Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Os Poliedros de Platão

Por

Edvaldo Araújo dos Reis

Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Abril de 2013

Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Edavaldo Araújo dos Reis

Os Poliedros de Platão

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT.

Orientador: Prof°. Dr. Evilson da Silva Vieira

São Cristóvão- Sergipe
Abril de 2013

Reis, Edvaldo Araújo dos

R375p Os Poliedros de Platão / Edvaldo Araújo dos Reis; orientador Evilson da Silva Vieira. - São Cristóvão, 2013.

35 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) - Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Geometria. 2. Poliedros. 3. Teorema de Euler. I. Vieira, Evilson da Silva, orient. II. Título

CDU 514.12

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Os poliedros de platão

por

Edvaldo Araújo dos Reis

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Evilson da Silva Vieira - UFS
Orientador

Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior - UFES
Primeiro Examinador

Prof. Dr. Wilberclay Gonçalves Melo – UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 13 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Dedicatória

A toda minha família, em especial aos meus pais, Vandinho (in memoriam) e Carmelita, razões de meu viver; a meus irmãos, Evaldo, Evanda, Elânio, Érica, Edson e Eduardo; e a meus sobrinhos, Izaac, Morgana e Jacob. Todos alicerces de minha vida.

Agradecimentos

- A Deus, simplesmente por ser o Tudo.

- Aos meus pais, por todo esforço que fizeram para que eu estudasse. Pelos bons conselhos e por acreditarem e sentirem orgulho de mim.

- A todos os professores do PROFMAT-UFS; em especial ao meu orientador, Dr. Evilson, por suas sábias palavras.

- A cada um de meus irmãos: Evaldo, Evanda, Elânio, Erica, Edson e Eduardo. Meus grandes companheiros! Obrigado por acreditarem no meu trabalho.

- Aos meus familiares, em especial aos meus primos: Fafá, Sandrinha, Tião e Jane, por toda amizade, apoio e companheirismo, também são meus irmãos! Obrigado pela atenção!

- Aos demais colegas e professores de curso;

- Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos e definiremos os poliedros, seus elementos e vamos diferenciar os poliedros convexos dos não convexos. Será exposta a Relação de Euler (ou Teorema de Euler), teorema a qual diz: Seja um poliedro convexo com A arestas, F faces e V vértices, vale a igualdade $V - A + F = 2$. Daremos alguns detalhes sobre poliedros não-convexos. Chegaremos à parte mais importante deste trabalho que é definir os poliedros de Platão (ou regulares) e provar a existência de apenas cinco poliedros regulares: o tetraedro, o hexaedro (cubo), o octaedro, o dodecaedro e icosaedro.

Palavras-chave: Poliedros, Euler, Platão.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

É comum ouvirmos falar o quanto o ensino da geometria sofre com uma grande lacuna nas séries do Ensino Médio nas escolas públicas, em especial. Alguns estudiosos acreditam que isso se deva ao fato de que muitos profissionais não estejam bem qualificados, outros, ao fato de que o material didático não seja bem explorado. Vejamos o que nos diz os PCNs (Parâmetros Curriculares da Educação):

> "(...) tanto as propostas curriculares como os inúmeros trabalhos desenvolvidos por grupos de pesquisa ligados a Universidades e a outras instituições brasileiras são ainda bastante desconhecidos de parte considerável de professores que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivam as reformas. O que se observa é que as ideias ricas e inovadoras não chegam a eles, ou são incorporadas superficialmente, ou recebem interpretações inadequadas sem provocar mudanças desejáveis."[2]

Percebe-se que essa dificuldade, também, está devido ao pouco contato que os alunos têm com a geometria, desde as séries inicias. Com muita frequência, a geometria tem sido ensinada, de certa forma, mecanizada. Frequentemente esse fato é estabelecido através da generalização de resultados, sem a devida demonstração, quando necessária, passando a informação a grosso modo para os alunos. No sentido de uma melhoria nessa realidade, esperamos que o professor do Ensino Básico e até mesmo o próprio aluno desse Ensino, possam compreender todas as definições e demonstrações existentes neste trabalho e que, de alguma forma, os ajudem (principalmente ao professor) no ensino-aprendizagem do conteúdo aqui exposto. Para isso, dividimos este trabalho em três partes:

Na primeira parte (capítulo 2), daremos a definição de *polígonos* e *conjunto convexo*, definições que se fazem necessárias para uma interpretação lógica do significado de poliedros. Também definiremos a *região interna de um poliedro* e daremos o significado de sólido, segundo Hoffmann [5]. Mostraremos algumas relações entre os elementos do poliedro (vértices, arestas e faces).

Na segunda parte (capítulo 3) trataremos sobre o *Teorema de Euler*, que diz: Em todo poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação: $V - A + F = 2$. Também serão definidos o *gênero* e a *característica de Euler* de poliedros.

A terceira parte (capítulo 4) conclui este trabalho, definindo os *poliedros regulares*, os chamados *poliedros de Platão*, provando, através das relações entre os elementos do poliedro convexo, a existência de apenas cinco poliedros regulares: O tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Um pouco da parte histórica sobre esses poliedros será mostrada, onde inclui a associação que era feita entre os cinco poliedros de Platão e os elementos da natureza, fogo, terra, água e ar, e a comparação de um especial poliedro regular, o dodecaedro, com o universo.

Capítulo 2

Poliedros

A palavra poliedro é formada a partir de duas palavras gregas: polys, que significa várias e hédrai, que significa faces. Desde a antiguidade os poliedros foram estudados. Euclides dedicou os três últimos livros de sua obra, "Elementos", ao estudo de poliedros e sólidos, calculando área de superfícies e volume de sólidos.

