórios em avaliações externas, como o Pisa. Para isso recorre-se aos documentos do ministério da educação, como a Base Nacional Comum Curricular ensino fundamental e de autores especialistas em currículo, avaliação escolar, mentalidades matemáticas, clubes de matemática, metodologias ativas e trabalhos em grupo. São analisadas experiências presenciais e virtuais com grupos de alunos do ensino fundamental, inspiradas nos círculos matemáticos e utilizando o livro “Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra” dos autores Bruno Holanda e Emiliano Augusto Chagas. Ao final uma reflexão aberta sobre essas experiências e novas possibilidades para sempre tentar melhorar o aprendizado em matemática de maneira mais equitativa.

Palavras-chave: Clubes de Matemática. Olimpíadas de Matemática. Trabalho em grupo. Desenvolvendo habilidades em matemática. Matemática na BNCC. Currículo Paulista. Metodologias ativas.

ABSTRACT

This dissertation aims to highlight the math clubs with methodologies actived with BNCC elementary education as one of the ways to provide further study beyond the classroom. This change in the teaching process learning mathematics in elementary school is due to the face of unsatisfactory results in the external evaluations such as Pisa. For this purpose, the ministry of education documents are used such as the Common National Base of elementary school Curriculum and the authors specialized in; curriculum, school evaluation, mathematical mentalities, mathematical clubs, active methodologies and group work. Face-to-face and virtual experiences with groups of elementary school students, inspired by mathematical circles are analyzed using these new methodologies and the book “Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra” by authors Bruno Holanda and Emiliano Augusto Chagas. In the end an open reflection on these experiences and new possibilities to always try to improve the learning in mathematics in a more equitable way.

Keywords: Mathematics clubs. Mathematics Olympics. Group work. Developing math skills. Mathematics at BNCC. Curriculum Paulista. Active methodologies.

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

ABP – Aprendizagem Baseada em Problemas

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

ETEC – Escola Técnica Estadual

IFSP – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

IMO – Olimpíada Internacional de Matemática

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática da Escola Públicas

OCDE – Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico

OPM – Olimpíada Paulista de Matemática

PBL - Problem Based Learnin

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PISA – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

PPP – Projeto Político Pedagógico

RPM – Revista do Professor de Matemática

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica

UNESP – Universidade Estadual Paulista

UNICAMP – Universidade de Campinas

USP – Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No estado de São Paulo grandes universidades como a Universidade de Campinas, a Universidade de São Paulo e a Universidade do Estado de São Paulo têm reservado vagas para o ingresso em diversos cursos de graduação, através das premiações obtidas em competições científicas e culturais diversas. Em particular, como exemplos, temos a Olimpíada Brasileira de Matemática, a Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas e Privadas e a Olimpíada Internacional de Matemática.

Diante dessa nova possibilidade, visando essas vagas olímpicas, muitos colégios começam a se articular num planejamento específico. Materiais como provas anteriores, livros e revistas especializadas, professores engajados em olimpíadas e ambientes mais adequados e equipados, começam a fazer parte de todo esse processo.

No Brasil, temos alguns livros publicados pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada que são traduções dos “Math Circles” ou Círculos Matemáticos que mostram uma coletânea de exercícios de matemática, aplicadas por décadas na Rússia e Estados Unidos. O foco dessa coletânea é a resolução de problemas com breves comentários ou introduções teóricas a respeito de cada tema. Ainda neste cenário, destacam-se os Clubes de Matemática da OBMEP[1], que possuem vários Clubes Olímpicos de Matemática.

O livro “Círculos de Matemática da OBMEP”, volume 1, de Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas, inspirado nos “CÍRCULOS MATEMÁTICOS, A EXPERIÊNCIA RUSSA”, de Dimitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg, será utilizado neste trabalho, juntamente com as habilidades da Base Nacional Comum Curricular ensino fundamental, com a intenção de inspirar professores do 6ºano e 7ºano a trabalhar com questões olímpicas em suas aulas regulares ou nos clubes de matemática.

No capítulo 1 temos uma reflexão sobre a necessidade de mudanças nas práticas de ensino da matemática, uma vez que as avaliações externas mostram o nosso baixo nível de proficiência, isso direciona a um estudo da BNCC do ensino fundamental e a sua importância na construção do currículo e do letramento matemático.

1 http://clubes.obmep.org.br/blog/

Em seguida, no capítulo 2, serão discutidas as metodologias ativas, as mentalidades matemáticas, os trabalhos em grupos e as habilidades na resolução de problemas. O estudante é visto como protagonista de sua própria aprendizagem.

Ainda pouco difundido no Brasil, porém muito aplicado em outros países, os clubes de matemática mostram que sempre foram espaços de aprendizagem muito enriquecedores, tema discutido no capítulo 3, juntamente com os relatos de experiências presenciais e virtuais, praticadas com as metodologias ativas e dos clubes de matemática, alinhadas com a BNCC anos finais.

1. REFLEXÕES SOBRE AS PRÁTICAS E AVALIAÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Na primeira edição da revista Eureka, em 1998, encontramos como um dos objetivos dessas futuras publicações a contribuição com exercícios desafiadores que propiciassem a imaginação e a criatividade do estudante, pois segundo a revista, o ensino da matemática no Brasil estava praticamente igual nos últimos 20 anos, seguindo uma linha de ensino burocrático, mesmo com bons livros de matemática no mercado.

Lembrando que em 1998 entraram em vigor no território nacional os Parâmetros Curriculares Nacionais, que são documentos norteadores para que as escolas utilizassem em seus Projetos Políticos Pedagógicos. Consta no PCN de matemática, terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, em um dos eixos organizadores do processo de ensino e aprendizagem que a situação-problema deveria ser o ponto de partida de uma atividade matemática e não pela sua definição, ou seja, os conceitos, ideias e métodos matemáticos deveriam ser abordados mediante a exploração de problemas, de situações em que os alunos precisassem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.

Não podemos esquecer que a primeira edição do ENEM também ocorreu neste ano de 1998 e que os termos Competências e Habilidades, desde então, ganharam grande destaque nos documentos e publicações sobre educação.

Portanto, fica claro que existia a necessidade de extrapolar o ensino da matemática mediante, por exemplo, situações problema investigativas que servissem como elemento motivador para estudar e entrelaçar novos conceitos com outros já assimilados. Isso lembra, nos dias de hoje, as Aprendizagens Baseadas em Problemas, também conhecidas como PBL (Problem Based Learning).

Veja as competências 2 e 6, respetivamente, das oito específicas na área da matemática, de acordo com a BNCC para o ensino fundamental:

- Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

- Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

Percebemos, portanto, que a necessidade de trabalhar a matemática em sala de aula, de maneira mais ampla, investigativa, desafiadora, tecnológica, com múltiplas linguagens e relacionando-a com situações reais, é uma maneira que precisamos atuar.

Segundo Sacristán (2017, p. 40):

> O movimento de volta ao básico (back to basics), nos países desenvolvidos, às aprendizagens fundamentais relacionadas com a leitura, a escrita e a matemática, frente à consciência do fracasso escolar e à preocupação economicista pelos gastos em educação, expressa as inquietudes de uma sociedade e dos poderes públicos pelos rendimentos educativos, preocupação própria de momentos de recessão econômica, crise de valores e corte nos gastos sociais, que, de alguma forma direcionam as estratégias para as fórmulas que orientaram a organização do currículo (...)

Temos uma falsa impressão de uma dicotomia entre voltar ao básico e, simultaneamente, trabalhar de forma múltipla, ou seja, freando e acelerando ao mesmo tempo. Mas não é isso. O importante aqui é a mudança de foco.

Dessa forma, se faz necessário estabelecer, com critérios, uma nova relação entre conteúdos, significados e currículo escolar e, consequentemente, no processo de abordagem desses objetos de conhecimento, ou seja, conteúdos, conceitos e processos de acordo com a BNCC, a fim de que o estudante possa ser o sujeito e não apenas o objeto a ser avaliado. Essa nova perspectiva de aprendizagem abre possibilidades para organizar o currículo bem como os conteúdos necessários para o desenvolvimento do indivíduo na sua integridade. Numa aprendizagem significativa, segundo Vasconcellos (2005)**,** a organização do currículo e as atividades propostas devem ser pautadas num constante processo de transformação de tal forma que o conhecimento seja visto como uma rede de significados.

A forma como as aulas de matemática no ensino fundamental, principalmente, a partir do 6º ano, talvez devido a necessidade de otimizar o tempo diante do grande volume de conteúdos, ainda é da forma tradicional, ou seja, é seguida a tríade: conceito – exemplos – exercícios. O professor apresenta o conceito, demonstra as propriedades ou teoremas, resolve alguns exemplos e depois pede para que os alunos repitam os procedimentos com exercícios. Devemos abolir essa prática? É claro que não, pois existem alguns conceitos que a partir dessa prática, podemos retomar, aprofundar e conectá-las com a vida real, trabalhando em equipes, projetos etc. Mas, muitas vezes, essa retomada não acontece.

Toda inovação parte de uma ideia, que partir desse insight, podemos procurar na literatura alguma experiência já relatada para adaptar à nossa realidade e, caso não encontremos nada, conversamos com os pares para tentar montar uma aula inédita bem planejada. Isso faz parte da educação, criando, melhorando e recriando. Mas, não podemos esquecer que o protagonista é o estudante, ou seja, não podemos ter receio de estar aprendendo junto com eles. Um exemplo, é trazer os conhecimentos tecnológicos que os estudantes já possuem para uma grande discussão e ajuda na montagem de uma aula gamificada.

Vale ressaltar que essa concepção pressupõe alguns rompimentos com o modelo tradicional de ensino, dos conceitos de aprendizagens pautadas em pré-requisitos e na própria prática da avaliação. A postura avaliativa também deve estar em sintonia e na busca de um ambiente escolar favorável à aprendizagem de tal forma que os alunos ampliem seu repertório de significados e suas relações.

Numa avaliação formativa utiliza-se várias práticas com diferentes métodos de se avaliar o aluno de maneira individual, oferecendo ao professor um feedback sobre suas aulas e tornando o aluno coautor no desenvolvimento de sua aprendizagem, pois o mesmo contribui numa reflexão e protagonismo durante o processo, o erro é visto como parte do percurso e a sua correção é realizada durante o mesmo. É uma avaliação diagnóstica, inclusiva, de mão dupla, dinâmica e não pontual, contrapondo a uma avaliação unilateral voltada a reprodução de um conteúdo.

Temos também a avaliação somativa que é utilizada ao fim de um ciclo, bastante pontual, por isso elas representam, geralmente, as avaliações externas tentando avaliar o aluno como um todo e ajudam no comparativo da escola ano a ano. Essas avaliações também são diagnósticas, inclusive comparando com outras escolas.

Portanto, os dois tipos de avaliação têm objetivos diferentes e são importantes para analisar o desempenho dos alunos.

Ensinar e aprender de forma significativa pressupõe caminhos diversos, percepção das diferenças e aceitação das potencialidades individuais. A aprendizagem significativa não pressupõe a ideia da organização do conhecimento de forma sequencial e linear, mas sim um caráter dinâmico de tal forma que o conhecimento seja visto como uma rede de significados em processo constante de transformação. Sendo assim, a avaliação também precisa ser flexível, compreender a relação dos aspectos cognitivos, as diferenças pessoais e relações afetivas no processo de aprendizagem. É preciso compreender que a aprendizagem não ocorre da mesma forma e no mesmo momento para todos.

Como fonte de informação para o professor, as tarefas de avaliação devem fornecer informação sobre as capacidades, preferências e dificuldades de cada aluno. Esta informação é essencial para que se perceba o que está acontecendo, sendo, ainda, uma base para que o professor possa conceber e planejar as futuras atividades de aprendizagem. O erro não é um processo de contagem, mas sim uma fonte de informação essencial.

É dessa forma que o professor pode perceber se seus estudantes estão ou não se aproximando das expectativas de aprendizagens consideradas importantes, localizando dificuldades e auxiliando para que elas sejam superadas, por meio de intervenções adequadas, questionamentos, complementação de informações, enfim, buscando novos caminhos que levem à aprendizagem.

A multiplicidade de estratégias e instrumentos de avaliação podem oferecer indicadores importantes para a gestão pedagógica em sala de aula, como também para a gestão escolar e a elaboração de políticas públicas, permitindo o monitoramento e o acompanhamento das aprendizagens essenciais que estão sendo asseguradas a todos estudantes.

Para se avaliar a aprendizagem faz-se necessário considerar não apenas seus avanços quanto às produções realizadas pelos alunos; mas também, fatores como o contexto de aprendizagem existente entre eles e a sala de aula, as estratégias de aprendizagem e se os recursos utilizados contribuem para a promoção de avanços significativos na aprendizagem. Nesse contexto, a avaliação deverá possibilitar ao aluno o acompanhamento do seu próprio processo de construção do conhecimento estabelecendo relações entre o que já sabe e o novo a aprender.

Toda avaliação interna precisa estar associada as práticas utilizadas durante as aulas e deve servir como instrumentos de readequação das metodologias, do ritmo e do planejamento, por isso utilizar uma única avaliação apenas no final de um ciclo pode ser inadequada. E, tudo isso faz parte de uma relação de transparência entre professor e aluno, com intencionalidades e objetivos claros de onde se pretende chegar. A mediação e o diálogo, aumentam os saberes entre as partes e transformam o ambiente pedagógico num espaço de descobertas e aprendizados constantes.

E, como podemos medir se essas mudanças, ensino aprendizagem e avaliação, estão acontecendo de maneira significativa? Esse é um ponto muito sensível e bastante discutido entre os educadores, pois as avaliações internas podem ser muito subjetivas.

> Na prática escolar, nosso objetivo é que nossos educandos aprendam e, por aprender, se desenvolvam. A avaliação da aprendizagem está a serviço desse projeto de ação e configura-se como um ato de investigar a qualidade da aprendizagem dos educandos, a fim de diagnosticar impasses e consequentemente, se necessário, propor soluções que viabilizem os resultados satisfatórios desejados. Significa investigar e, com base nos conhecimentos produzidos, tomar decisões de intervenção quando necessário. (LUCKESI, 2019, p.175)

Então, novamente, vale uma grande reflexão, pois as práticas educativas caminham com as avaliações. Mas, a pergunta ainda não foi respondida, se todas as avaliações internas no final de cada processo se transformam, muitas vezes, em uma única nota numérica no histórico do aluno, como avaliamos esses resultados? Como diagnosticamos a educação básica brasileira como um todo? Para isso temos as avaliações externas, também conhecidas como avaliações em larga escala.

No Brasil, o Instituto Nacional de Estudos Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira coordena o Sistema de Avaliação da Educação Básica e o Enem que são avaliações em larga escala. O Saeb surgiu no início de 1990 e depois, em 2005, se desdobrou na Avaliação Nacional do Rendimento Escolar e na Avaliação Nacional da Educação Básica com a Prova Brasil, e em 2013 com a Avaliação Nacional da Alfabetização, avaliando o nível de ensino nas escolas brasileiras, sejam elas municipais, estaduais, federais ou particulares.

A análise dos resultados dessas avaliações é muito extensa e desprenderia numa outra dissertação, que não é o foco dessa. Por isso, de maneira resumida levantarei alguns resultados mais recentes de uma avaliação externa internacional bastante importante que é o PISA 2018, pois possui relação com a BNCC e este, por sua vez, com o novo SAEB 2021, como veremos mais adiante.

A sigla PISA vem de Programme for International Student Assessment, ou Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, organizado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).

O PISA oferece informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países, vinculando outros dados importantes para uma análise mais profunda. Os seus resultados permitem que cada país avalie os conhecimentos e as habilidades dos estudantes em comparação com os de outros países, aprenda com as políticas e práticas aplicadas em outros lugares e formule suas políticas e programas educacionais, sempre visando a melhoria da qualidade e da equidade dos resultados de aprendizagem.

No Brasil, o Inep é o órgão responsável pelo planejamento e a operacionalização desta avaliação, o que envolve coordenar a tradução dos instrumentos, aplicar nas escolas amostradas, coletar e codificar as respostas, analisar e elaborar o relatório nacional. O PISA é reconhecido como instrumento externo de referência internacional (Brasil, Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014), e avalia três domínios – leitura, matemática e ciências. A cada edição, é avaliado um domínio principal, o que significa que os estudantes respondem a um maior número de itens no teste dessa área do conhecimento e que os questionários se concentram na coleta de informações relacionadas à aprendizagem nesse domínio. A pesquisa também avalia domínios chamados inovadores, como Resolução de Problemas, Letramento Financeiro e Competência Global.

