

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O NÚMERO DE EULER E SUAS APLICAÇÕES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

OSVANIL ROQUE DE PAULA JUNIOR

**CRUZ DAS ALMAS, BA
2020**

UNIVERSIDADE FEDERAL RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O NÚMERO DE EULER E SUAS APLICAÇÕES

OSVANIL ROQUE DE PAULA JUNIOR

Dissertação de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Anderson Reis da Cruz, Dr.

CRUZ DAS ALMAS, BA
2020

JUNIOR, O.R.P

O NÚMERO DE EULER E SUAS APLICAÇÕES / OSVANIL ROQUE
DE PAULA JUNIOR. -- 2020.

89 f.

Orientador: Anderson Reis da Cruz, Dr.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal
do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e
Tecnológicas, Mestrado profissional em matemática, Cruz
das Almas, BR-BA, 2020.

Cálculo, logaritmos, ensino básico. I. Cruz, A.
R., orient. II. Título.

O NÚMERO DE EULER E APLICAÇÕES

OSVANIL ROQUE DE PAULA JÚNIOR

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e Sociedade Brasileira de Matemática como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, recomendada para aprovação em 11/12/2020.

Banca Examinadora:



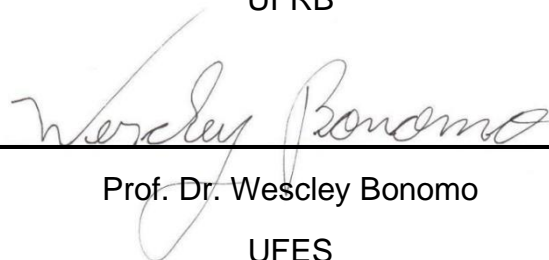
Prof. Dr. Anderson Reis da Cruz

UFRB



Prof. Dr. Antonio Andrade do Espírito Santo

UFRB



Prof. Dr. Wescley Bonomo

UFES

Agradecimentos

Agradeço a Olodumaré (O Criador) pelo sopro da vida que concedeu.

A meus pais e à toda minha família que estiveram sempre acreditando em mim e me apoiando sempre que precisei. Agradeço em especial a duas mulheres, minha mãe Nadira e minha amiga, companheira e cúmplice Maiara, sem elas esse trabalho não teriam o melhor sabor.

Ao meu orientador Prof. Dr. Anderson Reis da Cruz que imediatamente aceitou a construção desse trabalho, me encorajou e a partir daí me deu incentivo e concedeu referências para essa confecção.

A todos os meus professores que funcionaram como peças importantes para aquisição do conhecimento acadêmico e de vida.

Aos colegas, amados colegas que juntos mostramos que a união é o grande segredo do sucesso.

A todos que fortaleceram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho e que por ventura deixei de citar.

Epígrafe

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.

(Albert Einstein)

Resumo

As razões desse trabalho estão pautadas nas diversas aplicabilidades que o número de Euler passou a ter com o desenvolvimento dos estudos do cálculo de limites de funções e aos diversos usos em outros ramos de conhecimentos, como na física, na biologia, na química e até mesmo na geografia. Pelo que se tem de relato, o mais provável que o uso desse número tem suas origens veiculadas no estudo dos logaritmos, com John Napier (1550-1617), e juros compostos, assuntos inseridos na vida dos estudantes ainda no ensino médio e fundamental, respectivamente. As curvas de crescimento populacional, que ajuda a prever quanto as tendências de crescimento de uma determinada população, são exemplos de aplicações do número de Euler na geografia. Este trabalho está organizado em: Um resumo histórico da vivência acadêmica de Euler, um histórico sobre a criação do número atribuído a ele, algumas das suas definições e as diversas formas algébricas que ele se apresenta, suas aplicações em outras áreas de conhecimento além da matemática e uma sequência didática, mostrando como esse estudo poderia ser inserido na vida dos alunos do ensino básico.

Palavras-chave: Cálculo, logaritmos, ensino básico.

Abstract

The reasons for this work are based on the different applicability that the Euler number started to have with the development of studies on the calculation of function limits and the different uses in other branches of knowledge, such as in physics, biology, chemistry and even in geography. From what has been reported, the most likely that the use of this number has its origins in the study of logarithms, with John Napier (1550-1617), and compound interest, issues inserted in the lives of students still in high school and elementary school, respectively. Population growth curves, which help to predict how much a population's growth trends are, are examples of the applications of the Euler number in geography. This work is organized in: A historical summary of Euler's academic experience, a history about the creation of the number assigned to him, some of your settings and the different algebraic forms he presents, its applications in other areas of knowledge besides mathematics and a didactic sequence, showing how this study could be inserted in the lives of elementary school students.

keywords: Calculation, logarithms, basic education.

Sumário

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Símbolos	xv
Introdução	1
1 O número de Euler	5
1.1 Matemática Financeira	6
1.2 Logaritmos de Napier	14
1.3 O número de Euler como limite de raízes n -ésimas	16
1.4 Irrracionalidade do número de Euler	18
2 Funções exponenciais e Logarítmicas	21
2.1 Potências com Expoente Real	21
2.1.1 Potências com Expoente Natural	22
2.1.2 Potência de Expoente Inteiro	23
2.1.3 Potência de um Número Racional	24
2.2 Funções Exponenciais e as progressões	27
2.3 Os logaritmos e as Funções Logarítmicas	29
2.4 Logaritmos Naturais e a Função Exponencial de Base e	33
2.5 A espiral logarítmica e o problema da catenária	36
3 A modelagem Matemática e o Número de Euler	39
3.1 A importância da modelagem matemática	39
3.2 O número de Euler na modelagem matemática	41
3.3 Equação Logística	43
3.4 Problema da mistura	47
3.5 Propagação da podridão em maçãs	48
3.6 A criminalidade no ABCD paulista	52
3.7 O número de Euler na probabilidade	54
4 O número de Euler na educação básica	57
5 Considerações finais	67

Referências Bibliográficas	69
A Axiomas de Peano e Módulo de um número real	71
A.1 Axiomas de Peano	71
A.2 Módulo de um número real	72
B Sequências e limite de funções	75
B.1 Sequências Numéricas	75
B.1.1 Progressões Aritméticas (PA)	79
B.1.2 Progressões Geométricas (PG)	80
B.2 Limite de uma função	82
C Derivadas de funções	85
C.1 Noções de derivadas de funções	85

Lista de Figuras

Figura 2.1	área da faixa da hipébole equilátera compreendida no intervalo $[1, e]$.	34
Figura 2.2	Gráfico das funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$	36
Figura 3.1	Comparação entre os gráficos da curva exponencial e da curva logística	47
Figura 3.2	Formato do sino, gráfico típico da distribuição de normal	56

Lista de Tabelas

Tabela 1.1	Os valores de $M = (1 + \frac{1}{n})^n$ com até cinco casa decimais, para alguns valores n entre 1 e 10.000.000	11
Tabela 1.2	Valores de $\sum \frac{1}{k!}$ quando n varia de 1 à 7	13
Tabela 1.3	Tabela contendo alguns dos 101 elementos calculados por Napier . .	15
Tabela 3.1	Dados da criminalidade em Diadema entre 1999 e 2007 (homicídios por 100 mil)	53

Introdução

Segundo (NETO, 2015), existe um consenso de que a construção do Cálculo Diferencial e Integral, no fim do século XVII, deve-se ao trabalho de dois grandes estudiosos, o matemático e filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz e o físico e matemático Isaac Newton, apoiados em grandes mentes como Arquimedes, Euclides, Viète, Galileu, Descartes e Fermat, dentre outros. Após Newton e Leibniz, o século seguinte presenciou uma grande quantidade de aplicações e extensões dos métodos de cálculo, tendo como principais expoentes Euler e Lagrange. Porém, o presente trabalho irá se concentrar em algumas contribuições científicas do primeiro, precisamente no número e , batizado com a inicial do nome *Euler*, que aparece atualmente em muitas aplicações e em diversas áreas do conhecimento.

De acordo com (EVES, 2008) e (MOAR, 2008), Euler nasceu na Suíça, em 1707, e está enquadrado como um dos matemáticos que muito contribuiu para essa ciência no século XVIII. Ele galgou por várias áreas do conhecimento, inclusive como assistente na área de fisiologia. Mas, depois de tentar uma carreira no campo da teologia, ele encontrou sua verdadeira vocação pela matemática. Em 1727, foi indicado a membro da Academia de São Petesburgo, na Rússia, ficando por quatro anos até ocupar o cargo máximo da seção de matemática dessa Academia. Depois, aceitou o convite para chefiar a seção de matemática da Academia de Berlim e permaneceu lá por vinte e cinco anos. Por fim, em 1766 retornou a Academia de São Petesburgo, onde ficou por dezesseis anos. Os cálculos e as escritas de Euler não diminuíram com o fato de ele ter criado 13 filhos ou por ele ter ficado completamente cego nos últimos 17 anos de sua vida. Na verdade, quando ficou cego, ditava suas descobertas para seus ajudantes, a partir de sua prodigiosa memória e imaginação.

Ele morreu subitamente em 1783 e deixou o nome na história como um dos mai-

ores matemáticos de todos os tempos, pois seus trabalhos figuram em várias áreas do conhecimento. Entre livros e artigos, publicou centenas de trabalhos e deixou diversos manuscritos que ajudaram a enriquecer as publicações da Academia de São Petesburgo por mais de quatro décadas. As contribuições das suas obras são numerosas, porém vale ressaltar que entre tantas, Euler implantou as notações $f(x)$ para as funções, e para a base dos logaritmos naturais e i para a unidade imaginária dos números complexos $\sqrt{-1}$. Além disso, Euler foi o responsável por provar a irracionalidade de e e defini-lo através de séries.

A partir de uma contextualização histórica do número de Euler, visando uma melhor compreensão por parte dos estudantes, esse trabalho pretende mostrar que esse número tem muitas utilidades e possui várias aplicações em diversos ramos do saber, trazendo alguns conceitos e revelando sua importância na modelagem matemática para resolução de problemas que sirvam como base para o estudo das aplicações das equações e funções exponenciais e logarítmicas, por parte dos alunos da educação básica.

Assim, numa perspectiva de contextualização sócio-cultural dos conteúdos matemáticos, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias já mencionavam que algumas das competências e habilidades que devem ser desenvolvidas em matemática, pelos alunos, é construir a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real e aplicar conhecimentos e métodos de resolução em situações reais, em especial em outras áreas de conhecimento (BRASIL, 1999). Hoje, a nova Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), nos diz que

[...] a matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos [...]. (BRASIL, 2017, p. 265)

Ainda de acordo com os PCN's de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias

[...] a matemática ajuda a estruturar o raciocínio dedutivo, além de ser uma ferramenta para tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.[...] As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e cotidianos são aplicações da Matemática em questão do mundo real[...]. (BRASIL, 1999, p. 90,91)

Na tentativa que essa ferramenta tão importante, que é o número de Euler, seja melhor aproveitada e explorada dentro de uma proposta metodológica de resolução de problemas, esse trabalho foi pensado. Teve como ponto de partida uma atividade de resolução de problemas na disciplina Fundamentos do Cálculo, quando foi estudado os conceitos de séries numéricas e de funções. Com esse intuito, será apresentado no primeiro Capítulo as possíveis definições desse número, partindo das aplicações de matemática financeira até a prova da sua irracionalidade. Já no segundo Capítulo, encontraremos as definições e algumas propriedades das funções exponenciais e logaritmo que irão dar sustentação ao uso do número de Euler. Nesse Capítulo ainda, será apresentado uma relação entre a função exponencial e as progressões aritmética e geométrica e uma abordagem dos logaritmos naturais e as funções exponenciais de base e . No terceiro, veremos como a modelagem matemática é importante na resolução de problemas e o seu uso no ajuste de problemas de variáveis contínuas e iremos apresentar também algumas utilizações do número de Euler em probabilidade. Como abordagem do Capítulo 04, será apresentada uma proposta de sequência didática, para aplicação na Escola Básica, evidenciando as diversas utilidades do número de Euler, em vários ramos do conhecimento e como essas aplicações estão ligadas a vida cotidiana. O quinto e último Capítulo, será dedicado as considerações finais e sugestão para o leitor, para utilização, de maneira contextualizada do número de Euler em resolução de problemas.

Capítulo 1

O número de Euler

No presente capítulo serão apresentadas algumas possibilidades para a definição do número de Euler, tendo como principais bases teóricas em (MOAR, 2008), (LIMA, 2017), (MORGADO, 2015) e (FACCHINI, 2006). Veremos que esse número, representado pela letra e , pode ser apresentado de várias formas, podendo ser definido como o limite da sequência $S_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao infinito, como a série infinita $\sum \frac{1}{k!}$ para $k \geq 0$ e até mesmo como a base dos logaritmos naturais também chamados de *logaritmos neperianos*, fazendo referência a John Napier. Essas formas de representações fizeram esse número possuir grande relevância em vários ramos da matemática, podendo ser verificadas nos estudos da matemática financeira, nos logaritmos, equações diferenciais, nos estudos de cálculo de limites e também na física.

Mas diferente do que o nome sugere, segundo Moar, não se sabe ao certo a origem desse número e nem quem primeiro notou que os valores da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, com $n \in \mathbb{N}$, tendem a um equilíbrio, quando n tende ao infinito, porém o mais provável é que suas origens estejam fincadas no início do século XVII, período em que John Napier (1550-1617) inventou ou descobriu os logaritmos, momento marcado pelo intenso movimento do comércio internacional, quando houve o aparecimento das aplicações financeiras a juros compostos. E por volta de 1683, os juros compostos foram estudados por Jakob Bernoulli (1654-1705), numa tentativa de descobrir qual seria o resultado de uma aplicação financeira cujo os juros fossem creditados em intervalos cada vez menores, juros constantes ao invés de juros discretos. Nessa tarefa, Bernoulli descobriu que os valores obtidos, tendiam a um valor constante quando essa quantidade de intervalos tendiam ao infinito. Porém, aproximadamente 50 anos depois de Bernoulli, Leonhard Euler introduziu a letra e para representar essa constante e desen-

volveu ferramentas para calcular o seu valor encontrando os seus 23 primeiros dígitos.

1.1 Matemática Financeira

Quando falamos em juros estamos nos referindo a uma quantia em dinheiro que deve ser paga por um devedor, pela utilização de dinheiro de um credor (aquele que empresta), chamado Capital (C). Esse pagamento é acrescido de uma parte chamada *juro*. Segundo (MORGADO, 2015) e (FACCHINI, 2006), podemos tecer as seguintes definições:

Definição 1.1.1 *Os Juros, ou Juro, (representado por J) será um valor obtido do capital (C) acordado entre os participantes da operação financeira. No geral, os juros são obtidos a partir de uma porcentagem do capital ao longo de um período de tempo t.*

A partir da definição de juros, podemos observar que outras definições irão surgir, tal como a porcentagem dos juros que incide sobre o capital por um período de tempo, chamado de taxa de juros.

Definição 1.1.2 *A Taxa de Juros (representado por i) será um coeficiente que incidirá sobre o Capital de acordo com um período de tempo.*

Devemos observar que no cálculo dos juros, o período do tempo de aplicação e a taxa percentual devem estar na mesma unidade. Isso quer dizer que, por exemplo se tempo está em *meses* a taxa *i* deve estar aplicada *ao mês (am)*.

Além da taxa de juros, uma definição importante refere-se ao valor acumulado de um Capital Inicial com os juros obtidos, chamado de Montante.

Definição 1.1.3 *Denomina-se Montante (representado por M) a soma do capital (C) e dos juros (J) obtidos que foram acordados na operação financeira e que é devolvido ao final da operação.*

Definição 1.1.4 *Seja um capital inicial que rende um mesmo valor a cada período de tempo constante. Chamaremos de Juros simples a soma de todos esses valores obtidos do capital (C) aplicado a uma taxa (i), ao final de todo o período de tempo determinado (t).*

Definição 1.1.5 *Seja um capital inicial que rende, a cada período de tempo constante, valores dependentes do montante do período anterior. Chamaremos de juros compostos a soma de todos esses valores obtidos do capital (C) aplicado a uma taxa (i), ao final de todo o período de tempo determinado (t).*

Veremos que na primeira forma, que o montante gerado (valor total) numa aplicação financeira de um determinado capital principal C , a um taxa percentual por período i , está relacionada a uma *função afim* crescente de variável t (tempo transcorrido na aplicação). Daí é fácil observar que o valor do montante cresce com um acréscimo constante de $C \cdot i$. Já na capitalização em juros compostos, o montante gerado nesse tipo de aplicação de um determinado capital principal C , a um taxa percentual por período i , está relacionada a uma *função exponencial* crescente de variável t . Isso se deve ao fato de que nos juros simples, o montante é um acréscimo entre o capital aplicado e o valor dos juros sobre esse capital. Nos juros compostos, o valor do montante é um acréscimo entre o capital aplicado e o valor dos juros sobre o montante do período anterior, a partir do segundo período. Assim, basta observar que nos juros compostos, os valores do capital crescem a uma taxa i constante e, dessa maneira, formam uma *progressão geométrica* de razão $(1+i)$.

E é através do regime de capitalização composto, que realizaremos uma primeira abordagem sobre o número de Euler, chegando a uma aproximação deste com cinco casas decimais.

Considere um capital C aplicado a uma taxa percentual por período i , por um período de aplicação t , onde o montante gerado nessa aplicação seja o acréscimo, em cada período, entre o capital aplicado e o valor dos juros sobre esse capital. Dessa forma, o valor do montante M é calculado da seguinte forma durante os t períodos de aplicação:

$$M_1 = C + iC \text{ (é o valor futuro após o 1º período).}$$

$M_2 = C + iC + iC$ (é o valor futuro após o 2º período).

