UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

ANTONIA MARIA DOS SANTOS MARQUES BARBUDA

USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS COMO FERRAMENTAS DE APOIO AO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

CRUZ DAS ALMAS

2020

ANTONIA MARIA DOS SANTOS MARQUES BARBUDA

USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS COMO FERRAMENTAS DE APOIO AO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dra. Julianna Pinele Santos Porto

CRUZ DAS ALMAS

2020

FICHA CATALOGRÁFICA

B241u

Barbuda, Antonia Maria dos Santos Marques.

Uso de tecnologias digitais como ferramentas de apoio ao ensino da geometria analítica / Antonia Maria dos Santos Marques Barbuda._ Cruz das Almas, Bahia, 2020.

123f.; il.

Orientadora: Julianna Pinele Santos Porto.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Mestrado em Matemática.

1.Matemática – Geometria analítica. 2.Matemática – Tecnologias digitais. 3.Estudo e ensino – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 516.3

Ficha elaborada pela Biblioteca Central de Cruz das Almas - UFRB.
Responsável pela Elaboração - Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).
(os *dados para catalogação foram enviados pelo usuário via formulário eletrônico*).

ANTONIA MARIA DOS SANTOS MARQUES BARBUDA

USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS COMO FERRAMENTAS DE APOIO AO ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Cruz das Almas, 09 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA:

Julianna Pinele Santos Porto

Profa. Dra. Julianna Pinele Santos Porto
Orientadora - UFRB

Katia Silene F. Lima Rocha

Profa. Dra. Katia Silene Ferreira Lima Rocha
Examinadora - UFRB

Jamille Vilas Bôas Souza

Profa. Dra. Jamille Vilas Bôas de Souza
Examinadora - IFBA

Cruz das Almas
2020

Dedico esse trabalho a meus filhos: Gustavo e Felipe
que são as maiores bênçãos concedidas por Deus
na minha vida. Que essa minha conquista
sirva de incentivo para eles.

Agradecimentos

À Deus em primeiro lugar, que é meu refúgio e fortaleza e que me permitiu ingressar no programa e concluir esse Mestrado em Matemática, mesmo em meio a tantas dificuldades enfrentadas.

À minha mãe, que mesmo não estando mais neste plano, tenho certeza que contribuiu significativamente com sua boa energia para que eu não desistisse e alcançasse meu objetivo.

Ao meu esposo, pelo apoio, suporte e pela compreensão nos momentos de tensão, devido às dificuldades que o curso nos proporciona.

Aos meus filhos, que são a razão de minha vida e que serviram de incentivo para continuar essa caminhada.

Aos familiares mais próximos que direta ou indiretamente contribuíram com essa minha conquista.

A todos os colegas de turma, pela parceria, encorajamento e suporte concedidos durante o curso. Em especial a amiga Maria da Conceição Oliveira, que sempre me apoiou nesse período, principalmente durante minha licença maternidade e ao amigo Astrogildo Neto, meu companheiro de viagem, momento onde dividíamos nossas aflições e alegrias no percurso para a UFRB.

Aos professores, pelo apoio e ensinamentos que serviram de base para que eu alcançasse esse objetivo.

À Profa. Doutora Julianna Pineli, pela atenção, responsabilidade, competência e paciência na orientação deste trabalho.

Agradeço de coração a todos vocês!

"Educação não transforma o mundo. Educação muda pessoas. Pessoas transformam o mundo."

(Paulo Freire)

Resumo

Esta pesquisa tem como objetivo discutir sobre o uso de tecnologias digitais como ferramentas de apoio ao ensino da Geometria Analítica, além de apresentar atividades relacionadas a este conteúdo. Para isso fizemos um levantamento bibliográfico e trouxemos reflexões a partir da minha prática profissional. Baseado na experiência em sala de aula, nota-se a dificuldade dos alunos para assimilarem os conteúdos matemáticos e isso reflete no baixo nível de proficiência nas avaliações nacionais. Neste trabalho, utilizamos algumas ferramentas digitais, com o intuito de melhorar o nível de aprendizagem dos discentes na disciplina Matemática. Trazemos uma sugestão de utilização de tecnologias digitais com o intuito de tornar as aulas de Matemática mais atrativas para os discentes, despertando o interesse para o estudo e visando melhorar o processo de ensino-aprendizagem. Salientamos que o uso de tecnologias requer que os docentes realizem cursos de capacitação, para que estes usem corretamente as ferramentas existentes. A utilização de plataformas educacionais contribuem para implantação do ensino híbrido, tão importante na atualidade. Utilizamos nesse trabalho a plataforma Google Classroom para criação de uma sala de aula virtual que servirá de suporte às aulas presenciais. Além disso, apresentamos algumas Sequências Didáticas como sugestão para auxiliar professores que tenham interesse em utilizar essas ferramentas como suporte ao ensino da Geometria Analítica.

Palavras-chave: Tecnologias Digitais. Processo de Ensino-aprendizagem. Sala de Aula Virtual. Geometria Analítica.

Abstract

This research aims to discuss the use of digital technologies as tools to support the teaching of Analytical Geometry, in addition to presenting activities related to this content. For this we did a bibliographic survey and brought reflections from my professional practice. Based on the experience in the classroom, it is noted the students' difficulty to assimilate the mathematical contents and this reflects in the low level of proficiency in national assessments. In this work, we use some digital tools, in order to improve the level of learning of students in Mathematics. We bring a suggestion of using digital technologies in order to make mathematics classes more attractive for students, arousing interest for study and aiming to improve the teaching-learning process. We emphasize that the use of technologies requires that teachers carry out training courses, so that they use the existing tools correctly. The use of educational platforms contributes to the implementation of hybrid education, so important today. In this work, we used the Google Classroom platform to create a virtual classroom that will support the face-to-face classes. In addition, we present some Didactic Sequences as a suggestion to help teachers who are interested in using these tools to support the teaching of Analytical Geometry.

Keywords: Digital Technologies. Teaching-learning process. Virtual Classroom. Analytical Geometry.

Sumário

1 Introdução

Nos últimos anos uma parcela da população vem tendo acesso há várias ferramentas tecnológicas e isso vem ocasionando mudanças em diversas áreas, inclusive na educação. O uso da internet vem propiciando a facilidade de acesso a informação, diante disso os alunos chegam às escolas de posse de uma gama de conhecimentos. Essa bagagem trazida pelos estudantes deve ser aproveitada pelos professores para tornar as aulas mais dinâmicas com a participação de toda a turma, e isso pode tornar a sala de aula um ambiente de debates e reflexões que culminará com a construção do conhecimento. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma que:

> A contemporaneidade é fortemente marcada pelo desenvolvimento tecnológico. Tanto a computação quanto as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão cada vez mais presentes na vida de todos, não somente nos escritórios ou nas escolas, mas nos nossos bolsos, nas cozinhas, nos automóveis, nas roupas etc. Além disso, grande parte das informações produzidas pela humanidade está armazenada digitalmente. Isso denota o quanto o mundo produtivo e o cotidiano estão sendo movidos por tecnologias digitais, situação que tende a se acentuar fortemente no futuro. (BRASIL, 2018, p. 473).

As escolas vêm tentando se adequar a essa nova era tecnológica, os professores já percebem que o uso de tecnologias não pode mais estar desassociado do processo de educar. A Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua aponta a crescente presença do número de celular nos domicílios brasileiros, conforme (IBGE, 2018), o resultado do Censo Escolar também também traz o aumento do percentual de estudantes do ensino médio das escolas públicas com acesso à internet e banda larga, de acordo com (QEDU, 2018). Sabemos que essa não é a realidade de 100% dos alunos, no entanto, com o quantitativo de discentes que atualmente faz uso de celulares com acesso à internet, é possível realizar métodos de ensino que utilize as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC's) para melhorar o processo de ensino e aprendizagem, em especial na disciplina Matemática.

A Matemática é vista por muitos alunos como uma disciplina difícil, uma grande parcela deles afirmam não gostar ou não compreender os conteúdos, inclusive os resultados das avaliações de desempenho que são realizadas no Brasil mostram que os estudantes têm apresentado baixo nível de proficiência nessa disciplina. Diante dessa realidade que é vivenciada por muitos professores das escolas públicas, criamos esse trabalho, que tem como objetivo discutir sobre o uso de tecnologias digitais como ferramentas de apoio ao ensino da Matemática, mas especificamente ao ensino da Geometria Analítica. Nesta pesquisa realizamos um levantamento bibliográfico e trouxemos reflexões a partir da minha prática profissional.

A motivação para esse estudo foi em decorrência da minha participação no curso Uso Pedagógico de Tecnologias Educacionais, realizado pela Secretaria de Educação do Estado da Bahia (SEC). Esse curso fez parte do Projeto e-Nova Educação, criado pelo Governo do Estado e teve como objetivo levar as tecnologias digitais para dentro da sala de aula das escolas públicas. O Projeto e-Nova Educação integra o acesso à internet com dispositivos móveis, computadores e *Chromebooks*.

Nessa Dissertação vamos apresentar as tecnologias digitais para alunos do ensino médio, abordando alguns dos conteúdos da Geometria Analítica. Na realização desse trabalho utilizamos alguns métodos do ensino híbrido e a criação de uma sala de aula virtual na plataforma Google Classroom. Nesta sala de aula o discente poderá ter acesso a conteúdos, vídeos, exercícios, atividades interativas, dentre outras, possibilitando ao estudante reforçar os assuntos que serão vistos presencialmente. Essa sala de aula também servirá para que o aluno que por algum motivo não pode comparecer a aula, possa ter acesso ao conteúdo estudado.

No Capítulo 2, falamos sobre o uso de tecnologias nas escolas e como vem ocorrendo a mudança no papel do professor frente a essa nova era tecnológica. Além disso, abordamos a importância da formação docente para o uso das tecnologias digitais e apresentamos algumas plataformas digitais que temos na atualidade, descrevendo suas principais características. No Capítulo 3, trazemos o ensino da Matemática utilizando a contextualização para facilitar a aprendizagem da disciplina. Dando continuidade, falamos sobre o ensino híbrido, o uso de vídeos, a Khan Academy e o software GeoGebra, todos como ferramentas para auxiliar no ensino da Matemática. Já no Capítulo 4 abordamos alguns dos conteúdos da Geometria Analítica, na construção deste Capítulo priorizamos os exemplos que contemplam situações reais, pois entendemos a importância da contextualização do ensino para que o estudante compreenda a aplicabilidade da Matemática em seu cotidiano. No Capítulo 5 apresentamos uma proposta de trabalho contendo Sequências Didáticas e a Sala de Aula Virtual, onde mostramos na prática a utilização das tecnologias digitais como ferramentas de apoio ao ensino da Geometria Analítica.

2 O Uso de Tecnologias nas Escolas

Neste Capítulo abordamos algumas mudanças que vem acontecendo no âmbito educacional, devido aos avanços tecnológicos ocorridos na sociedade. Isso vem levando a uma resignificação no papel do professor e também do aluno. Baseado em alguns dados que revelam o aumento do uso de celulares e acesso à internet, vemos que é possível que as tecnologias digitais auxiliem no processo de ensino-aprendizagem. Neste Capítulo, relatamos também a importância da formação dos professores para uma prática pedagógica utilizando recursos tecnológicos e trazemos alguns exemplos de plataformas digitais.

2.1 Atuação do Professor e do Aluno frente à era Tecnológica

A revolução tecnológica que iniciou-se na segunda metade do século XX, com o surgimento do computador, internet e, posteriormente, com o uso do telefone celular, criou uma nova ordem social. Esta nova ordem tem levado a mudanças comportamentais nos diversos âmbitos da ação humana, especialmente na educação. Nesse novo contexto houve um redimensionamento no papel do professor. Atualmente, não cabe mais ao docente ser um mero transmissor de conteúdos e sim proporcionar um ambiente de discussão e reflexão. Pelegrino reforça essa colocação ao afirmar que:

> [...] o professor deve estar presente como agente transformador. Seu papel, nesse momento, não será anunciar a informação, mas orientar, promover uma discussão e estimular a reflexão crítica diante dos dados recolhidos nas amplas e variadas fontes de informações. (PELEGRINO, 2013, p. 306).

Antes o professor era visto como mestre absoluto e o aluno não era considerado capaz de contribuir com a construção do conhecimento. Nas últimas décadas vem ocorrendo uma mudança significativa nessa visão, o docente começou a incentivar a busca de novos saberes, ele vem fazendo com que o discente se torne protagonista do seu aprendizado. Com isso o professor vem deixando de ocupar a posição de detentor do saber para se tornar mediador do processo de ensino-aprendizagem, num ambiente onde ocorre a troca de conhecimentos.

Os avanços tecnológicos vêm promovendo a facilidade de acesso à informação, fazendo com que os alunos tragam para dentro da sala de aula conhecimentos prévios. Essas informações podem ser exploradas pelos professores e servem para instigar e motivar os alunos. A utilização de tecnologias no trabalho docente também contribui para que o professor assuma uma posição de incentivador, orientador e motivador. Inclusive Garcia ressalta isso, ao sinalizar que:

> Os avanços tecnológicos têm promovido um deslocamento nestes últimos anos no papel do professor frente à incorporação das tecnologias em seu trabalho pedagógico: de uma dimensão de especialista e detentor do conhecimento que instrui para o de um profissional da aprendizagem que incentiva, orienta e motiva o aluno. (GARCIA, 2011, p. 83).

Diante dessa nova conjuntura, o educador deve buscar compartilhar e construir o conhecimento com os educandos. O professor deve incentivar os alunos a desenvolverem uma consciência crítica. Em meio a esse processo, a utilização de tecnologias pela escola contribui para que o discente tenha acesso a alternativas capazes de alicerçar sua aprendizagem, tornar-se um ser pensante e capaz de argumentar. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), destaca que:

> [...] o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações. (BRASIL, 2018, p. 536).

O desenvolvimento tecnológico vem despertando nos educadores o desejo de implementar métodos de ensino-aprendizagem que atendam aos anseios que a sociedade atual exige. As mudanças que estão ocorrendo na sociedade mostram a necessidade de se adotar modalidades de ensino que vá ao encontro desses anseios. O uso de internet, smartphones, e-mail, rede sociais, dentre outros, levam a uma perspectiva constante em diversificar o ambiente educacional, revelando um aprendizado desprovido de fronteiras. Inclusive o fato dos brasileiros passarem a ter acesso a inclusão digital vem provocando uma revolução na educação nacional.

A Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD Contínua), realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), investiga informações necessárias para o estudo do desenvolvimento socioeconômico do País, dentre elas o acesso à internet, à televisão e a posse de telefone celular para uso pessoal. Tal pesquisa, em 2018, mostrou que o percentual de domicílios brasileiros que utilizavam a internet subiu de 74,9% para 79,1%, de 2017 para 2018, representando uma alta de 4,2 pontos percentuais. A parcela dos que tinham telefone móvel celular permaneceu inalterada de 2017 para 2018, representando 93,2%. De 2017 para 2018, o percentual de pessoas que acessaram a internet através do celular aumentou de 98,7% para 99,2%. O percentual dos que usavam banda larga móvel (3G ou 4G) passou de 78,6% para 80,2%, e dos que utilizavam a banda larga fixa, de 73,5% para 75,9% (IBGE, 2018). De acordo com o Censo Escolar de 2018, 97% das escolas públicas do ensino médio regular, localizadas na zona urbana tem acesso à internet, e destes 88% tem acesso à banda larga, sendo que vários desses computadores são para uso dos alunos (QEDU, 2018). Diante da análise dos resultados da PNAD Contínua e do Censo Escolar, percebe-se que um número considerável de pessoas passou a ter acesso à internet.

Esse aumento foi em virtude da facilidade de acesso à banda larga, que possibilitou a uma grande parcela da população, incluir em seu orçamento a contratação de operadora de telefonia, composta por internet, com rede wi-fi e acesso a dados móveis. Permitindo, dessa forma, navegação na internet até mesmo fora de suas residências e em especial, no ambiente escolar.

Conforme informação da PNAD Contínua, o percentual de pessoas que acessaram a internet através do celular em 2018 foi de 99,2%. Esse dado corrobora com o que visualizamos em nosso cotidiano nas salas de aulas. Atualmente, verificamos que mesmo nas escolas públicas, onde a maioria dos discentes são de baixa renda, quase a totalidade dos alunos dispõe de telefone celular com acesso à internet. Nas dependências da escola eles navegam pela internet para acessar redes sociais, ouvir música, dentre outras finalidades. Nessa atual conjuntura o professor deve aproveitar essa situação a favor da educação. De acordo com Silva:

> Se a escola não inclui a internet na educação das novas gerações, ela está na contramão da história, alheia ao espírito do tempo e, criminosamente, produzindo exclusão social ou exclusão da cibercultura. Quando o professor convida o aprendiz a um site, ele não apenas lança mão da nova mídia para potencializar a aprendizagem de um conteúdo curricular, mas contribui pedagogicamente para a inclusão desse aprendiz na cibercultura. (SILVA, 2004, p. 63).

Alguns recursos tecnológicos já estão inseridos nas práticas escolares, contribuindo para a elaboração do processo didático pedagógico e vem servindo de apoio para elaboração e aplicação das aulas. “Tomadas em seu sentido mais geral, pedagogia e tecnologia sempre foram elementos fundamentais e inseparáveis da Educação”. (BELLONNI, 2003, p. 53). Atualmente é praticamente impossível pensar em educação sem utilizar tecnologias, no entanto há a necessidade da escola se adaptar as linguagens tecnológicas para atender às exigências da atualidade. Bettega fala sobre esse assunto ao afirmar que:

> [...] escola, mais do que nunca, precisa se apropriar das novas linguagens audiovisuais e informáticas, bem como de suas interfaces, para atender a constantes exigências do mundo contemporâneo que, por sua vez requer uma sintonia cada vez mais afinada com o conhecimento, não só científico, mas também quanto aos valores étnico-culturais. Pois a escola é, especialmente o lugar onde tudo isso pode ser sentido e vivido, como reflexo da sociedade em que os jovens estão inseridos. (BETTEGA, 2010, p. 15)

A escola, visando atender essas exigências do mundo contemporâneo, vem promovendo uma mudança no conceito de sala de aula, esta não está mais delimitada num espaço e num tempo determinados. Presencialmente o docente “dá aula”, mas incrementa este ato ao alimentar os debates e pesquisas, consultas a páginas na internet, ao receber e enviar e-mails aos alunos, ao indicar vídeos, filmes e textos disponíveis na rede. Todas essas possibilidades oferecidas pelas tecnologias interativas servem para enriquecer a aula. O uso destes recursos tecnológicos e o incentivo do discente à pesquisa o faz mergulhar no mundo da interação e interlocução, fazendo-o tornar um ser que busca seu próprio conhecimento.

Nesse processo de utilização de tecnologias na sala de aula é importante que o professor esteja mediando a utilização dos equipamentos como smartphones, computadores, tablets, notebooks, dentre outros. Essa mediação é de suma importância para que o aluno não utilize esses aparelhos para outro fim que não seja o pedagógico. Pereira (2010, p. 10) reafirma a necessidade de o professor conduzir os alunos ao utilizar a internet em sala de aula, ao afirmar que:

> O uso da Internet, seja na sala de aula ou como ferramenta de apoio ao aluno, pode proporcionar o melhoramento do ensino e da aprendizagem. A Internet oportuniza desenvolver a própria aprendizagem baseado na construção do conhecimento, compartilhando suas descobertas. As informações adquiridas através da Internet podem ser transformadas em conhecimento, para isso é necessário que o professor conduza seus alunos a construir esses conhecimentos. (PEREIRA, 2010, p. 10)

Devemos salientar que é de suma importância fazer uso das tecnologias digitais de forma contextualizada, crítica e consistente. Dessa forma, o educando terá percepção do que ocorre a sua volta, será capaz de avaliar os acontecimentos e de se posicionar. Além disso, saberá analisar de forma crítica as informações as quais terá acesso, contribuindo assim, para o seu desenvolvimento e para sua formação como indivíduo atuante nessa sociedade moderna. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) consubstancia com essa informação, ao trazer a seguinte menção:

> É necessário, portanto, uma cuidadosa reflexão por parte de todos que compõem a comunidade escolar, para que a tecnologia possa de fato contribuir para a formação de indivíduos competentes, críticos, conscientes e preparados para a realidade em que vivem. Necessariamente, o uso de tecnologias na escola está vinculado a uma concepção de ser humano e mundo, de educação e seu papel na sociedade moderna. (BRASIL, 1998, p. 157).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) traz, na Seção IV – Do Ensino Médio, em seu Artigo 35A § 8º a seguinte menção:

> Os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação processual e formativa serão organizados nas redes de ensino por meio de atividades teóricas e práticas, provas orais e escritas, seminários, projetos e **atividades on-line**, de tal forma que ao final do ensino médio o educando demonstre:
> I - domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;
> II - conhecimento das formas contemporâneas de linguagem. (BRASIL, 1996, grifo nosso).

Nesse parágrafo a LDB menciona a importância da realização de atividades online, para que dessa forma o aluno esteja inserido nesse atual contexto tecnológico. Os Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio Bases Legais (PCN Bases Legais), também coaduna com a mesma ideia quando afirma que: “A formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, **a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação**.” (BRASIL, 2000, p. 5, grifo do autor).

É importante ressaltar que a utilização de tecnologias digitais no ambiente escolar necessita de um planejamento eficaz. O uso desses instrumentos devem proporcionar uma aprendizagem consistente capaz de contribuir para a melhoria dos resultados dos indicadores educacionais, para que dessa forma a utilização dessas novas ferramentas tenham efetividade. Pereira também traz essa ideia ao informar que:

> A inserção dos recursos tecnológicos na sala de aula requer um planejamento de como introduzir adequadamente as TICs para facilitar o processo didático-pedagógico da escola, buscando aprendizagens significativas e a melhoria dos indicadores de desempenho do sistema educacional como um todo, onde as tecnologias sejam empregadas de forma eficiente e eficaz. A partir das concepções que os alunos têm sobre as tecnologias, sugere-se que as instituições educacionais elaborarem, desenvolvam e avaliem práticas pedagógicas que promovam o desenvolvimento de uma disposição reflexiva sobre os conhecimentos e os usos tecnológicos. (PEREIRA, 2010, p. 5).

Diante dessa afirmação, percebemos que o uso de tecnologias em sala de aula deve ser de forma responsável e consciente, visando contribuir com o processo de ensino-aprendizagem do discente. É importante também que o planejamento do uso dessas tecnologias digitais esteja associado ao Projeto Político Pedagógico (PPP) da Escola, com o intuito de melhorar o desenvolvimento educacional dos alunos, bem como os índices de desempenho do sistema educacional. Nesse contexto, a formação e capacitação dos professores para o uso correto dessas tecnologias é de suma importância.

2.2 Formação dos Professores para o uso das Tecnologias Digitais

Diante desse cenário, onde o uso de novas tecnologias não pode estar desassociado do processo de ensino-aprendizagem, é necessário que os professores sejam capacitados para usar os recursos tecnológicos de forma adequada. A realização de cursos de capacitação proporciona ao docente aprimoramento para o uso de tecnologias como ferramenta de apoio em suas aulas. Esses cursos contribuem significativamente para que o professor se aproprie das tecnologias digitais que são necessárias para tornar a aprendizagem mais significativa. Dessa forma, o docente saberá selecionar qual a melhor mídia a ser utilizada, visando alcançar o objetivo proposto em seu planejamento. Almeida afirma que:

> Essa prática pedagógica é uma forma de conceber educação que envolve o aluno, o professor, as tecnologias disponíveis, a escola e seu entorno e todas as interações que se estabelecem nesse ambiente, denominada ambiente de aprendizagem. Tudo isso implica um processo de investigação, representação, reflexão, descoberta e construção do conhecimento, no qual as mídias a utilizar são selecionadas segundo os objetivos da atividade. No entanto, caso o professor não conheça as características, potencialidades e limitações das tecnologias e mídias, ele poderá desperdiçar a oportunidade de favorecer um desenvolvimento mais poderoso do aluno. Isto porque para questionar o aluno, desafiá-lo e instigá-lo a buscar construir e reconstruir conhecimento com o uso articulado de tecnologias, o professor precisa saber quais mídias são tratadas por essas tecnologias e o que elas oferecem em termos de suas principais ferramentas, funções e estruturas. (ALMEIDA, 2003, p. 43).

Valente (2008, p. 76), também coloca que o professor deve saber como utilizar esses equipamentos tecnológicos e afirma que essas tecnologias interferem na identidade profissional do docente:

> Os professores precisam saber como usar os novos equipamentos e softwares e também qual é seu potencial, quais são seus pontos fortes e seus pontos fracos. Essas tecnologias, mudando o ambiente em que os professores trabalham e o modo como se relacionam com outros professores, têm um impacto importante na natureza do trabalho do professor e, desse modo, na sua identidade profissional. (VALENTE, 2008, p. 76).

Os cursos de formação continuada ajuda o docente a conhecer estratégias para o uso das tecnologias digitais. Além disso, serve para orientar o educador a mostrar aos educandos como utilizar os equipamentos eletrônicos e as mídias disponíveis, não apenas para fins de entretenimento e lazer, mas também para fins educacionais. Essas capacitações ajudam a comunidade escolar a compreender que o uso de tecnologias faz parte do cotidiano do aluno. Além disso, esclarece que usar os equipamentos tecnológicos de forma correta nas aulas, contribuirá significativamente para despertar o interesse do discente para compreensão dos conteúdos o que levará a construção do conhecimento. Segundo Bettega (2010, p. 18), a tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores.

Com o intuito de que os professores se apropriem dessas tecnologias digitais, fazendo o melhor uso destas, a rede de ensino tem oferecido diversos cursos de formação continuada. É importante que o educador busque atualizar-se, capacitar-se para atender essa geração tecnológica. Convém salientar, que ainda existe resistência por parte de alguns professores em utilizar essas tecnologias, ficando estes presos apenas ao uso do quadro de giz e ao livro didático. Essa atitude pode tornar as aulas desinteressantes para os alunos.

Cabe ressaltar que a não utilização de tecnologias pelos docentes ocorre em virtude de alguns aspectos, dos quais pode-se destacar dois. O primeiro é a falta de recursos existente nas escolas, o que faz com que o professor não tenha acesso aos itens necessários para trabalhar com tecnologias digitais. Devido a isso, acabam ficando presos apenas aos recursos que proporcione aos alunos aulas que não atenda a essa nova era tecnológica. Nas escolas da rede estadual da Bahia, por exemplo, nem todas têm laboratórios de informática. O segundo aspecto é que alguns docentes que fazem parte da rede efetiva de ensino não nasceram nessa era digital e ainda não se familiarizaram com essas tecnologias. Diferentemente, os alunos da atualidade já nasceram mergulhados nesse mundo digital, daí a importância do professor utilizar as tecnologias em favor da educação. A escola não pode deixar de lado a interferência que os recursos tecnológicos proporcionam no cotidiano dos estudantes. Sancho reforça essa ideia, ao colocar que:

> A prática docente deve responder às questões reais dos estudantes, que chegam até ela com todas as suas experiências vitais, e deve utilizar-se dos mesmos recursos que contribuíram para transformar suas mentes fora dali. Desconhecer a interferência da tecnologia, dos diferentes instrumentos tecnológicos, na vida cotidiana dos alunos é retroceder a um ensino baseado na ficção. (SANCHO, 1998, p. 40)

Carvalho (2012, p. 14) também coaduna com esse pensamento, pois entende que a escola não pode desconsiderar a chegada das novas tecnologias, e relata que:

> O acesso às tecnologias de informação e comunicação amplia as transformações sociais e desencadeia uma série de mudanças na forma como se constrói o conhecimento. A escola, bem como os outros lugares onde se fomenta o currículo, não pode desconsiderar esse movimento, ou seja, a chegada de novas tecnologias e mídias é uma realidade com a qual os profissionais de todas as áreas se deparam, apontando-lhe novos desafios, sendo a escola uma das organizações sociais que mais vem sendo questionada sobre como fazer o uso dos recursos tecnológicos na sua proposta de educar. Inserido neste contexto, tanto o pedagogo quanto o educador precisam assumir uma postura de predisposição à mudança, de compreensão do modo de ser, agir, pensar e se comunicar das novas gerações, como também saber o quê, como, o porquê e quando usar as diferentes mídias nos processos de ensino e aprendizagem. (CARVALHO, 2012, p. 14)

Apesar das dificuldades apresentadas nas escolas, as novas tecnologias são uma realidade dentro do ambiente escolar, a utilização de telefones celulares com acesso a internet pelos alunos já reflete isso. Porém é importante salientar que o uso de tecnologias exige o desenvolvimento de competências e habilidades específicas por todos os envolvidos no processo de educar. Uma delas é a capacidade de analisar e identificar qual a melhor ferramenta a ser utilizada para contribuir com o processo de ensino-aprendizagem. As plataformas educacionais, por exemplo, é um mecanismo que traz uma excelente oportunidade de apoio às aulas presenciais. Atualmente existem diversas ferramentas para uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC's).

2.3 Plataformas Digitais Disponíveis

Na atualidade existem diversas plataformas para apoiar o professor no uso de tecnologias digitais. Essas plataformas utilizam um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

Um AVA é um ambiente que proporciona o desenvolvimento e distribuição de conteúdos diversos para cursos online, disciplinas semipresenciais e presenciais, para alunos em geral. Esse ambiente é muito utilizado como ferramenta para Educação a Distância (EAD) e também para complementar aulas presenciais com conteúdos virtuais. Os AVAs foram desenvolvidos para ajudar professores e tutores no gerenciamento de conteúdos e materiais complementares para os seus alunos e na gestão completa de cursos online. Neste ambiente, é possível acompanhar todo o processo de aprendizagem por parte do aluno, além de gerar relatórios sobre performance e progresso do mesmo em determinado curso online.

O objetivo de um AVA é proporcionar um espaço online, onde é possível apresentar mídias, linguagens, recursos e informações necessárias para a aprendizagem do discente, possibilitando trazer para a tela do computador do aluno uma nova experiência de aprendizado. Em um ambiente virtual de aprendizagem o aluno pode realizar as atividades que foram programadas, debater ideias, acessar o conteúdo das disciplinas e acompanhar o seu avanço através do relatório de atividades. As plataformas de ensino apresentam um ambiente de acordo a cada necessidade requerida. Podemos citar alguns exemplos dessas plataformas para uso de tecnologias digitais, tais como o Moodle, Edmodo, Blackboard, Schoology, Google Classroom, dentre outras. De um modo geral, essas plataformas educacionais online proporcionam ambientes personalizados de aprendizado aos educandos. Permitem que os professores criem e gerencie salas de aulas virtuais. Estimulam o aprendizado compartilhado por meio de fóruns e chats. Há possibilidade de envio de arquivos, vídeos, documentos e atividades para os estudantes, além de permitir a realização de avaliações. Possibilita uma interação entre professor e aluno e permite aos estudantes interagir entre si. Vejamos as particularidades e a forma de operacionalização dessas plataformas.

