



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática



GPS: a Matemática por trás e algumas reflexões

Joel Cordeiro de Souza

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Cuiabá - MT

março de 2021

GPS: a Matemática por trás e algumas reflexões

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Joel Cordeiro de Souza e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 22 de março de 2021.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Profa. Dra. Anna Ligia Oenning Soares
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – Profmat, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S729g Souza, Joel Cordeiro de.
GPS: a Matemática por trás e algumas reflexões / Joel Cordeiro de Souza. -- 2021
xii, 54 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Satélite. 2. Geometria. 3. Superfícies esféricas. 4. Trilateração. 5. Interdisciplinaridade. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: GPS: a Matemática por trás e algumas reflexões

Autor: mestrando Joel Cordeiro de Souza

Dissertação defendida e aprovada em 22 de março de 2021.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Doutor Aldi Nestor de Souza** (Presidente Banca/orientador)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. **Doutora Anna Ligia Oenning Soares** (Membro Interno)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

3. **Doutor Junior Cesar Alves Soares** (Membro Externo)

Instituição: Unemat - campus Barra do Bugres

Cuiabá, 22/03/2021.



Documento assinado eletronicamente por **Junior Cesar Alves Soares, Usuário Externo**, em 22/03/2021, às 12:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Anna Ligia Oenning Soares, Usuário Externo**, em 22/03/2021, às 12:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **ALDI NESTOR DE SOUZA, Usuário Externo**, em 23/03/2021, às 18:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3359547** e o código CRC **9E697401**.

A Deus em primeiro lugar, pois foi ele o principal orientador. Por isso devo gratidão e reconhecimento. Em segundo lugar a minha doce amada esposa Heula e aos meus filhos Benjamim e Davi, que sempre me incentivaram nos estudos.

Agradecimentos

A Deus, o grande arquiteto, que guia nossas vidas e sempre nos orienta no caminho da retidão.

A minha esposa Heula Guilherme de Almeida, pela dedicação, paciência, entusiasmo e companheirismo enquanto me dedicava aos difíceis estudos desse curso. Obrigado pela companheira fiel que sempre foi. Eu te amo muito.

Aos filhos que a vida me presenteou, Benjamim Almeida de Souza e Davi Almeida de Souza, pelos quais luto todo dia para um futuro melhor e para que eles possam viver em um mundo mais igualitário.

A toda a minha família, em especial a minha mãe Vera Lúcia Cordeiro de Souza e ao meu pai João Pereira de Souza. A todos muito obrigado.

Aos meus amigos do curso Profmat. Que essa amizade nunca se acabe.

A todos os professores do Profmat que ministraram disciplinas para nossa turma. Com certeza parte dessa conquista é de vocês também.

Ao meu orientador Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza, pela orientação, pelas dicas e cobranças que me fizeram crescer muito na busca do conhecimento. Espero que esse projeto esteja à altura do que o senhor desejava quando me propôs esse desafio.

O meu muito obrigado a todos.

Em seu coração o homem planeja o seu caminho, mas o Senhor determina os seus passos.

(Bíblia Sagrada, Provérbios 16,9)

Resumo

Neste trabalho serão apresentados os princípios matemáticos por trás da operação do sistema de posicionamento global denominado GPS. Será vista uma abordagem histórica que revela a evolução dos meios de localização até chegarmos a essa tecnologia. Para entender como se desenvolve a matemática usada no GPS, serão utilizados os resultados da geometria plana, espacial e analítica. São citados alguns princípios físicos básicos como velocidade média, velocidade da luz e efeito Doppler. Serão apresentadas algumas definições como latitude, longitude e altitude para entender como este sistema pode localizar pessoas, veículos ou qualquer coisa com precisão, bastando ter um receptor GPS. Se discutirá também que, subjacentes e associados a tecnologia do GPS, há diversos e gravíssimos problemas, principalmente, naquilo que passou a se chamar de uberização do trabalho. Trabalhadores em situação miserável, sem salário fixo, sem direitos trabalhistas, sem proteção, fazendo uso, para trabalhar, de tecnologia de última geração. E a partir daí, serão propostas atividades interdisciplinares a serem desenvolvidas na educação básica, de forma a despertar a curiosidade dos alunos sobre os conhecimentos científicos nelas contidos.