Repetindo esse processo t vezes, obtemos:

$M_t = C + iC + iC + \dots + iC$ (é o valor futuro após o t -ésimo período).

Assim, o cálculo do montante em forma de capitalização simples é expresso por:

$$M = C(1 + it). \quad (1.1)$$

Note que a equação de juros simples $M(t) = C(1 + it)$ está relacionada a uma função afim crescente cujo domínio é \mathbb{R}^+ , definida por um polinômio do 1º grau na variável t e cujo o gráfico é uma reta.

Segundo (LIMA, 2017), uma função $f : \mathbb{D}om(f) \rightarrow \mathbb{R}$ com $\mathbb{D}om(f) \subset \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{D}om(f)$. Então, de $M(t) = C(1 + it)$ obtemos

$$M(t) = C + Cit,$$

onde $a = Ci$ e $b = C$.

Assim teremos uma função com as características de uma função afim $M(t) = at + b$ na variável t .

Agora iremos considerar um capital C aplicado a uma taxa percentual de juros i , por um período de tempo t , onde o montante gerado nessa aplicação seja o acréscimo entre o montante anterior e o valor dos juros sobre esse montante, a partir do segundo período. Dessa forma, o valor do montante M é calculado da seguinte forma durante os t períodos:

$M_1 = C + Ci$ (é o valor futuro após o 1º período).

$M_2 = M_1 + M_1i$ (é o valor futuro após o 2º período).

Suponha que tenhamos $M_t = C(1 + i)^t$. Então

$$M_{t+1} = C(1 + i)^t + C(1 + i)^t i = C(1 + i)^t * (1 + i) = C(1 + i)^{t+1}$$

Dessa forma, o cálculo do montante na forma de capitalização composta é expresso por:

$$M_t = C(1 + i)^t \quad (1.2)$$

A expressão acima é a base para a realização dos cálculos financeiros, aplicando as contas bancárias, empréstimos, hipotecas e anuidades (Maor, 2008, p.43). Através dela, a comunidade bancária aplica vários tipos de composição de taxa de juros (anual, semestral, trimestral, semanal e mesmo diário).

Observe que ela está relacionada a uma *função exponencial* crescente cujo domínio é \mathbb{R}^+ .

Ainda, segundo (Lima, 2017; p.161), uma função $f : \mathbb{D}om(f) \rightarrow \mathbb{R}$ com $\mathbb{D}om(f) \subset \mathbb{R}$ é de *tipo exponencial* quando existem constantes reais a e b tais que $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{D}om(f)$. $M(t) = C(1 + i)^t$ se enquadra nessas características, pois a partir dela obtemos

$$M(t) = ba^t,$$

ao tomarmos $b = C$ e $a = 1 + i$.

Suponhamos que uma aplicação de juros compostos anual fosse feita n vezes ao ano e para cada período usarmos uma taxa de juros anual dividida por n . Como em t anos existem nt períodos de aplicações, um capital C , após t anos renderá

$$M = C \left(1 + \frac{i}{n} \right)^{nt} \quad (1.3)$$

Segundo Maor, isso nos leva a observar que a equação 1.2 é apenas um caso particular da equação 1.3, quando $n=1$. Para abreviar nossa discussão e focar no objetivo que é definirmos o número de Euler, vamos assumir que C e t valem uma unidade, monetária e temporal, respectivamente. Assim veremos que a equação 1.3 se torna

$$M = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (1.4)$$

Assim, podemos investigar o comportamento da equação 1.4 pelos valores crescentes de n naturais maiores ou iguais a 1. Com esses resultados obtidos, é possível

intuir que para qualquer valor de n superior a 10.000.000, as cinco primeiras casas decimais do resultado não são alteradas. A partir daí, as alterações parecem ficar cada vez menos significativas. E esse padrão continua e, não importará o quão elevado seja o valor de n , os valores da equação 1.4 estacionam em algum valor em torno de 2,71828. Esse comportamento foi confirmado por uma cuidadosa análise matemática, como veremos.

Veremos adiante que, conforme escolhermos n suficientemente grande, $(1 + \frac{1}{n})^n$ se aproxima de um número real, que denominaremos número de Euler. Porém, segundo Moar, o mais provável é que suas origens estejam ligadas ao século XVII, com o aparecimento das aplicações dos logaritmos por John Napier (1550 -1617). Nesse período, os matemáticos não detinham o conhecimento de limites, o que leva a crer que o surgimento desse número está ligado ao empirismo, método usado por algumas ciências, como a física e astronomia, que se baseiam em evidências experimentais ou observacionais. Além disso, pelo contexto histórico dessa época levanta-se também a hipótese de que o surgimento desse número também esteja ligado as ações comerciais, já que esse período foi ligado por um enorme crescimento do comércio e das transações internacionais com o uso dos juros compostos.

Faremos agora uma análise da sequência $S_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ com o propósito de determinar o seu limite quando n tende a infinito. Os conceitos básicos de limites de sequências estão descritos no Apêndice B. Facilmente percebemos que $\frac{1}{n}$ se aproxima de zero quando n é suficientemente grande e assim $(1 + \frac{1}{n})$ se aproxima a 1, embora seja sempre maior do que 1. Também, podemos perceber que ao aumentarmos significativamente o valor de n , o valor de $(1 + \frac{1}{n})$ torna-se cada vez mais próximo de 1, apesar de ser maior do que 1 e conseqüentemente não havendo um crescimento significativo de $(1 + \frac{1}{n})^n$, conforme tabela 1.1.

Observemos a tabela abaixo, mostrando a evolução da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ com o aumento dos valores de n .

n	$M = (1 + \frac{1}{n})^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
⋮	⋮
10	2,59374
⋮	⋮
100	2,70481
⋮	⋮

1.000	2,71692
⋮	⋮
10.000	2,71815
⋮	⋮
100.000	2,71827
⋮	⋮
1.000.000	2,71828
⋮	⋮
10.000.000	2,71828

TABELA 1.1. Os valores de $M = (1 + \frac{1}{n})^n$ com até cinco casa decimais, para alguns valores n entre 1 e 10.000.000

A convergência dessa sequência é garantida pelo seguinte teorema.

Teorema 1.1.6 : *A sequência $(1 + \frac{1}{n})^n$ é convergente.*

Demonstração: *Tomemos como ponto de partida a fórmula binomial de Newton:*

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n \quad (1.5)$$

ou

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Onde $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ em particular

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}.$$

Observe inicialmente que $\frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$, pois

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{n^k(n-k)!} \frac{1}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{n^k(n-k)!} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &< \frac{(n-1)(n-1)\cdots(n-1)}{n^{k-1}} \frac{1}{k!} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Logo, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Agora observe que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j}$, pois

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j}$ é limitada pela soma infinita da PG de razão 1/2 acrescida de 1, a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é monótona e limitada, portanto convergente.

Segundo Moar, a descoberta dessa convergência, foi inicialmente mais uma observação experimental do que uma análise criteriosa matemática. Porém, Jakob Bernoulli foi o primeiro matemático a mostrar uma conexão entre $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e o problema de juros compostos contínuos. Ao expandir a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, de acordo com o teorema binomial, ele mostrou que seu limite deve estar entre 2 e 3. Já o símbolo para esse número só veio surgir com Euler no século seguinte.

Portanto, iremos aqui definir então o número de Euler como o limite da sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Uma outra caracterização do número de Euler pode ser dada pela sequência $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, como apresentamos na seguinte proposição.

Proposição 1.1.1 : O Número de Euler pode ser definido por : $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Demonstração: É suficiente mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$. Na

prova do teorema anterior, fazendo $n \rightarrow \infty$ (mantendo k fixo), $\frac{1}{n}$ tende a zero e portanto $(1 - \frac{1}{n})^{n-k}$ tende a 1.

Dessa forma, obtemos

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

A demonstração acima nos ajuda a tecer ainda a conclusão que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ pertence ao intervalo real $(2, 3)$ e como consequência imediata que função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ é monótona, limitada e portanto convergente.

Na tabela abaixo, apresentamos as sete primeiras somas que determinam o valor do $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ quando substituímos pelos números naturais de 1 a 7:

n	Soma	$\sum \frac{1}{k!}$
1	2	2
2	$2 + \frac{1}{2}$	2,25
3	$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	2,666...
4	$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$	2,708333...
5	$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$	2,71666...
6	$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$	2,7180555...
7	$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040}$	2,718253968...

TABELA 1.2. Valores de $\sum \frac{1}{k!}$ quando n varia de 1 à 7

Observamos na tabela acima, que o rápido crescimento dos denominadores promove uma drástica diminuição nos valores das parcelas dessa soma, de modo que ela converge com muita rapidez. Além disso, usar essa série é mais cômodo para realizar os cálculos do que as potências da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Isso tem um papel fundamental na prova da existência do $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Mais adiante, demonstraremos que esse número se trata de um número irracional. Porém, até o presente momento, apresentamos uma possibilidade de definição do número de Euler. Contudo, mais adiante veremos outras formas como ele pode ser definido ou representado.

1.2 Logaritmos de Napier

Nessa seção apresentaremos o número de Euler a partir dos trabalhos de Napier na construção dos estudos e propriedades dos logaritmos.

Segundo Moar, não se tem um relato sobre como Napier chegou na idéia que resultaria em sua invenção. O que se sabe, é que ele possuía um considerável conhecimento em trigonometria e que sem dúvida tinha um grande domínio da fórmula:

$$\operatorname{sen}A \cdot \operatorname{sen}B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2} \quad (1.6)$$

Esta, e outras semelhantes para $\cos A \cdot \cos B$ e $\operatorname{sen}A \cdot \cos B$, eram chamadas de *regras prostafaréticas*, que em grego significa “adição e subtração”. A importância de fórmulas, como a equação 1.6, está no fato de ser mais simples somar ou subtrair do que multiplicar e dividir. Elas fornecem um sistema primitivo de redução de uma operação aritmética para outra, mais simples. Porém, antes de Napier, o matemático alemão Michael Stifel (1487-1567), em seu livro *Arithmetica integra* (1544), formulou esta redução de uma operação aritmética para outra, mais simples, dando significado às propriedades de potências de mesma base, que conhecemos hoje.

Dados $a \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{Z}$, a potência de a^n é definida como o produto de n fatores iguais a a . Dados $m, n \in \mathbb{Z}$, valem as propriedades:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Porém, enquanto Stifel só usava expoentes inteiros, Napier desejava estender essa idéia aos números decimais. Para a realização de seu intenso trabalho, ele resolveu utilizar como base das potências um número suficientemente pequeno, de modo que essas potências cresçam de forma lenta. Como o uso dos expoentes fracionários não eram bem conhecido por Napier, ele escolheu o número $1 - 10^{-7}$ ou 0,9999999, que representava a diferença entre o valor do raio de um círculo unitário e sua 10^{-7} parte, já que estava envolvido, nessa época, com os estudos do cálculos trigonométricos.

Após árduos vinte anos, John Napier concluiu seu trabalho obtendo uma tabela contendo 101 elementos com a seguinte sequência:

n	cálculo	valor
0	10^7	10000000
1	$10^7(1 - 10^{-7})$	9999999
2	$10^7(1 - 10^{-7})^2$	9999998
3	$10^7(1 - 10^{-7})^3$	9999997
⋮	⋮	⋮
10	$10^7(1 - 10^{-7})^{10}$	9999990
⋮	⋮	⋮
50	$10^7(1 - 10^{-7})^{50}$	9999990
⋮	⋮	⋮
100	$10^7(1 - 10^{-7})^{100}$	9999900

TABELA 1.3. Tabela contendo alguns dos 101 elementos calculados por Napier

Dessa forma ele produziu uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 10^7 e a razão é $(1 - 10^{-7})$. Ele ainda criou mais duas tabelas, novamente iniciando com 10^7 , mas usando como razão $(1 - 10^{-5})$ com cinquenta e um elementos, cujo último foi $10^7(1 - 10^{-5})^{50} = 9995001$, e a outra com razão 0,9995 com vinte elementos cujo último foi $10^7(0,9995)^{50} = 9900473$. Ainda criou uma quarta tabela de razão 0,99 cujo último elemento valia mais ou menos 4998609. Aos expoentes de 0 à 100 ele chamou inicialmente de “número artificial” e posteriormente de logaritmos, que significa número proporcional. Por exemplo, 50 é logaritmo de 9995001. Assim, utilizando uma notação algébrica, $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$ ou $\log Nap10^7 = L$, onde o expoente L é o logaritmo (neperiano) de N .

Já no século seguinte, Euler apresentou os logaritmos com aspectos diferentes de Napier. Se $N = b^L$, onde b é um número fixo positivo, diferente a 1, então L é o logaritmo de base b de N .

Pelo sistema de Napier, $L = 0$ corresponde a $N = 10^7$ (ou seja, $\log Nap10^7 = 0$), já no sistema proposto por Euler $L = 0$ corresponde a $N = 1$ (ou seja, $\log 1 = 0$). A vantagem da definição de Euler em comparação à definição de Napier é que o logaritmo de Euler tem propriedades aritméticas ($\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ e $\log(x/y) =$

$\log(x) - \log(y)$, com x e y reais positivos) mais consistentes, que não possuem a mesma validade para o logaritmo Napieriano. Essas propriedades podem estar descritas no Capítulo seguinte desse Trabalho. Contudo, o trabalho de Napier foi fundamental ao desenvolvimento das ideias de Euler.

Porém, com seus estudos e a partir da utilização da sua notação algébrica $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, Napier, realmente, só chegou perto de descobrir o número $\frac{1}{e}$, definido como o limite de $(1 - \frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito.

Vimos, que sua definição de logaritmos equivale à equação $N = 10^7(1 - 10)^L$. A partir de algumas manipulações e fazendo mudanças de escala nas variáveis, obtemos a expressão $(1 - 10^{-1})^{10^7} = (1 - \frac{1}{10^7})^{10^7}$, que é um valor aproximado de $\frac{1}{e}$. Isso nos leva a intuir que os logaritmos de Napier são logaritmos de base $\frac{1}{e}$. Porém, não descobriu essa base. Ele não pensava em termos de base, pois o termo base só veio com o surgimento dos logaritmos de base 10, que conhecemos hoje.

1.3 O número de Euler como limite de raízes n-ésimas

Nesta seção, trataremos mais uma definição possível para o número de Euler, através de aproximações por uma sequência de números reais. Tomamos como base (NETO, 2015), onde podem ser consultados mais detalhes. Porém, iniciaremos com a apresentação dos teoremas 1.3.1 e 1.3.2 que servirão de alicerces teóricos para a referida definição.

Para melhor entendimento das ideias, apresentamos aqui algumas propriedades de sequências de números reais. Para um aprofundamento destes tópicos recomendamos a leitura do Apêndice B e (LIMA, 2010).

Teorema 1.3.1 *Sejam as sequências x_n, y_n e z_n . Se $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n natural e $\lim x_n = \lim y_n = a$ então $\lim z_n = a$.*

Demonstração: *Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1$ implica $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $n > n_2$ implica $y_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Pondo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, segue que $n > n_0$ implica $a - \epsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \epsilon$, donde $\lim z_n = a$.*

Exemplo: Seja a um número real positivo e n um número natural maior igual a 1. A sequência a_n dada por $a_n = \sqrt[n]{a}$ satisfaz $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Se $a > 1$, então $a_n > 1$. Escreva $a_n = 1 + b_n$, de modo que $b_n > 0$. Como, pela desigualdade de Bernoulli

$$a = (a_n)^n = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n,$$

que pelo do binômio de Newton, segue que $0 < b_n < 1 + nb_n \leq a$ e daí, pelo teorema 1.3.1, $0 < b_n < \frac{a-1}{n}$. Portanto, como $\lim \frac{a-1}{n}$ converge para zero e $a_n = 1 + b_n$, a_n converge para 1, $\lim a_n^{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Caso, $0 < a < 1$, $a'_n = 1/a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ tende para 1, pois $\sqrt[n]{a}$ tende para 1.

Como consequência do exemplo acima, $\lim \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}} = \lim \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a}} = 1$.

Teorema 1.3.2 *Seja (a_n) uma sequência limitada de números reais positivos. Tem-se*

$$\lim \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim \inf \sqrt[n]{a_n} \leq \lim \sup \sqrt[n]{a_n} \leq \lim \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}. \quad (1.7)$$

Em particular, caso $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ exista, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n}$.

Demonstração: *Basta provar que $\lim \sup \sqrt[n]{a_n} \leq \lim \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.*

Suponha por absurdo que existe um número real c tal que $\lim \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} < c < \lim \sup \sqrt[n]{a_n}$. Da desigualdade 1.7 resulta a existência de $p \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p$ implica $\frac{a_{n+1}}{a_n} < c$. Assim, para todo $n > p$,

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} < c; \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} < c; \dots; \frac{a_n}{a_{n-1}} < c.$$

Multiplicando membro a membro por estas $n - p$ desigualdades, obtém-se

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} < c; \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} < c; \dots; \frac{a_n}{a_{n-1}} < c$$

implicando em $\frac{a_n}{a^p} < c^{n-p}$ ou $a_n = \frac{a^p}{c^p} \cdot c^n$. Pondo $k = \frac{a^p}{c^p}$, podemos afirmar que se $n > p$, então $a_n < k \cdot c^n$. No exemplo após o teorema 1.3.1, vimos que $\lim \sqrt[n]{k} = 1$, logo $\lim c \sqrt[n]{k} = c$. Segue-se então da desigualdade 1.7 que $\lim \sup \sqrt[n]{a_n} \leq \lim \sup \sqrt[n]{k} \cdot c = c$.