2.3.1 Moodle

A plataforma Moodle, vide Figura 1, foi criada em 1999 pelo Australiano Martin Dougiamas. De acordo com ESTUDIO (2020b), o nome é um acrônimo de *Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment*, o que em português pode ser interpretado como "Ambiente de Aprendizagem Dinâmico Orientado a Objetos Modular". O Moodle é um sistema de gestão de aprendizagem e foi originalmente desenvolvido para ajudar educadores a criar cursos online, com foco na interação e na construção colaborativa de conteúdo. É usado por milhares de instituições de ensino em todo o mundo e fornece uma interface organizada de apoio às estratégias de *e-learning*, (método de educação virtual que usa como base as mídias eletrônicas e a internet). O Moodle também pode ser utilizado sem a ativação das aulas online, alguns professores podem usá-lo para simplesmente aprendizagem colaborativa. A plataforma vem sendo utilizada não só como ambiente de suporte à educação à distância, mas também como apoio a cursos presenciais, formação de grupos de estudo, treinamento de professores, dentre outros.

Figura 1 – Plataforma Moodle.

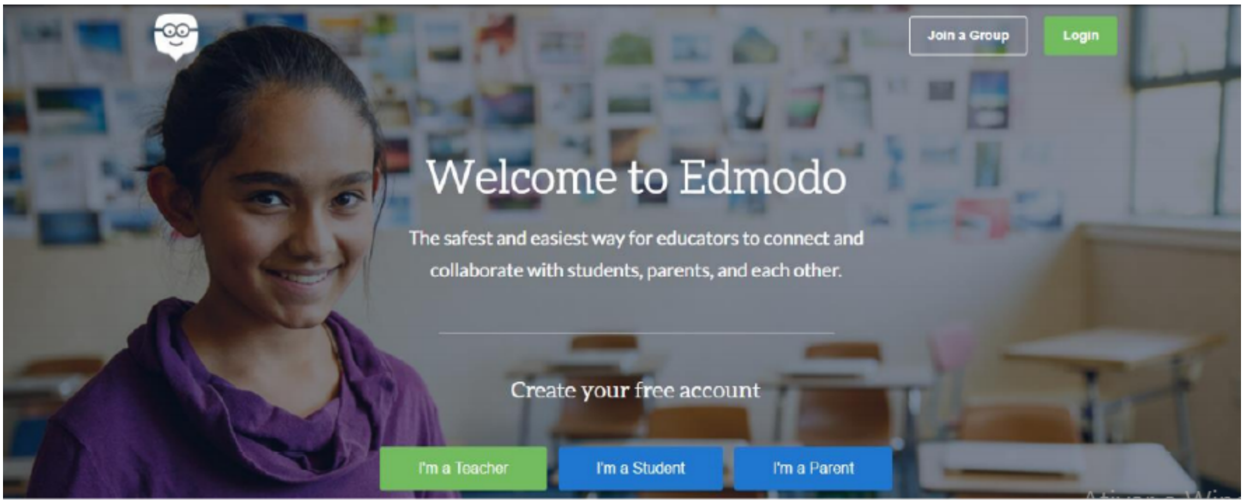
Fonte: MOODLE (2020).

Para criar um ambiente de aprendizado Moodle, o software deve ser baixado e instalado em um servidor web. A plataforma Moodle é *open source*, ou seja, software com código fonte aberto. É construída usando um design modular, para que usuários avançados possam modificar a plataforma conforme for necessário. A plataforma pode ser instalada em sistemas operacionais como Unix, Linux, Windows e Mac OS. Após a instalação é só seguir o passo a passo indicado para criar cursos, aulas e enviar documentos.

O Moodle é uma plataforma gratuita, bem didática, sendo uma solução fácil que não exige muito conhecimento técnico do professor e nem do aluno. Seu *layout* pode ser copiado, modificado e redistribuído pelos usuários gratuitamente. Essa plataforma permite ao professor gerenciar cursos, interagir com outros docentes e discentes, ela possibilita conceber cursos que utilizem fóruns, diários, chats, questionários, textos do tipo *wiki*, entre outros. O Moddle, no entanto apresenta algumas desvantagens, tais como: gera custos com a equipe de TI que é necessária para implantá-lo; necessita de uma equipe de suporte, interna ou terceirizada; precisa de uma estrutura de hardware e software básicos para atender às suas necessidades, uma vez que a plataforma não oferece esse tipo de apoio. Além disso, há necessidade de investimento em infraestrutura e tempo para realizar as necessárias customizações. Dependendo da hospedagem ou do número de acessos a plataforma tem muita instabilidade, impedindo o acesso dos alunos, professores e gestores, causando transtornos e adiamento de prazos.

2.3.2 Edmodo

Figura 2 – Plataforma Edmodo.



Fonte: EDMODO (2020a).

A plataforma social educativa Edmodo, conforme Figura 2, surgiu em 2008 na Califórnia, seus desenvolvedores são dois americanos, Nic Borg e Jeff O'Hara. Conforme EDMODO (2020b), ela é uma rede global de educação que ajuda a conectar todos os alunos com as pessoas e os recursos necessários para atingir seu pleno potencial. A Edmodo é um serviço de rede social cujo objetivo é oferecer um ambiente virtual fechado conversacional, ela funciona como aplicativo mobile para as plataformas Android e iOS, permitindo que a experiência de sala de aula presencial possa ser estendida no tempo-espaço.

Trata-se de uma plataforma de *e-learning* com características de uma rede social, podendo ser utilizado por meio dos dispositivos móveis. A Edmodo é gratuita e é considerada uma das plataformas educativas mais inovadoras do mundo. Ela é dedicada à educação em todos os graus, facilita a criação de micro ambientes entre alunos e professores, pois promove o microblog. A Edmodo é considerada uma plataforma que tem certa similaridade da organização visual com o Facebook, sendo muito simples de utilizar, proporciona uma socialização com seus usuários, permite a discussão de textos e o envio de áudios.

A Edmodo dispõe de funções como: trocador de mensagens instantâneas e gerenciador de tarefas, apresenta ambiente para criação e aplicação de enquetes. Os pais dos alunos podem ter acesso à plataforma, com possibilidade de consultar e revisar as atividades realizadas pelos seus filhos. Apesar dessa plataforma apresentar as vantagens que foram mencionadas, ela também apresenta algumas limitações que precisam ser destacadas, tais como: a falta de ferramentas síncronas de *Learning Managing* System(LMS), a exemplo de seminários online e videoconferências; dificuldade em encontrar informações sobre a plataforma em português e além disso, a Edmodo apresenta uma reduzida capacidade de personalização.

2.3.3 Blackboard

Figura 3 – Plataforma Blackboard.

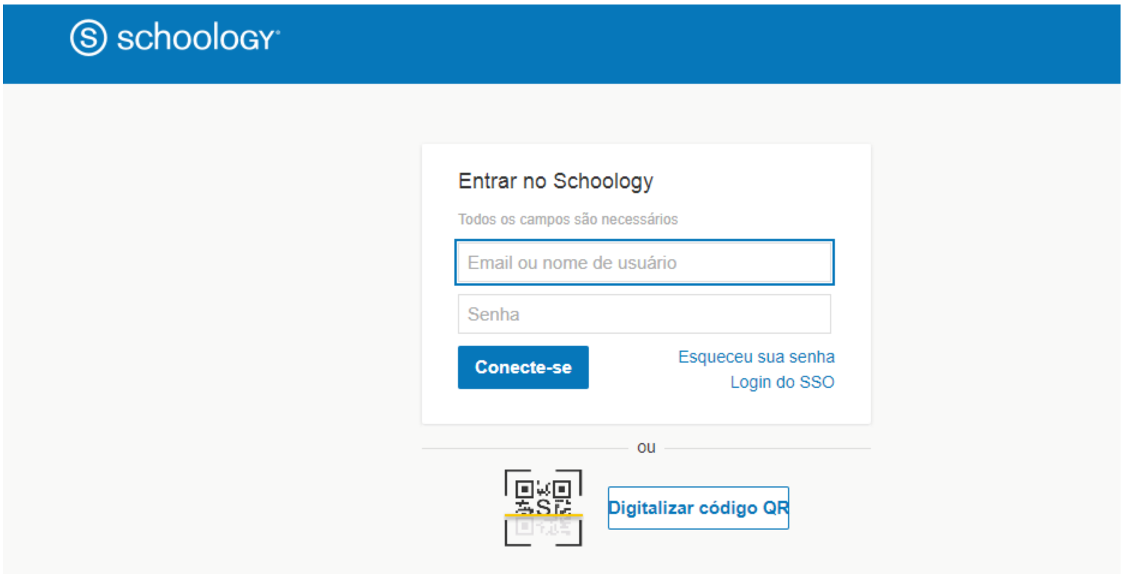
Fonte: BLACKBOARD (2020).

Conforme ESTUDIO (2020a), o ambiente virtual de aprendizagem Blackboard foi criado em 1997 por Matthew Pittinsky, Michael Chasen e Daniel Cane, junto com membros do corpo docente da Universidade Cornell. Sua função é facilitar a criação e gestão de cursos online proporcionando recursos multidirecionais para a construção da experiência educativa. Todo o conteúdo, as tarefas de ensino, a interação entre professor e alunos são realizados dentro desse ambiente virtual, ver Figura 3. O software possibilita a integração de diferentes setores de uma instituição de ensino sob um só sistema.

O Blackboard é um sistema de gestão acadêmica, o qual, além dos recursos didáticos, oferece ferramentas administrativas para o gerenciamento de cursos. Os avisos inseridos pelo professor surge como um *pop-up* no momento em que o aluno abri a plataforma. Dispõe do recurso e-mail que refere-se a um correio eletrônico limitado ao grupo que permite que os alunos troquem mensagens entre si. A plataforma apresenta a funcionalidade Debate que permite que o professor coloque em pauta um tema sobre o qual os alunos podem desenvolver reflexões e discutir ideias. O Blackboard tem a função programa de ensino que permite ao professor disponibilizar os textos e as referências bibliográficas relativas ao curso, inclusive links e artigos em pdf, para baixar ou ler online. Essa plataforma também possibilita disponibilizar textos audiovisuais como podcasts e músicas e apresenta o recurso biblioteca de mídia que permite a criação de uma coleção de vídeos e outras mídias audiovisuais. Convém salientar que o Blackboard não é gratuito, além disso, alguns usuários afirmam que o uso dessa plataforma não é tão intuitivo e que consome-se muito tempo para colocar os materiais que serão destinados aos alunos.

2.3.4 Schoology

Figura 4 – Plataforma Schoology.



Fonte: SCHOOLOGY (2020).

A Schoology foi fundada no ano de 2008 por Jeremy Friedman, Ryan Hwang, Tim Trinidad e Bill Kindler, em Nova York. De acordo com CBT (2020), ela é um LMS, ou seja, um sistema de gerenciamento de aprendizagem, que funciona em jeito de *timeline* (linha do tempo). Esta plataforma possibilita às instituições de ensino atender às necessidades individuais dos alunos com ferramentas para dar instruções e promover a comunicação. A Schoology fornece uma oportunidade onde os participantes podem se conectar com experiências interativas, os professores podem adquirir ferramentas para melhorar desempenho com o objetivo de aprimorar a aprendizagem dos estudantes. Para acesso a plataforma Schoology, o aluno deverá ter acesso a internet, e-mail pessoal para cadastro, conforme Figura 4. Além disso, o discente necessita receber o código de acesso que deve ser disponibilizado pelo professor ou administrador do respectivo curso (sala de aula digital).

A Schoology é uma plataforma gratuita, sua interface assim como a da Edmodo é semelhante ao Facebook, o que facilita a navegação e interação. O pacote básico permite aos professores realizar inúmeras tarefas para melhorar a dinâmica do curso e ver o progresso acadêmico de cada aluno. Essa plataforma cria uma biblioteca de recursos que depois podem ser distribuídos facilmente por todas as turmas, há possibilidade de criar perfis para cada disciplina. Com a Schoology é possível organizar grupos de discussão e trabalhos, abrir uma discussão com um simples post na *timeline* da disciplina, realizar videoconferências e *webinars*, elaborar questões em um editor que permite a formatação do texto e a inclusão de imagens ou vídeos. Essa plataforma conecta com educadores de todo o mundo. Uma limitação, apresentada por essa ferramenta é a demora para fazer *upload* de documentos, pois são necessárias várias etapas até a conclusão do processo, a introdução de equações matemáticas, por exemplo, é bastante demorada.

2.3.5 Google Classroom

Figura 5 – Plataforma Google Classroom.

Fonte: CLASSROOM (2020).

O Google Sala de Aula (ou Google Classroom, em inglês), Figura 5, foi criado em 2014, com o objetivo de ajudar os profissionais de educação a fazer tarefas online, visando otimizar seu tempo, bem como reduzir o consumo de papel. Essa ferramenta torna o processo de ensino e aprendizagem mais produtivo e significativo, por meio dela o professor pode criar turmas, enviar atividades, dar feedback aos alunos, dentre outras possibilidades.

De acordo com TECNOLOGIAS (2020), o Google Classroom é um serviço da Web gratuito para escolas, organizações sem fins lucrativos e qualquer pessoa com uma Conta do Google pessoal. Ele é acessível e seguro e funciona com apps como o Documentos Google, Google Agenda, Gmail, Google Drive e Formulários Google. É possível acessar o Google Classroom pela Web em um computador com qualquer navegador, como o Google Chrome, o Firefox, o Internet Explorer ou o Safari. Em geral, essa plataforma é compatível com as principais versões dos navegadores de forma contínua, ela também está disponível para dispositivos móveis Android e iOS da Apple, apresentando uma fácil configuração.

O Google Classroom facilita a organização dos materiais, pois permite a criação de tópicos, possibilita enviar avisos e iniciar instantaneamente debates com a turma, os educandos podem compartilhar recursos uns com os outros e interagir no mural da turma ou por e-mail. Cada vez que uma nova tarefa é inserida ou é realizado algum comentário particular no Google Classroom, alunos e professores recebem notificações por e-mail. Essa plataforma permite estabelecer prazos e horários para entrega de atividades e trabalhos, o docente tem acesso às atividades dos estudantes, podendo fazer análises, emitir comentários, dar feedback direto e em tempo real e atribuir notas, inclusive é possível exportar as notas dos discentes para uma planilha do Google. O Google Classroom não faz uso dos conteúdos e dados dos estudantes e não contém anúncios ou propagandas. Porém para sua utilização é necessário ter conhecimento de múltiplos aplicativos e serviços Google e além disso, obriga o usuário a ter um gmail ou domínio associado à Google.

Dentre as plataformas educacionais aqui apresentadas, faremos o uso nesse trabalho da ferramenta Google Classroom, como fonte de apoio ao ensino da Geometria Analítica. Tal escolha foi feita pelo fato de tratar-se de uma tecnologia gratuita e também por ter sido apresentada aos professores em atividade da rede Estadual de Educação da Bahia, através do curso "Uso Pedagógico de Tecnologias Educacionais". Esse curso de formação teve como objetivo promover a aplicação das tecnologias e inovações disponíveis com o uso das ferramentas Google para Educação. Essa capacitação fez parte do Projeto e-Nova Educação que foi criado pelo Governo do Estado Bahia, por meio da Secretaria Estadual da Educação e teve como objetivo levar as tecnologias digitais para a sala de aula das escolas públicas. Essa qualificação proporcionou formação, certificação e progressão na carreira aos professores que participaram e foram aprovados no curso. Esse projeto também contemplou a entrega de *chromebooks* para as escolas públicas da Bahia, e esse equipamento será de grande utilidade, já que a instituição de ensino onde realizaremos o desenvolvimento do trabalho não dispõe de laboratório de informática. No Capítulo 5 trazemos o detalhamento da proposta de Sequências Didáticas que serão desenvolvidas nesse trabalho e a criação da Sala de Aula Virtual utilizando a plataforma Google Classroom, com o intuito de tornar a aprendizagem dos conteúdos matemáticos mais consistentes e consequentemente mais significativa.

3 O Ensino da Matemática e as Tecnologias Digitais

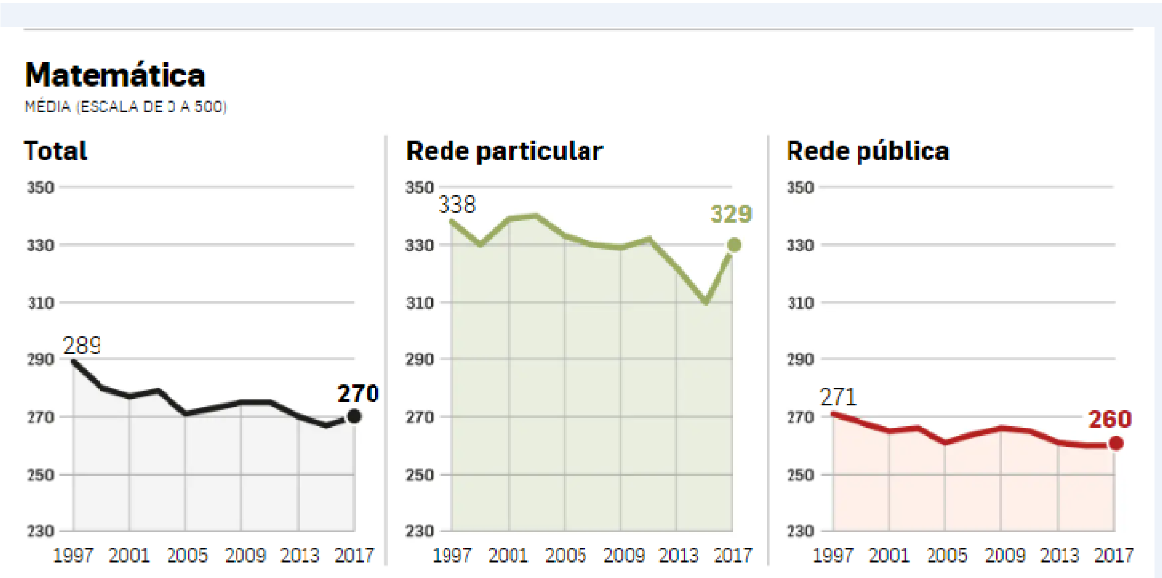
Neste Capítulo, relatamos a dificuldade apontada pelos estudantes quanto ao estudo da disciplina Matemática, o que tem sido confirmado pelo seu baixo desempenho nos resultados das avaliações nacionais. Muitos discentes não enxergam a aplicabilidade da Matemática em seu dia a dia, diante disso salientamos a relevância da utilização da contextualização para uma aprendizagem mais significativa. Relatamos também a importância do uso de tecnologias digitais, como ferramenta capaz de despertar o interesse do aluno para o estudo da Matemática. A utilização do ensino híbrido, de vídeos, da plataforma Khan Academy e do software GeoGebra, são recursos pedagógicos importantes para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Essa metodologia busca melhorar o desempenho dos alunos e proporciona um aprendizado interativo e colaborativo, capaz de tornar as aulas mais atrativas.

3.1 A Contextualização e a Aprendizagem Matemática

Percebemos nas salas de aula que a maioria dos discentes afirmam não gostar da disciplina Matemática, por achá-la difícil, complicada ou por não enxergarem uma aplicabilidade desses conteúdos no seu dia a dia. Essa dificuldade apresentada por muitos alunos tem sido ponto de pesquisas, estudos e debates, com o intuito de encontrar a origem dos problemas que dificultam a aprendizagem ou o ensino da Matemática. Notadamente há uma ideia arraigada de que a Matemática é uma disciplina difícil, que exige muito esforço e que poucos conseguem aprender.

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é um sistema de verificação da aprendizagem em larga escala, realizado periodicamente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (Inep). Com o resultado dessa avaliação é possível realizar uma análise e um diagnóstico da educação básica brasileira, além de conhecer os fatores que podem interferir no desempenho do estudante. O Saeb oferece subsídios para a elaboração, o monitoramento e o aprimoramento de políticas com base em evidências. Esse sistema permite que os diversos níveis governamentais avaliem a qualidade da educação praticada no país. Os resultados de aprendizagem dos estudantes apurados no Saeb, juntamente com as taxas de aprovação, reprovação e abandono que constam no Censo Escolar, compõem o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb). Os resultados dessas avaliações que são realizadas em âmbito nacional comprovam que os alunos no Brasil têm apresentado baixo nível de proficiência em relação à disciplina de Matemática. Segue abaixo resultado do Saeb referente ao ano de 2017.

Figura 6 – Resultado Saeb 2017.



Fonte: INEP (2020b).

Nos gráficos dispostos na Figura 6, podemos observar que o desempenho em Matemática no ano de 2017 (último ano que foi divulgado o resultado da avaliação) foi inferior ao ano de 1997. E essa diferença ainda é maior quando analisamos o gráfico da rede pública. Diante dessa realidade é necessária a adoção de medidas para melhoria desses índices, pois estes demonstram que nossos alunos não têm tido a aprendizagem necessária da disciplina Matemática. Dessa forma, não conseguem a habilidade requerida para resolução de problemas e desenvolvimento do raciocínio lógico, por exemplo.

O grande desafio do professor é fazer com que se consolidem as competências e habilidades nos alunos, para que estes possam raciocinar, comunicar-se e argumentar matematicamente, formular a resolução de problemas mediante a utilização de conceitos, procedimentos e ferramentas matemáticas. E dessa forma reconhecer que a Matemática é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, que favorece a investigação, a compreensão e a atuação no mundo. O documento que traz as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais nas áreas de Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias (PCN + Ensino Médio), traz a seguinte menção:

> Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento. No ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber. (BRASIL, s/a, p. 111).

Dentre os questionamentos dos alunos em sala de aula quanto ao estudo da Matemática um dos mais relatados é: "Qual a utilidade desse assunto em minha vida?". Na verdade os discentes não compreendem que a matemática está presente em várias situações do nosso dia a dia, como ao pagar conta de água ou luz, ao comprar um equipamento eletrônico e dividi-lo em 10 vezes, em ir ao supermercado fazer compras, assim como em outras situações. Diante disso faz-se necessário o estudo dos conteúdos matemáticos de forma contextualizada, para que o discente perceba que os assuntos abordados em sala de aula são em sua maioria utilizados em seu cotidiano, ou no dia a dia de quem vive a sua volta. A interdisciplinaridade é outro mecanismo importante para tornar as aulas de matemática mais atrativas. Os PCN + Ensino Médio, reafirmam essas colocações ao relatar que:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, s/a, p. 111).

De fato a contextualização tornou-se fator preponderante para uma melhor aprendizagem dos conteúdos matemáticos, inclusive os livros didáticos já estão sendo confeccionados trazendo exemplos, exercícios e problemas contextualizados, ou seja, questões que mostram essa aproximação do estudante com os conceitos matemáticos. As Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013, p. 136) destacam que o ambiente de aprendizagens deve basear-se "na contextualização dos conteúdos, assegurando que a aprendizagem seja relevante e socialmente significativa".

Outro mecanismo importante para facilitar a aprendizagem da Matemática é o uso de TDIC's. O uso dessas tecnologias também podem contribuir de forma significativa para despertar nos educandos o interesse pela disciplina Matemática, tendo em vista que o uso de equipamentos eletrônicos é uma constante na vida dos alunos da atualidade. Silva (2011, p. 39) fala como o uso de tecnologias contribui para despertar o interesse do aluno em aprender, ao colocar que:

> O emprego das tecnologias de informação e comunicação no sistema escolar instiga a curiosidade do educando, desperta seu interesse, vontade de conhecer diferentes fenômenos, aumentando sua percepção espacial. A tecnologia permite que o professor traga ao universo do aluno, imagens dos lugares mais longínquos e diferenciados, e as particularidades de cada cultura, ou seja, partindo do particular para o geral, o professor lança ao educando o desafio de entender o seu lugar de origem e as relações – sejam econômicas, sociais ou culturais – que esse lugar possui com o restante do mundo. (SILVA, 2011, p. 39).

Porém os PCN fazem uma ressalva a esse relato, ao afirmar que:

> Utilizar recursos tecnológicos não significa utilizar técnicas simplesmente, e não é condição suficiente para garantir a aprendizagem dos conteúdos escolares. Por isso, é fundamental criar um ambiente de aprendizagem em que os alunos possam ter iniciativas, problemas a resolver, possibilidades para corrigir erros e criar soluções pessoais. (BRASIL, 1998, p. 153)

Os PCN com essa colocação, além de fazerem essa importante ressalva, deixam claro a necessidade de se utilizar as tecnologias para criar um ambiente de aprendizagem em que os estudantes possam ser os autores da construção do seu conhecimento. Esse ambiente deve permitir ao aluno ter iniciativas e a capacidade de criar suas próprias soluções. As tecnologias digitais não podem ser utilizadas de qualquer forma, sem uma perspectiva, sem um objetivo, inclusive a BNCC afirma que é preciso:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva." (BRASIL, 2018, p. 9).

Como essas tecnologias fazem parte do ambiente escolar, cabe ao professor de Matemática utilizar as tecnologias digitais para auxiliar no processo de aprendizagem. Dessa forma os discentes irão despertar seu interesse para o estudo dessa disciplina, desenvolver seu raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas. Oliveira (2007, p. 41) bem define o que é ensinar Matemática e ainda propõe aos professores que busquem mecanismos para motivar as aulas.

> Ensinar Matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Os educadores matemáticos devem procurar alternativas que motivem a aprendizagem e, desenvolvam a autoconfiança, a organização, a concentração, estimulando as interações do sujeito com outras pessoas. (OLIVEIRA, 2007, p. 41)

Utilizar as tecnologias digitais para aproximar o aluno da Matemática e para despertar no educando o desejo de aprender, surge como uma alternativa para melhorar a aprendizagem dos discentes e consequentemente os resultados das avaliações de desempenho. Os conteúdos matemáticos abordados em sala de aula (num ambiente offline), onde se promove o debate e a discussão entre os envolvidos no processo de aprender, podem ser reforçados utilizando-se, por exemplo, as plataformas educacionais. Nesse ambiente online o professor poderá disponibilizar vídeos, apostilas, exercícios, testes, dentre outros, com o objetivo de fornecer mais subsídios para os alunos construir seu conhecimento matemático. Observe que neste método o professor utiliza simultaneamente mecanismos offline e online, essa metodologia é chamada de Ensino Híbrido.

3.2 Ensino Híbrido

O ensino híbrido é um modelo de educação que mescla dois métodos de ensino: o tradicional e o virtual. Ele integra a tecnologia digital com as interações presenciais, almejando a personalização do ensino e da aprendizagem. Esse formato busca melhorar o desempenho dos alunos, uma vez que essa modalidade diversifica a forma de aprender, valorizando a interação e o aprendizado coletivo e colaborativo. O ensino híbrido tem se tornado uma importante modalidade de ensino, pois possibilita aos alunos participarem de suas atividades educacionais de forma diversificada, onde ele pode, de certa forma, determinar seu ritmo, ou modo de aprender. De acordo com Christensen, Horn, Staker:

> O ensino híbrido é um programa de educação formal no qual um aluno aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino online, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, lugar, modo e/ou ritmo do estudo, e pelo menos em parte em uma localidade física supervisionada, fora de sua residência. (CHRISTENSEN; HORN; STAKER, 2013, p. 7)

No ensino híbrido a atuação do professor não é deixada de lado, ela continua sendo de fundamental importância no processo de ensino e aprendizagem, também não ocorre extinção das aulas presenciais ou da sala de aula física. No ensino híbrido faz-se uso das potencialidades proporcionadas tanto pelo ensino presencial quanto pelo ensino a distância. Conforme Vergara (2018, p. 890), “Os modelos de Ensino Híbrido não impossibilitam a prática de aulas expositivas. A ideia é criar um novo significado para esses momentos e mesclá-los com atividades de outros tipos, utilizando recursos tecnológicos.” O uso das

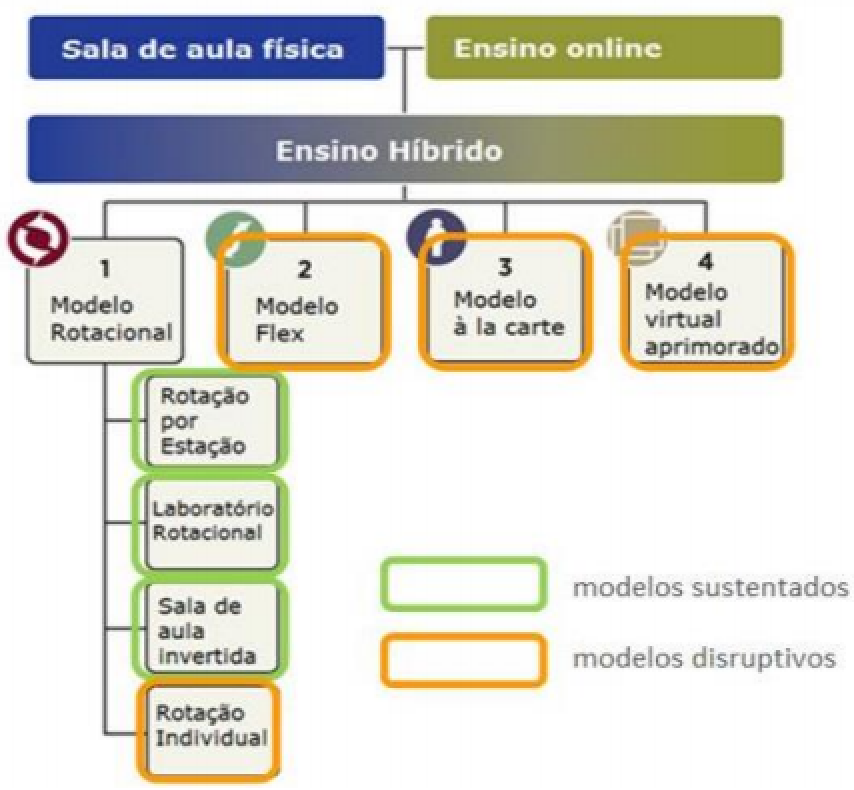
TDIC's constitui uma importante aliada para implantação do ensino híbrido. Sabemos que os discentes estão imersos na era tecnológica e que uso dessas ferramentas possibilita que o conhecimento passe a ser transmitido de forma mais interativa e isso proporciona maior participação dos estudantes nas aulas, o que contribui para melhoria de sua aprendizagem.

Segundo os autores (HORN; STAKER, 2015) os modelos de ensino híbrido são classificados em sustentados ou disruptivos:

- Sustentados - são aqueles que não geram grandes rupturas no modelo tradicional, a inserção da mudança ocorre de forma gradativa. Esses modelos conservam algumas características do tradicional, ou seja, faz uma integração entre os métodos tradicional e online e não causam grandes custos para as escolas, pois são mais fáceis de serem adaptados.

- Disruptivos - são aqueles que rompem com as salas de aula tradicionais, utilizando o ensino online. Nesse modelo as unidades escolares tendem a se afastar do método tradicional, e passam a utilizar a tecnologia digital como a principal fonte de acesso ao conhecimento.

Figura 7 – Modelos de Ensino Híbrido.



Fonte: HORN e STAKER (2015).

