



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT**



FÓRMULAS DO TIPO HERON

POR

THIAGO ANDRADE FERNANDES

SOB A ORIENTAÇÃO DO

PROF. DR. EDUARDO GONÇALVES DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT – CCEN – UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

FEVEREIRO / 2021
JOÃO PESSOA – PB

FÓRMULAS DO TIPO HERON

POR

THIAGO ANDRADE FERNANDES

SOB A ORIENTAÇÃO DO

PROF. DR. EDUARDO GONÇALVES DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT – CCEN – UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

FEVEREIRO / 2021

JOÃO PESSOA – PB

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F363f Fernandes, Thiago Andrade.
Fórmulas do tipo Heron / Thiago Andrade Fernandes. -
João Pessoa, 2021.
78 f. : il.

Orientação: Eduardo Gonçalves dos Santos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN/PROFMAT.

1. Matemática. 2. Fórmula de Heron. 3. Heron de
Alexandria. 4. História da matemática. I. Santos,
Eduardo Gonçalves dos. II. Título.

UFPB/BC

CDU 51(043)

Fórmulas do tipo Heron

POR

THIAGO ANDRADE FERNANDES

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional – PROFMAT – CCEN – UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: História da Matemática.

Aprovada por:

Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos – UFPB (Orientador)



Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera – UFPB (Membro Interno)



Prof. Dr. Sheldon Miriel Gil Dantas - Universitat Jaume I (Membro Externo)

FEVEREIRO / 2021

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus por todas as vitórias que me concedeu ao longo deste curso.

A minha esposa Priscila pelo apoio e compreensão que me fortaleceu nos momentos difíceis, ao meu filho Iago pelos momentos de descontração e aos familiares pelo apoio na vida acadêmica.

Aos professores do PROFMAT por compartilharem comigo conhecimentos valiosos.

Aos meus colegas de curso pelo companheirismo e por todas as horas de estudo compartilhadas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos, pelas sugestões que me ajudaram a concretizar este trabalho.

RESUMO

Este trabalho se propõe a catalogar demonstrações para a fórmula de Heron e discutir sobre as fórmulas tipo Heron. O estudo é pertinente porque, na literatura, não encontramos trabalhos que aglutinem variadas demonstrações acerca da famosa fórmula de Heron, em quantidade relevante e a partir de diversos ramos da matemática, tampouco que tragam um mapeamento ou apontem uma definição para a expressão fórmulas tipo Heron. Para tanto, iniciamos com uma pesquisa biográfica sobre Heron e suas trabalhos, com ênfase na obra denominada Métrica, bem como destacamos o seu lado inventor e elencamos seus estudos voltados para a mecânica. Na sequência, abordamos uma série de demonstrações para a intitulada “fórmula de Heron”, que se presta a calcular a área de um triângulo a partir do conhecimento de seus três lados. Por fim, elencamos alguns exemplos para fórmulas tipo Heron, com suas respectivas demonstrações. A partir da visualização dessa compilação, desenvolvemos uma tentativa de definição para a expressão fórmulas tipo Heron.

Palavras-chave: Heron; fórmula de Heron, fórmula do tipo Heron.

ABSTRACT

This work aims to catalogue demonstrations for Heron formula and discusses Heron-type formulas. This study is pertinent because, in literature, we do not find works that agglutinate several demonstrations of the famous Heron formula, in relevant quantity and from different branches of mathematics, nor that bring a mapping or point out a definition for the expression Heron-type formulas. Therefore, we started with a biographical research on Heron and his works, with emphasis on the work called Metric, as well as highlighting his inventor side and listing his studies focused on mechanics. In the sequence, we deal with a series of demonstrations for the well-known “Heron's formula”, which calculates the area of a triangle based on the measure of its three sides. In the end, we list some examples for Heron-type formulas, with their respective demonstrations. Based on the visualization of this compilation, we developed an attempt to define the Heron-type formula expression.

Keywords: Heron; Heron formula, Heron-type formula.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO AO TEMA DO TRABALHO	13
HERON E SUA OBRA.....	16
2.1. HERON: APONTAMENTOS BIOGRÁFICOS	16
2.2. ALGUMAS OBRAS	18
ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DA FÓRMULA DE HERON	23
3.1. DEMONSTRAÇÃO DE HERON POR HERON	23
3.2. UMA DEMONSTRAÇÃO PELO TEOREMA DE PITÁGORAS.....	27
3.3. DEMONSTRAÇÃO TRIGONOMÉTRICA POR DOBBS.....	29
3.4. DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICO-TRIGONOMÉTRICA POR DUNHAM..	31
3.5. DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA POR ISAAC NEWTON.....	34
3.6. A DEMONSTRAÇÃO MEDIEVAL DE AL-SHANNĪ	37
3.7. A DEMONSTRAÇÃO COM NÚMEROS COMPLEXOS POR STROETHOFF 41	
3.8. PROVA GEOMÉTRICA SEM PALAVRAS DE MAEKAWA.....	43
3.9. PROVA GEOMÉTRICA SEM PALAVRAS DE NELSEN.....	46
FÓRMULAS DO TIPO HERON	51
4.1. FÓRMULA DO TIPO HERON	51
4.2. ÁREA DE UM TRIÂNGULO CONHECIDAS AS MEDIANAS.....	52
4.2.1. Uma prova algébrica.....	54
4.2.2. Uma prova geométrica.....	56
4.3. ÁREA DE UM TRIÂNGULO CONHECIDAS AS ALTURAS	59
4.4. ÁREA DE UM TRIÂNGULO CONHECIDOS OS ÂNGULOS	61
4.5. UMA FAMÍLIA DE FÓRMULAS TIPO HERON ENVOLVENDO CEVIANAS	63
4.4.1. Uma prova algébrica de fórmulas tipo Heron por Lord	64
4.4.2. Uma prova geométrica de fórmulas tipo Heron por Lord	69

4.4.3. Uma prova via teorema de Routh de fórmulas tipo Heron por Lord.....	72
CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
REFERÊNCIAS.....	78

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Heron de Alexandria	17
Figura 2 - Eolípila	22
Figura 3 - Demonstração de Heron	24
Figura 4 - Demonstração com Teorema de Pitágoras.....	27
Figura 5 – Demonstração trigonométrica por Dobbs.....	29
Figura 6 – Demonstração trigonométrica por Dobbs.....	31
Figura 7 – Demonstração por Issac Newton	34
Figura 8 – Demonstração medieval por al-Shannī	37
Figura 9 – Demonstração do lema de al-Shannī.....	38
Figura 10 – Adequação a proposta de al-Shannī.....	40
Figura 11 – Demonstração Com Números Complexos	41
Figura 12 – Demonstração trigonométrica por Dobbs.....	44
Figura 13 – Área de um triângulo em função do raio do círculo exinscrito	45
Figura 14 – Ilustração da área de um triângulo em função do raio inscrito.....	47
Figura 15 – Lema das três tangentes complementares	48
Figura 16 – Demonstração por Nelsen	49
Figura 17 – Medianas em um triângulo qualquer	53
Figura 18 – Demonstração geométrica com as medianas.....	57
Figura 19 – Demonstração por Nelsen	59
Figura 20 – Ângulos internos de um triângulo	61
Figura 21 – Demonstração envolvendo cevianas.....	63
Figura 22 – Demonstração Geométrica envolvendo cevianas	69

ÍNDICE DE TABELAS E QUADROS

Quadro 1 – Estudos geométricos de Heron.....	19
Quadro 2 – Estudos mecânicos de Heron.....	21
Tabela 1 – Exemplos de fórmulas tipo Heron.....	52

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A	Pontos serão representados por letras maiúsculas.
s	Semiperímetro do triângulo.
ΔABC	Triângulo de vértices A, B e C .
(ABC)	Área de um triângulo de vértices A, B e C .
AB	Comprimento do segmento que tem extremos em A e B .
\overleftrightarrow{AB}	Representação de reta que contém os pontos A e B .
\equiv	Símbolo de congruência.
$\angle ABC$	Ângulo que possui vértice no ponto B .
\widehat{AB}	Arco de uma circunferência de extremos A e B .
$b \cdot h$	Produto entre a medida b e a medida h .
$Tg(\alpha)$	Tangente do ângulo α .
$Cotg(\alpha)$	Cotangente do ângulo α .
$ w $	Módulo do número complexo w .
$Im(w)$	Parte imaginária do número complexo w .
\bar{w}	Conjugado do número complexo w .
I	Centro da circunferência inscrita no triângulo.
I_a	Centro do ex-incentro relativo ao vértice A .
r	Raio da circunferência.
r_a	Raio da circunferência ex-inscrita relativo ao vértice A .
m_a	Mediana do triângulo relativo ao vértice A .

- K O quadrado do diâmetro da circunferência inscrita no triângulo.
- \hat{A} Ângulo interno do triângulo ΔABC do vértices A .
- l_a Ceviana que possui uma de suas extremidades no vértice A .

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO AO TEMA DO TRABALHO

Ao se estudar geometria euclidiana e, mais especificamente, as áreas das figuras, nos deparamos com algumas maneiras para determinar a área de um triângulo qualquer. Nesse contexto, uma expressão de destaque é a fórmula de Heron, a qual é usada para determinar a área de um triângulo a partir do conhecimento dos seus lados. Ao nos debruçarmos sobre a Fórmula de Heron, encontramos referência a fórmulas do tipo Heron.

Encontramos pertinência nesse tema de pesquisa, pois estudar um único assunto sob diversas óticas contribui para agregar conhecimentos ao professor. Em termos práticos, possibilita que o docente identifique novas formas de abordar o mesmo conteúdo em sala de aula por meio de diversos ramos da matemática. Inclusive, algumas demonstrações podem ser apresentadas em laboratório de matemática, conferindo maior dinamicidade ao processo de ensino-aprendizagem.

Em complemento, trazer várias perspectivas sobre o mesmo assunto coopera para enriquecer o repertório do aluno. Nessa oportunidade, destacamos a utilidade para os discentes que têm aptidão para aderir a competições de matemática. Isso porque a participação nesses eventos requer um conhecimento matemático mais aprofundado, que se revela através do domínio e da capacidade de intuir outras técnicas de aplicação.

Além disso, ressaltamos a escassez de trabalhos envolvendo a fórmula de Heron e as fórmulas do tipo Heron em língua portuguesa. A fim de comprovar essa afirmação, realizamos uma busca no Repositório do PROFMAT e encontramos apenas quatro dissertações que mencionam a fórmula de Heron: duas com a demonstração mais antiga, atribuída a Heron na obra “A Métrica” (OLIVEIRA, 2014; SILVA, 2017); uma com prova trigonométrica (PEREIRA, 2015); e uma via teorema de Pitágoras (PAULANTI, 2014).

Em detalhamento, Oliveira (2014) estudou os teoremas de Stewart e de Heron, catalogando 21 exercícios envolvendo essas temáticas. Paulanti (2014) empreendeu um estudo superficial sobre fórmulas para calcular as áreas dos polígonos mais notáveis e, ao final, propôs quatro atividades práticas com o uso da fórmula de Heron. Por sua vez, Pereira (2015) e Silva (2017) discutem triângulos heronianos, isto é, os que possuem medidas dos lados inteiras e também áreas inteiras. Assim, destacamos o ineditismo da abordagem do presente trabalho dissertativo frente aos encontrados no Repositório do PROFMAT.

Assim, desenvolvemos esse trabalho a partir do seguinte problema de pesquisa: como a fórmula de Heron pode ser demonstrada e como as fórmulas do tipo Heron podem ser definidas e exemplificadas? A resposta para essa indagação envolve a catalogação de diversas demonstrações para a fórmula de Heron, bem como o mapeamento de algumas fórmulas do tipo Heron e uma tentativa de definição.

Para tanto, temos como objetivo geral compreender a fórmula de Heron, bem como investigar as fórmulas do tipo Heron. Assim, como primeiro objetivo específico, temos a apresentação da fórmula de Heron e a catalogação de diversas demonstrações para ela ao longo da história, incluindo abordagem algébrica, geométrica, trigonométrica e por números complexos. E, como segundo objetivo específico, temos o mapeamento de algumas fórmulas do tipo Heron, compreendidas como aquelas que servem para calcular a área de um triângulo a partir do conhecimento de outro elemento de um triângulo, como por exemplo das medianas, das alturas, dos ângulos e das cevianas.

Desse modo, em termos metodológicos, podemos classificar este trabalho como um estudo teórico, pois fazemos um levantamento de demonstrações já existentes para a fórmula de Heron, tal qual de exemplos para fórmulas do tipo Heron. Com relação à técnica de pesquisa, destacamos a bibliográfica, na medida em que utilizamos da consulta a livros e artigos científicos.

Assim, o desenvolvimento deste trabalho se baseia nas definições e notações de Muniz Neto (2013) e é composto por uma introdução do assunto, três capítulos e as considerações finais. No segundo capítulo, trazemos uma abordagem histórica da vida e obra de Heron de Alexandria. Nesse momento, dedicamos uma seção para a

conjectura de sua época de vida e outra seção para o detalhamento de suas principais obras no campo da matemática e da mecânica.

No capítulo 3, relacionamos e examinamos nove formas diferentes de provar a fórmula de Heron. No capítulo 4, apresentamos quatro exemplos que se enquadram como “fórmulas do tipo Heron”, com suas respectivas demonstrações, a partir das quais chegamos a uma tentativa conceitual para essa expressão.

CAPÍTULO 2

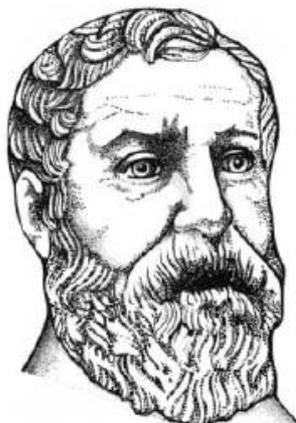
HERON E SUA OBRA

Neste capítulo, apresentamos alguns apontamentos biográficos sobre Heron incluindo uma estimativa do período em que ele viveu e de onde exerceu suas atividades de pesquisa e de trabalho. Na sequência, abordamos duas classificações das obras de Heron. Na primeira classificação, dividimos a contribuição de Heron em conteúdos teóricos e práticos. Já na segunda classificação levamos em consideração o enquadramento dos estudos de Heron nos eixos geométricos e mecânicos, trazendo uma listagem de algumas de suas obras separadas de acordo com esses dois eixos.

2.1. HERON: APONTAMENTOS BIOGRÁFICOS

A cidade de Alexandria – Egito foi fundada no ano de 332 a.C. pelo imperador Alexandre – O Grande e se tornou uma das mais importantes do mundo antigo. A região passou por uma fase (a partir de 46 a.C.) sob o domínio do Império Romano (de 31 a.C. a 476 d.C) Eves (2011, p. 236). Na época da dominação romana sobre a cidade de Alexandria, há relatos sobre um matemático, físico e engenheiro denominado de Heron de Alexandria, também chamado por outras fontes como Hero ou Herão. De acordo com Papadopoulos (2007, p. 218), esta era a sua fisionomia

Figura 1 - Heron de Alexandria



Fonte: Papadopoulos (2007, p. 218)

Como se trata de um período remoto, existem muitas referências contraditórias sobre Heron, em parte porque esse nome era bastante comum. Assim, a cronologia das obras de Heron é contestada e não é absolutamente certa até o momento. No entanto, os historiadores estimam que ele viveu depois de Apolônio, porque Heron o cita; e antes de Pappus, pois ele faz referência a Heron, Thomas (1957, p. 267). Essas evidências sugerem que Heron deve ter vivido entre 150 a.C. e 250 d.C..

Nessa linha de raciocínio, alguns estudiosos (BOYER, 1974, p. 124; ROQUE, 2012, p. 200) indicam que Heron viveu no início do século I d.C.. Em concordância, Lewis (2001, p. 259) e Eves (2011, p. 205) apontam que Heron viveu ao menos até o ano de 84 d.C.. Isso porque a criação da *cheiromballistra* é atribuída genuinamente a Heron, e os dados evidenciam que essa poderosa catapulta foi criada nesse ano.

De acordo com Papadopoulos (2007, p. 219), Heron ficou famoso por documentar a primeira turbina a vapor, chamada de *aelolipila*, máquina de Heron ou máquina térmica de Heron. Ele também inventou muitos mecanismos para templos e teatros enquanto avançava e/ou aprimorava invenções de outras autorias, como por exemplo o *hydraulis*, originalmente inventado por Ktesibius.

Além disso, segundo Lewis (2001, p. 53) pelo fato de a maioria dos escritos de Heron aparecerem como notas de aula para cursos de matemática, mecânica, física e pneumática, é quase certo que Heron lecionou no Musaeum of Alexandria, uma

instituição literária e científica apoiada pelos Ptolomeus, que incluía a famosa Biblioteca de Alexandria. Além de lecionar, acredita-se que Heron atuou como diretor dessa instituição, estabelecendo a primeira Escola Politécnica ou Instituto Técnico. Ele teria sido o último membro da Escola, e o mais conhecido de todos.

2.2. ALGUMAS OBRAS

Ao contrário de outras obras antigas em grego, a linguagem adotada no livro de Heron é bastante fácil de ser lida e compreendida por não acadêmicos até os dias de hoje, afirma Papadopoulos (2007, p. 219). Porém, o linguajar acessível não compromete a densidade teórica, de forma que o nível acadêmico é mantido. Por esse motivo, ao analisar a resolução de um problema na obra *Métrica*, sua principal obra de cunho acadêmico e matemático, Roque (2012, p. 203) atesta que “Vemos, assim, que o texto de Heron não é o de um prático e sim o de um erudito, engenheiro e geômetra que procura produzir sínteses das obras clássicas”.

Na época atribuída à vivência de Heron, a matemática se bifurcava em duas linhas de pensamento: uma teórica; outra, prática. Heron se destacou por caminhar pelas duas vertentes. Isso porque, no âmbito teórico, ele produziu muitos exemplares numéricos e, em alguns deles, se ateve a demonstrações. Já no campo prático, ele produziu vários objetos mecânicos Eves (2011, p. 205).

Contudo, Boyer (1974, p. 125) demonstra que Heron está mais inclinado para a vertente mensurável e não se atém à unicidade dos problemas. Para exemplificar, cita-se que a área de um polígono regular de 5 lados pode ser expressa de duas formas diferentes, mostrando que ele objetiva uma aproximação entre a solução e o problema.

Além da divisão entre trabalhos com foco teórico e prático, a obra de Heron pode ser dividida em dois eixos: de um lado, os estudos geométricos; do outro, os mecânicos. Enquanto os estudos geométricos se ocupam amplamente de problemas de mensuração, os de abordagem mecânica versam sobre a descrição de aparelhos mecânicos engenhosos. Com relação aos trabalhos geométricos de Heron,

Papadopoulos (2007, pp. 220-238) lista as seguintes obras, muito embora algumas delas tenham sua autoria disputada.