Essa contradição prova o Teorema. Isto é, concluímos que $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

E analogamente, pode-se provar que $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n}$.

Usaremos os resultados acima para provar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Teorema 1.3.3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Demonstração: Escrevendo $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ e denotando $y_n = \frac{n^n}{n!}$, isto é, $x_n = \sqrt[n]{y_n}$.

Agora, do teorema 1.3.2, $\lim \sqrt[n]{y_n} = \lim \frac{y_{n+1}}{y_n}$ se este último existir. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)^n (n+1)}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, como queríamos mostrar.

Assim, a partir desse último teorema, podemos definir o número de Euler como limite das raízes e-ésimas da forma $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$, quando n tende ao infinito.

1.4 Irrracionalidade do número de Euler

Na seção 1.1, vimos que $e = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$. Agora, iremos mostrar que e é um número irracional e essa prova será realizada por absurdo, admitido inicialmente que ele seja um número racional.

Teorema 1.4.1 *O número e é um número irracional.*

Demonstração *Suponhamos que existam m e n naturais coprimos, tais que $e = \frac{m}{n}$, com $n \geq 2$. vimos da seção 1.1 que $2 < e < 3$. Daí, se multiplicarmos ambos os membros da equação $e = \frac{m}{n}$ por $n!$, obtemos*

$$e \cdot n! = \left(\frac{m}{n}\right) \cdot n! = m(n-1)! . \quad (1.8)$$

Note que a expressão $m(n-1)!$ é um número inteiro, logo $e \cdot n! = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!}$ é um número inteiro. Escrevendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}$$

e observando que $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} = \frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{n!}$ é também um número inteiro, já que $0 \leq k \leq n$. E para mostrarmos uma contradição e chegarmos, finalmente num absurdo, mostraremos que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}$ não é um número inteiro.

De fato, se considerarmos $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \\ &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} . \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ é uma série geométrica infinita de razão $\frac{1}{3}$, ela é convergente e, além disso,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} .$$

Assim $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{2}$, e o segundo membro da igualdade não é inteiro, o que contradiz com $e \cdot n!$ que é um número inteiro. Daí concluímos que e não representa uma razão de dois números inteiros coprimos m e n , com $n \geq 2$. Com isso, certificamos que ele é um número irracional.

Além das caracterizações acima do número de Euler, podemos citar também a

sua representação a partir das frações contínuas:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}}}. \quad (1.9)$$

No capítulo seguinte, veremos outras caracterizações para o número de Euler, como no cálculo da área sob a hipérbole equilátera.

Capítulo 2

Funções exponenciais e Logarítmicas

Neste capítulo, serão exibidos os conceitos de potências de expoente real, bem como de funções exponenciais e logarítmicas que servirão de embasamento teórico para o desenvolvimento do nosso trabalho, outra parte desse conteúdo consta no apêndice após a Conclusão. Suas seções, construídas ao longo desse Capítulo, tiveram como principais referências bibliográficas (MOAR, 2008), (LIMA, 2017) e (NETO, 2015).

As funções exponenciais estão ligadas a eventos que apresentam crescimento ou decréscimo semelhantes a capitalização a juros compostos. As funções logarítmicas também estão ligadas a esses fenômenos, sendo definidas como função inversa das exponenciais.

Para realizarmos o estudo das funções exponencial e logaritmo, as propriedades das potências de um número real com expoente real são de suma importância e servem de embasamento preliminar para o desenvolvimento das propriedades e caracterização dessas funções. Por isso, primeiramente, será apresentada neste Capítulo uma revisão de potências e, em seguida, serão definidas funções exponenciais e logaritmo.

2.1 Potências com Expoente Real

Introduziremos gradativamente o conceito de potência, a partir de seus expoentes. Primeiro considerando-os pertencentes ao conjunto dos números naturais, em seguida inteiros, racionais e por fim, irracionais. Pois, como já sabemos, o conjunto dos números reais é resultado da união desses dois conjuntos.

2.1.1 Potências com Expoente Natural

Definição 2.1.1 *Seja um número real a . Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, a potência de base a e expoente n é o número real a^n , definido como $a^0 = 1$; e por $a^{n+1} = a \cdot a^n$ para todo n .*

Dessa definição segue que

$$a^1 = a^{0+1} = a \cdot a^0 = a \cdot 1 = a,$$

$$a^2 = a^{1+1} = a \cdot a^1 = a \cdot a,$$

$$a^3 = a^{2+1} = a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a$$

e intuitivamente

$$a^n = a^{(n-1)+1} = a \cdot a^{(n-1)} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, \text{ para } n \geq 1.$$

Proposição 2.1.1 *Quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e para todo número real a , $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.*

Demonstração: *Essa proposição pode ser verificada por indução em $n \geq 1$ e fixando o valor de m .*

Para $n = 1$, por definição $a^{m+1} = a \cdot a^m = a^m \cdot a = a^m \cdot a^1$. Logo, ela é válida para $n = 1$.

Agora, supondo que $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ para algum k natural, mostremos que essa ela também é válida para $k + 1$.

Como $a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a$, pela hipótese de indução e com uso da definição de potência com expoente natural, segue que $(a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{m+k} \cdot a = a^{m+k} \cdot a^1 = a^{m+k+1} = a^{m+(k+1)}$.

Portanto, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e para todos os números reais a .

Esse fato, nos leva a perceber que para $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ quaisquer,

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \dots \cdot a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\dots+m_k}.$$

Em particular, se $m_1 = m_2 = \dots = m_k = m$ então $(a^m)^k = a^{mk}$.

Agora observe que, se $a > 1$, então $a^{n+1} > a^n$ e, ao multiplicarmos ambos os membros de $a > 1$ por a^n , obtemos

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \dots < a^n < a^{n+1} < \dots,$$

Além disso,

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > \dots > a^n > a^{n+1} > \dots,$$

quando multiplicamos ambos os membros de $a < 1$ por a^n .

Então, a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a, a^2, a^3, \dots, a^n, a^{n+1}, \dots)$ cujo n -ésimo termo é a^n é crescente quando $a > 1$, decrescente quando $0 < a < 1$ e constante caso $a = 1$ com todos os seus termos iguais a um.

Lema 2.1.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a > 1$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > b$.*

Demonstração: Para provar isto, escolhemos um $d \in \mathbb{R}$ tal que $a = 1 + d$ com $d > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli, $a^n = (1 + d)^n \geq 1 + nd$, pois $d > 0$. Logo, se tomarmos $n > \frac{b-1}{d}$, então $1 + nd > b$ e, assim temos que $a^n = (1 + d)^n \geq 1 + nd > b$. E portanto, podemos concluir que $a^n > b$.

2.1.2 Potência de Expoente Inteiro

Definição 2.1.2 *Seja um número real a . Qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, a potência de base a e expoente n é o número real a^n definido como:*

$$a^0 = 1, \text{ e } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Observe que pela definição acima, e sendo a partir dela a^n e a^{-n} dois números reais inversos um do outro, podemos reescrevê-la como, $a^0 = 1$ e $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

E usando esse fato e sendo n natural, segue a seguinte proposição.

Proposição 2.1.2 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, para quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ e para todo número real a , tem-se que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Demonstração: Por definição,, $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}}$, onde $-m, -n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, usando a proposição 2.1.1 e novamente a definição 2.1.2 obtemos

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

É fácil verificar, em virtude disso, que a função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(n) = a^n$, com $n \in \mathbb{Z}$, cumpre a igualdade $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$. Isso ocorre porque $f(m+n) = a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

2.1.3 Potência de um Número Racional

Definição 2.1.3 Seja um número real $a > 0$. Qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, a potência de base a e expoente $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ é o número real a^r definido por $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Como consequência dessa definição, se $\frac{m}{n} = \frac{mp}{np}$ para todo natural $p \geq 1$, então $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, mostrando que $a^{\frac{m}{n}}$ está bem definida desta forma. Essa observação pode ser verificada pelo fato de p ser um número natural.

Proposição 2.1.3 Para quaisquer que sejam $r = \frac{m_1}{n_1}, s = \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$ e para todo número real $a > 0$, $a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}}$.

Demonstração: Por definição e usando a consequência acima,

$$\begin{aligned} a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}} &= a^{\frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2}} \cdot a^{\frac{m_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot n_1}} = \sqrt[n_1 \cdot n_2]{a^{m_1 \cdot n_2}} \cdot \sqrt[n_2 \cdot n_1]{a^{m_2 \cdot n_1}} = \sqrt[n_2 \cdot n_1]{a^{m_1 \cdot n_2} \cdot a^{m_2 \cdot n_1}} \Leftrightarrow \\ &= \sqrt[n_1 \cdot n_2]{a^{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}} = a^{\frac{m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}} = a^{\frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2} + \frac{m_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot n_1}} = a^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}}. \end{aligned}$$

Decorre dessa proposição que

$$(a^r)^n = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot \dots \cdot a^r}_{n \text{ fatores}} = a^{r+r+\dots+r} = a^{rn} = a^m,$$

pois $m = r \cdot n$. Logo, a^r é um número positivo cuja n -ésima potência é a^m .

Outro fato observável, é que a imagem das potências a^r , com $r \in \mathbb{Q}$, embora não contenha todos os números reais positivos, elas estão espalhadas densamente em \mathbb{R} , desde que $a \neq 1$.

Lema 2.1.2 *Seja um número real positivo $a \neq 1$, densamente em todo \mathbb{R} , existe alguma potência a^r , com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração: *Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Suponha a e α ambos maiores de que 1, porém os demais casos podem ser analisados de modo análogo.*

Considere os números naturais M e n e o número inteiro m tais que

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Da última relação obtemos

$$1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \text{ e } 0 < \alpha^M (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo,

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}} (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Portanto, $a^0, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \dots, a^M$ são extremos de intervalos consecutivos, todos de módulo menor do que o módulo de $\beta - \alpha$, o comprimento do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um dos extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está no intervalo $[\alpha, \beta]$.

Definição 2.1.4 *Dado um número real $a \neq 1$ e sendo x um número irracional, então definimos o número real a^x cujas as aproximação por falta são as potências a^r com r racional menor do que x e cujas as aproximações por excesso são as potências a^s com s racional maior do que x . Ou seja:*

$$r < x < s, \text{ com } r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

O exemplo abaixo foi extraído do livro (PAIVA, 2000):

Exemplo 2.1.1 Como podemos calcular $3^{\sqrt{2}}$?

Sabemos que $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ é um número irracional. Para calcularmos $3^{\sqrt{2}}$, inicialmente apresentaremos as tabelas abaixo:

Valores x de $\sqrt{2}$ aproximados por falta	Valores t de $\sqrt{2}$ aproximados por excesso
1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415
1,4142	1,4143
⋮	⋮

Valores 3^x , onde x é valor de $\sqrt{2}$ aproximado por falta	Valores 3^t , onde t é valor de $\sqrt{2}$ aproximado por excesso
$3^{1,4} = 4,655536722$	$3^{1,5} = 5,196152423$
$3^{1,41} = 4,706965002$	$3^{1,42} = 4,758961394$
$3^{1,414} = 4,727695035$	$3^{1,415} = 4,7228991793$
$3^{1,4142} = 4,72873393$	$3^{1,4143} = 4,729253463$
⋮	⋮

Fonte: Manuel Paiva (2000)

O valores de 3^x e 3^t **convergem** para um mesmo valor a medida que x **converge** para t . Esse número é definido como $3^{\sqrt{2}}$. Observe que, até onde construímos as tabelas, percebemos que:

$$4,72873393 < 3^{\sqrt{2}} < 4,729253463.$$

Dessa forma, para verificar a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ com m, n irracionais, basta pensar que sempre temos dois racionais bem próximos a cada um deles (um aproximado por falta e o outro aproximado por excesso).

2.2 Funções Exponenciais e as progressões

Definição 2.2.1 Chama-se função exponencial toda função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, tal que a é um número positivo e diferente de 1. Ela satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer x e y reais:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^1 = a$;
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$;
4. $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente caso $a > 1$ e ilimitada inferiormente caso $0 < a < 1$;
5. A função exponencial é contínua;
6. A função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.
7. A função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é injetiva.

Das propriedades 6 e 7 concluímos que a função exponencial é bijetiva. Ou seja, ela estabelece uma correspondência biunívoca entre \mathbb{R} e \mathbb{R}^+ .

Definição 2.2.2 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é do tipo exponencial se $f(x) = b \cdot a^x$ para todo x real, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, f é crescente e $0 < a < 1$, f é decrescente.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b \cdot a^x$ uma função de tipo exponencial. Se a sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ é uma progressão aritmética de razão h , isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores $f(x_1) = b \cdot a^{x_1}$, $f(x_2) = b \cdot a^{x_2}, \dots, f(x_n) = b \cdot a^{x_n}, \dots$, formam uma progressão geométrica de razão a^h , pois

$$f(x_{n+1}) = b \cdot a^{x_{n+1}} = b \cdot a^{x_n+h} = (b a^{x_n}) \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h.$$

Como o $(n+1)$ -ésimo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, $f(x_{n+1}) = f(x_1) \cdot A^n$, onde $A = a^h$. Particularmente, para $x_1 = 0$, $f(x_1) = b$ e portanto $f(x_{n+1}) =$

$b \cdot A^n$. Vejam um exemplo de uma função de tipo exponencial aplicado no cálculo de juros.

Exemplo 2.2.1 *Se um capital inicial c_0 é aplicado a juros fixos, então depois de decorrido um tempo t , o capital existente é dado por $c(t) = c_0 \cdot a^t$. Se tirarmos extratos da conta nos tempos $0, h, 2h, 3h, \dots$, teremos $c(0) = c_0, c(h) = c_0 \cdot A, c(2h) = c_0 \cdot A^2, c(3h) = c_0 \cdot A^3, \dots$ onde $A = a^h$.*

Portanto, a evolução do saldo, quando calculado em intervalos iguais de h unidades de tempo, é dada pela progressão geométrica:

$$c_0, c_0 \cdot A, c_0 \cdot A^2, c_0 \cdot A^3, \dots$$

Teorema 2.2.3 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, uma função monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ numa progressão geométrica $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$, com $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ teremos $f(x) = b \cdot a^x$ para qualquer x real.*

Demonstração: *Seja $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{f(x)}{b}$, é monótona injetiva, contínua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e tem-se $g(0) = 1$. Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, a sequência $(x, 0, -x)$ é uma progressão aritmética de razão $-x$, logo $g(x) = \frac{f(x)}{b}, g(0) = 1, g(-x) = \frac{1}{b \cdot a^x}$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x) = \frac{1}{a^x}$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $(0, x, 2x, \dots, n \cdot x)$ é uma progressão aritmética de razão x , logo $(g(0) = 1, g(x) = a^x, g(2x) = a^{2x}, \dots, g(nx) = a^{nx})$ é uma progressão geométrica de razão $g(x)$. Então seu $(n + 1)$ -ésimo termo é $g(nx) = g(x)^{n+1}$. Se $-n$ é um inteiro negativo, então*

$$g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{g(x)^n} = g(x)^{-n}.$$

Portanto, vale $g(nx) = g(x)^{n+1}$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ e x real. Segue desse teorema que, pondo $a = g(1) = \frac{f(1)}{f(0)}$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = b \cdot a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.2.4 *Se a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é do $g(x) = b \cdot a^x$, então $\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = a^h - 1$, qualquer $x, h \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Sendo $g(x) = b \cdot a^x$,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{g(x)} = \frac{b \cdot a^{x+h} - b \cdot a^x}{b \cdot a^x} = \frac{b \cdot a^x(a^h - 1)}{b \cdot a^x} = a^h - 1$$

Observamos que esse quociente depende apenas do valor de h e que por uma manipulação algébrica essa igualdade pode ser escrita como $\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$.

2.3 Os logarítmos e as Funções Logarítmicas

Definição 2.3.1 Um número real x é chamado de logarítmo de b na base $a \neq 1$, e indicado por $\log_a b$, quando $a^x = b$.

Podemos, então, escrever $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ com $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 1$.

Assim, por definição, o logarítmo de b na base a é o expoente x ao qual devemos elevar o número a para obter b . Nesse relação, chamamos a de base do logarítmo, b logaritmando ou antilogarítmo e x de logarítmo.

Exemplo 2.3.1 Aplicando a definição de logarítmos, calcule o valor da expressão $S = \log_2 32 + \log_4 0,0625 - \log_{2\sqrt{3}} 144$.

Resolução:

$$\text{Fazendo } x = \log_2 32, y = \log_4 0,0625, z = \log_{2\sqrt{3}} 144,$$

$$x = \log_2 32 \implies 2^x = 32 \implies 2^x = 2^5 \implies x = 5.$$

$$y = \log_4 0,0625 \implies 4^y = 0,0625 \implies 4^y = \frac{625}{10000} \implies 4^y = \frac{1}{16} \implies y = -2.$$

$$z = \log_{2\sqrt{3}} 144 \implies (2\sqrt{3})^z = 144 \implies \sqrt{12}^z = 12^2 \implies 12^{\frac{z}{2}} = 12^2 \implies z = 4.$$

$$\text{Portanto, } S = x + y - z = 5 + (-2) - 4 = 1.$$

Como consequência da definição, podemos destacar algumas curiosidades. Sendo $1 > 0, b > 0, c$ e m um número real qualquer,

1. $\log_a 1 = 0$.