O Brasil participa do Pisa desde a sua primeira edição em 2000, e o número de países e economias participantes tem aumentado a cada ciclo. Em 2018, 79 países participaram, sendo 37 deles membros da OCDE e 42 países/economias parceiros. Devido a pandemia de COVID-19, a avaliação do Pisa 2021 foi adiada para 2022, cujo domínio principal será a matemática e a sua nova Matriz de Referência foi lançada em 14 de outubro de 2019, na Universidade de Oxford. Uma das novidades será o foco nos conceitos do pensamento computacional.

Como a prova do PISA é aplicada em diversos países, cada qual com o seu currículo, vale lembrar, portanto, que essa avaliação não é orientada por conteúdos. De acordo com o PISA, o letramento matemático é a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma série de contextos, o que inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Isso ajuda os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática desempenha no mundo e faz com que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias. (Relatório Brasil no Pisa 2018, p98)

Sendo organizada e analisada sob três aspectos:

- Processos Matemáticos que descrevem o que os indivíduos fazem para conectar o contexto de um problema com a Matemática, resolvendo e interpretando os seus resultados bem como as capacidades subjacentes a esses processos;

- Conteúdos Matemáticos divididos em quatro categorias: Variações e relações, Espaço e forma, Quantidade e Incerteza e Dados.

- Contextos e distribuição dos itens, também divididos em quatro categorias: Pessoal, Ocupacional, Social e Científico.

Em matemática, o PISA possui uma escala de proficiência dividida em seis níveis sendo que a maioria dos estudantes brasileiros que participaram do PISA 2018 se encontra nos níveis mais baixos da escala: Nível 1 ou abaixo dele (68,1%). Nesses níveis espera-se que o estudante seja capaz e responder a questões que envolvam contextos familiares, nas quais todas as informações relevantes estejam presentes e estejam claramente definidas.

Apenas para ilustrar, no Nível 2 espera-se que o estudante seja capaz de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exijam mais do que inferências diretas. Que consigam extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um único modo de representação, assim como empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos para resolver problemas que envolvam números inteiros.

O desempenho em matemática foi de 384 pontos, abaixo da média da OCDE que foi de 489. Considerando o intervalo de confiança da média, o Brasil ficou entre 69º e 72º lugar entre 79 países participantes.

Analisando todos os resultados desde o início do PISA, percebemos que o desempenho em matemática no Brasil está praticamente estagnado. É claro que poderíamos estabelecer outras análises, como o desempenho por tipo de escola (municipal, estadual, federal, particular), nível socioeconômico, por região geográfica, por gênero ou até relacionando-o com o letramento em leitura, mas estaríamos nos afastando do nosso objetivo.

Refletindo a respeito desses resultados, precisamos colocar a Educação como prioridade nas políticas públicas brasileiras, assumindo um compromisso, enquanto docente, de mudança em nossas práticas de ensino.

Ler documentos como a BNCC, relatórios do Saeb e Pisa, assim como novas publicações que ajudem a entender o processo ensino aprendizagem, e estar atualizado com as novas tecnologias são essenciais a qualquer professor.

Vale ressaltar que novas práticas no processo de ensino aprendizagem e avaliação estão acontecendo por muitos educadores e gestores, muitas vezes, enfrentando dificuldades de aceitação dos próprios colaboradores e famílias "tradicionais", porém é preciso resiliência pois os exemplos de países que estão no topo do ranking do PISA, por exemplo, mostram essa práxis transformadora.

De acordo com o Inep, nas próximas avaliações do Saeb 2021 a formulação de seus itens estará de acordo com a BNCC e, particularmente, o conhecimento de matemática no Saeb deve ser demonstrado por meio da resolução de problemas e serão consideradas capacidades como observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos. A prova estimulará formas de raciocínio como intuição, indução, dedução e estimativa. Dessa forma fica implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras com as quais lidar e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. Os conhecimentos e competências matemáticas esperadas para cada etapa estão indicadas nos descritores da Matriz de Referência de Matemática, dividida em 5º e 9º ano do ensino fundamental, e 3ª e 4ª série do ensino médio.

Para isso, pauta-se na análise da BNCC para o Ensino Fundamental, da forma como as unidades temáticas estão estruturadas e como podemos atrelar as competências e seus objetos de conhecimento a práticas pedagógicas que promovam a formação de estudantes olímpicos frente aos desafios de um currículo que preza as dimensões intelectual, física e socioemocional.

Essa reflexão desencadeou a proposta desse trabalho, que não se esgota em suas discussões, apenas nos convida a repensar nossas práticas bem como transpor barreiras em prol da formação Matemática acessível e disponível a todos os alunos e professores engajados na construção de saberes. Faz-se necessário desmistificar de que a participação em competições olímpicas de matemática é um evento exclusivo para alunos exemplares, com alta proficiência e também de que Matemática é somente para os meninos; a mesma pode ser acessível a todo estudante investigativo, que tenha interesse aguçado para situações problema desafiadoras. Os estudantes de matemática não nascem participantes olímpicos, se tornam competidores e participantes à medida que se veem envolvidos pelo fascínio de uma aprendizagem de saberes construídos e significativos bem como por professores entusiasmados que acreditam nas potencialidades de seus alunos.

Em consonância com essa linha de pensamento, os clubes de matemática ajudam na interpretação dos problemas, pois os mesmos são debatidos após as tentativas individuais, erradas ou não, agregando, muitas vezes, novos vocábulos e simbologias específicas da área.

O grande diferencial dos clubes on-line, para um estudante, é a possibilidade do registro assíncrono de suas participações. Desta maneira a oportunidade de vários integrantes colocarem o seu ponto de vista não fica delimitado ao tempo de uma aula, como acontece no presencial. Como um dos objetivos é a resolução de problemas, o professor ou algum integrante do grupo, pode publicar materiais com temas que ajudem a chegar na resposta, desenvolvendo assim, uma autonomia e resiliência aos estudantes. Muitas vezes, os integrantes irão notar os horários não convencionais, das postagens, pois o envolvimento nos processos investigativos, nesses clubes, representa prazer e não obrigação.

É possível criar na escola algo semelhante a um clube descrito acima, com aulas presenciais e atividades virtuais.

1.1 CURRÍCULO E LINGUAGEM MATEMÁTICA

Segundo Sacristán (2017) o currículo é uma práxis antes que um objeto estático proveniente de um modelo coerente de analisar a educação ou as aprendizagens essenciais das crianças e dos jovens, que sequer se esgota na parte explícita do projeto de socialização cultural nas escolas. É uma conduta, manifestação, função socializadora e cultural, que reagrupa em torno dele uma série de subsistemas ou saberes diversos, entre as quais se encontra a prática pedagógica desenvolvida em instituições escolares que normalmente chamamos de ensino, é uma prática que se expressa em ações práticas diversas, que dialoga com elementos técnicos, agentes sociais, alunos e professores.

O currículo não é uma sequência linear, mas um conjunto de aprendizagens concomitantes e interconectadas, é uma rede. Está estreitamente ligado ao dia a dia da prática pedagógica, em que se cruzam decisões de vários âmbitos. Os conteúdos curriculares são meios para a conquista da autonomia plena e para a ressignificação do indivíduo por ele mesmo e na sua relação com os demais.

Segundo Moraes, Nascimento e Bonfim, em Currículo Escolar (2010, p. 9):

> Defendemos o entendimento de currículo como construção social, um instrumento hegemônico que tanto na forma como no significado só pode ser compreendido na totalidade das relações sociais, políticas, econômicas e culturais que o constituem. Possibilita intervenção nas práticas educativas desenvolvidas na escola, assim sendo faz parte de um contexto histórico, portanto determinado; logo, não é neutro, nem imparcial, ao contrário, é carregado de intencionalidades declaradas ou não.

Esse entendimento traduz a dimensão política que permeia o currículo, na medida que em seu processo de elaboração e desenvolvimento expressa a concepção de homem, educação e sociedade que se acredita e almeja com a formação dos sujeitos. Exige que se evidenciem as intenções com a escola, os sujeitos, o conhecimento, os processos e as relações que se estabelecem no espaço escolar. É um campo que representa poder e, portanto, é sempre permeado por disputas, conflitos e interesses.

É também um instrumento no qual se define e sistematiza os conhecimentos produzidos socialmente pelos homens no seu processo de relação com o mundo e com os outros homens, a serem ensinados na escola, bem como os processos de ensino e aprendizagem, traduzindo assim a sua dimensão pedagógica.

Para que um currículo seja executável temos que considerar a figura do professor em sala de aula. Professores são protagonistas do currículo: ele é o sujeito principal para a elaboração e implementação de um currículo, uma vez que tem a função de contextualizar e dar sentido aos aprendizados, tanto por meio dos seus conhecimentos e práticas, quanto pela relação que estabelece com seus estudantes. Para tanto, os educadores precisam reconhecer o seu papel de protagonistas nesse processo, sentindo-se motivados e tendo condições de exercê-lo.

> O professor transforma o conteúdo do currículo de acordo com suas próprias concepções epistemológicas e também o elabora em conhecimento “pedagogicamente elaborado” de algum tipo e nível de formalização enquanto a formação estritamente pedagógica lhe faça organizar e acondicionar os conteúdos da matéria, adequando-os para os alunos. (SACRISTÁN, 2000, p. 15).

Assim, o Currículo indica claramente o que os estudantes devem “saber” (em termos de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer”, considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Espera-se que essas indicações possam orientar as escolas para o fortalecimento de ações que assegurem aos estudantes a transposição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores em intervenções concretas e solidárias (aprender a fazer e a conviver), no processo da construção de sua identidade, aprimorando as capacidades de situar-se e perceber-se na diversidade, de pensar e agir no mundo de modo empático, respeitoso à diversidade, criativo e crítico (aprender a ser), bem como no desenvolvimento de sua autonomia para gerenciar a própria aprendizagem e continuar aprendendo (aprender a aprender).

No Currículo Paulista, os conhecimentos matemáticos privilegiam os conceitos expressos por meio de suas proposições quanto as aplicações práticas dos conhecimentos matemáticos no cotidiano, apresenta habilidades que permitem a articulação com as demais áreas do conhecimento, com vistas ao desenvolvimento de competências gerais específicas. Dessa maneira, garante-se a progressão da aprendizagem entre as unidades temáticas desenvolvidas no mesmo ano e entre as etapas do Ensino Fundamental bem como a continuidade das experiências dos estudantes, considerando suas especificidades.

Se essas intencionalidades estão previstas no currículo, faz-se necessário discutirmos sobre ele, sua estruturação e articulação com esses saberes.

Tais competências específicas articulam-se às dez competências gerais da BNCC para assegurar aos estudantes, ao longo da Educação Básica, as aprendizagens essenciais definidas neste currículo.

Ao longo da história a Matemática vem se desenvolvendo cada vez mais em todos os continentes, criada pela humanidade ela está associada numa teia de conhecimentos como números, formas e diversos tipos de raciocínio. Ajudando a resolver inúmeros tipos de problemas e, muitas vezes, com resoluções diferentes. As ideias contidas no pensamento matemático permitem analisar fenômenos de nossa realidade, procurando obter modelos que expliquem as suas regularidades.

Segundo o Currículo da Cidade de São Paulo (2019, p. 66):

> A Matemática envolve três dimensões que se articulam e se complementam: a social, a cultural e a formal. A dimensão social engloba a reflexão sobre a criação e o uso da Matemática em diferentes contextos sociais, apontando

> para uma dimensão histórica e social do conhecimento matemático. A dimensão cultural considera a Matemática como fruto de diferentes culturas e etnias que permitem uma reflexão sobre a construção do conhecimento matemático. A dimensão formal envolve as ideias matemáticas fundamentais com a utilização de uma simbologia própria e universal, desenvolvidas ao longo da Educação Básica, articulando-se com diferentes objetos de conhecimento e eixos estruturantes.

É de suma importância que nas reuniões pedagógicas de planejamento escolar, os professores tenham momentos de se reunir por séries e por áreas, desenvolvendo de forma conjunta e colaborativa todos os projetos que pretendem desenvolver levando em conta as três dimensões citadas anteriormente, e também as discussões sobre as metodologias a serem utilizadas para cada objeto de conhecimento.

Outro ponto importante é a discussão entre os professores de matemática, nas reuniões por área, é a maneira de como introduzir determinados objetos do conhecimento de acordo com o ano escolar do aluno, ou seja, um mesmo conteúdo pode ser trabalhado sob aspectos diferentes num movimento espiral de retomada e aprofundamento. A linguagem matemática utilizada precisa ser adequada para cada ano escolar.

> O verdadeiro significado da Matemática e das funções que deve desempenhar nos currículos escolares deve ser buscado na mesma fonte onde se encontram respostas às questões homólogas relativas ao ensino da Língua Materna (…) é preparar o terreno para que a aprendizagem da Matemática venha a revestir-se de características tão naturais quanto a da Língua Materna. (MACHADO, 2011, p.93)

Muitas vezes, diante de um problema de matemática, a dificuldade do aluno está na redação de uma resolução sistematizada. Por isso, é importante o letramento matemático em sua completude e, principalmente, na sensibilidade do professor perceber os diferentes níveis entre seus alunos, ajudando-os, ao invés de classificá-los cognitivamente.

Esse letramento ajuda os alunos a reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimulando a investigação e pode ser prazeroso. A Matemática precisa ser entendida por todos como um meio para o desenvolvimento de competências. “Com efeito, na atualidade, as linguagens matemáticas estão presentes em quase todas as áreas do conhecimento. Por isso, o fato de dominá-las passa a constituir-se um saber necessário considerando o contexto do dia-a-dia”. (KLUSENER, 2000, p.177)

A capacidade de expressão pessoal, de compreensão de fenômenos, de se posicionar diante de uma situação-problema e apresentar uma argumentação/ justificativa coerente e condizente com o seu desenvolvimento cognitivo é o grande caminho da transformação da informação em conhecimento. Se pensarmos que o acesso às informações é livre e ilimitado, porém de forma desordenada e fragmentada, a escola precisa articular essas informações de modo a produzir visões organizadas da realidade que possam conduzir à compreensão dos significados dos temas estudados. Nesse caso a escola e a Matemática podem fazer a diferença transformando informação em construção de conhecimento significativo, inserido num contexto pertinente às necessidades e anseios da comunidade escolar.

Ao desenvolver um determinado conteúdo, os objetivos precisam ser claros para quem planeja (o professor) assim como a finalidade das tarefas propostas para quem as faz (nesse caso o aluno) também precisam ser coerentes e condizentes com a série escolar em questão. Por isso a importância de um planejamento flexível e da reelaboração de estratégias e meios diferenciados para alcançá-lo. Ao elaborar uma sequência didática esses objetivos a serem atingidos direcionam a ação do professor e as expectativas de aprendizagem contempladas na atividade planejada acontecem como consequência da intervenção do professor. Não se prepara uma atividade pensando nas expectativas a serem atingidas por ela, mas sim no objetivo proposto por meio dela. Isso faz parte da vivência do professor e é isso que o diferencia como profissional consciente de sua ação e intervenção em sala de aula.

A ideia de que a aprendizagem da matemática se restringe a poucos e o sucesso em aprendê-la se destina aos mais capacitados e habilidosos por muitas vezes pode ser reforçado pela prática do próprio professor que privilegia a operacionalização de procedimentos matemáticos a um conjunto de regras fragmentadas em detrimento a construção de um conhecimento contextualizado e gradativo, reforçando a introspecção do fracasso escolar matemático como sinônimo de incapacidade ou de falta de inteligência. Segundo Boaler (2018), essa concepção errada leva as pessoas a pensarem que quem sabe fazer cálculos são as mais espertas ou inteligentes. Ao admitir a frase “A capacidade para a Matemática é inata”, segundo Machado (2011, p. 60), esvazia-se a expectativa de que esse conhecimento possa ser partilhado por todos.

Aprender uma linguagem e se apropriar dela não é aprender uma série de regras, mas sim adquirir um grau de competência comunicativa que permita usar essa linguagem adequadamente e aplicá-la em diferentes contextos. Segundo a BNCC, enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, utilizando diferentes registros e linguagens é uma das competências específicas da Matemática.