Antes de definirmos poliedros, daremos três outras definições que serão úteis para o bom entendimento do significado de poliedro:

Definição 1: Chamamos de linha poligonal a toda linha que é formada por segmentos de reta consecultivos. As extremidades dos segmentos de reta que compõem a poligonal são chamadas vértices da poligonal. Dizemos que uma poligonal é fechada quando cada vértice é partilhado por exatamente dois segmentos, caso contrário, é dita aberta. Vejamos a figura abaixo:

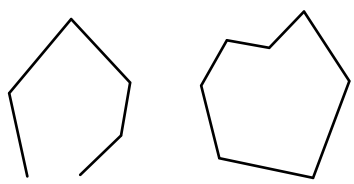

Figura 2.1: Linhas poligonais aberta (à esquerda) e fechada (à direita).

Definição 2: Chamamos de polígono a região do plano delimitada por uma linha poligonal fechada, incluindo a própria poligonal. Cada ponto de interseção dos segmentos de reta que formam essa poligonal é chamado de vértice do polígono e cada um dos segmentos de reta que compõem a poligonal é chamado de lado do polígono. Vejamos a figura 2.2 que representa dois polígonos:

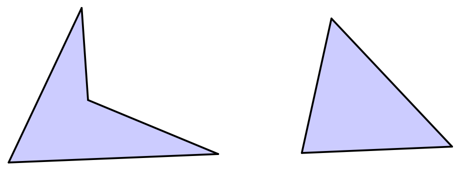

Figura 2.2: Polígonos.

Definição 3: Seja C um conjunto qualquer do plano ou do espaço, dizemos que C é convexo se todo segmento de reta que une dois pontos de C esteja, totalmente, contido em C. Caso contrário, C será chamado de não-convexo.

Definiremos agora poliedro:

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:

- *Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono. A figura abaixo ilustra o que não é um poliedro, segundo essa afirmação, pois a aresta destacada é comum a três faces.*

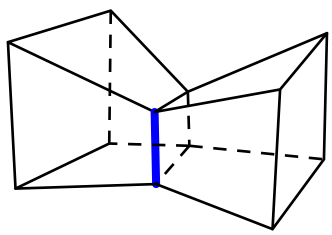

Figura 2.3: Objeto que não ilustra um poliedro.

- *A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. A figura abaixo não representa um poliedro segundo essa afirmação, pois a interseção de duas faces é um polígono.*

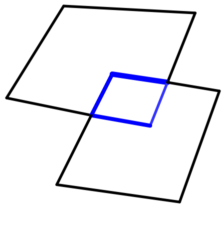

Figura 2.4: Objeto que não representa um poliedro.

- *É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas)* [1]. *Para termos uma visualização do que esse item nos diz, vejamos o objeto abaixo, que não representa um poliedro:*

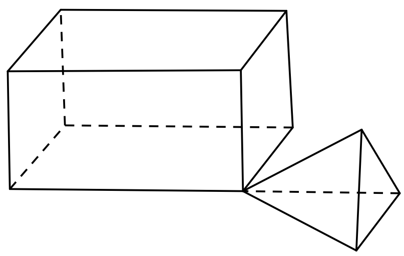

Figura 2.5: Objeto que não ilustra um poliedro

O fato desse objeto não representar um poliedro é porque para passar de qualquer face quadrilátera para qualquer face triangular, é preciso passar pelo vértice que une esses dois tipos de faces.

Como vimos, chamamos de *face* de um poliedro a cada polígono plano. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado de uma *aresta* do poliedro e cada vértice de uma face é um *vértice* do poliedro. Vejamos a figura abaixo que representa um poliedro:

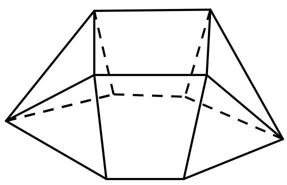

Figura 2.6: Poliedro com 6 faces triangulares, 3 faces quadriláteras e 1 face hexagonal.

Toda região fechada do espaço, delimitada por polígonos planos que formam um poliedro, é chamada de *região interior do poliedro.*

Vejamos como Hoffman define e diferencia um poliedro de um sólido:

"A reunião do poliedro com seu interior constitui o que chamamos de um sólido. Um poliedro é "oco", enquanto que um sólido é "maciço"... Não existe confusão nessa

[1] [6]

definição, pois um sólido fica definido sem ambiguidade a partir da descrição de superfície (isto é, da sua "casca", que é o poliedro correspondente) e vice-versa."[5]

2.1 Tipos de poliedros

Há dois tipos de poliedros: os poliedros convexos e os não-convexos.

Mostraremos, a seguir, as duas definições:

2.1.1 Poliedros convexos

Um poliedro é dito convexo, quando todo segmento de reta, que liga dois pontos pertencentes a faces diferentes do poliedro, se encontra completamente no interior do poliedro.