De fato, $\log_a 1 = x \implies a^x = 1 \implies a^x = a^0 \implies x = 0$.

2. $\log_a a = 1$.

De fato, $\log_a a = x \implies a^x = a \implies x = 1$.

3. $\log_a a^m = m$.

De fato, $\log_a a^m = x \implies a^x = a^m \implies x = m$.

4. $\log_a b = \log_a c \implies b = c$.

De fato, $\log_a b = \log_a c \implies a^x = b$ e $a^x = c \implies b = c$.

5. $a^{\log_a b} = b$.

Suponha que $y = \log_a b$, onde $a^y = b$. Logo $a^{\log_a b} = x \implies a^y = x$, e portanto $x = b$.

Segue-se imediatamente da relação $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ que $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ para todo x e y reais positivos. Com efeito, se $u = \log_a x$, $v = \log_a y$, então $a^u = x$, $a^v = y$. Logo, $x \cdot y = a^u \cdot a^v = a^{u+v} \implies \log_a(x \cdot y) = u + v = \log_a x + \log_a y$.

Exemplo 2.3.2 Mostre a relação $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$. Essa relação é conhecida como fórmula mudança de base dos logaritmos.

Resolução: Suponha que $u = \log_a x$ e $v = \log_b x$. Assim,

$$x = a^u = a^{\log_a x} \implies \log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Essa propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos estudos dos logaritmos, no século XVII principalmente por John Napier, e de sua popularidade, até bem recentemente, como um eficiente instrumento de cálculo. O uso das calculadoras, cada vez mais desenvolvidas, fez com que essa utilidade inicial dos logaritmos perdesse o sentido. Entretanto, a função logaritmo continua extremamente importante na Matemática e suas aplicações.

Definição 2.3.2 *É chamada Função logarítmica de base a , a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.*

Vimos na seção anterior que, para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, que obedece a propriedade adicional $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Desses resultados, segue-se que f admite uma função inversa. E a inversa da função exponencial de base a e a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Onde, $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ associa a cada número real positivo x ao $\log_a x$, chamado o *logaritmo* de x na base a .

A função logaritmo é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, e é importante observar que somente os números positivos possuem logaritmo no corpo dos reais, pois a função $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ só assume valores positivos, conforme foi definida. Além disso, na função logaritmos $\log_a x$, para uma base $a > 1$, o número real x compreendido entre 0 e 1 possui $\log_a x < 0$ e os maiores do que 1 possui $\log_a x > 0$. Já, se $0 < a < 1$, o número real x compreendidos entre 0 e 1 possui $\log_a x > 0$ e os maiores do que 1 possuem $\log_a x < 0$. É importante perceber que as funções logaritmos com base maior de que 1 têm um crescimento mais lento que as funções exponenciais com a mesma condição de base, pois o gráfico das funções $y = a^x$ e $y = \log_a x$ são simétricos, em relação aos pontos $(x, x) \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 2.3.3 *Teorema da Caracterização da Função Logaritmo*

Se $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona injetiva tal que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$.

Demonstração: *Admitamos que f seja crescente, e o mesmo tratamento é dado pra quando ela for decrescente. $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 1$ e sabemos que para todo $a \in \mathbb{R}^+$, $f(a) = 1$. Como consideramos inicialmente f crescente, e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, e $a > 1$. Para*

todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} f(a^m) &= f(a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \\ &= f(a) \cdot f(a) \cdot \dots \cdot f(a) \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 = m, \\ 0 &= f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) \\ &= f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}). \end{aligned}$$

Pela igualdade $m + f(a^{-m}) = 0$ concluímos que $f(a^{-m}) = -m$.

Além disso, se tivermos $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbf{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $m = rn$, portanto $m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r)$. E cosquentemente, $f(a^r) = \frac{m}{n}$. E se $x \in \mathbb{R}$ for irracional, então, para r, s racionais tem-se:

$$r < x < s \implies a^r < a^x < a^s \implies f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \implies r < f(a^x) < s$$

Dessa forma, todo racional r , menor do que x , é também menor do que $f(a^x)$ e todo racional s , maior do que x , é também maior do que $f(a^x)$. Assim, $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

Agora, vamos observar o caso geral, em que $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$g(x \cdot y) = g(x) + g(y),$$

onde já sabemos que $g(1) = 0$, como $1 < 2$ e sendo a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, crescente, se tomarmos $g(2) = g(2 \cdot 1) = g(2) + g(1) = g(2) + 0 = g(2) = b > 0$, então teremos que $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isso quer dizer que, para todo $x > 0$, vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{g(x)} = a^{g(x)},$$

com $a = 2^{\frac{1}{b}}$. Tomando \log_a em ambos os membros da igualdade $x = a^{g(x)}$, finalmente que $g(x) = \log_a x$.

2.4 Logaritmos Naturais e a Função Exponencial de Base e

Os Logaritmos Naturais, representado por \ln ou \log_e , também chamados neperianos, são aqueles que apresentam como base o número de Euler, representado pela letra e . Eles são considerados os mais importantes nas aplicações, especialmente aquelas envolvendo o uso do Cálculo Infinitesimal. Toda essa importância, se deve entre outras versatilidades, com o uso do Teorema de caracterização dos logaritmos, poderemos inclusive apresentar os logaritmos naturais geometricamente, quando sua caracterização se dá ao ser calculado o valor área da figura, formada sob o gráfico da função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $H = \{(x, \frac{1}{x}); x > 0\}$, no intervalo real $[1, e]$, for igual a 1. Essa função representa o ramo positivo da hipérbole equilátera, por isso também eles são chamados de *logaritmos hiberbólicos*. O cálculo dessa área é feito pela aproximações por falta das áreas dos retângulos formados pelo gráfico de H e eixo das abscissas do plano cartesiano, que são as partições do intervalo real $[1, e]$. Assim, o número e , base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja $\text{ÁREA } H_1^e = 1$ (área da faixa da hipébole equilátera compreendida no intervalo $[1, e]$) (veja na figura 2.1). E quando, ele é apresentado como o limite da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito, isso quer dizer que e é um número real cujos valores aproximados por falta são os números racionais da forma $(1 + \frac{1}{n})^n$ com $n \in \mathbb{N}$ e essas aproximações são tanto melhores quanto maior for o número n .

Além dessas formas de representação, vale ressaltar que nos estudos de cálculo diferencial e integral, o logaritmo natural de um número real é definido por $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ (integral da função $\frac{1}{x}$ quando x varia de 1 a t) com $x > 0$. Por isso, a solução da equação $\int_1^x \frac{1}{t} dt = 1$ de incógnita x é $x = e$. Esse resultado dá a esse número um significado geométrico que o relaciona com hipérbole do mesmo modo como π se relaciona com o círculo. Considere a letra A para representar a área de um círculo de raio r e de uma hipébole equilátera:

$$\text{Círculo : } A = \pi r^2 \implies A = \pi \text{ quando } r = 1.$$

$$\text{Hipérbole : } A = \ln x \implies A = 1 \text{ quando } x = e.$$

Contudo, essa semelhança até então só está no fato em que π é o valor da área do círculo de raio 1 e e é o comprimento linear para qual a área sob a hipérbole tem valor 1. Porém com a descoberta da Fórmula de Euler, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, esses dois números estreitaram as relações entre eles, promovendo uma notável conexão entre as funções exponencial e trigonométricas. Assim, sendo $x = \pi$ nessa equação, teremos:

$$\begin{aligned} e^{\pi i} &= \cos \pi + i \sin \pi \\ e^{\pi i} &= -1 + 0 \\ e^{\pi i} &= -1 \\ e^{\pi i} + 1 &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

A equação (2.1) une cinco importantes constantes da matemática clássica e quatro grandes áreas da matemática: aritmética, representada pelo 0 e pelo 1; álgebra pelo i ; geometria pelo π e análise pelo e .

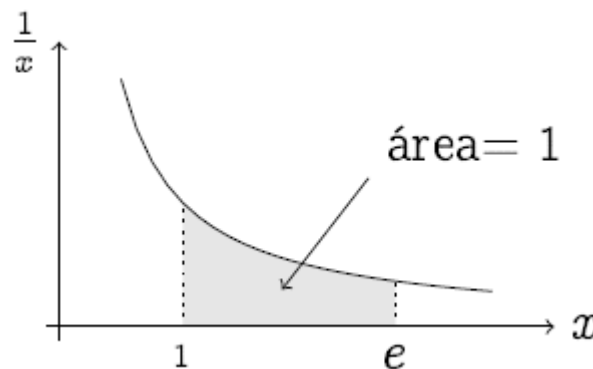


FIGURA 2.1. área da faixa da hipérbole equilátera compreendida no intervalo $[1, e]$.

Já a função exponencial natural pode ser definida por $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, que do ponto de vista do cálculo, segundo Richard Courant e Herbert Robbins (Moar, 2008) tem como importância o fato de que essa função é a uma função cuja derivada é igual a própria função e pelo fato de e desempenhar papel relevante no cálculo de áreas das hipérboles. Somado a essas contribuições temos também que sua derivada é proporcional à própria função. Portanto, o papel que as funções reais do tipo exponencial $f(x) = b \cdot e^{ax}$ desempenham na matemática e na ciência é uma consêquência desses fatos (Maor, 2008). Dessa forma, podem ser usadas pra modelar muitas situações problemas que apresentam tanto crescimento quanto decréscimo muito rápido do seus

valores com a oscilação sensível de suas variáveis. Assim, mostraremos que a derivada das funções do tipo $f(x) = be^{ax}$ é abe^{ax} .

A derivada de $f(x) = be^{ax}$ é dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{be^{a(x+h)} - be^{ax}}{h} \\ &= b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a(x+h)} - e^{ax}}{h} \\ &= b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ax}e^{ah} - e^{ax}}{h} \\ &= b \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ax}(e^{ah} - 1)}{h}, \end{aligned}$$

e além disso, como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = 1$ (FLEMMING, 2006), multiplicando por a os dois termos da fração $\frac{e^{ax}(e^{ah} - 1)}{h}$ e tomando em seguida $k = ah$, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= abe^{ax} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ah} - 1}{ah} \\ &= abe^{ax} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(e^k - 1)}{k} \\ &= abe^{ax}. \end{aligned}$$

Podemos escrever $k = ah$ e vemos que se h tende a zero, k também tende a zero. Daí, certicamos que a derivada da função $f(x) = be^{ax}$ é $f'(x) = abe^{ax} = abf(x)$, logo é proporcional a ao valor de f , tendo como fator de proporcionalidade ab .

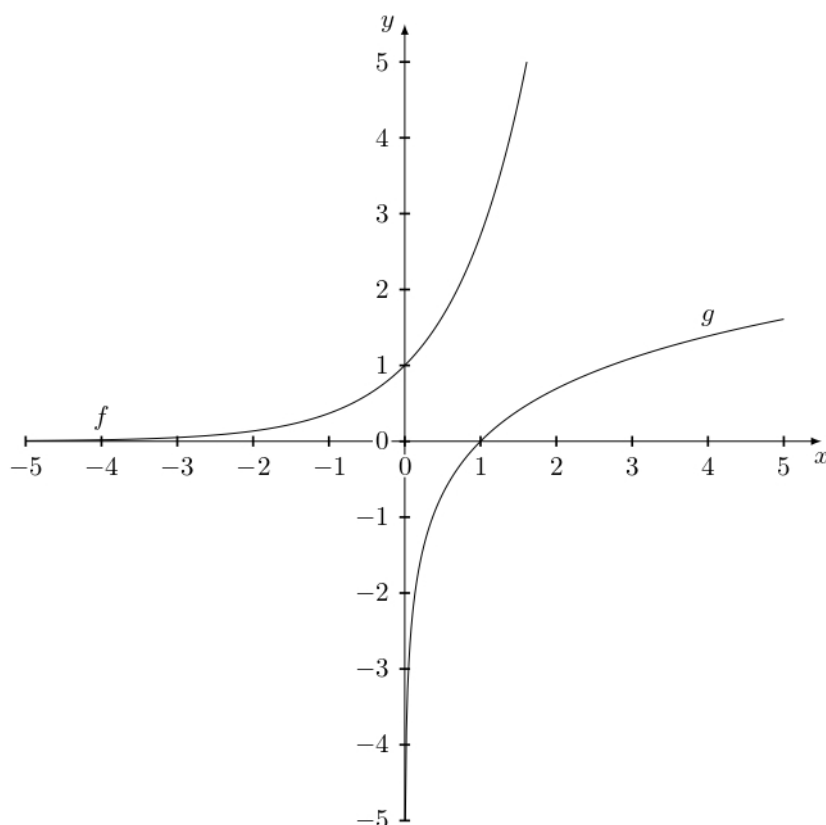


FIGURA 2.2. Gráfico das funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$

2.5 A espiral logarítmica e o problema da catenária

Assim como a localização de um ponto P , proposto por Descartes, dando suas distâncias em relação a duas linhas (os eixos x e y) podemos também localizar esse ponto dando sua distância r de um ponto fixo O , chamado de *pólo* e o ângulo θ entre OP e a linha de referência fixa, digamos o eixo x . O par ordenado (r, θ) são as coordenadas polares de P , assim como (x, y) são as coordenadas retangulares.

Alguns matemáticos já haviam usado as coordenadas polares, porém Jakob Bernoulli foi o primeiro a fazer um intensivo uso delas, aplicando-as a um conjunto de curvas e encontrando suas diversas propriedades, permitindo a ele investigar as características de várias curvas, cuja favorita era a *espiral logarítmica*. Essa equação é $\ln r = a\theta$, onde a é uma constante, θ é medida do ângulo (em radiano) e \ln é logaritmo natural ou "hiperbólico", como era chamado. Em notação moderna, $r = e^{a\theta}$.

vale observar que se aumentarmos a medida do ângulo em progressão aritmética de razão b , a distância r do pólo aumenta em *proporções iguais* ou seja em progressão geométrica de razão e^{ab} .

$$\begin{aligned}e^{a(\theta+b)} &= e^{a\theta} \cdot e^{ab} \\e^{a(\theta+2b)} &= e^{a(\theta+b)} \cdot e^{ab} \\e^{a(\theta+3b)} &= e^{a(\theta+2b)} \cdot e^{ab}\end{aligned}$$

Assim, para um acréscimo nb ao ângulo θ , por indução matemática, obtemos:

$$e^{a(\theta+nb)} = e^{a[\theta+(n-1)b]} \cdot e^{ab}.$$

Bernoulli ainda foi responsável por se debruçar em um dos problemas que ocuparam a comunidade matemática, no período da invenção do cálculo, o problema da *catenária* (corrente suspensa). Em maio de 1660 ele publicou em um jornal o seguinte problema com objetivo de encontrar a curva formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos, cujo o fio seja era flexível em todas as partes com espessura e densidade uniformes. Um ano depois, o mesmo jornal publicou as três soluções corretas, uma delas pelo seu irmão Johann Bernoulli.

A catenária revelou-se a curva cuja equação, em notação moderna, é $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$, onde a é uma constante cujo valor depende da sua densidade e a tensão que ela pode suportar.

Supondo $a = 1$ temos $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e assim podemos observar que

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Quando consideradas como funções de variável independente x , as equações $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Em 1757, um matemático jesuíta italiano Vincenzo Riccati (1707-1775) empregou a notação Chx e Shx para essas funções e demonstrou que

$(Ch\phi)^2 - (Sh\phi)^2 = 1$ (sendo ϕ a variável independente), mostrando que $Ch\phi$ e $Sh\phi$ estão relacionados à hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, assim com $sen\phi$ e $cos\phi$ estão relacionados ao círculo de raio unitário $x^2 + y^2 = 1$. Atualmente essas funções são chamadas de $cosh\phi$ e $senh\phi$, cosseno hiperbólico e seno hiperbólico de ϕ , respectivamente.

Capítulo 3

A modelagem Matemática e o Número de Euler

Para resolver problemas e situações reais, em diversos casos, lança-me mão da linguagem matemática. Em cada um desses casos, são tecidos um modelo matemático, um quantitativo de variáveis que ajude a resolver tal problema, aproximando da realidade em questão. Nesse Capítulo, veremos o papel da modelagem matemática na resolução de situações reais e o uso do número de Euler nessas situações. Para isso, traremos definições importantes, ao logo do Capítulo, que sustentam a resolução dessas aplicações. Abordaremos aqui, o ajuste linear de uma equação logística, o ajuste linear de modelo exponencial assintótico, a distribuição de Poisson e a distribuição de Gauss, que podem ser encontrados em (BASSANEZI, 2015) e (SPERRANDIO, 2014). Para isso, admitiremos já conhecido o cálculo do valor assintótico, definido mais adiante, a partir do método de Ford-Walford (BASSANEZI, 2015, p.32), as aplicações das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem (RODRIGUES, 2018) e os métodos de integração de frações parciais (FLEMMING, 2006), (STEWART, 2013).

3.1 A importância da modelagem matemática

Já na introdução do seu livro, Bassanezi (2015) diz que a habilidade de empregar a matemática, em situações concretas e em outras áreas do conhecimento humano, consiste em tornar um problema prático relativamente complexo, transformá-lo num modelo matemático, ou seja, traduzir a questão para simbologia matemática e procurar uma solução que ajude a interpretar a situação concreta original.

O uso da modelagem propicia a oportunidade de exercer a criatividade na aplicação das habilidades matemáticas e bem como na formulação de problemas originais. A modelagem é o processo de criação em que estão definidas as estratégias de ação do indivíduo, principalmente sobre sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador. Ela é simplesmente uma estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais. No processo de reflexão sobre a porção da realidade, selecionamos os argumentos considerados essenciais e procuramos uma formalização artificial (modelo matemático) que contemple as relações que envolvem tais argumentos. Esse modelo dispõe dos seguintes passos: Escolha do tema, coleta de dados e/ou inferências sobre o tema, análise dos dados e formulação de modelos, validação, convergência e estabilidade, cálculo do valor assintótico e variações.