Quadro 1 – Estudos geométricos de Heron

OBRA	CONTEÚDO	IDIOMA
<i>Metrica</i> (Métrica)	Descrição de como calcular superfícies e volumes de diversos objetos	Árabe
<i>Geometrica</i> (Geométrica)	Coleção de equações com base no primeiro capítulo de <i>Metrica</i>	Árabe
<i>Stereometrica</i>	Exemplos de cálculos tridimensionais baseado no segundo capítulo da <i>Metrica</i>	Grego
<i>Geodaesia</i>	Análise topográfica	Grego
<i>Mensurae</i> ¹	Ferramentas que podem ser usadas para realizar medições com base em <i>Stereometrica</i> e <i>Metrica</i>	Grego
Definições ²	Definições de termos para geometria	Grego

Fonte: Autor

¹ Autoria disputada

² Autoria disputada

Ainda sobre as obras de Heron do eixo geométrico, de acordo com Eves (2011, p. 205), temos que:

Dos trabalhos geométricos de Herão, o mais importante é sua A Métrica, em três livros, e só descoberta em 1896 – em Constantinopla, por R. Schone. O Livro I ocupa-se da medida da área de quadrados, retângulos, triângulos, trapézios, vários outros quadriláteros particulares, polígonos regulares desde o triângulo equilátero até o dodecágono regular, círculos e seus segmentos, elipses, segmentos parabólicos e da superfície de cilindros, cones, esferas e zonas esféricas. E nesse livro que se encontra a brilhante dedução da famosa fórmula da área de um triângulo em função dos três lados. Também tem interesse particular no livro o método de Herão de aproximar a raiz quadrada de um inteiro que não é quadrado perfeito. Esse processo é hoje usado com

frequência pelos computadores. [...] O Livro II de A Métrica ocupa-se da mensuração de volumes de cones, cilindros, paralelepípedos, prismas, pirâmides, troncos de cones e de pirâmides, esferas, segmentos esféricos, toros (anéis cilíndricos), os cinco sólidos regulares e alguns prismatoides. O Livro III aborda o problema da visão de certas áreas e volumes em partes que estão entre si numa razão dada.

Desse modo, observamos que os estudos geométricos contidos nos três livros da obra *Métrica* consistem, principalmente, em métodos para obter as áreas e volumes de planos ou de figuras sólidas. Em geral, acredita-se que esses livros foram baseados nas obras de Heron, mas também que foram alterados por outras pessoas depois dele devido ao grande tempo de desaparecimento e de cópias produzidas, Eves (2011, p. 205). Contudo, vale lembrar que é conhecida como “fórmula de Heron” a fórmula para determinar a área de um triângulo a partir de seus lados a, b e c . Assim, considerando que s é o semiperímetro do triângulo, temos:

$$\text{Área do triângulo} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Apesar de essa fórmula ser encontrada no livro *Métrica*, Boyer (1974, p. 124) afirma que Arquimedes já tinha conhecimento desse conteúdo e que, possivelmente, sabia prová-lo. Contudo, vale ressaltar que o autor se refere à fórmula de Heron colocando-a entre aspas, visto que a álgebra naquela época não foi desenvolvida em termos de fórmulas.

Essa afirmação pode ser observada no texto de Boyer (1974, p. 124).

“Os árabes nos contam que a “fórmula de Heron” era já conhecida por Arquimedes, que sem dúvida tinha uma prova dela, mas a demonstração de Heron em sua *A métrica* é a mais antiga que temos.”.

Porém, uma coisa é certa: a primeira prova escrita de que se tem relatos é encontrada na obra *Métrica*, de autoria de Heron.

Por sua vez, os estudos de engenharia de Heron foram impulsionados por demandas dos reis de Alexandria. Nesse eixo, Papadopoulos (2007, pp. 220-238) traz a seguinte listagem dos livros mais conhecidos de Heron de conteúdo mecânico.

Quadro 2 – Estudos mecânicos de Heron

OBRA	CONTEÚDO	IDIOMA
<i>Pneumática</i>	Tratado sobre o uso de ar, água ou vapor. Também traz a descrição de cerca de 100 engenhos mecânicos e brinquedos, como um sifão, um carro de bombeiro, um dispositivo que abria as portas do templo ao acender fogo num altar, um órgão de sopro, fantoches, máquinas operadas por moedas e a eolípila ¹ (Figura 2), que é sua invenção mais famosa, sendo considerada o primeiro motor a vapor	Grego
<i>Automatopoietica</i>	Descrição de máquinas automatizadas que usam mecânica ou meios pneumáticos, a maioria para templos	Grego
<i>Belopoeica</i>	Construções de máquinas de guerra	Grego
<i>Mecânica</i>	Mecanismos e máquinas simples	Árabe e grego ²
<i>Barulkos</i>	Métodos de levantamento de pesos pesados. Indicações revelam que esta obra seja o mesmo que a obra Mecânica.	
<i>Dioptra</i>	Descreve um instrumento semelhante a um teodolito usado na pesquisa e métodos para medir o comprimento	Grego e árabe
<i>Catóptrica</i>	Propagação e reflexão da luz, e uso de espelhos	
<i>Cheirobalistra</i>	Catapultas	Grego

Fonte: autor

¹ Consistia em uma esfera oca montada de modo que pudesse ligar um par de tubos ocios que forneciam vapor para a esfera de um caldeirão. O vapor escapava da esfera de um ou mais tubos curvados projetando-se de seu equador, causando a esfera para girar. A eolípila é o primeiro dispositivo conhecido para transformar o vapor em movimento giratório. Como muitas outras máquinas da época

que demonstravam princípios da mecânica básica, era simplesmente considerado uma curiosidade ou um brinquedo e não foi usado para nenhum propósito prático industrial.

² Conservado em árabe, com alguns fragmentos em grego preservados por Pappus.

Figura 2 - Eolípila



Fonte: Papadopoulos (2007, p. 237)

Apesar de tanta engenhosidade, mecanismos e autômatos, Bitar (2020, s/p.) relata que “A natureza de suas invenções explica por que, afinal, não houve uma revolução industrial na Antiguidade: quase todas são instrumentos para encantar e divertir, e não para substituir o trabalho manual”. E acrescenta que

"No fundo, é simples: não houve revolução industrial porque havia escravidão", resume o historiador Pedro Paulo Funari, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Propor que máquinas fizessem o trabalho dos prisioneiros implicaria que esses deveriam ser trucidados. 'Na guerra, você mata os inimigos ou os poupa para serem escravos. Portanto, era considerado um ato de humanidade preservar a vida de alguém que poderia ter matado você', diz Funari." (BITAR 2020, s/p.)

CAPÍTULO 3

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DA FÓRMULA DE HERON

Neste capítulo, trazemos uma catalogação inédita composta por nove demonstrações a fim de provar a fórmula de Heron. Ou seja, a partir do enunciado de Muniz Neto (2013, p. 235), vamos demonstrar que se ΔABC é um triângulo de lados a, b e c e semiperímetro s , então

$$\text{Área de do triângulo } \Delta ABC = (ABC)^1 = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

A primeira delas é feita pelo próprio Heron. A segunda é uma das inúmeras demonstrações através do teorema de Pitágoras. A terceira tem caráter trigonométrico e é oferecida por Dobbs. A quarta tem abordagem geométrico-trigonométrica e foi elaborada por Dunham. A quinta é formulação que utiliza a álgebra, sendo atribuída a Newton.

Em continuação, a sexta demonstração da fórmula de Heron é feita por Al-Shannī, na época medieval. A sétima comprovação emprega números complexos e é apresentada por Stroethoff. Já as duas últimas são desenvolvidas com ferramentas geométricas e foram apresentadas economizando palavras, sendo a oitava trazida por Maekawa; e a nona, por Nelsen.

3.1. DEMONSTRAÇÃO DE HERON POR HERON

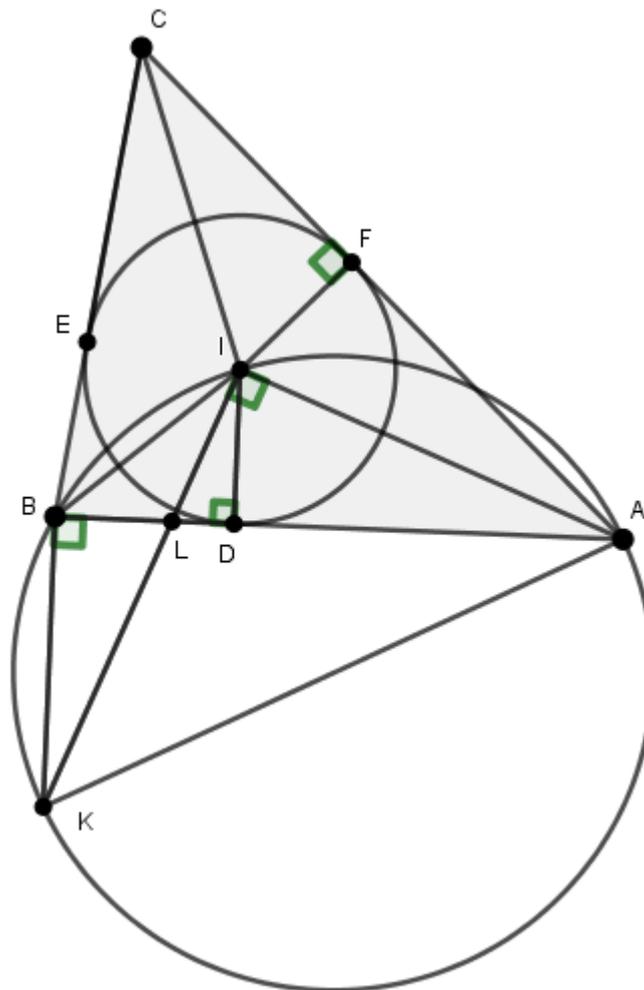
No âmbito da história da matemática, atribui-se a Heron o desenvolvimento da “fórmula” para calcular a área de triângulos a partir de uma circunferência inscrita. Essa afirmação se baseia na menção ao livro I da obra “A Métrica”.

¹ Denotaremos no decorrer do texto que a área de um triângulo ΔXYZ é dado por (XYZ) .

Todavia, o pioneirismo de Heron é colocado em xeque por Boyer (1974, p. 124), sob a alegação de que os árabes correlacionam esse conhecimento a Arquimedes, no século II a.C., em detrimento de Heron, que remete ao século I d.C. De todo modo, convencionou-se que tal formulação diz respeito a Heron.

Em apologia à descoberta de Heron, na obra intitulada “Introdução à História da Matemática”, Howard Eves (2011, p. 222) propõe o exercício 6.11, item d. O passo a passo instigado por Eves é melhor detalhado por Dalcin (1998.,s/p.). Uma demonstração semelhante é encontrada em Thomas (1957, pp. 472-477) e Cooke (2011, pp. 172-174), a qual nos baseamos para a demonstração abaixo.

Figura 3 - Demonstração de Heron



Fonte: Autor, baseado em Thomas (1957, pp. 472-477) e Cooke (2011, pp. 172-174)

Por construção temos o triângulo ΔABC de comprimentos dos lados a, b e c dos respectivos lados BC, CA, AB , e o incírculo² tenha centro I , raio r e tangencie os lados BC, CA, AB em E, F, D , respectivamente, como mostra a Figura 3. Trace a perpendicular \overline{IK} a \overline{AI} , interceptando \overline{AB} em L e traçando a perpendicular a \overline{AB} , contendo B , encontramos o ponto K .

Note que a área do triângulo ΔABC , (ABC) ³, é a soma das áreas dos triângulos $\Delta AIB, \Delta AIC$ com ΔBIC , ou seja,

$$(ABC) = (AIB) + (AIC) + (BIC) = \frac{r}{2}(AB + AC + BC) = rs,$$

onde s é o semiperímetro do triângulo ΔABC , ou seja,

$$s = \frac{AB + AC + BC}{2}.$$

Pelo fato das congruências dos triângulos $\Delta ADI \equiv \Delta AIF, \Delta DBI \equiv \Delta IBE$ e $FIC \equiv \Delta IEC$, temos

$$AD = AF, FC = CE \text{ e } EB = BD.$$

Então, algumas relações envolvendo o semiperímetro:

$$\begin{cases} s = AD + BE + CF, \\ s = AB + CF \Leftrightarrow s - c = CF, \\ s = BC + AD \Leftrightarrow s - a = AD, \\ s = AC + BD \Leftrightarrow s - b = BD. \end{cases}$$

O quadrilátero $AKBI$ é inscrito numa circunferência de diâmetro AK , pois os triângulos ΔABK e ΔAIK são triângulos retângulos de hipotenusa AK .

Denotando por $\alpha = \angle BAI = \angle IAC, \beta = \angle ABI = \angle IBC$ e $\gamma = \angle BCI = \angle ICA$, obtemos a relação $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$ do triângulo ΔABC , ou ainda, $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Assim, concluímos que $\angle BKI = \angle BAI = \alpha$, pois esses ângulos são inscritos com o mesmo arco \widehat{BI} . De forma similar concluímos que $\angle IKA = \angle IBA = \beta$, visto que são ângulos inscritos com o mesmo arco \widehat{AI} .

² Definição de incírculo Muniz Neto (2013, p. 82)

³ Denotaremos no decorrer do texto que a área de um triângulo ΔXYZ é dado por (XYZ) .

Sendo assim, do triângulo retângulo ΔABK , como $\angle BKI + \angle IKA = \alpha + \beta$ concluímos que $\angle KAB = \gamma$. Então segue que os triângulos ΔCIF e ΔABK são semelhantes, portanto,

$$\frac{AB}{BK} = \frac{CF}{FI} \Leftrightarrow \frac{AB}{BK} = \frac{CF}{r} \Leftrightarrow BK = r \frac{AB}{CF}.$$

Pelo fato que \overrightarrow{BK} e \overrightarrow{ID} são perpendiculares a \overrightarrow{AB} , chegamos que os ângulos $\angle BKI$ e $\angle KID$ são alternos internos, assim, $\angle BKI = \angle KID = \alpha$. Então a semelhança dos triângulos ΔDLI e ΔBLK resulta em

$$\frac{BK}{BL} = \frac{ID}{DL} \Leftrightarrow \frac{BK}{BL} = \frac{r}{DL} \Leftrightarrow BK = r \frac{BL}{DL}.$$

compondo as duas relações anteriores temos

$$\frac{AB}{CF} = \frac{BL}{DL} \Leftrightarrow AB \cdot DL = CF \cdot BL.$$

Como ID é uma altura relativa a hipotenusa do triângulo ΔAIL , vale a relação

$$ID^2 = AD \cdot LD \Leftrightarrow r^2 = AD \cdot LD.$$

Então, com as duas relações anteriores obtemos a expressão para área do triângulo em função dos lados com o desenvolvimento a seguir

$$\begin{aligned} BD \cdot CF &= BD \cdot CF \\ &= BL \cdot CF + DL \cdot CF \\ &= AB \cdot DL + DL \cdot CF \\ &= s \cdot DL \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD \cdot BD \cdot CF &= AD \cdot s \cdot DL \\ &= s \cdot r^2 \end{aligned}$$

$$s \cdot AD \cdot BD \cdot CF = s^2 \cdot r^2$$

$$s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) = s^2 \cdot r^2$$

Portanto,

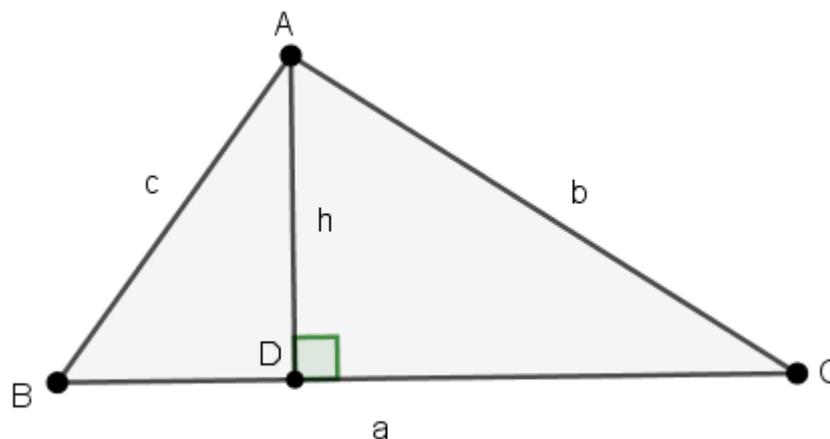
$$(ABC) = s \cdot r = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

3.2. UMA DEMONSTRAÇÃO PELO TEOREMA DE PITÁGORAS

Considerando que Heron se baseia na geometria para expor sua formulação, bem como que uma parcela considerável dos estudiosos que oferece alternativas de comprovação faz uso da trigonometria, alguns autores se propõem a ratificar a fórmula de Heron de maneira simplista, aplicando o conhecimento algébrico de Pitágoras. Com variações sutis, esse é o caso de Han-Lin (1987, pp. 510-511), Torrez (1985, p. 664) e Raifaizen (1971, pp. 27-28).

Seja um triângulo ΔABC de comprimentos dos lados a, b e c dos respectivos lados BC, CA, AB . Sem perda de generalidade, consideremos que $BC > CA > AB$ e o ponto D é o pé da perpendicular que contém o vértice A em relação ao lado BC .

Figura 4 - Demonstração com Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor, baseado em Han-Lin (1987, pp. 510-511)

Considerando que $AD = h$, então

$$CD = \sqrt{b^2 - h^2} \quad e \quad BD = BC - DC = a - \sqrt{b^2 - h^2}.$$

Contudo,

$$\begin{aligned}c^2 &= BD^2 + AD^2 \\&= \left(a - \sqrt{b^2 - h^2}\right)^2 + h^2 \\&= a^2 - 2a\sqrt{b^2 - h^2} + b^2 - h^2 + h^2 \\&= a^2 + b^2 - 2a\sqrt{b^2 - h^2}\end{aligned}$$

Assim,

$$a\sqrt{b^2 - h^2} = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade anterior,

$$a^2(b^2 - h^2) = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2$$

$$a^2b^2 - a^2h^2 = \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2$$

$$a^2h^2 = a^2b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2$$

Então como o dobro da área do triângulo ΔABC é $a \cdot h$, temos que

$$(2 \cdot ABC)^2 = a^2b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2$$

$$4 \cdot (ABC)^2 = \left(ab + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right) \cdot \left(ab - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)$$

$$(ABC)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{(a+b)^2 - c^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{c^2 - (a-b)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2}\right) \cdot \left(\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16} (a + b + c)(a + b - c) \cdot (c + a - b)(c - a + b)$$

Sendo $s = \frac{a+b+c}{2}$, o semiperímetro do triângulo, temos que

$$(ABC)^2 = s \cdot (s - c) \cdot (s - b) \cdot (s - a).$$

Ou seja,

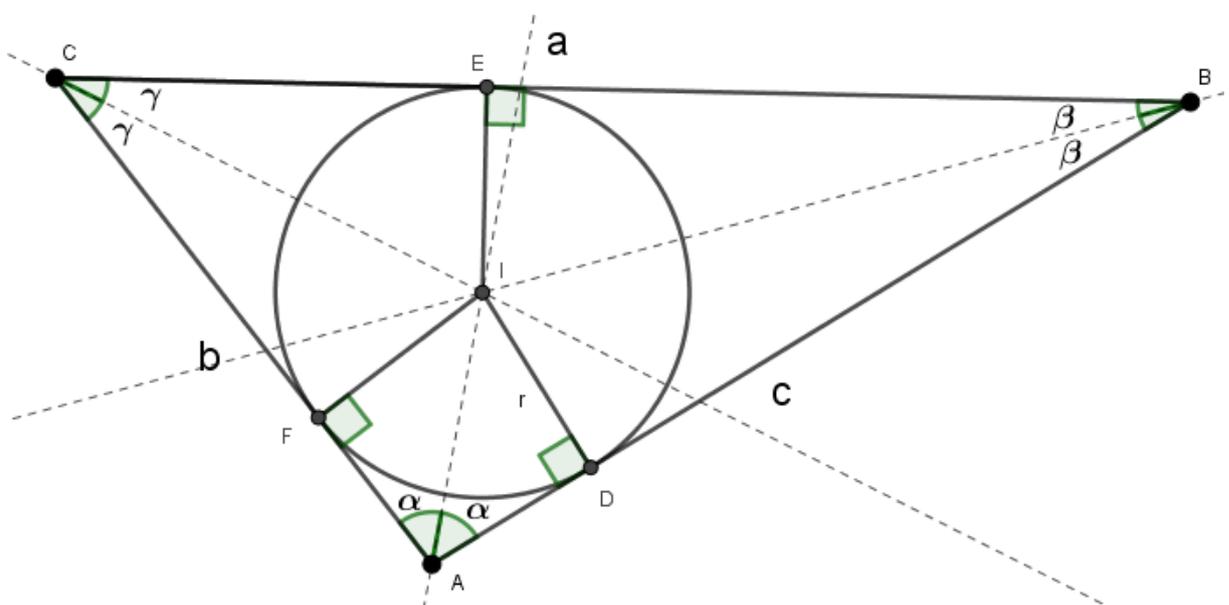
$$(ABC) = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

3.3. DEMONSTRAÇÃO TRIGONOMÉTRICA POR DOBBS

Ao estudar a fórmula de Heron, Dobbs (1984, pp. 252-253) se propõe a apresentar uma comprovação utilizando como base as tangências da circunferência inscrita e as tangentes dos ângulos de cada bissetriz do triângulo.