A concepção do ensino da matemática de forma fragmentado e restrito a um conjunto de regras e procedimentos precisa ser repensada por muitos professores por meio de leituras, cursos de formação continuada, vivências compartilhadas de sala de aula a fim de que possamos caminhar em direção a uma aprendizagem mais efetiva estabelecendo vínculos mais afetivos entre a linguagem matemática e a vida.

O desenvolvimento da competência leitora e escritora também é tarefa do professor de matemática. O domínio da linguagem matemática pressupõe o desenvolvimento das capacidades de interpretar, analisar, sintetizar, extrapolar, argumentar e o veículo de comunicação e desenvolvimento desse repertório se dá por meio da língua materna.

Segundo Machado (2011) em toda proposta curricular envolvendo a Matemática na escola básica, sempre teremos o desenvolvimento do raciocínio lógico como uma de suas metas, como se se fosse uma associação automática tentando justificar a matemática no currículo. Quando na verdade, o desenvolvimento do raciocínio está articulado com a Língua Materna, a Matemática e outras áreas do conhecimento.

A escrita nas aulas de Matemática pode ser estimulada a partir da produção da escrita de textos argumentando ou justificando o raciocínio de uma dada situação problema. Interpretar dados em tabelas ou gráficos também são formas de leituras diferenciadas, porém bastante enriquecedoras para o desenvolvimento da linguagem nas aulas de matemática. Referindo-se a dificuldade de exercer um trabalho coletivo envolvendo outras áreas de conhecimento, Kleiman (1999, p. 24) se manifesta:

> O profissional que hoje atua foi formado dentro de uma concepção fragmentada, positivista do conhecimento. Ele não consegue pensar interdisciplinarmente porque toda a sua aprendizagem realizou-se dentro de um currículo compartimentado. Sente dificuldade em desenvolver projetos temáticos - que pressupõem intenso trabalho coletivo e implicam a perda da predominância de tarefas e avaliações individualizadas - porque nosso

> currículo tradicional nunca o ensinou a trabalhar coletivamente. Não consegue desenvolver a leitura crítica no aluno porque formou-se dentro da visão segundo a qual a leitura e a escrita são atribuições de disciplinas e não atividades fundamentais para o desenvolvimento do indivíduo em sociedades tecnológicas.

Os professores não podem atuar de forma isolada, mas sim buscando formas coletivas de atuação, pensando no currículo como uma proposta integrada da escola, pautada no diálogo e nas práticas construídas no cotidiano escolar. É preciso ampliar nosso conceito de aprender, desconstruindo a ideia de uma aprendizagem homogênea e linear.

A participação e o diálogo nas aulas de matemática promovem o envolvimento e uma postura motivadora nas aulas além de desmistificar a visão do professor como o único detentor do conhecimento. A troca de saberes, o engajamento desse aluno em projetos ou atividades interdisciplinares também são meios de desenvolver habilidades de escrita, compreensão e de leitura. Assumir uma perspectiva da aprendizagem dos alunos baseada na atividade, na interação e na reflexão (Mason, 1991), nos direciona para a construção de uma aprendizagem mais autônoma e interativa tanto no trabalho com o grupo como em discussões coletivas.

Como fazer os alunos passarem dos procedimentos não-formais e intuitivos às expressões simbólicas formais próprias da linguagem matemática e vice-versa? A aquisição de representações de conceitos e procedimentos é tão importante quanto possuir habilidades para o seu uso em diferentes contextos. Este constitui o primeiro passo para uma tomada de consciência da função do professor e de seu papel decisivo no ensino de uma matemática mais significativa. Nesse sentido a aplicação de modelos concretos e posteriormente a transposição daquele raciocínio lógico-dedutivo para uma situação abstrata e generalizada bem como a aplicação de conceitos e procedimentos em diferentes contextos nos apontam para caminhos de um ensino mais “socializado” e acessível ao conhecimento de mais pessoas.

Vale destacar que a alfabetização não se restringe apenas à apropriação da palavra escrita, mas designa um conjunto de saberes e fazeres específicos e fundamentais para o desenvolvimento cognitivo e para as aprendizagens posteriores.

A Matemática utiliza o termo “alfabetização matemática” para designar os saberes essenciais em relação à capacidade de ler e escrever em Matemática, como a compreensão e apropriação do Sistema de Numeração Decimal (SND), tão essencial para o desenvolvimento de outros conhecimentos relacionados a essa área do conhecimento.

> Assim considerada, entendo que a alfabetização matemática diz respeito aos atos de aprender a ler e a escrever a linguagem matemática, usada nas séries iniciais da escolarização. Compreendo a alfabetização matemática, portanto, como fenômeno que trata da compreensão, da interpretação e da comunicação dos conteúdos matemáticos ensinados na escola, tidos como iniciais para a construção do conhecimento matemático. Ser alfabetizado em matemática, então, é compreender o que se lê e escreve o que se compreende a respeito das primeiras noções de lógica, de aritmética e de geometria. Assim, a escrita e a leitura das primeiras ideias matemáticas podem fazer parte do contexto de alfabetização. Ou seja, podem fazer parte da etapa cujas primeiras noções das diversas áreas do conhecimento podem ser enfocadas e estudadas dentro de um contexto geral da alfabetização. (DANYLUK, 2015, p. 26)

Segundo Machado (2011) a maior parte das atividades pedagógicas ainda estão restritas à oralidade do professor, com poucas aberturas para discussões e descobertas entre todos os envolvidos. Assim, para que uma aula de matemática tenha uma maior amplitude, a participação pela a oralidade dos alunos é essencial, mesmo que, infelizmente, as avaliações sejam predominantemente, escritas.

O letramento e o multiletramento garantem a participação dos estudantes nas práticas sociais mediadas pela leitura e a escrita e os habilitam também a produzirem textos que envolvem as linguagens verbal, a não-verbal e a multimodal, presentes nos diferentes gêneros que circulam nas mais diferentes esferas da atividade humana.

Cada vez mais, os conhecimentos matemáticos tornam-se imprescindíveis para as diversas ações humanas, das mais simples às mais complexas, o que faz com que a Matemática assuma um papel fundamental para o pleno acesso dos sujeitos à cidadania.

Como parte do conhecimento humano, a Matemática assume, em todas as etapas da Educação Básica, papel relevante na formação dos estudantes. Mas, para além de sua utilidade e de poder ser compreendida como uma linguagem, ela deve ser vista como ciência, com características próprias de pensar e de investigar a realidade, concorrendo para o desenvolvimento de capacidades fundamentais para a análise, compreensão e intervenção em diferentes contextos.

No Brasil, a BNCC ensino fundamental orienta os currículos regionais com as competências e habilidades em cada etapa do ensino. As habilidades matemáticas podem ser exploradas e desenvolvidas em aulas diferenciadas, considerando todos os aspectos discutidos nesse capítulo, utilizando-se a ideia dos clubes de matemática como elemento motivador e com uma mentalidade de crescimento.

1.2 A MATEMÁTICA NA BNCC E NO CURRÍCULO PAULISTA

A elaboração da Base Nacional Comum Curricular se fez a partir de uma discussão que mobilizou os mais diferentes profissionais da educação em todo o país, em diversas esferas público-administrativas, bem como a sociedade civil organizada. O documento relacionado à Educação Infantil e ao Ensino Fundamental foi homologado em 20 de dezembro de 2017. No âmbito do Ensino Médio, as discussões ocorreram durante todo o ano de 2018, tendo sido homologada a versão final no dia 14 de dezembro daquele ano.

É um documento com caráter normativo que define as aprendizagens da Educação Básica, em todas modalidades e ao longo de todas as etapas, sendo orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visa uma formação humana integral, inclusiva e democrática.

Esses princípios estão em conformidade com os valores dos Círculos Matemáticos, que visam, entre outros objetivos, uma equidade no ensino da matemática, oportunizando todos os alunos nas habilidades cognitivas e socioemocionais.

Para desenvolver competências e habilidades é preciso planejar práticas que deixe o estudante investigar, discutir, argumentar, descobrir, concluir e aprofundar em novas ideias. Sempre seguindo os princípios ético e humano.

A BNCC estrutura-se com foco em conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para promover o desenvolvimento integral dos estudantes e a sua atuação na sociedade. Sua implementação acontece por meio da construção de currículos locais, de responsabilidade das redes de ensino e escolas, que têm autonomia para organizar seus percursos formativos a partir da sua própria realidade, incorporando as diversidades regionais e subsidiando a forma como as aprendizagens serão desenvolvidas em cada contexto escolar.

Nesse contexto o currículo pode ser considerado como o eixo de uma proposta pedagógica norteadora, com a função de delimitar os aprendizados a serem desenvolvidos e referenciar as atividades a serem realizadas em sala de aula, sempre tendo a compreensão e a melhoria da qualidade de vida.

A BNCC e os currículos possuem identidade em seus princípios e valores, reconhecendo que a educação tem um compromisso com a formação e o desenvolvimento humano global.

Com a homologação da BNCC, os Estados iniciam a (re)elaboração de seus currículos. O Programa de Apoio à Implementação da Base Nacional Comum Curricular, instituído pela portaria Nº 331, de 2018, estabeleceu as diretrizes, os parâmetros e os critérios para a implementação da BNCC em âmbito estadual e municipal. Neste trabalho daremos ênfase ao Currículo Paulista, a forma como os eixos de conhecimento está estruturada tendo em vista as habilidades previstas atreladas aos objetos de conhecimento e às unidades temáticas. Para isso, faz-se necessário discorrer sobre cada uma das unidades geradoras de conhecimento, bem como sobre a nova demanda de competências tendo em vista o desenvolvimento nas dimensões intelectual, física, socioemocional e cultural descritas no documento norteador da BNCC.

Compreendendo a importância do currículo nesse processo, o Estado de São Paulo deu início a elaboração do Currículo Paulista, por meio de um processo intenso e continuado de colaboração entre Estado e Municípios.

Vale ressaltar que as discussões para a elaboração do Currículo Paulista foram iniciadas em 2018 e envolveram a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEDUC-SP) e a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação de São Paulo (UNDIME-SP), contando também com a presença de representantes da rede privada.

Em 19 de junho de 2019 a nova versão foi referendada pela Comissão do Conselho Estadual e aprovada pelo Conselho. Posteriormente foi homologado pelo Secretário Estadual de Educação em primeiro de agosto de 2019.

> O Currículo Paulista, é fruto do esforço dos profissionais da educação representantes das Redes Municipais, da Rede Estadual e da Rede Privada de Ensino que, atuando de modo colaborativo, associaram saberes, procedimentos, reflexões e experiências a respeito da prática docente nos diferentes componentes curriculares....Contempla as competências gerais discriminadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC)...bem como os currículos e as orientações curriculares das redes de ensino públicas e

> privadas....Dessa maneira, que o Currículo Paulista represente um passo decisivo no processo de melhoria da qualidade de educação no Estado de São Paulo, no que se refere às aprendizagens dos estudantes, à formação inicial e continuada dos educadores, à produção de materiais didáticos, às matrizes de avaliação e ao estabelecimento de critérios para a oferta de infraestrutura adequada ao pleno desenvolvimento da educação (CP, p11 e 12)

De acordo com o IBGE de março de 2019, são 645 municípios que compõem o Estado de São Paulo, com aproximadamente, 45 milhões de habitantes. Na capital, temos uma população bastante diversificada que descende de africanos, indígenas, italianos, portugueses, árabes, alemães, espanhóis, japoneses, chineses, bolivianos entre outros, que somam, aproximadamente, 13 milhões de habitantes.

Na Educação Básica, as matrículas nas diferentes redes, privada, estadual e municipal, atingem o total de 7.433.331, segundo dados coletados no Cadastro de Alunos em fevereiro de 2019. Deste total, 90% estão na rede pública e são eles que precisam de incentivos nos círculos de matemática.

Assim como na BNCC, o Currículo Paulista também possui o compromisso com a Educação Integral e reitera as dez competências gerais da educação básica contidas na BNCC, citadas anteriormente, elencando as competências e as habilidades essenciais para sua atuação na sociedade contemporânea. Podemos descrever as dez competências, de forma direta como conhecimento, pensamento científico crítico e criativo, repertório cultural, comunicação, cultura digital, trabalho e projeto de vida, argumentação, autoconhecimento e autocuidado, empatia e cooperação, e responsabilidade e cidadania.

Essas competências gerais abrangem conceitos, procedimentos, atitudes e valores primordiais para o desenvolvimento de habilidades importantes a serem instigadas na escola. Nesse contexto a escola vem se fortalecendo como espaço privilegiado para a experiência do autoconhecimento, da construção identitária e de projetos de vida; para a autoria, a crítica e a criatividade na produção de conhecimentos; e para práticas participativas, colaborativas e corresponsáveis com o âmbito local e planetário. Agir localmente pensando globalmente.

Ainda segundo a BNCC, nos Anos Finais, é necessário, retomar, ampliar e ressignificar as aprendizagens apreendidas no Ensino Fundamental e Anos Iniciais, no contexto das diferentes áreas de conhecimento, visando ao aprofundamento e à ampliação do repertório dos estudantes, fortalecendo sua autonomia e sua atuação crítica na sociedade. Vale lembrar que esse processo exige a articulação entre as competências cognitivas e as socioemocionais para que, ao final desse ciclo, os estudantes possam ser protagonistas do seu conhecimento e suas escolhas estejam em acordo com o seu projeto de vida, com o seu processo contínuo de desenvolvimento pessoal e social, dando continuidade no Ensino Médio.

No Currículo Paulista o ensino de matemática deve vincular a escola e a vida, entrelaçando todos os componentes, seguindo o Letramento Matemático proposto na BNCC. Em um ambiente que valoriza a comunicação matemática, esse desenvolvimento se dá quando esses estudantes debatem pontos de vista, explicam e justificam a resolução de um problema, uma inferência, ou uma regularidade identificada; deduzem e justificam estratégias usadas e conclusões obtidas; adaptam o conhecido ao desconhecido; transferem uma aprendizagem de um contexto para outro; provam que algo é verdadeiro ou refutam uma hipótese, buscando um contraexemplo para uma conclusão falsa, entre outras possibilidades.

O caminho da Resolução de Problemas como estratégia metodológica tem a perspectiva de tornar os estudantes ativos no processo de aprendizagem, uma vez que um problema é o ponto de partida para a construção de novos conhecimentos.

As competências específicas para a área da Matemática ensino fundamental são iguais entre a BNCC e o Currículo Paulista. São elas:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos

presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceito de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Os clubes de matemática, como veremos no capítulo 7, contribuem no desenvolvimento de todas essas competências, pois aplicadas com metodologias ativas contribui no protagonismo do aluno e no seu próprio desenvolvimento dentro de um processo planejado e orientado pelo professor.

A BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias se articulam entre si, possibilitando mais integração entre os conteúdos matemáticos que serão denominados neste documento de objetos de conhecimento. Nesse sentido, a BNCC propõe cinco unidades temáticas, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização. São elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

No Currículo Paulista encontramos, praticamente a mesma ideia, com a diferença que existem habilidades que representam subdivisões ou uma pré-habilidade, em relação a BNCC.

Quadro 1: Subdivisões de uma habilidade

BNCC – Números – 6ºano	Currículo Paulista – Números – 6ºano
(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).	(EF06MA04A) Reconhecer um fluxograma a partir da sua estrutura e de seus elementos. (EF06MA04B) Ler e interpretar um fluxograma, reconhecendo seus benefícios para a compreensão de um dado contexto. (EF06MA04C) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).

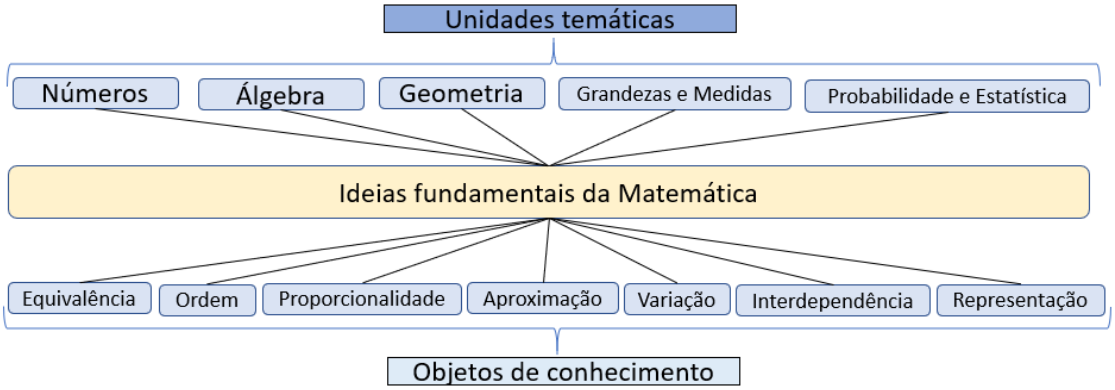
Fonte: BNCC (p.31) e Currículo Paulista (p.346)

Neste caso foram criadas duas “habilidades” 4A e 4B, associadas a 4C, ou seja, subdivisões facilitadoras para chegar à habilidade 4C. Portanto, percebemos a semelhança direta entre as habilidades entre o Currículo Paulista e a BNCC. Isso pode ser utilizado num clube de matemática com grupos ou alunos, que precisem enxergar primeiro os degraus de uma escada ascendente antes de avistar o topo dela.