Segundo Bacich, Tanzi e Trevisani (BACICH; TANZI; TREVISANI, 2015, p. 47 a 49), os principais modelos de ensino híbrido, conforme Figura 7, caem em quatro categorias:

> 1. **Modelo Rotacional:** os estudantes revezam as atividades realizadas de acordo com um horário fixo ou orientação do professor. As tarefas podem envolver discussões em grupo, com ou sem a presença do professor, atividades escritas, leituras e, necessariamente uma atividade online. Nesse modelo, há as seguintes propostas:
>
> a) Rotação por Estações: os estudantes são organizados em grupos, cada um dos quais realiza uma tarefa de acordo com os objetivos do professor para a aula em questão. Podem ser realizadas atividades escritas, leituras, entre outras. Um dos grupos estará envolvido com propostas online que, de certa forma, independem do acompanhamento direto do professor. É importante valorizar momentos em que os estudantes possam trabalhar de forma colaborativa e aqueles em que possam fazê-lo individualmente. Em um dos grupos, o professor pode estar presente de forma mais próxima, garantindo o acompanhamento de estudantes que precisam de mais atenção. A variedade de recursos utilizados, como vídeos, leituras, trabalho individual e colaborativo, entre outros, também favorece a personalização do ensino, pois, como sabemos, nem todos os estudantes aprendem da mesma forma. Após um determinado tempo, previamente combinado com os estudantes, eles trocam de grupo, e esse revezamento continua até todos terem passado por todos os grupos. O planejamento desse tipo de atividade não é sequencial, e as tarefas realizadas nos grupos são, de certa forma, independentes, mas funcionam de forma integrada para que, ao final da aula, todos tenham tido a oportunidade de ter acesso aos mesmos conteúdos.
>
> b) Laboratório Rotacional: os estudantes usam o espaço da sala de aula e laboratórios. O modelo de laboratório rotacional começa com a sala de aula tradicional, em seguida adiciona uma rotação para computador ou laboratório de ensino. Os laboratórios rotacionais frequentemente aumentam a eficiência operacional e facilitam o aprendizado personalizado, mas não substituem o foco nas lições tradicionais em sala de aula. O modelo não rompe com as propostas que ocorrem de forma presencial em classe, mas usa o ensino online como uma inovação sustentada para ajudar a metodologia tradicional a atender melhor às necessidades de seus alunos. Nesse modelo, portanto, os estudantes que forem direcionados ao laboratório trabalharão nos computadores, de forma individual e autônoma, para cumprir os objetivos fixados pelo professor, que estará, com outra parte da turma, realizando sua aula da maneira que achar mais adequada. A proposta é semelhante ao modelo de rotação por estações, em que os alunos fazem essa rotação em sala de aula, porém, no laboratório rotacional, eles devem se dirigir aos laboratórios, onde trabalharão individualmente nos computadores, acompanhados por um professor tutor.
>
> c) Sala de Aula Invertida: nesse modelo, a teoria é estudada em casa, no formato online, e o espaço da sala de aula é utilizado para discussões, resolução de atividades, entre outras propostas. O que era feito em classe (explicação do conteúdo) agora é feito em casa, e o que era feito em casa (aplicação, atividades sobre o conteúdo)agora

é feito em sala de aula. Esse modelo é valorizado como a porta de entrada para o ensino híbrido, e há um estímulo para que o professor não acredite que essa seja a única forma de aplicação de um modelo híbrido de ensino, a qual pode ser aprimorada. Podemos considerar algumas maneiras de aperfeiçoar esse modelo, envolvendo a descoberta e a experimentação como proposta inicial para os estudantes, ou seja, oferecer possibilidades de interação com o fenômeno antes do estudo da teoria (que pode acontecer em vídeos, leituras, etc.). Diversos estudos têm mostrado que os estudantes constroem sua visão sobre o mundo ativando seus conhecimentos prévios e integrando as novas informações com as estruturas cognitivas já existentes para que possam, então, pensar criticamente sobre os conteúdos ensinados. Essas pesquisas indicam que os alunos desenvolvem habilidades de pensamento crítico e compreendem melhor conceitualmente uma ideia quando exploram um domínio primeiro e, então, têm contato com uma forma clássica de instrução, como palestras, vídeos ou leitura de textos.

d) Rotação Individual: cada aluno tem uma lista das propostas que deve contemplar em sua rotina para cumprir os temas a serem estudados. Aspectos como avaliar para personalizar devem estar muito presentes nessa proposta, uma vez que a elaboração de um plano de rotação individual só faz sentido se tiver como foco o caminho a ser percorrido pelo estudante de acordo com suas dificuldades ou facilidades. A diferença da rotação individual para outros modelos de rotação é que os estudantes não passam necessariamente por todas as modalidades ou estações propostas. Sua agenda diária é individual, customizada de acordo com as suas necessidades. O tempo de rotação, em alguns exemplos relatados, é livre, variando de acordo com as necessidades dos estudantes. Em outros exemplos, pode não ocorrer rotação, ou, ainda, pode ser necessário determinar um tempo para o uso dos computadores disponíveis. De acordo com os estudos sobre o modelo de ensino híbrido, observa-se que não há uma proposta de rotação individual que ocorra durante todo o período de aula, ou como o único tipo de estratégia a ser utilizado. O controle individual de seu aprendizado é a chave do envolvimento dos estudantes.

2. **Modelo Flex**: os alunos também têm uma lista a ser cumprida, com ênfase no ensino online. O ritmo de cada estudante é personalizado, e o professor fica à disposição para esclarecer dúvidas. Esse modelo, apesar de ser considerado uma possibilidade metodológica, é tido como disruptivo e propõe uma organização de escola que não é comum no Brasil.

3. **Modelo À La Carte**: o estudante é responsável pela organização de seus estudos, de acordo com os objetivos gerais a serem atingidos, organizados em parceria com o educador; a aprendizagem, que pode ocorrer no momento e local mais adequados, é personalizada. Nessa abordagem, pelo menos um curso é feito inteiramente online, apesar do suporte e da organização compartilhada com o professor. A parte online pode ocorrer na escola, em casa ou em outros locais.

4. **Modelo Virtual Enriquecido**: trata-se de uma experiência realizada por toda a escola, em que em cada disciplina (como a de matemática, por exemplo), os alunos dividem seu tempo entre a aprendizagem online e a presencial. Os estudantes podem se apresentar, presencialmente, na escola, apenas uma vez por semana. Assim como o modelo à la carte, o modelo virtual enriquecido também é considerado disruptivo porque propõe uma organzação da escola básica que não é comum no Brasil.

Os modelos aqui apresentados configuram importantes ferramentas para utilização do ensino híbrido, cada um com sua especificidade, cabe ao professor escolher qual o melhor modelo que se adequa a sua prática pedagógica e aplicá-la. Nesse trabalho traremos duas proposta de Sequências Didáticas utilizando os seguintes modelos do ensino híbrido: O Rotação por Estações e o Sala de Aula Invertida. Optamos por esses modelos sustentados, pois a utilização desses métodos não geram uma ruptura drástica ao método tradicional, tendo em vista que a proposta é destinada a uma escola pública que não dispõe de muitos recursos.

3.3 Recursos Digitais para Apoiar no Ensino da Matemática

A utilização de recursos digitais funcionam como eficientes estratégias didáticas para o ensino da Matemática, pois essas ferramentas despertam o interesse do aluno, apresentam oportunidades que facilitam o entendimento dos conceitos e consequentemente proporcionam uma melhoria no processo de ensino-aprendizagem. "A motivação é outra idéia bastante associada ao uso de tecnologias. Sem dúvida, os alunos ficam muito motivados quando utilizam recursos tecnológicos nas situações de aprendizagem, pois introduzem novas possibilidades na atividade de ensino". (BRASIL, 1998, p. 156).

Convém salientar que é importante que toda comunidade escolar tenha interesse em implementar métodos para utilização de tecnologias digitais, para que dessa maneira o uso dessas ferramentas tenham efetividade e alcance o real objetivo que é tornar a aprendizagem significativa. A utilização de vídeos para auxiliar nas aulas, o uso da Khan Academy, que é uma plataforma que proporciona um aprendizado interativo e colaborativo e a utilização do GeoGebra que é um software de geometria dinâmica, onde o estudante pode visualizar suas construções geométricas, são exemplos de recursos digitais que podem auxiliar no ensino da Matemática.

3.3.1 O Uso do Vídeo

Os vídeos têm sido cada vez mais utilizados como recurso pedagógico. Alguns estudantes tem uma aprendizagem significativa quando são submetidos a estímulos visuais e sonoros. Conforme Moran (1995, p. 27) "o vídeo é sensorial, visual, linguagem falada, linguagem musical e escrita. Linguagens que interagem superpostas, interligadas, somadas, não separadas. Daí a sua força". Serafim e Sousa também apoiam o uso da multimídia ao afirmar que:

> Através da multimídia tem-se uma nova estruturação de como apresentar, demonstrar e estruturar a informação apreendida. O computador mediante texto, imagem e som interrompe a relação autor/leitor que é claramente definida num livro, passa para um nível mais elevado, reconfigurando a maneira de como é tratada esta relação. A interatividade proporcionada pelos aplicativos multimídia pode auxiliar tanto na tarefa de ensinar quanto na de aprender. (SERAFIM; SOUSA, 2011, p. 27)

Diante disso, podemos considerar o vídeo como uma importante estratégia para auxiliar no ensino de conteúdos matemáticos. No entanto, ao ser adotado como recurso pedagógico, o vídeo deve passar por uma análise minuciosa do professor. É necessário conhecimento e planejamento por parte do docente, para que o aluno desfrute de uma mídia capaz de atender suas necessidades. Ao escolher o vídeo que o educador disponibilizará ao educando, é importante verificar se o conteúdo e a forma de exibição irão atender aos objetivos propostos pelo docente em seu planejamento de aula. Um vídeo de baixa qualidade ou com material inadequado, tende a prejudicar a aprendizagem do aluno, bem como deixá-lo disperso durante a sua reprodução. Essa mídia deve ser capaz de despertar o interesse ao estudo da Matemática. A BNCC coloca que os recursos didáticos como o vídeo, por exemplo, tem um papel importante para compreensão e utilização das noções matemáticas, conforme menção abaixo:

> [...] a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, **vídeos**, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. (BRASIL, 2018, p. 276, grifo nosso).

Ao assistir um vídeo sugerido pelo professor, o discente tem controle sobre o ritmo da apresentação, podendo parar, retroceder e avançar, tendo um domínio sobre a utilização dessa mídia. Nesse trabalho traremos o vídeo como um mecanismo de apoio ao estudo da Matemática, onde o aluno poderá acessar esses vídeos no momento que necessitar. Estes, por sua vez, serão mais uma ferramenta de estudo para complementar os conteúdos abordados em sala de aula, esses vídeos estarão disponíveis na sala de aula do Google Classroom. Convém salientar que os vídeos que estarão nesta plataforma, são preferencialmente os que constam no YouTube Edu.

O YouTube Edu, disponível no site www.youtube.com/edu, é uma plataforma do Google que seleciona e agrega vídeos de educação feitos por professores brasileiros. Essa iniciativa foi criada em parceira com a Fundação Lemann, fundação que realiza projetos ao lado de professores, gestores escolares, secretarias de educação e governos por uma aprendizagem de qualidade. Os vídeos publicados no YouTube Edu passam pela curadoria de uma comissão de professores, que avaliam a veracidade das informações e a qualidade das aulas. Nessa plataforma, os mesmos conteúdos podem ser apresentados em vários vídeos, sendo ministrados por professores diferentes, com metodologias diferentes. Conforme afirmou Dênis Mizne, diretor executivo da Fundação Lemann: “o grande diferencial da plataforma é justamente possibilitar que as pessoas escolham o professor que melhor se adapta ao seu perfil”. O conteúdo dos vídeos é avaliado de forma criteriosa, para que tanto o professor quanto o aluno tenham acesso a um material de qualidade, atendendo suas necessidades.

3.3.2 O Uso da Khan Academy

A Khan Academy trata-se de uma plataforma online que possibilita aos alunos uma extensão para complementar os estudos abordados em sala de aula, instigando-o a um aprendizado intuitivo e colaborativo. A Khan Academy, é uma organização sem fins lucrativos, que se mantém através de doações, patrocinadores, publicidades, etc. Eles têm como objetvo “oferecer uma educação gratuita, universal, para todo mundo, em todo lugar”. (KHAN, 2013, p. 206).

A Khan Academy é uma plataforma que disponibiliza exercícios, vídeos de instrução e um painel de aprendizado personalizado que habilita os estudantes a aprender no seu próprio ritmo dentro e fora da sala de aula. Eles abordam os conteúdos de Matemática, Ciência, Programação de computadores, História, Economia, Português, dentre outros. A empresa apresenta parcerias com instituições como a National Aeronautics and Space Administration – Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço (NASA), o Museu de Arte Moderna, a Academia de Ciências da Califórnia e o Massachusetts Institute of Technology - Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) para oferecer conteúdo especializado. O projeto começou com o fundador Salman Khan dando aulas de reforço de Matemática para sua prima, como estes moravam em cidades diferentes as aulas eram por meio de vídeos, o programa cresceu e se tornou uma organização com mais de 150 pessoas, composta por uma equipe diversificada que se reuniu para trabalhar com o intuito de levar uma educação de qualidade. A Fundação Lemann fez uma parceria com a Khan Academy e desde 2014 vem traduzindo todos os vídeos, originalmente gravados em inglês, para o português.

A plataforma conta com recursos que atende alunos de Matemática em vários níveis, usando tecnologias adaptativas de ponta que identificam os pontos fortes e lacunas no aprendizado. A Khan Academy dispõe de vídeos bastante didáticos e com uma linguagem fácil, traz também diversos exercícios de fixação e apostilas, com o conteúdo de Geometria Analítica. Todo esse material pode ser inserido na sala de aula do Google Classroom para que o aluno tenha acesso a uma sala de aula virtual com todos os conteúdos ministrados presencialmente. Diante disso, a Khan Academy dispõe de diversos instrumentos, que são de grande utilidade para colaborar com a proposta desenvolvida nesse trabalho, que é de utilizar as tecnologias digitais para ajudar no processo de consolidação da aprendizagem dos alunos na disciplina Matemática.

3.3.3 O Uso do GeoGebra

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar, conforme GEOGEBRA (2020). O programa GeoGebra foi criado pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter, com ele podemos desenhar e manipular alguns objetos geométricos e também visualizar suas propriedades algébricas. Ele foi desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática desde o ensino básico ao universitário. O software é gratuito e utiliza a linguagem Java. No próprio programa existe um tutorial com orientações para sua utilização.

A área de trabalho GeoGebra contém o plano cartesiano com os eixos coordenados: eixo x e eixo y. Nela pode-se fazer as construções geométricas que são descritas algebricamente na Janela de Álgebra. Ele tem como vantagem representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. No GeoGebra é possível fazer a construção de pontos, segmentos de retas, retas, mediatrizes, polígonos, calcular comprimentos, ângulos, ponto médio, dentre outras, sendo possível alterar posteriormente todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. O GeoGebra é uma multiplataforma, logo pode ser instalado em computadores com Windows, Linux, Mac OS e também em smartphones. A partir da versão 5.0 há possibilidade de trabalhar com geometria em três dimensões. O software GeoGebra vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos, em especial da Geometria Analítica, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático.

Pretende-se com o presente trabalho utilizar o Google Classroom, vídeos específicos, a Khan Academy e o GeoGebra para propor uma proposta de ensino híbrido. Para tanto utilizaremos alguns conteúdos de Geometria Analítica abordados no Ensino Médio de uma escola pública. Acreditamos que há benefícios no uso das tecnologias digitais para apoiar o ensino da Matemática, pois essas ferramentas auxiliam no processo de consolidação do conhecimento que foi construído em sala de aula. Permitindo que os alunos tenham mais interesse pela disciplina e melhores resultados no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Nesta Dissertação apresentamos uma proposta de trabalho descrita no Capítulo 5, em forma de Sequências Didáticas e a criação de uma Sala de Aula Virtual.

4 Geometria Analítica

Nesse Capítulo, fazemos uma breve exposição do conteúdo de Geometria Analítica, com uma abordagem voltada para o Ensino Médio. Iniciamos com um breve histórico, falando dos principais responsáveis pelo estudo da Geometria Analítica e suas respectivas contribuições, dando destaque aos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat. Trazemos alguns exemplos atuais de utilização da Geometria Analítica em nosso cotidiano. Apresentamos o Plano Cartesiano Ortogonal, deduzimos a fórmula para calcular a distância entre dois pontos e mostramos como determinar as coordenadas do ponto médio. Além disso revisamos os conceitos de mediana e baricentro de um triângulo, porém sob a ótica da geometria analítica. E para finalizar o Capítulo falamos sobre equação da reta e coeficiente angular. Convém salientar que na construção desse Capítulo nos baseamos nos seguintes autores: (SOUZA; GARCIA, 2016), (PAIVA, 2015), (IEZZI, 2010) e (DANTE, 2009). Para exemplificar os conteúdos estudados trazemos diversas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), já que um dos principais objetivos dos alunos, na atualidade, é ter um bom desempenho nesse exame.

4.1 Breve Histórico

O século XVII foi um período de grande importância para a história da Matemática. Muitos estudiosos consideram o início do estudo da Geometria Analítica como um dos maiores progressos na área. Aos matemáticos franceses René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) creditam o início do estudo sistemático dessa ciência, embora que alguns historiadores defendem que práticas que levaram a esse ramo já eram do conhecimento de gregos, egípcios e romanos. Inclusive Ramos (2013, p. 113) afirma que "A Geometria Analítica não foi uma invenção espontânea por parte de dois grandes matemáticos, Fermat e Descartes, mas sim uma construção gradual que remonta a cerca de dois mil anos antes". Ramos (2013, p. 113) também relata que mesmo diante das limitações impostas na época, Menecmo de Atenas (século IV a. C.) e Apolónio de Perga (262 - 190 a.C.), já tinham conseguido uma parte daquele que é o princípio fundamental da Geometria Analítica (Uma equação que apresenta duas incógnitas descreve uma linha, reta ou curva). Historiadores relatam que Menecmo introduziu o estudo das secções cônicas, que mais tarde seriam denominadas elipse, parábola e hipérbole. No tratado Cónicas, composto por oito livros, Apolónio fazia corresponder a uma curva plana uma propriedade característica, essa ação pode ser traduzida por uma equação com duas incógnitas num sistema de coordenadas. No entanto, nesse período a Álgebra ainda não tinha atingido um desenvolvimento suficiente para permitir operar com as propriedades características das curvas.

Além dos estudiosos mencionados acima, Diofanto (246 - 330 d.C.) e Oresme (1323 - 1382) trouxeram importantes contribuições para o estudo da Geometria Analítica. O trabalho desenvolvido por Diofanto, por exemplo,"representa um elo fundamental na cadeia que une a Aritmética e a Álgebra dos mesopotâmios à Matemática de Fermat e Descartes". (RAMOS, 2013, p. 34). Essas contribuições dos estudiosos Menecmo, Apolónio, Diofanto e Oresme, foram apenas pontuais, e não trouxe um avanço tão significativo para a Geometria Analítica. Já os estudos de François Viète (1540-1603) "desempenharam um papel preparatório e impulsionador no desenvolvimento das interligações entre problemas geométricos e métodos algébricos". (RAMOS, 2013, p. 113). Isso contribuiu significativamente para o estudo da Geometria Analítica pelos matemáticos Fermat e Descartes. Em relação às contribuições de Viète, Ramos afirma que:

> [...] aqueles dois matemáticos franceses do século XVII encontraram uma frutuosa correspondência entre Geometria e Álgebra, ao estabelecerem que uma equação arbitrária com duas incógnitas, num determinado sistema de coordenadas, determina uma curva no plano e, reciprocamente, que uma curva plana tem, associada a um determinado sistema de coordenadas, uma equação com duas incógnitas. (RAMOS, 2013, p. 113).

René Descartes dedicou grande parte de sua vida à Filosofia e à Ciência por prazer. A principal obra de Descartes é o Discurso sobre o Método, publicada em 1637, nela Descartes traz as bases filosóficas de seu método para o estudo das ciências. Ele acreditava que o conhecimento matemático é mais cumulativo e progressivo que o de outras áreas do conhecimento, ele entendia que esse conhecimento crescia por acréscimos e não por substituições, como acontecia em outras ciências, à medida que eram feitas novas descobertas. Descartes pretendia demonstrar a aplicação à Geometria dos seus métodos, baseados em princípios filosóficos.

A obra o Discurso sobre o Método, era acompanhada de três apêndices, sendo o último deles nomeado de La Géométrie, este apresenta as ideias que deram fundamentos ao estudo da Geometria Analítica. Essa obra de Descartes consistia de três partes. Na primeira são postas as bases do que viria a ser a Geometria Algébrica, permitindo um avanço considerável em relação à matemática grega. Na segunda parte do La Géométrie, Descartes faz uma classificação de algumas curvas planas e descreve um método para construir tangentes a curvas (antes da invenção do Cálculo) e na terceira parte trata da resolução de equações de grau maior ou igual a 3. Deve-se a Descartes, também, o uso de expoentes para designar as potências.

Pierre de Fermat dedicou-se à Matemática e à Ciência, ele limitou-se a descrever as curvas associadas às equações do primeiro e do segundo grau. O intuito de Fermat era o de propor um novo estudo, de carácter algébrico, dos lugares geométricos. Fermat realizou estudos relacionados a equações que representavam curvas matemáticas em um plano, isso em 1629, porém sua obra intitulada Introdução aos Lugares Planos e Sólidos foi publicada apenas em 1679, postumamente pelo seu filho. Fermat não gostava de publicar, seus trabalhos eram anotados em cartas, notas e em breves manuscritos, muitos dos quais cópias únicas. A grande contribuição de Fermat para a Geometria Analítica foi a descoberta do seguinte princípio: "Uma equação que apresenta duas incógnitas descreve uma linha, reta ou curva". Fermat, a partir da equação descreveu a curva, já Descartes partia da descrição geométrica da curva para deduzir a respectiva equação.

Atualmente, a Geometria Analítica desempenha um papel importante no desenvolvimento da computação gráfica. As telas dos computadores são modelos de estrutura do plano cartesiano com um número finito de pontos, ao aumentar o número de pontos, melhora-se a qualidade da imagem do monitor ou da impressão dessa imagem. Na tomografia ou na localização de satélites, por exemplo, a utilização do recurso de imagens é fundamental para uma melhor interpretação dos resultados. O Sistema de Posicionamento Global (GPS) é um sistema de coordenadas que é muito utilizado para localizar endereços, rotas e pontos na superfície da Terra. Atualmente o GPS é utilizado em diversas áreas, como por exemplo: para manter o atleta informado sobre a distância, a velocidade e o tempo da corrida; para apresentar mapas das áreas de terra com maior ou menor fertilidade; para navegação área, marítima e terrestre; na Paleontologia, na Arqueologia e no rastreamento de animais.

4.2 Plano Cartesiano Ortogonal

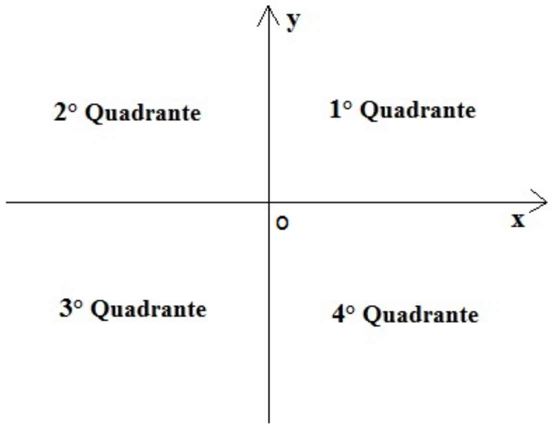
Nesta Seção serão abordadas as noções básicas para o estudo da Geometria Analítica. Ao estudar o Plano Cartesiano Ortogonal, temos o objetivo de fazer com que os alunos desenvolvam a habilidade de localizar e representar pontos no sistema de coordenadas cartesianas, e também compreender as vantagens do uso desse sistema para localizar pontos em situações problemas.

Consideremos dois eixos orientados, eixo x e eixo y, perpendiculares entre si, sendo x o eixo da horizontal e y o eixo da vertical. O plano α determinado por esses dois eixos é o Plano Cartesiano Ortogonal. O ponto onde esses eixos se cruzam é denominado de origem (O). Esse sistema será indicado por xOy.

- O eixo x (ou eixo Ox) é chamado de Eixo das Abscissas;
- O eixo y (ou eixo Oy) é chamado de Eixo das Ordenadas.

Ao traçarmos os eixos x e y, perpendiculares entre si, o plano é divido em quatro regiões, cada uma delas recebe o nome de quadrante, denominadas 1º quadrante, 2º quadrante, 3º quadrante e 4º quadrante, sendo estes numerados no sentido anti-horário, conforme Figura 8.

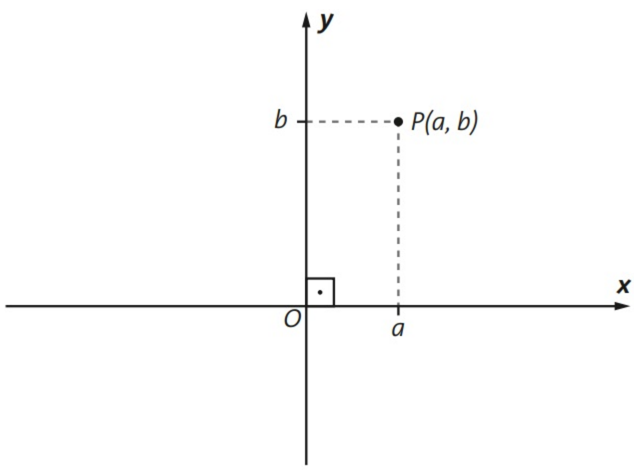
Figura 8 – Quadrantes.



Fonte: GOUVEIA (2020).

Para representar um ponto P qualquer em um plano cartesiano, utilizamos as coordenadas cartesianas que consiste em um par ordenado (a, b), com a e $b \in \mathbb{R}$, em que a é a abscissa e b é a ordenada do ponto, vide Figura 9.

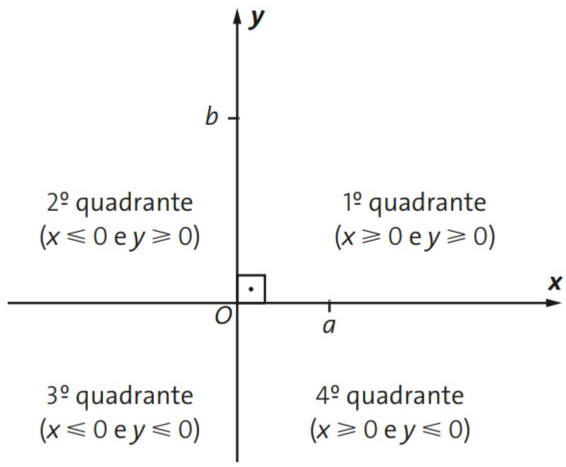
Figura 9 – Ponto no Plano.



Fonte: SANTANA (2020).

O primeiro quadrante é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O segundo quadrante é formado pelos pontos $P(x, y)$ tais que $x \leq 0$ e $y \geq 0$. O terceiro quadrante pelos pontos $P(x, y)$ com $x \leq 0$ e $y \leq 0$ e o quarto quadrante é formado pelos pontos $P(x, y)$ com $x \geq 0$ e $y \leq 0$, conforme Figura 10.

Figura 10 – Sinais dos Quadrantes.

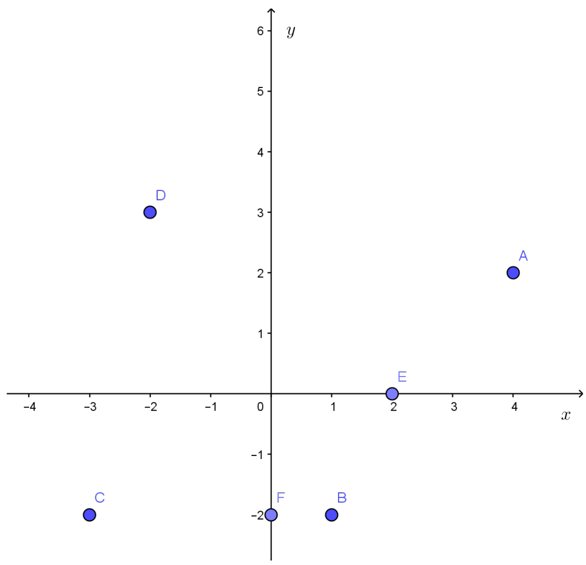


Fonte: SANTANA (2020).

Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais, isto é, a cada ponto do plano corresponde um único par ordenado (x, y), e a cada par ordenado (x, y) está associado um único ponto do plano.

Exemplo 4.1. No plano cartesiano a seguir (Figura 11), estão localizados os pontos: $A(4, 2)$; $B(1, -2)$; $C(-3, -2)$; $D(-2, 3)$; $E(2, 0)$ e $F(0, -2)$.

Figura 11 – Pontos no Plano.



Fonte: O Autor (2020).

Observações:

1. Se o ponto P pertence ao eixo x, suas coordenadas são: $(a, 0)$, com $a \in \mathbb{R}$.

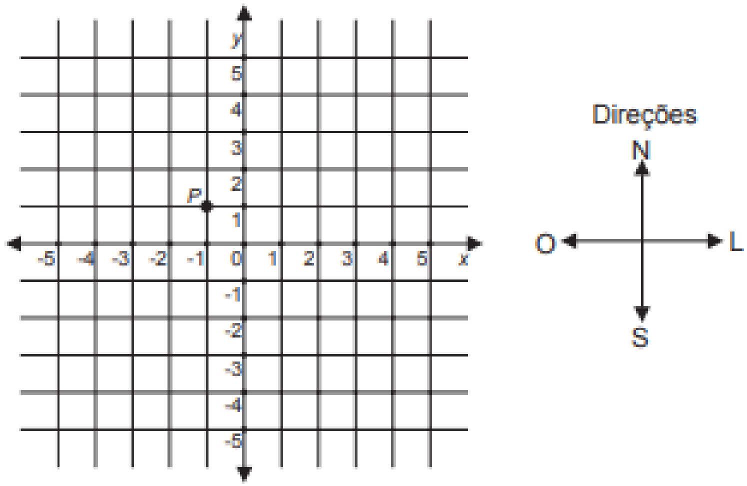
2. Se o ponto P pertence ao eixo y, suas coordenadas são: $(0, b)$, com $b \in \mathbb{R}$.

3. Ao par ordenado $(0, 0)$ está associado o ponto O (origem).

4. Se a e b são números reais distintos, então $(a, b) \neq (b, a)$.

Exemplo 4.2. Questão ENEM 2014 PPL - Alunos de um curso de engenharia desenvolveram um robô "anfíbio" que executa saltos somente nas direções norte, sul, leste e oeste. Um dos alunos representou a posição inicial desse robô, no plano cartesiano, pela letra P, na ilustração:

Figura 12 – Questão ENEM 2014 PPL.