Por construção, temos o triângulo ABC de comprimentos dos lados a, b e c dos respectivos lados BC, CA, AB e o incírculo tenha centro I , raio r e tangencie os lados BC, CA, AB em E, F, D , respectivamente, como mostra a Figura 5.

Figura 5 – Demonstração trigonométrica por Dobbs



Fonte: Autor, baseado em Dobbs (1984, pp. 252-253)

Começemos de maneira similar à seção 3.1, ou seja, note que a área do triângulo ΔABC é a soma das áreas dos triângulos $\Delta AIB, \Delta AIC$ com ΔBIC

$$(ABC) = (AIB) + (AIC) + (BIC) = \frac{r}{2}(AB + AC + BC) = rs,$$

onde s é o semiperímetro do triângulo ΔABC , ou seja, $s = \frac{AB+AC+BC}{2}$

Pelo fato de $\Delta ADI \equiv \Delta AIF, DBI \equiv \Delta IBE$ e $FIC \equiv \Delta IEC$, temos

$$AD = AF, FC = CE \text{ e } EB = BD.$$

Então, o semiperímetro pode ser dado por $s = AD + BD + CE$ onde desenvolvem-se as relações

$$\begin{cases} AD = s - (BD + CE) = s - a, \\ BD = s - (AD + CE) = s - b, \\ CE = s - (AD + BD) = s - c. \end{cases}$$

Denominando por $\alpha = \angle BAI = \angle CAI, \beta = \angle ABI = \angle CBI$ e $\gamma = \angle BCI = \angle ACI$. Calculando a tangente de α, β e γ nos triângulos $\Delta ADI, \Delta BDI$ e ΔCEI temos,

$$Tg(\alpha) = \frac{DI}{AD} = \frac{r}{s-a}; Tg(\beta) = \frac{DI}{BD} = \frac{r}{s-b} \text{ e } Tg(\gamma) = \frac{EI}{CE} = \frac{r}{s-c}.$$

Pelo fato de $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ e pela injetividade da função tangente temos

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma \Leftrightarrow Tg(\alpha + \beta) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \Leftrightarrow \frac{Tg(\alpha) + Tg(\beta)}{1 - Tg(\alpha)Tg(\beta)} = \text{Cotg}(\gamma) = \frac{1}{Tg(\gamma)}$$

Portanto,

$$\frac{1}{Tg(\gamma)} = \frac{Tg(\alpha) + Tg(\beta)}{1 - Tg(\alpha)Tg(\beta)} \Leftrightarrow \frac{s-c}{r} = \frac{\frac{r}{s-a} + \frac{r}{s-b}}{1 - \frac{r}{s-a} \cdot \frac{r}{s-b}} \Leftrightarrow \frac{s-c}{r} = \frac{r(s-a) + r(s-b)}{(s-a) \cdot (s-b) - r^2}$$

$$\Leftrightarrow (s-c) \cdot ((s-a) \cdot (s-b) - r^2) = r^2(s-a + s-b)$$

$$\Leftrightarrow (s-c) \cdot (s-a) \cdot (s-b) - r^2(s-c) = r^2c$$

$$\Leftrightarrow (s-c) \cdot (s-a) \cdot (s-b) = r^2s.$$

Multiplicando essa igualdade por s , temos

$$s \cdot (s - c) \cdot (s - a) \cdot (s - b) = r^2 s^2.$$

Então, a área de um triângulo é dada por

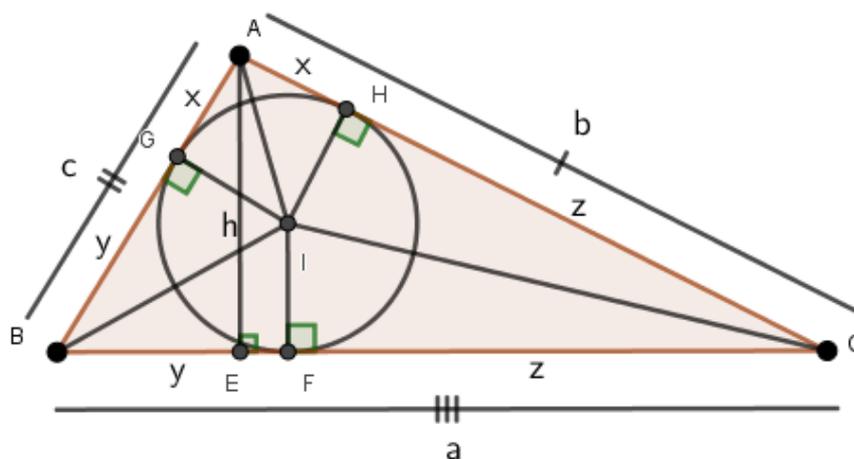
$$(ABC) = rs = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

3.4. DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICO-TRIGONOMÉTRICA POR DUNHAM

De acordo com William Dunham (1985, pp. 258-259), uma abordagem puramente geométrica da fórmula de Heron se baseia em uma série muito extensa de pares de triângulos semelhantes, o que se distancia da ideia inicial envolvendo uma circunferência inscrita. Por outro lado, ele também discorda da típica abordagem moderna, somente algébrica, que se fundamenta no teorema de Pitágoras.

Desse modo, Dunham (1985, pp. 258-259) apresenta uma alternativa para comprovar a fórmula de Heron fundindo a geometria com a álgebra. Chamada por ele de prova antigo-moderna, ela mantém a circunferência inscrita como ponto de partida para obter uma equação intermediária e depois utiliza a trigonometria para derivar essa equação.

Figura 6 – Demonstração trigonométrica por Dobbs



Fonte: Autor, baseado em William Dunham (1985, pp. 258-259)

Para reproduzir essa demonstração devemos ter um triângulo ΔABC de comprimentos dos lados a, b e c dos respectivos lados BC, AC e AB e uma altura h relativo ao maior lado. Traçar-se as bissetrizes internas, o qual determinam o incentro, I , o centro da circunferência que tangencia os três lados do triângulo ao mesmo tempo. Com os pontos de tangência F, G e H os lados do triângulo são divididos de tal forma que surgem 3 pares iguais, pois também surgem 3 pares de triângulos congruentes, ou seja, $AG = AH = x, FB = BG = y$ e $CH = CF = z$.

Assim como o perímetro é $a + b + c$, conclui-se que o semiperímetro, s , é dado por $\frac{a+b+c}{2}$ ou $x + y + z$ e dessas relações resultam que,

$$\begin{cases} x = s - a, \\ y = s - b, \\ z = s - c. \end{cases}$$

Note que a área do triângulo ΔABC , pode ser dado pela soma das áreas dos triângulos $\Delta ABI, \Delta BCI$ e ΔACI , ou seja,

$$(ABC) = (ABI) + (BCI) + (ACI),$$

o que nós temos

$$(ABC) = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = r \frac{(a + b + c)}{2} = r \cdot s.$$

Seja o ângulo $\angle CBA$ igual a 2α , logo a bissetriz \overrightarrow{BI} torna o ângulo $\angle CBI$ igual a α . Então trabalhando com senos, cossenos e arcos duplos temos:

$$\begin{cases} \text{Sen}(\alpha) = \frac{FI}{BI} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + y^2}}, \\ \text{Cos}(\alpha) = \frac{BF}{BI} = \frac{y}{\sqrt{r^2 + y^2}}, \\ \text{Sen}(2\alpha) = \frac{AE}{AB} = \frac{h}{x + y}. \end{cases}$$

Contudo, desenvolvendo o arco duplo temos que

$$\frac{h}{x + y} = \text{Sen}(2\alpha) = 2 \cdot \text{Sen}(\alpha) \cdot \text{Cos}(\alpha)$$

$$= 2 \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{r^2 + y^2}}$$

$$= \frac{2ry}{r^2 + y^2}$$

assim,

$$h = (x + y) \frac{2ry}{r^2 + y^2}.$$

Mas, como a área do triângulo ΔABC também pode ser calculada por base vezes altura dividido por 2, temos,

$$(ABC) = rs = \frac{1}{2}(\text{base}) \cdot (\text{Altura})$$

$$= \frac{1}{2}(y + z)(x + y) \left[\frac{2ry}{r^2 + y^2} \right]$$

$$= \frac{ry(y + z)(x + y)}{r^2 + y^2}.$$

Simplificando a equação acima de r e continuando o desenvolvimento

$$s(r^2 + y^2) = y(y + z)(x + y)$$

$$= y(yx + yy + yz + zx)$$

$$= y(y(x + y + z) + xz),$$

$$= y(ys + xz)$$

$$sr^2 + sy^2 = sy^2 + xyz,$$

$$sr^2 = xyz.$$

Multiplicando por s , segue

$$s^2 r^2 = sxyz,$$

$$(ABC)^2 = sxyz,$$

ou seja,

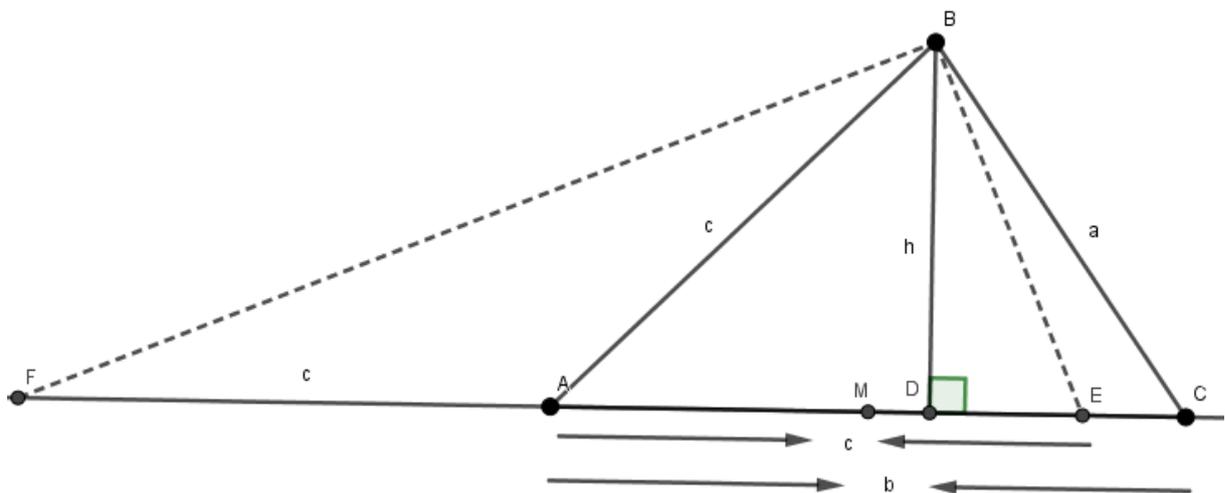
$$(ABC) = \sqrt{sxyz} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

3.5. DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA POR ISAAC NEWTON

Segundo Dunham (2011, pp. 5-8), Isaac Newton apresentou uma prova para a fórmula de Heron na obra intitulada *Arithmetica Universalis*, datada de 1707. Esse livro de álgebra elementar de Newton ficou ofuscado pelas suas teses impactantes em mecânica e óptica. Entretanto, nessa obra, Newton apresenta soluções algébricas para alguns problemas geométricos. Um dos problemas geométricos estudados por Newton através de equações é a fórmula de Heron.

Por construção temos o triângulo $\triangle ABC$ de comprimentos dos lados a, b e c dos respectivos lados BC, CA e AB , o ponto M é o ponto médio do segmento AC , o ponto D é o pé da altura relativa ao lado AC , e o ponto F e E são construídos de forma que a suas distâncias para o ponto A sejam c , como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Demonstração por Issac Newton



Fonte: Autor, baseado em Dunham (2011, pp. 5-8)

A partir daqui, era álgebra, o tempo todo, pois Newton procurava expressar os comprimentos dos segmentos-chave do diagrama em termos dos lados a, b e c .

Então começou usando Pitágoras nos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$

$$h^2 = c^2 - (AD)^2 \quad ; \quad h^2 = a^2 - (DC)^2.$$

Assim,

$$c^2 - (AD)^2 = a^2 - (DC)^2 \Leftrightarrow c^2 - a^2 = (AD)^2 - (DC)^2.$$

Que segue,

$$\begin{aligned} c^2 - a^2 &= (AD)^2 - (DC)^2 \\ &= (AD + DC)(AD - DC) \\ &= b(AD - DC). \end{aligned}$$

Onde obteve a relação,

$$\frac{c^2 - a^2}{b} = (AD - DC).$$

Então trabalhou para escrever cada vez mais os termos em função de a , b e c . Como AD é a soma dos segmentos AM e MD e o segmento DC é a diferença dos segmentos MC com MD segue,

$$\begin{aligned} \frac{c^2 - a^2}{b} = (AD - DC) &= AM + MD - (MC - MD) \\ &= \frac{b}{2} + MD - \frac{b}{2} + MD \\ &= 2MD, \end{aligned}$$

pois, M é ponto médio de AC , logo

$$MD = \frac{c^2 - a^2}{2b}.$$

Trabalhou o segmento DE como a diferença de ME com MD , ou seja, usando a última igualdade obtida, temos que

$$\begin{aligned} DE &= ME - MD \\ &= (AE - AM) - MD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c - \frac{b}{2} - \frac{c^2 - a^2}{2b} \\
&= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b}.
\end{aligned}$$

Daí como $AF = AE = AB = c$ e F, A e E estão alinhados temos que existe uma circunferência de raio c e centro A passando por F, E e B e de diâmetro FE , portanto o triângulo ΔFBE é retângulo em B .

Como BD é a altura relativa da hipotenusa FE do triângulo ΔFBE , temos que

$$\begin{aligned}
BD^2 = h^2 &= DE \cdot FD \\
&= DE \cdot (FE - DE) \\
&= DE(2c - DE).
\end{aligned}$$

Usando a relação de DE que encontramos anteriormente, segue que

$$\begin{aligned}
h^2 &= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b} \left(2c - \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b} \right) \\
&= \frac{a^2 + (2bc - b^2 - c^2)}{2b} \left(\frac{4bc - 2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right) \\
&= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2b} \cdot \frac{(b + c)^2 - a^2}{2b} \\
&= \frac{(a + (b - c))(a - (b - c))}{2b} \cdot \frac{((b + c + a)(b + c - a))}{2b} \\
&= \frac{(a + b - c)(a - b + c)(b + c + a)(b + c - a)}{4b^2}
\end{aligned}$$

Como $2s = a + b + c$, segue que

$$\begin{aligned}
h^2 &= \frac{(a + b - c + c - c)(a - b + c + b - b)(b + c + a)(b + c - a + a - a)}{4b^2} \\
&= \frac{(2s - 2c)(2s - 2b)(2s)(2s - 2a)}{4b^2} \\
&= \frac{16(s - c)(s - b)(s)(s - a)}{4b^2} \\
&= \frac{4s(s - a)(s - b)(s - c)}{b^2}.
\end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo ΔABC ao quadrado é dada por

$$(ABC)^2 = \left(\frac{b}{2} \cdot h\right)^2 = \frac{b^2}{4} \cdot h^2 = \frac{b^2}{4} \cdot \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2} = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

portanto,

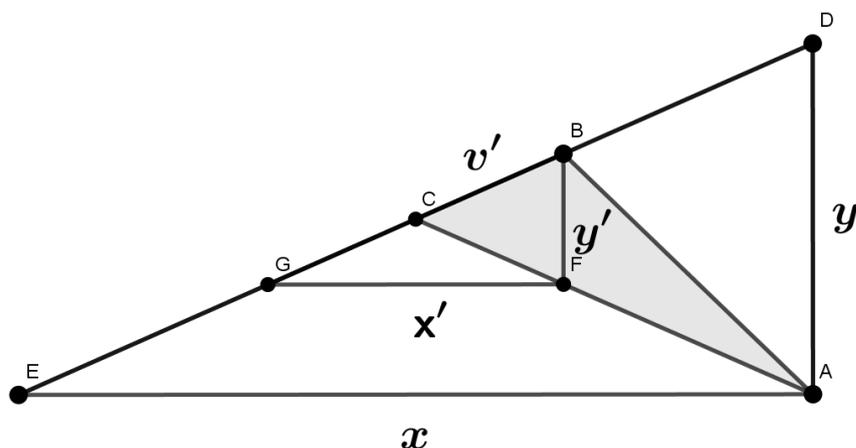
$$(ABC) = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}.$$

3.6. A DEMONSTRAÇÃO MEDIEVAL DE AL-SHANNĪ

Conforme Id e Kennedy (1969, pp. 585-587), em torno do século 10 d.C., Abū 'Abdallāh Muhammad bin Ahmad al-Shannī apresentou uma prova para a fórmula de Heron. O manuscrito de al-Shannī (MS 223, p. 11-16) está localizado na Biblioteca Oriental da Universidade de São José, em Beirute – Líbano. Escrita originalmente em árabe, os símbolos utilizados na prova de al-Shannī foram traduzidos por Id e Kennedy para a notação científica moderna. Assim, a fim de provar a fórmula de Heron, al-Shannī parte do lema abaixo, demonstrado na sequência:

Na Figura 8, $BC = v'$ é segmento da hipotenusa de um triângulo reto $\triangle ADE$. A extremidade C de BC deve ser o ponto médio da hipotenusa e a outra extremidade, B , de BC é qualquer ponto dessa hipotenusa. Os segmentos $GF = x'$ e $FB = y'$ são paralelos aos lados $EA = x$ e $AD = y$ respectivamente.