A relação entre as Unidades temáticas, Objetos de Conhecimento e Habilidades, em matemática, está em anexo.

O Currículo Paulista de Matemática agrupa as habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, como propostos pela BNCC.

Figura 1:Unidades temáticas e objetos de conhecimento



Fonte: do autor.

As unidades temáticas reúnem um conjunto de ideias fundamentais, tais como:

- Equivalência, presente nos estudos dos números racionais, equações, áreas ou volumes e em outros objetos de conhecimento;

- Ordem, está presente nos conjuntos numéricos, na construção de algoritmos e em outros procedimentos, como sequências e organização;

- Proporcionalidade, que contempla o raciocínio analógico, comparações quando se trata de frações, razões e proporções, semelhança de figuras, grandezas diretamente proporcionais, entre outros;

- Aproximação, que está articulada com a realização de cálculos aproximados, como estimativas e outros utilizados no dia a dia;

- Variação, conceito associado ao estudo das formas de crescimento e decrescimento, taxas de variação num dado contexto, como por exemplo, financeiro;

- Interdependência, associada à ideia de funções com ou sem uso de fórmulas, por exemplo, ligada à ideia de "se p, então, q", sendo uma sentença matemática mais recorrente;

- Representação, associada à percepção e representação do espaço, de formas geométricas existentes ou imaginadas; também associada aos números, às operações e à interdependência.

Essas ideias articuladas perpassam todas as unidades temáticas, descritas a seguir.

NÚMEROS

O ensino de Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, o que, além de desenvolver conhecimentos sobre os números e suas relações, envolve a compreensão das operações e seus resultados, reconhecendo o significado ao operar com um número para obter outros.

A ideia de contagem permeia todos os anos, aprofundando a progressão das habilidades ano a ano. Desenvolver o trabalho com o Sistema de Numeração Decimal, por exemplo, deverá passar também pela exploração do que os estudantes já conhecem, nos Anos Iniciais, ampliando para outros campos, segundo as relações entre eles.

Reconhecer as diversas funções sociais do número, ou seja, entender que um mesmo número pode ter significados diferentes dependendo do contexto em que está inserido, articula-se com o letramento matemático para o desenvolver habilidades de leitura, da escrita e da ordenação.

Para uma abordagem significativa, é possível recorrer à história da Matemática, pois a necessidade de medir e de contar revela os usos dos números naturais e a justificativa da ampliação para outros conjuntos numéricos. A ideia de números se apresenta desde os tempos pré-históricos, por meio de marcas em ossos e desenhos em paredes de cavernas, marcando os primeiros registros numéricos.

A compreensão dessas relações nos Anos Iniciais permitirá que elas sejam utilizadas em cálculos algébricos nos Anos Finais. A investigação de regularidades também está contemplada nas habilidades a serem desenvolvidas, com ou sem o uso da calculadora. Essa compreensão será útil para que os estudantes possam resolver problemas diversos.

ÁLGEBRA

Álgebra é um dos temas da Matemática que desenvolve a capacidade de abstração e generalização que auxilia na resolução de problemas e tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento algébrico, que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.

O Currículo Paulista contempla a Álgebra desde os Anos Iniciais. O aprendizado da Álgebra contribui para a compreensão das propriedades e generalizações, para ampliar a capacidade de abstração, o que promove “saltos” cognitivos no raciocínio matemático.

Os estudantes devem saber expressar suas respostas e sintetizar conclusões, usando diferentes registros e linguagens, como por exemplo, usar a linguagem matemática para descrever uma sentença matemática, a partir de um texto na língua materna.

Quando se trata do ensino de Álgebra, há que se observar que existe uma relação de natureza algébrica entre o pensamento e a linguagem. A linguagem da álgebra é expressão do pensamento matemático.

GEOMETRIA

A Geometria é um campo importante da Matemática que serve de instrumento para outras áreas do conhecimento. Seu estudo deve propiciar aos estudantes a compreensão do mundo em que vive, e desenvolver a capacidade de descrever, representar, localizar-se; estudar sua posição e deslocamentos; identificar formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, desenvolvendo, assim, o pensamento geométrico.

Para tanto, espera-se que os estudantes, ao final dos Anos Iniciais, já estabeleçam pontos de referência para a localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias; que identifiquem características de formas geométricas bidimensionais e tridimensionais e, ainda, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa.

GRANDEZAS E MEDIDAS

Neste eixo aborda-se as propriedades dos objetos ou fenômenos físicos que são mensuráveis, ou seja, além das medidas são analisadas também, os instrumentos mais adequados para efetuá-las. Estão vinculadas nesse eixo, a variação, a equivalência, a representação, a aproximação, a proporcionalidade, entre outras.

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Neste eixo aborda-se a pesquisa, a coleta de dados, construções de tabelas e gráficos, cálculo de médias, medidas de dispersão e confiabilidade. Para isso desenvolve-se todo o raciocínio da análise combinatória, ou seja, a variação, a interdependência, a equivalência, entre outros.

A configuração do Organizador Curricular do Currículo Paulista, para Matemática, contempla as unidades temáticas, as habilidades, os objetos de conhecimento para cada ano do Ensino Fundamental.

Os objetos de conhecimento ora apresentam o conceito, ora o procedimento, ou seja, um meio para que as habilidades sejam desenvolvidas. Cada objeto de conhecimento é mobilizado em uma ou mais habilidades. As habilidades apontam o que deve ser ensinado em relação aos objetos de conhecimento. Os verbos utilizados explicitam os processos cognitivos envolvidos nas habilidades, sendo estes elementos centrais para o desenvolvimento das competências.

No site da secretaria da educação de São Paulo[2], são encontradas todas as Unidades temáticas, Habilidades e Objetos de conhecimento de Matemática do Ensino Fundamental Anos Iniciais e Finais do documento norteador do Currículo Paulista.

Para cada objeto de conhecimento e as suas habilidades relacionadas, o professor poderá propor atividades diferenciadas, como um problema a ser resolvido em grupos. A partir daí, a resolução de problemas se torna o foco principal e de discussão entre os integrantes, fato este muito comum nos clubes de matemática. Vamos discutir no próximo capítulo como a resolução de problemas pode contribuir de maneira significativa no desenvolvimento dessas habilidades matemáticas.

2 https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/

2. METODOLOGIAS DE ENSINO: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas pode ser um caminho facilitador para a contextualização de conceitos e procedimentos matemáticos desde que haja uma mobilização efetiva do aluno na tentativa de elaborar procedimentos e estratégias descritos na forma de registros ou esquemas informais. Posteriormente serão necessárias a sistematização e a apresentação desse conteúdo de uma forma mais generalizada e abstrata.

De acordo com a BNCC, é importante que a resolução de problemas seja significativa para o aluno, com base na realidade do lugar e no tempo nas quais as aprendizagens estão situadas.

> A Resolução de Problemas é uma atividade central no ensino e na aprendizagem de Matemática. A possibilidade de enfrentar um desafio promove a reflexão e a valorização de formas pessoais de resolução, o uso da criatividade na busca de uma estratégia que modele e resolva a situação enfrentada, a convivência com diferentes pontos de vista, bem como o ajuste consciente, por cada um, de suas próprias estratégias (CURRÍCULO PAULISTA, p. 313)

As primeiras pesquisas desenvolvidas sobre como resolver um problema tiveram influência de George Polya (1887-1983), matemático húngaro do século XX. O interesse pela resolução de problemas vem desde a época de estudante, a partir da pesquisa em vários livros e do entendimento de todo o desenvolvimento das questões e teoremas. Em 1945, nos Estados Unidos, conseguiu publicar uma das principais contribuições para a matemática, o livro "How to Solve It", que tornou-se um bestseller vendendo mais de um milhão de cópias, em 17 idiomas, onde no Brasil foi traduzido com o nome de "A Arte de Resolver Problemas", que traz inicialmente o objetivo que se deve ter ao trabalhar com resolução de problemas em sala de aula, descreve em algumas seções alguns posicionamentos do professor em relação ao aluno e alguns possíveis questionamentos a serem feitos. Após uma breve introdução sobre o assunto, Polya começa a descreve seu método de resolução de problemas, compreendido por 4 fases:

A primeira fase descrita por Polya é a compreensão do problema, onde o mesmo descreve que não é viável tentar resolver um problema que não tenha sido compreendido e que não tenha interesse em resolvê-lo, dessa forma, para que possa desenvolver uma boa compreensão, é importante verificar se todas as principais partes do problema foram identificadas, se os dados mais importantes foram retirados, assim como se os mesmos são suficientes para conseguir resolvê-lo, essa familiarização com problema é muito importante para o seu entendimento.

A segunda fase, elaboração de um plano, é a fase onde o resolvedor tentará relacionar todas as informações coletadas durante a primeira fase e tentar buscar na sua experiência e conhecimentos já adquiridos. Alguns questionamentos a serem feitos são importantes pois, a criação do plano pode ser uma fase um tanto complexa, por exemplo se já resolveu algum problema semelhante e se a resposta for positiva, se é possível utilizar o mesmo método ao problema atual, pode-se reescrever o problema através de um desenho e/ou de uma equação. Os passos pensados durante essa fase serão os norteadores da resolução do problema. As duas primeiras fases são consideradas por Polya um caminho que pode ser um tanto longo e tortuoso.

A terceira fase, a execução do plano, é considerada pelo autor uma tarefa fácil haja vista que, para o mesmo basta seguir com precisão os caminhos pensados e elaborados nas fases anteriores, pautados no uso dos conhecimentos matemáticos bases para sua execução. Nesta fase, o professor terá o papel de observador dos cálculos desenvolvidos pelo estudante e questionador para que o aluno não perca atenção no processo e que o mesmo sempre verifique se o processo está sendo realizado de maneira correta.

E por último e não menos importante a quarta fase, retrospecto, nela, o aluno deverá verificar se o resultado encontrado é o que realmente responde o problema pois, é comum quando se termina de resolver uma equação, a mesma é apenas um auxílio para se chegar na resposta final do problema. Além de verificar a resposta, esta é a fase onde o estudante abstrai todo o conteúdo desenvolvido no problema, de modo que assim consegue fixar o seu conhecimento e aprimorar a sua capacidade de resolução de problemas.

Vale lembrar que essas quatro fases descritas acima, foi publicada por Polya em 1945 sem a pretensão na resolução de questões de olimpíadas, porém é bastante útil para qualquer aluno durante a resolução de um problema de matemática. Para questões olímpicas, muitas vezes, é a dedicação sobre a resolução que fará a diferença, ou seja, o estudante olímpico vai tentar caminhos que o levarão ao erro, porém ele aprenderá com esses erros, aumentando o repertório de técnicas válidas e não válidas para cada situação, e também pesquisará novas teorias focado na resolução do problema olímpico, ou seja, saberá o momento que poderá parar a sua leitura complementar e tentar resolver o problema com as novas teorias. Essas trilhas são individuais e possuem extensões diferentes para cada um. Lembrando que novas teorias se misturam com novas técnicas e essas fontes não são encontradas nos livros didáticos escolares, é preciso procurar materiais especializados. Citando alguns, para exemplificar, temos as técnicas de inversão, combinatória com coeficientes multinomiais, congruência em Z, prova por contradição, indução matemática, geometria de pontos de massa, jogos com invariantes entre outros.

De acordo com Onuchic (2014), a discussão sobre a resolução de problemas tem uma longa história e mudanças de concepções de acordos com as teorias da aprendizagem de cada momento, como o ensino “sobre”, “para” e “através” da Resolução de Problemas, sem desconectar com as situações sociopolíticas econômicas.

> Sensíveis a este cenário de complexidade que permeia os ambientes de ensino, orientações oficiais em todo mundo, e em particular no Brasil, destacam a necessidade de superar práticas ultrapassadas de transmissão de conhecimentos e transferir para o aluno grande parte da responsabilidade por sua própria aprendizagem, colocando-o como protagonista de seu processo de construção de conhecimento. O desenvolvimento da criatividade, da autonomia e de habilidades de pensamento crítico e de trabalho em grupo deve ser promovido.(ONUCHIC, 2014,p.35)

Recomenda-se que o professor utilize as mais variadas tecnologias para as investigações, modelagens e projetos. Lembrando que cada estudante possui o seu próprio tempo de aprendizagem, por isso uma atenção mais assistida e a longo prazo devem fazer parte dessa cultura de resolução de problemas.

2.1 MENTALIDADES MATEMÁTICAS E TRABALHOS EM GRUPO

Segundo Camargo e Daros (2018), a insatisfação na educação atinge as duas extremidades, professor e aluno. Enquanto os alunos reclamam do tempo excessivo em que precisam ficar só ouvindo, da rigidez dos horários, do distanciamento do conteúdo proposto com a realidade e dos recursos pedagógicos pouco atraentes, os professores também dão queixas sobre a falta de envolvimento dos alunos e das condições de trabalho. Mesmo que uma nova roupagem tente melhorar o ambiente na sala de aula, como apresentações gráficas com projetores multimídia e inserção de filmes, a passividade do aluno continua, ou seja, todo esse material produzido pelo professor possui uma via de mão única.

Assim, é preciso que as inovações tecnológicas na educação visem o desenvolvimento das competências e habilidades dos alunos e não apenas como obrigatoriedade e praticidade para o professor. Novos aplicativos surgem cada vez mais, num intervalo de tempo menor, e o professor não precisa mostrar aos alunos que ele está antenado nessas tecnologias, usando novas ferramentas frequentemente. Inovar também significa renovar no sentido de aproveitar as boas ideias e melhorá-las, e não apenas trocá-las. O processo da inovação sempre existiu em toda história da humanidade.

> Aprendemos ativamente desde que nascemos e ao longo da vida, em processos de design aberto, enfrentando desafios complexos, combinando trilhas flexíveis e semiestruturadas, em todos os campos (pessoal, profissional, social) que ampliam nossa percepção, conhecimento e competências para escolhas mais libertadoras e realizadoras. A vida é um processo de aprendizagem ativa, de enfrentamento de desafios cada vez mais complexos. (BACICH E MORAN, 2018, p.2)

Ainda segundo Bacich e Moran (2018), os conceitos sobre aprendizagem ativa e aprendizagem híbrida são modelos que podem contribuir para uma melhora no ensino. As duas possuem conexões, porém as metodologias ativas têm o olhar no protagonismo do aluno com um envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, seja desenhando, experimentando ou criando com a orientação do professor. Já no modelo híbrido destaca-se a flexibilidade no uso do espaço, tempo e materiais, sendo o uso da tecnologia uma forte aliada. O equilíbrio desses dois modelos ajudam na construção individual, que é o aluno criando o seu próprio caminho, na construção grupal ampliando sua aprendizagem com o envolvimento e interação compartilhada de saberes, e a construção tutorial, com orientação das pessoas mais experientes em diferentes campos e atividades.

Então, as metodologias ativas, de uma maneira geral, podem ser encaradas como um ensino híbrido, possibilitando ao aluno pesquisar autonomamente utilizando as tecnologias, produzindo suas próprias conclusões e compartilhando com o grupo, e não apenas com o professor. Nos momentos presenciais, por exemplo, os trabalhos em grupo com discussões e fechamento, com dois ou mais professores podem ser vistos como aulas inovadoras, cujo propósito é a participação ativa de cada aluno.

Lembrando que “as metodologias ativas de aprendizagem colocam o aluno como protagonista, ou seja, em atividades interativas com outros alunos, aprendendo e se desenvolvendo de modo colaborativo” (Camargo e Daros, 2018, p.15). Ainda, segundo os autores, é preciso pensar nas estratégias como as competências que pretende desenvolver com a atividade, a disposição física das carteiras, no caso do presencial, pensando na mobilidade dos alunos entre os grupos e a sequência didática.