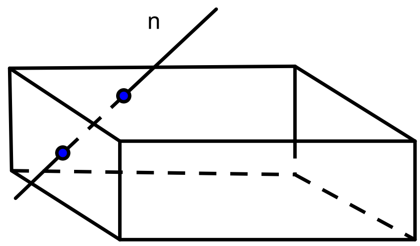

Figura 2.7: Poliedro convexo

Caso contrário, o poliedro será dito não-convexo. Vejamos a figura abaixo:

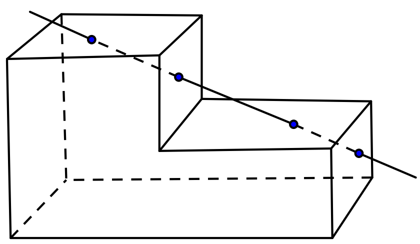

Figura 2.8: Poliedro não-convexo

2.2 Algumas relações entre as faces, vértices e arestas

Tomemos um poliedro qualquer e preocupemo-nos em contar a quantidade de faces (denotaremos o resultado por F), a quantidade de vértices (denotando o resultado por V) e a quantidade de arestas, sendo o resultado denotado por A. Notemos que suas faces podem ser formadas por polígonos diferentes, dessa forma, denotaremos por F_n, com $n \geq 3$ e natural, a quantidade de faces formada por polígonos que possuem n lados. De modo análogo, vemos que, pela definição, em cada vértice concorrem três ou mais arestas, daí, podemos representar os tipos de vértices por V_n, com $n \geq 3$, sendo V_n o número de vértices que concorrem n arestas. Notamos as seguintes igualdades:

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + ...$$

$$V = V_3 + V_4 + V_5 + ...$$

Proposição 1: Em todo poliedro vale a relação $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ...$

Demonstração. Para demonstrarmos, vamos planificar o poliedro e contar o número de lados dos polígonos que formam as faces do poliedro. Como as faces podem ser triangulares, quadriláteras, pentagonais, etc., ou seja, possuir uma certa quantidade n de lados, contamos os lados de todos os polígonos que formam as faces da seguinte forma:

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ...$$

Devemos chamar atenção para o fato de que, quando fazemos essa contagem, estamos contando cada lado (aresta do poliedro) dos polígonos duas vezes, portanto

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ... = 2A$$

como queríamos demonstrar. □

Proposição 2: Em todo poliedro vale a relação $2V = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ...$

Demonstração. De modo análogo, também fica fácil contarmos o número de arestas do poliedro se analisarmos que de cada vértice concorre uma certa quantidade de arestas, mas quando contamos os vértices, pelo fato de cada aresta concorrente unir dois vértices, contamos duas vezes o número de arestas. Então,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ...$$

□

As proposições 3 e 4, que seguem abaixo, são consequências das duas primeiras proposições.

Proposição 3: Seja um poliedro com A arestas, V vértices e F faces, temos $2A \geq 3F$.

Demonstração. Para demonstrarmos, desenvolvamos o segundo membro da igualdade

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + ...$$

Sendo assim,

$$2A = 3F_3 + (3F_4 + F_4) + (3F_5 + 2F_5) + ...$$

$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + ...) + F_4 + 2F_5 + ...$$

Como $F = F_3 + F_4 + F_5 + ...$, temos:

$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + ...,$$

donde segue

$$2A \geq 3F.$$

Observamos que a igualdade só será verdadeira se o poliedro possuir somente faces triangulares, daí, as quantidades de faces F_4, F_5, ..., F_n, serão todas iguais a zero. □

Proposição 4: Seja um poliedro com A arestas, V vértices e F faces, temos $2A \geq 3V$.

Demonstração. A demonstração se dá de modo análogo a feita na proposição 3, e nesse caso, a igualdade só será verdadeira se em cada vértice concorrerem apenas três arestas. □

Capítulo 3

A relação de Euler

3.1 Introdução e demonstração

A relação de Euler, ou Teorema de Euler, foi descoberto no ano de 1758, onde dizia que se um poliedro tem V vértices, A arestas e F faces então $V - A + F = 2$. A princípio, Euler não deu uma demonstração sobre esse teorema, apenas fez extensas verificações da sua conjectura para diversos poliedros. Mais tarde, Euler apresentou uma demonstração, mas ele não especificava para que tipo de poliedro sua demonstração era válida. Alguns contraexemplos, como o mostrado abaixo, eram chamados de "monstros", naquela época.

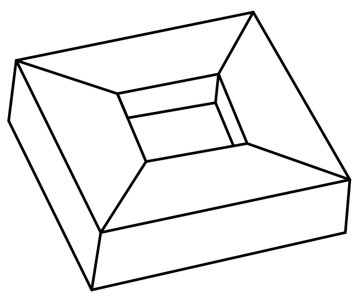

Figura 3.1: Poliedro não-convexo

Analisando a relação de Euler no poliedro acima, vemos que: $V - A + F \neq 2$. A rigor, $V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$.

Uma demonstração muito usada dessa relação é a feita por Cauchy, no ano de 1813.

Enunciaremos o Teorema de Euler, a seguir, e daremos uma prova que segue, basicamente, a encontrada no livro [6].

Teorema 3.1.1. *Em todo poliedro convexo com A arestas , V vértices e F faces, vale a* *relação* $V - A + F = 2$.

Demonstração. Para a primeira parte, vamos calcular a soma dos ângulos internos dos polígonos que formam as faces de um poliedro convexo P. Enumeremos as faces de 1 até F e seja $n_k \geq 3$, $n \in N$, a quantidade de lados do polígono da k-ésima face $(1 \leq k \leq F)$. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é dada por $\pi(n-2)$. Dessa forma, sendo S a soma dos ângulos internos de todas as faces de P, temos:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \pi(n_3 - 2) + ... + \pi(n_F - 2),$$

onde podemos rearranjar da seguinte forma:

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_F) - (2 + 2 + 2 + ... + 2)].$$

Observamos que o primeiro parêntese nos dá a soma do número de lados de todas as faces do poliedro, que vale o dobro do número de arestas do mesmo. E vemos que o segundo parêntese nos dá o dobro do número de faces porque há F parcelas em $(2+2+2+...+2)$. Dessa forma,

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F) \tag{3.1}$$

Já para a segunda parte, observemos a figura abaixo 3.2:

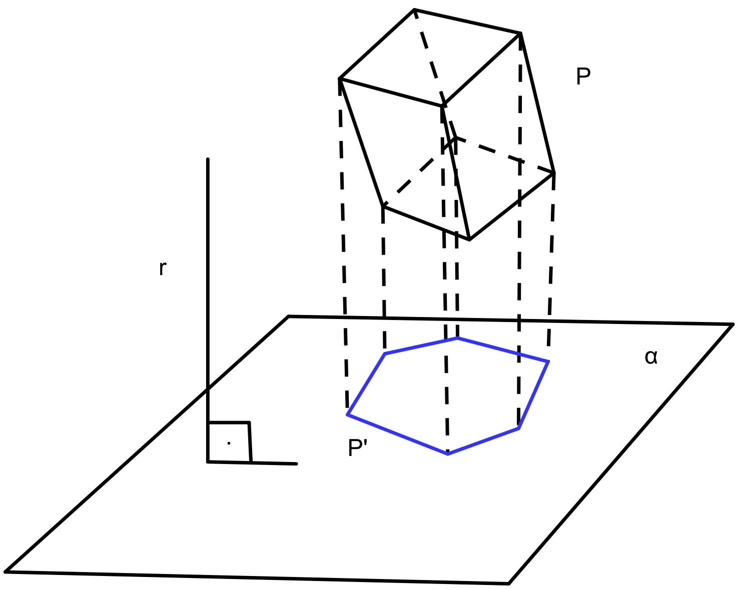

Figura 3.2: Projeção da sombra de um paralelepípedo, sendo que os raios de luz não incidem perpendicularmente a nenhuma face do paralelepípedo.

Tomemos uma reta r, que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro P. Tomemos, agora, um plano α perpendicular à reta r. Chamaremos o plano α de *plano horizontal* e todas as retas que passam pelos vértices do poliedro e intersectam o plano α serão chamadas de retas verticais. É fácil notar que α divide o espaço em dois semi-espaços, um dos quais contém o poliedro P. Dessa forma, chamaremos esse de *semi-espaço superior*; todos os pontos dele estarão acima de α.

Observando a figura 3.2, vamos imaginar que sobre ela está incidindo raios de luz perpendiculares ao plano α. Observamos que a cada ponto q do *semi-espaço superior*, tem-se um ponto h, no plano α, que podemos chamar de projeção (ou sombra) de q, onde é obtido através da intersecção entre as retas verticais e o plano α. Daí, tem-se que qualquer conjunto Q, do *semi-espaço superior*, gera um conjunto H, no plano α, que é, por definição, a projeção do conjunto Q. Uma reta vertical qualquer só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro P.

A projeção (sombra) de P em α é um polígono convexo do plano horizontal, onde o contorno, que chamaremos de P', é a projeção de uma poligonal β, chamado de contorno aparente do poliedro P, formada, exatamente por arestas de P. Cada ponto do contorno P' é sombra de um único ponto do poliedro P, pertencente à poligonal fechada β. Cada ponto interior à projeção do poliedro P é sombra de dois pontos do poliedro, lembramos que esses pontos interiores não pertencem ao contorno P'. Agora, observemos o seguinte: Dados dois pontos, do poliedro P, que têm a mesma projeção, chamaremos o mais alto, ou seja o mais distante de α, de ponto *iluminado* e o mais próximo, de ponto *sombrio*.

Dessa forma, o poliedro convexo P decompõe-se em três partes: O conjunto dos pontos *sombrios*, o conjunto dos pontos *iluminados* e o contorno aparente P'.

Agora, sejam V_0 o número de vértices do contorno aparente P', V_1 o número de vértices iluminados e V_2 o número de vértices sombrios. Segue que o número de vértices do poliedro P é dado por: $V = V_0 + V_1 + V_2$.

A projeção das faces iluminadas (pontos iluminados) é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e V_1 pontos interiores, projeção dos vértices iluminados de P.

Seja S_1 a soma dos ângulos internos das faces iluminadas, logo

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

O fato de multiplicarmos o número de vértices iluminados por 2π se dá porque, quando vemos a projeção (sombra), em α, dos vértices iluminados, juntamente com o contorno aparente P', estamos lidando com uma figura plana, e portanto, como mostramos na próxima figura, temos 2π como sendo a soma dos ângulos ao redor da projeção do vértice iluminado. O mesmo ocorre com os vértices sombrios:

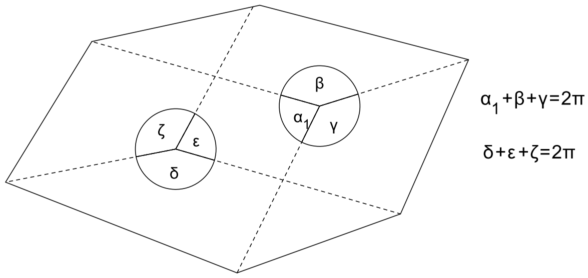

Figura 3.3: Projeção das faces iluminadas, faces sombrias e o contorno aparente.

Seja S_2 a soma dos ângulos internos das faces sombrias do poliedro P, segue que:

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando S_1 com S_2, obtemos:

$$S_1+S_2 = 2\pi V_1+2\pi V_2+2\pi(V_0-2) \Longrightarrow S_1+S_2 = 2\pi(V_1+V_2+V_0-2) \Longrightarrow S_1+S_2 = 2\pi(V-2) \tag{3.2}$$

Essa soma foi obtida, analisando-se que a projeção de P é um poliedro "achatado", onde são preservadas as quantidades de arestas, vértices e faces do poliedro P.