É a análise de dados e formulação de modelos que se convencionou chamar de *modelagem matemática*. Nessa fase, é muito importante observar o comportamento das variáveis, pois esses modelos são dados pela solução de sistemas variacionais. Ou seja, reparar os aspectos comportamentais dessas variáveis e propor uma curva que mais se ajuste a esse comportamento. Já a validação de um modelo é um processo de aceitação ou rejeição deste, análise que é condicionada a vários fatores, sendo preponderante o confronto dos dados reais com os valores do modelo, que para ser um bom modelo, deve servir para aplicar os resultados e ter capacidade de propor previsão de novos resultados. Porém, nem sempre o primeiro modelo obtido pode satisfazer a análise proposta, podendo ser substituído por outros modelos, até chegar num resultado mais satisfatório. Já a observação de uma tendência nos valores, detectada principalmente com a confecção das tabelas e dos gráficos, nos ajuda a fazer certas previsões, e matematicamente, podemos fazer isso, por exemplo, através das aplicações de *convergência de sequências*. E essa convergência nos garante a estabilidade da variável no futuro. E quando existe tal tendência a uma estabilidade dizemos que a curva solução tem um comportamento *assintótico*.

O modelo assintótico possui um importante ingrediente chamado de *valor assintótico* da variável independente, que consiste no valor de equilíbrio e estabilidade de uma sequência de valores. Para se efetuar esse tipo de ajuste, é preciso de antemão desse valor, que corresponde ao valor limite da tendência de uma sequência quando

os valores atribuídos a sua variável cresce. Ou seja, dada uma sequência (x_n) , se

$$y^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

então y^* é o valor assintótico de (x_n) .

3.2 O número de Euler na modelagem matemática

Aqui será feita a mostra de alguns modelos matemáticos onde o número de Euler aparece como elemento fundamental no ajuste de curvas e em aplicações na probabilidade, sem que haja um aprofundamento técnico no conteúdo. Assim, para se fazer o ajuste de uma curva ou regressão é preciso determinar os coeficientes de uma determinada função, de modo que, num dado intervalo de valores considerados, esta função e os dados estatísticos sejam “próximos”. Iremos destacar as curvas de ajuste linear do modelo exponencial assintótico e ajuste linear de uma curva logística e a equação logística contínua.

Um ajuste linear de crescimento exponencial, por exemplo, é usado, quando numa curva esboçada, pode ser usada uma função do tipo exponencial como modelo para interpretá-las:

$$y = ba^x; a > 0 \text{ com } (b, x \in \mathbb{R}).$$

Nas funções do tipo exponencial $y = be^{ax}$, onde $b > 0$, e e é número de Euler, propondo uma mudança de variável e pondo $z = \ln y$, temos

$$\ln y = e^{ax} \implies z = \ln b + \ln e^{ax} \implies z = \ln b + ax \implies z = ax + \ln b.$$

Observe que a equação $z = ax + \ln b$ é uma reta e será crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.

Quando existe uma tendência de estabilidade dos dados, podemos usar a seguinte curva típica para o ajuste desse modelo exponencial assintótico:

$$y = y^* - ae^{bx}; y^* > 0 \text{ com } b < 0.$$

Neste caso, considerando a mudança de variáveis $z = \ln(y - y^*)$ se $a < 0$ ou $z = \ln(y^* - y)$ se $a > 0$, obtemos a reta

$$z = \ln |a| + bx .$$

Agora devemos determinar o valor assintótico ou valor limite da tendência de y quando x cresce, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (y^* - ae^{bx}) = y^* .$$

Isso ocorre pelo fato de, se admitirmos b um número real negativo, a expressão ae^{bx} tende a zero com o crescimento do valor de x . Como exemplo hipotético para esse modelo, podemos supor que numa determinada região comece a acontecer um desmatamento ilegal desenfreado elevando o número de áreas desmatadas exponencialmente de um dia para o outro. Então, órgãos de proteção ambiental são acionados para ir até o local e inibir essas ações criminosas, aplicando as leis cabíveis e a fiscalização, reduzindo fundamentalmente a ameaça sobre as florestas.

Já a curva logística foi usada, primeiramente, para modelar a dinâmica de populações pelo matemático belga P. F. Verhurst em 1837. Esse modelo prevê que uma população, vivendo num determinado meio, deve crescer até um certo limiar, chamado de capacidade suporte que tende a se estabilizar com o tempo (Bossanezi, 2015,p.103).As características dessa curva são:

- tendência da variável independente é de estabilidade, isto é, que quando x cresce y tende a y^* . E y^* é chamado de *valor máximo sustentável* ou *capacidade suporte*;
- Considerando y_0 o valor inicial da sequência monótona dos y_i termos, isto é, $y = y_0$ quando $x = 0$, tem-se:
 - a) y é crescente se $y_0 < y^*$;
 - b) y é decrescente se $y_0 > y^*$.
- A taxa de crescimento relativo de λ_i é linear, isto é,

$$\lambda_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i} ,$$

pode ser ajustada por uma reta: $\lambda = ay + b$;

- Se $y_0 < \frac{y^*}{2}$, a curva $y(x)$ muda de concavidade quando $y_0 = \frac{y^*}{2}$, o que implica a existência de um *ponto de inflexão* na curva. A expressão teórica da curva logística é

$$y = \frac{a}{be^{-\lambda x} + 1},$$

onde, $a = y^*$, $b = \frac{y^*}{y_0} - 1$ e $\lambda = ay^*$ é a *taxa de reprodutividade máxima*.

3.3 Equação Logística

A obtenção de um modelo de predição para variável discreta faz uso de uma matemática que pode ser realizado no ensino médio. Mas para estudar outras formas de modelos matemáticos para a mesma situação, podemos modificar o conceito de variação simples $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ para uma variação instantânea dy/dx . A seguir veremos um modelo matemático para a equação logística, muito importante no estudo de dinâmica de populações, onde a variação instantânea possui grande relevância para a compreensão do estudo.

Esse modelo, proposto por Thomas Robert Malthus (1766-1834) em sua obra *segundo Ensaio* (1803), baseia-se na hipótese de que uma população *cresce a uma taxa proporcional* ao seu tamanho. Essa hipótese é razoável para uma população saudável, harmônica e em condições ideais (meio ambiente ilimitado, nutrição adequada, ausência de predadores, imunidade a doenças). Então, considerando essas condições, sem que haja quaisquer interferência relevante na mudança das tendências esperadas, vamos identificar e dar nomes às variáveis nesse modelo:

t =tempo (a variável independente),

P =número de indivíduos da população (a variável dependente).

A taxa de crescimento da população $P(t)$ é a derivada dP/dt . Dessa forma, a hipótese de que a taxa de crescimento da população é proporcional ao tamanho da população é descrita pela equação

$$\frac{dP}{dt} = kP, \quad (3.1)$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

Note que, se o número de indivíduos de uma população $P(t)$ está em crescente, então sua taxa de crescimento $P'(t) = dP/dt$, primeira derivada de $P(t)$, também cresce. Como por hipótese $P(t)$ e $P'(t)$ são proporcionais, nos vale lembrar que as funções exponenciais do tipo $P(t) = Ce^{at}$ com C e a reais, também são, pois

$$P'(t) = C(ke^{at}) = k(Ce^{at}) = aP(t),$$

como já foi visto no Capítulo 2.

Portanto, uma função exponencial da forma $P(t) = Ce^{at}$ é uma solução da equação 3.1. E para esse problema, iremos sempre considerar $C > 0$, pois o quantitativo populacional só irá admitir valores positivos. Além disso, iremos considerar os instantes $t \geq 0$. Assim, para $t = 0$, teremos $P(0) = Ce^{a \cdot 0} = C$, o valor da população inicial.

Sob condições ideais, como já foi dito, a solução acima é satisfatória para a modelagem do crescimento populacional. Agora reconheça que um modelo mais próximo da realidade deveria refletir certos fatores como o ambiente e a disponibilidade de recursos, dentre outros. Esses fatores, observados por Verhurst, podem ser importantes na alteração dos regimes de reprodução e mortalidade, por exemplo, promovendo influência direta ou indireta no ritmo de crescimento. Sendo assim, muitas populações começam crescendo exponencialmente, porém o nível da população se estabiliza quando ela se aproxima de sua capacidade de suporte M (ou diminui em direção a M se ela excede o valor de M). Para um modelo considerar ambos os casos, fazemos duas hipóteses:

- $dP/dt \approx aP$ se $P \ll M$ (inicialmente a taxa de crescimento é proporcional a P);
- $dP/dt < 0$ se $P > M$ (P diminui se exceder M).

Uma adequação que engloba as duas hipóteses acima é dada pela equação

$$\frac{dP}{dt} = aP \left(1 - \frac{P}{K} \right). \quad (3.2)$$

Isso pode ser explicado porque se P é muito pequeno comparado com M , então P/M está próximo de 0, logo $dP/dt \approx aP$. Caso $P > M$, a expressão $1 - P/K$ é negativa e $dP/dt < 0$. A equação 3.2 é chamada equação diferencial logística ou simplesmente *equação logística*, frutos dos estudos da curva logística proposta por Verhurst. Essa equação nos leva a fazer as seguintes observações:

- Se $0 < P(0) < M$, então $dP/dt > 0$, significando que a população está em crescimento;
- Se em algum momento $P > M$, então $dP/dt < 0$, isto é, que a população ultrapassou sua capacidade suporte e a taxa populacional entra em tendência de queda.

Essa população entrará num estágio de equilíbrio e estabilidade quando em ambos os casos quando P tende a M . Ou seja, quanto a população tende a capacidade suporte e dP/dt tende a 0.

Observe agora que quando dP/dt tende a zero, temos como possíveis soluções da equação 3.2, os valores 0 e K , ou seja, dP/dt está infinitamente próximo de zero quanto $t \equiv 0$ ou $t \equiv K$. Fazendo uma separação de variáveis dessa equação e integrando ambos os membros, temos

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \int a dt + c.$$

Aplicando a técnica de frações parciais e as propriedades de integração no primeiro membro, obtemos

$$\int \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} dt = \int \frac{1}{K} dt + \int \frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{P}{K}} dt.$$

Das propriedades de integração, sabemos que $\int \frac{1}{K} dt = \ln|K| + c$. Já para integrar a segunda parcela pode ser feita da seguinte maneira:

$$u = 1 - \frac{P}{K} \implies du = -\frac{1}{k}.$$

Portanto,

$$\int \frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{P}{K}} dt = -\ln \left| 1 - \frac{P}{K} \right| + c.$$

Dessa forma,

$$\int \frac{1}{P(1 - \frac{P}{K})} dt = \ln |K| - \ln \left| 1 - \frac{P}{K} \right| + c = \ln \left| \frac{K}{1 - \frac{P}{K}} \right| + c.$$

Assim,

$$\ln \left| \frac{K}{1 - \frac{P}{K}} \right| = ax + c$$

Como $P(0) = P_0$, a constante de integração c pode ser determinada por:

$$c = \ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{K}} \right|,$$

já que nesse caso particular, $at = 0$. Visto isso,

$$\ln \left| \frac{P(K - P_0)}{P_0(K - P)} \right| = at \implies \left| \frac{P(K - P_0)}{P_0(K - P)} \right| = e^{at}. \quad (3.3)$$

Isolando P na equação 3.3, obteremos

$$\begin{aligned} \frac{P}{K - P} = \frac{P_0}{K - P_0} e^{at} &\implies P = \frac{P_0(K - P)}{K - P_0} e^{at} \\ &\implies P = \frac{P_0 K}{K - P_0} e^{at} - \frac{P_0 P}{K - P_0} e^{at} \\ &\implies P + \frac{P_0 P}{K - P_0} e^{at} = \frac{P_0 K}{K - P_0} e^{at} \\ &\implies P \left(1 + \frac{P_0}{K - P_0} e^{at} \right) = \frac{P_0 K}{K - P_0} e^{at} \\ &\implies P \left(\frac{K - P_0 + P_0 e^{at}}{K - P_0} \right) = \frac{P_0 K e^{at}}{K - P_0} \\ &\implies P = \frac{P_0 K e^{at}}{K - P_0 + P_0 e^{at}} \\ &\implies P = \frac{P_0 K e^{at} / e^{at}}{(K - P_0 + P_0 e^{at}) / e^{at}} \\ &\implies P = \frac{P_0 K}{K e^{-at} - P_0 e^{-at} + P_0} \\ &\implies P = \frac{P_0 K}{(K - P_0) e^{-at} + P_0}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Logo, podemos observar que na solução 3.4 de 3.2 temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} P(t) = P_0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} P(t) = K$$

ou seja, quando t cresce muito então a variável $P(t)$ tende ao ponto de equilíbrio K e, para $t = 0$, temos a condição inicial $P(0) = P_0$.

Hoje o modelo utilizando uma equação logística é usado para estudar o controle da dinâmica de populações de diversas espécies de seres vivos e principalmente para o controle de epidemias.

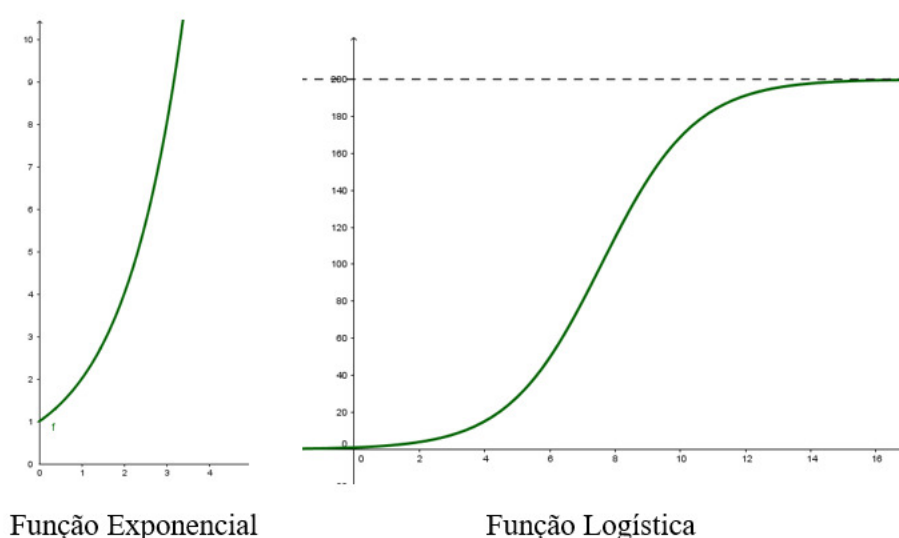


FIGURA 3.1. Comparação entre os gráficos da curva exponencial e da curva logística

3.4 Problema da mistura

Um problema típico de mistura envolve um tanque de capacidade fixa preenchido com uma solução completamente misturada de alguma substância (digamos, sal). Uma solução de uma dada concentração entra no tanque a uma taxa fixa e a mistura, bem agitada, sai a uma taxa fixa, que pode ser diferente da taxa de entrada. Se $y(t)$ denota a quantidade de substância no tanque no instante t , então $y(t)$ é a taxa na qual a substância está sendo adicionada menos a taxa na qual ela está sendo retirada. A descrição matemática da situação frequentemente leva a uma equação diferencial de primeira ordem separável. Podemos usar o mesmo tipo de raciocínio para modelar uma variedade de fenômenos: reações químicas, descarga de poluentes em um lago,

injeção de medicamentos na corrente sanguínea, entre outros, mas o exemplo seguinte fará referência a uma mistura aquosa.

Exemplo: Um tanque contém 20 kg de sal dissolvido em 5 000 L de água. Água salgada com 0,03 kg de sal por litro entra no tanque a uma taxa de 25 L/min. A solução é misturada completamente e sai do tanque à mesma taxa. Qual a quantidade de sal que permanece no tanque depois de meia hora?

Solução: Seja $y(t)$ a quantidade de sal (em quilogramas) depois de t minutos. No tempo $t = 0$ o tanque continha 20 kg de sal antes de ser dissolvido, logo $y(0) = 20$. Para sabermos a quantidade de sal que permanece no tanque depois 30 minutos, $y(30)$, encontraremos uma equação diferencial que seja satisfeita por $y(t)$.

Como dy/dt é a taxa de variação da quantidade de sal,

$$y'(t) = dy/dt = (\text{taxa de entrada}) - (\text{taxa de saída}),$$

onde (taxa de entrada) é a taxa na qual o sal entra no tanque e (taxa de saída) é a taxa na qual o sal deixa o tanque. Temos

$$\text{taxa de entrada} = (0,03\text{kg/L})(25\text{L/min}) = (0,75\text{kg/min}).$$

Como tanque sempre contém 5 000 L de líquido, então a concentração no tempo t é $y(t)/5000$ (medida em quilogramas por litro). Como a água salgada sai a uma taxa de 25 L/min, obtemos

$$\text{taxa de saída} = y(t) = (5000\text{kg/L})(25\text{L/min}) = y(t) = 200\text{kg/min}.$$

3.5 Propagação da podridão em maçãs

Esse problema que será apresentado surgiu em cursos de Especialização para-professores de Matemática que ocorreram em Palmas (To) e Guarapuava (PR) entre os

anos de 1988 e 1989, resultado de um trabalho de pesquisa de campo, baseado na experiência dos cursistas e intimamente ligado ao seu contexto social. Outros problemas mais gerais são levantados pelos instrutores, a fim de ampliar o horizonte matemático desses professores cursistas. Nesse em específico, que iremos tratar se relaciona com a propagação da doença podridão da maçã quando a fruta está acondicionada em caixas (bins).