Figura 8 – Demonstração medieval por al-Shannī



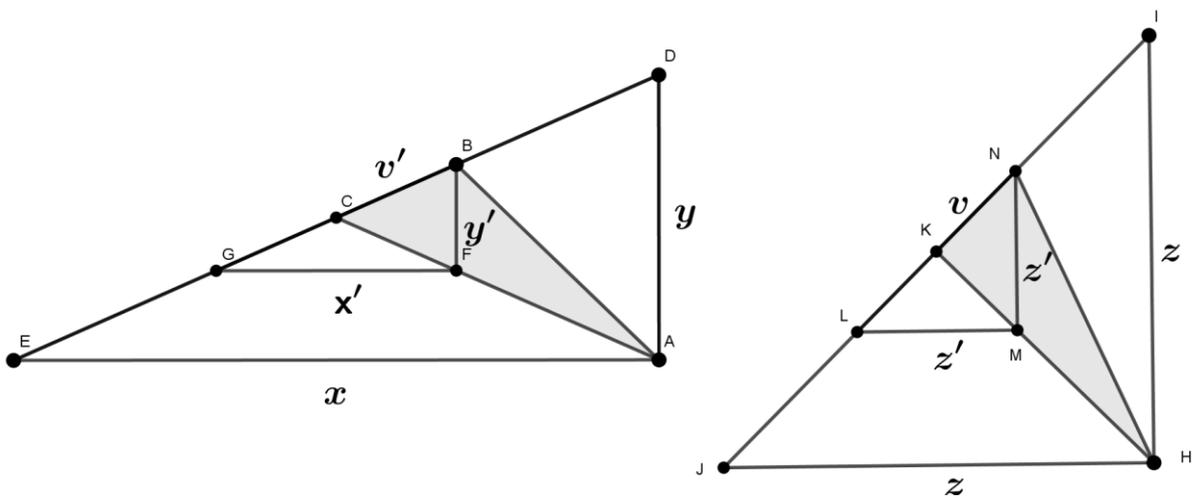
Fonte: Autor, baseado em Id e Kennedy (1969, pp. 585-587).

Então, afirma-se que

$$4 \cdot (ABC) = \sqrt{x \cdot x' \cdot y \cdot y'}$$

Para provar esse fato, al-Shannī fez uso de outro esquema, que é um triângulo retângulo isósceles ΔJHI de tamanho z geometricamente proporcional ao problema genérico da Figura 8, isto é, $z = \sqrt{x \cdot y}$, (ver Figura 9). Da mesma maneira, o segmento $KN = v$ é de tal forma que uma de suas extremidades está sobre o ponto médio da hipotenusa e a outra satisfazendo $z' = \sqrt{x' \cdot y'}$.

Figura 9 – Demonstração do lema de al-Shannī



Fonte: Autor, baseado em Id e Kennedy (1969, pp. 585-587).

Por semelhanças de triângulos em ΔHJK e ΔLMN

$$\frac{z}{KJ} = \frac{2v}{z'}$$

Logo,

$$z \cdot z' = 2v \cdot KJ = 2v \cdot KH = 4 \cdot (KNH).$$

Também por semelhanças nos triângulos em ΔLKM e ΔJKH

$$\frac{v}{KJ} = \frac{z'}{z} = \frac{\sqrt{x'y'}}{\sqrt{xy}}.$$

Outra vez por semelhanças nos triângulos em ΔBCF e ΔDCA

$$\frac{v'}{CD} = \frac{y'}{y} = \frac{\sqrt{x'y'}}{\sqrt{xy}}.$$

Desde que os triângulos ΔADE e ΔFBG sejam semelhantes.

Então, a área do triângulo ΔABC é igual a área do triângulo ΔHNK , pois a relação abaixo é verdadeira

$$\frac{v}{KJ} = \frac{v'}{CD}.$$

Como suas áreas são iguais, $(ABC) = (HNK)$, segue

$$(4(ABC))^2 = (4.(HNK))^2 = \left(4.v.\frac{KH}{2}\right)^2 = (2.v.KJ)^2 = (z.z')^2 = x.x'.y.y',$$

logo,

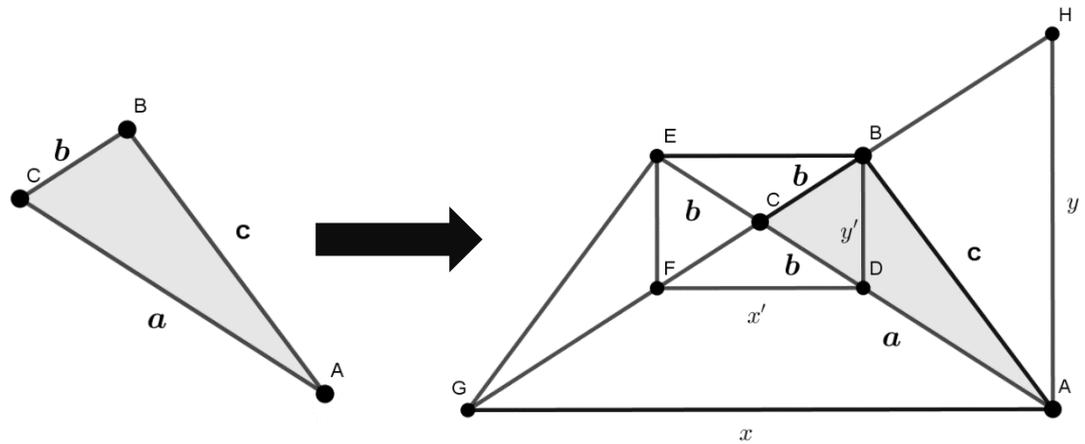
$$4.\Delta ABC = \sqrt{x.x'.y.y'}.$$

Desse modo, o lema ficou demonstrado. Ou, como afirmava al-Shannī, quatro vezes a área do triângulo ΔABC é a média geométrica das áreas do retângulo de lados x e x' e do retângulo de lados y e y' .

Dessa forma, para um triângulo qualquer ΔABC de comprimentos dos lados a, b e c dos respectivos lados AC, CB e AB se adequar ao lema, devemos proceder da seguinte forma.

Em uma extremidade do segmento AC , por exemplo o ponto C , marque dois segmentos de tamanhos b , um internamente, $CD = b$, e outro externamente, $CE = b$, no prolongamento de AC . Este segmento $ED = 2b$ será a diagonal do retângulo $EBDF$. Da interseção do segmento AC com AB , o ponto A , trace o segmento $AH = y$ paralela a $BD = y'$ e o segmento $AG = x$ paralelo a $BE = x'$, onde G e H estão na reta BC .

Figura 10 – Adequação a proposta de al-Shannī



Fonte: Autor, baseado em Id e Kennedy (1969, pp. 585-587).

Então, a Figura 10 encontrada está nos moldes do lema mencionado.

Para determinar os segmentos x, x', y e y' , basta usar o teorema de Ptolomeu⁴ nos trapézios isósceles, portanto inscritíveis, $ABEG$ e $ADBH$. Assim

$$AE \cdot BG = EB \cdot GA + AB \cdot EG \Leftrightarrow (a + b)^2 = x' \cdot x + c^2$$

$$AB \cdot DH = y \cdot y' + DA \cdot BH \Leftrightarrow (c)^2 = y \cdot y' + (a - b)^2$$

então, substituindo no lema $x \cdot x'$ e $y \cdot y'$, temos

$$\begin{aligned} (ABC) &= \frac{1}{4} \sqrt{x \cdot x' \cdot y \cdot y'} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{((a + b)^2 - c^2) \cdot (c^2 - (a - b)^2)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c) \cdot (c + a - b)(c - a + b)}, \end{aligned}$$

adotando que $2s = a + b + c$, segue que

⁴Em um quadrilátero inscrito em uma circunferência tem-se que o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos, Muniz Neto (2013, p. 145).

$$(ABC) = \frac{1}{4} \sqrt{(2s)(2s - 2c) \cdot (2s - 2b)(2s - 2a)},$$

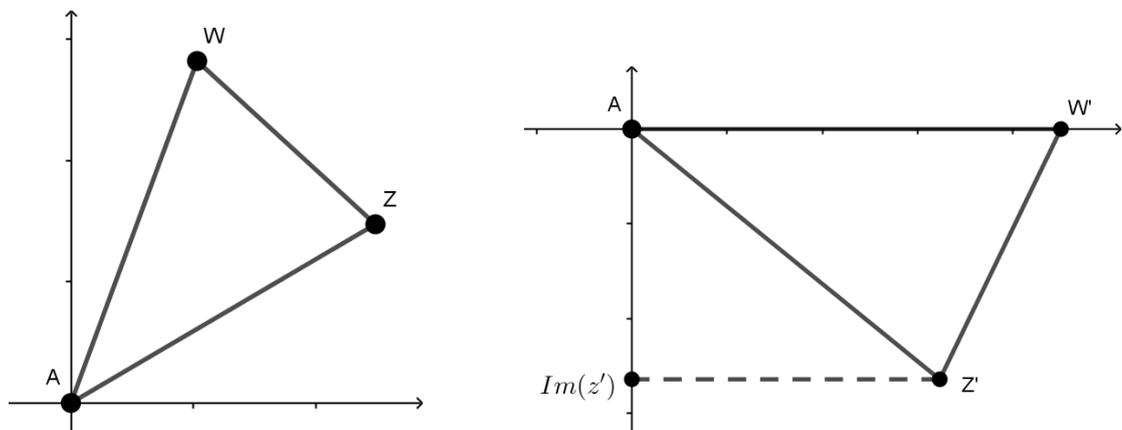
ou seja,

$$(ABC) = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

3.7. A DEMONSTRAÇÃO COM NÚMEROS COMPLEXOS POR STROETHOFF

Stroethoff (1999, pp. 292-293) se propõe a apresentar uma prova para a fórmula de Heron sobre a área de um triângulo utilizando-se de números complexos. Para tanto, sejam dois números complexos distintos e não nulos z e w . Assim, ao multiplicá-los por \bar{w} resulta em duas implicações: os rotacionar em relação à origem, no sentido oposto do argumento de w ; e em os dilatar de um fator $|w|$. Isto é,

Figura 11 – Demonstração Com Números Complexos



Fonte: Autor, baseado em Stroethoff (1999, pp. 292-293).

Portanto,

$$w' = w \cdot \bar{w} = |w|^2 \text{ e } z' = z \cdot \bar{w}.$$

Assim, fica claro que a área a direita, da Figura 11, é $\frac{1}{2}|w|^2 \cdot \text{Im}(z')$. Porém, como os lados foram dilatados de $|w|$, sua área foi também alterada de $|w|^2$. Então, é sabido que a área de um triângulo de vértices A, Z e W é igual a

$$(AZW) = \frac{(AW'Z')}{|w|^2} = \left| \frac{1}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w}) \right|.$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} 4 \cdot (AZW)^2 &= (\text{Im}(z \cdot \bar{w}))^2 \\ &= \left(\frac{z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{(z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w)^2}{(2i)^2} \\ &= -\frac{1}{4} (z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w)^2 \\ &= -\frac{1}{4} (z^2 \bar{w}^2 - 2 \cdot z \bar{w} \bar{z} w + \bar{z}^2 \cdot w^2) \\ &= \frac{1}{4} (2|z|^2 |w|^2 - z^2 \bar{w}^2 - \bar{z}^2 w^2) \\ &= \frac{1}{4} (4|z|^2 |w|^2 - (z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w)^2) \\ &= \frac{1}{4} (2|z||w| + (z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w)) \cdot (2|z||w| - (z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w)) \\ &= \frac{1}{4} (2|z||w| + (z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w) + w \cdot \bar{w} - w \cdot \bar{w} + z \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{z}) \cdot (2|z||w| \\ &\quad - z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w + w \cdot \bar{w} - w \cdot \bar{w} + z \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{z}) \\ &= \frac{1}{4} (2|z||w| + |w|^2 + |z|^2 + z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w - w \cdot \bar{w} - z \cdot \bar{z}) \cdot (2|z||w| \\ &\quad - |w|^2 - |z|^2 - z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w + w \cdot \bar{w} + z \cdot \bar{z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} ((|z| + |w|)^2 + z(\bar{w} - \bar{z}) + w(\bar{z} - \bar{w})) \cdot (-(|z| - |w|)^2 \\
&\quad - z \cdot (\bar{w} - \bar{z}) + w(\bar{w} - \bar{z})) \\
&= \frac{1}{4} ((|z| + |w|)^2 + (z - w)(\bar{w} - \bar{z})) \cdot (-(|z| - |w|)^2 \\
&\quad + (w - z) \cdot (\bar{w} - \bar{z})) \\
&= \frac{1}{4} ((|z| + |w|)^2 - |z - w|^2) \cdot (|w - z|^2 - (|z| - |w|)^2) \\
&= \frac{1}{4} (|z| + |w| + |z - w|)(|z| + |w| - |z - w|) \cdot (|w - z| + |z| \\
&\quad - |w|)(|w - z| - |z| + |w|)
\end{aligned}$$

Adotando que $2s = |z| + |w| + |z - w|$, segue que

$$\begin{aligned}
4. (AZW)^2 &= \frac{1}{4} (2s)(2s - 2|z - w|) \cdot (2s - 2|w|)(2s - 2|z|), \\
(AZW)^2 &= (s)(s - |z - w|) \cdot (s - |w|)(s - |z|).
\end{aligned}$$

Se os lados de um triângulo ΔABC medem a, b e c , então este triângulo é congruente ao triângulo com vértices A, Z e W desde que $|z| = a, |w| = b$ e $|z - w| = c$. Dessa maneira, a área do triângulo ΔABC é dado por

$$(AZW)^2 = (ABC)^2 = (s)(s - c) \cdot (s - b)(s - a).$$

3.8. PROVA GEOMÉTRICA SEM PALAVRAS DE MAEKAWA

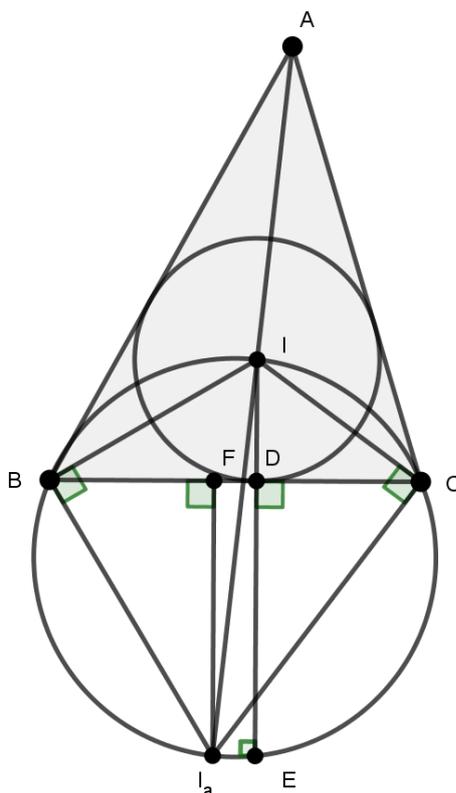
Maekawa (2004, pp. 546-548) traz à tona duas formas geométricas para provar a fórmula de Heron. Contudo, nas exatas palavras do autor “*The well-known formula can be proved without word*” [tradução: A bem conhecida fórmula pode ser provada sem palavras]. Assim, o autor apresenta suas duas provas para a fórmula de Heron utilizando-se apenas de uma figura e poucas considerações para cada demonstração, especificamente duas linhas de equações.

A falta de detalhamento por parte de Maekawa (2004, pp. 546-548) dificultou bastante a compreensão e a reprodução das suas duas provas. Nessa dissertação de mestrado, será abordada apenas a primeira delas, com o passo a passo detalhado a partir da nossa compreensão.

Dessa maneira, considere um triângulo qualquer ΔABC de comprimentos dos lados a, b e c dos respectivos lados BC, AC e AB . Onde I é o incentro da circunferência de raio $DI = r$, I_a é o centro do ex-incentro⁵ relativo ao vértice A , o ponto D é a tangência com BC , e DE e FI_a são de mesmo comprimento, e denominados raio da circunferência ex-inscrita, r_a .

Pela tangência da circunferência inscrita, temos que BD vale $s - b$ e CD vale $s - c$, em que s é igual a $(a + b + c)/2$, ou seja, o semiperímetro de ΔABC .

Figura 12 – Demonstração trigonométrica por Dobbs



Fonte: Autor, baseado em Maekawa (2004, pp. 546-548).

⁵ Um exincentro é um ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos externos de um triângulo qualquer. A partir dele, pode-se traçar uma única circunferência que tangencia um dos lados e o prolongamento dos outros dois, Muniz Neto (2013, p. 105).

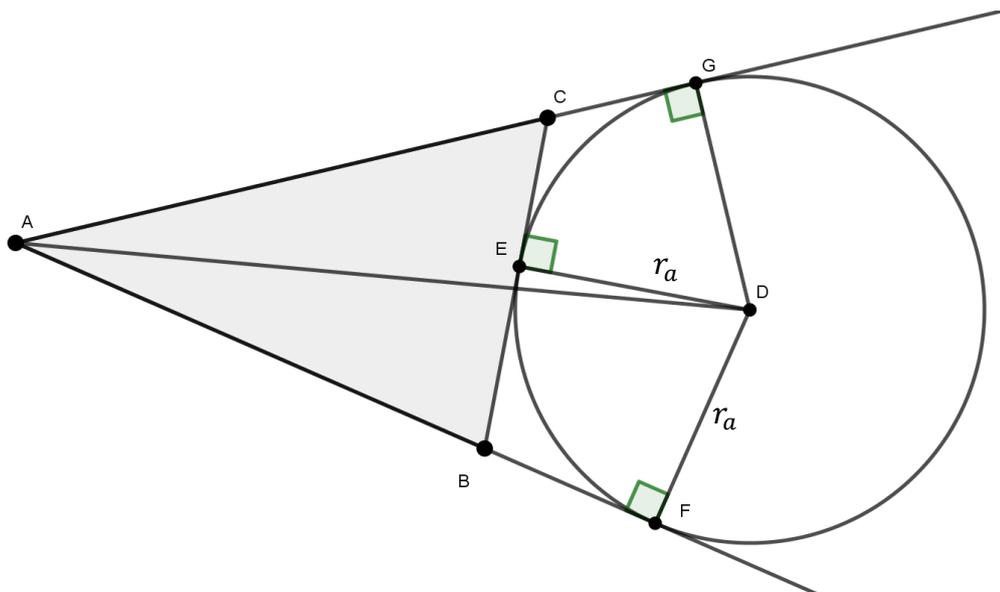
Pela potência do ponto D interior à circunferência BCI , segue que

$$BD \cdot DC = DI \cdot DE \Leftrightarrow (s - b) \cdot (s - c) = r \cdot r_a$$

Como é sabido que a área de um triângulo ΔABC é dado por $s \cdot r$, porém não é tão notório que a área de ΔABC também pode ser expressa por $r_a \cdot (s - a)$, onde r_a é o raio do exincentro relativo ao vértice A , como demonstraremos.

Considerando a Figura 13, note que a circunferência exinscrita é tangente ao lado BC e aos prolongamentos dos lados AC e AB .

Figura 13 – Área de um triângulo em função do raio do círculo exinscrito



Fonte: Autor

Então, a área do triângulo ΔABC é a soma das áreas dos triângulos ΔACD com ΔABD subtraindo do triângulo ΔBCD , ou seja

$$\begin{aligned} (ABC) &= \Delta ACD + \Delta ABD - \Delta BCD \\ &= \frac{AC \cdot DG}{2} + \frac{AB \cdot DF}{2} - \frac{BC \cdot DE}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b \cdot r_a}{2} + \frac{c \cdot r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2} \\
&= \frac{r_a}{2} (b + c + a - a - a) \\
&= \frac{r_a}{2} (2s - 2a),
\end{aligned}$$

logo,

$$(ABC) = r_a(s - a).$$

Assim, substituindo na potência do ponto D as áreas discutidas, temos

$$\begin{aligned}
(s - b) \cdot (s - c) &= r \cdot r_a \Leftrightarrow \\
&= \frac{(ABC)}{s} \cdot \frac{(ABC)}{(s - a)}.
\end{aligned}$$

E chegamos onde desejávamos

$$(ABC) = \sqrt{(s)(s - c) \cdot (s - b)(s - a)}.$$

3.9. PROVA GEOMÉTRICA SEM PALAVRAS DE NELSEN

Ao estudar a fórmula de Heron, Nelsen (2001, pp. 290-292) afirma que ela pode ser provada por uma variedade de métodos: algébrico, geométrico, trigonométrico e com as teorias de funções. Diante dessa variedade de possibilidades, o autor seleciona o método geométrico para desenvolver mais uma prova para a temática em questão.