Palavras chave: Satélite, geometria, superfícies esféricas, trilateração, interdisciplinaridade.

Abstract

This master's thesis presents the mathematical principles behind the operation of the global positioning system called GPS. There will be seen a historical approach that reveals the evolution of the means of location until the arrival of this technology. In order to understand how the mathematics used in GPS is developed there are multiple components that must be grasped, such as flat, spatial and analytic geometry. Some basic physical principles will be mentioned, such as average speed, speed of light and Doppler effect. The focus will be on some definitions like latitude, longitude and altitude to understand how this system can accurately locate people, vehicles or anything, just having a GPS receiver. In addition, it will be discussed that, underlying and associated with GPS technology, there are several and very serious problems, especially in what has come to be called uberization of work. Workers in a miserable situation, without a fixed salary, without labor rights, without protection, making use of the latest technology to work. And from there, some interdisciplinary activities are proposed to be developed in basic education, in order to arouse students' curiosity about the scientific knowledge contained therein.

Keywords: Satellite, geometry, spherical surfaces, trilateration, interdisciplinary.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de figuras	xii
Introdução	1
1 Um breve histórico	3
2 Explorando a geometria do globo terrestre	10
2.1 Localização de pontos	10
2.2 Coordenadas no espaço	12
2.3 Distância entre dois pontos no espaço	14
2.4 Esfera	14
2.5 Pontos coplanares	17
2.6 A intersecção de quatro superfícies esféricas	19
2.7 A escolha dos eixos de nosso sistema de coordenadas	21
3 Alguns refinamentos e aplicabilidades do GPS	27
3.1 Alguns refinamentos	27
3.1.1 GPS diferencial (DGPS)	27
3.1.2 Receptor de GPS em alta velocidade	28
3.1.3 Correções relativísticas	29
3.2 Aplicabilidade do GPS	30
3.3 O futuro	32

3.3.1	GPS e Galileo	32
3.3.2	Problemas do atual GPS	32
4	O GPS e a uberização	34
5	Sugestão de atividades	43
5.1	Atividade 1	43
5.2	Atividade 2	44
5.3	Atividade 3	45
5.4	Atividade 4	47
5.5	Atividade 5	48
5.6	Atividade 6	49
	Considerações finais	50
	Referências Bibliográficas	54

Lista de Figuras

1.1	Balestilha	4
1.2	Astrolábio	4
1.3	Quadrante	5
1.4	Kamal	5
1.5	Bússola	6
1.6	Os seis planos orbitais dos satélites	8
1.7	Disposição das estações	9
2.1	Hemisférios da Terra	11
2.2	Latitude e longitude	12
2.3	Sistema de coordenadas (x, y, z)	13
2.4	Ponto $P = (x, y, z)$	13
2.5	Sistema de eixos ortogonais	14
2.6	Esfera S de centro C e raio r	15
2.7	Superfície esférica	16
2.8	Quatro superfícies esféricas diferentes	19
2.9	Latitude $\theta = m(\angle AOP)$ e longitude $\varphi = m(\angle COA)$	22
2.10	Um pequeno ângulo de intersecção na parte esquerda (a perda de precisão) e um grande ângulo para a direita.	25
2.11	Melhor angulação de localização	26
3.1	Difração atmosférica	28
3.2	Elipsoide	29
4.1	Uberização	36
4.2	Greve de taxistas contra Uber na Espanha	38
4.3	Manifestação contra o aplicativo em Londres, Inglaterra	39