Temos também a aprendizagem personalizada a partir do projeto de vida do aluno, e essa personalização tem mais eficácia quando cada estudante amplia a percepção de seu potencial em todas as dimensões, mesclando interesses pessoais, talentos e paixões. São trilhas abertas, dinâmicas, com significados, motivações e que olham o passado e o presente de cada aluno para ajudar nas expectativas futuras.

Se estamos falando de aprendizagem não podemos esquecer de um dilema que muitos professores, alunos e famílias enfrentam constantemente, que é a lição de casa. Há inúmeras discussões sobre a sua forma, aplicação e até legitimidade. Pais que reclamam que a “escola” envia muita ou pouca lição de casa, outros que tentam ajudar os seus filhos, mas não conseguem porque não lembram do conteúdo ou os filhos dizem que não é dessa maneira que o professor ensinou, e tem os estudantes que recusam ajuda ou, simplesmente, não a fazem. Isso causa frustração e diminui a autoestima do estudante.

Segundo Bergmann (2018), a aprendizagem invertida contribui nessa questão porque, dessa maneira, o tempo utilizado na sala de aula fica mais produtivo com os alunos numa postura mais ativa, pois já vêm preparados com perguntas mais complexas, anotações e modelos pré-preparados para debates. Nessa aprendizagem, com a orientação do professor, os alunos previamente exercem autonomia e responsabilidade. É como se a parte mais difícil de uma tarefa de casa fosse realizada de forma colaborativa com todos em sala de aula. Isso claramente atinge a competência 10 da BNCC: Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

De acordo com Boaler (2018), a matemática é vista de maneira diferente de outas disciplinas. Muitas pessoas que na escola tiveram o mau ensino dessa disciplina, carregam traumas e a crença de que saber matemática é um “dom”, ou que é uma ciência apenas das respostas certas ou erradas. E, nesse ponto sobre os erros, de acordo com a autora, o psicólogo Jason Moser em seus estudos sobre os mecanismos neurais, descobriu que quando as pessoas cometem erros, há um aumento da atividade elétrica no cérebro, fazendo com que ele cresça. Essas sinapses são mais acentuadas em pessoas com a mentalidade de crescimento, ou seja, que não acreditam que a inteligência seja um dom.

Isto significa, por mais óbvio que pareça, que o professor precisa tentar mudar a postura dos alunos com mentalidade fixa, que acham que não são capazes de aprender a sua disciplina. Para isso, o tratamento não equitativo de gênero, classe social ou outras formas de discriminações precisam ser abolidas. O erro no processo da aprendizagem não deve ser tratado como forma de punição, rebaixamento ou classificatório, ao contrário, deve ser utilizado para descobrir, numa reflexão conjunta, outras possibilidades ou razões que o levaram para outros procedimentos.

> Uma das mudanças mais poderosas que um professor ou os pais podem fazer é nas mensagens que passam sobre erros e respostas erradas em matemática. Recentemente, recebi um vídeo muito tocante de uma professora que (...) começou o ano ensinando a uma turma de alunos com dificuldades a importância e o valor dos erros. Os estudantes mudaram completamente no decorrer do ano, recuperando-se de fracassos anteriores e voltando a ter um envolvimento positivo com a matemática. A professora enviou um vídeo dos alunos refletindo, no qual eles falam a respeito da mensagem de que os erros desenvolvem seu cérebro, mudando tudo para eles (…) Quando ensinamos aos estudantes que erros são positivos, isso tem um efeito incrivelmente libertador para eles. (BOALER, 2018, p.15)

Outro ponto importante a destacar, relacionado com o intuito dessa dissertação, é que a matemática é viva e bela, conectada com o nosso mundo, com o mundo de cada um. Ela está no centro do pensamento sobre como passar o dia e resolver os seus afazeres, desde a manobra do carro, os trajetos dos lugares que precisa ir e a otimização de espaço no local de trabalho ou residência. Isso pode levar a modelagens e responder perguntas complexas e solucionar grandes problemas. O importante não é você ser rápido nos cálculos, e sim, o que você é capaz de fazer com eles.

Assim, uma maneira interessante é o trabalho em grupos, pois a discussão em torno de um erro são encaradas com mais tranquilidade entre os membros, e a descoberta da resposta correta é obtida, muitas vezes, analisando o erro sem a intervenção do professor. Toda a investigação e análise dos resultados são protagonizados pelos próprios alunos, aumentando a confiança e as habilidades socioemocionais.

Segundo Cohen e Lotan, em Planejando o Trabalho em Grupo (2017), a aprendizagem precisa ser ao mesmo tempo colaborativa e autônoma, sendo que nos trabalhos em grupo é preciso atribuir funções para cada integrante como, facilitador, verificador, organizador, gerenciador de materiais, oficial de segurança e relator, sempre rodiziando esses papéis a cada tarefa. O professor conduziria os trabalhos observando a harmonia de cada grupo e o papel de cada estudante.

> O trabalho em grupo é uma técnica eficaz para atingir certos tipos de objetivos de aprendizagem intelectual e social. É excelente para o aprendizado conceitual, para resolução criativa de problemas e para o desenvolvimento de proficiências em linguagem acadêmica. Socialmente, melhora as relações intergrupais, aumentando a confiança e a cordialidade. Ensina habilidades para atuar em equipe que podem ser transferidas para muitas situações, sejam escolares ou da vida adulta.... Mais importante ainda, o trabalho em grupo torna mais acessíveis as tarefas de aprendizagem para um número maior de alunos em sala de aula com grande diversidade de competências acadêmicas e proficiência linguística. O trabalho de grupo produtivo aumenta a aprofunda a oportunidade de aprender conteúdos e desenvolver a linguagem e, portanto, tem o potencial para formar salas de aulas equitativas. (COHEN E LOTAN, 2017, p.7)

Nesse sentido torna-se interessante incorporar ao planejamento essas ações didáticas, o trabalho em equipes faz com que experimentem todos os momentos, desde a frustração até a conquista. É preciso desenvolver a habilidade da resiliência assim como ultrapassar os limites determinados na resolução de um problema, aprofundando assim até numa modelagem matemática. Iremos falar com mais detalhes esses trabalhos em grupo nos capítulos 7 e 8 com os clubes de matemática.

De acordo com o Fórum Econômico Mundial (outubro/2020)[3], dentre as 10 habilidades profissionais de “amanhã”, destaca-se o pensamento crítico, a solução de

---

3 https://www.weforum.org/agenda/2020/10/top-10-work-skills-of-tomorrow-how-long-it-takes-to-learn-them/

problemas, autogestão, aprendizagem ativa, resiliência, tolerância ao estresse e flexibilidade são imprescindíveis para os novos profissionais. Porém, a pandemia em 2020 impactou diretamente a desigualdade na educação porque as aulas remotas, dentre vários fatores, favoreceram os estudantes com poder econômico capazes de usufruírem de computadores, tabletes, smartphones, internet e, aulas síncronas e assíncronas, muito provavelmente com a ajuda de seus pais que trabalharam também remotamente. Enquanto, outras crianças dividiam aulas na televisão com seus outros irmãos, sem interação com os seus próprios professores e colegas de sala. Por isso, o planejamento das aulas de matemática, conectando com as metodologias ativas em grupo, os clubes de matemática e a BNCC, se tornaram tão essenciais para diminuirmos o impacto dessa desigualdade.

3. OS CÍRCULOS MATEMÁTICOS

De acordo com a tradução feita pelo IMPA do livro Círculos Matemáticos, A Experiência Russa, de Fomin, Genkin e Itenberg (2014), no prefácio da edição em russo, os círculos matemáticos tiveram origem na antiga União Soviética, com destaque para Leningrado, hoje São Petersburgo, no início do século XX. Com a intenção de explorar e mostrar a beleza da matemática de forma contagiante a jovens estudantes, os círculos foram criados por alunos de pós-graduação ou professores universitários, que viajavam juntos durante o final de semana ou durante o verão, para esses encontros com muita discussão cooperativa entre professores e alunos. A ideia é que a matemática pode ser praticada como num esporte, sem a preocupação da competição. São exercícios que desafiam a criatividade e que não terminam apenas na resposta, muitos podem ser aprofundados e discutidos em níveis mais avançados.

O grande segredo de um círculo é manter o entusiasmo e perceber o quanto você está desenvolvendo suas habilidades. “O desenvolvimento da educação matemática é um aspecto da cultura russa do qual podemos aprender muito.” (FOMIN, 2014, p.v). Já o livro possui uma coletânea de exercícios com temas variados que podem ajudar o professor a introduzir e explorar determinados conteúdos em suas aulas regulares, porém, basicamente, os exercícios são direcionados para cursos extracurriculares.

Em 1982 foi fundada a MSRI (Mathematical Sciences Research Institute), Instituto de Pesquisa em Ciências Matemáticas, em Berkeley, na Universidade da Califórnia, que em 1988, incorporou o programa Círculos Matemáticos, com sede na Baía de São Francisco, e com a ajuda de professores de outras universidades americanas, experientes em olimpíadas e nos círculos matemáticos da antiga União Soviética. Segundo os fundadores do Círculo de Matemática de Berkeley[4]:

> Círculos matemáticos são lugares onde alunos e professores podem se envolver com conteúdo matematicamente profundo apresentado de maneiras únicas que promovem a descoberta prática. Problemas de baixa e alta dificuldade podem ser abordados por estudantes com pouca experiência, mas ainda levam a conceitos enraizados em matemática avançada.

Atualmente, existem mais de 180 programas de Círculos Matemáticos nos

[4] https://mathcircle.berkeley.edu/

Estados Unidos, uma delas a Stanford Math Circles, patrocinada pelo Departamento de Matemática da Universidade de Stanford, foi fundada em 2005 e nesses 15 anos, envolveram mais de 900 estudantes. De acordo com a página dos círculos de matemática de Stanford[5]:

> Um círculo matemático é uma estrutura social onde os participantes se envolvem nas profundezas e complexidades do pensamento matemático, propagam a cultura de fazer matemática e criam conhecimentos. Para atingir esses objetivos, os participantes participam da resolução de problemas, modelagem matemática, prática da arte e discurso filosófico. Alguns círculos envolvem competição, outros não; todos promovem camaradagem.

Recentemente alguns estudos americanos vem apresentando os benefícios dos círculos de matemática para estudantes em situação de vulnerabilidade. O artigo “Math Circles: A Tool for Promoting Engagement among Middle School Minority Males” (2016)[6], apresentou um estudo de caso de um Círculo matemático com alunos de baixa renda, afro-americanos e hispânicos do ensino fundamental de uma escola pública.

Inicialmente, verificou-se a concepção que os estudantes tinham sobre a Matemática e seus aprendizados. Muitos disseram que gostavam da disciplina até o 4ºano e depois começou a ficar difícil e desinteressante a ponto de classificarem as pessoas em os que “são da matemática” e os que “não são da matemática”, apesar de concordarem que a matemática fosse importante para a vida real.

O grupo teve 22 alunos que participaram até o final e foram 24 encontros que aconteceram ao longo de 9 meses num departamento de matemática em uma universidade, com a intencionalidade de uma identidade, de pertencimento e um ambiente com possibilidades de exploração, sempre com a presença de professores da escola e da universidade. Foram várias dinâmicas diferentes com o objetivo de envolver e explorar a matemática. A coleta de dados foi cuidadosamente sendo registrada a cada encontro, observando-se a participação, a troca, interação e reflexão de cada estudante.

A conclusão desses dados, resumidamente, é que houve uma mudança significativa sobre as visões que os estudantes tinham antes e depois sobre a

---

[5] https://mathcircle.spcs.stanford.edu/

[6] Math Circles: A Tool for Promoting Engagement Among Middle School Minority Males (ejmste.com)

matemática, impactando no engajamento, nas expectativas de sucesso para tarefas matemáticas e no aumento da disposição de tarefas colaborativas. O fato de pertencer a um clube de matemática, transfere responsabilidades e também oportunidades, democratiza e encoraja na enculturação matemática. Demonstra que a matemática é uma atividade social e de transformação social.

Não existe uma diferença considerável entre os termos Círculos Matemáticos e Clubes de Matemática. Segundo a Tese de Cézar Augusto Ferreira (2019), “A Aprendizagem da docência em matemática a partir da elaboração de uma situação desencadeadora da aprendizagem”, os primeiros Clubes de Matemática surgiram nos Estados Unidos na década de 30 e 40 e ainda na década de 40 os clubes ganharam muita força com a Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM).

> O intuito dos Clubes de Matemática era de propiciar um espaço para o desenvolvimento da Matemática. Pode-se afirmar que a criação dos Clubes de Matemática surgiu a partir da constituição de um grupo que possuía interesse por essa ciência. Nesse viés o Clube de Matemática tem como principal objetivo criar um ambiente para o desenvolvimento de atividades educativas, sendo composto por vários sujeitos tais como alunos, professores e pesquisadores. (FERREIRA, 2019, p.57)

Não vamos criar um embate desnecessário de autoria. No próprio livro de Stankova e Rike (2008) com tradução e publicação pelo IMPA em 2018, de “Uma década do Círculo Matemático de Berkeley, a experiência Americana”, temos na página xii “...o Círculo Matemático de Berkeley foi inspirado nos modelos expoentes do Leste Europeu, onde círculos matemáticos existem há mais de um século.”

Isso mostra que os círculos matemáticos variam em sua organização, estilos de sessões e objetivos, mas todos têm em comum a promoção de inspirar em seus estudantes o amor pela matemática. No Brasil temos algumas pesquisas sobre os Clubes de Matemática. Na tese de Luciana Alvares Paes de Barros, sobre desenvolvimento do conceito de avaliação na formação inicial de professores em atividade colaborativa:

> São as relações pessoais que sustentam o Clube de Matemática como local de interação no processo de aprendizagem profissional. Os sujeitos envolvidos no projeto fazem ao Clube um espaço de formação colaborativa. O relacionamento entre os estagiários exige a capacidade destes em saber ouvir e aceitar ou discordar da opinião de seus pares. No entanto, a reflexão coletiva das ações é que qualifica a aprendizagem do futuro professor. Os

> estagiários relacionam-se em seus pequenos grupos por série e também participam de um único grupo, no qual as aprendizagens são compartilhadas. Esse espaço de troca entre os grupos complementa a aprendizagem iniciada no planejamento, no desenvolvimento dos encontros e nos momentos de avaliação nos pequenos grupos. (BARROS, 2007, p.124)

Na citação acima, os clubes foram aplicados por professores estagiários na Escola de Aplicação da USP, no ensino fundamental anos iniciais, e percebemos que a reflexão sobre a ação foi o grande desafio desses professores, pois as intencionalidades das aulas envolviam uma série de replanejamento dinâmico.

Já na tese de Rafael Siqueira Silva (2013), sobre os indícios de um processo de formação: a organização do ensino no clube de matemática, o foco está na construção de ações pedagógicas mais humanizadoras e coletivas:

> No que se refere à educação humanizadora, o Clube de Matemática tem se constituído como espaço adequado para formação de professores nessa perspectiva, seja na formação inicial ou continuada. O projeto tem possibilitado a inserção desses professores num processo de mudança, colocando-os num movimento de questionamento da própria ação educativa, mas encontra limitações no acompanhamento e na concretização dessas questões no ambiente escolar cotidiano. Em outras palavras, o projeto se coloca como estrutura de iniciação a um movimento de estabelecimento da atividade docente. (SILVA, 2013, p.193)

E sugere a implantação de clubes de matemática em instituições que buscam um espaço de formação para os seus próprios professores, com o compartilhamento de especialistas provenientes de universidades e, integrado ao seu projeto político pedagógico.

Na tese de José Márcio da Silva Ramos Diniz (2017), sobre “A constituição de um Clube de Matemática em uma escola pública: algumas reflexões por meio da teoria da atividade”, de uma escola localizada em Campina Grande, na Paraíba, temos o relato das dificuldades encontradas na implantação do projeto, que vão desde o trabalho solitário sem a colaboração dos pares e da parte administrativa da escola, ou seja, a cada encontro do clube o local era definido na hora e, muitas vezes, não estavam limpos e não tinham materiais básicos disponíveis como lápis, borracha, papel e giz.