O armazenamento das maçãs em câmaras frigoríficas, em caixas de madeira (bins) sobrepostas que comportam em torno de 3000 frutas. Quando alguma maçã está contaminada com a doença podridão, a doença se propaga rapidamente contaminando as outras ao seu redor. Estima-se que em 12 dias 80% das maçãs da caixa são contaminadas, comprometendo posteriormente todo o estoque. Então, através da modelagem, é construído uma relação matemática que se ajuste ao problema real, ajudando a analisar e interpretar a dinâmica da doença.

Dados e variáveis

- $M = M(t)$ é a quantidade de maçãs contaminadas no instante t ;
- t = tempo de propagação (dias);
- T = quantidade total de maçãs em um Bin ≈ 3000 frutas;
- Se o processo de dispersão da doença se inicia com uma maçã, então $M_0 = M(0) = 1$ (condição inicial);
- Quando a doença se inicia com uma fruta infectada, então em 12 dias 80% das maçãs de bin estarão podres, isto é, $M(12) = 0,8T$.

Hipótese: “A velocidade da propagação da doença é proporcional à proximidade(encontro) entre as maçãs sadias e contaminadas”.

Essa velocidade pode ser interpretada como a variação (aumento), em relação ao tempo, da quantidade de maçãs podres. Como a grandeza t possui subunidades, usaremos um modelo contínuo para a variação populacional e devemos traduzir tal variação por derivada, isto é, dM/dt representa a velocidade da propagação da podridão. Além disso, pelo fato da quantidade de maçã total ser constante T , então a

população de frutas sadias $S(t)$ é dada por $S(t) = TM(t)$. O encontro entre frutas contaminadas e sadias pode ser modelado, tendo-se em consideração a lei da ação de massas, ou seja, $E = MS = M(TS)$.

Da hipótese formulada para a epidemia, podemos escrever o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SM \\ \frac{dM}{dt} = \beta SM \end{cases}$$

onde, $M_0 = 1$ e $S + M = T$ e β é a taxa de contaminação, ou forma de infecção, própria de cada doença.

O sistema anterior pode ser reduzido a um problema de condição inicial com apenas uma equação diferencial, uma vez que $S = T - M$:

$$\frac{dS}{dt} = \beta M(T - M).$$

Note que o modelo acima é uma equação logística contínua cuja solução analítica é obtida pelo método de separação de variáveis,

$$M(t) = \frac{KTe^{Tt}}{1 + Ke^{Tt}}.$$

Como $M_0 = M(0) = 1$, podemos obter o valor da constante arbitrária K ;

$$M(0) = 1 \implies 1 + k = kT \implies K = \frac{1}{T - 1} = 113000 - 10,00033.$$

Logo, a solução particular pode ser dada por:

$$M(t) = \frac{e^{Tt}}{1 + \frac{1}{Te^{Tt}}} = \frac{Te^{Tt}}{T + e^{Tt}} = \frac{T}{Te^{-Tt} + 1}.$$

Considerando $M(12) = 0,8T$, determinamos a taxa de contaminação β :

$$\begin{aligned} 0,8T &= \frac{T}{Te^{-12} + 1} \implies 0,8 = 1Te^{-12} + 1 \\ &\implies 0,8Te^{-12T} = 0,2 \\ &\implies \ln 0,8Te^{-12T} = \ln 0,2 \\ &\implies \ln 0,8T + \ln e^{-12\beta T} = \ln 0,2 \\ &\implies -12\beta T = \ln 0,2 - \ln 0,8T \\ &\implies -12\beta T = \ln \frac{1}{4T} \\ &\implies \beta = \frac{-1}{12T} \ln \frac{1}{4T} \approx 0,000261. \end{aligned}$$

Portanto, a equação determinista que permite fazer previsões de maçãs contaminadas em cada instante é

$$M(t) = \frac{3000}{3000e^{-0,783t} + 1}.$$

Além disso, se desejar fazer previsões de tempo necessário para cada porcentagem p de frutas contaminadas, devemos ter uma função $M = pT$. Dessa forma, substituindo esse valor na equação $M(t)$, obtemos

$$pT = \frac{T}{Te^{-\beta Tt} + 1} \implies pTe^{-\beta Tt} + p = 1 \implies e^{-\beta Tt} = \frac{1-p}{pT} \implies$$

$$\beta Tt = \ln \left(\frac{1-p}{pT} \right) \implies t = -\frac{1}{\beta T} \ln \left(\frac{1-p}{pT} \right).$$

Como na questão $\beta = -\frac{1}{12T} \ln \frac{1}{4T}$, então $t = \frac{12}{\ln \frac{1}{4T}} \ln \left(\frac{1-p}{pT} \right)$ com $0 < p < 1$.

Por exemplo, se quisermos determinar o tempo transcorrido para que metade das maçãs estejam contaminadas, basta tomar $p = 50\% = 0,5$. Assim, num bin de 3000 maçãs teremos metade das maçãs contaminadas quando $t = \frac{12}{\ln \frac{1}{4T}} \ln \frac{1}{T} = -1,277 \cdot (-8,006) = 10,224$ dias. Da mesma forma, se quisermos saber após quanto tempo toda a caixa estará contaminada basta tomar um valor de P bem próximo de $100\% = 1$, podendo ser $p = 0,99$, e obter $t = (1,277) \ln \frac{0,1}{0,99T} \approx 16,092$ dias.

3.6 A criminalidade no ABCD paulista

Essa aplicação foi feita por um grupo de professores de Matemática da rede de ensino, num curso de especialização organizado na UFABC em 2009-2010. Nesse trabalho, foi desenvolvido um tratamento matemático dos índices de homicídios dos quatro municípios do ABCD paulista: Santo André, São Bernardo do Campo, São Caetano do Sul e Diadema, com a elaboração de modelos que mostram os possíveis níveis de estabilidade nesses municípios, além de um comparativo entre tais índices. Para realizar a construção dos modelos foi necessário:

- Obter os dados dos homicídios na Secretaria de Segurança Pública;
- Organizaram os dados e analisaram o comportamento de tendência dos mesmos; Calcular do valor de estabilidade h^* a partir do comportamento de tendência;
- Fazer o ajuste exponencial da curva $h - h^*$;
- Elaboração do modelo exponencial assintótico a partir do ajuste dos dados;
- Análise crítica dos resultados.

Nesse problema, foi dado destaque o índice de homicídios dolosos desses quatro municípios, e nesse levantamento foi verificado que eles apresentaram comportamentos semelhantes, decrescente exponencialmente assintótico. Por isso, a lei de formação dos modelos foi apresentada de forma generalizada e discutido em suas especificidades em cada um dos modelos.

Sejam:

t: tempo em anos;

h: taxa de homicídios (mortes por 100 mil habitantes);

h^* : valor de estabilidade do índice de homicídios.

Esse modelo exponencial assintótico é dado por

$$h(t) = h^* + ae^{-bt} \implies h(t) - h^* = ae^{-bt}.$$

Por sua vez, equação diferencial da lei de formação do modelo exponencial assintótico é dado por:

$$\frac{dh}{dt} = -b[h - h^*]h.$$

Ao fim dos trabalhos os cursistas concluíram que, o modelo exponencial assintótico para o índice de homicídios IH de Diadema obtido com o ajuste exponencial dos dados $h_i - h^*$, é $h(t) = 11,866 + 97,559e^{0,3093t}$. Esse modelo também pode ser entendido como a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = a[h - h^*] \\ h_0 = 102,82 \end{cases},$$

onde, a é a variação relativa constante de IH. Assim, podemos afirmar que o índice de homicídios dolosos h é proporcional a diferença entre o índice de homicídios h e o valor de estabilidade h^* , com constante de proporcionalidade igual 0,3093.

Abaixo temos a tabela de homicídios por 100 mil habitantes da cidade de Diadema, de 1999 à 2007, feita pelos alunos, onde a taxa de homicídio IH é calculado considerando-se o número de assassinatos por 100 mil habitantes por ano.

TABELA 3.1. Dados da criminalidade em Diadema entre 1999 e 2007 (homicídios por 100 mil)

Ano	homicídios por 100 mil
1999	102,82
2000	76,15
2001	65,78
2002	54,12
2003	44,48
2004	35,39
2005	27,57
2006	20,26
2007	20,55

Fonte: Produzido pelo Autor

3.7 O número de Euler na probabilidade

Devido a uma carta escrita pelo matemático francês, que morava em Belim, Philippe Naudé, Euler passou a estudar o problema de partições dos números inteiros. Dentre outros itens contido na carta, Naudé perguntava a Euler de quantas maneiras um número poder ser escrito como soma de números inteiros positivos distintos. Como resposta, ele criou a teoria das partições (MORGADO, 1991). Além dessa contribuição para a Análise Combinatória, ele enunciou e resolveu o Problema das Sete Portas de Königsberg, um teorema da teoria dos grafos, dentre outras contribuições.

Na probabilidade esse número teve relevância em algumas aplicações, e destacaremos a distribuição de Poisson e a distribuição de Gauss.

Experimentos que geram valores numéricos da variável aleatória X , o número de resultados que ocorrem durante um dado intervalo de tempo ou em uma região específica, são chamados de experimentos de Poisson. O intervalo de tempo dado pode ser um minuto, um dia, uma semana ou até mesmo um ano. Esses experimentos podem gerar observações para X que podem representar o número de dias de que uma escola ficou fechada por conta de uma pandemia, por exemplo. A região específica pode ser um segmento de linha, uma área, um volume ou até mesmo um pedaço de material. Em tais casos, X pode representar o número de bactérias em certa cultura ou o número de erros digitados por página. Um experimento de Poisson deriva de um processo de Poisson, que satisfaz as seguintes propriedades:

- O número de resultados que ocorrem num intervalo de tempo ou numa região específica é independente do número de resultados que ocorrem em outro intervalo disjunto ou região de espaço disjunta. Nesse caso, dizemos que o processo de Poisson não tem memória;
- A probabilidade de um único resultado ocorrerá durante um breve intervalo de tempo ou numa região específica pequena e proporcional à extensão do intervalo de tempo ou ao tamanho da região, e não depende do número de resultados que ocorram fora desse intervalo ou dessa região.
- A probabilidade de que mais de um resultado ocorrerá num intervalo de tempo muito leve ou numa região muito pequena é desprezível.

O número X de resultados que ocorrem durante um experimento de Poisson é chamado de variável aleatória de Poisson, e sua distribuição de probabilidade é chamada de distribuição de Poisson. O número médio de resultados é dado por $\mu = \lambda t$, onde t é o tempo, a distância, a área, o volume específico de interesse. Já que suas probabilidades dependem de λ , a taxa de ocorrência de resultados, devemos denotá-las pelo símbolo $(x; t)$. A derivada da fórmula para $(x; t)$ é feita com base nas três propriedades acima, mas não será tratada aqui.

Já a distribuição de probabilidade da variável aleatória de Poisson X , que representa o número de resultados que ocorrem em certo intervalo de tempo ou numa região específica, denotado por t é

$$(x; t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \text{ com } x = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

onde λ é o número médio de resultados por unidade de tempo, distância, área ou volume.

Exemplo: Durante um experimento de laboratório, o número médio de partículas que passam por um contador num milésimo de segundo é quatro. Qual a probabilidade de que seis dessas partículas entrem no contador em um dado milésimo de segundo?

Resolução: Usando a distribuição de Poisson com $x = 6, t = 4$, temos

$$p(6; 4) = \frac{e^{-4} 4^6}{6!} = 0,1042.$$

A distribuição de Poisson é usada para controle de qualidade, garantia de qualidade e testes de aceitação de amostras, além de ser usada na teoria de confiabilidade.

Considerada a mais importante das distribuições de probabilidade contínuas em todo campo da estatística (WALPOLE, 2009), a distribuição binomial possui o gráfico na forma de um sino, também chamada de curva normal, que descreve muitos fenômenos que ocorrem na natureza, na indústria e nas pesquisas. Medições físicas em áreas com experimentos meteorológicos, estudos sobre chuvas, medições de peças manufaturadas são explicadas mais do que adequadamente por meio da distribuição binomial. Apesar da equação matemática da curva normal ter sido desenvolvida por Abraham De Moivre em 1733, a distribuição binomial é chamada, comumente,

de distribuição gaussianas, fazendo referência a Karl Friedrich Gauss (1777-1855), que derivou sua equação a partir de um estudo de erros de medições repetidas de uma mesma quantidade. Uma variável aleatória contínua X que tem distribuição binomial em forma de sino é chamada de variável aleatória normal. A equação para essa distribuição depende de dois parâmetros, μ e σ , sua média e o desvio-padrão respectivamente. Então, denotamos os valores de densidade de X por $\rho(x; \mu, \sigma)$ é definida por $\rho(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$.

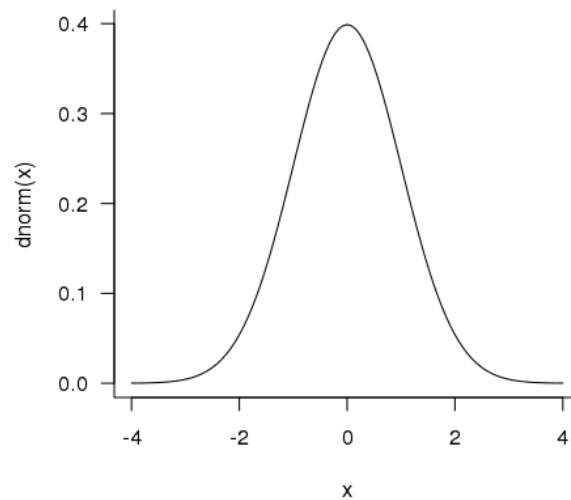


FIGURA 3.2. Formato do sino, gráfico típico da distribuição de normal

Ainda no campo da probabilidade, o número de Euler ainda figura na *função gama*, definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \text{ com } \alpha > 0.$$

Essa função é importante para resolver problemas de confiabilidade e para resolver problemas de filas.

Capítulo 4

O número de Euler na educação básica

- JUSTIFICATIVA

O desejo de se ter uma educação de qualidade não se restringe na vontade do professor, por uma boa valorização profissional ou dos alunos em ter boas notas. O dueto ensino-aprendizagem não pode ser visto de forma isolada, é preciso que alunos e professores encontrem um amparato técnico, com salas, laboratórios, materiais didáticos, qualificados, que haja o encajamento da família nesse processo e se tenha um currículo que atenda os anseios da comunidade. O elo entre essas frentes é uma interessante receita para pleitearmos o sucesso na aprendizagem do aluno. Ou seja, para que se faça uma boa educação é preciso que de toda sociedade de uma forma geral se envolva. Segundo a LDB,

ART. "1º a educação abrange os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil nas manifestações culturais " .(LDB, lei 9394/96 Brasil, Ministério de Educação. Brasília 20 de dezembro de 1996).

E diante do avanço tecnológico , os professores precisam estar em constante aperfeiçoamento, tendo em vista as diversas formas de aprendizagem. No ensino da matemática, os alunos necessitam ser submetidos a estudar sob um currículo que interligue conteúdos e aplicações cotidianas, desde as séries iniciais do ensino fundamental.

Por conta dessa última inquietação, o objetivo dessa etapa desse Trabalho é

trazer uma proposta de sequência didática, apresentando o número de Euler, através de aplicações do cotidiano na educação básica. Nela teremos a exibição do estudo dos juros simples e compostos até chegarmos a uma definição do número de Euler e apresentar suas aplicações nas mais diversas áreas.

- PLANEJAMENTO DE AULA

Titulo do Projeto: O número de Euler no ensino médio.

Público alvo: Alunos do 2º ano do ensino Médio de escolas públicas .

Duração: 4 semanas (2 aulas por semana realizadas no contraturno).

Objetivos:

- Reconhecer as formas de capitalização simples e composta;
- Aprender como obter o número de Euler através dos juros compostos;
- Desenvolver atividades aplicando os conteúdos aprendidos.

Conteúdo:

- História da Matemática;
- juros simples e compostos;
- O número de Euler e suas aplicações.

- Desenvolvimento

1ª aula: A história do número de Euler

Seria feita uma abordagem dos estudos de John Napier e Jakob Bernoulli, que historicamente levaram ao surgimento desse importante número, evidenciando que não se sabe precisamente sua verdadeira origem, como apresentado no Capítulo 1, segundo (EVES, 2008). E encerrariamos essa primeira aula com a exibição das expressões utilizadas para o cálculo de montante na capitalização simples e composta, mostrando a diferença estrutural e comportamental entre elas .

Como atividade, seria pedido uma pesquisa, na própria sala de aula (via celular) sobre a importância dos números irracionais na construção das ciências, fazendo o aluno se deparar com uma definição para número irracional e com a constante de Euler (número de Napier como também é conhecido).

Material utilizado: Apresentação em powerpoint e vídeos introdutórios extraídos da internet.

2ª aula: O número de Euler e a capitalização composta

A aula se iniciaria com aplicações de atividades práticas, com o objetivo de fazer o estudante se familiarizar com as expressões para montantes aplicados a juros compostos, da 1ª aula. No segundo momento, concentraríamos em aplicar essa expressão, dividindo cada vez mais o tempo de aplicação para a obtenção de um montante a uma taxa unitária de juros, aplicando um capital também unitário, fazendo o estudante perceber que ocorre um aumento progressivo no valor do montante, mas que esse valor, quando parcelado em um número muito grande de vezes, tende a uma estabilidade, vista no capítulo 1. Esse processo nos ajudará a definir o número de Euler e visualizar que se trata de um número irracional.