4.4	Taxistas se reúnem nos arredores do Estádio Olímpico de Berlim para protestar contra os aplicativos de compartilhamento de passeio, na Alemanha	39
4.5	Taxistas protestam contra o uso do aplicativo Uber, em São Paulo - Brasil	40
4.6	Entregadores de aplicativo fazem protestos por melhores condições de trabalho	41
5.1	Motorista de Aplicativo	48

Introdução

O GPS (Global Positioning System) virou parte integrante da vida das pessoas. Por conta dele, não pedimos mais informações sobre endereço. A pergunta “onde fica a rua tal?” sumiu do mapa. Os motoristas em geral e os de Uber em particular, os entregadores de aplicativos, as pessoas, mesmo andando a pé, se orientam e se localizam em silêncio, fazendo uso dessa tecnologia.

Até muito pouco tempo, segundo Alves (2008), Rousseau e Saint-Aubin (2015), Lima (2013) e Pereira (2014), o GPS era uma mercadoria exclusiva dos Estados Unidos, mais precisamente do departamento de defesa daquele país. Isso significava, por exemplo, que a suspensão das informações nele contidas, para outras regiões do mundo, poderiam ser feitas de modo unilateral, sem nenhuma consulta a outrem.

Muito recentemente, outros países, como China, Rússia e União Europeia desenvolveram também tal tecnologia e entraram na disputa pelo comércio espacial.

O sistema de GPS é uma interessante aplicação da matemática, tendo sido abordado tanto em materiais didáticos como em Alves (2008), Rousseau e Saint-Aubin (2015), quanto em obras acadêmicas, Lima (2013) e Pereira (2014). Todos eles tem o objetivo de “fazer com que os alunos entendam os fundamentos matemáticos para funcionamento do GPS”. O tema da dissertação busca despertar a curiosidade dos alunos e aproximar o estudo da matemática com a realidade e as mudanças que essa realidade vem causando no dia a dia das pessoas, dando maior significado aos assuntos teóricos propostos.

O esforço de se localizar tem sido um grande desafio do homem desde os primórdios da humanidade, mas para responder à pergunta “onde estou?” os seres humanos passaram por um processo de evolução muito interessante.

O problema de localização só foi resolvido após o GPS ser colocado em operação. Obviamente, antes dele já existiam outros métodos de posicionamento, mas nenhum outro

método se compara ao GPS. Este sistema nos permite conectar a física, a matemática e a geografia para realizar uma ampla gama de projetos interdisciplinares. Em essência, o GPS utiliza formas geométricas, além de conhecimentos de física e de geografia. Mas neste trabalho nos deteremos em explicar os aspectos matemáticos e os conhecimentos básicos de física e geografia para entender como este sistema funciona.

Dividimos nosso trabalho em cinco capítulos, sendo o primeiro capítulo “Um breve histórico”, no qual relatamos como os sistemas de localização foram aperfeiçoados até chegar ao GPS. No segundo capítulo, intitulado “Explorando a geometria do globo terrestre”, apresentamos os conceitos relacionados à localização, como latitude, longitude, meridiano e paralelo. Também provamos alguns teoremas de geometria espacial e analítica, relembramos alguns tópicos de álgebra linear, para termos os conceitos básicos necessários para compreender a matemática utilizada no GPS. No terceiro capítulo, “Alguns refinamentos e aplicabilidade do GPS”, explicamos alguns tipos de refinamentos, apresentamos algumas aplicabilidades comuns citadas em Rousseau e Saint-Aubin (2015) e o futuro do GPS para melhor concepção dessa tecnologia. Já no quarto capítulo, “O GPS e a uberização”, trazemos alguns relatos de experiência e também uma reflexão sobre o que passou a se chamar de uberização do trabalho e finalizamos com o quinto capítulo, que concluímos com “Sugestão de atividades”, a serem desenvolvidas com alunos do ensino básico.

Capítulo 1

Um breve histórico

Neste capítulo será abordado um breve histórico das possibilidades que a humanidade buscou para localização na superfície do planeta.

Segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015), a evolução do processo de localização humana se deu a partir da utilização de diversos instrumentos e metodologias no decorrer dos séculos, desse modo seu estudo é de grande importância para compreendermos como chegamos aos nossos avançados sistemas de geolocalização da atualidade.

Na antiguidade o processo de localização era feito a partir dos elementos naturais que cercam o homem, como as árvores, rios, montanhas e pedras. Entretanto, por sua mutabilidade, não ofereciam uma forma segura de localização, podendo apenas ser utilizados para deslocamentos locais.

A procura por meios de localização mais confiáveis teve um grande salto com a descoberta da localização por meio de astros e estrelas. A partir de então foram criados diversos instrumentos que buscavam o aperfeiçoamento deste tipo de geolocalização. Descreveremos alguns deles a seguir.

I. Balestilha: De acordo com Gonçalves (2020), é constituído por uma vara de madeira de secção quadrada – quatro escalas – chamada de virote, com aproximadamente 80 centímetros de comprimento, veja Figura 1.1. Ao longo dela corre uma pequena peça de madeira – de dimensões diferentes para cada uma das escalas – chamada soalha. Em cada uma das arestas do virote encontra-se uma escala de acordo com as dimensões da soalha a utilizar. Para usá-lo, o observador olha pelo orifício, na extremidade do virote, de forma a ver a estrela tangente à aresta superior da soalha e o horizonte tangente à aresta inferior.

Foi instrumento de orientação muito usado na época dos descobrimentos, pelos navegadores, para estes se orientarem no mar, no século XV e XVI. Era utilizado para determinar a latitude a que um navio se encontrava através da medição da altura de um astro (como o sol), ou da distância angular entre dois astros, conseguindo assim a localização do navio.

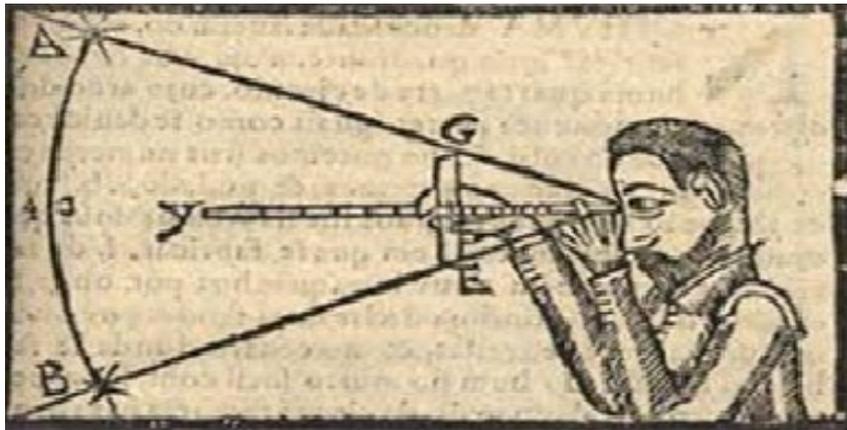


Figura 1.1: Balestilha

II. **Astrolábio:** De acordo com Lima (2013), é um antigo instrumento astronômico, muito utilizado no mundo árabe desde a alta idade média. Disseminado pela Europa a partir do século X, suas origens remontam ao século II. Ele permite determinar as posições de estrelas no céu e resolver problemas astronômicos mais complexos. Ainda conforme Lima (2013), o astrolábio é uma roda graduada que tinha presa ao seu centro uma seta móvel que quando alinhado com o astro, indicava na roda a altura do mesmo, como mostra a Figura 1.2.



Figura 1.2: Astrolábio

III. **Quadrante:** De acordo com Lima (2013), é um instrumento que tinha a forma de um quarto de círculo graduado de 0^0 a 90^0 e um fio de prumo no centro, tinha duas pínulas com um orifício, por onde se fazia pontaria à Estrela Polar, veja Figura 1.3. Era geralmente feito de madeira ou latão. Este instrumento permitia determinar a distância entre o ponto de partida e o lugar onde a embarcação se encontrava, cujo cálculo se baseava na altura desse astro. Conforme Pereira (2014), ele foi um instrumento bastante utilizado no século XVIII.