Em 2013, foi iniciado o projeto O Círculo da Matemática do Brasil, apoiado pelo Instituto TIM, para melhorar o aprendizado da matemática de crianças estudando em escolas públicas das cinco regiões do Brasil. O projeto tem como objetivo despertar nas crianças o gosto pela matemática e potencializar a sua aprendizagem. Oferecendo prioritariamente aulas de matemática para crianças dos anos iniciais do ensino fundamental em turmas pequenas de máximo 10 alunos de acordo com uma metodologia participativa e lúdica. As aulas são lideradas por educadores brasileiros capacitados na metodologia do renomado enfoque pedagógico do “The Math Circle” desenvolvido pelos professores Bob e Ellen Kaplan da Universidade de Harvard, e adaptada ao contexto brasileiro. Segundo o Instituto, já foram formados mais de 4.700 professores, com a participação de mais de 27.000 estudantes em 276 escolas espalhadas no Brasil.

Semelhante aos Círculos Matemáticos, e de grande alcance nacional temos os Clubes de Matemática da OBMEP[7] com problemas interessantes e ambientes interativos, com a possibilidade de desenvolver, pesquisar e criar atividades de matemática de forma ampla e divertida. As discussões vão além da resolução do problema, abrangem jogos, programas de geometria dinâmica, filmes e gincanas. São colocados pequenos artigos, aplicativos, biografias e indicação de livros e sites. No fórum você interage com dúvidas, dicas e resoluções. A participação não é restrita a alunos de escolas públicas, podendo ter membros com níveis de escolaridade diferentes e até mesmo professores de matemática.

Os Clubes de Matemática da OBMEP foram criados a partir de três grandes objetivos:

• Disseminar o estudo da Matemática.

• Incentivar o desenvolvimento intelectual dos participantes promovendo debates, pesquisas e, sobretudo, desafiando-os a análises críticas de resultados obtidos por eles mesmos e por outros.

• Desmistificar ideias preconcebidas relativas à Matemática.

Essas atividades são desenvolvidas, dentro do ambiente virtual no site da OBMEP e cada Clube tem um professor orientador.

Ainda no site da OBMEP, temos o Programa de Iniciação Científica[8],

---

[7] http://clubes.obmep.org.br/blog/

8 http://www.obmep.org.br/pic.htm

mencionado anteriormente, para oportunizar alunos medalhistas da OBMEP a ampliarem o seu conhecimento científico e acadêmico, com encontros presenciais ou virtuais. Atualmente, as apostilas do PIC estão disponíveis para download, inclusive especiais das revistas Eureka e RPM. Com isso, professores entusiastas, podem utilizá-las para trabalharem de forma extracurricular como num clube de matemática presencial, mesclando com os materiais do Portal do Saber, outro programa da OBMEP, com assuntos que vão do 6ºano do ensino fundamental a 3ªsérie do ensino médio, com materiais teóricos e de exercícios, além de inúmeras videoaulas já disponíveis.

Nos capítulos 7 e 8 a seguir, iremos abordar duas experiências, uma presencial e outra virtual, que mesclam as essências principais dos Clubes de Matemática, das metodologias ativas e do trabalho em grupo.

3.1 Experiências presenciais: uma análise das metodologias

O relato a seguir é referente ao Colégio Marista Arquidiocesano, escola particular na cidade de São Paulo. Ele foi realizado antes das leituras dos livros de Lotan e Boaler, citados anteriormente, porém com algumas semelhanças nas práticas.

Nos meses de dezembro de 2018 e janeiro de 2019, recebi as inscrições para o Curso Avançado de Matemática, um curso criado desde 2011, modelo clube de matemática, que visa aprofundar alguns temas da matemática, aprimorar as técnicas de resolução de problemas e o raciocínio matemático. As inscrições acontecem com antecedência para que os alunos possam se programar em suas atividades extracurriculares, já sabendo os dias e horários do curso, que é gratuito e aberto aos alunos do colégio a partir do 6ºano do ensino fundamental até a 3ªsérie do ensino médio. As turmas são divididas em quatro grupos: 6ºanos, 7º anos, 8º anos com 9º anos, e ensino médio. Atendemos em média 120 alunos por ano e as aulas são no contraturno com 90 minutos semanais para cada grupo. São contabilizadas as presenças, porém não há avaliações.

Mas, vamos voltar um pouco na linha do tempo. De 2011 a 2013 não tínhamos um local fixo, cada encontro era de 45 minutos e a quantidade de alunos era muito pequena, com muitas desistências ao longo do ano, ficando apenas alguns alunos que já apresentavam alta proficiência. E, muitas vezes só discutíamos um ou dois exercícios perdendo muito tempo com as tentativas individuais.

De 2014 a 2016, conseguimos um lugar fixo, que era a biblioteca do colégio, mas os problemas continuaram, pois, este espaço só tinha uma grande mesa com várias cadeiras e não tinha um quadro.

Então, em 2017 ganhamos uma sala exclusiva, figura 2, para o curso mesmo escondida no terceiro andar e com uma acústica ruim. Tínhamos projetor, computador, impressora, quadro e armário. Fizemos um planejamento inovador, com materiais apostilados e cada professor de matemática contribuiu emprestando ou doando materiais como jogos, revistas, livros e sólidos geométricos. Ficaram conosco até o final do ano, uns 30 alunos. Participamos pela primeira vez da OBMEP conquistando 2 bronzes e 7 menções honrosas, além de uma medalha de bronze na OPM, todos do curso avançado.

Figura 2: Sala da matemática no terceiro andar

Fonte: do próprio autor

Em 2018, participamos pela primeira vez, com o ensino fundamental anos finais e ensino médio, da Olimpíada Canguru de Matemática e os alunos conquistaram 142 medalhas, que deu visibilidade e motivação para mais alunos entrarem no curso. Também conseguimos 3 pratas e 6 menções honrosas na OBMEP, além de um bronze na OPM. Com isso, em 2019, fomos transferidos para o 2ºandar e com duas salas climatizadas para o curso, figura 3, sendo uma delas para o ensino fundamental anos iniciais. Colocamos adesivos de grandes matemáticos nas paredes e acrescentamos um mural com todas as informações sobre as olimpíadas de matemática que iríamos participar.

Replanejamos o curso e as principais mudanças foram:

- Os grupos teriam que ser de 4 ou 5 alunos;
- A cada encontro não poderia repetir o mesmo grupo;
- Todos precisariam tentar resolver o problema, sozinhos, por 5 minutos e depois compartilhar, com todos, por mais 5 minutos.
- Após esse tempo, cada grupo apresentaria a sua resposta no quadro.
- Após a última apresentação o professor faria o fechamento.
- Os materiais eram entregues com uma semana de antecedência, para que os alunos pudessem ir lendo e pensando.

Com isso, a rotina de trazer algum rascunho ficou evidente, otimizando o tempo da aula. Uma vez por mês, eles competiam com jogos de estratégia (Mastermind, Nim, Go, xadrez, Abalone, Quoridor e Lig4), disputavam quebra cabeças com sólidos de madeira (montar, encaixar, tirar e combinar) e tentavam descobrir as resoluções matemáticas que estavam por trás da matemágica envolvendo fatoração, sequências recursivas, paridade, potenciação entre outros.

Figura 3: Nova sala da matemática

Fonte: do próprio autor

Trabalhar em grupo com estas regras fizeram toda a diferença, me surpreendeu com o alto nível dos debates e ideias de resolução criativa. O protagonismo de cada um foi importante para o desenvolvimento de novas habilidades como a resiliência dos alunos que, geralmente, não eram os primeiros a resolver, e agora tinham a chance de expor suas ideias, a socioemocional equilibrando momentos de frustração e de descoberta entre os integrantes de cada equipe e, principalmente, a competência 9 na BNCC, no que diz respeito a resolução de conflitos e a cooperação.

> Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Pela primeira vez conseguimos terminar o ano com mais de 100 alunos frequentes e 25 alunos foram aprovados para a 2ªfase da OBMEP (máximo possível dentro dos critérios do tipo de inscrição para escolas particulares), mas uma aluna mudou-se para outro país, então participaram 24 alunos, sendo que 21 deles participavam do curso avançado e de minhas aulas regulares. E, exatamente, esses 21 alunos foram premiados. Também conseguimos enviar uma equipe com o máximo de alunos possíveis na OPM conquistando uma medalha de ouro e uma prata na Olimpíada de Matemática Rioplatense, na Argentina. E, aumentamos para 224 medalhas na Canguru.

Não posso atribuir estes ótimos resultados nas olimpíadas quando comparado com os anos anteriores, apenas pela mudança na forma de trabalho durante um ano, é preciso mais dados e pesquisa a respeito, porém fica evidenciado a influência positiva a partir do momento que os alunos compartilham suas ideias na resolução de problemas, dando direito ao erro como processo natural e sentindo-se importantes na equipe. Este curso avançado nada mais é do que um clube de matemática e parecia tudo perfeito, mas o replanejamento teria que acontecer para 2020. E aconteceu.

No período de 17/01 a 05/02 de 2020, durante as aulas do mestrado no IFSP, os professores Henrique Marins de Carvalho e Lucas Casanova Silva, na disciplina de verão Resolução de Problemas, apresentaram dois livros, os de Cohen e Lotan (2017) sobre Planejando o Trabalho em Grupo, cuja metodologia foi aplicada em nossa turma de professores mestrandos, e o livro de Boaler (2018) sobre Mentalidades Matemáticas. Desde o início dessas aulas já fiquei imaginando como aplicar com os meus alunos essa nova formatação de trabalho.

Como, em 2020, a procura pelo curso avançado aumentou muito, convidamos outros professores, pois optamos em não limitar a quantidade de vagas. E, com algumas reuniões de alinhamento, expliquei a nova forma de trabalho em grupo.

De acordo com Cohen e Lotan (2017), a primeira etapa ao introduzir o trabalho em grupo é a de preparar os alunos para uma situação de trabalho cooperativo, ou seja, conversei com eles a intenção da mudança na forma de trabalho, pois apesar de já estarem em grupo, as ações não eram muito compartilhadas, ou seja, quase sempre havia uma dominância de alguns alunos nas resoluções dos problemas.

Outro ponto combinado é que ao terem que tomar uma decisão em grupo, eles fariam uma discussão completa, chegando a um consenso, ou seja, não decidiriam nada através de uma votação. As estratégias teriam que ser compartilhadas por todos e, a análise crítica seria trabalhada em prol da equipe.

Assim, alguns comportamentos seriam analisados pelo professor durante as aulas como as ações colaborativas e não competitivas, a disposição de ajudar o próximo e a resiliência do grupo.

Outra novidade é que os alunos precisariam assumir papéis com atribuições como, por exemplo, o facilitador que gerencia a atividade, o relator que anota a resolução a ser entregue e/ou apresentada, o apresentador que precisa estar alinhado com o relator e ajudar na forma visual da apresentação, o verificador que analisa criticamente o resultado antes da apresentação, controlador de tempo que cuida do ritmo das fases do trabalho e o moderador que fica atento na motivação do grupo e concilia os conflitos. Esses papéis são bem definidos e há um rodízio entre eles, porém todos resolvem os problemas.

Em relação ao professor, o livro recomenda que não fique andando pelos grupos com ar de supervisão, ao contrário, deixe eles discutirem, planejarem, errarem, e resolverem seus próprios problemas, apenas observe-os de longe e veja em sua planilha a função de cada aluno, para reorientá-lo, se for o caso. Só tire dúvidas se todos do grupo já discutiram e não conseguiram uma estratégia para resolver o problema, e mesmo assim, não dê a resposta, e sim uma proposta de caminho.

Seja rigoroso no tempo de cada tarefa, treine-os a cumprir prazos e metas, e faça o momento de socialização das resoluções, deixando que façam inferências entre os grupos. Somente depois, o professor complementa com o que achar necessário como, por exemplo, a escrita formal ou o vocabulário matemático utilizado pelo apresentador.

Ao final de cada aula, cada grupo internamente, dá um feedback construtivo aos colegas, o que ocorreu bem e o que precisa ser melhorado, isso é um grande aprendizado intelectual e social para a turma. Trabalhamos dessa forma desde o início de fevereiro e, em conjunto, decidimos melhorar o nosso material e incorporar o uso da tecnologia com mais eficiência. Como as turmas do 6º e 7ºanos foram as que mais tiveram aumento nas inscrições, decidimos oferecer, também, um material externo, o livro “Círculos de Matemática da OBMEP”, volume 1, de Bruno Holanda e Emiliano A. Chagas, inspirado nos “CÍRCULOS MATEMÁTICOS, A EXPERIÊNCIA RUSSA”, de Fomin, Genkin e Itenberg, pois já está organizado por temas, tem exemplos resolvidos e propostos, além de apresentar ideias e estratégias.

Porém, quando estávamos nos organizando para a compra, veio a Pandemia do Covid-19 e tudo mudou, as aulas do curso avançado foram interrompidas no dia 13/03.

Durante os primeiros meses da Pandemia foram grandes as mudanças na comunidade escolar, aulas assíncronas e síncronas. Professores e alunos aprendendo com as novas plataformas e tecnologias, mesas digitais, câmeras, microfones e muitos aplicativos para aprender e usar.

No mês de junho, o curso avançado ou clube de matemática voltou, agora virtualmente e apenas para os alunos do ensino fundamental, e mesmo assim, com menos alunos do que no presencial. A direção do colégio optou por apenas eu ministrar esse curso e com uma carga horária pela metade.

Um novo desafio teve que ser enfrentado e após alguns ajustes, o melhor modelo foi o de apenas resolver exercícios de olimpíadas passadas, e para as turmas do 6ºano e 7ºano, também o uso do livro dos professores Bruno Holanda e Emiliano Augusto Chagas, já mencionado. Os exercícios eram publicados com antecedência, eventualmente, com alguma vídeo aula e, aproveitávamos o momento síncrono para discutirmos as estratégias encontradas por eles. Eles não foram divididos em equipes, apesar de ter esse recurso, pois eu não conseguiria estar, simultaneamente, observando todos. E, assim foi até o final de novembro.

Acredito que os resultados foram bons, ou seja, manter um curso ou clube de matemática virtual, precisa ter outras estratégias, porém é possível manter esse brilho pelo aprendizado e a vontade de resolver novos desafios. É uma pena que em 2020 não aconteceu a OBMEP, mas outras olimpíadas que foram possíveis, os alunos do curso avançado conquistaram muitas medalhas: 45 de 96 na Canguru, 4 de 4 na Olimpíada Brasileira de Informática, 3 de 3 na OPM e na Olimpíada Brasileira de Robótica.

No próximo capítulo, apresentarei um pouco do trabalho realizado, virtualmente, no curso avançado ou clube de matemática, com as turmas dos 6º anos e 7ºanos, utilizando o livro Círculos de Matemática da OBMEP, volume 1.

3.2 EXPERIÊNCIAS VIRTUAIS: CÍRCULOS DE MATEMÁTICA DA OBMEP

Neste capítulo mostraremos um exemplo de planejamento de aulas direcionadas a um clube de matemática, para alunos do 6ºano e 7ºano do ensino fundamental, que foi aplicado, virtualmente, durante os meses de junho a novembro de 2020, durante a Pandemia do Covid-19. Vale lembrar que este planejamento poderia ser usado, em partes, nas aulas regulares, pois está alinhado com a BNCC ensino fundamental.

O principal material utilizado, como mencionado anteriormente, foi o livro “Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra – Volume1 da coleção Círculos de Matemática da OBMEP, dos professores Emiliano Chagas e Bruno Holanda, lançado em 2018, que é uma compilação de problemas, majoritariamente da OBMEP e minoritariamente da OPM, OBM entre outras olimpíadas. Dividido em 20 capítulos, cada um deles apresentando uma pequena parte teórica, exemplos e exercícios. Esta obra contribui muito pela sua diversidade e organização já prontas para o trabalho, além de levar os tópicos iniciais da matemática aos alunos mais jovens, ajudando na formação de uma base mais estruturada, pois os exercícios, trabalhados de forma planejada, não ficam na superficialidade.

Foram criados 6 grupos de situação de aprendizagem e para cada um foi escolhido um problema do livro resolvidos nos clubes para se apresentado neste trabalho. Observe que as habilidades perpassam entre anos diferentes, possibilitando maneiras diferentes de abordagem e profundidade.

Para uma boa eficácia fica a sugestão de cada aluno ter o próprio livro, pois o ritmo de aprendizagem é diferente entre eles a ideia não é ter uma aula engessada. Outro ponto importante é a dinâmica da aula onde deve-se favorecer o protagonismo do aluno.