Terminaríamos por apresentar uma atividade relacionada com a aula seguinte, que seria equações exponenciais e logaritmos.

Exemplo : Qual o valor x do expoente da potência 3^x , de modo que seu valor seja 243?

Resolução:

$$3^x = 243 \implies 3^x = 3^5 \implies x = 5 .$$

E com essa e outras resoluções, definiremos equação exponencial e os logaritmos, na aula seguinte.

Material utilizado: power point, quadro branco.

3ª e 4ª aula: Equações Exponenciais e Logaritmos

Iniciariamos essa aula a partir do exemplo do final da aula anterior a fim de intuirmos noções de equações exponenciais e logaritmos.

Exemplo: (Livro de Manuel Paiva) Para compreender o que é um *logaritmo*, considere uma potência de base positiva e diferente de 1, como $3^5 = 243$, e ao expoente dessa potência damos o nome de logaritmo. Nesse exemplo, em especial, dizemos que 5 é logaritmo de 243 na base 3. Em símbolos temos:

$$3^5 = 243 \implies \log_3 243 = 5.$$

O decorrer da aula seria o momento de definirmos e tecermos as propriedades operatórias dos logaritmos, e apresentar os logaritmos naturais ou neperianos, como também são conhecidos.

No final da aula seria lançado um problema onde aparece o número de Euler na sua resolução, para motivar as resoluções das aulas seguintes, tendo como referenciais (PAIVA, 2000) e (FACCHINI, 2006), além de algumas questões de vestibulares.

Exemplo: (Livro de Facchini)(FGV-SP) Curva de aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão $Q = 700 - 400 \cdot e^{-0,5t}$, onde Q é a quantidade de peças produzidas por um funcionário mensalmente e t são os meses de experiência. Usando $e \approx 2,7183$. Responda:

a) De acordo com essa expressão, quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência deverá produzir aproximadamente por mês?

Resolução:

$$Q = 700 - 400 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} \implies Q = 700 - 400 \cdot e^{-1} \implies Q = 700 - \frac{400}{2,7183} \implies Q \approx 552.$$

Portanto, com experiência de 2 meses, um funcionário produz aproximadamente 552 peças por mês.

b) E um funcionário sem nenhuma experiência deverá produzir mensalmente quantas peças?

Resolução:

$$Q = 700 - 400 \cdot e^{-0,5 \cdot 0} \implies Q = 700 - 400 \cdot e^0 \implies Q = 700 - 400 \implies Q = 300.$$

Logo, sem experiência um funcionário produz 300 peças mensalmente.

c) Compare os resultados dos itens a e b e verifique se há coerência entre eles?

Comparando esses resultados, vemos que um funcionário com 2 meses de experiência tem um desempenho de produção quase que o dobro do funcionário sem experiência. Isso revela uma importante coerência entre os resultados.

Material utilizado: power point, calculadora, quadro branco.

5ª e 6ª aula: Funções exponenciais e logarítmica

Inicialmente apresentariamos outras formas de se obter o número de Euler, sem necessariamente demonstrá-las.

Neste momento, falaríamos das funções exponencias, e em especial as do tipo $f(x) = b \cdot e^x$, e dos logaritmos naturais. Onde apresentariamos diversas aplicações. A aula teria como base um resumo do Capítulo sobre funções exponenciais e logarítmicas abordado neste trabalho. Usaríamos bastante exemplos, afim de se trabalhar essas aplicações.

Material utilizado: Apresentação em powerpoint. quadro branco.

7ª e 8ª aula: Importantes aplicações do número de Euler

As duas aulas seriam dedicadas a resolução de exercícios. Onde, no 1º momento, seria dado desafios, para no 2º o momento, a busca da resolução e possíveis dúvidas.

Material utilizado: Quadro branco, lista de exercícios.

Exercício 1: Quando ocorre um terremoto, há uma energia que é liberada sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Existe uma escala, chamada de escala Richter, por meio da qual podemos relacionar as energias liberadas por dois terremotos. As indicações de dois terremotos, nessa escala, são representadas por R_1 e R_2 e estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = \ln N$, onde N mede a razão entre as energias liberadas. Supondo que houve um terremoto para o qual $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 5$, Calcule o valor de N . [Adaptado de Facchini, 2006)].

Dado: (Use $e \approx 2,71$)

Resolução:

Primeiramente iremos substituir os valores atribuídos para R_1 e R_2 no problema e desenvolver os cálculos em seguida.

$$8 - 5 = \ln N \implies 3 = \ln N,$$

e usando a definição de logaritmos :

$$N = e^3 = (2,71)^3 \implies N = 19,902511,$$

que é a razão entre as energias liberadas nos terremotos R_1 e R_2 .

Exercício 2: (Unicamp-SP) A função $L(x) = a \cdot e^{bx}$ fornece o nível de iluminação (em luxes), de um objeto situado a x metros de uma lâmpada. Responda: a) Calcule os valores numéricos das constantes a e b , sabendo que um objeto a 1 m de distância da lux recebe 60 luxes e que um objeto a 2 m de distância recebe 30 luxes.

Resolução:

Primeiramente iremos substituir os valores atribuídos para x no problema e desenvolver os cálculos em seguida. Para $x = 1$ teremos que $L(x) = 60$.

Dessa forma,

$$a \cdot e^b = 60, \implies a = \frac{60}{e^b}. \quad (1)$$

Agora, fazendo $x = 2$ obteremos $L(x) = 30$. Dessa forma,

$$a \cdot e^{2b} = 30 \implies a = \frac{30}{e^{2b}}. \quad (2)$$

Igualando as equações (1) e (2), segue que:

$$\frac{60}{e^b} = \frac{30}{e^{2b}} \implies \frac{e^{2b}}{e^b} = \frac{30}{60} \implies e^b = \frac{1}{2}.$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros na última igualdade acima e usando a definição e propriedades dos logaritmos, obtemos:

$$\ln e^b = \ln \frac{1}{2} \implies b = \ln 1 - \ln 2 \implies b = 1 - \ln 2 = -\ln 2. \text{ Logo, } b = -\ln 2.$$

Fazendo a aplicação desse valor de b encontrado acima na equação (1) e usando a definição e propriedades dos logaritmos, concluímos que:

$$a = \frac{60}{e^{-\ln 2}} \implies a = \frac{60}{e^{\ln 2 - 1}} \implies \frac{60}{2^{-1} = 120}.$$

Portanto o valor de $a = 120$ e $b = -\ln 2$.

b) Considerando que um objeto receba 15 luxes, calcule a distância entre a lâmpada e esse objeto.

Resolução:

Dos resultados acima obtemos a função $L(x) = 120 \cdot e^{-\ln 2 \cdot x}$. Daí, se $L(x) = 15$,

$$120 \cdot e^{-\ln 2 \cdot x} = 15 \implies (e^{-\ln 2})^x = \frac{15}{120} \implies (e^{-\ln 2})^x = \frac{1}{8}.$$

Aplicando o logaritmo natural em ambos os membros na última igualdade acima e usando a definição e propriedades dos logaritmos, obtemos:

$$\begin{aligned} \ln(e^{-\ln 2})^x &= \ln \frac{1}{8} \implies \\ x \cdot \ln(e^{-\ln 2}) &= \ln 2^{-3} \implies \\ x \cdot (-\ln 2) &= -3 \ln 2 \implies \\ -x &= -3 \implies \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Exercício 3: (UNB-DF) O crescimento populacional em condições ideais é regido, aproximadamente, pela função $P(t) = P_o \cdot e^{kt}$, em que t é a variável tempo, k é a taxa de crescimento por unidade de tempo, P_o é a população inicial e $P(t)$ é a população no instante t . Essa mesma função modela também o decaimento radioativo, sendo que, P_o é a massa inicial do material radioativo e k depende do material.

Considere $\ln 2 = 0,7$ e $\ln 3 = 1,1$; aproximadamente e julgue os itens abaixo:

a) Se $P_0 = 72$ e $k = 0,1$; $\ln(P(10)) < 5$,

Resolução: Utilizando os dados acima, obtemos

$$\begin{aligned} P(10) &= 72 \cdot e^{0,1 \cdot 10} \implies \\ &= 72 \cdot e. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \ln(P(10)) &= \ln(72 \cdot e) \implies \\
 &= \ln 72 + \ln e \implies \\
 &= \ln 2^3 \cdot 3^2 + 1 \implies \\
 &= \ln 2^3 + \ln 3^2 + 1 \implies \\
 &= 3\ln 2 + 2\ln 3 + 1 \implies \\
 &= 3 \cdot (0,7) + 2 \cdot (1,1) + 1 \implies \\
 &= 2,1 + 2,2 + 1 \implies \\
 &= 5,3 > 5.
 \end{aligned}$$

Logo, essa alternativa está errada.

b) Uma cultura de 100 bactérias, inicialmente, reproduz-se em condições ideais e, 12 horas após, existem 400 bactérias. Então, dois dias (48 horas) depois do início da experiência, existirão mais do que 21600 bactérias.

Resolução: Utilizando os dados acima obtemos

$$P(12) = 100 \cdot e^{k \cdot 12} = 400.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}
 100 \cdot e^{k \cdot 12} &= 400 \implies \\
 e^{k \cdot 12} &= \frac{400}{100} \implies \\
 e^{k \cdot 12} &= 4 \implies \\
 e^{k \cdot 12} &= 2^2.
 \end{aligned}$$

Aplincando o logaritmo natural em ambos os membros da última igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \ln e^{k \cdot 12} &= \ln 2^2 \implies \\
 k \cdot 12 \ln e &= 2 \ln 2 \implies \\
 k \cdot 12 &= 2 \cdot 0,7 \implies \\
 k &= \frac{1,4}{12} = \frac{7}{60}.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}P(48) &= 100 \frac{7}{60} \cdot 48 \\ &= 100 \cdot e^{\frac{28}{5}} \\ &= 100 \cdot e^{5,6} .\end{aligned}$$

Usando e com uma aproximação de duas casas decimais, obtemos

$$\begin{aligned}P(48) &\approx 100 \cdot 265,84 \\ &\approx 26584 .\end{aligned}$$

Logo, essa alternativa está correta.

c) Uma amostra de material radioativo reduz-se a $\frac{3}{4}$ de sua quantidade inicial depois de 33600 anos. Então, é correto afirmar que, após 56000 anos, a sua massa estará reduzida a menos da metade da massa inicial.

Resolução: Utilizando os dados acima obtemos

$$\begin{aligned}P(33600) &= P_o \cdot e^{k \cdot 33600} \\ &= \frac{3}{4} P_o .\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}P_o \cdot e^{k \cdot 33600} &= \frac{3}{4} P_o \\ e^{k \cdot 33600} &= \frac{3}{4} .\end{aligned}$$

Aplincando o logaritmo natural em ambos os membros da última igualdade

assim,

$$\ln e^{k \cdot 33600} = \ln \frac{3}{4} \implies$$

$$k \cdot 33600 \ln e = \ln \frac{3}{4} \implies$$

$$k \cdot 33600 = \ln 3 - \ln 4 \implies$$

$$k = \frac{\ln 3 - \ln 4}{33600} \implies$$

$$k = \frac{\ln 3 - 2 \ln 2}{33600} \implies$$

$$k = \frac{1,1 - 2,07}{33600} \implies$$

$$k = \frac{-0,3}{33600} \implies$$

$$k = \frac{-1}{112000}.$$

Com isso,

$$P(t) = P_o \cdot e^{\frac{-1}{112000} \cdot 56000}$$

$$= P_o \cdot e^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{P_o}{\sqrt{e}}.$$

Mas, como podemos observar $\sqrt{e} < 2$, logo $\frac{P_o}{\sqrt{e}} > \frac{P_o}{2}$, Portanto, a alternativa c) está incorreta.

Capítulo 5

Considerações finais

O presente Trabalho teve como desafios mostrar algumas maneiras pelas quais podemos definir o número de Euler e como a partir dele o conhecimento matemático e de áreas afins se desenvolveram ao longo dos tempos, além de tentar aproximar esse número, através de uma linguagem especial, ao ensino básico. Para isso, foi exibido um pouco da história, que torneia o mistério do seu surgimento, ligado as experiências comerciais do século XVII. Também apresentamos as suas aplicações em ramos diversos das ciências, que ele conseguiu aproximar.

No intuito de aproximar o número de Euler da educação básica, abordamos uma proposta de sequência didática, partindo da definição desse número a partir da fórmula de montante na capitalização composta e finalizando com aplicações que envolvem situações do dia-a-dia, por meio de uma modelagem matemática, com o uso das funções do tipo exponencial de base e e dos logaritmos Naturais.

O que motivou a escolha deste tema foi uma lista de exercícios proposta pelo professor de Cálculo, que apresentava aplicações de série numéricas e funções. Além disso, o fato do número e ser irracional e ainda assim presente em diversos exercícios, da referida lista, foi outro fator.

Então, como legado, essa abordagem tenta acima de tudo servir de ajuda a professores, para adaptarem os problemas apresentados na sequência didática apresentada e utilizarem-na no ensino médio, promovendo uma integração entre: os conhecimentos matemáticos, o cotidiano e as outras ciências.

Referências Bibliográficas

- BASSANEZI, R. C. *Modelagem matemática: teoria e prática*. São Paulo: Contexto, 2015.
- BRASIL, M. da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica do. *Parâmetros curriculares Nacionais: Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias. Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.
- BRASIL, M. de Educação do. *Base Nacional Comum Curricular: educação é a base*. Brasília: Ministério da Educação, 2017.
- EVES tradução: Hygino H. Domingues; livro de:Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Unicamp, 2008.
- FACCHINI, W. *Matemática para a escola de hoje: livro único*. São Paulo: FTD, 2006.
- FLEMMING, D. M. *Cálculo A: Funções, Limites, Derivação e Integração*. São Paulo: Pearson, 2006.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise volume 1*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2010.
- LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- MOAR, E. *e: a história de um número*. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- MORGADO, P. C. P. C. C. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- NETO, A. C. M. *Fundamentos do Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- PAIVA, M. R. *Matemática Volume 1*. São Paulo: Moderna, 2000.
- RODRIGUES, G. L. *Cálculo diferencial e integral III: Introdução ao estudos das equações diferenciais[livro eletrônico]*. Curitiba: InterSaber, 2018.
- SPERRANDIO, D. *Cálculo Numérico*. São Paulo: Pearson, 2014.
- STEWART tradução EZ2 Translate: livro de J. *Cálculo, volume 2*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- WALPOLE, R. E. *Probabilidade e estatística para engenharia e ciências. tradução de Luciane F. Pauleti Viana*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

Apêndice A

Axiomas de Peano e Módulo de um número real

A.1 Axiomas de Peano

Decorridos muitos milênios, é possível hoje descrever e realizar a construção dos números naturais $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, por conta de uma notável síntese feita pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) no limiar do século XX. Essa síntese deu origem aos chamados *Axiomas de Peano*. Segundo os Axiomas de Peano:

- (i) Todo número natural n tem um sucessor e esse sucessor é único;
- (ii) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- (iii) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro natural;
- (iv) Seja $X \subset \mathbb{N}$ um subconjunto com as seguintes propriedades:

$$(1) 1 \in X;$$

(2) se $n \in X$ então o sucessor de n , $n + 1$, também está em X . Nestas condições $S = \mathbb{N}$.

O que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência desses axiomas. O princípio (iv), também chamado de *Princípio de Indução* estabelece a unicidade de \mathbb{N} e pode ser enunciado sob a forma de propriedades em vez de conjuntos, sendo base para um método de demonstração de proposições. Ele se formula assim:

"Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Supunhamos que

$$(1^*) P(1) \text{ é válida;}$$

(2*) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n + 1)$. Então $P(n)$ é válida para qualquer que seja o número natural n ."

Exemplo: Vamos aqui mostrar uma aplicação do princípio de indução, demonstrando a desigualdade de Bernoulli, tão importante em demonstração de desigualdades: $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, para todo n natural e todo $h > -1$.

Resolução:

i) Como $(1 + h)^1$ e $1 + 1h$ são ambos iguais a $1 + h$, para $n = 1$ essa desigualdade é verdadeira.

ii) Suponha que para algum k natural ela seja verdadeira, isto é, $(1 + h)^k \geq 1 + kh$ e mostremos que para $k + 1$, $(1 + h)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)h$. Para isso, multiplique a ambos os membros da desigualdade $1 + h$, que por ser positivo, obtém-se:

$$(1 + h)(1 + h)^k \geq (1 + kh)(1 + h).$$

Observe que pelo fato de $nh^2 \geq 0$,

$$(1 + h)^{k+1} \geq (1 + kh)(1 + h) = 1 + (k + 1)h + nh^2 \geq 1 + (k + 1)h.$$

Dessa forma, mostramos que $(1 + h)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)h$, e isso implica que $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, para todo n natural. Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, para todo n natural e todo $h > -1$.

A.2 Módulo de um número real

Definição A.2.1 Seja x um número real. Definimos como módulo ou valor absoluto de x , representado por $|x|$, como sendo x , se $x \geq 0$ e $-x$ se $x < 0$. Assim, dado x real, tem-se

$$\begin{cases} |x| = x & \text{se } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Dessa definição, notemos que $|x|$ é o maior valor entre os elementos x e $-x$, denotado:

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Com isso, $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$. Da segunda desigualdade obtemos que $-|x| \leq x$ e portanto, $-|x| \leq x \leq |x|$, para todo x real.