Fonte: INEP (2020a).

A direção norte-sul é a mesma do eixo y, sendo que o sentido norte é o sentido de crescimento de y, e a direção leste-oeste é a mesma do eixo x, sendo que o sentido leste é o sentido de crescimento de x. Em seguida, esse aluno deu os seguintes comandos de movimentação para o robô: 4 norte, 2 leste e 3 sul, nos quais os coeficientes numéricos representam o número de saltos do robô nas direções correspondentes, e cada salto corresponde a uma unidade do plano cartesiano. Depois de realizar os comandos dados pelo aluno, a posição do robô, no plano cartesiano, será:

a) $(0, 2)$

b) $(0, 3)$

c) $(1, 2)$

d) $(1, 4)$

e) $(2, 1)$

Solução:

Observe que o robô encontra-se no ponto P de coordenadas $(-1, 1)$, conforme Figura 12.

Seguindo os comandos dados pelo aluno teremos:

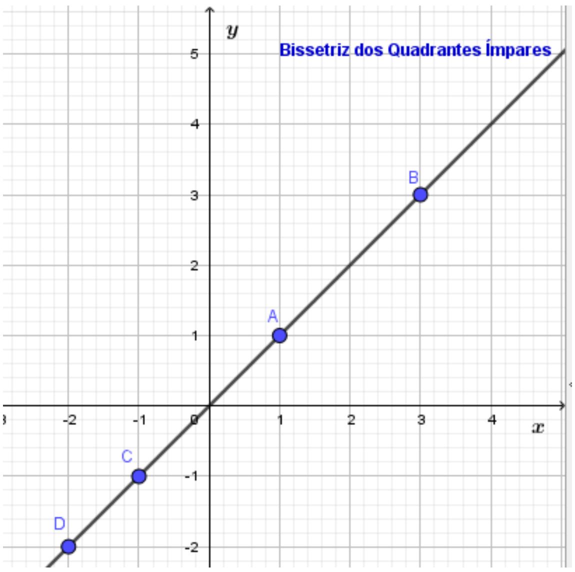
- 4 norte: Equivale às coordenadas $(-1, 5)$, já que o robô vai andar 4 casas para o norte que é o sentido do crescimento de y;
- 2 leste: Equivale às coordenadas $(1, 5)$, já que o robô vai andar 2 casas para o leste que é o sentido do crescimento de x;
- 3 sul: Equivale às coordenadas $(1, 2)$, já que o robô vai andar 2 casas para o sul;

Depois de realizar os comandos dados pelo aluno, chegamos a conclusão que a posição do robô, no plano cartesiano, será $P(1, 2)$, ou seja, alternativa c).

4.2.1 Bissetriz dos Quadrantes

Um ponto $P(x_P, y_p)$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares quando suas coordenadas são iguais, ou seja, $x_P = y_P$, ver Figura 13.

Figura 13 – Bissetriz dos Quadrantes Ímpares.

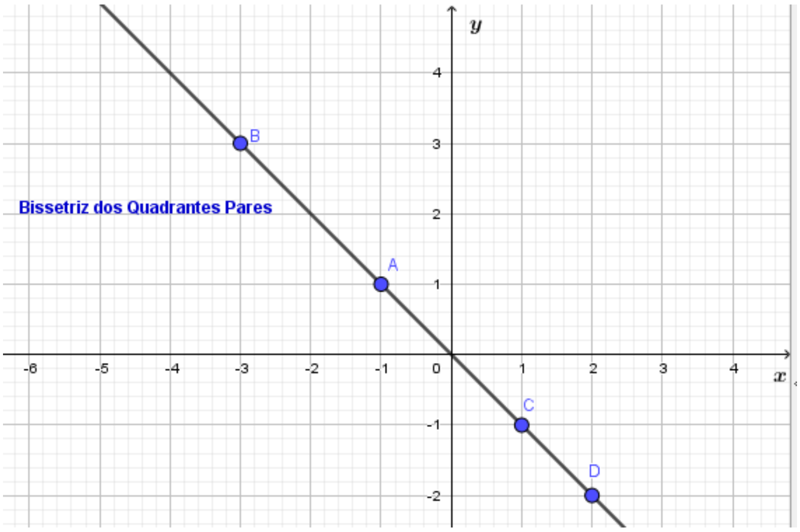


Fonte: O Autor (2020).

Assim, para todo $a \in \mathbb{R}$, o ponto (a, a) pertence a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Um ponto $P(x_P, y_p)$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares quando suas coordenadas são simétricas, ou seja, $x_P = -y_P$, observe Figura 14.

Figura 14 – Bissetriz dos Quadrantes Pares.



Fonte: O Autor (2020).

Assim, para todo $a \in \mathbb{R}$, o ponto $(a, -a)$ pertence a bissetriz dos quadrantes pares.

4.3 Distância entre dois Pontos

Nesta Seção apresesentamos como calcular a distância entre dois pontos. Ao analisarmos as localizações das coordenadas dos pontos em um plano cartesiano, podemos determinar a distância entre eles que recairá sobre três casos específicos, conforme detalhamento no decorrer desse estudo. Ao abordar esse conteúdo esperamos que o aluno seja capaz de calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano, ajudando-o na resolução de problemas tanto no ambiente escolar como em seu cotidiano.

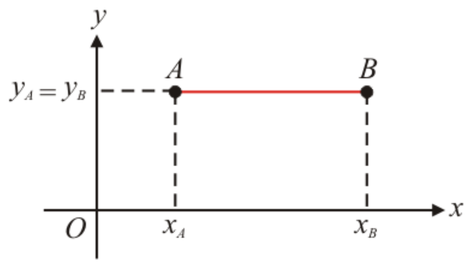
4.3.1 Cálculo da Distância entre Dois Pontos

Dados dois pontos distintos A e B do plano cartesiano, a distância entre eles, que será indicada por $d(A, B)$ é a medida do segmento de reta de extremidades A e B.

Vejamos os três casos de localização desses pontos no Plano Cartesiano:

- **1º Caso**: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo x, conforme Figura 15.

Figura 15 – Distância entre dois pontos com ordenadas iguais.



Fonte: KILHIAN (2020).

Neste caso a distância entre os pontos A e B é dado pelo módulo da diferença entre as abscissas de A e B, ou seja,

$$d(A, B) = |x_B - x_A|. \tag{4.1}$$

Exemplo 4.3. Consideremos os pontos $A(-1, 1)$ e $B(3, 1)$, vejamos como calcular a distância entre esses dois pontos.

Solução:

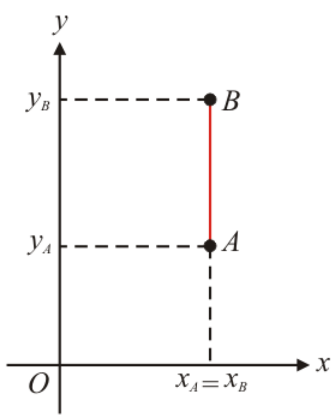
Como as ordenadas são iguais, calculamos a distância entre os pontos A e B utilizando a Equação (4.1), daí

$$d(A, B) = |x_B - x_A| = |3 - (-1)| = |3 + 1| = |4| = 4.$$

Logo, a distância entre os pontos $A(-1, 1)$ e $B(3, 1)$ equivale a 4 unidades.

- **2º Caso**: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo y, ver Figura 16.

Figura 16 – Distância entre dois pontos com abscissas iguais.



Fonte: KILHIAN (2020).

Neste caso a distância entre os pontos A e B é dado pelo módulo da diferença entre as ordenadas de A e B, ou seja,

$$d(A,B) = |y_B - y_A|. \tag{4.2}$$

Exemplo 4.4. Consideremos os pontos $A(-2,4)$ e $B(-2,-2)$, vejamos como calcular a distância entre esses dois pontos.

Solução:

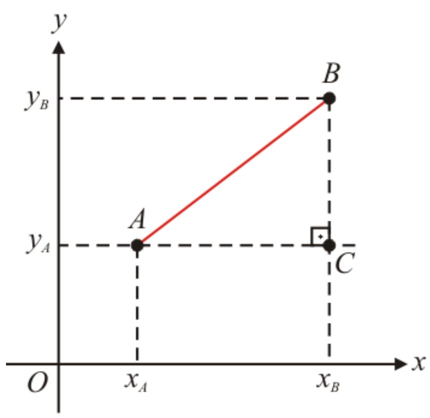
Como as abscissas tem o mesmo valor, calculamos a distância entre os pontos A e B utilizando a Equação (4.2), logo

$$d(A,B) = |y_B - y_A| = |-2-4| = |-6| = 6.$$

Com isso concluímos que a distância entre os pontos $A(-2,4)$ e $B(-2,-2)$ é 6 unidades.

- **3º Caso**: O segmento $\overline{AB}$ não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados, conforme Figura 17.

Figura 17 – Distância entre dois pontos de coordenadas distintas.



Fonte: KILHIAN (2020).

Neste caso, a distância entre A e B não pode ser calculada como nos casos anteriores. Para calcular a distância entre os pontos A e B, podemos considerar uma reta paralela ao eixo x passando pelo ponto A e uma reta paralela ao eixo y passando pelo ponto B. Na intersecção dessas duas retas marcamos o ponto C. Observe que o polígono formado pelos pontos ABC é um triângulo retângulo em C, onde $d(A,B)$ é a hipotenusa desse triângulo, conforme Figura 17. Como os valores dos catetos são conhecidos, pois referem-se às $d(A,C)$ e $d(B,C)$, dadas respectivamente, nas Equações (4.1) e (4.2), daí podemos utilizar o Teorema de Pitágoras e a partir da resolução encontrar o valor da $d(A,B)$, ou seja,

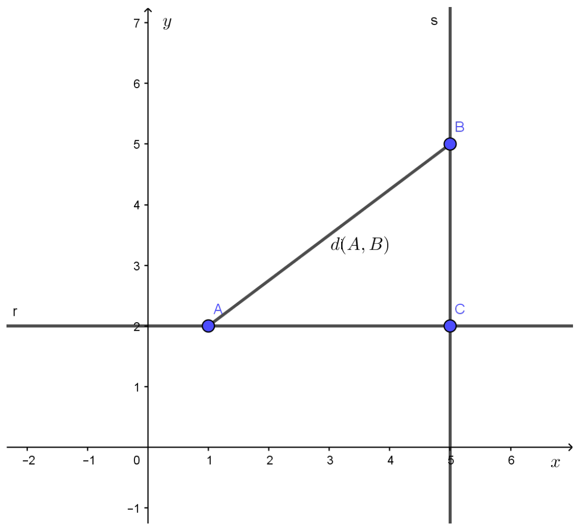
$$d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(B,C)^2. \tag{4.3}$$

Exemplo 4.5. Sejam os pontos $A(1,2)$ e $B(5,5)$, vamos calcular a distância entre esses dois pontos.

Solução:

Incialmente marcamos os pontos A e B no plano cartesiano, a seguir traçamos uma reta r paralela ao eixo x passando pelo ponto A e um reta s paralela ao eixo y passando pelo ponto B, na intersecção dessas duas retas marcamos o ponto C que terá coordenadas $(5,2)$, conforme Figura 18. Observe que formamos o triângulo ABC, que é retângulo em C, daí a $d(A,B)$ é a medida da hipotenusa, já $d(B,C)$ e $d(A,C)$ são as medidas dos catetos desse triângulo.

Figura 18 – Distância entre dois Pontos.



Fonte: O Autor (2020).

Diante disso, podemos utilizar a Equação (4.3), que é a aplicação do Teorema de Pitágoras

$$d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(B,C)^2.$$

Como $\overline{AC}$ é paralelo ao eixo x, podemos utilizar a Equação (4.1) e substituir os valores das coordenadas dos pontos A e C, encontrando $d(A,C)$, ou seja,

$$d(A,C) = |x_C - x_A| = |5-1| = 4.$$

Analogamente, $\overline{BC}$ é paralelo ao eixo y, logo podemos utilizar a Equação (4.2) e substituir os valores das coordenadas dos pontos B e C, obtendo $d(B,C)$, daí

$$d(B,C) = |y_C - y_B| = |2-5| = |-3| = 3.$$

Substituindo os valores de $d(A,C)$ e $d(B,C)$ na Equação (4.3), obtemos

$$\begin{aligned} d(A,B)^2 &= d(A,C)^2 + d(B,C)^2 \\ d(A,B)^2 &= 4^2 + 3^2 \\ d(A,B)^2 &= 16 + 9 \\ d(A,B) &= \sqrt{25} \\ d(A,B) &= 5. \end{aligned}$$

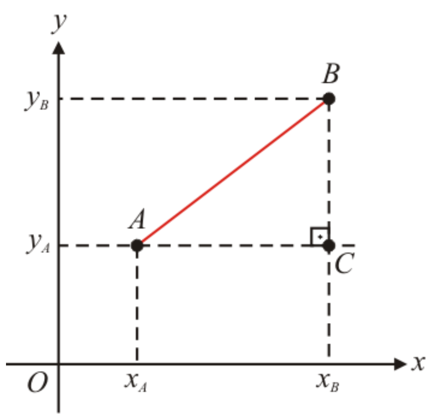
Com isso concluímos que a $d(A,B) = 5$ unidades.

4.3.2 Fórmula da Distância entre Dois Pontos

Na Subseção anterior calculamos a distância entre dois pontos utilizando de forma intuitiva o Teorema de Pitágoras, vejamos agora como deduzir a fórmula por meio da qual seja possível calcular a distância entre dois pontos quaisquer.

Consideremos os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ em um plano cartesiano, em seguida traçamos uma reta paralela ao eixo x passando por A e uma reta paralela ao eixo y passando por B. A intersecção dessas duas retas determinam o ponto $C(x_C, y_C)$, formando o triângulo ABC, conforme Figura 19.

Figura 19 – Distância entre dois pontos quaisquer.



Fonte: KILHIAN (2020).

Como $\overline{AC}$ é paralelo ao eixo x, podemos utilizar a Equação (4.1), daí

$$d(A,C) = |x_C - x_A|.$$

Analogamente, como $\overline{CB}$ é paralelo ao eixo y, utilizamos a Equação (4.2), logo

$$d(C,B) = |y_B - y_C|.$$

Como $x_C = x_B$ e $y_C = y_A$, podemos escrever

$$d(A, C) = |x_B - x_A| \text{ e } d(C, B) = |y_B - y_A|.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos

$$d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(B, C)^2$$
$$d(A, B)^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2.$$

Como $x_B > x_A$ e $y_B > y_A$, segue que

$$d(A, B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Com isso concluímos que a fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos, A e B, quaisquer do plano, tal que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \tag{4.4}$$

Exemplo 4.6. Consideremos os pontos $P(7, -3)$ e $Q(-5, 2)$, vejamos como determinar a $d(P, Q)$.

Solução:

A distância entre os pontos P e Q pode ser calculada, conforme Equação (4.4), ou seja,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}.$$

Substituindo os valores das coordenadas dos pontos P e Q, obtemos

$$d(P, Q) = \sqrt{(-5 - 7)^2 + (2 - (-3))^2} = \sqrt{(-12)^2 + (5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.$$

Logo, a distância entre os pontos P e Q é de 13 unidades.

Exemplo 4.7. Vamos verificar se o triângulo com vértices $A(-2, 4), B(-5, 1)$ e $C(-6, 5)$ é isósceles.

Solução:

Sabemos que um triângulo é isósceles quando tem dois lados de medidas iguais. Para resolver a questão vamos calcular as medidas de todos os lados do triângulo ABC.

- Medida do lado $\overline{AB}$

Pela Equação (4.4) temos que

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Substituindo os valores das coordenadas de A e B, temos

$$d(A, B) = \sqrt{(-5 - (-2))^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{(-3))^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Logo, a medida de $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$.

- Medida do lado $\overline{AC}$

Analogamente, podemos calcular a $d(A, C)$ utilizando a Equação (4.4)

$$d(A,C) = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}.$$

Atribuindo aos pontos A e C os valores de suas respectivas coordenadas, obtemos

$$d(A,C) = \sqrt{(-6-(-2))^2 + (5-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}.$$

Daí, a medida de $\overline{AC} = \sqrt{17}$.

- Medida do lado $\overline{BC}$

Da mesma forma, para o cálculo da $d(B, C)$ utilizamos a Equação (4.4)

$$d(B,C) = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}.$$

Substituindo os valores das coordenadas dos pontos B e C, segue que

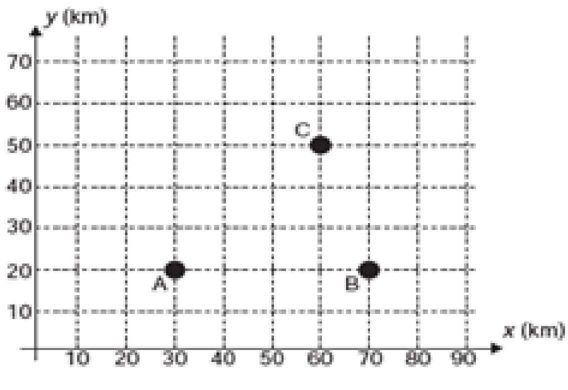
$$d(B,C) = \sqrt{(-6-(-5))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}.$$

Logo, a medida de $\overline{BC} = \sqrt{17}$.

Como $d(A, C) = d(B, C) = \sqrt{17}$, então concluimos que o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AB}$.

Exemplo 4.8. Questão ENEM 2013 - Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano, conforme Figura 20:

Figura 20 – Questão ENEM 2013.



Fonte: INEP (2020a).

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas:

a) $(65, 35)$

b) $(53, 30)$

c) $(45, 35)$

d) $(50, 20)$

e) $(50, 30)$

Solução:

Vamos chamar de $P(x, y)$ o ponto onde deve está localizada essa torre. Como ela deve estar situada num local equidistante das antenas A, B e C, então $d(A, P) = d(B, P) = d(C, P)$.

Pela Figura 20, temos as localizações das antenas A, B e C, ou seja, $A(30, 20)$, $B(70, 20)$ e $C(60, 50)$.
Substituindo os valores das coordenadas do ponto A, na Equação (4.4), segue que

$$d(A, P) = \sqrt{(x_P - 30)^2 + (y_P - 20)^2}.$$

Analogamente,

$$d(B, P) = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}.$$

Atribuindo ao ponto B os valores das suas coordenadas, obtemos

$$d(B, P) = \sqrt{(x_P - 70)^2 + (y_P - 20)^2}.$$

Da mesma forma, podemos calcular a $d(C, P)$

$$d(C, P) = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}.$$

Substituindo as coordenadas do ponto C, temos

$$d(C, P) = \sqrt{(x_P - 60)^2 + (y_P - 50)^2}.$$

Como por hipótese $d(A, P) = d(B, P)$, daí

$$\sqrt{(x_P - 30)^2 + (y_P - 20)^2} = \sqrt{(x_P - 70)^2 + (y_P - 20)^2}.$$

Desenvolvendo essa equação obtemos

$$(x_P - 30)^2 + (y_P - 20)^2 = (x_P - 70)^2 + (y_P - 20)^2$$

$$(x_P)^2 - 60x_P + 30^2 + (y_P)^2 - 40y_P + 20^2 = (x_P)^2 - 140x_P + 70^2 + (y_P)^2 - 40y_P + 20^2$$
$$(x_P)^2 - 60x_P + 900 + (y_P)^2 - 40y_P + 400 = (x_P)^2 - 140x_P + 4900 + (y_P)^2 - 40y_P + 400$$
$$-60x_P + 140x_P = 4900 - 900$$
$$80x_P = 4000$$
$$x_P = 50.$$

Logo, a abcissa do ponto P é 50.

Vamos agora determinar a ordenada do ponto P. Por hipótese, temos também que $d(A,P) = d(C,P)$, daí segue que

$$\sqrt{(x_P - 30)^2 + (y_P - 20)^2} = \sqrt{(x_P - 60)^2 + (y_P - 50)^2}.$$

Como já sabemos que $x_P = 50$, podemos substituir esse valor na equação

$$\sqrt{(50 - 30)^2 + (y_P - 20)^2} = \sqrt{(50 - 60)^2 + (y_P - 50)^2}.$$

Desenvolvendo essa equação temos

$$(50 - 30)^2 + (y_P - 20)^2 = (50 - 60)^2 + (y_P - 50)^2$$
$$20^2 + (y_P)^2 - 2 \times y_P \times 20 + 20^2 = (-10)^2 + (y_P)^2 - 2 \times y_P \times 50 + 50^2$$
$$400 + (y_P)^2 - 40y_P + 400 = 100 + (y_P)^2 - 100y_P + 2500$$
$$-40y_P + 100y_P = 2600 - 800$$
$$60y_P = 1800$$
$$y_P = 30.$$

Daí, $P(x,y) = P(50,30)$. Logo, concluímos que o local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas: $P(50,30)$, ou seja, resposta alternativa e).

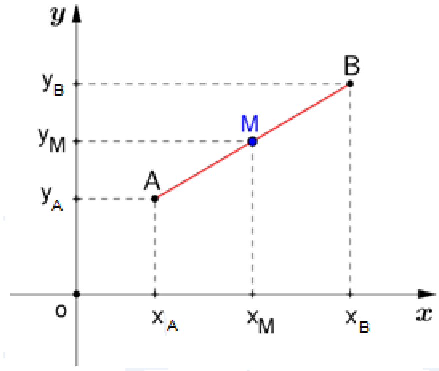
4.4 Coordenadas do Ponto Médio

Existem algumas situações em que necessitamos encontrar a localização do ponto médio de determinado segmento. Nesta Seção veremos o conceito de ponto médio, como determinar suas coordenadas e algumas aplicações, para que dessa forma o aluno visualize a aplicabilidade desse conteúdo em seu cotidiano.

O Ponto Médio de um segmento é o ponto que divide o segmento de reta em dois outros segmentos congruentes. Denotaremos o ponto médio por M.

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, tal que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são pontos distintos, podemos determinar as coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ do segmento $\overline{AB}$, ver Figura 21.

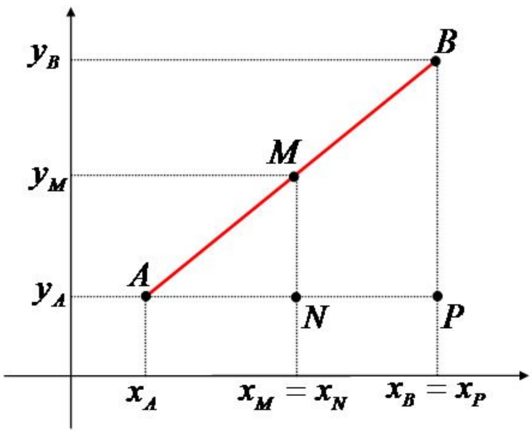
Figura 21 – Ponto Médio.



Fonte: Figura adaptada de EXATAS (2020).

Para identificar as coordenadas de M, vamos considerar os pontos N e P (Figura 22). Observe que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, pois possuem dois ângulos congruentes: o ângulo Â (comum aos dois triângulos) e os ângulos N e P (que são ângulos retos, ou seja, medem 90°).

Figura 22 – Coordenadas do Ponto.



Fonte: YESMÁTICA (2020).

Como os triângulos AMN e ABP são semelhantes, podemos escrever

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AP}}. \tag{4.5}$$

Sabemos que $\overline{AB} = 2(\overline{AM})$, pois M é ponto médio de $\overline{AB}$, substituindo esse resultado na Equação (4.5), temos

$$\frac{\overline{AM}}{2\overline{AM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AP}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AP}} \Rightarrow \overline{AP} = 2\overline{AN}. \tag{4.6}$$

De acordo com a Equação (4.1), $\overline{AP} = |x_P - x_A|$ e $\overline{AN} = |x_N - x_A|$, como $x_P = x_B$ e $x_N = x_M$, substituindo esses valores obtemos

$$\overline{AP} = |x_B - x_A| \text{ e } \overline{AN} = |x_M - x_A|.$$

Daí, substituindo essas expressões na Equação (4.6), obtemos

$$|x_B - x_A| = 2|x_M - x_A|.$$

Como $x_B > x_A$ e $x_M > x_A$, podemos escrever

$$(x_B - x_A) = 2(x_M - x_A) \Rightarrow x_B - x_A = 2x_M - 2x_A \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{(x_A + x_B)}{2}.$$

Com isso concluímos que a abscissa do Ponto Médio é dada por

$$x_M = \frac{(x_A + x_B)}{2}. \tag{4.7}$$

De forma análoga, pode-se mostrar que a ordenada do Ponto Médio é dada por

$$y_M = \frac{(y_A + y_B)}{2}. \tag{4.8}$$

Portanto, sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$, temos que as coordenadas de M são

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right). \tag{4.9}$$

Exemplo 4.9. Dados os pontos $A(3, -2)$ e $B\left(\frac{-1}{2}, -4\right)$, vamos calcular as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Solução:

Como as coordenadas do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ é dada pela Equação (4.9), ou seja,

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Substituindo os valores das abscissas dos pontos A e B na Equação (4.7), obtemos

$$x_M = \frac{(x_A + x_B)}{2} = \frac{3 + \left(\frac{-1}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}.$$

Analogamente, atribuindo os valores das ordenadas dos pontos A e B na Equação (4.8), obtemos

$$y_M = \frac{(y_A + y_B)}{2} = \frac{(-4 + (-2))}{2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Daí, concluímos que $M\left(\frac{5}{4}, -3\right)$ são as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Exemplo 4.10. Uma das extremidades de um segmento é o ponto $A(-2, 5)$. Sabendo-se que $M(0, 2)$ é o ponto médio desse segmento, vamos determinar as coordenadas do ponto B, que é a outra extremidade do segmento.

Solução:

Sabemos pela Equação (4.7) que

$$x_M = \frac{(x_A + x_B)}{2}.$$

Substituindo os valores das abscissas dos pontos M e A, obtemos

$$x_M = \frac{(x_A + x_B)}{2} \Rightarrow 0 = \frac{(-2 + x_B)}{2} \Rightarrow 0 = -2 + x_B \Rightarrow x_B = 2.$$

Analogamente, da Equação (4.8) temos que

$$y_M = \frac{(y_A + y_B)}{2}.$$

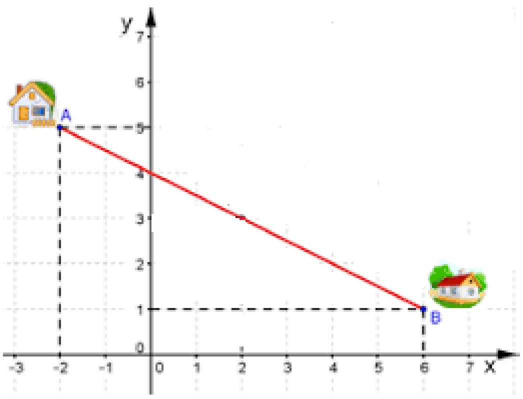
Atribuindo a essa equação os valores das ordenadas de M e A, obtemos

$$y_M = \frac{(y_A + y_B)}{2} \Rightarrow 2 = (\frac{5 + y_B}{2}) \Rightarrow 4 = 5 + y_B \Rightarrow y_B = -1.$$

Logo, concluímos que as coordenadas do ponto B são dadas por $(2, -1)$.

Exemplo 4.11. No plano cartesiano, os pontos A e B representam duas casas de uma propriedade rural. Deseja-se perfurar um poço equidistante às casas de maneira que essa distância seja à menor possível. Quais devem ser as coordenadas do ponto M onde o poço deve ser construído?

Figura 23 – Construção do Poço.



Fonte: Figura adaptada de PUC (2020).

Solução:

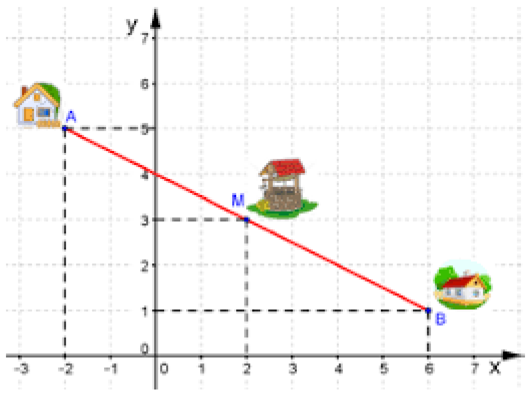
Como o poço deve ser construído equidistante às casas A e B e de maneira que a distância seja a menor possível, então o poço deve ser localizado no ponto médio M de $\overline{AB}$. Para determinar as coordenadas do ponto médio vamos utilizar as Equações (4.7) e (4.8) e substituir os valores das coordenadas dos pontos A e B, que de acordo com a Figura 23 são $A(-2, 5)$ e $B(6, 1)$, daí

$$x_M = \frac{(x_A + x_B)}{2} \Rightarrow x_M = \frac{(-2+6)}{2} \Rightarrow x_M = \frac{4}{2} \Rightarrow x_M = 2.$$

$$y_M = \frac{(y_A + y_B)}{2} \Rightarrow y_M = \frac{(5+1)}{2} \Rightarrow x_M = \frac{6}{2} \Rightarrow x_M = 3.$$

Assim, o poço deve ser construído no ponto de coordenadas $M(2, 3)$. Veja abaixo a Figura 24, que contém o poço construído.

Figura 24 – Poço Construído.



Fonte: PUC (2020).

Exemplo 4.12. (FGV/adm - 2012/1) No plano cartesiano, $M(3, 3)$, $N(7, 3)$ e $P(4, 0)$ são os pontos médios respectivamente dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC. A abscissa do vértice C é:

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

e) 0

Solução:

Como $M(3, 3)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, então temos

$$x_M = \frac{(x_A + x_B)}{2} \Rightarrow 3 = \frac{(x_A + x_B)}{2} \Rightarrow (x_A + x_B) = 6 \Rightarrow x_A = 6 - x_B. \tag{4.10}$$

Analogamente, $N(7,3)$ é ponto médio de $\overline{BC}$, daí

$$x_N = \frac{(x_B + x_C)}{2} \Rightarrow 7 = \frac{(x_B + x_C)}{2} \Rightarrow (x_B + x_C) = 14 \Rightarrow x_B = 14 - x_C. \tag{4.11}$$

Da mesma forma $P(4,0)$ é ponto médio de $\overline{AC}$, logo

$$x_P = \frac{(x_A + x_C)}{2} \Rightarrow 4 = \frac{(x_A + x_C)}{2} \Rightarrow (x_A + x_C) = 8. \tag{4.12}$$

Substituindo a Equação (4.10) na Equação (4.12) obtemos

$$(x_A + x_C) = 8 \Rightarrow (6 - x_B + x_C) = 8 \Rightarrow (-x_B + x_C) = 2. \tag{4.13}$$

Substituindo a Equação (4.11) na Equação (4.13), obtemos

$$(-x_B + x_C) = 2 \Rightarrow -(14 - x_C) + x_C = 2 \Rightarrow -14 + x_C + x_C = 2 \Rightarrow 2x_C = 2 + 14 \Rightarrow x_C = \frac{16}{2} \Rightarrow x_C = 8.$$

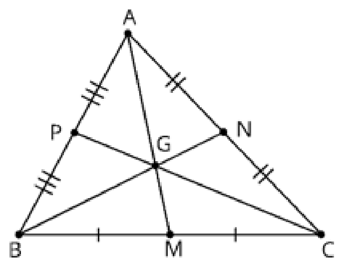
Logo, a abscissa do vértice C é 8. Resposta, alternativa c).