Figura 1.3: Quadrante

IV. **Kamal:** Segundo Pereira (2014), o kamal era formado por uma pequena tábua retangular presa a um corda com vários nós suspensos, a partir de seu centro. A estes nós correspondia uma graduação em isba (unidade angular equivalente a $1^0 37'$, usada pelos navegadores árabes no Índico, na determinação das latitudes). Prendia-se o nó com os dentes, ou encostava-se a mão com o nó junto ao rosto, e esticava-se o fio com a peça de madeira afastada do rosto, visando o horizonte pelo lado inferior da tábua e a estrela pelo lado oposto, veja na Figura 1.4. Com a mão livre contavam os nós que sobravam para efetuarem o cálculo. Foi utilizado entre os séculos XVIII e XIX.

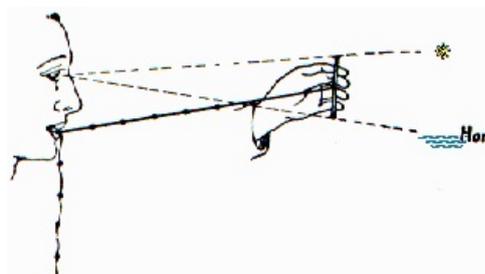


Figura 1.4: Kamal

V. **Bússola:** Conforme Pereira (2014), é um instrumento utilizado para orientação geográfica. Durante muito tempo esse instrumento foi importante na navegação como forma de localização, e até hoje é considerado uma das maiores invenções da humanidade. Seu funcionamento se dá por meio de uma agulha magnetizada colocada de maneira horizontal. A bússola é um objeto capaz de localizar os pontos cardeais (norte, sul, leste e oeste), veja na Figura 1.5.

Portanto, ela possui em seu interior a rosa dos ventos que indica os pontos cardeais, colaterais e subcolaterais da Terra. Isso porque ela atua sob o magnetismo terrestre, sendo atraída para a direção dos polos do planeta. Assim como os outros instrumentos citados acima, foi amplamente utilizada nas grandes navegações.



Figura 1.5: Bússola

Ainda conforme Pereira (2014), mesmo considerando todos os avanços desses instrumentos produzidos pelo homem, é possível ver que existiam limitações, uns não poderiam ser usados numa noite nublada (com exceção da bússola), outros durante o dia, sobretudo por não concederem a posição da embarcação, mas apenas forneciam a direção a ser seguida.

Com o desenvolvimento da ciência e a descoberta da forma da terra, produziram os conceitos de latitude e longitude, sendo a latitude simplesmente determinada através da estrela polar. Já a longitude, exigia a determinação entre o horário local e o horário de Greenwich (cada hora equivale a 15 graus, já que $\frac{360}{24} = 15$). Porém, os relógios daquela época não eram confiáveis, pois não suportavam as intempéries das viagens marítimas (balanço de navio, variação de temperatura e umidades).

O inglês John Harrison em 1761 inventou um relógio marítimo de 5 polegadas de diâmetro que superava o movimento das ondas, além das mudanças de umidade e temperatura do mar que sempre ameaçaram o bom funcionamento do delicado mecanismo de relógios da época (até então, os marinheiros utilizavam dois relógios para conseguir se

localizar: um deles era acertado todo dia de acordo com a posição do sol no céu e o outro mantinha a mesma hora do porto de onde o navio havia zarpado.

O processo de localização teve grande avanço somente quando o homem começou a utilizar as ondas de rádios para localizar veículos e tropas, durante a segunda guerra mundial. Essas localizações eram feitas com auxílio do efeito Doppler, propriedade da física que relaciona a velocidade do móvel com a diferença entre as frequências com que as ondas de rádio refletem e a frequência com que são refletidas, e desse modo estabelecia-se as distâncias entre o móvel e as emissoras. Sendo essa localização definida pelo processo de trilateração (Três circunferências cujo intersecção é um único ponto). São exemplos de sistemas desenvolvidos com essa tecnologia: DECCA, OMEGA e LORAN (log range navigation - navegação de longo alcance, em inglês). Esses sistemas apresentavam limitações, como o pequeno alcance dos sinais de rádio e da disponibilidade de um número pequeno de estações.