Como a soma S, obtida na primeira parte desta demonstração, é válida para qualquer poliedro, também é válida para esse poliedro "achatado", logo:

$$2\pi(A - F) = 2\pi(V - 2),$$

dividindo ambos os membros por 2π, obtemos:

$$A - F = V - 2,$$

donde segue,

$$V - A + F = 2,$$

como queríamos demonstrar. □

3.2 O gênero de um poliedro

Antes de definirmos o gênero de um poliedro, conheçamos a definição de um tubo:

Um tubo é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:

- É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra face, sem passar por nenhum vértice;
- A interseção de duas faces quaisquer ou é um vértice, ou é um lado comum, ou é vazia;
- As arestas que são comuns a apenas uma face formam duas poligonais fechadas disjuntas.

Vejamos a figura abaixo que ilustra três tipos de tubos:

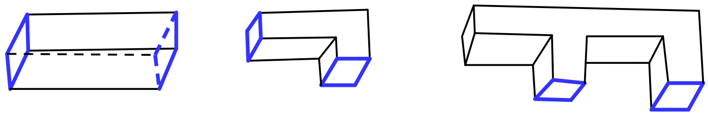

Figura 3.4: Tubos.

As arestas destacadas configuram as duas poligonais fechadas disjuntas em cada tubo.

Agora observe o poliedro abaixo:

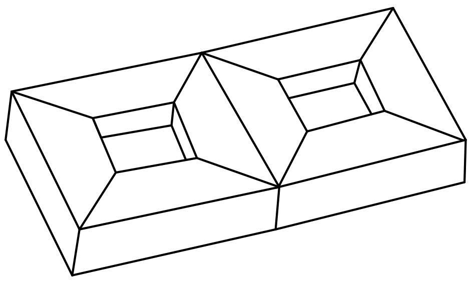

Figura 3.5: Poliedro não-convexo.

Façamos dois cortes planos, como é ilustrado na próxima figura:

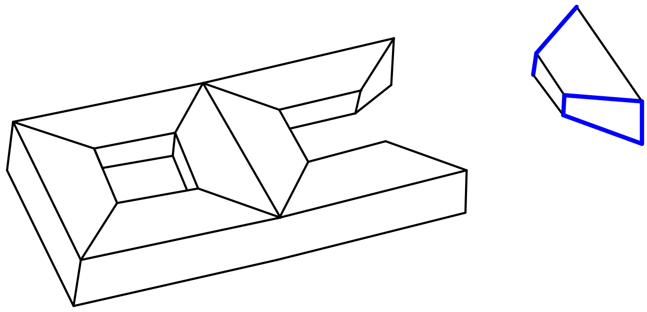

Figura 3.6: Remoção de tubo.

Observe que o objeto da direita é um tubo. Agora, exclua este tubo, acrescente dois polígonos em cada "buraco"do objeto da esquerda e veja que obtemos um novo poliedro. Chamamos esta ação de "remoção de tubo"de um poliedro.

Veja que o poliedro obtido, após a remoção de um tubo, ainda admite a remoção de mais um tubo, como mostramos na figura abaixo:

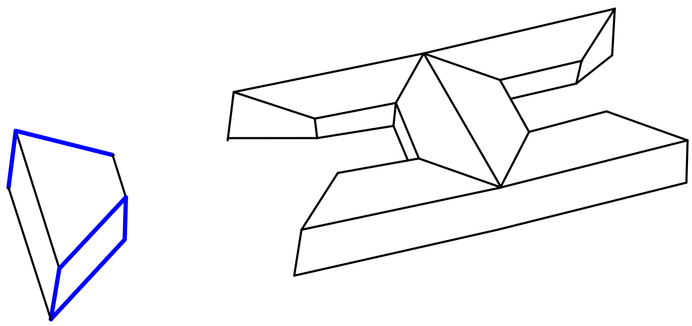

Figura 3.7: Remoção de tubo.

Com o novo poliedro, resultante desta segunda remoção, não é possível remover mais nenhum tubo, pois não caracteriza um remoção de um tubo quando fazemos o corte e restam dois pedaços, como mostra a figura abaixo:

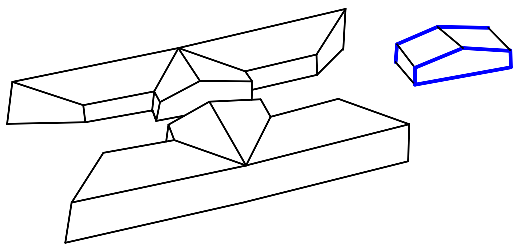

Figura 3.8: Não é uma remoção de tubo.

A quantidade de tubos que é possível remover de um poliedro é chamada de gênero de um poliedro, denotada por g.

Vejamos alguns poliedros e os seus gêneros:

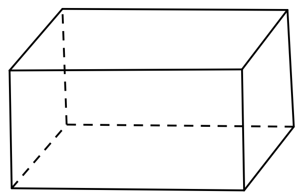

Figura 3.9: Poliedro convexo com gênero $g = 0$.

No poliedro acima não podemos fazer nenhuma remoção de tubo, pois quando fazemos os dois cortes, restam dois pedaços, como ilustramos na próxima figura, o que não caracteriza uma remoção de tubo, logo o poliedro possui gênero $g = 0$.

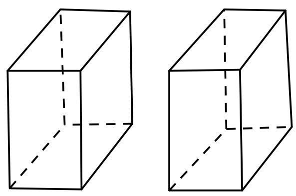

Figura 3.10: Objetos resultantes do corte.