4.5 Mediana e Baricentro de um Triângulo

Nesta Seção trazemos os conceitos de mediana e baricentro de um triângulo, e posteriormente, mostramos como determinar as coordenadas do baricentro.

Em um triângulo as medianas correspondem aos segmentos de reta cujas extremidades são o ponto médio de um dos lados e o vértice oposto a esse lado. Um triângulo possui três medianas e estas se intersectam num ponto G chamado de Baricentro do triângulo.

Figura 25 – Mediana e Baricentro.



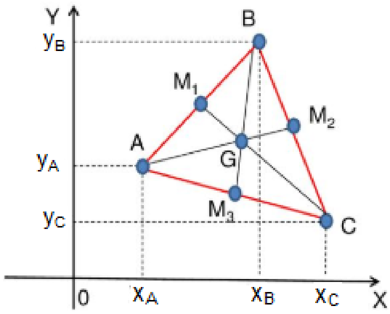
Fonte: OLIMPÉDIA (2020).

Na Figura 25, M, N e P, são respectivamente os Pontos Médios dos segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. As três medianas relativas aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são, respectivamente, $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$, e G é o Baricentro do triângulo ABC.

4.5.1 Coordenadas do Baricentro

Para calcular as coordenadas do baricentro de um triângulo consideraremos três pontos não alinhados do plano cartesiano, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, que representam o triângulo ABC. Seja $\overline{CM_1}$ a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$, $\overline{AM_2}$ a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ e $\overline{BM_3}$ a mediana relativa ao lado $\overline{AC}$. Essas medianas se encontram no ponto G, baricentro do triângulo, como já informado, ver Figura 26.

Figura 26 – Coordenadas do Baricentro.



Fonte: SLIDEPLAYER (2020).

Para encontrar as coordenadas de G, ou seja (x_G, y_G) é necessário relembrar uma propriedade da Geometria Plana que diz: "O baricentro do triângulo divide cada mediana em dois segmentos. O segmento cujas extremidades são o vértice do triângulo e o baricentro tem o dobro do comprimento do outro segmento, cujas extremidades são o baricentro e o ponto médio do lado oposto ao vértice considerado".

Dessa propriedade e analisando a Figura 3.19, podemos afirmar que

$$\overline{AG} = 2\overline{GM_2} \tag{4.14}$$

$$\overline{BG} = 2\overline{GM_3} \tag{4.15}$$

$$\overline{CG} = 2\overline{GM_1}. \tag{4.16}$$

Como M_1 é ponto médio de $\overline{AB}$, temos pela Equação (4.9) que

$$M_1\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Daí temos

$$x_{M_1} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right), \tag{4.17}$$

$$y_{M_1} = \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right). \tag{4.18}$$

Para determinar a abscissa do baricentro, vamos considerar os valores das abscissas dos pontos C, G e M_1.

$$\overline{CG} = (x_G - x_C), \tag{4.19}$$

$$\overline{GM_1} = (x_{M_1} - x_G). \tag{4.20}$$

Substituindo as Equações (4.19) e (4.20) na Equação (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{CG} &= 2\overline{GM_1} \\
(x_G - x_C) &= 2(x_{M_1} - x_G) \\
x_G - x_C &= 2x_{M_1} - 2x_G \\
3x_G &= 2x_{M_1} + x_C.
\end{aligned}$$

Substituindo a Equação(4.17) nesse resultado obtemos

$$\begin{aligned}
3x_G &= 2x_{M_1} + x_C \\
3x_G &= 2\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right) + x_C \\
3x_G &= x_A + x_B + x_C \\
x_G &= \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\right).
\end{aligned}$$

Logo, a abscissa do baricentro é dada por

$$x_G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\right). \tag{4.21}$$

Vamos agora determinar a ordenada do baricentro, para isso vamos considerar os valores das ordenadas dos pontos C, G e M_1.

$$\overline{CG} = (y_G - y_C), \tag{4.22}$$

$$\overline{GM_1} = (y_{M_1} - y_G). \tag{4.23}$$

Substituindo as Equações (4.22) e (4.23) na Equação (4.16), temos

$$\begin{aligned}
\overline{CG} &= 2\overline{GM_1} \\
(y_G - y_C) &= 2(y_{M_1} - y_G) \\
y_G - y_C &= 2y_{M_1} - 2y_G \\
3y_G &= 2y_{M_1} + y_C.
\end{aligned}$$

Substituindo a Equação (4.18) nesse resultado, obtemos

$$\begin{aligned}
3y_G &= 2y_{M_1} + y_C \\
3y_G &= 2\left(\frac{y_A + y_B}{2}\right) + y_C \\
3y_G &= y_A + y_B + y_C \\
y_G &= \left(\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).
\end{aligned}$$

Daí, a ordenada do baricentro é dada por

$$y_G = \left(\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right). \tag{4.24}$$

Portanto, as coordenadas do baricentro G de um triângulo ABC, em que $A(x_A,\, y_A)$, $B(x_B,\, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right). \tag{4.25}$$

Exemplo 4.13. Dado o triângulo ABC, cujas coordenadas dos vértices são $A(7, -2)$, $B(-1, 5)$ e $C(9, -4)$, vamos determinar as coordenadas do baricentro G.

Solução:

Seja $G(x_G, y_G)$ as coordenadas do Baricentro.

Inicialmente determinamos x_G. Sabemos pela Equação (4.21) que

$$x_G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\right)$$

Substituindo os valores das abscissas dos pontos A, B e C e realizando os cálculos, obtemos

$$x_G = \frac{7 + (-1) + 9}{3} \Rightarrow x_G = \frac{15}{3} \Rightarrow x_G = 5.$$

Para o cálculo de y_G, podemos utilizar a Equação (4.24), ou seja,

$$y_G = \left(\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Atribuindo os valores das ordenadas dos pontos A, B e C e realizando os cálculos encontraremos o valor de y_G

$$y_G = \frac{-2 + 5 + (-4)}{3} \Rightarrow y_G = \frac{-1}{3}.$$

Com isso concluímos que as coordenadas do baricentro são $G\left(5, \dfrac{-1}{3}\right)$.

Exemplo 4.14. Vamos determinar as coordenadas do vértice B do triângulo ABC em que $A(4, 9)$ e $C(-2, 6)$, sabendo-se que $G(2, 3)$ é o baricentro do triângulo.

Solução:

Consideremos que as coordenadas do vértice B sejam dadas por $B(x_B, y_B)$.

Vamos inicialmente determinar abscissa do ponto B, para tanto utilizaremos a Equação (4.21) e substituiremos os valores das abscissas dos pontos A e G, ou seja,

$$x_G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\right) \Rightarrow 2 = \left(\frac{4 + x_B + (-2)}{3}\right) \Rightarrow 2 = \left(\frac{2 + x_B}{3}\right) \Rightarrow 2 + x_B = 6 \Rightarrow x_B = 4.$$

Para determinar y_B, utilizaremos a Equação (4.24) e substituiremos os valores das ordenadas dos pontos A e G, isto é,

$$y_G = \left(\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \Rightarrow 3 = \left(\frac{9 + y_B + 6}{3}\right) \Rightarrow 3 = \left(\frac{15 + y_B}{3}\right) \Rightarrow 15 + y_B = 9 \Rightarrow y_B = -6.$$

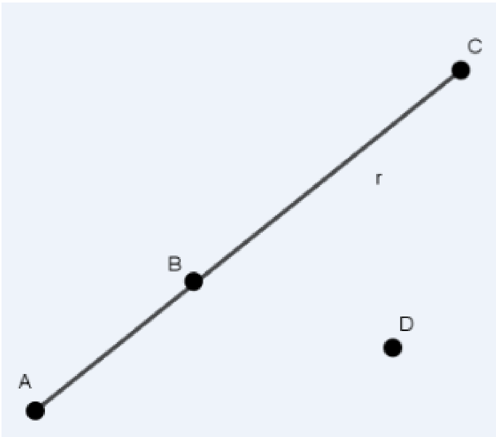
Logo, as coordenadas do ponto B são $B(4, -6)$.

4.6 Condição de Alinhamento de Três Pontos

Nesta Seção apresentaremos as condições para verificar se três pontos pertencem a uma mesma reta, ou seja, se são colineares, também relembramos o cálculo de determinantes que será de suma importância para verificar essa condição de alinhamento.

Quando três ou mais pontos estão alinhados, ou seja, quando é possível construir uma reta passando por eles, dizemos que esses pontos são colineares. Na Figura 27 abaixo os pontos A, B e C são colineares, já os pontos A, B e D, por exemplo, não são colineares.

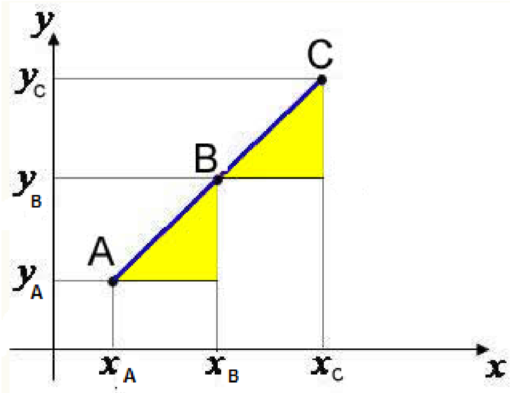
Figura 27 – Alinhamento de Pontos.



Fonte: O Autor (2020).

A partir das coordenadas de três pontos é possível verificar se eles são colineares. Consideremos os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, representados no plano cartesiano da Figura 28.

Figura 28 – Alinhamento de Três Pontos.



Fonte: Figura adaptada de RIGONATTO (2020).

Sendo os pontos A, B e C colineares, temos pelo Teorema de Tales que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A}. \tag{4.26}$$

Da mesma forma, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}. \tag{4.27}$$

Igualando as Equações (4.26) e (4.27) e efetuando os cálculos obtemos

$$\begin{gathered}
\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} \\
(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (x_C - x_A)(y_B - y_A) \\
x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A = x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A \\
x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B = 0 \\
x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C = 0
\end{gathered}$$

O primeiro membro dessa igualdade corresponde ao seguinte determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Com isso concluímos que se três pontos distintos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares, então o determinante da matriz onde a 1ª coluna é formada pelas abscissas dos pontos, a 2ª coluna é composta pelas ordenadas dos pontos e a 3ª coluna é formada pelo algarismo 1, é igual a zero.

Exemplo 4.15. Verifique se os pontos $A(1,-2)$, $B(3,-1)$ e $C(7,1)$ estão alinhados.

Solução:

Para verificar se os pontos A, B, e C são colineares vamos calcular o seguinte determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus obtemos

$$\begin{gathered}[1\times(-1)\times 1)+(-2\times 1\times 7)+(1\times 3\times 1)]-[(-2\times 3\times 1)+(1\times 1\times 1)+(1\times(-1)\times 7)] = \\ -1-14+3-[-6+1-7] = \\ -12-[-12] = \\ -12+12=0.\end{gathered}$$

Como o determinante da matriz composto pelas coordenadas dos pontos A, B, e C e pelo algarismo 1 resultou em zero, concluímos que esses pontos estão alinhados.

Exemplo 4.16. Verifique se os pontos $D(5,3)$, $E(4,5)$ e $F(3,2)$ são colineares.

Solução:

Para analisarmos se os pontos $D(5,3)$, $E(4,5)$ e $F(3,2)$ estão alinhados, devemos calcular o determinante

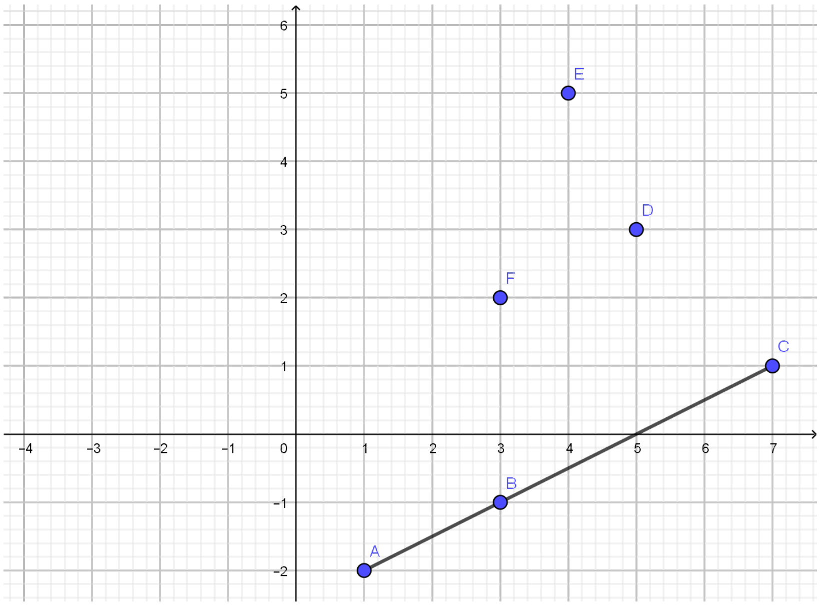
$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus temos

$$\begin{gathered}[(5\times 5\times 1)+(3\times 1\times 3)+(1\times 4\times 2)]-[(3\times 4\times 1)+(5\times 1\times 2)+(1\times 5\times 3)] = \\ 25+9+8-[12+10+15] = \\ 42-37 = \\ 5\neq 0.\end{gathered}$$

Como o determinante é diferente de zero podemos afirmar que os pontos $D(5,3)$, $E(4,5)$ e $F(3,2)$, não são colineares. Vejamos esses pontos no plano cartesiano, Figura 29. Observe que realmente os pontos, A, B e C estão alinhados já D, E e F não estão.

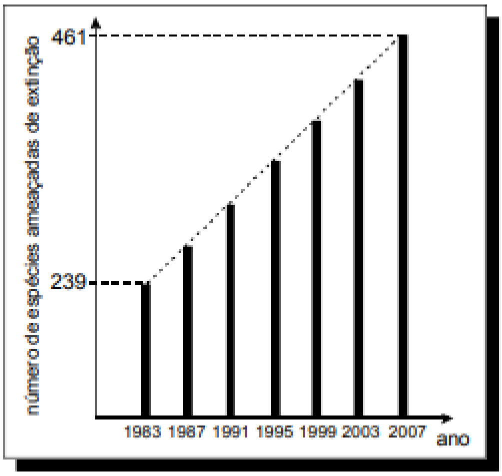
Figura 29 – Pontos Colineares e Não Colineares.



Fonte: O Autor (2020).

Exemplo 4.17. (Enem - 2007) O gráfico a seguir, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.

Figura 30 – Questão ENEM 2007.



Fonte: INEP (2020a).

Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a:

a) 465

b) 493

c) 498

d) 538

e) 699

Solução:

Observando o gráfico, vemos que no eixo x temos a informação do ano e no eixo y o número de espécies em extinção. Em 1983 tiveram 239 espécies ameaçadas de extinção e em 2007 foram 461 espécies. Podemos representar essas informações por meio dos pontos A e B, sendo estes com as seguintes coordenadas: $A(1983, 239)$ e $B(2007, 461)$, conforme Figura 30. Como a questão diz que será mantida a tendência de crescimento então o ponto C de coordenadas $(2011, y_C)$ estará alinhado com os pontos A e B. Logo para determinar o número de espécies amaeaçadas de extinção em 2011, basta determinar o y_C, utilizando a condição de alinhamento entre três pontos.

Vimos nessa Seção que se três pontos são colineares então o Determinante da Matriz onde a 1ª coluna é formada pelas abscissas dos pontos, a 2ª coluna é composta pelas ordenadas dos pontos e a 3ª coluna é formada pelo algarismo 1, é igual a zero. Daí temos

$$D = \begin{vmatrix} 1983 & 239 & 1 \\ 2007 & 461 & 1 \\ 2011 & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Aplicando a regra de Sarrus obtemos

$$\begin{gathered}
[(1983 \times 461 \times 1) + (239 \times 1 \times 2011) + (1 \times 2007 \times y_C)] - [(2011 \times 461 \times 1) + (1983 \times 1 \times y_C) + (239 \times 207 \times 1)] = 0 \\
914163 + 480629 + 2007y_C - (927071 + 1983y_C + 479673) = 0 \\
1394792 + 2007y_C - 1406744 - 1983y_C = 0 \\
-11952 + 24y_C = 0 \\
24y_C = 11952 \\
y_C = \frac{11952}{24} \\
y_C = 498.
\end{gathered}$$

Com isso concluímos que o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a 498. Resposta correta alternativa c).

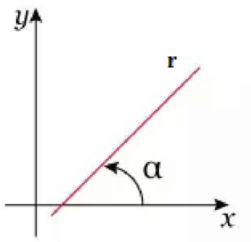
4.7 Equação da Reta

No estudo da Geometria Analítica é possível associar a cada reta uma equação, denominada equação da reta. Aprenderemos nesta Seção como calcular o coeficiente angular da reta, veremos diferentes maneiras de se obter a equação de uma reta, bem como distintas formas de representar essa equação. Falaremos sobre a equação reduzida e equação geral da reta e traremos alguns exemplos contemplando a aplicação desses conteúdos na atualidade.

4.7.1 Coeficiente Angular ou Declividade da Reta

Consideremos a reta r no plano cartesiano xOy.

Figura 31 – Ângulo de Inclinação da Reta.



Fonte: EDUCA+BRASIL (2020).

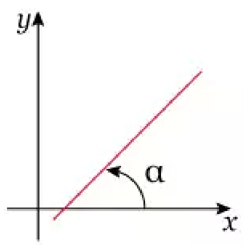
Em relação ao eixo x a reta r forma um ângulo que indicamos por α, denominado ângulo de inclinação da reta, ver Figura 31. O ângulo α é considerado no sentido anti-horário, sendo $0° \leq \alpha < 180°$. O coeficiente angular ou a declividade dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, ou seja,

$$m = \tan \alpha. \tag{4.28}$$

Vamos observar os casos possíveis:

- $1^{\underline{o}}$ caso: $0° < \alpha < 90°$

Figura 32 – Inclinação da Reta - $1^{\underline{o}}$ Caso.

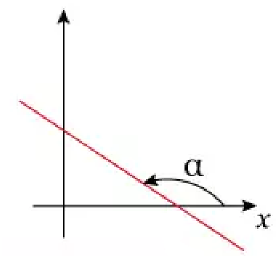


Fonte: EDUCA+BRASIL (2020).

De acordo com a Figura 32, para $0° < \alpha < 90°$, temos que a $\tan \alpha > 0$. Como pela Equação (5.2.3) $m = \tan \alpha \Rightarrow m > 0$.

- $2^{\underline{o}}$ caso: $90° < \alpha < 180°$

Figura 33 – Inclinação da Reta - $2^{\underline{o}}$ Caso.

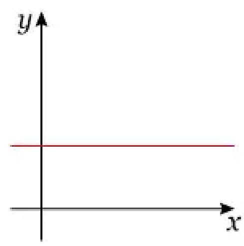


Fonte: EDUCA+BRASIL (2020).

Conforme Figura 33, para $90° < \alpha < 180°$, temos que a $\tan \alpha < 0$. Como pela Equação (5.2.3) $m = \tan \alpha \Rightarrow m < 0$.

- $3^{\underline{o}}$ caso: $\alpha = 0°$

Figura 34 – Inclinação da Reta - $3^{\underline{o}}$ Caso.

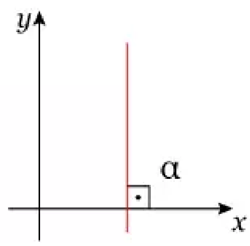


Fonte: EDUCA+BRASIL (2020).

Como $\alpha = 0°$ e pela Equação (5.2.3) $m = \tan \alpha \Rightarrow m = \tan 0° \Rightarrow m = 0$. Ver Figura 34.

- $4^{\underline{o}}$ caso: $\alpha = 90°$

Figura 35 – Inclinação da Reta - $4^{\underline{o}}$ Caso.



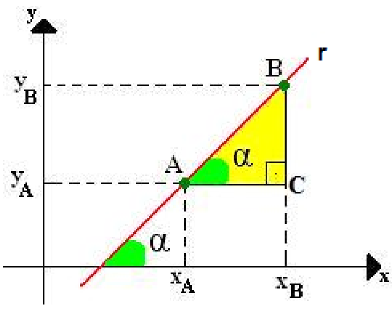
Fonte: EDUCA+BRASIL (2020).

Para $\alpha = 90°$, a tangente não é definida. Dizemos então que quando $\alpha = 90°$, isto é, quando a reta é vertical, ela não tem declividade, ver Figura 35.

Podemos também calcular o coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos. Como para $\alpha = 0°$ (reta horizontal) a declividade é 0 e para $\alpha = 90°$ (reta vertical) não há declividade, vamos analisar os casos em que $0° < \alpha < 90°$ e $90° < \alpha < 180°$.

- 1º caso: $0° < \alpha < 90°$

Figura 36 – Coeficiente Angular da Reta - 1º Caso.



Fonte: SILVA (2020).

Seja r a reta determinada pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Considere o ponto $C(x_C, y_C)$. Observe o triângulo retângulo ABC, onde C é reto, ver Figura 36. Sabemos que

$$\tan\alpha = \frac{cat.op}{cat.adj}$$

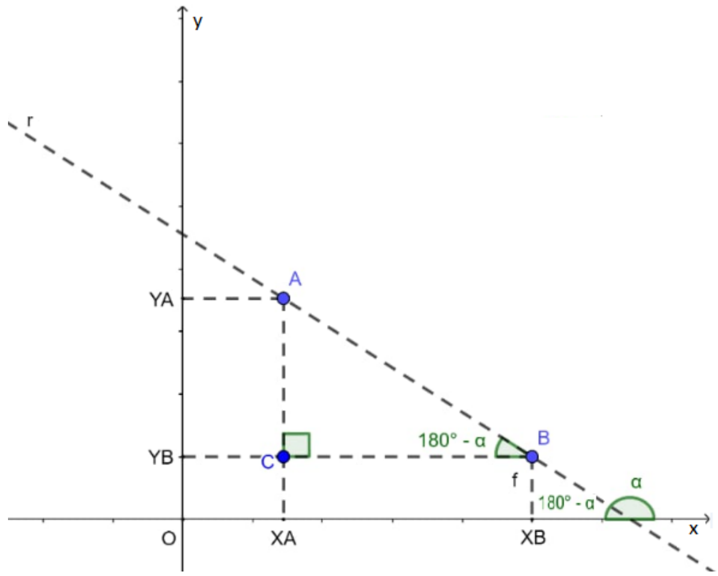
Em que $cat.op$ é o cateto oposto e $cat.adj$ é o cateto adjacente.

Como o $cat.op$ equivale à $d(B, C)$ e o $cat.adj$ à $d(A, C)$, temos

$$\tan\alpha = \frac{cat.op}{cat.adj} = \frac{d(B,C)}{d(A,C)} = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} \Rightarrow m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}.$$

- 2º caso: $90° < \alpha < 180°$

Figura 37 – Coeficiente Angular da Reta - 2º Caso.



Fonte: O Autor (2020).

Seja r a reta determinada pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Considere o ponto $C(x_C, y_C)$. Observe o triângulo retângulo ABC, onde C é reto, ver Figura 37. Sabemos que

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{cat.op}{cat.adj}.$$

Como o $cat.op$ representa a $d(A, C)$ e o $cat.adj$ a $d(B, C)$, temos

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{cat.op}{cat.adj} = \frac{d(C, A)}{d(C, B)} = \frac{(y_A - y_B)}{(x_B - x_A)} \Rightarrow \tan(180° - \alpha) = \frac{(y_A - y_B)}{(x_B - x_A)}.$$

Por outro lado,

$$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha.$$

Daí

$$-\tan\alpha = \frac{(y_A - y_B)}{(x_B - x_A)} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{-(y_A - y_B)}{(x_B - x_A)} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} \Rightarrow m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}.$$

Logo, o coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos é dado por

$$m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}. \tag{4.29}$$

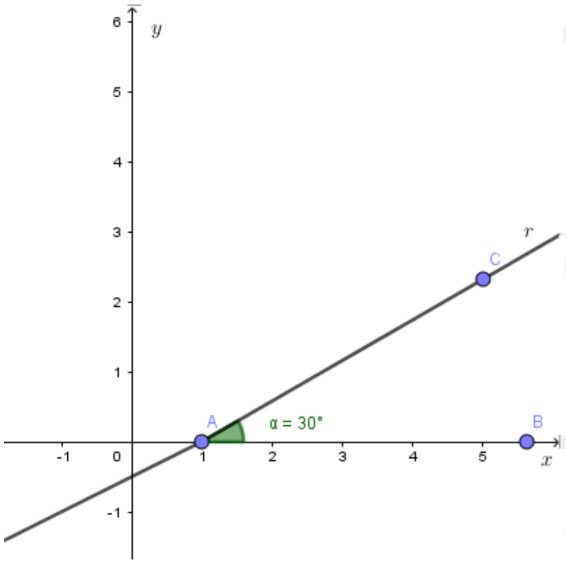
Com isso concluímos que há duas maneiras de se obter o coeficiente angular de uma reta:

1. Conhecendo a inclinação α da reta;

2. Conhecendo dois pontos da reta.

Exemplo 4.18. Vamos determinar o coeficiente angular da reta abaixo

Figura 38 – Cálculo do Coeficiente Angular.



Fonte: O Autor (2020).

Solução:

Como $m = \tan\alpha$ e $\alpha = 30°$, conforme Figura 38, então

$$m = \tan 30° \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Logo, o coeficiente angular da reta r é $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Exemplo 4.19. Vamos calcular o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(2,3)$ e $B(4,7)$.

Solução:

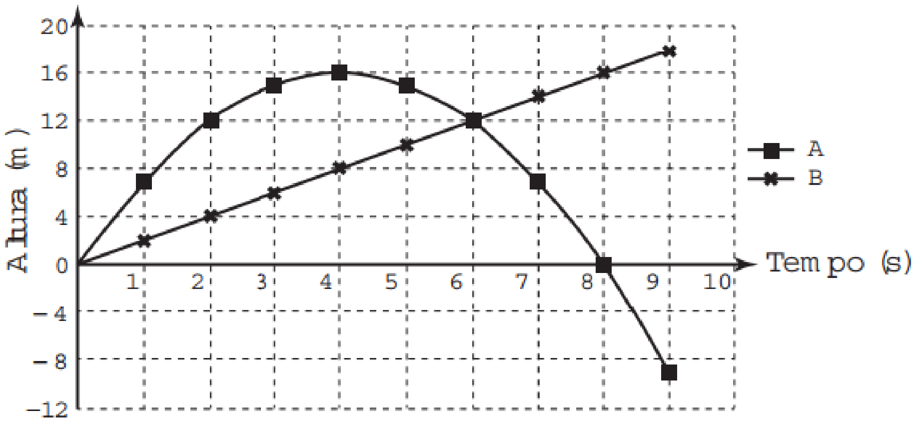
Como temos dois pontos dessa reta, podemos utilizar a Equação (4.29), ou seja,

$$m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} \Rightarrow m = \frac{(7-3)}{(4-2)} \Rightarrow m = \frac{4}{2} \Rightarrow m = 2.$$

Logo, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(2,3)$ e $B(4,7)$ é 2.

Exemplo 4.20. Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

Figura 39 – Questão ENEM 2016.



Fonte: INEP (2020a).

Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá:

a) diminuir em 2 unidades.

b) diminuir em 4 unidades.

c) aumentar em 2 unidades.

d) aumentar em 4 unidades.

e) aumentar em 8 unidades.

Solução:

Observe que o projétil que descreve uma trajetória parabólica é o A e o projétil que descreve uma trajetória supostamente retilínea é o B. O objetivo da ação é que o projétil B intercepte o projétil A quando esse alcançar sua altura máxima, que conforme a Figura 39 é no ponto $(4, 16)$, ou seja, no ponto máximo da parábola. Chamaremos esse ponto de P. Nessa simulação apresentada e que não alcança o objetivo proposto, o coeficiente angular da reta descrita pelo projétil B pode ser calculado considerando dois de seus pontos, por exemplo $(4, 8)$ e o $(6, 12)$, vamos chamar esses pontos respectivamente de C e D, daí utilizando a Equação (4.29), temos

$$m = \frac{(y_D - y_C)}{(x_D - x_C)} \Rightarrow m = \frac{(12 - 8)}{(6 - 4)} \Rightarrow m = \frac{4}{2} \Rightarrow m = 2.$$

Logo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B nessa simulação é 2.

Vamos agora determinar o coeficiente angular da reta descrita por B, no caso do objetivo ser alcançado, ou seja, que o projétil B intercepte o projétil A no ponto $P(4,16)$. Para calcular o coeficiente angular vamos considerar dois pontos da reta descrita por B: o ponto $O(0,0)$ que é a origem e o ponto $P(4,16)$ que é o ponto onde os projéteis irão se intercectar, daí

$$m = \frac{(y_P - y_O)}{(x_P - x_O)} \Rightarrow m = \frac{(16-0)}{(4-0)} \Rightarrow m = \frac{16}{4} \Rightarrow m = 4.$$

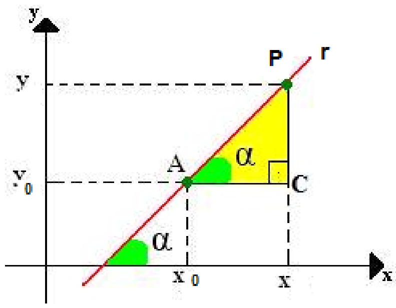
Logo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B alcançando o objetivo é 4.

Com isso concluímos que o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B nessa simulação, deverá aumentar em 2 unidade para que alcance o objetivo proposto. Resposta alternativa c).

4.7.2 Equação da Reta quando são conhecidos um Ponto e o Coeficiente Angular

Ao definirmos um ponto $A(x_0, y_0)$ no plano cartesiano e um coeficiente angular m, podemos determinar a reta r que passa por A e tem coeficiente angular m. Para obtermos a equação dessa reta r, consideremos um ponto $P(x,y)$ qualquer, distinto de A e pertencente a r.

Figura 40 – Equação da Reta conhecidos um Ponto e o Coeficiente Angular.



Fonte: Figura adaptada de SILVA (2020).

Do triângulo APC, Figura 40, temos que

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CP}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Sabemos que

$$m = \tan\alpha \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

Portanto a equação da reta quando são conhecidos um de seus pontos e o coeficiente angular é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{4.30}$$

A equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ recebe o nome de Equação Fundamental da Reta.

Observações:

1. Se a reta é paralela ao eixo x, temos $m = 0$ e a equação da reta é dada por $y = y_0$.
2. Se a reta é paralela ao eixo y, todos os pontos da reta tem a mesma abscissa e a equação da reta será dada por $x = x_0$.