Situações de Aprendizagens

Quadro 2: Grupo I - Combinatória

Unidade Temática / Ano	**Habilidades**	**Objetos de Conhecimento**
Números 4ºano	(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.	Problemas de contagem.
Números 4ºano	(EF04MA06B) Resolver e elaborar situações-problema envolvendo diferentes significados da multiplicação: combinatória e proporcionalidade, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: combinatória e proporcionalidade.
Números 5ºano	(EF05MA09) Resolver e elaborar situações-problema simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.	Problemas de contagem, combinando elementos de uma coleção com todos os elementos de outra coleção.
Números 8ºano	(EF08MA03) Resolver e elaborar situações-problema de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo.	O princípio multiplicativo da contagem.

Fonte: Currículo Paulista, p338, 343 e 355

Problema escolhido:

Problema 8.8. (OBM 2004) De quantas maneiras diferentes podemos pintar (usando apenas uma cor) as casas de um tabuleiro 4x4, de modo que cada linha e cada coluna possua exatamente uma casa pintada?

Discussão:

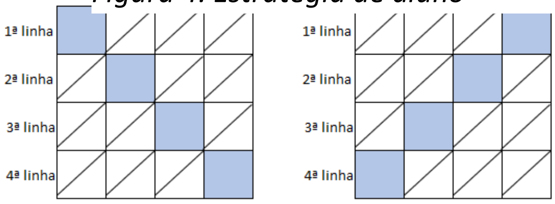
Este problema é indicado depois do professor dar exemplos mais simples e que possibilitem aos alunos uma investigação a procura de padrões.

Num primeiro momento o aluno precisa interpretar da forma correta o que se pede. Por exemplo, um dos alunos me perguntou se os quadradinhos da diagonal representariam uma linha, ou seja, a interpretação de coluna era vertical e a linha poderia ser perpendicular ou não, às colunas, o que chegaria a um resultado diferente. Nota-se, portanto, a necessidade de discutir com os alunos o bom senso de uma interpretação.

A primeira resposta surgiu em menos de um minuto. Foi dada por um aluno “A” que explicou da seguinte maneira:

- Eu pintei o primeiro quadradinho da primeira linha e apaguei os outros que estavam na mesma linha e coluna. Aí sobrou um quadrado 3 x 3 e fiquei repetindo o processo, ou seja, acabei pintando a diagonal do quadrado 4x4. Então, eu pensei que a outra diagonal também seria mais uma resposta. Logo, cheguei a duas respostas, figura 4.

Figura 4: Estratégia de aluno

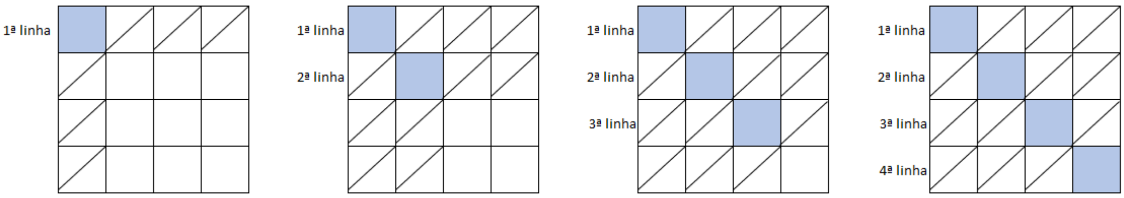


Fonte: do autor

Imediatamente um aluno "B" perguntou o que aconteceria se ele não tivesse começado com o primeiro quadradinho da primeira linha. Ele ficou pensando e percebeu que precisaria melhorar raciocínio.

Outro aluno "C" aproveitou a discussão e a ideia inicial da primeira tentativa e disse que na primeira linha poderia ser escolhido qualquer um dos quatro quadradinhos, ou seja, quatro possibilidades. E, ao eliminar os outros quadradinhos na mesma linha e coluna do quadradinho escolhido, teria na 2ªlinha três possibilidades de escolha, depois na 3ªlinha, duas possibilidades e na 4ªlinha, apenas uma possibilidade.

Figura 5: Estratégia do aluno C



Fonte: do autor

Como eles já tinham trabalhado com o princípio multiplicativo, o resultado 4x3x2x1=24 possibilidades seria a resposta.

Cada estratégia diferente deve ser apresentada ao grupo para discutir a sua validação, ou não. Uma proposta interessante é mostrar o mesmo problema com malhas menores 1x1, 2x2 e 3x3 e generalizar para malhas n x n.

Considerações gerais:

Nesse tipo de problema é preciso fazer as combinações possíveis entre todos os termos. Esse é o Princípio Fundamental da Contagem, objeto de conhecimento trabalhado desde o ensino fundamental. Alguns alunos tentam resolver esse tipo de problema apoiados em desenhos e esquemas, relacionando cada elemento do primeiro conjunto com todos os elementos do segundo conjunto, juntando todas as ligações possíveis, contribuindo para a construção do raciocínio multiplicativo e cálculo mais estruturado. Às vezes podem esquecer de fazer alguma correspondência implicando em resultados incorretos.

O raciocínio combinatório envolve um modo de pensar muito presente na análise de situações em que, dados determinados conjuntos, devem-se agrupar os elementos de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou de ordenação) e determinar (direta ou indiretamente) o total de agrupamentos possíveis.

Na escola, a resolução de problemas combinatórios pode ser realizada por meio de desenhos, de listagens, de arvores de possibilidades e com uso de fórmulas numa etapa mais avançada da escolaridade, no Ensino Médio. Em particular, a árvore de possibilidades pode proporcionar a compreensão de diferentes situações combinatórias, pois permite observar sistematicamente quais as possíveis combinações e selecionar os casos validos para cada situação encontrada.

O princípio fundamental da contagem pode ser enunciado da seguinte forma: se há um acontecimento formado por diversas etapas em que conhecemos o número de possibilidades de cada uma dessas etapas se realizarem, multiplicando todos esses números teremos a quantidade de possibilidades de o acontecimento completo se realizar.

Os problemas de “produto cartesiano” são trabalhados desde o Ciclo de Alfabetização, como problemas de combinatória e fazem parte do Campo Multiplicativo.

O levantamento de casos possíveis de situações combinatórias auxilia na análise de probabilidades, pois é necessário pensar em probabilidades quando se julga o que seja provável, improvável e impossível. A probabilidade pode auxiliar a diferenciar o que acontece na realidade e o que é possível acontecer. Essas constatações levam a percepção de que a combinatória é estreitamente ligada a probabilidade.

Quadro 3: Grupo II: Proporção

Unidade Temática / Ano	**Habilidades**	**Objetos de Conhecimento**
Números 6ºano	(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA09) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. (EF06MA10) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.	Frações: significados (parte/ todo, quociente), equivalência, comparação; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.
Números 7ºano	(EF07MA05) Ler, interpretar e resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, porcentagem, razão entre as partes de um todo e operador.

Fonte: Currículo Paulista, p347, 351

Problema escolhido:

Problema 12.2. (EUA 1ªfase) A taxa de meninos para meninas na sala de aula do Sr. Brown é de 2:3. Se existem 30 estudantes na sala, quantas meninas a mais do que meninos existem na sala?

Discussão:

Neste exercício alguns alunos perguntaram o significado da palavra “taxa” e o significado de “2:3”.

O aluno precisa interpretar que 2:3 é a razão $\frac{2}{3}$, ou seja, uma relação entre a quantidade de meninos e meninas, tal que $\frac{meninos}{meninas} = \frac{2}{3}$. Portanto, é preciso pensar em dois números que a soma dê 30 e quando simplificados na forma de razão, dê 2:3.

Uma das resoluções apresentadas, segundo o aluno “A”, foi dividir o número 30 e duas partes diferentes, por exemplo, 14 e 16 ou 12 e 18. O próximo passo foi escrever a razão entre os valores e simplificar. Vejamos:

$\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$ não serve $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$serve

Daí a diferença entre 18 e 12 é de 6 menina a mais.

O aluno poderá até chegar aos valores corretos fazendo tentativas e aproximações, porém é interessante que o professor utilize a álgebra.

Outro aluno “B” disse que começou com $\frac{2}{3}$ e foi encontrando frações equivalentes cuja soma entre o numerador e o denominador fosse 30. Assim, também chegou na resposta bem rápido.

Já o aluno “C” apresentou e resolveu o sistema:

$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{2}{3} \\ x + y = 30 \end{cases}$, concluindo x = 18 e y = 12, portanto, 18 – 12 = 6.

E, uma ideia bacana que um quarto aluno apresentou foi de que como 2 + 3 $\neq$ 30, o número de meninos e meninas teriam que ser múltiplos do máximo divisor entre eles, ou seja, m.d.c.(meninos, meninas) = k, então 2k + 3k = 30, ou seja, k = 6. Logo, 2k = 12 e 3k = 18, dando a diferença 6.

Considerações gerais:

Há algumas ideias básicas no processo de compreensão dos números racionais como, parte-todo, quociente ou divisão indicada, medida, razão e operador.

A interpretação como parte-todo se relaciona com a divisão de uma quantidade contínua ou um conjunto discreto de objetos em partes de “tamanhos” ou “proporções” iguais, ou seja, esta situação (parte/todo) se apresenta quando um todo (continuo ou discreto) se divide em partes iguais. Nesse caso, o número racional indica a relação que existe entre certo número de partes e o número total de partes em que o todo (unidade) foi dividido igualmente, como no exemplo: usei dois quintos de um tablete de chocolate para fazer um doce, ou seja 2/5.

A ideia de quociente se apresenta quando um ou alguns objetos precisam ser divididos igualmente num certo número de grupos. E a ideia de partilha, de fazer agrupamentos, de divisão indicada. Isto quer dizer que, conhecido o número de grupos a serem formados, o quociente representa o “tamanho” de cada grupo. O Número Racional, nesse caso, corresponde ao resultado da divisão de 1 por 5, ou seja, cada criança recebe 1/5.

Algumas vezes o Número Racional é utilizado para estabelecer uma relação entre duas quantidades a e b que no que diz respeito a comparação de situações.

Neste caso estamos diante de uma situação que envolve o conceito de razão e não existe, necessariamente, uma unidade (um todo).

Um outro uso de números racionais se refere a noção de medida quando a indagação é feita sobre número que representa o resultado de uma comparação. Quantas vezes cabe? Esse número chama-se medida da grandeza em relação a essa unidade. Esta situação poderia ser exemplificada tomando-se dois segmentos, um deles como unidade de medida, assim é possível saber quanto mede o outro, ou seja, quantas vezes o segmento menor cabe dentro do maior, como no exemplo: Mariana comprou 8 metros de fita azuis e vai dividi-las igualmente em partes de 0,5m. Quantos pedaços ela obterá?

Há casos em que não há um número inteiro capaz de identificar esta medida; recaímos, então, na necessidade de expressar esta relação por intermédio do Número Racional.

Quadro 4: Grupo III - Álgebra

Unidade Temática / Ano	**Habilidades**	**Objetos de Conhecimento**
Álgebra 3ºano	(EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.	Relação de igualdade
Álgebra 4ºano	(EF04MA15) Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.	Propriedades da igualdade.
Álgebra 5ºano	(EF05MA11) Resolver e elaborar situações-problema cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.	Propriedades da igualdade e noção de equivalência.
Álgebra 5ºano	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. EF05MA11) Resolver e elaborar situações-problema cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.	Propriedades da igualdade e noção de equivalência.
Álgebra 6ºano	(EF06MA15) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Álgebra 7ºano	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.	Linguagem algébrica: variável e incógnita.

Fonte: Currículo Paulista, p334, 339, 343, 348 e 352

Problema escolhido:

Problema 14.2. (OBM 1ªfase) João disse para Maria: “Se eu lhe der um quarto do que tenho, você ficará com metade do que vai me sobrar”. Maria acrescentou: “E eu lhe daria 5 reais, se lhe desse a metade do que tenho”. Juntos, os dois possuem quanto?

Discussão:

O primeiro aluno a comentar disse que pela frase de Maria, ela só poderia ter 10 e que a quantidade de João teria que ser um número múltiplo de 4 para poder dar uma quantidade inteira para Maria, e o restante, após ter dado um quarto do que tinha, teria que ser um número par, pois Maria teria a metade de valor. Então, ele começou com as primeiras hipóteses, já considerando que Maria teria que ter mais que 10:

- Se João tivesse 12, então daria 3 para Maria e sobraria 9. Não deu certo pois 9 é ímpar e menor que 10;
- Se João tivesse 16, então daria 4 para Maria e sobraria 12, mas 10 de Maria com 4 de João dá 14, e esse valor não é metade de 12. Aliás, está muito longe, vou tentar um valor bem mais alto;
- Se João tivesse 40, então daria 10 para Maria e sobraria 30, mas 10 de Maria com 10 de João dá 20, que não é metade de 30;
- Se João tivesse 80, então daria 20 para Maria e sobraria 60, e 10 de Maria com 20 de João dá 30, que é metade de 60. Deu certo!

Então, João tem 80 e Maria 10. Juntos eles têm 90 reais.

Elogiei o pensamento rápido e lógico do aluno, pois era um aluno do 6ºano e eles ainda não manipulavam equações algébricas. Já para os alunos do 7ºano, solicitei uma resolução algébrica, passo a passo. Juntos eles foram construindo:

- Chamando de j o valor de João, então Maria vai ficar com $10+\frac{j}{4}$;
- E, João vai ficar com $j-\frac{j}{4}=\frac{3j}{4}$;
- Então, temos $10+\frac{j}{4}=\frac{\frac{3j}{4}}{2}\rightarrow 10+\frac{j}{4}=\frac{3j}{8}\times \underset{\rightarrow}{8}80+2j=3jj=80.$
- Logo, juntos eles têm 90 reais.

Considerações gerais:

A Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico, essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, e necessário que os estudantes identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos.

A generalização é uma das principais finalidades do pensamento algébrico, permitindo a formulação e validação de hipóteses e conjecturas. Percebe-se, então, a importância no processo da construção do pensamento algébrico desde o ensino fundamental anos iniciais.

> No Ensino Fundamental – Anos Finais, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BNCC, p.273)

Quadro 5: Grupo IV - Paridade

Unidade Temática / Ano	**Habilidades**	**Objetos de Conhecimento**
Números 6ºano	(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. (EF06MA06) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor, reconhecendo os números primos, múltiplos e divisores.	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural. Múltiplos e divisores de um número natural. Números primos e compostos.

Números 6ºano	(EF06MA04C) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural. Múltiplos e divisores de um número natural. Números primos e compostos.
Números 7ºano	(EF07MA01) Resolver e elaborar situações- -problema com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.	Múltiplos e divisores de um número natural.

Fonte: Currículo Paulista, p346, 347 e 651.

Problema escolhido:

Problema 3.3. (Leningrado,1990) Paula comprou um caderno com 96 folhas, com páginas enumeradas de 1 a 192. Nícolas arrancou 25 folhas aleatórias e somou todos os 50 números escritos nessas folhas. É possível que essa soma seja 1990?

Discussão:

A primeira impressão que alguns alunos tiveram foi que a resposta seria sim, pois estava condicionado as 25 folhas aleatórias que foram tiradas. A partir daí tentaram descobrir as numerações das páginas retiradas. Foi quando perceberam que, independentemente da folha, sempre haverá um número ímpar de um lado e do outro, um número par. E, a soma de um número ímpar com um número par, dá um número ímpar. Depois analisaram que um número ímpar mais um número ímpar, dá um número par, e assim por diante. Logo, o que estava em questão não era chegar no valor 1990 e, sim, sobre a paridade do resultado. Portanto, concluíram que, cada folha soma ímpar x 25 = ímpar. E, como 1990 é par, a resposta seria não.

Considerações gerais:

É interessante quando introduzimos o conjunto dos números naturais, adentrarmos em problemas envolvendo paridade. Mesmo que a afirmação “Todo número natural é par ou ímpar” pareça óbvio aos olhares dos alunos, é também uma ferramenta de grande utilidade na resolução de muitos problemas envolvendo números naturais. Observe as propriedades:

a) a soma de dois números pares é par.

b) a soma de dois números ímpares é par.

c) a soma de um número par com um número ímpar é ímpar.

Dizemos que dois números inteiros têm mesma *paridade*, quando **são ambos pares** ou **ambos ímpares**. Assim, podemos dizer que a soma de dois números inteiros é par se, e somente se, eles têm mesma paridade.

E, podemos explorar em diferentes níveis de dificuldades, inclusive com questões olímpicas como no exemplo trabalhado.