Já no poliedro abaixo (à esquerda), o gênero é $g = 1$, pois só é possível fazer uma remoção de tubo, como é ilustrado na figura à direita:

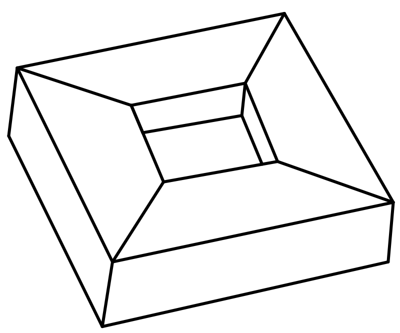

Figura 3.11: Poliedro não-convexo com gênero $g = 1$.

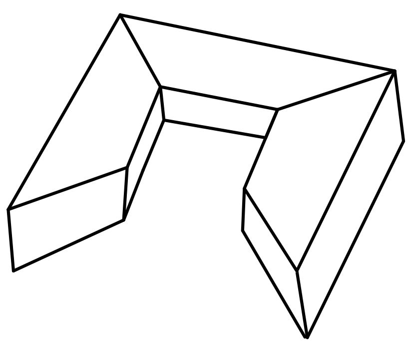

Figura 3.12: Poliedro resultante da remoção de um tubo.

A seguir, mostramos um poliedro com gênero $g = 2$, à esquerda, e à direita, um poliedro resultante das duas remoções de tubos possíveis.

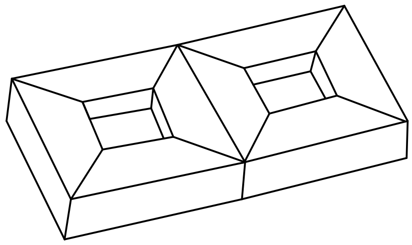

Figura 3.13: Poliedro não-convexo com gênero $g = 2$.

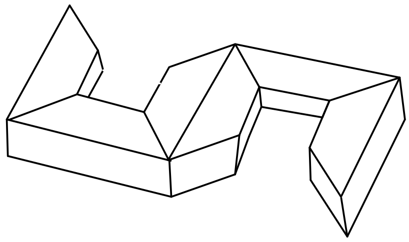

Figura 3.14: Poliedro resultante da remoção de dois tubos.

Como dissemos, no poliedro mostrado acima, só é possível fazermos duas remoções de tubo, pois uma terceira não caracterizaria tal remoção, por definição.

3.3 A característica de Euler

Chamamos de característica de Euler o valor da relação $V - A + F$. Nos poliedros convexos, a característica de Euler é 2, como vimos. Há vários poliedros, não-convexos, em que a característica de Euler também é 2. Contudo, a característica está relacionada ao gênero do poliedro.

Vejamos os seguintes exemplos:

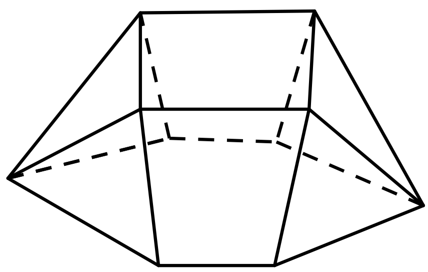

Figura 3.15: Poliedro convexo.

Analisando o poliedro acima, temos: $A = 18$, $F = 10$, e $V = 10$, dessa forma, a característica de Euler é $V - A + F = 10 - 18 + 10 = 2$.

Observemos o poliedro abaixo:

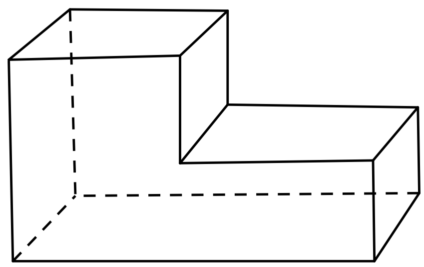

Figura 3.16: Poliedro não-convexo

Vemos que $F = 8$, $A = 18$ e $V = 12$, logo a característica de Euler, nesse poliedro, é $V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2$.

O poliedro seguinte possui $A = 32$, $F = 16$ e $V = 16$, dessa forma, a característica de Euler é $F - A + V = 16 - 32 + 16 = 0$, que pode ser analisado na figura:

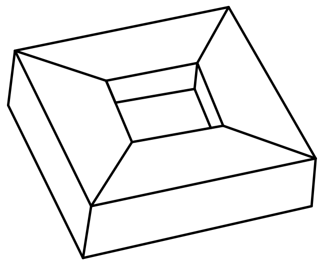

Figura 3.17: Poliedro não-convexo

Já no poliedro abaixo, não-convexo, temos: $A = 58$, $F = 28$ e $V = 28$, logo a característica de Euler é $F - A + V = 31 - 60 + 28 = -2$.

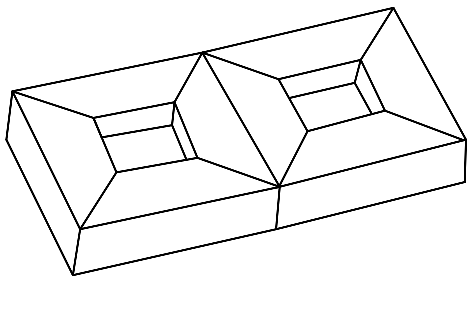

Figura 3.18: Poliedro não-convexo.

Como foi dito, a característica de Euler está relacionada com o gênero do poliedro. Em geral, tem-se o seguinte:

$$F - A + V = 2 - 2g$$

onde g é o gênero do poliedro.