Exemplo 4.21. Vejamos como determinar a equação de uma reta que passa pelo ponto $A(4, -3)$ e tem coeficiente angular $m = -2$.

Solução:

Como temos um ponto da reta e o coeficiente angular, podemos utilizar a Equação (4.30) e em seguida substituir o valor de m e o valor de x_0 e y_0, que equivalem às coordenadas do ponto A , ou seja,

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (-3) = -2(x - 4) \Rightarrow y + 3 = -2x + 8 \Rightarrow y + 2x - 5 = 0$$

Logo, a equação da reta que passa pelo ponto $A(4, -3)$ e tem coeficiente angular 2 é dada por y + 2x - 5 = 0.

4.7.3 Equação Reduzida da Reta

Estudamos no item anterior que a equação da reta que passa por um ponto $A(x_0, y_0)$, com declividade m é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Se escolhermos o ponto particular $(0, n)$, ou seja, o ponto em que a reta r intersecta o eixo y, obtemos

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - n &= m(x - 0) \\ y - n &= mx \\ y &= mx + n \end{aligned}$$

Denominamos de Equação Reduzida da Reta, a equação na forma

$$y = mx + n. \tag{4.31}$$

O número real n, que é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo y, recebe o nome de coeficiente linear da reta.

A equação reduzida de uma reta não paralela ao eixo y pode ser associada a uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, em que a é a declividade, e b, o termo constante. O gráfico da função $f(x) = 3x - 5$, por exemplo, corresponde a uma reta cuja equação reduzida é $y = 3x - 5$.

Exemplo 4.22. Determinar a equação reduzida da reta que passa pelo ponto $A(5, 7)$ e tem coeficiente angular $m = 2$.

Solução:

Sabemos que a equação reduzida da reta é dada pela Equação (4.31). Já temos o valor de $m = 2$, falta agora encontrar o valor de n. Como o ponto A é um ponto da reta, então ele satisfaz a equação da reta, daí substituindo os valores das coordenadas do ponto A e o valor do coeficiente angular, temos

$$
\begin{aligned}
&y = mx + n \\
&7 = 2 \times 5 + n \\
&7 = 10 + n \\
&n = 7 - 10 \\
&n = -3
\end{aligned}
$$

Logo, a equação reduzida da reta que passa pelo ponto $A(5, 7)$ e tem coeficiente angular 2 é $y = 2x - 3$.

Exemplo 4.23. (Aeronáutica - 2015) A equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(0, 1)$ e $B(6, 8)$ é dada por:

a) $y = 7x + 1$

b) $y = 6x + 1$

c) $y = \dfrac{7}{6}x + 1$

d) $y = \dfrac{6}{7}x + 1$

Solução: Sabemos que a equação reduzida da reta é do tipo

$$y = mx + n$$

Para resolver essa questão temos que determinar o valor do coeficiente angular m e o valor do coeficiente linear n.

Como temos dois pontos dessa reta, podemos determinar o coeficiente angular utilizando a Equação (4.29), ou seja,

$$m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} \Rightarrow m = \frac{(8-1)}{(6-0)} \Rightarrow m = \frac{7}{6}.$$

Logo, o coeficiente angular dessa reta é $\frac{7}{6}$.

Para determinar o coeficiente linear, vamos escolher um dos pontos da reta, o ponto $B(6,8)$, por exemplo, e substituir na equação da reta, levando em consideração o valor de m que já foi encontrado. Daí temos

$$y = mx + n \Rightarrow 8 = \frac{7}{6} \times 6 + n \Rightarrow 8 = 7 + n \Rightarrow n = 8 - 7 \Rightarrow n = 1.$$

Com isso concluímos que a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(0,1)$ e $B(6,8)$ é dada por

$$y = \frac{7}{6}x + 1.$$

Resposta alternativa c).

4.7.4 Equação Geral da Reta

Toda reta do plano possui uma equação da forma $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são constantes, sendo a e b não nulos simultaneamente. Chamamos essa equação de Equação Geral da Reta.

Vejamos como encontrar equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1,3)$ e $B(2,-3)$, por exemplo.

Sabemos que

$$m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}.$$

Substituindo os valores das coordenadas dos pontos A e B detreminamos o valor do coeficiente angular

$$m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} \Rightarrow m = \frac{-3-3}{2-(-1)} \Rightarrow m = \frac{-6}{3} \Rightarrow m = -2.$$

Pela Equação (4.30) temos que

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Os pontos A e B são pontos da reta, logo a satisfazem. Daí substituindo as coordenadas do ponto A, por exemplo, obtemos

$$
\begin{aligned}
y - y_0 &= m(x - x_0)\\
y - 3 &= -2(x - (-1)\\
y - 3 &= -2(x + 1)\\
y - 3 &= -2x - 2\\
2x + y - 1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Com isso concluímos que $2x + y - 1 = 0$ é a Equação Geral da Reta, com $a = 2$, $b = 1$ e $c = -1$.

Outra maneira de determinar a equação geral da reta a partir de dois de seus pontos, é por meio da verificação do alinhamento de três pontos.

Considerando o mesmo caso anterior, onde a reta passa pelos pontos $A(-1, 3)$ e $B(2, -3)$, vamos considerar um ponto $P(x, y)$ qualquer, que esteja na mesma reta onde estão os pontos A e B. Como esses três pontos são colineares, então temos que o determinante descrito abaixo é igual a zero, ou seja,

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

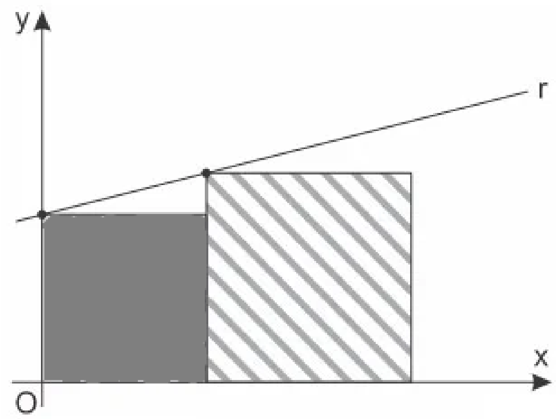
Daí, aplicando a Regra de Sarrus temos

$$
\begin{aligned}
(3x + 2y + 3) - (6 - 3x - y) &= 0\\
3x + 2y + 3 - 6 + 3x + y &= 0\\
6x + 3y - 3 &= 0\\
3(2x + y - 1) &= 0\\
2x + y - 1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Veja que encontramos a mesma equação geral da reta do caso anterior, ou seja, $2x + y - 1 = 0$.

Exemplo 4.24. (UFPR - 2012) Na Figura 41 a seguir estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado.

Figura 41 – Questão UFPR - 2012.



Fonte: PLANEJATIVO (2020).

Nessas condições, a equação geral da reta r é:

a) $x - 2y + 4 = 0$

b) $4x - 9y = 0$

c) $2x + 3y + 1 = 0$

d) $x + y - 3 = 0$

e) $2x - y - 3 = 0$

Solução:

Como o quadrado cinza tem àrea 4 unidades, podemos afirmar que o lado desse quadrado mede 2 unidades, já que sabemos que

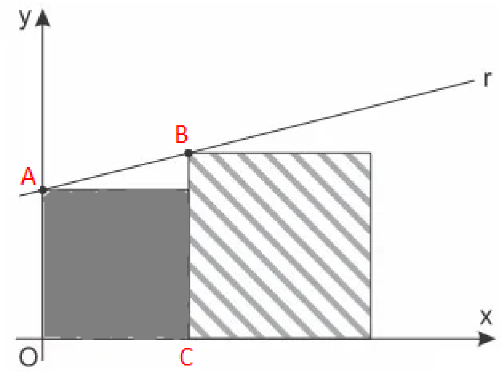
$$A = l^2 \Rightarrow 4 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{4} \Rightarrow l = 2.$$

Analogamente, como o quadrado hachurado tem 9 unidades de área, então o lado desse quadrado mede 3 unidades, já que sabemos que

$$A = l^2 \Rightarrow 9 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{9} \Rightarrow l = 3.$$

Vamos considerar os pontos A, B e C, conforme Figura 42 abaixo

Figura 42 – Solução.



Fonte: Figura adaptada de PLANEJATIVO (2020).

Observe que a distância do ponto A à origem é 2 unidades, já que $\overline{AO}$ é o lado do quadrado cinza. Por outro lado o ponto A intersecta o eixo y, logo podemos concluir que as coordenads de A são $A(0,2)$. Veja também que $\overline{BC}$ é o lado do quadrado hachurado, logo mede 3 unidades, observe que a medida de $\overline{BC}$ equivale ao valor da ordenada do ponto B, da mesma forma $\overline{OC}$ é o lado do quadrado cinza, logo mede 2 unidades, e esse valor representa a abscissa do ponto B, daí $B(2,3)$.

Como já temos as coordenadas de dois pontos da reta r, ou seja $A(0,2)$ e $B(2,3)$, podemos derterminar o coeficiente angular

$$m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} \Rightarrow m = \frac{(3-2)}{(2-0)} \Rightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Vamos agora substituir o valor do coeficiente angular e de um dos pontos da reta, por exemplo, o ponto $A(0,2)$ na Equação (4.30), para encontramos a equação geral da reta

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 2 &= \frac{1}{2}(x - 0) \\ y - 2 &= \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x - y + 2 &= 0 \\ x - 2y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Logo concluímos que a a equação geral da reta r é: $x - 2y + 4 = 0$. Resposta alternativa a).

5 Proposta de Trabalho

Este capítulo traz uma proposta de trabalho composta por algumas Sequências Didáticas e a criação de uma Sala de Aula Virtual. Ela foi desenvolvida para ser aplicada em turmas do 3º Ano do Ensino Médio de escolas públicas, mas podem servir como perspectivas futuras, podendo ser utilizadas em outras escolas ou outros seriados. Esta proposta de trabalho foi construída com o intuito de proporcionarem aos estudantes uma aprendizagem mais consistente. Serão utilizadas as tecnologias digitais como ferramentas de apoio aos conteúdos que serão ministrados em sala de aula. O objetivo desse trabalho é despertar o interesse ao estudo da Matemática para melhorar o processo de aprendizagem dos discentes.

5.1 Detalhamento da Proposta de Trabalho

A primeira e a segunda Sequência Didática utilizam dois métodos do Ensino Híbrido: Rotação por Estações e a Sala de Aula Invertida. A terceira Sequência Didática contempla a utilização do Software GeoGebra. Já a Sala de Aula Virtual consiste na criação de uma sala de aula no Google Classroom, onde os alunos terão acesso aos conteúdos da Geometria Analítica abordados presencialmente. Nessa plataforma constarão vídeos, livros didáticos, apostilas, materiais disponibilizado pela Khan Academy e também atividades elaboradas pelo professor. Essa sala de aula virtual servirá como um reforço ao assunto estudado, além disso, possibilitará que o aluno tenha acesso ao conteúdo explanado caso não tenha comparecido à aula.

É de suma importância que o professor apresente previamente aos estudantes as tecnologias digitais que serão utilizadas na unidade letiva, informando-o que a utilização dessas ferramentas servirá para reforçar os conteúdos abordados em sala de aula, tendo como objetivo melhorar sua aprendizagem e tornar as aulas mais atrativas. A sugestão é que essa apresentação seja realizada na sala de vídeo da escola, ou local semelhante, com a presença de toda turma.

5.1.1 Sequência Didática Nº 01: Rotação por Estações

Descrição:

Nessa Sequência Didática traremos o conteúdo de Plano Cartesiano Ortogonal, que é o primeiro tópico da Geometria Analítica. Utilizaremos o modelo de Ensino Híbrido, mas especificamente o Rotação por Estações. Para a realização desse método, a turma deverá ser dividida em quatro grupos.

Habilidades da BNCC:

- EF06MA16: Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
- EM13MAT401: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
- EM13MAT501: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

Objetivos:

- Compreender as características do plano cartesiano ortogonal;
- Localizar pontos no plano cartesiano;
- Identificar as coordenadas dos pontos no plano cartesiano.

Duração:

A atividade é programada para ser desenvolvida em dois horários de 50 minutos cada.

Desenvolvimento:

1º Momento

O professor fará uma explanação com um breve histórico sobre a Geometria Analítica, informando que estudiosos atribuem aos matemáticos franceses René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) o início do estudo da Geometria Analítica. Em seguida trará os conceitos de plano cartesiano ortogonal, par ordenado, identificação dos eixos das abscissas e das ordenadas, localização de pontos no plano, a identificação dos quadrantes e seus respectivos sinais, abordará também o reconhecimento das bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares. É importante exemplificar o conteúdo estudado realizando no quadro a construção do plano cartesiano e a localização de alguns pontos nos respectivos quadrantes, inclusive destacando as características dos pontos pertecentes à bissetriz dos quadrantes pares e ímpares. Essa ação terá duração de aproximadamente 15 minutos.

2º Momento

Em seguida o professor deverá dividir a turma em quatro grupos (estações), conforme detalhamento:

- Na 1ª Estação cada aluno receberá um *Chromebook* e terá que resolver as questões interativas da Khan Academy sobre o conteúdo plano cartesiano. Estas questões foram disponibilizadas previamente no Google Classroom, duração de aproximadamente 10 minutos.
- Na 2ª Estação os estudantes receberão uma lista de exercício impressa com 4 questões (Lista de Exercício Nº 01, disponibilizada no Apêndice), onde tentarão em conjunto resolve-las, duração 10 minutos.
- Na 3ª Estação cada aluno receberá um mapa e deverá responder as alternativas que nele constar (Atividade - Mapa do Brasil, disponível no Apêndice). Essa atividade durará em média 10 minutos e traz um destaque para a interdisciplinaridade.
- Na 4ª Estação cada educando deverá traçar um plano cartesiano, escolher um dos itens e marcar os pontos descritos. Em seguida eles deverão unir os pontos de forma sequencial, identificar a figura formada na alternativa que ele escolheu e informar os respectivos quadrantes as quais as figuras pertencem (Atividade - Figuras no Plano Cartesiano, disponível no Apêndice). Essa ação durará uns 10 minutos.

Todas as equipes deverão percorrer todas as estações realizando as atividades programadas, pois dessa forma todos terão tido a oportunidade de ter acesso ao mesmo conteúdo, sob diferentes métodos de aprendizagem. Neste modelo de ensino tem momentos em que os estudantes trabalham de forma colaborativa e em outros de forma individual. É de suma importância a presença do professor nestas estações, orientando os alunos e esclarecendo as dúvidas, caso eles necessitem.

3º Momento

Após todos os alunos terem tido acesso às quatro estações e estarem de volta em sua posição inicial, o professor entregará uma atividade impressa, constante no Apêndice (Atividade Avaliativa Nº 01) e realizará sorteio dessas questões, de forma que cada grupo fique responsável por uma questão. Posteriormente um membro do grupo deve ser escolhido pela equipe para resolver no quadro e explanar para toda a turma o desenvolvimento da questão, convém salientar que os demais membros da equipe podem colaborar com a resolução. Vale ressaltar que nessa atividade, caso o docente perceba que a explicação do aluno não tenha sido esclarecedora, caberá ao professor realizar as devidas complementações. Nessa atividade cada grupo terá 10 minutos para elaborar a resposta e fazer a explanação no quadro, totalizado 40 minutos de ação. Essa atividade será pontuada (valor 1,0).

4º Momento

Em seguida o professor irá solicitar que os alunos falem sobre a experiência que tiveram, e posteriormente o educador fará suas colocações sobre a ação desenvolvida e finalizará a aula. Essa interlocução deve durar em média 10 minutos.

5.1.2 Sequência Didática Nº 02: Sala de Aula Invertida

Descrição:

Nessa Sequência Didática traremos o conteúdo de Distância entre dois Pontos, utilizando o método de Ensino Híbrido Sala de Aula Invertida. Nesse modelo os alunos devem estudar previamente os conteúdos que serão abordados na aula presencial.

Habilidades da BNCC:

- EF09MA16: Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Objetivos:

- Compreender como encontrar a distância entre dois pontos a partir de suas coordenadas cartesianas;
- Determinar a distância entre dois pontos e aplicá-la na resolução de problemas;
- Mostrar aos alunos a aplicabilidade do cálculo da distância de dois pontos em seu cotidiano.

Duração:

Esse método será trabalhado em duas aulas geminadas de 50 minutos cada.

Desenvolvimento:

1º Momento

Inicialmente, disponibilizaremos no Google Classroom vídeos abordando os conteúdos de Distância entre dois pontos, Teorema de Pitágoras e a resolução de exercícios, segue abaixo descrição dos vídeos:

- https://youtu.be/2fDRVCidiic;
- https://youtu.be/rQUcdanZAbI;
- https://youtu.be/ZaPJRR4Nz2o;
- https://youtu.be/PGPRh4JBIsg.

Informaremos ao aluno as páginas do livro didático que constam esse assunto para que eles façam a leitura. Além dessas alternativas, deixaremos livre para que o discente busque outros mecanismos para ter acesso ao referido conteúdo, podendo compartilhar, por exemplo, no grupo do WhatsApp da turma o material que considerou relevante. Esses estudantes serão orientados a estudar esse assunto antes da aula presencial e poderão utilizar a fonte de pesquisa que eles considerarem mais interessante. Após estudar esse conteúdo o aluno deverá anotar os itens que deixaram dúvidas e os pontos que consideraram importantes. Essas anotações devem ser levadas para discussão durante a aula presencial.

2º Momento

Na aula presencial o professor recebe a turma e pede para que os alunos individualmente falem sobre as dúvidas que surgiram no estudo que fora realizado fora do ambiente escolar. Esse momento de discussão será bastante proveitoso, pois os demais estudantes poderão contribuir esclarecendo a dúvida do colega, já que a princípio todos estudaram o mesmo conteúdo, porém utilizando fontes diferentes. O professor será o mediador dessa interação e fará as intervenções necessárias. Duração 30 minutos.

3º Momento

Em seguida o professor fará uma explanação sobre o assunto, de forma sucinta, pois a tendência é que os alunos já tenham conhecimento dos principais conceitos e fórmulas. O educador relembrará os três casos de localização de dois pontos distintos no Plano Cartesiano, mostrando como se pode calcular essa distância:

- 1º Caso: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo $x \to d(A,B) = |x_B - x_A|$;
  Exemplificar calculando a distância entre os pontos $A(-1,1)$ e $B(3,1)$.
- 2º Caso: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo $y \to d(A,B) = |y_B - y_A|$;
  Exemplificar calculando a distância entre os pontos $A(-2,4)$ e $B(-2,-2)$.
- 3º Caso: O segmento $\overline{AB}$ não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados: Nesse caso, utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar $d(A,B)$;
  Exemplificar calculando a distância entre os pontos $A(1,2)$ e $B(5,5)$.

Dando continuidade a aula, mostrar aos alunos a dedução da fórmula por meio da qual seja possível calcular a distância entre dois pontos quaisquer. Considerando os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ em um plano cartesiano. Chegando-se a conclusão que:

$$d(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemplificar utilizando a fórmula que foi deduzida, para determinar a distância entre os pontos $M(4,2)$ e $N(7,6)$.
Duração da explanação, aproximadamente 15 minutos.

4º Momento

Após finalizar a explicação do assunto, o professor formará quatro grupos e será distribuída uma lista de exercício com quatro questões (Atividade Avaliativa Nº 02, conforme Apêndice), para que os alunos realize essa atividade em sala de aula. Essa lista contém questões que contemplam a interdisciplinaridade e a contextualização, para que o discente perceba a aplicação dos conteúdos da Geometria Analítica em outras áreas, bem como em seu cotidiano. Essa atividade será avaliativa (valor 1,0). Os alunos terão 30 minutos para realizar essa atividade.

5º Momento

Após os alunos concluírem essa atividade o professor deverá realizar a correção das questões no quadro com a participação da turma, esclarecendo as dúvidas que surgirem.

5.1.3 Sequência Didática Nº 03: Utilizando o GeoGebra

Descrição:

Nessa Sequência Didática vamos abordar o conteúdo de Coordenadas do Ponto Médio e Coordenadas do Baricentro de um triângulo, onde faremos o uso do GeoGebra. Os alunos utilizando os *chromebooks* farão uso desse software para determinar o ponto médio, o baricentro e suas respectivas coordenadas. A utilização dessa ferramenta tem como intuito despertar nos discentes a curiosidade e o interesse pela matemática, garantindo uma aprendizagem mais significativa.

Habilidades da BNCC:

- (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

Objetivos:

- Determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento;
- Determinar as coordenadas do baricentro de um triângulo;
- Utilizar software de geometria dinâmica para explorar diferentes tecnologias.

Duração:

Essa Sequência será trabalhada em três aulas de 50 minutos cada.

Desenvolvimento:

1º Momento

Esse 1º momento trata-se de uma aula presencial, com explanação dos conteúdos de Coordenadas do Ponto Médio e Coordenadas do Baricentro. Trata-se de uma aula expositiva e dialogada, onde inicialmente o docente deve informar aos alunos o conceito de ponto médio, em seguida utilizar semelhança de triângulos para deduzir as coordenadas do ponto médio $M(x_M, y_M)$ do segmento $\overline{AB}$, sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Chegando a conclusão que:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Exemplificar calculando as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$, dado os pontos $A(3, -2)$ e $B\left(\frac{-1}{2}, -4\right)$. Realizar mais um exemplo determinando as coordenadas do ponto B, sendo dada as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$, ou seja, $M(0, 2)$ e as coordenadas do ponto $A(-2, 5)$.

Dando prosseguimento a aula, abordar os conteúdos de mediana e baricentro de um triângulo, informar que um triângulo tem três medianas e que as três medianas intersectam-se num ponto G chamado de Baricentro do triângulo. Relembrar a propriedade da Geometria Plana sobre baricentro do triângulo. Diante da utilização dessa propriedade e do conceito de ponto médio, mostrar que as coordenadas do baricentro do triângulo ABC, em que $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, são:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Exemplificar determinando as coordenadas do baricentro G dado o triângulo ABC, cujas coordenadas dos vértices são $A(7, -2)$, $B(-1, 5)$ e $C(9, -4)$. Realizar novo exemplo, determinando as coordenadas do vértice C do triângulo ABC em que $A(4, 9)$ e $B(-2, 6)$, sabendo-se que $G(2, 3)$ é o baricentro do triângulo. A explanação desse conteúdo terá participação ativa dos alunos e durará em média 50 minutos.

2º Momento

Na sala de vídeo colocar os alunos em dupla e distribuir os *chromebooks*. Abri o software GeoGebra fazendo a projeção da imagem, para que dessa forma, os discentes acompanhem o passo a passo e realizem suas construções. Solicitar que os estudantes também abram o GeoGebra no *chromebook*, informar a turma que inicialmente, iremos realizar a construção do ponto médio e determinar suas respectivas coordenadas, ou seja $M(x_M, y_M)$.

Pedi aos alunos que marquem no GeoGebra os pontos $A(1, 2)$ e $B(5, 2)$, utilizando o menu Ponto. Em seguida solicitar que eles acionem o comando Segmento e clicando sobre os pontos A e B determinará o segmento de reta $\overline{AB}$. Dando prosseguimento pedi aos educandos que calculem algebricamente as coordenadas do ponto médio desse segmento, utilizando as fórmulas vistas em sala de aula, ou seja:

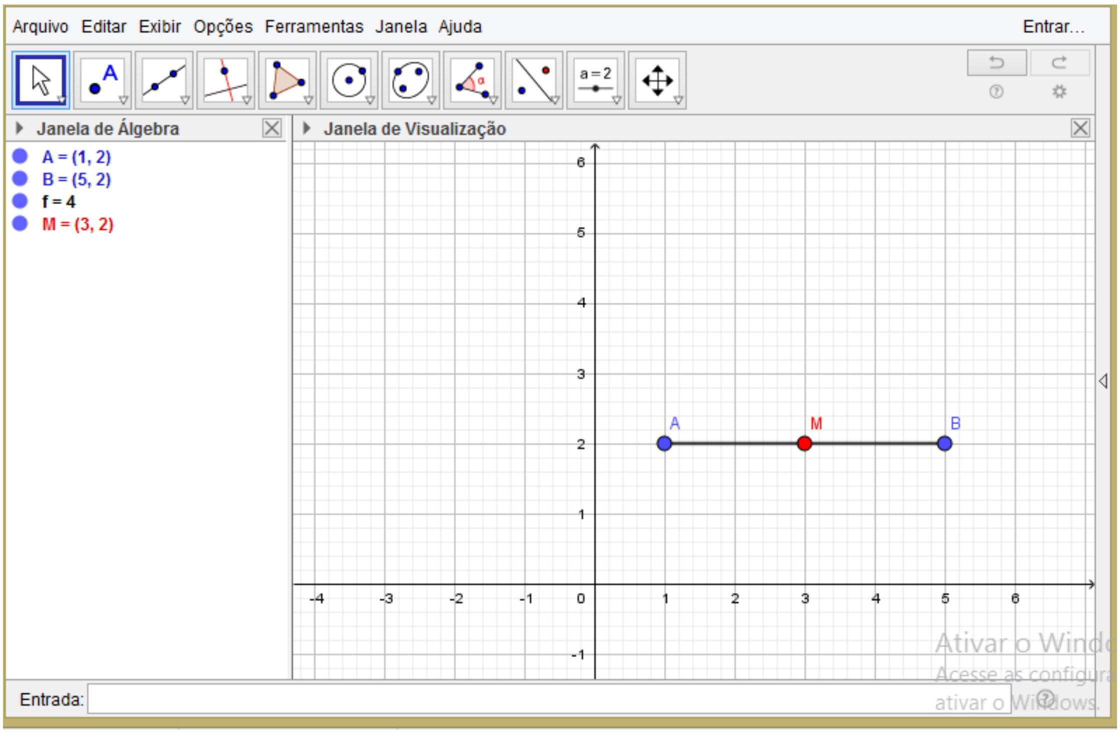
$$x_M = \frac{(x_A + x_B)}{2}.$$

$$y_M = \frac{(y_A + y_B)}{2}.$$

Solicitar aos alunos que anotem o resultado desse cálculo.

Em seguida pedi que os estudantes marquem o ponto médio M sobre o segmento de reta $\overline{AB}$. Informar que para isso eles devem utilizar o comando Ponto Médio ou Centro e em seguida clicar no ponto A e no ponto B que automaticamente surgirá no segmento $\overline{AB}$ o ponto C, que é o ponto médio desse segmento. Solicitar que o aluno clique com o botão direto sobre o ponto C e na opção Renomear inserir a letra M, dessa forma o ponto médio de AB será M, seguindo a nomenclatura padrão utilizada. Solicitar aos alunos que destaquem o ponto M, da seguinte forma: clicar no ponto M com o botão direito e selecionar Propriedades, em seguida clicar em Cor e escolher uma cor que mais lhe interesse, posteriormente clicar em Estilo e aumentar o tamanho do ponto. Clicar sobre o segmento $\overline{AB}$ e com o botão direito desabilitar o comando Exibir Rótulo, para que dessa forma a letra que determina o segmento de reta não fique visível. Com isso teremos na Janela de Visualização do GeoGebra o segmento $\overline{AB}$ e o ponto médio M, conforme Figura 43. Para finalizar solicitar que os alunos visualizem no plano cartesiano as coordenadas do ponto médio, verificando que é o mesmo valor das coordenadas encontradas em sua resolução algébrica. Mostrar que na parte superior do GeoGebra aparece a Janela de Álgebra, onde está disponível o ponto M com suas respectivas coordenadas, bem como as coordenadas dos pontos A e B.

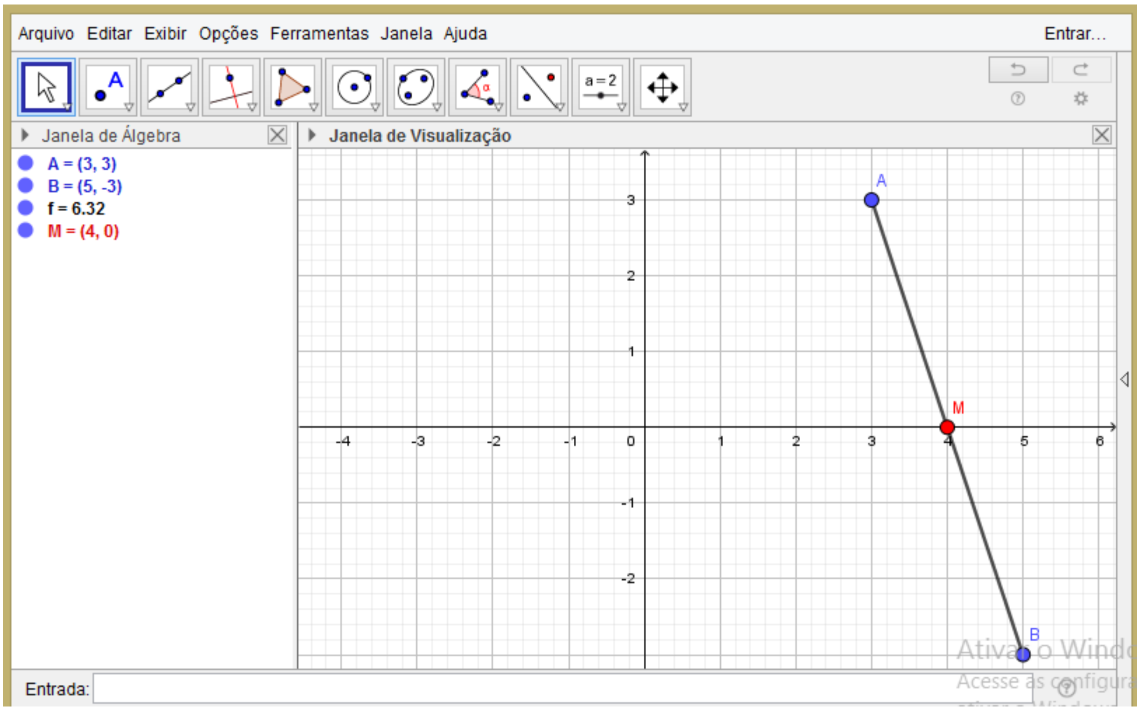
Figura 43 – Ponto Médio - Construção no GeoGebra.



Fonte: O Autor (2020).

Mostrar aos alunos que ao mudar os pontos A e ou B de posição, o GeoGebra vai atualizando as coordenadas do ponto médio de acordo com a localização do segmento $\overline{AB}$, ver Figura 44.

Figura 44 – Ponto Médio Geogebra.



Fonte: O Autor (2020).

Com o objetivo que os alunos pratiquem o que foi estudado, solicitar que eles determinem no GeoGebra as coordenadas do ponto médio M dos seguintes segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$, de coordenadas:

a) $C(-2, 1)$ e $D(2, -3)$

b) $E(-2, 2)$ e $F(3, 2)$

O professor deve acompanhar a construção dos alunos, verificando se eles realizam os procedimentos corretamente, conforme explanado na aula.