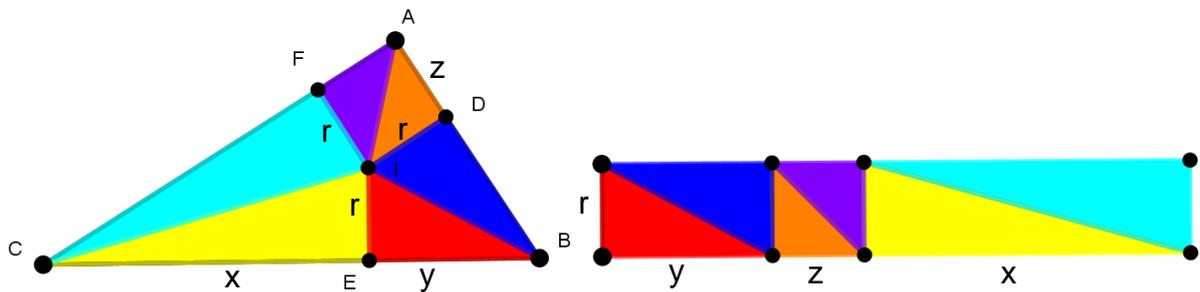
No ponto de partida de seu estudo, Nelsen (2001, pp. 290-292) dispensa palavras, utilizando-se apenas de dois lemas em forma de figura. Somente no momento da comprovação é que ele desenvolve algumas poucas equações, acrescentando uma terceira figura elucidativa. Entretanto, a fim de viabilizar e/ou otimizar o entendimento pelo leitor, resolvemos abordar o passo a passo de maneira detalhada e justificada.

O primeiro lema é mostrar que a área de ΔABC é dada por

$$(ABC) = (\text{semiperímetro}) \cdot (\text{raio inscrito}) = (x + y + z) \cdot r = s \cdot r$$

O que é notável perceber na construção abaixo, visto que a área do triângulo ΔABC é numericamente igual à área do retângulo de lados r e $(x+y+z)$, como relata Nelsen (2001, pp. 290-292).

Figura 14 – Ilustração da área de um triângulo em função do raio inscrito



Fonte: Autor, baseado em Nelsen (2001, pp. 290-292)

Contudo, o segundo lema proposto, que também é apresentado em imagem no artigo original, serve para mostrar que, de acordo com a Figura 15, vale a igualdade abaixo

$$Tg(\alpha) \cdot Tg(\beta) + Tg(\alpha) \cdot Tg(\gamma) + Tg(\beta) \cdot Tg(\gamma) = 1.$$

desde que $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Portanto, vamos realçar mais esse desenvolvimento, o qual usaremos as relações trigonométricas da tangente e da secante.

Seja um retângulo qualquer $GRSQ$ em que um de seus ângulos internos seja dividido em 3 partes, α, β e γ e o ponto T conforme a Figura 15.

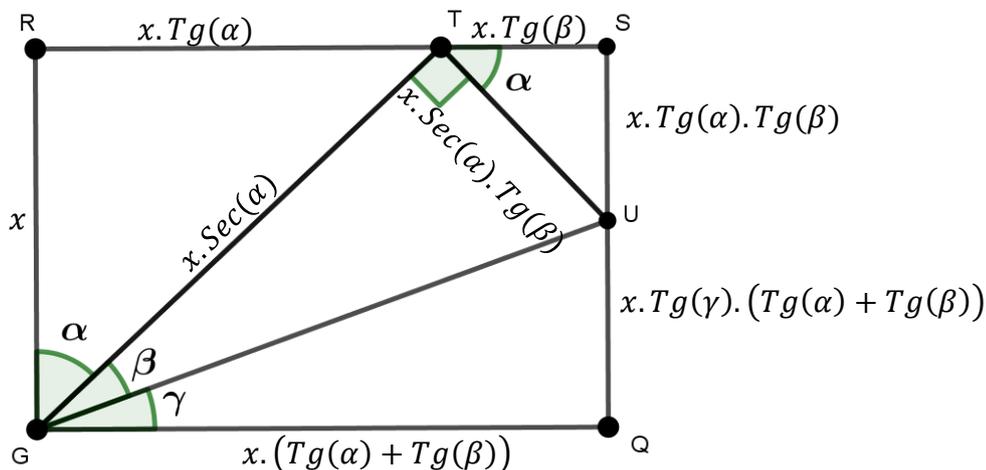
Sendo o segmento GR igual a x , temos que:

$$Tg(\alpha) = \frac{RT}{RG} = \frac{RT}{x} \Rightarrow RT = x \cdot Tg(\alpha).$$

Então, o segmento GT será

$$\sec(\alpha) = \frac{GT}{GR} = \frac{GT}{x} \Rightarrow GT = x \cdot \sec(\alpha).$$

Figura 15 – Lema das três tangentes complementares



Fonte: Autor, baseado em Nelsen (2001, pp. 290-292).

Continuando com os demais segmentos segue que

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Tg}(\beta) = \frac{TU}{TG} = \frac{TU}{x \cdot \sec(\alpha)} \Rightarrow TU = x \cdot \sec(\alpha) \cdot \operatorname{Tg}(\beta), \\ \sec(\alpha) = \frac{TU}{TS} = \frac{x \cdot \sec(\alpha) \cdot \operatorname{Tg}(\beta)}{TS} \Rightarrow TS = x \cdot \operatorname{Tg}(\beta), \\ \operatorname{Tg}(\alpha) = \frac{SU}{ST} = \frac{SU}{x \cdot \operatorname{Tg}(\beta)} \Rightarrow SU = x \cdot \operatorname{Tg}(\alpha) \operatorname{Tg}(\beta), \\ \operatorname{Tg}(\gamma) = \frac{QU}{QG} = \frac{QU}{RT + TS} = \frac{QU}{x \cdot (\operatorname{Tg}(\alpha) + \operatorname{Tg}(\beta))} \Rightarrow QU = x \operatorname{Tg}(\gamma) \cdot (\operatorname{Tg}(\alpha) + \operatorname{Tg}(\beta)). \end{array} \right.$$

Portanto, como $GR = QS = x$ concluímos que

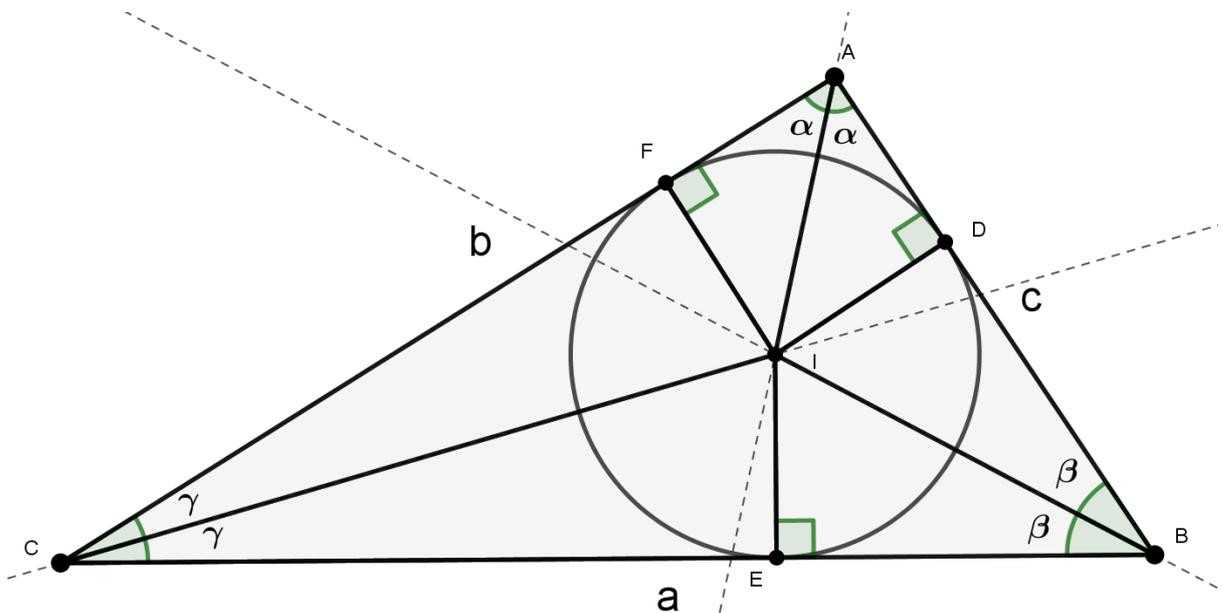
$$\begin{aligned} GR = x &= QS \\ &= US + QU \\ &= x \cdot \operatorname{Tg}(\alpha) \cdot \operatorname{Tg}(\beta) + x \operatorname{Tg}(\gamma) \cdot (\operatorname{Tg}(\alpha) + \operatorname{Tg}(\beta)) \\ 1 &= \operatorname{Tg}(\alpha) \cdot \operatorname{Tg}(\beta) + \operatorname{Tg}(\gamma) \cdot \operatorname{Tg}(\alpha) + \operatorname{Tg}(\beta) \cdot \operatorname{Tg}(\gamma). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Então, a demonstração da fórmula de Heron se sustenta usando os lemas anteriores nos triângulos ΔADI , ΔBIE e ΔCIF da Figura 16.

Considere um triângulo qualquer ΔABC cujos comprimentos a, b e c se referem aos respectivos lados BC, AC e AB . Sendo I o incentro de raio $DI = EI = FI = r$, isso resulta que $CF = CE = x, BE = BD = y$ e $AD = AF = z$.

Figura 16 – Demonstração por Nelsen



Fonte: Autor, , baseado em Nelsen (2001, pp. 290-292)

Sendo $Tg(\alpha) = \frac{DI}{DA} = \frac{r}{z}, Tg(\beta) = \frac{EI}{EB} = \frac{r}{y}$ e $Tg(\gamma) = \frac{FI}{CI} = \frac{r}{x}$ então segue dos lemas que

$$1 = Tg(\alpha).Tg(\beta) + Tg(\gamma).Tg(\alpha) + Tg(\beta).Tg(\gamma)$$

$$1 = \frac{r}{z} \cdot \frac{r}{y} + \frac{r}{x} \cdot \frac{r}{z} + \frac{r}{y} \cdot \frac{r}{x}$$

$$1 = \frac{x \cdot r^2 + y \cdot r^2 + z \cdot r^2}{xyz}$$

$$r^2(x + y + z) = xyz$$

$$r^2 s = xyz$$

Multiplicando por s e manipulando de forma que $x = s - a, y = s - b$ e $z = s - c$ temos

$$r^2 s \cdot s = xyz \cdot s$$

$$(s \cdot r)^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Portando, como a área do triângulo ΔABC é $s \cdot r$

$$(ABC)^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

$$(ABC) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

como queríamos demonstrar.

CAPÍTULO 4

FÓRMULAS DO TIPO HERON

Iniciamos este capítulo com o esboço de uma definição para a expressão “fórmula do tipo Heron”, e depois apresentamos um mapeamento inédito composto por quatro fórmulas que se enquadram nesse conceito. A primeira fórmula do tipo Heron calcula a área de um triângulo a partir do conhecimento das medianas, sendo provada de duas maneiras: com conhecimento algébrico e geométrico. Em seguida, trazemos uma fórmula para encontrar a área de um triângulo a partir da determinação das alturas e, depois, dos ângulos internos. Na sequência, abordamos uma fórmula do tipo Heron envolvendo cevianas provadas de três modos, todas de autoria de Lord: uma algébrica, uma geométrica e a última via teorema de Routh.

4.1. FÓRMULA DO TIPO HERON

A Fórmula de Heron, como muitas vezes já citada, é a fórmula para determinar a área (ABC) , de um triângulo a partir de seus lados a , b e c . Assim, considerando que s é o semiperímetro do triângulo, temos:

$$(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Baker (1885a, pp. 136-138), complementado com Baker (1885b, pp. 11-18), nos orientou a listar as fórmulas que seguem esse mesmo padrão. Nesses dois estudos, são listadas 110 formas de obtenção da área de um triângulo, podendo esse total ser expandido para 288 modos a partir da permutação de alguns parâmetros. Assim, chegamos nas fórmulas do tipo Heron.

Nesse contexto, identificamos Bényi (2003, p. 324) como o pioneiro do material estudado a usar o termo “*Heron-Type*”. Porém, o autor não traz uma definição formal do que seria uma fórmula do tipo Heron. Assim, entendemos que a expressão “fórmula do tipo Heron” pode ser compreendida como um conceito genérico que envolve

diversas formulações que se assemelham com a fórmula original de Heron por três motivos: utiliza de um determinado parâmetro predominante para a obtenção da área de um triângulo; envolve raiz quadrada; e emprega a lógica de utilizar a metade da soma do parâmetro envolvido.

Desse modo, construímos a tabela abaixo apresentando as fórmulas do tipo Heron as quais serão discutidas e provadas nas próximas seções deste capítulo.

Tabela 1 – Exemplos de fórmulas tipo Heron

Variável predominante	Expressão	Seção
Medianas	$\frac{4}{3}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}$	4.2
Alturas	$\left(4\sqrt{h(h - x^{-1})(h - y^{-1})(h - z^{-1})}\right)^{-1}$	4.3
Ângulos	$K\sqrt{S(S - \text{Sen}(\hat{A}))(S - \text{Sen}(\hat{B}))(S - \text{Sen}(\hat{C}))}$	4.4
Cevianas	$\frac{1}{(1 - \mu\lambda)}\sqrt{l(l - l_a)(l - l_b)(l - l_c)}$	4.5

Fonte: Autor

4.2. ÁREA DE UM TRIÂNGULO CONHECIDAS AS MEDIANAS

De acordo com Bényi (2003, pp. 324-326), Ernest W. Hobson traz à tona uma fórmula do tipo Heron em seu livro intitulado "*A treatise on plane and advanced trigonometry*", publicado em 1891. Na edição de 1891, Hobson menciona a seguinte fórmula, alegando ser capaz de calcular a área de um triângulo com base apenas nas medianas, sem incluir qualquer demonstração:

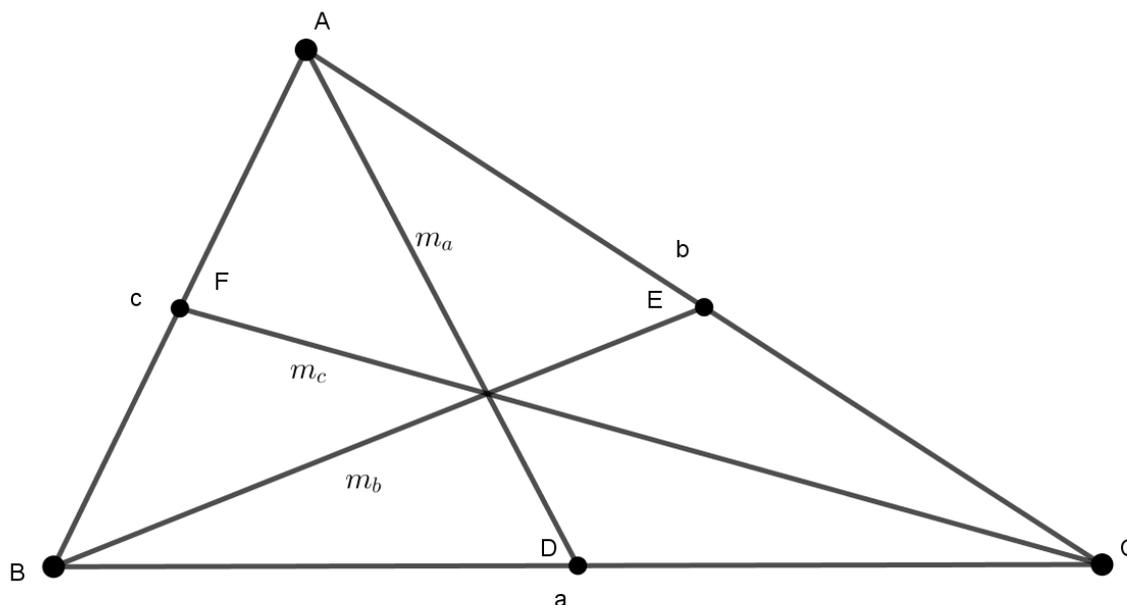
$$(ABC) = \frac{4}{3}\sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}. \quad (1)$$

Segundo Bényi (2003, pp. 324-326), na edição de 1928, a obra de Hobson acrescenta uma demonstração trigonométrica para essa fórmula. Contudo, após a edição de 1928, a obra de Hobson deixa de citar a referida fórmula do tipo Heron.

Nessa linha de raciocínio, Bényi (2003, pp. 324-326) se propõe a apresentar duas demonstrações para a fórmula do tipo Heron citada por Hobson, uma com abordagem algébrica e outra de caráter geométrico.

Assim, para ambas as demonstrações de Bényi, considere um triângulo ΔABC cujos comprimentos a, b e c se referem aos respectivos lados BC, AC e AB . Os pontos D, E e F são pontos médios dos segmentos BC, AC e AB , respectivamente. Dessa maneira, denotaremos por m_a a medida da mediana em relação ao lado BC e, analogamente, para m_b e m_c .

Figura 17 – Medianas em um triângulo qualquer



Fonte: Autor, baseado em Bényi (2003, pp. 324-326)

Conhecido que a área de um triângulo de medidas de lados a, b e c é dado por

$$(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (2)$$

devemos mostrar que essa mesma área pode ser expressa por

$$(ABC) = \frac{4}{3} \sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}, \quad (3)$$

onde $2s = a + b + c$ e $2m = m_a + m_b + m_c$.