Teorema A.2.2 Sejam x, a números reais, as seguintes afirmações são equivalentes:

1) $-a \leq x \leq a$;

$$2) |x| \leq a .$$

Demonstração: Se $-a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \leq a$ então, $x \leq a \Leftrightarrow a \geq |x|$. A última equivalência se deve ao fato de $|x|$ ser o máximo dos valores x e $-x$.

Teorema A.2.3 *Sejam x e y números reais, valem as relações:*

$$i) |x + y| \leq |x| + |y|;$$

$$ii) |x| - |y| \leq |x - y| .$$

Demonstração:

(i) Observe que $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, e adicionando membro a membro essas desigualdades, obtemos $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$.

Pelo teorema A.2.2 isso significa que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(ii) Em virtude de (i), $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \implies |x| \leq |x - y| + |y|$, logo $|x| - |y| \leq |x - y|$.

Apêndice B

Sequências e limite de funções

B.1 Sequências Numéricas

As noções de sequência numérica estão estreitamente ligadas aos processos de contagem e ao desenvolvimento dos sistemas de numeração. Essas noções surgiram inicialmente das necessidades cotidianas dos antigos povos, como os egípcios, que procuraram estabelecer padrões como o da enchente do Rio Nilo. Para isso, eles passaram a observar as subidas do rio para ter conhecimento do melhor período para plantação e assim garantir o alimento de sua família. Perceberam que as inundações ocorriam logo depois que a estrela Sírius se levantava a leste, um pouco antes do Sol, e que esse fenômeno acontecia a cada 365 dias, criando assim um calendário solar. Baseando em (LIMA, 2010), apresentaremos uma parte desse estudo de sequência numérica e limite de funções.

Definição B.1.1 *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ e tomando valores no conjunto dos reais.*

O valor de $x(n)$, para todo n natural, será representado por x_n é chamado de *termo de ordem n* , ou *n - ésimo termo* da sequência. Além disso, denotaremos uma sequência por $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, ou simplesmente por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $x(\mathbb{N}) = \{x_n\}$ para o *conjunto dos elementos* da sequência. É necessário fazer essa diferenciação, por que o conjunto de valores pode ser finito, porém a sequência pode possuir infinitos elementos.

Exemplo: A sequência $x_n = 0$ para todo n par e $x_n = 1$ para n ímpar pode representada por $(1, 0, 1, 0, \dots)$ e o conjunto de seus valores é $x(\mathbb{N}) = \{0, 1\}$.

Uma sequência de números reais (x_n) é

1. limitada superiormente quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq b$, para todo n natural.
2. limitada inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq a$, para todo n natural.

3. limitada quando o conjunto dos seus termo é limitado. Ou seja, existem números $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x_n \leq b$, para todo n natural. Logo, todos os seus termos pertencem ao intervalo real $[a, b]$. Ou seja, (x_n) é uma sequência limitada se, e somente se, ela for *limitada inferiormente*, $a \leq x_n$, e *limitada superiormente*, $x_n \leq b$. Caso contrário ela é ilimitada.

Lema B.1.1 *Uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, $(|x_n|)$ é limitada.*

Demonstração:

\Rightarrow) Se (x_n) é limitada, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para algum número real $c > 0$, todo intervalo $[a, b]$ está contido no intervalo $[-c, c]$, Para isso, basta tomarmos $c = \max\{|a|, |b|\}$. Assim, $x_n \in [-c, c]$ ou seja, $|x_n| \leq c$ e então concluímos que $(|x_n|)$ é limitada.

\Leftarrow) Se $(|x_n|)$ é limitada, então existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $-c \leq |x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, (x_n) é limitada. Dessa forma concluímos que toda sequência (x_n) é limitada se, e somente se, $(|x_n|)$ é limitada.

Para todo $i \in \mathbb{N}$,

- (x_n) é crescente se $x_i < x_{x+i}$
- (x_n) é decrescente $x_i > x_{x+i}$
- (x_n) é não decrescente $x_i \leq x_{x+i}$
- (x_n) é não crescente $x_i \geq x_{x+i}$.

As sequências crescente, decrescente, não decrescente e não crescente são chamadas de *monótonas*.

Definição B.1.2 *Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o limite de uma sequência (x_n) se para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, qualquer que seja $n > n_0$. Escrevemos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ ou } \lim x_n = a$$

Quando $\lim x_n = a$, diz-se que (x_n) é converge para a ($x_n \rightarrow a$). Uma sequência que possui limite é dita *convergente*. Caso contrário, chama-se *divergente*.

Corolário B.1.3 *O limite de uma sequência constante é igual ao valor dessa constante.*

Demonstração: De fato, se (x_n) é uma sequência constante, $x_n = c$ para todo natural maior do que 1, então, para todo $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - c| = 0 < \epsilon$.

Teorema B.1.4 (*Unicidade do limite*) *Seja $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$.*

Demonstração: Para essa demonstração, basta tomarmos $\epsilon = \frac{b-a}{2}$, com $a \neq b$. Notemos que $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ são disjuntos, Pois, caso contrário, teríamos $|a - x| < \epsilon$ e $|x - b| < \epsilon$ e conseqüentemente, $|a - b| \leq |a - x| + |x - b| < 2\epsilon = |a - b|$, um absurdo, caso $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (b - \epsilon, b + \epsilon)$. Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e, portanto, x_n não é elemento do intervalo $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ para todo $n > n_0$. Logo não se tem $\lim x_n = b$.

Teorema B.1.5 *Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para a .*

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots)$ uma subsequência de (x_n) . Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies |x_n - a| < \epsilon$. Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $n_{1_0} > n_0$. Então $n_i > n_{1_0} \implies n_i > n_0 \implies |x_{n_i} - a| < \epsilon$. Logo $\lim x_{n_i} = a$.

Teorema B.1.6 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $a = \lim x_n$. Tomando $\epsilon = 1$, por definição, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \in \mathbb{N} \implies |x_n - a| < 1$. Portanto, segue pela desigualdade triangular que

$$|x_n| \leq |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Consideremos o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$ e tomando $c = x_1$ e $d = a + 1$, todos os valores de (x_n) então contidos no intervalo fechado $[x_1, a + 1]$, portanto, (x_n) é limitada.

Teorema B.1.7 (*Bolzano-Weierstrass*) *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Suponha que (x_n) seja uma sequência monótona decrescente e limitada, isto é, $(x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq M)$ para algum $M > 0$. Então, M é uma cota superior de $A = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, logo A possui um supremo, digamos $\sup A = a$ e nesse caso $\lim(x_n) = a$. Dado $\epsilon > 0$, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a - \epsilon < x_n \leq a < a + \epsilon \implies a - \epsilon < x_n < a + \epsilon.$$

Portanto, $|x_n - a| < \epsilon$ e (x_n) é convergente. Os outros casos são tratados analogamente.

Teorema B.1.8 *Sejam $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ e C um número real qualquer então*

1. $\lim C a_n = C a$;

2. $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$;
3. $\lim(a_n b_n) = ab$;
4. se $\lim a_n = 0$ e (b_n) for limitada então $\lim(a_n b_n) = 0$;
5. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$,

Demonstração:

1. Se $C = 0$, então $Cx_n = 0$ para todo n natural e segue do corolário B.1.3 que $\lim Cx_n = \lim 0 = Ca = 0$. Suponha agora que $C \neq 0$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies |x_n - a| < \frac{\epsilon}{|C|}$. Logo,

$$n > n_0 \implies |Cx_n - Ca| = |C||x_n - a| < |C| \frac{\epsilon}{|C|} = \epsilon.$$

2. Provemos que $\lim(a_n + b_n) = a + b$ (provar que $\lim(a_n - b_n) = a - b$ é análogo, basta fazermos $|b - b_n| = |b_n - b|$). Dado $\epsilon > 0$, existem n_1, n_2 naturais tais que $n > n_1 \implies |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ e $n > n_2 \implies |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Escolhendo $n > \max\{n_1, n_2\}$ e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

3. Como toda sequência (x_n) limitada é convergente, podemos tomar $L > 0$ tal que $|b_n| < L$, para todo n natural. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \implies |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2L} \text{ e } n > n_2 \implies |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|+1}.$$

Então, para $n > \max\{n_1, n_2\}$ e usando novamente a desigualdade triangular, teremos

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n - a(b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2L} + |a| \cdot \frac{\epsilon}{2|a|+1} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

4. Seja $L > 0$ tal que $|b_n| < L$, para todo $n \geq 1$. Dado $\epsilon > 0$, tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies |a_n| < \frac{\epsilon}{L}$. Então, para $n > n_0$,

$$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\epsilon}{L} \cdot L = \epsilon.$$

Portanto $a_n b_n$ converge pra zero.

5. Se mostrarmos que $\frac{1}{b_n}$ converge para $\frac{1}{b}$, segue do item 3 que

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

Tomemos, inicialmente, $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ para $n > n_1$. Para tais valores de n ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{1}{b} \right| \frac{|b_n - b|}{|b_n|} \leq \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b| - |b_n - b|} \\ &< \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b_n - b|}{|b| - |b|/2} = \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b|. \end{aligned}$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, tomemos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_2 \implies |b_n - b| < \frac{\epsilon|b|^2}{2}$. Portanto, para $n > \max\{n_1, n_2\}$,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\epsilon|b|^2}{2} = \epsilon$$

Definição B.1.9 Uma sequência (x_n) de números reais tem limite infinito ou limite tende a mais infinito, e escreve-se $\lim x_n = +\infty$, quando para todo $A > 0$, fixado arbitrariamente, pudermos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \implies x_n > A$. Em outras palavras, para qualquer valor real $A > 0$, existem um número finito de índices n tais que $x_n > A$.

Toda sequência ilimitada superiormente (x_n) tem limite infinito pois uma vez que $x_{n_0} > A$, que todo x_n com $n > n_0$ e consequentemente $x_n > x_{n_0} > A$.

Exemplo: A sequência $(a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots)$ é ilimitada superiormente quando $a > 1$. Portanto, $\lim a^n = +\infty$.

B.1.1 Progressões Aritméticas (PA)

A PA é um tipo de sequência que aparecem, por exemplo, quando tratamos de grandezas que sofrem variações iguais, ou seja, quando observamos aumentos (ou reduções) constantes.

Definição B.1.10 Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e é representada pela letra r .

Por definição, para avançar um termo em uma progressão aritmética (a_1, a_2, \dots, a_n) de razão r , podemos escrever:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= r \\ a_3 - a_2 &= r \\ a_4 - a_3 &= r \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= r. \end{aligned}$$

Somando essas $n - 1$ igualdades membro a membro, obtemos $a_n - a_1 = (n - 1)r$ e de um modo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$ é a fórmula para o termo geral de uma PA.

Teorema B.1.11 A soma S_n dos n primeiros termos da progressão aritmética é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração: Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ uma progressão aritmética de razão r , $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ ou $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + \dots + a_1$.

Somando as duas igualdades acima obtemos

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_n + a_1) \\ 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) \\ 2S_n &= n(a_1 + a_n) \\ S_n &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \end{aligned}$$

B.1.2 Progressões Geométricas (PG)

As progressões geométricas estão presentes sempre que estudamos uma grandeza variável que cresce (ou decresce) com uma taxa (porcentagem) de crescimento constante.

Definição B.1.12 Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica na qual o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior é constante. Esse quociente constante é chamado de razão da progressão e é representado pela letra q .

Por definição, para avançar um termo em uma progressão geométrica (a_1, a_2, \dots, a_n) de razão q , podemos escrever:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1q \\ a_3 &= a_2q \\ a_4 &= a_3q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1}q \end{aligned}$$

Multiplicando essas $n - 1$ igualdades membro a membro, obtemos $a_n = a_1 q^{n-1}$ e de um modo geral, $a_n = a_1 q^{n-1}$ é a fórmula para o termo geral de uma PG.

Teorema B.1.13 *A soma dos n primeiros termos da progressão geométrica de razão q é*

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Demonstração: Seja uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ de razão q ,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (\text{B.1})$$

ou

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}. \quad (\text{B.2})$$

Multiplicando (B.2) por q , obtemos:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n. \quad (\text{B.3})$$

Subtraindo (B.1) de (B.3), encontramos:

$$\begin{aligned} qS_n - S_n &= (a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n) \\ &\quad - (a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}) \\ &= a_1 q^n - a_1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1 &\implies S_n(q - 1) = a_1 q^n - a_1 \\ &\implies S_n = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1} \\ &\implies S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \\ &\implies S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

Dada uma progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \dots)$ indicamos a soma dos seus termos, escrevendo $S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ e chamamos essa soma de *série geométrica* e usando o teorema acima, vemos que quando n tende ao infinito, q^n tende a zero caso $-1 < q < 1$. E para simplificar uma série geométrica, usamos o sinal de somatório (\sum), indicando a série S_∞ por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Quando $q \neq 0$ e $-1 < q < 1$, essa série converge para $\frac{a_1}{1-q}$, pois a_n converge para zero quando n tende ao infinito. Assim,

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

B.2 Limite de uma função

Definição B.2.1 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ não vazio é limitado superiormente se existe um número real b tal que, para todo $x \in X$, $x \leq b$ ou seja $X \subset (-\infty, b)$. Nesse caso b é um cota superior para X . X é limitado inferiormente, se existe um número real a tal que, para todo $x \in X$, $x \geq a$ ou seja $X \subset (a, +\infty)$. Nesse caso, a é um cota inferior para X .

Seja $f : x \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X .

Definição B.2.2 Diremos que o número real L é o limite de uma função $f(x)$ quando x tende para a , simbolizado por

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

para significar que para cada $\epsilon > 0$ arbitrário, encontramos $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Simbolicamente temos,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Por definição, isso significa que quando $x \in (a - \delta, a + \delta)$ se aproxima de a , com um erro menor do que δ , $f(x)$ se aproxima de L , desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo de a (não necessariamente a pertence a X).

Teorema B.2.3 (Unicidade do Limite). Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : x \rightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X . Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Demonstração B.2.4 Dado qualquer $\epsilon > 0$, existem δ_1 e δ_2 tais que para $x \in X$, $0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$ e $0 < |x - a| < \delta_2 \implies |f(x) - L_2| < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $\delta_{\min} = \{\delta_1, \delta_2\}$. Como a é ponto de acumulação de X , podemos encontrar um $\bar{x} \in X$ tal que $0 < |\bar{x} - a| < \delta_{\min}$. Assim, $|L_1 - L_2| \geq |L_1 - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Isto nos dá que $|L_1 - L_2| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, logo $L_1 = L_2$.

Teorema B.2.5 (Função Limitada). Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de X . Se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ então f é limitada numa vizinhança de a , isto é, existem $A > 0$, $\delta > 0$ tais que $0 < |x - a| < \delta$, com $x \in X$ implica $|f(x)| < A$.

Demonstração B.2.6 Seja $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Tomando $\epsilon = 1$ na definição de limite, obtemos $\delta > 0$ tal que $x, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < 1 \implies |f(x)| < |L| + 1$, via o uso da desigualdade triangular. Tomemos então esse δ e ponhamos $A = |L| + 1$.

A seguir será apresentada uma proposição muito importante para os cálculos operacionais dos limites de funções, demonstradas no livro de Neto (2015).

Definição B.2.7 *Sejam a $X \subset \mathbb{R}$, as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$. A função f é contínua em a se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Isso equivale a dizer que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua quando f for contínua em todos os pontos $a \in X$.*

Proposição B.2.1 *Sejam a $X \subset \mathbb{R}$, as funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação de X . Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então:*

i) $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = L \pm M$;

ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$;

iii) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$.

Apêndice C

Derivadas de funções

C.1 Noções de derivadas de funções

Definição C.1.1 Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$ um ponto de acumulação de X . A função f é derivável em a se existir o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

e tal limite será denominado a **derivada** de f em a , sendo denotada por $f'(a)$.

Se tomarmos $h = x - a$, obtemos $x = a + h$. Observe que se h tende zero, então x tende a a . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Corolário C.1.2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função constante, f é derivável em \mathbb{R} e $f'(a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Tomando $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$$

A derivada de uma função f representa, geometricamente, o coeficiente angular da reta tangente a f que passa pelo $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, o coeficiente angular da reta de uma função constante é nulo.

Proposição C.1.1 Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. Se a função f é derivável em a , então ela é contínua em a .

Demonstração: Observe que

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a).$$

Da proposição C.1.1 e da definição C.1.1

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Logo, a definição C.1.1 garante que f é contínua em a .

Proposição C.1.2 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Demonstração: fazendo $t = \frac{1}{x}$, temos $t \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 0$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Proposição C.1.3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$; ($a > 0, a \neq 1$).

Demonstração: fazendo $t = a^x - 1$, temos

$$a^x = t + 1$$

e aplicando os logaritmos naturais nos em ambos os membros da equação acima, obtém-se

$$\ln a^x = \ln(t + 1) \implies$$

$$x \ln a = \ln(t + 1) \implies$$

$$x = \frac{\ln(t + 1)}{\ln a}.$$

Quando $x \rightarrow 0, x \neq 0, t \rightarrow 0, t \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} \\ &= \ln a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} \\ &= \ln a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}} \\ &= \ln a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln[(t+1)^{\frac{1}{t}}]} . \end{aligned}$$

Agora, usando a proposição C.1.2, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Como aplicação, mostraremos que a derivada de $f(x) = e^x$ é também e^x .

Resolução: por definição,

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} . \end{aligned}$$

Com uso da proposição C.1.3, obtemos

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x ,$$

como queríamos mostrar.