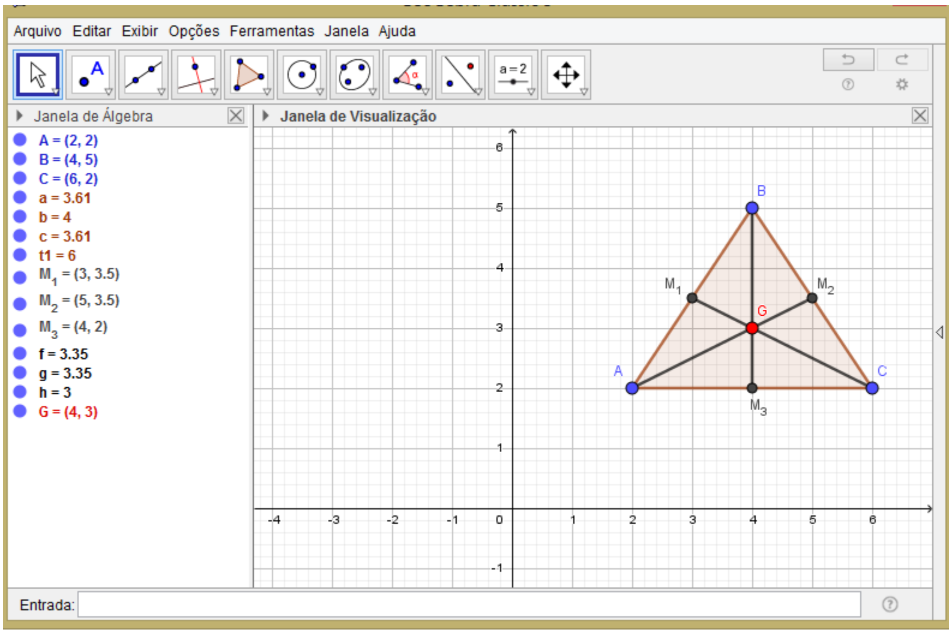
Dando prosseguimento informar a turma que iremos determinar em conjunto as coordenadas do Baricentro do triângulo ABC. Inicialmente solicitar que os alunos construam no GeoGebra o triângulo ABC, sendo $A(2, 2)$, $B(4, 5)$ e $C(6, 2)$, para tanto eles devem clicar no comando Polígonos e marcar os pontos A, B e C que automaticamente o GeoGebra apresenta a construção do referido triângulo. Em seguida excluir as letras que nomeiam os lados do triângulo, clicando sobre o lado com o botão direto e desabilitar o comando Exibir Rótulo. Dando prosseguimento vamos solicitar que os alunos determinem o cálculo algébrico das coordenadas do baricentro desse triângulo ABC utilizando a fórmula apresentada, isto é:

$$x_G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} \right)$$

$$y_G = \left(\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Posteriormente solicitar aos alunos que determinem as Medianas dos triângulos, para tanto eles devem encontrar os Pontos Médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, como na construção anterior. Renomeá-los chamando-os de M_1, M_2 e M_3, respectivamente. Em seguida clicar no comando Segmento e marcar os pontos C e M_1 determinando a mediana $\overline{CM_1}$, depois marcar os pontos A e M_2, determinando a mediana $\overline{AM_2}$ e por fim clicar nos pontos B e M_3, determinando a mediana $\overline{BM_3}$. Solicitar que os alunos cliquem com botão direito sobre os as medianas e desabilitar a função Exibir Rótulos, para que dessa forma não apareçam as letras que identificam as medianas. Para determinar o ponto de intesecção das medianas, clicar no comando Intersecção de dois Pontos e em seguida marcar sobre o ponto de encontro das 3 medianas, que conforme já estudado é o Baricentro do triângulo. Em seguida solicitar que o aluno renomeie o ponto do Baricentro para G, mude a cor e aumente o tamanho deste ponto para destacá-lo, conforme realizado na construção anterior. Após a realização desses passos, teremos a construção no GeoGebra, de acordo com a Figura 45. Para finalizar pedir ao aluno para comparar as coordenadas do Baricentro que ele encontrou ao fazer o cálculo, com as coordenadas apresentadas pelo GeoGebra.

Figura 45 – Baricentro - Construção no GeoGebra.



Fonte: O Autor (2020).

Solicitar que os alunos pratiquem esse conteúdo determinando no GeoGebra as coordenadas do Baricentro dos triânguls que possuem vértices:

a) $D(2, -5)$, $E(-1, 1)$ e $F(1, 4)$

b) $M(4,1)$, $N(4,-3)$ e $P(-2,-4)$

O docente deve acompanhar a construção orientando os alunos. Após conclusão solicitar que a turma fale sobre a experiência em utilizar o GeoGebra. Esse 2º Momento deve ser administrado em duas aulas geminadas de 50 minutos cada.

5.2 Sala de Aula Virtual

Refere-se a criação de uma sala de aula na plataforma Google Classroom, cujo objetivo é proporcionar um ambiente de estudo complementar para o aluno fora da sala de aula. Nesse ambiente o discente poderá aprimorar sua aprendizagem, ou ter acesso ao conteúdo estudado se por algum motivo não compareceu a aula. Esta sala de aula virtual é para ser utilizada durante todo o ano letivo, contemplando os conteúdos que serão ministrados em cada unidade. No presente trabalho faremos a criação no Google Classroom de cinco semanas de aula, contemplando alguns dos conteúdos da Geometria Analítica explanados na referida unidade. Esse modelo servirá de base para criação das demais aulas desse conteúdo, bem como de outros assuntos da disciplina Matemática.

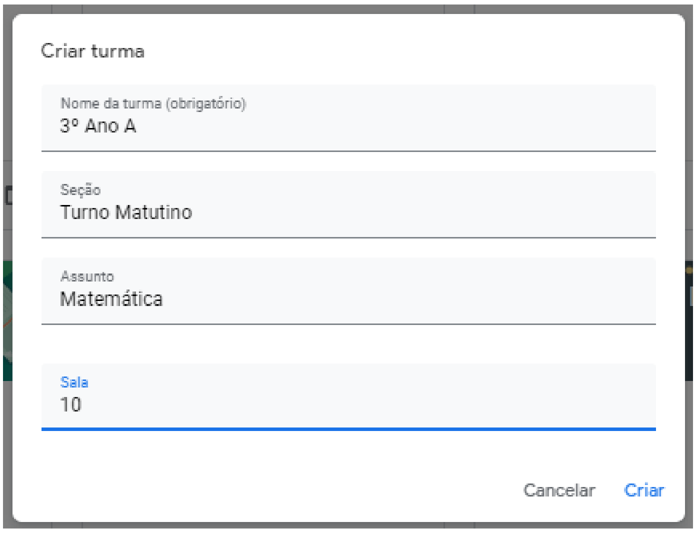
A medida que o professor faz seu planejamento de aula nas Atividades de Classe (AC), que ocorrem semanalmente no ambiente escolar, ele deve selecionar todos os materiais que serão postados na sala de aula virtual. Essa postagem poderá ser realizada após a explanação da aula, ou esses materiais podem ser postados no Google Classroom antes da aula, como por exemplo, para utilizar o modelo de ensino híbrido sala de aula invertida, onde o aluno deve fazer um estudo prévio, ou seja, antes da aula presencial.

5.2.1 Criação do Ambiente

O professor deve criar a sala de aula no Google Classroom e solicitar à secretaria da escola uma lista com os e-mails institucionais dos alunos, ou seja, os e-mails criados para o Projeto e- Nova Educação. Como já informado ao longo desse trabalho, o Projeto e-Nova Educação foi criado pelo Governo do Estado Bahia e tem como objetivo levar as tecnologias digitais para dentro da sala de aula das escolas públicas estaduais.

Para criação da sala de aula virtual o docente deve acessar seu gmail institucional e no ícone Google Apps selecionar Classroom, em seguida clicar no ícone Criar turma, preencher os dados solicitados e clicar em Criar, conforme Figura 46.

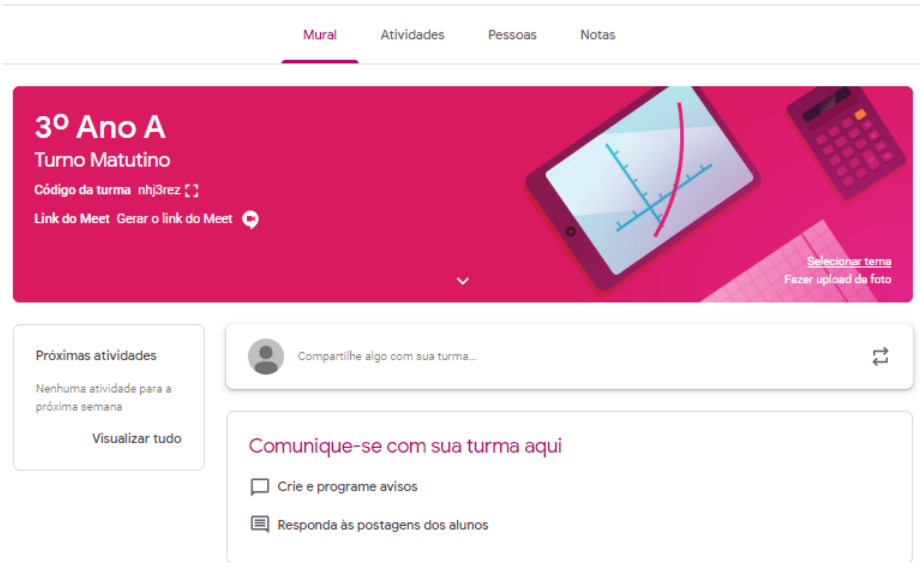
Figura 46 – Criar Sala de Aula.



Fonte: O Autor (2020).

Após esse procedimento, a sala de aula estará criada na plataforma Google Classroom, de acordo com a Figura 47.

Figura 47 – Turma Criada no Google Classroom.

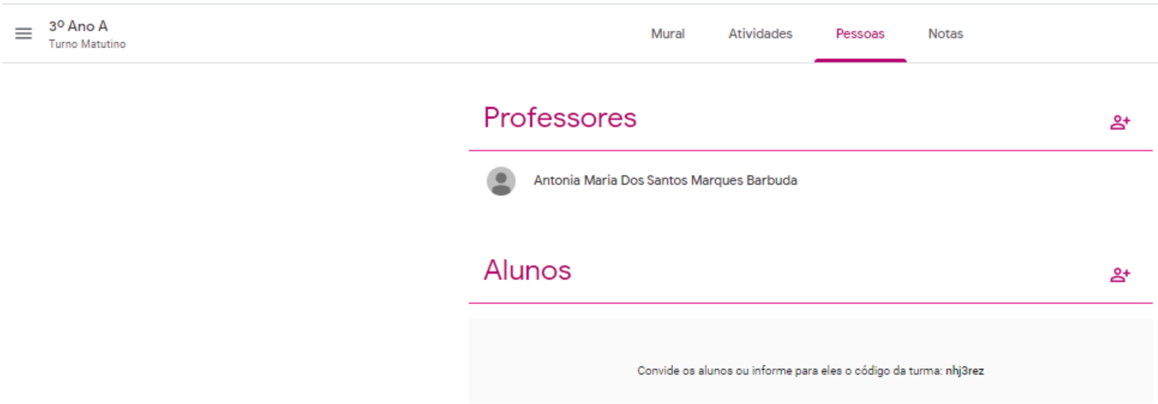


Fonte: O Autor (2020).

Após a criação da sala de aula virtual o docente fará o cadastro de todos os alunos no menu Pessoas, após essa ação cada aluno receberá automaticamente em seu e-mail um convite para participar da turma. Além dessa possibilidade o professor poderá informar aos discentes o código que foi gerado na criação da sala de aula para que eles possam ser integrantes dessa turma no Google Classroom.

Caso o professor opte por fazer o cadastro dos estudantes ao invés de fornecer o código da sala de aula, ele deverá selecionar o menu Pessoas, em seguida clicar no ícone Convidar Alunos e inserir o e-mail de todos os alunos da turma, conforme Figura 48. Após esse passo a sala de aula já estará criada e com todos os alunos cadastrados.

Figura 48 – Inserção de alunos no Google Classroom.



Fonte: O Autor (2020).

5.2.2 Apresentação das Tecnologias

Esse momento consiste da apresentação das tecnologias digitais aos alunos. O objetivo dessa ação é apresentar aos estudantes as ferramentas que serão utilizadas no decorrer da unidade (Google Classroom, GeoGebra, Khan Academy). Nesse momento o professor apresentará essas TDIC's utilizando a projeção de vídeos explicativos e esclarecendo as dúvidas da turma.

Em relação ao Google Classroom deve ser apresentada a plataforma, suas funcionalidades, mostrando aos discentes como eles poderão utilizá-las. Informar que já foi criada uma sala de aula nessa plataforma, onde os alunos serão participantes dessa turma. Nesta sala de aula virtual serão postados vídeos e materiais de apoio para o estudo da Geometria Analítica, nos respectivos tópicos. Nesse ambiente o educando terá acesso a todo conteúdo programático que foi ministrado em sala de aula, podendo adentrar nesse ambiente sempre que necessitar. Os alunos que tiverem com acesso a dados móveis serão orientados a acessar a sala de aula virtual do Google Classroom que foi criada para a turma, utilizando seus próprios aparelhos celulares, os demais estudantes acessarão utilizando os aparelhos de *chromebooks*.

Quanto ao GeoGebra deve ser apresentado o programa à turma, mostrando onde ele pode ser obtido e instalado gratuitamente. Devem ser apresentadas as funções dos menus. Além disso, é importante mostrar aos estudantes como construir pontos, retas, segmentos de retas, polígonos, dentre outras funcionalidades do software que serão abordadas ao longo desse estudo.

Em relação a Khan Academy, deve ser apresentada a plataforma para a turma, informando que a mesma dispõe de vídeos, apostilas e exercícios interativos, para aprimorar os conteúdos que serão abordados em sala de aula. Os conteúdos relevantes da Geometria Analítica que estiverem na Khan Academy serão migrados para o Google Classroom para que os alunos tenham acesso a esses materiais.

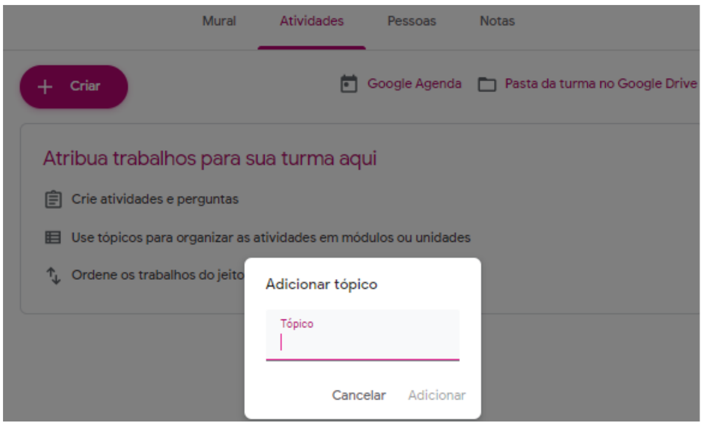
O professor deve projetar os vídeos sobre o Google Classroom, GeoGebra e a Khan Academy, com o detalhamento de utilização dessas ferramentas, conforme links descritos abaixo:

- GeoGebra: https://www.youtube.com/watch?v=VKcAk4qhJGM
- Google Classroom: https://www.youtube.com/watch?v=RXgqVB0yX8I
- Khan Academy: https://www.youtube.com/watch?v=gWFDfTxFLDo

5.2.3 Inclusão de Materiais na Sala de Aula Virtual

Esse momento consiste na inserção dos materiais na plataforma Google Classroom. Para tanto o professor deverá ir no menu Atividades, escolher a opção Criar, selecionar Tópicos e em seguida adicionar a descrição do Tópico, conforme Figura 49. No nosso caso específico traremos no primeiro Tópico a Apresentação da Sala de Aula Virtual, contendo um vídeo do professor que lecionará a disciplina, onde ele explicará o objetivo dessa plataforma. Nesse primeiro tópico também constará o programa da unidade letiva, contendo objetivos gerais e específicos, os conteúdos, metodologia e a forma de avaliação. Disponibilizaremos também um Tópico de nome Material Complementar, onde constará livros didáticos, exercícios, dentre outros materiais para um aprofundamento do estudo pelos alunos.

Figura 49 – Criação de Tópicos no Google Classroom.



Fonte: O Autor (2020).

Os Tópicos aos quais se referem às aulas, chamaremos de Semana 01, Semana 02, Semana 03, Semana 04 e assim por diante. Em cada semana haverá um Fórum referente à respectiva semana, para que o discente poste suas dúvidas e contribuições. Vejamos o detalhamento das aulas.

Semana 01: Nesta primeira semana, traremos três vídeos, sendo um contendo um breve histórico da Geometria Analítica e dois com os conteúdos de Plano Cartesiano Ortogonal, conforme descrição abaixo:

- https://youtu.be/dCVuXiSpkCE;
- https://youtu.be/Hws4tKt5dHk;
- https://youtu.be/iC4q1AGeN5A.

Ainda na Semana 01 disponibilizaremos as quatro estações que foram montadas em sala de aula para trabalhar com o modelo de Ensino Híbrido Rotação por Estações. Na 1ª estação trazemos a atividade interativa da Khan Academy, na 2ª estação temos a Lista de Exercício nº 01, na 3ª a atividade Mapa do Brasil e na 4ª estação a atividade de Figuras no Plano Cartesiano, o material dessas três últimas estações estão disponíveis no Apêndice do presente trabalho. Para finalizar a Semana 01 disponibilizamos uma Atividade Avaliativa criada no Google Formulários, essa atvidade poderá ser realizada pelos alunos que faltaram a aula e justificaram sua ausência. Essa mesma atividade foi realizada presencialmente pelos alunos que participaram da aula.

Semana 02: Neste Tópico será disponibilizado três vídeos sobre Distância entre dois Pontos, sendo dois vídeos com a explicação do assunto e um vídeo com resolução de exercícios. Como esse conteúdo faz menção ao Teorema de Pitágoras, trazemos também um vídeo sobre esse item, pois caso o aluno necessite relembrar terá material a sua disposição para estudar. Esses vídeos serão postados previamente, pois servirão de base para aplicação da Sala de Aula Invertida. Na aula anterior os alunos serão informados que deverão acessar a sala de aula virtual para estudar esses conteúdos que serão utilizados na próxima aula. Segue abaixo link dos vídeos:

- https://youtu.be/2fDRVCidiic;
- https://youtu.be/rQUcdanZAbI;
- https://youtu.be/ZaPJRR4Nz2o;
- https://youtu.be/PGPRh4JBIsg.

Dando continuidade, na segunda semana, disponibilizaremos na plataforma uma atividade da Khan Academy para que os alunos possam praticar os conteúdos vistos em sala de aula. Nessa aula trazemos também mais uma Atividade Avaliativa criada no Google Formulários, onde os alunos que justificaram devidamente sua ausência na aula poderão realizá-la.

Semana 03: Nesta semana serão ministrados os conteúdos de Coordenadas do Ponto Médio e Coordenadas do Baricentro. Disponibilizaremos no Google Classroom quatro vídeos, sendo dois sobre o assunto e dois com resolução de exercícios, conforme links descritos:

- https://youtu.be/j9LD1gmoZbw;
- https://youtu.be/58ghJp_WdFY;
- https://youtu.be/XZYvbsSLAiQ;
- https://youtu.be/gHIgRtOS0Gk.

Nessa semana será trabalhado com os alunos o software GeoGebra, onde faremos algumas construções com o objetivo de determinar as coordenadas do Ponto Médio e as Coordenadas do Baricentro. Será compartilhado diretamente do GeoGebra para o Google Classroom as construções realizadas em sala de aula. O aluno que faltou a aula deverá baixar o software GeoGebra e realizar as mesmas construções que foram feitas presencialmente.

Semana 04: Nesta semana serão abordados os conteúdos de Condição de Alinhamento de Três Pontos e Coeficiente Angular da Reta. Essas aulas serão expositivas e dialogadas com a participação ativa dos alunos. No entanto estará disponibilizada na plataforma Google Classroom todo material de suporte a essas aulas.

Em relação ao assunto Condição de Alinhamento de Três Pontos, será apresentado o conceito de pontos colineares, em seguida, mostraremos aos alunos que a partir da coordenada de três pontos é possível verificar se eles são colineares. Para tanto, considera-se os pontos $A(x_A,\, y_A)$, $B(x_B,\, y_B)$ e $C(x_C,\, y_C)$, do plano cartesiano e, aplicando-se o Teorema de Tales conclui-se que: Se três pontos distintos $A(x_A,\, y_A)$, $B(x_B,\, y_B)$ e $C(x_C,$ $y_C)$, são colineares, então o Determinante é zero. Vale salientar que nesse determinante os elementos da 1ª coluna são as abscissas dos pontos A, B e C; os elementos da 2ª coluna são as ordenadas dos pontos A, B e C; e todos os elementos da 3ª coluna será composto pelo algarismo 1. Nesta aula deve-se revisar como realizar o cálculo de determinante de uma matriz de ordem 3.

Na sala de aula virtual devem ser postados três vídeos, sendo dois sobre o conteúdo e um contendo resolução de exercícios. Além desses disponibilizamos mais um vídeo explicando o cálculo de determinantes de matriz de ordem 3, caso o aluno necessite relembrar esse assunto ele terá acesso ao vídeo com explanação desse conteúdo. Segue abaixo descrição dos vídeos postados:

- https://youtu.be/Ao5RgKNDS9g;
- https://youtu.be/erix7MI05oc;
- https://youtu.be/SKWjlfx_ags;
- https://youtu.be/GRH9GT9rEcY.

Quanto ao conteúdo de Coeficiente Angular da Reta cujo objetivo é conhecer o ângulo de inclinação e determinar o coeficiente angular da reta, informar aos discentes que em relação ao eixo x a reta r forma um ângulo que indicamos por α, denominado ângulo de inclinação da reta. O ângulo α é considerado no sentido anti-horário, sendo $0° \leq \alpha < 180°$. Prosseguir informando que o coeficiente angular ou a declividade dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, ou seja

$$m = \tan \alpha.$$

Mostrar aos alunos os 4 casos possíveis:

1º Caso: $\alpha = 0°$. Concluir que para $\alpha = 0° \Rightarrow m = 0$.

2º Caso: $0° < \alpha < 90°$. Concluir que para $0° < \alpha < 90° \Rightarrow m > 0$.

3º Caso: $90° < \alpha < 180°$. Concluir que para $90° < \alpha < 180° \Rightarrow m < 0$.

4º Caso: $\alpha = 90°$. Concluir que para $\alpha = 90°$, a tangente não é definida, ou seja, quando a reta é vertical, ela não tem declividade.

Informar que é possível também calcular o coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos. Como para $\alpha = 0°$ (reta horizontal) a declividade é 0 e para $\alpha = 90°$ (reta vertical) não há declividade, temos que analisar apenas os casos de $0° < \alpha < 90°$ e $90° < \alpha < 180°$. Nesses dois casos utilizando a definição de tangente concluir que

$$m = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}.$$

Foram inseridos na plataforma três vídeos com detalhamento do assunto, conforme links disponbilizados abaixo:

- https://youtu.be/HqXbIytemcw;

- https://youtu.be/J82U5Z46wQQ;
- https://youtu.be/E9C_0g1v1Lg.

Semana 05: Nesta semana serão abordados os conteúdos de Equação Reduzida e Equação Geral da Reta. Essas aulas também serão expositivas e dialogadas com a participação ativa dos alunos. Na sala de aula virtual constará vídeos com explanação desse conteúdo, bem como a resolução de exercícios.

Em relação ao assunto de Equação da Reta, informar aos alunos que é possível associar a cada reta uma equação, denominada equação da reta. Mostrar como determinar essa equação, conhecidos um ponto $A(x_0, y_0)$ dessa reta no plano cartesiano e o coeficiente angular m, concluindo que a equação da reta é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Dando prosseguimento, informar aos discentes que por meio da equação da reta deduzida anteriormente e considerando o ponto pertencente à reta r que intersecta o eixo y, ou seja, um ponto de coordenadas $(0, n)$, podemos determinar a Equação Reduzida da Reta

$$y = mx + n.$$

Em seguida informar que a equação reduzida de uma reta não paralela ao eixo y pode ser associada a uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, em que a é a declividade, e b, o termo constante.

Em relação à Equação Geral da Reta, informar aos alunos que podemos escrever para qualquer reta uma equação na forma

$$ax + by + c = 0$$

Onde, a, b e c são os coeficientes, sendo a e b não nulos simultaneamente. E que essa equação denomina-se Equação Geral da Reta.

Foram postados os vídeos abaixo descritos no Google Classroom, contemplando os conteúdos e a resolução de exercícios.

- https://youtu.be/CdzfuQeIGNY;
- https://youtu.be/N4QfzVvgH4Y;
- https://youtu.be/-5y-UTEUzPM;
- https://youtu.be/wh5-np_QCbk;
- https://youtu.be/oz5FtYmX8Nk;

- https://youtu.be/806_i_Nctrc;
- https://youtu.be/TkXdBk5J0FY.

Finalizando esse conteúdo será disponibilizada uma Atividade Avaliativa criada no Google Formulários, contemplando todos os conteúdos das Semanas 04 e 05. Ressaltamos que nas semanas 04 e 05 não foram implementadas Sequências Didáticas, realizamos aulas expositivas e dialogadas e trouxemos todo conteúdo explanado para a Sala de Aula Virtual criada na plataforma Google Classroom.

O professor poderá dar prosseguimento a Sala de Aula Virtual, inserindo os materiais referente às próximas aulas. Dessa forma a turma terá a sua disposição, durante todo ano letivo, uma outra fonte de estudo onde poderá aprimorar cada vez mais seus conhecimentos matemáticos e consequentemente obter um resultado satisfatório nas provas internas, no ENEM, além de apresentar um melhor desempenho nas avaliações nacionais.

6 Conclusão

Nesta Dissertação, trouxemos algumas propostas de utilização de ferramentas tecnológicas com o objetivo de despertar o interesse do estudante no processo de ensino-aprendizagem da Matemática,em especial da Geometri Analítica. Entendemos que as tecnologias digitais quando utilizadas de forma correta, tendem a tornar a forma de aprender um processo dinâmico, pois os alunos da atualidade nasceram imersos numa era tecnológica. Com isso, acreditamos que utilizando metodologias de ensino que sejam atrativas para o aluno, faremos com que ele tenha uma postura mais ativa, se apropriando dos saberes e tornando-o responsável pela construção do seu próprio conhecimento. Nesse aspecto, entendemos que o discente terá uma visão Matemática significativa, desmistificando assim a ideia de que a Matemática é uma disciplina difícil e de que ela não tem uma aplicabilidade em seu dia a dia.

Ao iniciarmos este trabalho, um dos objetivos seria aplicar as Sequências Didáticas propostas numa turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública, utilizando as ferramentas tecnológicas elencadas nesse estudo. Não foi possível a aplicação dessas sequências, pois conforme Decreto nº 19.529 de 16 de março de 2020, publicado no Diário Oficial do Estado em 17 de março de 2020, as aulas foram suspensas a partir desta data, devido a pandemia de Coronavírus. Uma perpesctiva futura para esse trabalho é a aplicação das Sequências Didáticas e a implantação da Sala de Aula Virtual. Para analisar a eficácia do uso dessas tecnologias, pensamos em comparar duas turmas de uma mesma série na qual em uma utilizaríamos as sequências propostas nesse trabalho e na outra não. Ao final, iríamos fazer um comparativo da aprendizagem das turmas para verificar se a classe a qual foram utilizadas as tecnologias digitais, teve ou não, um aproveitamento maior do que a que não as utilizou.

Covém salientar, que é de suma importância que o poder público estruturem as escolas da rede pública tecnologicamente, para que a utilização dessas ferramentas aconteçam de forma estruturada, sem os grandes desafios que são encontrados em algumas unidades escolares. Na atualidade a rede estadual de ensino na Bahia enfrenta alguns problemas tais como: falta de laboratórios de informática, equipamentos quebrados ou obsoletos, equipamentos em quantidade insuficiente, dentre outros. Nesse estudo foi possível desenvolver uma proposta de trabalho utilizando as tecnologias digitais numa escola onde não tem laboratório de informática. As Sequências Didáticas foram pensadas para serem desenvolvidas na sala de vídeo da escola, onde os alunos utilizariam os *chromebooks* já disponíveis na instituição.

Esperamos que esta pesquisa possa contribuir com a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Matemática e que as tecnologias digitais utilizadas sirvam como instrumentos pedagógicos eficientes para tornar as aulas mais atrativas e despertar, nos educandos, o interesse pela disciplina. Além disso, desejamos que todo material aqui apresentado sirva como fonte de inspiração para outros professores.

Referências

ALMEIDA, M. E. B. *Prática pedagógica e formação de professores com projetos: Articulação entre conhecimentos, tecnologias e mídias*. [S.l.]: Boletim do Salto para o Futuro. Série Pedagogia de Projetos e Integração de Mídias, TV-ESCOLASEEDMEC, 2003. Citado na página 24.

BACICH, L.; TANZI, A.; TREVISANI, F. d. M. *Ensino Híbrido: Personalização e tecnologia na educação*. Porto Alegre: Editora Penso, 2015. Citado na página 39.

BELLONNI, M. L. *Educação à Distância*. Campinas: Editora Autores Associados, 2003. Citado na página 21.

BETTEGA, M. H. S. *Educação Continuada na era digital*. São Paulo: 2 Ed. Editora Cortez, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 24.

BLACKBOARD. *Site Blackboard*. 2020. Disponível em: <https://blackboard.grupoa.com.br/>. Acesso em: abril 2020. Citado na página 29.

BRASIL, C. . *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB*. Brasília: [s.n.], 1996. Citado na página 22.

BRASIL, M. d. E. *Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN*. Brasília: [s.n.], 1998. Citado 3 vezes nas páginas 22, 36 e 41.

BRASIL, M. d. E. *Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN Bases Legais*. Brasília: [s.n.], 2000. Citado na página 23.

BRASIL, M. d. E. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: [s.n.], 2013. Citado na página 35.

BRASIL, M. d. E. *Base Nacional Curricular Comum - BNCC: Educação é a Base*. Brasília: [s.n.], 2018. Citado 4 vezes nas páginas 17, 20, 36 e 42.

BRASIL, M. d. E. *PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SFR, s/a. Citado na página 35.

CARVALHO, R. *As Tecnologias no Cotidiano Escolar: Possibilidades de Articular o Trabalho Pedagógico aos Recursos Tecnológicos*. 2012. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1442-8.pdf>. Acesso em: fevereiro de 2020. Citado na página 25.

CBT. *CBT Recursos Educacionais*. 2020. Disponível em: <https://sites.google.com/site/cbtrecursoseducacionais/home/recursos-educacionais/classe-digital/schoology>. Acesso em: dezembro de 2020. Citado na página 30.

CHRISTENSEN, C.; HORN, M.; STAKER, H. *Ensino Híbrido: uma Inovação Disruptiva? uma introdução à teoria dos híbridos*. [S.l.]: Clayton Christensen Institute for Disruptive Innovation. Tradução Fundação Lemann e Instituto Península, 2013. Citado na página 37.