4.2.1. Uma prova algébrica

No triângulo descrito na Figura 17, segue da lei dos cossenos dos ângulos $\angle ADB$ e $\angle ADC$ que

$$\begin{cases} c^2 = (m_a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot (m_a) \cdot a \cdot \text{Cos}(\angle ADB) \\ b^2 = (m_a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot (m_a) \cdot a \cdot \text{Cos}(\angle ADC) \end{cases}$$

Como os ângulos $\angle ADB$ e $\angle ADC$ são suplementares

$$\begin{cases} c^2 = (m_a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot (m_a) \cdot a \cdot \text{Cos}(\widehat{ADB}) \\ b^2 = (m_a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot (m_a) \cdot a \cdot \text{Cos}(\widehat{ADB}) \end{cases}$$

Somando as duas equações, determinamos que

$$m_a = \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}}$$

De forma análoga, determinamos m_b e m_c , ou seja,

$$m_b = \sqrt{\frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}} \quad e \quad m_c = \sqrt{\frac{2(b^2 + a^2) - c^2}{4}}.$$

A partir dessas informações, para alcançarmos o objetivo de demonstrar a fórmula do tipo Heron baseada nas medianas (3), basta desenvolvermos a expressão $16m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)$, atribuindo os valores de m_a , m_b e m_c , e lembrando que $2s = a + b + c$ e $2m = m_a + m_b + m_c$, temos que

$$\begin{aligned} 16m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c) &= 2m(2m - 2m_a)(2m - 2m_b)(2m - 2m_c) \\ &= (m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c) \\ &= [(m_a + m_b)^2 - (m_c)^2][(m_c)^2 - (m_a - m_b)^2] \\ &= [m_a^2 + 2m_a m_b + m_b^2 - m_c^2][m_c^2 - m_a^2 + 2m_a m_b - m_b^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [2m_a m_b + (m_a^2 + m_b^2 - m_c^2)][2m_a m_b - (m_a^2 + m_b^2 - m_c^2)] \\
&= (2m_a m_b)^2 - (m_a^2 + m_b^2 - m_c^2)^2 \\
&= 4 \cdot \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \cdot \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \\
&\quad - \left(\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} - \frac{2(b^2 + a^2) - c^2}{4} \right)^2 \\
&= \frac{(8b^2 + 8c^2 - 4a^2) \cdot (2a^2 + 2c^2 - b^2)}{16} \\
&\quad - \frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 - 2b^2 - 2a^2 + c^2)^2}{16} \\
&= \frac{-8a^4 + 20a^2b^2 + 8a^2c^2 - 8b^4 + 8b^2c^2 + 16c^4}{16} - \frac{(-a^2 - b^2 + 5c^2)^2}{16} \\
&= \frac{-8a^4 + 20a^2b^2 + 8a^2c^2 - 8b^4 + 8b^2c^2 + 16c^4}{16} \\
&\quad - \frac{25c^4 + b^4 + a^4 - 10a^2c^2 - 10b^2c^2 + 2a^2b^2}{16} \\
&= \frac{-9a^4 - 9b^4 - 9c^4 + 18a^2b^2 + 18a^2c^2 + 18b^2c^2}{16} \\
&= \frac{9}{16} (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) \\
&= \frac{9}{16} (4b^2c^2 - (-2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4)) \\
&= \frac{9}{16} ((2bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2) \\
&= \frac{9}{16} (2bc + a^2 - b^2 - c^2)(2bc - a^2 + b^2 + c^2) \\
&= \frac{9}{16} (a^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - a^2) \\
&= \frac{9}{16} [(a + b - c)(a - b + c)][(b + c + a)(b + c - a)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{9}{16} [(2s - 2c)(2s - 2b)][(2s)(2s - 2a)] \\
&= 9 \cdot s(s - a)(s - b)(s - c)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$16m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c) = 9 \cdot s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Logo, das equações (2) e (3) temos

$$(ABC) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \frac{4}{3} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)},$$

Como queríamos demonstrar.

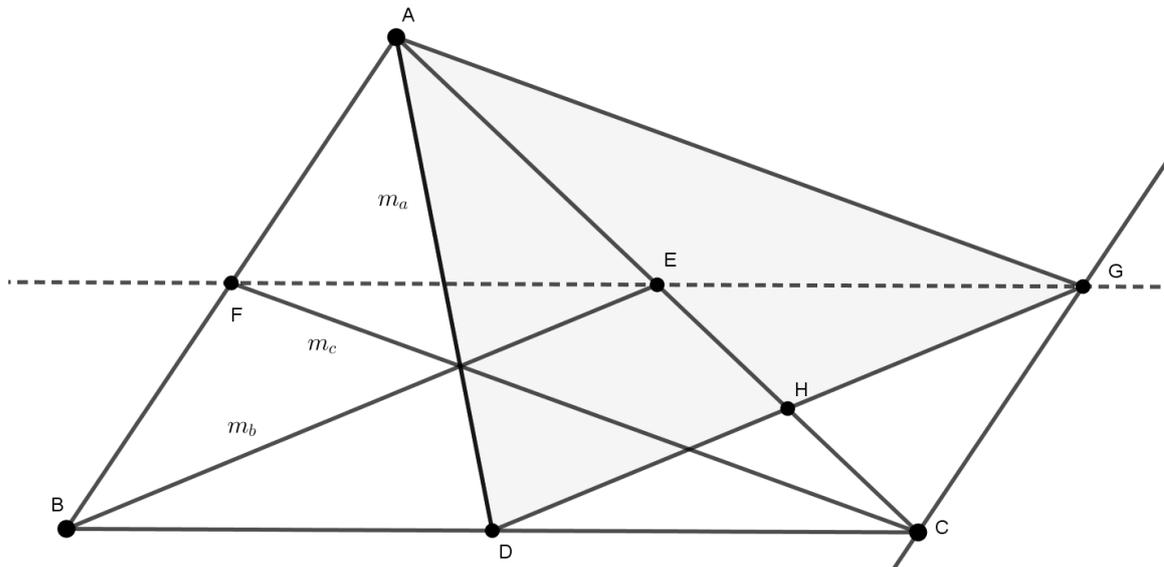
Note que a fórmula (3) indica que a área do triângulo ΔABC é igual a de um triângulo de lados m_a, m_b e m_c corrigido de um fator $4/3$ e isto é usado com artifício para mostrar a fórmula em termos da mediana geometricamente.

4.2.2. Uma prova geométrica

Segundo Monteiro (2008), a ideia dessa demonstração é determinar o fator de $4/3$ entre as áreas de um triângulo de lados a, b e c com um triângulo de lados m_a, m_b e m_c . Para tanto, considere um triângulo ΔABC cujos comprimentos dos lados a, b e c se referem aos respectivos lados BC, AC e AB . Os pontos D, E e F são pontos médios dos segmentos BC, AC e AB respectivamente, como na seção 4.2.1. Denotaremos por m_a a medida da mediana em relação ao lado BC e, analogamente, para m_b e m_c .

Para a construção do triângulo de lados m_a, m_b e m_c , devemos traçar uma reta paralela a \overrightarrow{BC} que contenha o ponto E . Em seguida, devemos traçar outra reta, agora paralela ao lado \overrightarrow{AB} , que contenha o ponto C . Assim, determinamos o ponto G a partir da intersecção entre essas duas retas. O triângulo ΔADG é o triângulo procurado, pois,

Figura 18 – Demonstração geométrica com as medianas



Fonte: Autor, baseado em Bényi (2003, pp. 324-326)

- $AD = m_a$, pois D é ponto médio de BC .
- $DG = BE = m_b$, pois $BEGD$ é um paralelogramo, visto que, \overrightarrow{EG} é paralelo a \overrightarrow{BD} , pelo fato de EF ser base média de ΔABC , e \overrightarrow{BE} é paralelo a \overrightarrow{DG} , pois \overrightarrow{BE} é paralelo a \overrightarrow{DH} , visto que DH é base média do triângulo ΔBEC .
- $AG = FC = m_c$, pois $AFCG$ é um paralelogramo, visto que, \overrightarrow{AF} é paralelo a \overrightarrow{CG} , por construção, e esses segmentos são iguais pois os triângulos ΔEAF e ΔEGC são congruentes.

Então, partiremos a demonstrar que

$$(ADG) = \frac{3}{4}(ABC).$$

Como D é ponto médio de BC , e H é ponto médio de EC , temos que os triângulos ΔBEC e ΔDHC são semelhantes de razão 2, logo

$$(DHC) = \frac{1}{4}(BEC).$$

Porém, a área do triângulo ΔABC é o dobro da área do triângulo ΔBEC . Isso porque possuem mesma base; porém, sua altura é a metade. Então

$$(DHC) = \frac{1}{4}(BEC) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(ABC) = \frac{(ABC)}{8}.$$

Como H é ponto médio de DG , podemos calcular a área de ΔADG do seguinte modo

$$(ADG) = 2 \cdot (ADH) = 2[(ADC) - (DHC)] = 2 \left[\frac{(ABC)}{2} - (DHC) \right],$$

logo,

$$\begin{aligned} (ADG) &= 2 \left[\frac{(ABC)}{2} - \frac{(ABC)}{8} \right] \\ &= 2 \left[\frac{3(ABC)}{8} \right] = \frac{3}{4}(ABC) \end{aligned}$$

portanto,

$$(ADG) = \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)} = \frac{3}{4} \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \frac{3}{4}(ABC)$$

ou

$$(ABC) = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \frac{4}{3} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)},$$

como queríamos demonstrar.

Nota-se que sempre conseguiremos montar um triângulo com os lados m_a, m_b e m_c , pois adotando $a \geq b \geq c > 0$ temos que $0 < m_a \leq m_b \leq m_c$. Assim, temos que também valem as seguintes inequações

$$\begin{cases} m - m_c = \frac{m_a + m_b - m_c}{2} > 0, \text{ ou seja, } m_a + m_b > m_c. \\ m - m_b = \frac{m_a + m_c - m_b}{2} > 0, \text{ ou seja, } m_a + m_c > m_b. \\ m - m_a = \frac{m_b + m_c - m_a}{2} > 0, \text{ ou seja, } m_b + m_c > m_a. \end{cases}$$

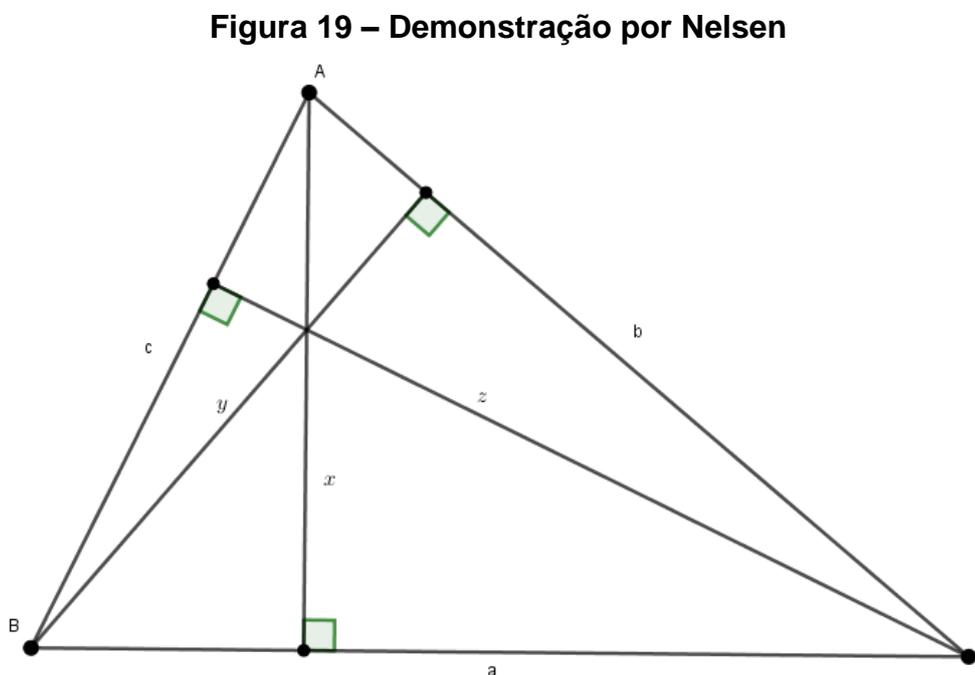
Pois, no caso absurdo de $m_a + m_b < m_c$, teríamos que um desses fatores $(m - m_a)(m - m_b)$ da equação (3) fosse também negativo. Assim, se $m - m_a < 0$ temos que $m_b + m_c < m_a$, de forma que somando essas inequações chegaríamos no

absurdo que $2m_b < 0$. Analogamente, supondo que o fator negativo é o $(m - m_b)$, chegaríamos no absurdo que $2m_a < 0$. Ou seja, $m_a + m_b > m_c$, e o mesmo vale para as outras inequações. Diante do exposto, concluímos que os segmentos de comprimentos m_a, m_b e m_c formam sempre um triângulo.

4.3. ÁREA DE UM TRIÂNGULO CONHECIDAS AS ALTURAS

Em sua análise sobre a fórmula do tipo Heron mencionada por Hobson envolvendo medianas, Bényi afirma não ser possível apresentar uma fórmula substituindo as medianas por altura. Todavia, Mitchell (2005, p. 494) sustenta ser possível repensá-la e reescrevê-la em termos do inverso da área e inverso das alturas.

Considere um triângulo ΔABC cujos comprimentos a, b e c se referem aos respectivos lados BC, AC e AB , bem como x, y e z se referem às suas respectivas alturas, conforme figura abaixo.



Fonte: Autor, baseado em Mitchell (2005, p. 494)

Devemos mostrar que, conhecida a sua área a partir dos lados na equação (2), também podemos reescreve em função das alturas, ou seja

$$(ABC)^{-1} = 4\sqrt{h(h - x^{-1})(h - y^{-1})(h - z^{-1})}, \quad (4)$$

onde, $2h = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$.

Para isso, basta lembrar que a área de um triângulo é dada por $(ABC) = \frac{1}{2}a \cdot x = \frac{1}{2}b \cdot y = \frac{1}{2}c \cdot z$. Dessa forma, temos que

$$\begin{cases} a = \frac{2 \cdot (ABC)}{x}, \\ b = \frac{2 \cdot (ABC)}{y}, \\ c = \frac{2 \cdot (ABC)}{z}. \end{cases}$$

Portanto, temos as identidades

$$\begin{cases} s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot (ABC)}{x} + \frac{2 \cdot (ABC)}{y} + \frac{2 \cdot (ABC)}{z} \right) = (ABC)(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}), \\ s - a = \frac{b + c - a}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot (ABC)}{y} + \frac{2 \cdot (ABC)}{z} - \frac{2 \cdot (ABC)}{x} \right) = (ABC)(y^{-1} + z^{-1} - x^{-1}), \\ s - b = \frac{a + c - b}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot (ABC)}{x} + \frac{2 \cdot (ABC)}{z} - \frac{2 \cdot (ABC)}{y} \right) = (ABC)(x^{-1} + z^{-1} - y^{-1}), \\ s - c = \frac{a + b - c}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot (ABC)}{x} + \frac{2 \cdot (ABC)}{y} - \frac{2 \cdot (ABC)}{z} \right) = (ABC)(x^{-1} + y^{-1} - z^{-1}). \end{cases}$$

Assim, substituindo-os em (2)

$$\begin{aligned} (ABC) &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \\ &= \sqrt{(ABC)^4(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})(y^{-1} + z^{-1} - x^{-1})(x^{-1} + z^{-1} - y^{-1})(x^{-1} + y^{-1} - z^{-1})} \\ &= (ABC)^2 \sqrt{2h \cdot (2h - 2x^{-1})(2h - 2y^{-1})(2h - 2z^{-1})} \\ &= (ABC)^2 4 \cdot \sqrt{h \cdot (h - x^{-1})(h - y^{-1})(h - z^{-1})} \end{aligned}$$

Então, ao dividir ambos os lados por $(ABC)^2$, temos a equação (4), como queríamos.

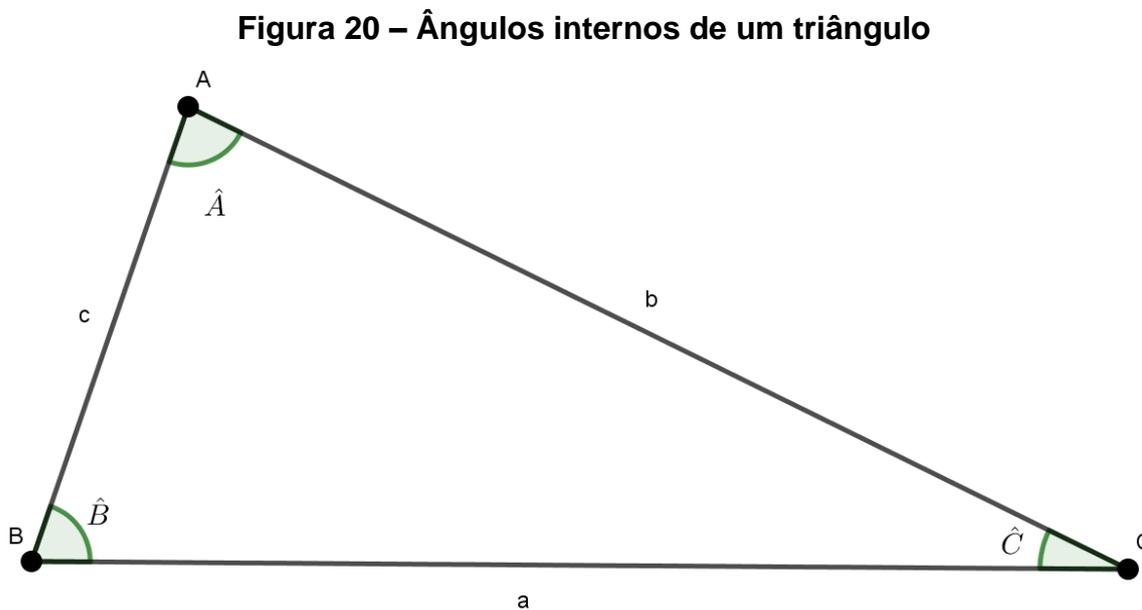
Nota-se que o procedimento geométrico feito para as medianas, não é possível ser reproduzido com as alturas. Isso porque, no exemplo de um triângulo com lados

$a = 5, b = 12$ e $c = 13$, suas alturas seriam $x = 12, y = 5$ e $z = 60/13$. Entretanto, essas medidas não formam um triângulo, visto que $5 + \frac{60}{13} < 12$.

4.4. ÁREA DE UM TRIÂNGULO CONHECIDOS OS ÂNGULOS

Além da fórmula do tipo Heron envolvendo inversos da área e das alturas de um triângulo, Mitchell (2009, pp. 108-109) apresenta outra contribuição para o tema em questão. Diferente da primeira, a segunda abordagem tem caráter trigonométrico, baseada nos senos dos ângulos internos.

Considere um triângulo ΔABC cujos comprimentos a, b e c se referem aos lados BC, AC e AB , bem como \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} se referem aos ângulos internos dos respectivos vértices A, B e C, conforme figura abaixo.



Fonte: Autor, baseado em Mitchell (2009, pp. 108-109)

Devemos mostrar que, conhecida sua área a partir dos lados, visto na equação (2), também podemos reescrevê-la em função dos ângulos. Contudo, o mais correto a afirmar é que escrevemos a área do triângulo em função dos ângulos e de um dos lados, ou seja

$$(ABC) = K \sqrt{S(S - \text{Sen}(\hat{A}))(S - \text{Sen}(\hat{B}))(S - \text{Sen}(\hat{C}))}, \quad (5)$$

onde K é o quadrado do diâmetro da circunferência inscrita em ΔABC , ou seja, pela lei dos senos, Muniz Neto (2013, p. 233), $K = \frac{a^2}{(\text{Sen}(\hat{A}))^2} = \frac{b^2}{(\text{Sen}(\hat{B}))^2} = \frac{c^2}{(\text{Sen}(\hat{C}))^2}$ e S é a semissoma dos senos, ou seja, $S = \frac{1}{2}(\text{Sen}(\hat{A}) + \text{Sen}(\hat{B}) + \text{Sen}(\hat{C}))$.