Capítulo 4

Poliedros Regulares ou de Platão

4.1 Definição

Um poliedro é dito Regular ou de Platão quando:

1) For convexo;

2) Suas faces forem formadas por polígonos regulares (lados congruentes);

3) O número de arestas que concorrem nos vértices for igual;

Vejamos a figura abaixo:

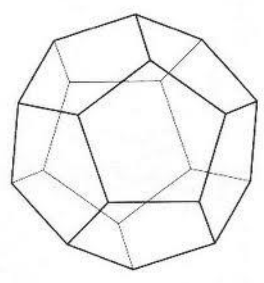

Figura 4.1: Poliedro regular com 12 faces pentagonais.

4.2 Prova da existência dos cinco Poliedros Regulares

Afirmamos que há somente cinco poliedros regulares, os chamados poliedros de Platão. A prova dessa afirmação é baseada nas relações que existem entre as faces, arestas e vértices do poliedro e no teorema de Euler. Essa afirmação será exposta como um teorema:

Teorema 4.2.1. *Há somente cinco poliedros regulares ou de Platão.*

Demonstração. Seja a o número de arestas que concorrem em cada vértice e seja l o número de lados de cada face do poliedro. Observamos que $2A = lF = aV$, dessa forma, temos:

$$A = \frac{lF}{2}$$

e

$$V = \frac{lF}{a}.$$

Fazendo a substituição na Relação de Euler, temos:

$$\frac{lF}{2} - \frac{lF}{a} + F = 2,$$

donde segue,

$$F = \frac{4a}{2a + 2l - al}.$$

Como o denominador terá de ser maior que zero, pois o numerador é sempre positivo, temos:

$$2a + 2l - al > 0,$$

donde resulta que

$$\frac{2l}{l-2} > a.$$

Sabemos que $a \geq 3$, então concluímos que $l < 6$. Com isso, obtemos as seguintes possibilidades:

$$l = 3 \longrightarrow F = \frac{4a}{6-a} \longrightarrow \begin{cases} a = 3 \to F = \dfrac{12}{3} = 4 \to (Tetraedro) \\ a = 4 \to F = \frac{16}{2} = 8 \to (Octaedro) \\ a = 5 \to F = 20 \to (Icosaedro) \end{cases}$$

$$l = 4 \longrightarrow F = \frac{4a}{2a + 8 - 4a} = \frac{4a}{8 - 2a} \longrightarrow a = 3 \to F = 6 \to (Hexaedro)$$

$$l = 5 \longrightarrow F = \frac{4a}{10 - 3a} \longrightarrow a = 3 \to F = 12 \to (Dodecaedro)$$

$\square$

Vejamos esses cinco poliedros abaixo:

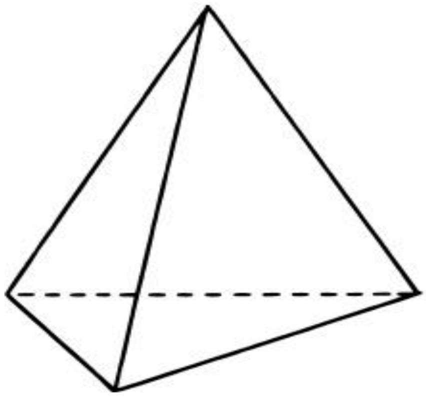

Figura 4.2: Tetraedro - 4 faces triangulares.

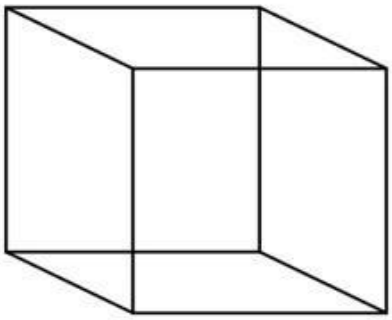

Figura 4.3: Hexaedro - 6 faces quadriláteras.

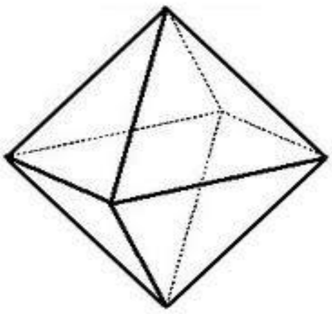

Figura 4.4: Octaedro - 8 faces triangulares.

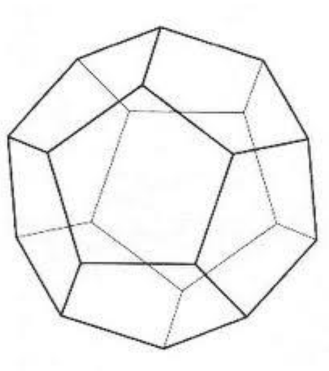

Figura 4.5: Dodecaedro - 12 faces pentagonais.

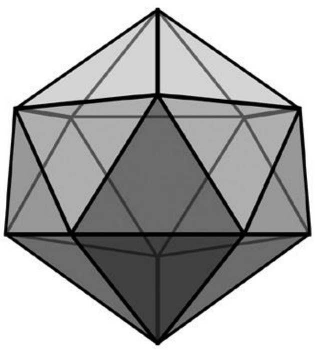

Figura 4.6: Icosaedro - 20 faces triangulares.

Há um *software* gratuito, chamado *poly*, onde o *download* pode ser feito em [9], que serve para o leitor analisar a estrutura dos poliedros regulares. De forma dinâmica, é possível visualizar os poliedros em três dimensões, além de sua planificação. Com esse *software* também é possível exportar imagens no formato ".gif"(figura animada). Nele também é possível visualizar outras formas poliédricas que aqui não foram vistas, tais como as mostradas abaixo:

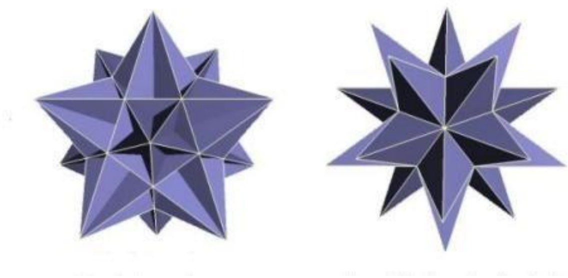

Figura 4.7: Grande Icosaedro e grande dodecaedro estrelado.