Quadro 6: Grupo V - Sequências

Unidade Temática / Ano	**Habilidades**	**Objetos de Conhecimento**
Álgebra 7ºano	(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.	Linguagem algébrica: variável e incógnita.
Álgebra 7ºano	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.
Álgebra 8ºano	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.	Sequências recursivas e não recursivas.

Fonte: Currículo Paulista, p352 e 356

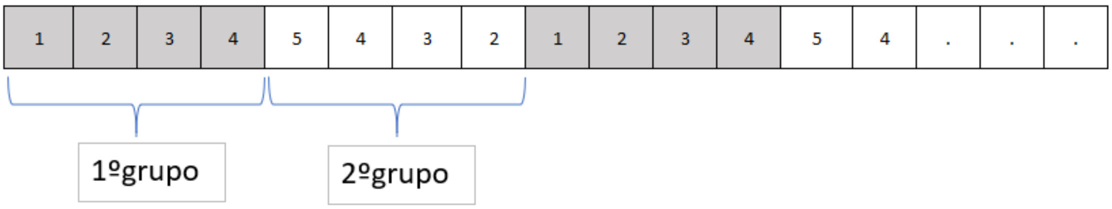
Problema escolhido:

Problema 15.2 (OBM 1ªfase) Considere a sequência oscilante: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4 ....

Qual é o 2003º termo dessa sequência?

Discussão:

O primeiro aluno "A" a se manifestar escreveu:



$$\begin{array}{r|l} 2003 & \underline{\;4\;} \\ 3 & 500 \end{array}$$

“Eu dividi em dois grupos com quatro números cada. Então, eu dividi 2003 por 4, resultando em 500 e sobrando 3. Como 500 é par, eu olhei para o último número do 2ºgrupo. Depois eu andei mais três números porque sobrou três. Então, o 2003º da sequência é 3.”

Perguntei o porquê de dividir em dois grupos e a resposta foi que no primeiro grupo os números estão aumentando e no outro, diminuindo e assim sucessivamente. Um outro aluno “B”, olhando a resolução, perguntou se não poderia considerar um grupo com oito números. O aluno A ficou olhando e disse “É verdade...”

Uma boa maneira de resolver problemas desse tipo é trabalhar com o resto da divisão entre números inteiros e a sua relação com os números da sequência. Basta um exemplo para que o aluno tente utilizar este método em todos os outros problemas parecidos. A dificuldade inicial é encontrar o período da sequência.

Considerações gerais:

No ensino fundamental o professor deve trabalhar “sequências” através da descoberta de padrões visuais geométricos, depois com algarismos e propriedades, leis de formação recursivas e não recursivas.

No ensino médio pode trabalhar com funções como logarítmicas, trigonométricas ou exponenciais. Também pode ser utilizado no estudo aprofundado de progressões aritméticas e geométricas, em relação com problemas de Matemática Financeira.

> Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos (...) Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BNCC, p.272)

Quadro 7: Grupo VI - Sistema Decimal

Unidade Temática / Ano	**Habilidades**	**Objetos de Conhecimento**
Números		Propriedades das operações para o

4ºano	(EF04MA04A) Calcular o resultado de adições e subtrações, bem como entre multiplicações e divisões de números naturais, para ampliar e desenvolver as estratégias de cálculo.	desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais.
Números 4ºano	(EF04MA04B) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar e desenvolver as estratégias de cálculo.	Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais na resolução de situações-problema.
Números 5ºano	(EF05MA01) Ler, escrever e ordenar úmeros naturais no mínimo até a ordem das centenas de milhar com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal.	Sistema de numeração decimal: leitura, escrita e ordenação de números naturais.
Números 6ºano	(EF06MA01) Identificar, comparar, ordenar, números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, dizendo quais são, fazendo uso da reta numérica, para localizar os números. (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal como fruto de um processo histórico, percebendo semelhanças e diferenças com outros sistemas de numeração, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.	Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal.

Fonte: Currículo Paulista, p337 e 342

Problema escolhido:

Problema 13.1. (OBMEP 1ªfase) Cada um dos símbolos, quadrado e triângulo, representa um único algarismo. Se a multiplicação indicada a seguir está correta, então o valor de quadrado vezes triângulo é:

$$\begin{array}{rcc} \square & 2 & \square \\ \times & & \square \\ \hline \triangle & 6 & \triangle \end{array}$$

Discussão:

Este problema se torna fácil quando o aluno entende bem as características do sistema de numeração decimal. O valor absoluto e relativo de cada algarismo de acordo com a sua posição.

Um aluno "A" disse:

- Como quadradinho x quadradinho dá triângulo $\begin{array}{rcc} \square & 2 & \square \\ \times & & \square \\ \hline \triangle & 6 & \triangle \end{array}$ em ,

concluí que

o quadradinho só poderia ser 1, 2 ou 3, pois a partir do número 4, o triângulo teria dois algarismos, o que não poderia. Depois descartei o número 1 e 2 porque não se encaixavam na conta. Então, concluí que o quadradinho vale 3 e o triângulo, 9. Consequentemente, a resposta é 3 x 9 = 27.

Outros alunos disseram estratégias semelhantes.

Considerações gerais:

Este problema ajuda a entender melhor a escrita e ordenação de números naturais. Observe, por exemplo, que o número 323 pode ser escrito como 300 + 20 + 3 ou $3.10^2 + 2.10^1 + 3.10^0$. E, esta forma é fundamental para demonstrar os critérios de divisibilidade e a escrita de outras bases numéricas.

O professor necessita garantir a sistematização das características do Sistema de Numeração Decimal, bem como promover a compreensão da lógica da construção dos números naturais, dos seus diferentes sentidos e significados utilizando recursos de ensino facilitadores, como: quadro numérico, calendário, quadro de ordens e classes ou quadro de valor posicional, recursos tecnológicos, dentre outros.

Uso do quadro numérico em um trabalho que permite a exploração de regularidades possibilita que os estudantes identifiquem os próximos números da sequência bem como a percepção das regularidades exploradas quando se amplia a sequência numérica.

Além de trabalhar a decomposição de um número em suas ordens e classes ou de acordo com seu valor posicional, vale destacar a importância da decomposição, por meio de fichas sobrepostas, facilitando a visualização da escrita numérica.

A importância do cálculo mental se justifica na aprendizagem Matemática ao favorecer o desenvolvimento da criatividade, de estratégias pessoais para tomar decisões e resolver problemas numéricos, ao possibilitar aperfeiçoamento de capacidades mentais, como a memória, analise e generalização, e ao permitir a descoberta de princípios matemáticos, como a decomposição e a equivalência, propiciando o desenvolvimento de conceitos e habilidades necessárias para aprofundar seus saberes matemáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A BNCC é um documento que define os conhecimentos, competências e habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica. Assim, ela consolida os direitos de aprendizagem dando um norte para os currículos locais, assim como os projetos político pedagógicos e planos de aula. Ela visa a formação integral dos estudantes e a diminuição das desigualdades educacionais em território nacional, com foco nas competências e habilidades.

O PISA ligado a OCDE visa avaliar os sistemas educacionais de seus países membros, na qual o Brasil faz parte e revela um baixo nível de proficiência no letramento matemático. Existe uma correlação entre a BNCC e o PISA quando analisamos as suas matrizes em matemática e no que dizem sobre o letramento matemático.

Os Clubes de Matemática são propostas de trabalho que visam melhorar o seu aprendizado, mostrando experiências muito positivas em outros países. No Brasil, não temos uma divulgação em grande escala dessas atividades nas escolas do ensino básico. Durante a pesquisa encontramos artigos e dissertações, numa quantidade discreta, sobre os clubes. Apenas os clubes de matemática da OBMEP possuem uma estrutura organizada e amplamente divulgada, contando com mais de 350 em todo território nacional.

A tese desse trabalho foi mostrar que podemos criar um clube de matemática presencial ou virtual síncrono utilizando metodologias ativas dentro dos trabalhos em grupo, para a resolução de problemas de olimpíadas, de modo a desenvolver competências e habilidades segundo a BNCC ensino fundamental.

Para isso, foram apresentadas duas experiências, uma totalmente presencial e outra com inovações, iniciando no presencial e depois partindo para o virtual por conta da pandemia covid-19. Em ambas, pelos resultados das olimpíadas oficiais, indicam um bom desenvolvimento nas habilidades específicas da matemática, porém, é preciso uma reflexão mais profunda e análise com mais dados estatísticos.

A utilização do livro de Holanda e Chagas (2018) mostrou-se com um facilitador no desenvolvimento do pensamento matemático na resolução de problemas, porque os exercícios escolhidos por temas e na ordem de como foram colocados, ajudam na construção de uma base teórica que vão tecendo novas ideias para resolver os mais complexos e desafiadores. Nas mãos dos alunos esse livro se torna uma espécie de passatempo intelectual com exercícios contagiantes que viciam a sempre querer mais. Pensando nas desigualdades de ensino que temos no Brasil, ele possibilita uma maior equidade nas competições olímpicas de matemática, para alunos do 6ºano e 7°ano.

Esta pesquisa continuará nos próximos anos, e o Curso Avançado de Matemática se chamará Clube de Matemática, um título menos pretensioso, porém potente na sua essência, e passa a ideia de diversão e crescimento, que é o seu verdadeiro sentido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROS, Luciana Alvares Paes de; MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **Desenvolvimento do conceito de avaliação na formação inicial de professores em atividade colaborativa**. 2007.Universidade de São Paulo, São Paulo,2007.Disponível em: < http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-09102007-091849/ >.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. C**haracterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning**. Journal for Research in Mathematics Education, v.36, n.5, p.412-443, 2005.

BNCC. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Acesso em 12 de maio de 2020.

BOALER, Jo. **Mentalidades Matemáticas, estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador**. 1. ed. Porto Alegre: Ed. Penso, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**, v.3.Brasília: MEC/SEF, 1997.

COHEN, Elizabeth G.; LOTAN, Rachel A. **Planejando o Trabalho em Grupo, estratégias para salas de aula heterogêneas**. 3. ed. Penso, 2017.

Currículo Paulista. Disponível em https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/ Acesso em 12 de maio de 2020.

FOMIN, Dimitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. **Círculos Matemáticos, a experiência Russa.**

HOLANDA, Bruno; CHAGAS, Emiliano A. **Círculos de Matemática da OBMEP - Volume 1: Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ed. IMPA, 2018.

KENNEDY, E. e SMOLINSKY, L. (2016). **Círculos matemáticos: uma ferramenta para promover o envolvimento entre os homens de minorias no ensino médio**. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* , 12 (4), pp. 717-732.

KLEIMAN, Ângela B. **Leitura e interdisciplinaridade: tecendo redes nos projetos da escola**. Campinas, SP: Ed. Mercado de Letras, 1999.

KLUSENER, Renita. **Ler e escrever: compromisso de todas as áreas**. Porto Alegre: Ed. da Universidade/ UFRGS, 2000. P. 175-189.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e Língua Materna, análise de uma**

impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Ed. Cortez, 2011.

NASCIMENTO, Ilma Vieira; MORAES, Lélia; BONFIM(org), Maria Núbia.Currículo **Escolar, dimensões pedagógicas e políticas**. São Luís: Ed. EDUFMA, 2010.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALEVATTO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner; JUSTULIN, Andresa Maria (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí, Paco Editorial: 2014.

POLYA, Georg. **A arte de resolver problemas**. Interciência, 1995.

SACRISTÁN, José Gimeno. **O currículo: uma reflexão sobre a prática**. Porto Alegre:Artmed,2000.

SAEB,histórico. Disponível em https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/historico Acesso em 25 de junho de 2020

VASCONCELLOS, Celso. **A avaliação da Aprendizagem: Práticas de mudança, por uma práxis transformadora**. 13. ed. São Paulo: Ed. Libertad, 2013.

VASCONCELLOS, Celso. **Avaliação: concepção dialética libertadora do processo de avaliação escolar**. 15. ed. São Paulo: Libertad, 2005.

APÊNDICE: BREVE TRAJETÓRIA PROFISSIONAL

O primeiro contato que tive com uma olimpíada de matemática foi na década de 80, com a Olimpíada Paulista de Matemática[9] quando cursava o antigo 1ºgrau, numa escola municipal de São Paulo. Eu lembro da professora Marta dirigindo o seu Fusca amarelo, me levando para essas provas. Naquela época não havia preparação específica para tal competição, pelo menos na escola em que estudei, e durante o ensino médio, numa escola técnica estadual, nem sequer ouvi falar de olimpíadas.

O interesse por essas competições tomou um rumo mais claro depois de formado em Matemática, pela Universidade de São Paulo, quando atuava num projeto de reforço escolar numa escola estadual, com o objetivo de preparar alunos do ensino fundamental a ingressarem em escolas técnicas públicas como as ETECs e o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. Durante três anos do projeto incentivei os estudantes a participarem também da OPM e, alguns medalhistas surgiram, assim como ingressantes nas escolas técnicas. Nunca irei esquecer, durante a cerimônia de premiação da OPM, lá na Universidade Mackenzie, quando anunciaram o nome de meu ex-aluno Jurandyr Vaz, de escola pública, para receber a medalha de ouro, fui com ele comemorando e muito emocionado.

Desde então, a vontade de incluir novos alunos nesse mundo das olimpíadas fez com que novos projetos de “preparação olímpica” começassem a ser desenvolvidos, de forma bastante simples, apenas com a resolução de questões de olimpíadas retiradas da Eureka[10], que é uma revista da Olimpíada Brasileira de Matemática e da Revista do Professor de Matemática [11], associada a Sociedade Brasileira de Matemática.

Em 2010, fiz a inscrição na OPM de dois colégios particulares que atuava. Dois alunos meus que nunca haviam participado de olimpíadas, foram classificados para a fase final, um de cada escola. Então, num sábado de novembro, bem cedo, fui até a casa de cada um e os levei para a Escola Politécnica na USP, local da grande final.

Como esta olimpíada é estadual, muitos estudantes vêm de longe e para evitar mais gastos com as viagens, a cerimônia de premiação é realizada no mesmo dia. Então, muitos que acompanham os estudantes olímpicos, como professores, pais e

9 http://www.opm.mat.br/ - na época chamava-se apenas Olimpíada de Matemática
10 https://www.obm.org.br/revista-eureka/
11 https://rpm.org.br/

motoristas das vans precisam ficar esperando e acabam se conhecendo, alguns de longas datas. Muitas estórias são compartilhadas. É muito bonito a dedicação de tantos professores.

Depois da prova fomos almoçar juntos e ficamos esperando nas proximidades do local da cerimônia, Faculdade de Direito da USP, no Largo São Francisco. Mais um momento marcante, pois Rodrigo Sanches Ângelo (9ºano) e Gustavo Hideki Okane (7ºano) foram premiados com a medalha de ouro. Se você, leitor, não conhece a OPM, não tem ideia de quanto é difícil ganhar uma medalha nessa olimpíada, e os dois foram ouro. Dá para imaginar a minha alegria? Este episódio está registrado no livro "Pais Olímpicos" (2017, p. 67) de Lilian Ishida Arai, pois em 2012, Rodrigo, como ex-aluno, foi medalha de ouro na olimpíada internacional de matemática.

Em 2014 entrei no programa OBMEP NA ESCOLA[12], projeto que visa estimular atividades extraclasse com o uso dos materiais da Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas e privadas (OBMEP), tais como apostilas com temas específicos, provas e banco de questões. Essa experiência, mesmo que rápida, contribuiu muito na preparação dos alunos em olimpíadas. E, como este material está disponibilizado no site da OBMEP[13], acredito que seja fonte de consulta para muitos estudantes e professores.

Em 2019 mais uma boa notícia, desta vez como "Professor premiado" pela OBMEP, pois dos meus 24 alunos que participaram na final dessa olimpíada, 21 foram premiados. E, um deles, Henry Asakura Huang, conseguiu ouro na OBMEP, OPM e Canguru de Matemática Brasil, prata na Olimpíada Rioplatense, na Argentina, além da menção honrosa na OBM.

Em 2020, continuando com o Clube de Matemática, as premiações em diversas olimpíadas continuaram, com destaque para minha filha Marcela, de 12 anos, que conseguiu medalhas de prata na Olimpíada Paulista de Matemática, na Canguru de Matemática Brasil e na Olimpíada Brasileira de Robótica, e ouro na Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica.

---

12 http://www.obmep.org.br/na-escola.htm
13 http://www.obmep.org.br/