Para isso, basta lembrar que a área de um triângulo também é dada por $(ABC) = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \text{Sen}(\hat{C}) = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \text{Sen}(\hat{B}) = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \text{Sen}(\hat{A})$. Dessa forma, temos que

$$\begin{cases} \text{Sen}(\hat{A}) = \frac{2 \cdot (ABC)}{b \cdot c}, \\ \text{Sen}(\hat{B}) = \frac{2 \cdot (ABC)}{a \cdot c} \\ \text{Sen}(\hat{C}) = \frac{2 \cdot (ABC)}{a \cdot b} \end{cases}$$

Portanto, temos as seguintes identidades

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}(\text{Sen}(\hat{A}) + \text{Sen}(\hat{B}) + \text{Sen}(\hat{C})) = \frac{2 \cdot (ABC)}{2} \left(\frac{1}{b \cdot c} + \frac{1}{a \cdot c} + \frac{1}{a \cdot b} \right) = (ABC) \left(\frac{2s}{abc} \right), \\ S - \text{Sen}(\hat{A}) = (ABC) \left(\frac{2s}{abc} \right) - \frac{2 \cdot (ABC)}{b \cdot c} = \frac{2 \cdot (ABC)}{b \cdot c} \left(\frac{s}{a} - 1 \right) = \frac{2 \cdot (ABC)}{b \cdot c} \left(\frac{s-a}{a} \right), \\ S - \text{Sen}(\hat{B}) = (ABC) \left(\frac{2s}{abc} \right) - \frac{2 \cdot (ABC)}{a \cdot c} = \frac{2 \cdot (ABC)}{a \cdot c} \left(\frac{s}{b} - 1 \right) = \frac{2 \cdot (ABC)}{a \cdot c} \left(\frac{s-b}{b} \right), \\ S - \text{Sen}(\hat{C}) = (ABC) \left(\frac{2s}{abc} \right) - \frac{2 \cdot (ABC)}{a \cdot b} = \frac{2 \cdot (ABC)}{a \cdot b} \left(\frac{s}{c} - 1 \right) = \frac{2 \cdot (ABC)}{a \cdot b} \left(\frac{s-c}{c} \right). \end{cases}$$

Então, substituindo em (5), temos

$$\begin{aligned} (ABC) &= K \sqrt{S(S - \text{Sen}(\hat{A}))(S - \text{Sen}(\hat{B}))(S - \text{Sen}(\hat{C}))} \\ &= \frac{a^2}{(\text{Sen}(\hat{A}))^2} \sqrt{(ABC) \left(\frac{2s}{abc} \right) \frac{2 \cdot (ABC)}{b \cdot c} \left(\frac{s-a}{a} \right) \frac{2 \cdot (ABC)}{a \cdot c} \left(\frac{s-b}{b} \right) \frac{2 \cdot (ABC)}{a \cdot b} \left(\frac{s-c}{c} \right)} \\ &= \frac{a^2}{\left(\frac{2 \cdot (ABC)}{b \cdot c} \right)^2} \sqrt{\frac{(ABC)^4}{(abc)^4} \cdot 16s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2 b^2 c^2}{4(ABC)^2} \sqrt{16 \frac{(ABC)^4}{(abc)^4} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.
\end{aligned}$$

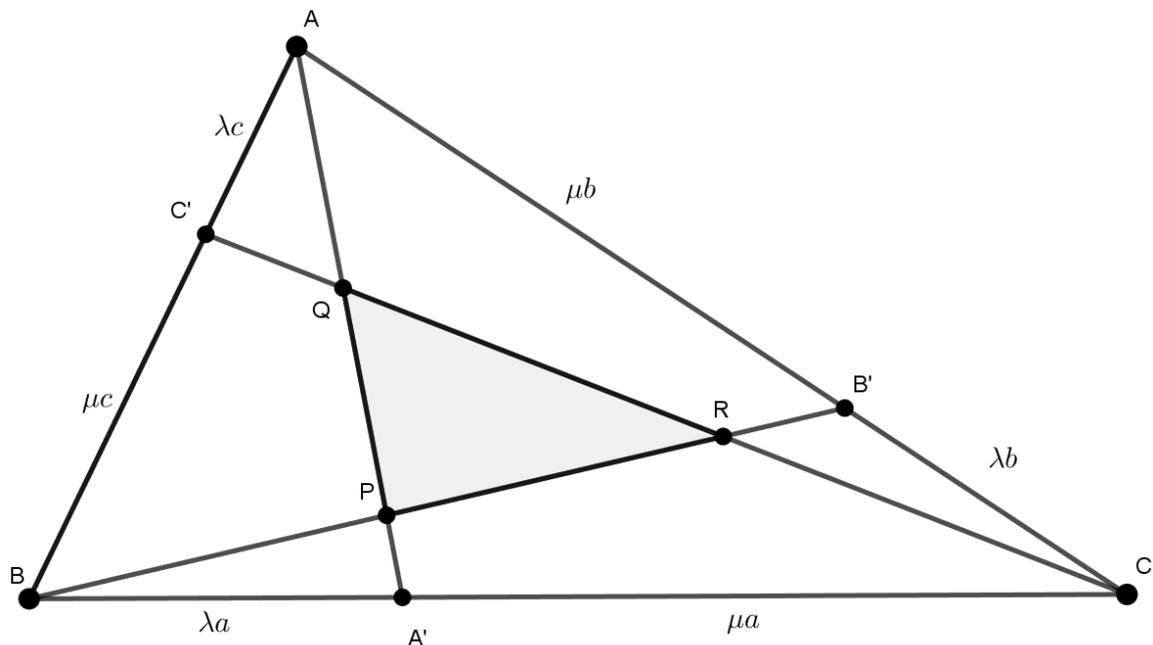
Assim, concluímos que

$$(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = K \sqrt{S(S - \text{Sen}(\hat{A}))(S - \text{Sen}(\hat{B}))(S - \text{Sen}(\hat{C}))}.$$

4.5. UMA FAMÍLIA DE FÓRMULAS TIPO HERON ENVOLVENDO CEVIANAS

Em seu estudo sobre fórmulas do tipo Heron, Lord (2013, pp. 294-297) se propõe a apresentar três contribuições diferentes para a temática a partir de uma família particular de cevianas: uma algébrica, inspirada nas medianas de Bényi e no teorema de Stewart; uma geométrica, utilizando paralelogramos para encontrar um triângulo de lados de medidas iguais às cevianas do triângulo original; e uma via teorema de Routh.

Figura 21 – Demonstração envolvendo cevianas



Fonte: Autor, baseado em Lord (2013, pp. 294-297)

Considere um triângulo ΔABC cujos comprimentos a, b e c se referem aos respectivos lados BC, AC e AB , bem como $l_a, l_b, e l_c$ se referem às suas respectivas cevianas, com extremos nos pontos A', B' e C' , pertencentes aos segmentos BC, AC e BC . Os lados dos triângulos são divididos na mesma proporção $\lambda: \mu$ com $\lambda + \mu = 1, \mu > 0, \lambda > 0$ e a interseção das cevianas determina o triângulo ΔPQR , conforme figura.

4.4.1. Uma prova algébrica de fórmulas tipo Heron por Lord

Primeiramente, vamos determinar l_a em função dos lados do triângulo. Para isso, ou utilizamos o teorema de Stewart, Muniz Neto (2013, p. 232), ou, de forma equivalente, porém mais detalhada, basta lembrarmos que $\text{Cos}(\angle AA'B) + \text{Cos}(\angle AA'C) = 0$, pois são ângulos suplementares, e aplicar a lei dos cossenos com esses ângulos.

$$\begin{cases} c^2 = (\lambda a)^2 + (l_a)^2 - 2\lambda a l_a \cdot \text{Cos}(\widehat{AA'B}), \\ b^2 = (\mu a)^2 + (l_a)^2 - 2\mu a l_a \cdot \text{Cos}(\widehat{AA'C}). \end{cases}$$

Então, multiplicando a primeira equação por μ e a segunda por λ , e depois somando elas com as devidas simplificações, temos

$$\begin{aligned} c^2 \mu + b^2 \lambda &= (\lambda a)^2 \cdot \mu + (l_a)^2 \mu + (\mu a)^2 \lambda + (l_a)^2 \lambda \\ &= a^2 \lambda \mu (\lambda + \mu) + (l_a)^2 (\mu + \lambda) \end{aligned}$$

Mas, pelo fato de $\lambda + \mu = 1$, resulta que

$$(l_a)^2 = c^2 \mu + b^2 \lambda - a^2 \lambda \mu.$$

Assim, analogamente para l_b e l_c , temos

$$\begin{cases} (l_b)^2 = a^2 \mu + c^2 \lambda - b^2 \lambda \mu, \\ (l_c)^2 = b^2 \mu + a^2 \lambda - c^2 \lambda \mu. \end{cases}$$

Lembrando que essas equações são aplicações direta da relação de Stewart, Muniz Neto (2013, p. 232).

Reescrevendo a fórmula de Heron, (2), com o objetivo de facilitar e diminuir a escrita das equações, temos

$$\begin{aligned}
 (ABC) &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
 (ABC)^2 &= \frac{1}{16} [(b+c+a)(b+c-a)][(a+b-c)(a-b+c)] \\
 &= \frac{1}{16} ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\
 &= \frac{1}{16} (2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2) \\
 &= \frac{1}{16} ((2bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2) \\
 &= \frac{1}{16} (4b^2c^2 - (-2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4)) \\
 &= \frac{1}{16} (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) \\
 &= \frac{1}{16} \left(\sum_{\substack{sim \\ x,y \in \{a,b,c\} \\ x \neq y}} x^2y^2 - \sum_{x \in \{a,b,c\}} x^4 \right)
 \end{aligned}$$

Ou seja, usamos o símbolo \sum^{sim} , denominado como soma simétrica, para diminuir a escrita, porém vale ressaltar que não computamos os termos de mesmos valores, assim,

$$16(ABC)^2 = \sum_{\substack{sim \\ x,y \in \{a,b,c\} \\ x \neq y}} x^2y^2 - \sum_{x \in \{a,b,c\}} x^4. \quad (6)$$

Então, vamos desenvolver a expressão abaixo para determinar uma relação com a equação (6) e, dessa maneira, vamos representar a área do triângulo ΔABC em função apenas das cevianas

$$2l_a^2l_b^2 + 2l_a^2l_c^2 + 2l_b^2l_c^2 - l_a^4 - l_b^4 - l_c^4$$

Ou, simplesmente,

$$\sum_{\substack{x,y \in \{l_a, l_b, l_c\} \\ x \neq y}}^{sim} x^2 y^2 - \sum_{x \in \{l_a, l_b, l_c\}}^{sim} x^4. \quad (7)$$

Desenvolvendo apenas o primeiro termo da expressão acima, através da substituição dos valores de l_a, l_b e l_c , temos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x,y \in \{l_a, l_b, l_c\} \\ x \neq y}}^{sim} x^2 y^2 &= 2(l_a^2 l_b^2 + l_a^2 l_c^2 + l_b^2 l_c^2) \\ &= 2((c^2 \mu + b^2 \lambda - a^2 \lambda \mu)(a^2 \mu + c^2 \lambda - b^2 \lambda \mu) \\ &\quad + (c^2 \mu + b^2 \lambda - a^2 \lambda \mu)(b^2 \mu + a^2 \lambda - c^2 \lambda \mu) \\ &\quad + (a^2 \mu + c^2 \lambda - b^2 \lambda \mu)(b^2 \mu + a^2 \lambda - c^2 \lambda \mu)) \\ &= 2((a^2 c^2 \mu^2 + c^4 \mu \lambda - b^2 c^2 \mu^2 \lambda + a^2 b^2 \mu \lambda + b^2 c^2 \lambda^2 - b^4 \mu \lambda^2 \\ &\quad - a^4 \mu^2 \lambda - a^2 c^2 \mu \lambda^2 + a^2 b^2 \mu^2 \lambda^2) \\ &\quad + (b^2 c^2 \mu^2 + a^2 c^2 \mu \lambda - c^4 \mu^2 \lambda + b^4 \mu \lambda + b^2 a^2 \lambda^2 \\ &\quad - b^2 c^2 \mu \lambda^2 - b^2 a^2 \mu^2 \lambda - a^4 \mu \lambda^2 + a^2 c^2 \mu^2 \lambda^2) \\ &\quad + (a^2 b^2 \mu^2 + a^4 \mu \lambda - a^2 c^2 \mu^2 \lambda + c^2 b^2 \mu \lambda + c^2 a^2 \lambda^2 \\ &\quad - c^4 \mu \lambda^2 - b^4 \mu^2 \lambda - a^2 b^2 \mu \lambda^2 + b^2 c^2 \mu^2 \lambda^2)) \\ &= 2(a^2 b^2 (\mu \lambda + \mu^2 \lambda^2 + \lambda^2 - \mu^2 \lambda + \mu^2 - \mu \lambda^2) \\ &\quad + a^2 c^2 (\mu \lambda + \mu^2 \lambda^2 + \lambda^2 - \mu^2 \lambda + \mu^2 - \mu \lambda^2) \\ &\quad + b^2 c^2 (\mu \lambda + \mu^2 \lambda^2 + \lambda^2 - \mu^2 \lambda + \mu^2 - \mu \lambda^2)) \\ &\quad + 2(a^4 (\mu \lambda - \mu^2 \lambda - \mu \lambda^2) + b^4 (\mu \lambda - \mu^2 \lambda - \mu \lambda^2) \\ &\quad + c^4 (\mu \lambda - \mu^2 \lambda - \mu \lambda^2)) \\ &= (\mu \lambda + \mu^2 \lambda^2 + \lambda^2 - \mu^2 \lambda + \mu^2 - \mu \lambda^2) \sum_{\substack{x,y \in \{a,b,c\} \\ x \neq y}}^{sim} x^2 y^2 \\ &\quad + 2(\mu \lambda - \mu^2 \lambda - \mu \lambda^2) \sum_{x \in \{a,b,c\}}^{sim} x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mu^2\lambda^2 + \mu^2 + \lambda^2 + \mu\lambda(1 - \mu - \lambda)) \sum_{\substack{x,y \in \{a,b,c\} \\ x \neq y}}^{sim} x^2y^2 \\
&\quad + 2(\mu\lambda(1 - \mu - \lambda)) \sum_{x \in \{a,b,c\}}^{sim} x^4 \\
&= (1 - \mu\lambda)^2 \sum_{\substack{x,y \in \{a,b,c\} \\ x \neq y}}^{sim} x^2y^2, \text{ pois } \mu + \lambda = 1.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo apenas o segundo termo da expressão (7) através da substituição dos valores de l_a, l_b e l_c , temos

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y \in \{l_a, l_b, l_c\}}^{sim} x^4 &= (l_a)^4 + (l_b)^4 + (l_c)^4 \\
&= (c^2\mu + b^2\lambda - a^2\lambda\mu)^2 + (a^2\mu + c^2\lambda - b^2\lambda\mu)^2 + (b^2\mu + a^2\lambda - c^2\lambda\mu)^2 \\
&= (c^4\mu^2 + b^4\lambda^2 + a^4\lambda^2\mu^2 + 2(b^2c^2\mu\lambda - a^2b^2\lambda^2\mu - a^2c^2\mu^2\lambda)) + \\
&\quad (a^4\mu^2 + c^4\lambda^2 + b^4\lambda^2\mu^2 + 2(a^2c^2\mu\lambda - b^2c^2\lambda^2\mu - a^2b^2\mu^2\lambda)) + (b^4\mu^2 + \\
&\quad a^4\lambda^2 + c^4\lambda^2\mu^2 + 2(a^2b^2\mu\lambda - a^2c^2\lambda^2\mu - b^2c^2\mu^2\lambda)) \\
&= (\lambda^2\mu^2 + \mu^2 + \lambda^2)a^4 + (\lambda^2\mu^2 + \mu^2 + \lambda^2)b^4 + (\lambda^2\mu^2 + \mu^2 + \lambda^2)c^4 \\
&\quad + 2(\mu\lambda - \lambda^2\mu - \mu^2\lambda)a^2b^2 + 2(\mu\lambda - \lambda^2\mu - \mu^2\lambda)a^2c^2 \\
&\quad + 2(\mu\lambda - \lambda^2\mu - \mu^2\lambda)b^2c^2 \\
&= (\lambda^2\mu^2 + \mu^2 + \lambda^2) \sum_{x \in \{a,b,c\}}^{sim} x^4 + (\mu\lambda - \lambda^2\mu - \mu^2\lambda) \sum_{\substack{x,y \in \{a,b,c\} \\ x \neq y}}^{sim} x^2y^2 \\
&= (1 - \mu\lambda)^2 \sum_{x \in \{a,b,c\}}^{sim} x^4, \text{ pois } \mu + \lambda = 1.
\end{aligned}$$

Assim, a expressão (7) se torna

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\text{sim} \\ x,y \in \{l_a, l_b, l_c\} \\ x \neq y}} x^2 y^2 - \sum_{x,y \in \{l_a, l_b, l_c\}} x^4 &= (1 - \mu\lambda)^2 \sum_{\substack{\text{sim} \\ x,y \in \{a,b,c\} \\ x \neq y}} x^2 y^2 - (1 - \mu\lambda)^2 \sum_{x \in \{a,b,c\}} x^4 \\
&= (1 - \mu\lambda)^2 \left(\sum_{\substack{\text{sim} \\ x,y \in \{a,b,c\} \\ x \neq y}} x^2 y^2 - \sum_{x \in \{a,b,c\}} x^4 \right) \\
&= (1 - \mu\lambda)^2 (16(ABC)^2).
\end{aligned}$$

Portanto, a área de um triângulo ΔABC em função das cevianas, que atende a Figura 21, é dado por

$$(ABC)^2 = \frac{1}{16(1 - \mu\lambda)^2} \left(\sum_{\substack{\text{sim} \\ x,y \in \{l_a, l_b, l_c\} \\ x \neq y}} x^2 y^2 - \sum_{x,y \in \{l_a, l_b, l_c\}} x^4 \right),$$

ou, adotando $l = (l_a + l_b + l_c)/2$, temos que a área do triângulo ΔABC , de maneira análoga a qual obtemos a equação (6), é dada por

$$(ABC) = \frac{1}{(1 - \mu\lambda)} \sqrt{l(l - l_a)(l - l_b)(l - l_c)}. \quad (8)$$

Notamos que sempre é possível formar um triângulo com os lados l_a, l_b e l_c , com justificativa análoga à abordada no tópico 4.2, ou seja, pois os quatros fatores dentro da raiz quadrada devem ser positivos, ou seja,

$$\begin{cases} l - l_c = \frac{l_a + l_b - l_c}{2} > 0, \text{ ou seja, } l_a + l_b > l_c. \\ l - l_b = \frac{l_a + l_c - l_b}{2} > 0, \text{ ou seja, } l_a + l_c > l_b. \\ l - l_a = \frac{l_b + l_c - l_a}{2} > 0, \text{ ou seja, } l_b + l_c > l_a. \end{cases}$$

Pois, no caso absurdo de $l_a + l_b < l_c$, teríamos que um desses fatores $(l - l_a)(l - l_b)$ da equação (8) fosse também negativo. Assim, se $l - l_a < 0$ temos que $l_b + l_c < l_a$, de forma que somando essas inequações chegaríamos no absurdo que $2l_b < 0$. Analogamente, supondo que o fator negativo é o $(l - l_b)$, chegaríamos no

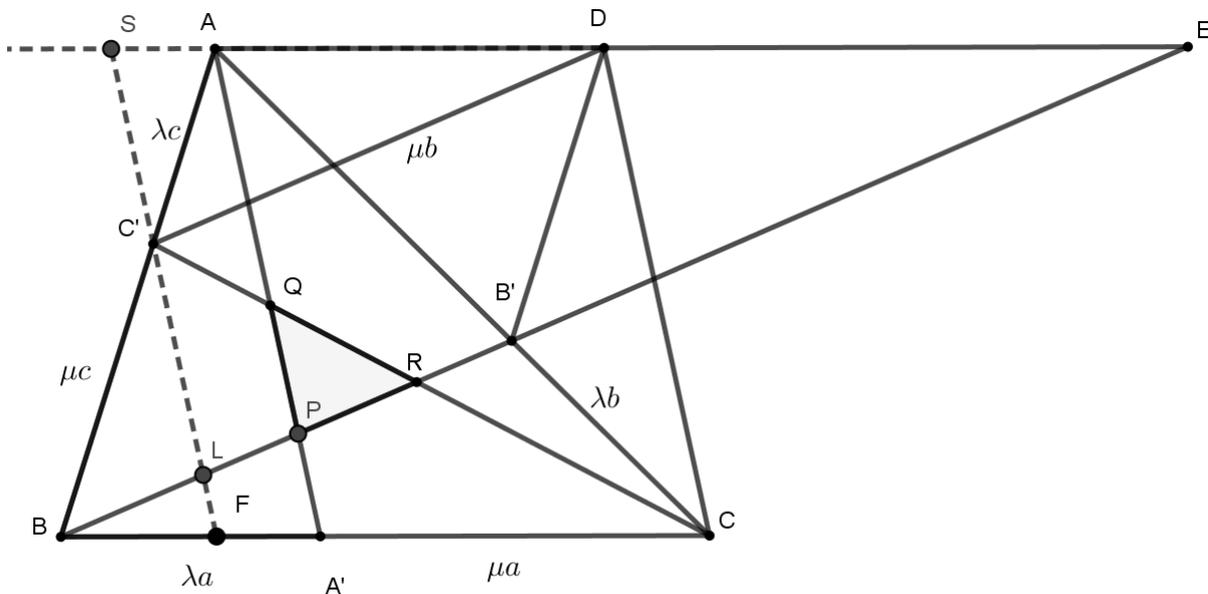
absurdo que $2l_a < 0$. Ou seja, $l_a + l_b > l_c$, e o mesmo vale para as outras inequações. Diante do exposto, concluímos que os segmentos de comprimentos l_a, l_b e l_c formam sempre um triângulo.