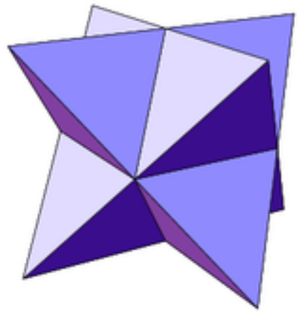

Figura 4.8: Sólido de Jhonson.

4.3 Curiosidade

O filósofo grego Platão, que nasceu em Atenas, por volta do ano 427 a.C. e morreu em 347 a.C., foi discípulo de Sócrates. Em sua jornada pela Grécia antiga, ouviu falar sobre os ensinamentos dos pitagóricos, ficando muito curioso em conhecer de perto as ideias pitagóricas.

Depois de suas idas e vindas por grande parte da Grécia e amadurecer suas ideias sobre vários conceitos e filosofias, Platão fundou uma escola, denominada: Academia. Essa instituição passou a ter muito prestígio e atraía muitos jovens da época que buscavam ensinamentos filosóficos e troca de ideias.

A Escola de Platão tinha escrito sobre sua porta: "Não entre aqui quem não seja Geômetra". Nessa Escola, Platão dedicou vários anos de sua vida no estudo da geometria, em especial no estudo dos poliedros regulares, que pela sua beleza na simetria já fascinavam os antigos egípcios. Platão foi um dos primeiros a provar a existência de apenas cinco poliedros regulares, motivo pelo o qual tais poliedros recebem o nome de poliedros de Platão. A princípio seu fascínio foi influenciado por Teeteto. Os pitagóricos já faziam uma relação dos poliedros regulares com os elementos da natureza: fogo, terra, água e ar. Essa associação dava-se devido à grande misticidade, motivo pelo o qual o povo buscava sempre uma ligação dos acontecimentos, descobertas e invenções, com o universo em toda sua essência.

Pelo fato de especiais características do dodecaedro, que já atraiam os pitagóricos, Platão passou a associá-lo como o elemento Universo, isso porque as 12 faces do dodecaedro representavam os doze meses do ano e também os doze signos do zodíaco. Além disso, em cada face do mesmo, podia ser escrito um pentagrama regular. Outras propriedades geométricas do dodecaedro, em especial ligadas ao segmento áureo (exposto no final desta seção), refletiam, de certa forma, a ordem e a harmonia do cosmo.

- *O hexaedro era associado à terra, pois era o mais apto a grandes estabilidades;*
- *O icosaedro era atribuído à água, por mobilidades crescentes e intermediárias;*
- *O Octaedro era associado ao ar, por mobilidades crescentes e intermediárias;*
- *O tetraedro era atribuído ao fogo, por ser o mais "pontudo", o de menor número de faces e de maior mobilidade.*
- *o Dodecaedro era associado como o Universo (cosmo), sendo chamado por Platão de a "alma do mundo".*

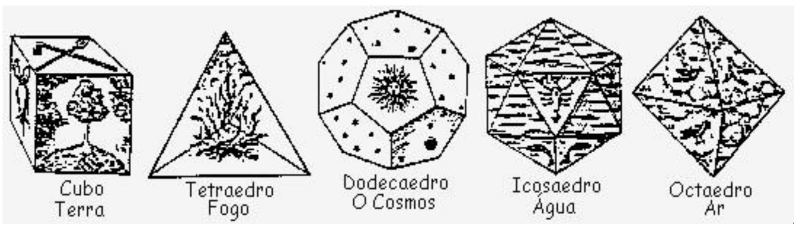

Figura 4.9: Relação mística com os poliedros regulares.

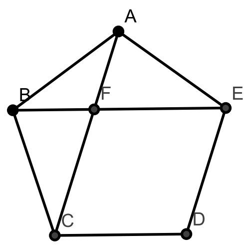

Figura 4.10: Pentágono Regular.

Seja um pentágono regular (polígono com cinco lados congruentes), como mostra a figura acima. Quando a relação $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AB}{AC - AB}$ for verdadeira, diz-se que o segmento

AB é o segmento áureo de AC, que é diagonal do pentágono. No pentágono a relação é verdadeira e o leitor pode ver a prova no livro [4].

Lista de Figuras

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda. 1996.

[2] BRASIL. **Ministério da Educação**. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília, 1997.

[3] EVES, Howard, **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[4] GARBI, Gilberto G. **C.Q.D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria / Gilberto Geraldo Garbi**. 1ª Edição - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[5] HOFFMANN, C. M. **Geometric and Solid Modeling: An Introduction**. Morgan Kaufmann Publishers, 1989.

[6] LIMA, Elon L.. **A matemática do ensino médio - volume 2** / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto césar Morgado. - 6ª ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

[7] MARMOL, L. Sanchez; BEATO, M. Perez. **Geometría métrica proyectiva y sistemas de representación**. 2ª ed. Tomo 2. Madrid: SAETA, 1947.

[8] RICHESON, David S.. **Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology**, Princenton University Press, (2008).

[9] UFRG, Instituto de Matemática. **Educação Matemática e Tecnologia Informática**. Disponível em: <www.edumatec.mat.ufrgs.br/softwares/soft_geometria.php>. Acessado em 16 de abril de 2013.