CLASSROOM, G. *Site CNSD*. 2020. Disponível em: <https://www.cnsd.org.br/google-classroom/>. Acesso em: abril 2020. Citado na página 31.

DANTE, L. R. *Matemática Dante*. São Paulo: Editora Ática, 1ª Edição, Volume Único, Ensino Médio, 2009. Citado na página 45.

EDMODO. *Site Edmodo*. 2020. Disponível em: <https://emergingedtechtools.wordpress.com/edmodo/>. Acesso em: abril 2020. Citado na página 28.

EDMODO. *Site Edmodo*. 2020. Disponível em: <https://www.edmodo.com>. Acesso em: dezembro de 2020. Citado na página 28.

EDUCA+BRASIL. *Site EDUCA+BRASIL*. 2020. Disponível em: <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/coeficiente-angular>. Acesso em: maio de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.

ESTUDIO. *Estudio Site*. 2020. Disponível em: <https://www.estudiosite.com.br/site/educacao-a-distancia/quais-sao-os-meios-virtuais-utilizados-por-ead>. Acesso em: dezembro de 2020. Citado na página 29.

ESTUDIO, S. *História do Moodle*. 2020. Disponível em: <https://www.estudiosite.com.br/site/moodle/historia-do-moodle>. Acesso em: dezembro de 2020. Citado na página 26.

EXATAS, C. *Site Central EXATAS*. 2020. Disponível em: <https://www.centralexatas.com.br/matematica/geometria-analitica-estudo-do-ponto/473912>. Acesso em: maio de 2020. Citado na página 61.

FATEC, F. d. A. a. T. *Vestibular FATEC 2013.1*. 2013. Disponível em: <https://www.vestibularfatec.com.br/download/prova_ant/81-prova.pdf>. Acesso em: novembro de 2020. Citado na página 123.

GARCIA, M. F. *Novas Competências Docentes frente às Tecnologias Digitais Interativas*. Campinas –SP: Publicado na Rev. Teoria e Prática da Educação, v. 14, n. 1, p. 79-87, 2011. Citado na página 20.

GEOGEBRA. *Site Geogebra*. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em: dezembro de 2020. Citado na página 44.

GOUVEIA, R. *Plano Cartesiano. Site Toda Matéria*. 2020. Disponível em: <www.todamateria.com.br/plano-cartesiano/>. Acesso em: maio de 2020. Citado na página 48.

HORN, M.; STAKER, H. *Blended: Usando a Inovação Disruptiva para Aprimorar a Educação*. Porto Alegre: Editora Penso, 2015. Citado na página 38.

IBGE. *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística*. 2018. Disponível em: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101705_informativo.pdf>. Acesso em: março de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.

IEZZI, G. *et al. Matemática Ciência e Aplicações*. São Paulo: Editora Saraiva, 6ª Edição, Volume 3, Ensino Médio, 2010. Citado na página 45.

INEP. *Site Portal do Inep*. 2020. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: maio de 2020. Citado 7 vezes nas páginas 50, 58, 72, 79, 121, 124 e 128.

INEP, P. *Site Portal do Inep*. 2020. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb/resultados>. Acesso em: março 2020. Citado na página 34.

KHAN, S. *Um mundo, uma escola: a educação reinventada*. Rio de Janeiro: Tradução George Schlesinger. Editora Intrínseca, 2013. Citado na página 43.

KILHIAN, K. *Distância Entre Dois Pontos No Plano. O Baricentro da Mente. Publicado por Kleber Kilhian em 11/06/2013*. 2020. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2013/06/distancia-entre-dois-pontos-no-plano.html>. Acesso em: maio de 2020. Citado 3 vezes nas páginas 53, 54 e 56.

MOODLE. *Site Moodle*. 2020. Disponível em: <https://moodle.org/>. Acesso em: abril 2020. Citado na página 27.

MORAN, J. M. *Revista Comunicação e Educacão*. São Paulo: 2ª ed., Editora USP, p. 27-35., 1995. Citado na página 41.

OLIMPÉDIA. *Site Olimpédia*. 2020. Disponível em: <https://olimpedia.fandom.com/pt-br/wiki/Baricentro>. Acesso em: maio de 2020. Citado na página 65.

OLIVEIRA, S. A. *O lúdico como motivação nas aulas de Matemática*. [S.l.]: Artigo publicado na edição nº 377. Jornal Mundo Jovem, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

OTOBELI, E. *BlogSpot*. 2020. Disponível em: <http://profeeli7.blogspot.com/2017/02/aula-1.html>. Acesso em: outubro de 2020. Citado na página 119.

PAIVA, M. *Matemática Paiva*. São Paulo: Editora Moderna, 3ª Edição, Volume 3, Ensino Médio, 2015. Citado na página 45.

PELEGRINO, C. A. R. *A Formação do Professor frente às Novas Tecnologias de Comunicação e Informação presentes num mundo globalizado*. Cachoeiro de Itapemirim - ES: Publicado em Cadernos Camilliani, v. 14, n. 3, p. 304-311, 2013. Citado na página 19.

PEREIRA, B. T. *O uso das tecnologias da informação e comunicação na prática pedagógica da escola*. 2010. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1381-8>. Acesso em: fevereiro de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

PLANEJATIVO. *Site Planejativo*. 2020. Disponível em: <https://app.planejativo.com/q/29999/matematica-2/estudo-da-reta>. Acesso em: maio de 2020. Citado 3 vezes nas páginas 85, 86 e 130.

PUC, R. *O uso do software educativo GeoGebra no estudo de Geometria Analítica*. 2020. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/viewFile/24003/18244>. Acesso em: junho de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 64.

QEDU. *QEdu Brasil*. 2018. Disponível em: <https://www.qedu.org.br/brasil/censo-escolar?year=2018&dependence=0&localization=0&education_stage=0&item=>. Acesso em: março de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.

RAMOS, M. D. *Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes e de Fermat*. Porto: [s.n.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

RIGONATTO, M. *Condição de Alinhamento de Três Pontos do Plano; Brasil Escola*. 2020. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/condicao-alinhamento-tres-pontos-plano.htm>. Acesso em: maio de 2020. Citado na página 70.

SANCHO, J. M. *Para uma Tecnologia Educacional*. Porto Alegre: Artmed (Tradução Beatriz Afonso Neves, 1998. Citado na página 25.

SANTANA, G. *Plano cartesiano. Todo Estudo*. 2020. Disponível em: <https://www.todoestudo.com.br/matematica/plano-cartesiano>. Acesso em: outubro de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

SCHOOLOGY. *Site Schoology*. 2020. Disponível em: <https://app.schoology.com/login>. Acesso em: abril 2020. Citado na página 30.

SERAFIM, F. M. C. M.; SOUSA, R. P. *Tecnologias Digitais na Educação*. Campina Grande: eduepb, 2011. Citado na página 42.

SILVA, A. S. *A tecnologia como nova prática pedagógica*. Vila Velha: Escola Superior Aberta do Brasil – ESAB. Curso de Pós-graduação Lato Sensu em Supervisão Escolar, 2011. Citado na página 36.

SILVA, M. *Tecnologias na escola - Internet na escola e inclusão*. Belo Horizonte: http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/2sf.pdf, 2004. Citado na página 21.

SILVA, M. N. P. d. *Cálculo do coeficiente angular de uma reta; Brasil Escola*. 2020. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/calculo-coeficiente-angular-uma-reta.htm>. Acesso em: maio de 2020. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 80.

SLIDEPLAYER. *Site SlidePlayer*. 2020. Disponível em: <https://slideplayer.com.br/slide/16711239>. Acesso em: maio de 2020. Citado na página 66.

SOUZA, J.; GARCIA, J. *Contato Matemática 3*. São Paulo: Editora FTD, 1ª Edição, Volume 3, Ensino Médio, 2016. Citado na página 45.

TECNOLOGIAS. *Tecnologias Educacionais na Prática*. 2020. Disponível em: <https://tecnologiasnapratica.com.br/2018/03/16/sala-de-aula-invertida-uma-possibilidade-de-aplicacao-na-pratica/>. Acesso em: dezembro de 2020. Citado na página 31.

UFRGS, I. d. M. *Site Instituto de Matemática - UFRGS*. 2020. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/matematicao/assessorias/2011/oem3_111/Listas/lista.11.pdf>. Acesso em: julho de 2020. Citado na página 122.

VALENTE, J. A. *As tecnologias digitais e os diferentes letramentos*. Porto Alegre: Revista Pátio, v. 11, n.44., 2008. Citado na página 24.

VERGARA, A. C. E. *Como Significar a Aprendizagem de Matemática Utilizando os Modelos de Ensino Híbrido*. [S.l.]: Revista Thema, Volume 15 , Nº 3, Pág. 885 a 904, 2018. Citado na página 37.

YESMÁTICA. *Site YESMÁTICA*. 2020. Disponível em: <https://sites.google.com/site/yesmatica/3-ano/geometria-analtica/reta/aula-03>. Acesso em: maio de 2020. Citado na página 61.

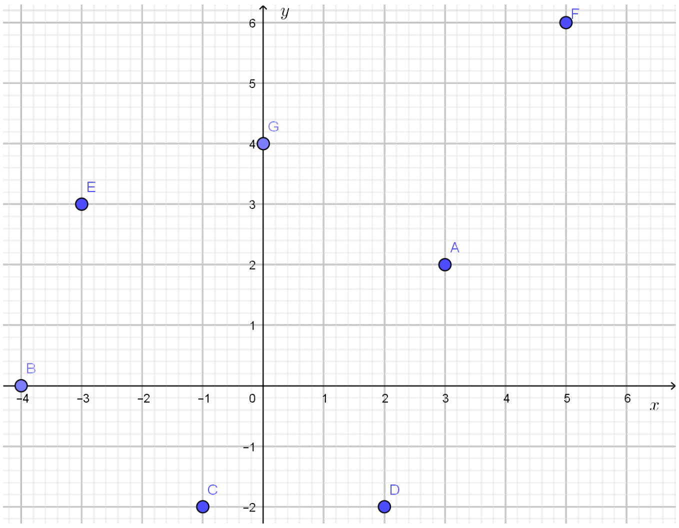
Apêndices

APÊNDICE A – Atividades

Lista de Exercício Nº 01

Questão 1 - Determine as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano, conforme Figura 50.

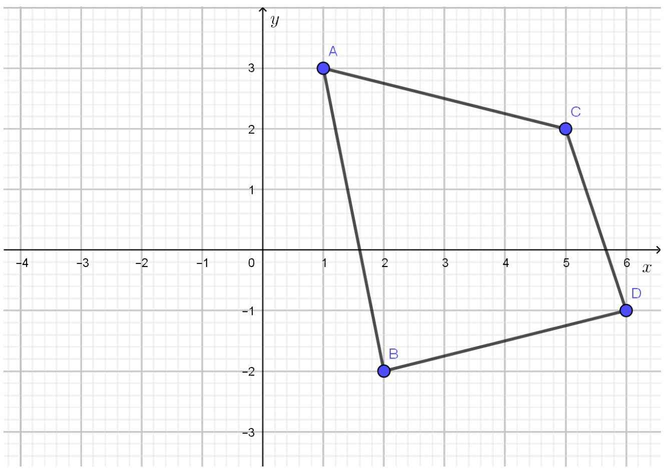
Figura 50 – Pontos no Plano Cartesiano.



Fonte: O Autor (2020).

Questão 2 – Observe o quadrilátero $ABCD$ representado no plano cartesiano, de acordo com a Figura 51.

Figura 51 – Quadrilátero.



Fonte: O Autor (2020).

a) Quais as coordenadas dos vértices desse quadrilátero?

b) Escreva as coordenadas de três pontos internos ao quadrilátero.

Questão 3 – Determine o sinal do produto entre as coordenadas de um ponto pertencente ao:

a) 1º Quadrante

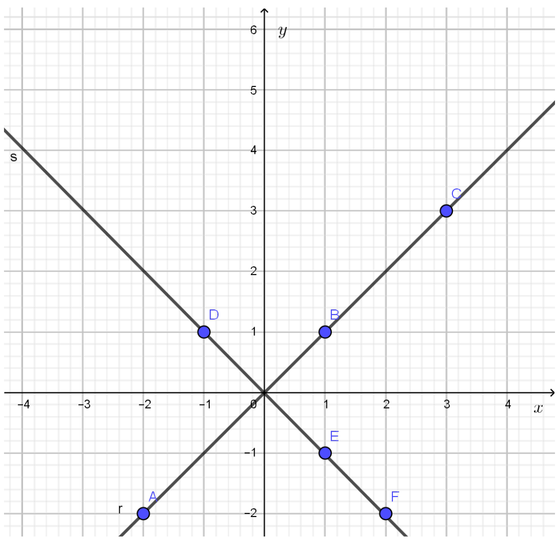
b) 2º Quadrante

c) 3º Quadrante

d) 4º Quadrante

Questão 4 – As retas r e s são respectivamente, a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes e do 2º e do 4º quadrantes, conforme Figura 52 . Considerando os pontos $P(7, y)$ e $Q(x, 9)$, determine x e y para que P pertença à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes e Q pertença à bissetriz do 2º e do 4º quadrantes.

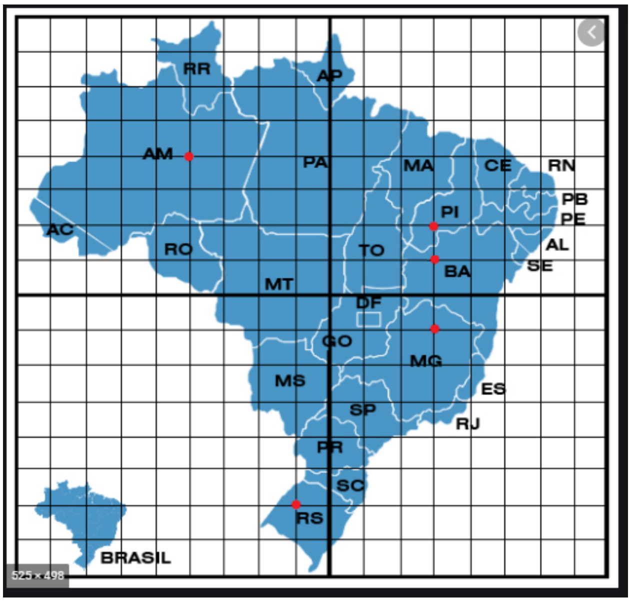
Figura 52 – Bissetriz dos Quadrantes.



Fonte: O Autor (2020).

Atividade - Mapa do Brasil

Figura 53 – Mapa do Brasil.



Fonte: Figura adaptada de OTOBELI (2020).

Observe o mapa do Brasil, Figura 53 e responda as seguintes alternativas:

a) Identifique os eixos das abscissas, das ordenadas e a origem. Em seguida numere os eixos coordenados.

b) Quais estados do mapa estão sendo marcados com um ponto no plano? Informe suas respectivas capitais.

c) Determine as coordenadas dos pontos em destaque. Relacione esses estados e os seus respectivos quadrantes.

d) Estime a localização da cidade de Salvador-BA, informando suas coordenadas.

e) Estime a localização da cidade de Brasília-DF, informando suas coordenadas.

Atividade - Figuras no Plano Cartesiano

Trace um plano cartesiano, escolha um dos itens 1 ou 2, marque e una os pontos descritos no respectivo item, de forma sequencial.

1. $A(1,3)$; $B(3,1)$; $C(9,1)$; $D(11,3)$; $E(6,3)$; $F(6,6)$; $G(5,5)$; $H(6,5)$; $I(6,3)$; $J(1,3)$.
2. $A'(-1,-3)$; $B'(2,-1)$; $C'(5,-3)$; $D'(-1,-3)$; $E'(-1,-6)$; $F'(0,-6)$; $G'(0,-4)$; $H'(1,-4)$; $I'(1,-6)$; $J'(5,-6)$; $K'(5,-3)$.

Em seguida responda as seguintes alternativas, de acordo com o item escolhido:

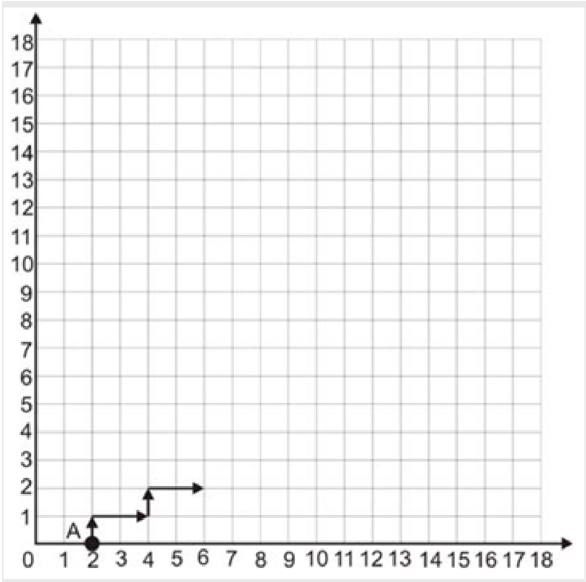
a) Qual a figura formada no item 1? Após marcar quantos pontos você conseguiu identificar a figura? Ela está localizada em quais quadrantes?

b) Qual a figura formada no item 2? Após marcar quantos pontos você conseguiu identificar a figura? Ela está localizada em quais quadrantes?

Atividade Avaliativa Nº 01

Questão 1 - ENEM PPL 2009 - O gráfico (Figura 54) a seguir mostra o início da trajetória de um robô que parte do ponto $A(2, 0)$, movimentando-se para cima ou para direita, com velocidade de uma unidade de comprimento por segundo no plano cartesiano. O gráfico exemplifica uma trajetória desse robô, durante 6 segundos. Supondo que esse robô continue essa mesma trajetória, qual será sua coordenada após 18 segundos de caminhada, contando o tempo a partir do ponto A?

Figura 54 – Questão ENEM PPL 2009.



Fonte: INEP (2020a).

a) $(0, 18)$

b) $(18, 2)$

c) $(18, 0)$

d) $(14, 6)$

e) $(6, 14)$

Questão 2 - ENEM 2016 - Observou-se que todas as formigas de um formigueiro trabalham de maneira ordeira e organizada. Foi feito um experimento com duas formigas e os resultados obtidos foram esboçados em um plano cartesiano no qual os eixos estão graduados em quilômetros. As duas formigas partiram juntas do ponto O, origem do plano cartesiano xOy. Uma delas caminhou horizontalmente para o lado direito, a uma velocidade de 4 km/h. A outra caminhou verticalmente para cima, à velocidade de 3 km/h. Após 2 horas de movimento, quais as coordenadas cartesianas das posições de cada formiga?

a) $(8, 0)$ e $(0, 6)$

b) $(4, 0)$ e $(0, 6)$

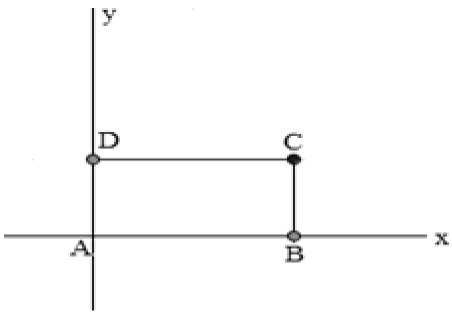
c) $(4, 0)$ e $(0, 3)$

d) $(0, 8)$ e $(6, 0)$

e) $(0, 4)$ e $(3, 0)$

Questão 3 - No retângulo da Figura 55, $\overline{AB} = 2a$ e $\overline{BC} = a$. As coordenadas dos vértices do retângulo são:

Figura 55 – Retângulo.



Fonte: UFRGS (2020).

a) $A(0, 0)$; $B(0, 2a)$; $C(2a, a)$ e $D(a, 0)$

b) $A(0, 0)$; $B(2a, 0)$; $C(2a, a)$ e $D(0, a)$

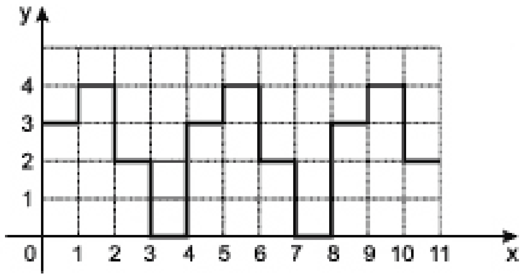
c) $A(0, 0)$; $B(2a, 0)$; $C(a, 2a)$ e $D(0, a)$

d) $A(0, 0)$; $B(2a, 0)$; $C(a, 2a)$ e $D(a, 0)$

e) $A(0, 0)$; $B(0, 2a)$; $C(2a, a)$ e $D(0, a)$

Questão 4 - FATEC 2013 - No plano cartesiano da Figura 56, considere que as escalas nos dois eixos coordenados são iguais e que a unidade de medida linear é 1 cm. Nele, está representada parte de uma linha poligonal que começa no ponto $P(0, 3)$ e, mantendo-se o mesmo padrão termina em um ponto Q.

Figura 56 – Questão FATEC 2013.



Fonte: FATEC (2013).

Na figura, a Iinha poligonal é formada por segmentos de reta:
- que são paralelos aos eixos coordenados e
- cujas extremidades têm coordenadas inteiras não negativas.

Sabendo que o comprimento da linha poligonal, do ponto P até o ponto Q, é igual a 94 cm, as coordenadas do ponto Q são:

a) $(25, 2)$

b) $(28, 1)$

c) $(32, 1)$

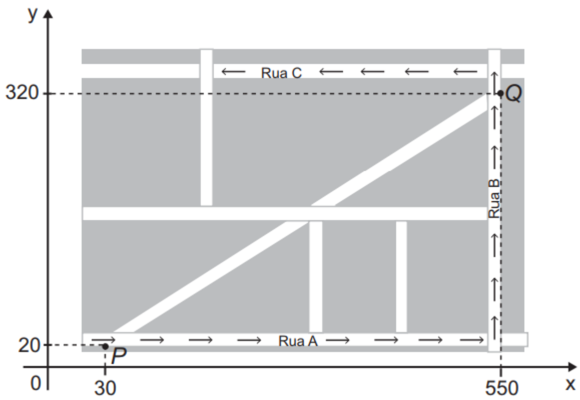
d) $(33, 1)$

e) $(34, 2)$

Atividade Avaliativa Nº 02

Questão 1 - ENEM 2015 - Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A Figura 57 mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.

Figura 57 – Questão ENEM 2015.



Fonte: INEP (2020a).

Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais. De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são:

a) $(290, 20)$

b) $(410, 0)$

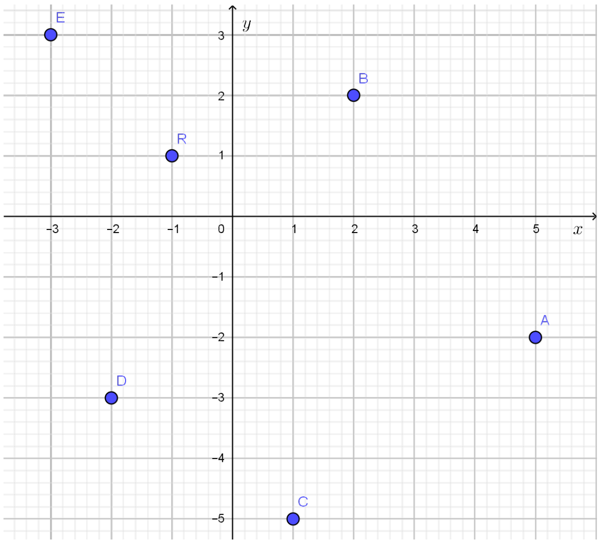
c) $(410, 20)$

d) $(440, 0)$

e) $(440, 20)$

Questão 2 - Observe o esquema que representa a localização das cidades A, B, C, D e E, de uma antena de transmissão de sinal de rádio, R, conforme Figura 58.

Figura 58 – Localização de Cidades.



Fonte: O Autor (2020).

Sabendo que o raio de transmissão dessa antena é de 220km, e que cada unidade representada no esquema corresponde a 50km, quais cidades recebem o sinal transmitido?

a) A, B, C, D e E

b) A, B, D e E

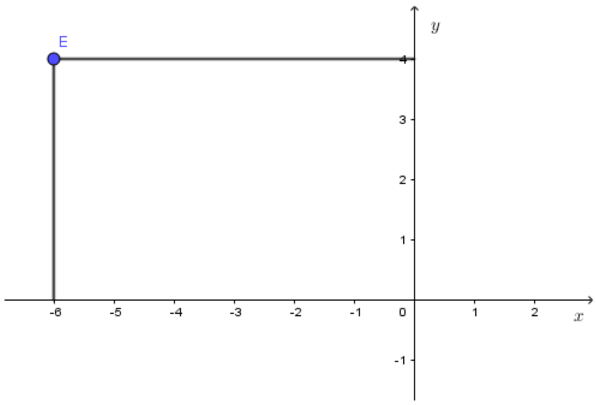
c) B, D e E

d) A, B, e E

e) B e E.

Questão 3 - Ao mapa de uma região plana foi associado um sistema cartesiano de coordenadas, cuja unidade adotada em cada eixo é o quilômetro, conforme mostra a figura a seguir. O ponto E representa uma empresa de entregas, que se comunica com seus motoboys via rádio, cujo alcance é de 23 km, conforme Figura 59.

Figura 59 – Empresa de entregas.



Fonte: O Autor (2020).

a) A empresa conseguirá se comunicar com o motoboy via rádio, quando ele estiver no ponto $P(6, -12)$? Por quê?

b) A empresa conseguirá se comunicar com o motoboy via rádio, quando ele estiver no ponto $M(14, 16)$? Por quê?

Questão 4 - UEL - Seja $\overline{AC}$ uma diagonal do quadrado $ABCD$. Se $A = (-2, 3)$ e $C = (0, 5)$, a área do quadrado $ABCD$ em unidades de área é:

a) 4

b) $4\sqrt{2}$

c) 8

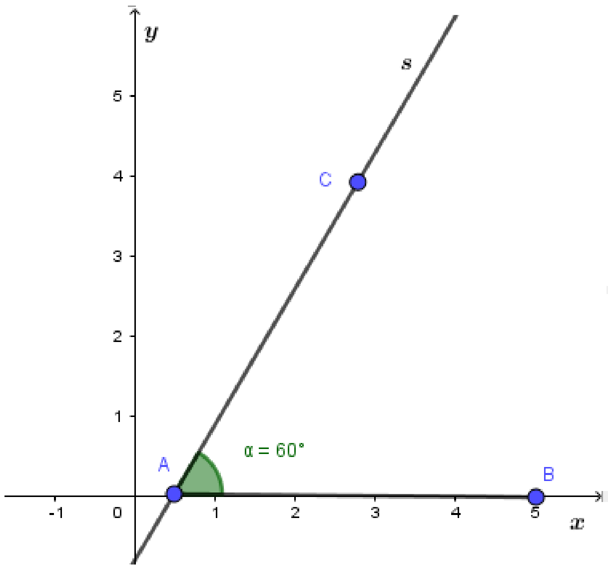
d) $8\sqrt{2}$

e) 16

Atividade Avaliativa Nº 03

Questão 1 - O coeficiente angular da reta s descrita na Figura 60 é:

Figura 60 – Ângulo de 60.



Fonte: O Autor (2020).

a) 1

b) $\sqrt{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\dfrac{1}{2}$

Questão 2 - Qual o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(-2, 3)$ e $B(-4, -1)$.

a) 2

b) -2

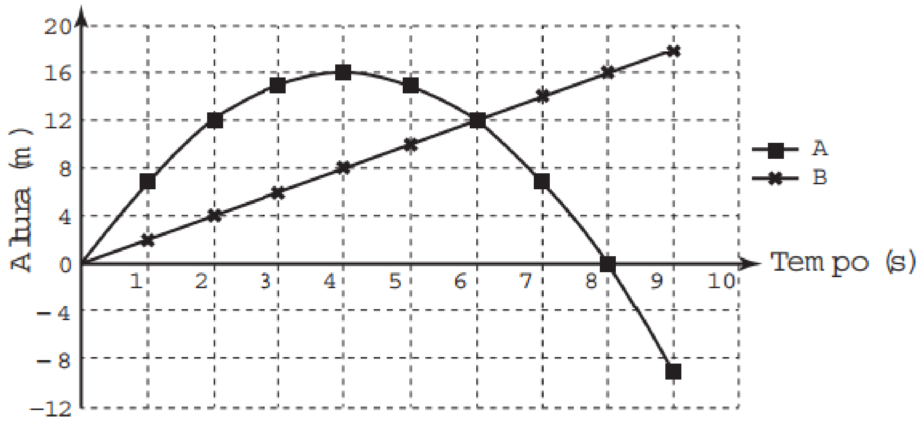
c) $\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{-1}{2}$

e) 1

Questão 3 - Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico (Figura 61) mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

Figura 61 – Questão ENEM 2016.



Fonte: INEP (2020a).

Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado. Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá:

a) diminuir em 2 unidades.

b) diminuir em 4 unidades.

c) aumentar em 2 unidades.

d) aumentar em 4 unidades.

e) aumentar em 8 unidades.

Questão 4 - A equação de uma reta que passa pelo ponto A (- 1, 4) e tem coeficiente angular m = 2 é dada por:

a) $2x + y + 6 = 0$

b) $2x - y + 6 = 0$

c) $-2x - y + 6 = 0$

d) $2x - y - 6 = 0$

e) $2x + y - 6 = 0$

Questão 5 - Determinar a equação reduzida da reta que passa pelo ponto A (2, -3) e tem declividade igual a 4.

a) $y = 4x - 5$

b) $y = 4x + 5$

c) $y = 4x - 11$

d) $y = 4x + 11$

e) $y = -4x - 11$

Questão 6 - (Aeronáutica - 2015) A equação reduzida da reta que passa pelos pontos $A(0, 1)$ e $B(6, 8)$ é dada por:

a) $y = 7x + 1$

b) $y = 6x + 1$

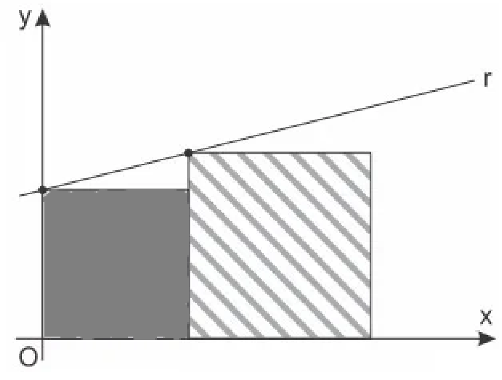
c) $y = \frac{7}{6}x + 1$

d) $y = \frac{6}{7}x + 1$

e) Nenhuma das alternativas anteriores

Questão 7 - (UFPR - 2012) Na Figura 62 a seguir, estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação geral da reta r é:

Figura 62 – Questão UFPR - 2012.



Fonte: PLANEJATIVO (2020).

a) $x - 2y + 4 = 0$

b) $4x - 9y = 0$

c) $2x + 3y + 1 = 0$

d) $x + y - 3 = 0$

e) $2x - y - 3 = 0$