Além disso, no caso particular de $\mu = \lambda = \frac{1}{2}$, as cevianas se tornam medianas de maneira a reproduzir a fórmula (3).

4.4.2. Uma prova geométrica de fórmulas tipo Heron por Lord

Primeiramente, a partir da Figura 21, vamos formar o paralelogramo $AA'CD$ e a partir da interseção das retas \overleftrightarrow{AD} e $\overleftrightarrow{BB'}$ determinamos o ponto E , como mostra a figura a seguir.

Figura 22 – Demonstração Geométrica envolvendo cevianas



Fonte: Autor, baseado em Lord (2013, pp. 294-297)

Pela semelhança dos triângulos $\Delta B'BC$ e $\Delta B'EA$ temos

$$\frac{AE}{BC} = \frac{AB'}{B'C} \therefore \frac{AE}{a} = \frac{\mu b}{\lambda b} \therefore AE = \frac{\mu}{\lambda} a.$$

Então, como $\frac{AC'}{AB} = \lambda$ temos que

$$\frac{AD}{AE} = \frac{A'C}{\frac{\mu}{\lambda}a} = \mu a \cdot \frac{\lambda}{\mu a} = \lambda = \frac{AC'}{AB}.$$

Logo, pelo corolário do teorema de Tales Muniz Neto (2013, p. 125), segue que $\overrightarrow{C'D}$ é paralelo a \overrightarrow{BE} .

Por este fato, temos que

$$\frac{ED}{EA} = \frac{C'B}{AB} = \frac{\mu c}{c} = \mu.$$

Contudo, pelo paralelismo de \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BC} , temos que

$$\frac{EB'}{EB} = \frac{AB'}{AC} = \frac{\mu b}{b} = \mu.$$

Logo,

$$\frac{ED}{EA} = \mu = \frac{EB'}{EB}.$$

Portanto, $\overrightarrow{B'D}$ é paralelo a \overrightarrow{AB} . Assim $BC'DB'$ é um paralelogramo. O que resulta que o triângulo $\Delta CC'D$ tem comprimentos $CC' = l_c$, $CD = l_a$ e $C'D = l_b$.

Então para mostrar a proporção entre as áreas do triângulo ΔABC e o triângulo $\Delta CC'D$ devemos lembrar que áreas de triângulos com uma altura comum possuem áreas diretamente proporcionais à base relativa a essa altura comum; e as áreas de triângulos com uma base comum possuem áreas diretamente proporcionais às alturas relativas a essa base comum.

Denotando por $h_{c'}$ a altura do triângulo $\Delta BCC'$ relativo ao lado BC e por h_a a altura do triângulo ΔABC relativo ao lado BC . Então, construindo a reta $\overrightarrow{C'F}$ paralela a \overrightarrow{DC} temos que:

$$\begin{aligned} (ABC) &= (BCC') \cdot \frac{h_a}{h_{c'}} \\ &= (CFC') \cdot \frac{BC}{CF} \cdot \frac{h_a}{h_{c'}} \end{aligned}$$

$$= (CC'D) \cdot \frac{C'F}{DC} \cdot \frac{BC}{CF} \cdot \frac{h_a}{h_{c'}}.$$

Mas, da semelhança dos triângulos $\Delta ABA'$ e $\Delta C'BF$, temos que

$$\frac{AA'}{C'F} = \frac{h_a}{h_{c'}} \therefore \frac{C'F}{DC} \cdot \frac{h_a}{h_{c'}} = 1.$$

Ou seja,

$$(ABC) = (CC'D) \cdot \frac{BC}{CF}.$$

Pelo teorema de Thales⁶ temos

$$\frac{C'A}{BA} = \frac{FA'}{BA'} \therefore \frac{\lambda c}{c} = \frac{FA'}{\lambda a} \therefore FA' = \lambda^2 a.$$

Então a razão entre as áreas se torna

$$\begin{aligned} \frac{(ABC)}{(CC'D)} &= \frac{BC}{CF} \\ &= \frac{a}{FA' + A'C} \\ &= \frac{a}{\lambda^2 a + \mu a} \\ &= \frac{1}{\lambda^2 + \mu} \\ &= \frac{1}{\lambda(1 - \mu) + \mu} \\ &= \frac{1}{1 - \lambda\mu}. \end{aligned}$$

Então, usando a fórmula de Heron na identidade seguinte

$$(ABC) = \frac{1}{1 - \lambda\mu} (CC'D).$$

⁶ Conceito e definição do teorema de Thales em Muniz Neto (2013, p. 123)

reproduzimos a equação (8).

4.4.3. Uma prova via teorema de Routh de fórmulas tipo Heron por Lord

Para a demonstração utilizaremos como base a Figura 22 e suas características, ou seja, os lados do triângulo ΔABC foi dividido na proporção $\frac{\lambda}{\mu}$, e $ADCA'$ e $BC'DB'$ são paralelogramos. Então para reproduzir a equação (8), determinaremos a proporção entre as áreas dos triângulos ΔABC , ΔPQR e $\Delta DCC'$.

Para determinar a proporção entre as área de ΔPQR e $\Delta DCC'$ utilizamos o fato dos triângulos ΔPQR e $\Delta DCC'$ serem semelhantes, pois $\angle PRC'$ e $\angle RC'D$ são alternos internos, $\angle PQR$ e $\angle C'CD$ também são alternos internos e $\angle APR$ e $\angle CDC'$ são ângulos opostos a um paralelogramo, assim

$$\frac{CD}{PQ} = \frac{C'D}{RP} = \frac{C'C}{QR} = \frac{\sqrt{(DCC')}}{\sqrt{(PQR)}}$$

ou

$$\frac{A'A}{PQ} = \frac{B'B}{RP} = \frac{C'C}{QR} = \frac{\sqrt{(DCC')}}{\sqrt{(PQR)}}$$

Para determinar a razão $\frac{A'A}{PQ}$ analisamos primeiro a semelhança entre os triângulos $\Delta CQA'$ e $\Delta CC'F$

$$\frac{QA'}{C'F} = \frac{CA'}{CF} \therefore \frac{QA'}{C'F} = \frac{\mu a}{(\lambda^2 + \mu)a} \therefore QA' = \frac{\mu}{(\lambda^2 + \mu)} C'F.$$

Da semelhança dos triângulos $\Delta BC'F$ e $\Delta BAA'$ temos

$$\frac{C'F}{AA'} = \frac{C'B}{AB} \therefore \frac{C'F}{AA'} = \frac{\mu c}{c} \therefore C'F = \mu AA'.$$

Portanto,

$$QA' = \frac{\mu}{(\lambda^2 + \mu)} C'F = \frac{\mu^2}{(\lambda^2 + \mu)} AA'.$$

Considerando como ponto K a interseção das retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{C'D}$, temos as semelhanças dos triângulos $\Delta BPA'$ e ΔDKA que resulta em

$$\frac{PA'}{AK} = \frac{BA'}{AD} \therefore \frac{PA'}{AK} = \frac{\lambda a}{\mu a} \therefore PA' = \frac{\lambda}{\mu} AK.$$

E da semelhança dos triângulos ΔBPA e $\Delta C'KA$ temos

$$\frac{AK}{AP} = \frac{AC'}{AB} \therefore \frac{AK}{AP} = \frac{\lambda c}{c} \therefore AK = \lambda AP.$$

Portanto

$$PA' = \frac{\lambda}{\mu} AK = \frac{\lambda^2}{\mu} AP.$$

Somando $\frac{\lambda^2}{\mu} PA'$ em ambos os lados da equação anterior

$$PA' + \frac{\lambda^2}{\mu} PA' = \frac{\lambda^2}{\mu} AP + \frac{\lambda^2}{\mu} PA'$$

$$\left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu}\right) PA' = \frac{\lambda^2}{\mu} (AP + PA')$$

$$\left(\frac{\mu + \lambda^2}{\mu}\right) PA' = \frac{\lambda^2}{\mu} AA'$$

$$PA' = \frac{\frac{\lambda^2}{\mu}}{\left(\frac{\mu + \lambda^2}{\mu}\right)} AA' = \frac{\lambda^2}{\mu + \lambda^2} AA'.$$

Então como o segmento PQ é a diferença entre os segmentos QA' e PA' temos que

$$\begin{aligned} PQ &= |QA' - PA'| \\ &= \left| \frac{\mu^2}{(\lambda^2 + \mu)} AA' - \frac{\lambda^2}{\mu + \lambda^2} AA' \right| \\ &= \left| \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu + \lambda^2} \right| AA' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\mu + \lambda)(|\mu - \lambda|)}{\mu + \lambda^2} AA' \\
&= \frac{|\mu - \lambda|}{\mu + \lambda^2} AA'.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{AA'}{PQ} = \frac{\mu + \lambda^2}{|\mu - \lambda|}.$$

Então a razão entre as áreas dos triângulos ΔPQR e $\Delta DCC'$ é

$$\frac{\sqrt{(DCC')}}{\sqrt{(PQR)}} = \frac{A'A}{PQ} \therefore \frac{(DCC')}{(PQR)} = \left(\frac{A'A}{PQ}\right)^2 \therefore \frac{(DCC')}{(PQR)} = \left(\frac{\mu + \lambda^2}{\mu - \lambda}\right)^2.$$

Logo

$$(DCC') = \left(\frac{\mu + \lambda^2}{\mu - \lambda}\right)^2 (PQR). \quad (9)$$

Já a razão entre as áreas dos triângulos ΔPQR e ΔABC é uma aplicação direta do teorema de Routh, Ferreira (2017, p. 55), que afirma que seja um triângulo ΔABC e AA', BB' e CC' suas cevianas, no qual A', B' e C' pertencem aos respectivos segmentos BC, AC e AB . Se

$$x = \frac{BA'}{A'C}; y = \frac{CB'}{B'A} \text{ e } z = \frac{AC'}{C'B}$$

e $P = AA' \cap BB', Q = CC' \cap AA'$ e $R = BB' \cap CC'$, então,

$$\frac{(PQR)}{(ABC)} = \frac{(1 - xyz)^2}{(1 + x + xy)(1 + y + yz)(1 + z + zx)}.$$

Que no nosso caso, como $x = y = z = \frac{\lambda}{\mu}$, resulta em

$$\frac{(PQR)}{(ABC)} = \frac{\left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right)^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{\mu^3 - \lambda^3}{\mu^3}\right)^2}{\left(\frac{\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}{\mu^2}\right)^3} \\
&= \frac{(\mu^3 - \lambda^3)^2}{(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2)^3} \\
&= \frac{((\mu - \lambda)(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2))^2}{(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2)^3} \\
&= \frac{(\mu - \lambda)^2}{\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2} \\
&= \frac{(\mu - \lambda)^2}{(\mu + \lambda)\mu + \lambda^2} \\
&= \frac{(\mu - \lambda)^2}{\mu + \lambda^2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(PQR) = \frac{(\mu - \lambda)^2}{\mu + \lambda^2} (ABC). \quad (10)$$

Utilizando as relações (9) e (10) temos

$$(DCC') = \left(\frac{\mu + \lambda^2}{\mu - \lambda}\right)^2 \frac{(\mu - \lambda)^2}{\mu + \lambda^2} (ABC),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
(ABC) &= \frac{1}{\mu + \lambda^2} (DCC') = \frac{1}{1 - \lambda\mu} (DCC') \\
&= \frac{1}{1 - \lambda\mu} \sqrt{l(l - l_a)(l - l_b)(l - l_c)},
\end{aligned}$$

como queríamos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, estudamos a fórmula de Heron e, por consequência, as fórmulas do tipo Heron. Nessa empreitada, produzimos uma catalogação inédita de diversas demonstrações para a fórmula de Heron ao longo da história, o que inclui abordagens algébricas, geométricas, trigonométricas e por números complexos. Em acréscimo, inovamos com um mapeamento de várias fórmulas do tipo Heron baseadas em medianas, das alturas, dos ângulos e das cevianas.

Desse modo, considerando que a literatura apenas exemplifica fórmulas do tipo Heron, mas não apresenta uma definição formal para essa expressão, trazemos uma tentativa conceitual. Assim, entendemos que a expressão “fórmula do tipo Heron” pode ser compreendida como um conceito genérico que envolve diversas formulações que se assemelham com a fórmula original de Heron por três motivos: utiliza de um determinado parâmetro predominante para a obtenção da área de um triângulo; envolve raiz quadrada; e emprega a lógica de utilizar a metade da soma do parâmetro envolvido.

Nessa oportunidade, ressaltamos que o parâmetro predominante não pode ser os lados do triângulo, pois incorreríamos na própria fórmula de Heron. Dessa maneira, como já dissemos, através do mapeamento das fórmulas do tipo Heron, encontramos como parâmetros predominantes as medianas, as alturas, os ângulos e as cevianas de um triângulo.

Diante do exposto, verificamos que atendemos ao objetivo proposto de trazer uma catalogação robusta de diversas demonstrações para a fórmula de Heron, bem como de mapear fórmulas que se enquadram no conceito genérico de “fórmulas do tipo Heron”. Consequentemente, verificamos que a bibliografia utilizada correspondeu às expectativas, na medida em que atingimos o objetivo de fornecer duas catalogações inéditas: uma com demonstrações para a fórmula de Heron e outra com listagem de fórmulas do tipo Heron com respectivas demonstrações.

Por fim, trazemos algumas sugestões e recomendações para estudos futuros, quais sejam: pesquisar as correspondências entre a linguagem matemática utilizada

na obra Métrica e a atualidade; melhorar a tentativa conceitual que apresentamos para a expressão “fórmulas do tipo Heron”, ampliando a catalogação para encontrar novos exemplos; expandir o estudo das fórmulas do tipo Heron para situações em que todos os parâmetros predominantes sejam medidas inteiras, se assemelhando ao caso dos triângulos heronianos.

REFERÊNCIAS

- Baker, M. (1885a). A Collection of Formulae for the Area of a Plane Triangle. *Annals of Mathematics*, Vol. 1, No. 6, 134-138.
- Baker, M. (1885b). A Collection of Formulae for the Area of a Plane Triangle. *Annals of Mathematics*, Vol. 2, No. 1, 11-18.
- Bényi, Á. (2003). A Heron-Type Formula for the Triangle. *The Mathematical Gazette*, Vol. 87, No. 509, 324-326.
- Bitar, S. (11 de 04 de 2020). *Aventuras da História*. Fonte: Aventuras da História: <https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/almanaque/invencoes-heron-de-alexandria-no-imperio-romano.phtml>
- Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. São Paulo: Ed. da USP.
- Cooke, R. L. (2011). *The history of mathematics: A brief course*. . John Wiley & Sons.
- D'Ambrosio, B. S. (2007). REFLEXÕES SOBRE A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES. *Revista Brasileira de História da Matemática*, 399-406.
- Dalcin, M. (1998). A Demonstração Feita por Heron. *Revista Professor de Matemática*, s/p.
- Dobbs, D. E. (1984). Proving Heron's Formula Tangentially. *The College Mathematics Journal*, Vol. 15, No. 3 , 252-253.
- Dunham, W. (1985). An "Ancient/Modern" Proof of Heron's Formula. *The Mathematics Teacher*, Vol. 78, No. 4, 258-259.
- Dunham, W. (2011). Newton's Proof of Heron's Formula. *Math Horizons* , Vol. 19, No. 1 , 5-8.
- Eolípia. (2020). In: *WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre*. Flórida: Wikimedia Foundation. Disponível em:

<<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Eol%C3%ADpila&oldid=58702479>>

Acesso em: 7 jul. 2020.

Eves, H. (2011). *Introdução à História da Matemática* (5ª ed.). Campinas: Editora Unicamp.

Ferreira, F. D. (2017). *Unificando os teoremas de Menelaus e Ceva - Dissertação (mestrado em matemática)*. Juazeiro do Norte: Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática Rede Nacional - PROFMAT.

Han-Lin, Z. (1987). Another simple Heron. *The Mathematics Teacher*, 80(7), 510-511.

Id, Y., & Kennedy, E. (1969). A MEDIEVAL PROOF OF HERON'S FORMULA. *The Mathematics Teacher*, Vol. 62, No. 7, 585-587.

Lewis, M. J. (2001). *Surveying instruments of Greece and Rome*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lord, N. (2013). A family of Heron-type formulae for the triangle. *The Mathematical Gazette*, Vol. 97, No. 539, 294-297.

Maekawa, T. (2004). Two Intuitive Proofs of Heron's Formula. *The Mathematical Gazette*, Vol. 88, No. 513, 546-548.

Mitchell, D. W. (2005). A Heron-Type Formula for the Reciprocal Area of a Triangle. *The Mathematical Gazette*, Vol. 89, No. 516, 494.

Mitchell, D. W. (2009). A Heron-Type Area Formula in Terms of Sines. *The Mathematical Gazette*, Vol. 93, No. 526, 108-109.

Monteiro, M. A. (2008). Heron para medianas. *Revista Professor de Matemática*.

Muniz Neto, A. C. (2013). *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM.

Nelsen, R. B. (2001). Heron's Formula via Proofs Without Words. *The College Mathematics Journal*, Vol. 32, No 4, 290-292.

- Papadopoulos, E. (2007). *Heron of Alexandria (c. 10–85 AD)*. In: Ceccarelli M. (eds) *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science. History of Mechanism and Machine Science*. Dordrecht: Springer.
- Raifaizen, C. H. (1971). A Simpler Proof of Heron's Formula. *Mathematics Magazine*, Vol. 44, No. 1, 27-28.
- Roque, T. (2012). *História da matemática*. Schwarcz-Companhia das Letras.
- Roque, T., & Carvalho, J. B. (2012). *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM.
- Stroethoff, K. (1999). Heron's Formula via Complex Numbers. *The Mathematical Gazette*, Vol. 83, No. 497, 292-293.
- Thomas, I. (1957). *GREEK MATHEMATICS*. Cambridge: Harvard University Press.
- Thomas, I. (1957). *Selections illustrating the History of Greek Mathematics. With an English translation. In two volumes. II. From Aristarchus to Pappus*. CAMBRIDGE: HARVARD UNIVERSITY PRESS.
- Torrez, J. C. (1985). Simple Heron. *The Mathematics Teacher*, Vol. 78, No. 9, 664.