Em quatro de outubro de 1957 o mundo pôde ouvir pela primeira vez as transmissões de rádio feito pelo satélite Sputnik 1, lançado pela União Soviética, começando assim o início à “corrida espacial”. Isso causou um grande pânico no mundo ocidental e especialmente nos Estados Unidos que lançaram em 1958 o seu primeiro satélite, o Explorer 1. Dois anos mais tarde os EUA lançam o satélite Transit 1B, colocando em execução o primeiro sistema de navegação por satélite baseado no efeito Doppler. Sendo um sistema bidimensional, por só calcular a posição de móveis em velocidades baixas e por existir muita interferência nos satélites, teve seu uso restrito basicamente à navegação marítima.

Segundo o Departamento Cartografia (1999), na década de 70, começou a se desenvolver o projeto que iria revolucionar o processo de navegação mundial. Em 1978 foi iniciado o rastreamento dos primeiros satélites NAVSTAR (Navigation Satellite with Time and Ranging), dando origem ao GPS (Global Positioning System), recebendo investimentos e melhorias constantes, entrando em pleno funcionamento em 1991.

De acordo com Rousseau e Saint-Aubin (2015), a constelação de satélites GPS foi concluída pelo Departamento de defesa dos Estados Unidos em julho de 1995 e seu uso foi permitido ao público geral. Quando entregue, o sistema consistia em 24 satélites projetados de maneira que pelo menos 21 deles estariam operando em 98% do tempo.

Já em 2005, o sistema era composto por 32 satélites, dos quais 24 estavam em

operação, e qualquer um dos outros satélites estava pronto para ser colocado em operação, caso algum falhasse.

A composição do sistema é dividida em três partes, denominadas segmentos. A primeira é a parte espacial, composta por vinte e quatro satélites ativos que circulam a Terra em órbitas elípticas (quase circulares), conforme podemos observar na Figura 1.6 retirada Rousseau e Saint-Aubin (2015). Eles giram em seis órbitas diferentes a uma altitude de aproximadamente 20.200 km (cada órbita contém 4 Satélites, espaçadas por 60 graus uma da outra e com uma inclinação de 55 graus em relação ao plano que contém a linha do equador), de modo que, quando vistos de qualquer ponto da Terra, haja sempre pelo menos quatro satélites no horizonte. Cada satélite tem quatro relógios de alta precisão (dois césio e dois rubídio).

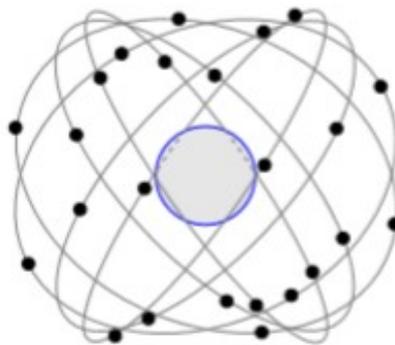


Figura 1.6: Os seis planos orbitais dos satélites

A segunda é a parte de controle (veja Figura 1.7, retirada de Pereira (2014)), que consiste em cinco estações estrategicamente localizadas perto da linha do equador. Estando elas: no Colorado Springs (Estados Unidos), Havaí (no Pacífico), Kwajalein (Ilhas Marshall no Pacífico), Ilha de Ascensão (Atlântico Sul), Ilha de Diego Garcia (no Oceano Índico). Elas têm a função de monitorar satélites e corrigir suas órbitas quando necessário. A de Colorado Springs é a principal estação; além de monitorar os satélites que passam pelos EUA, reúne os dados das estações de monitoramento e de campo, processando-os e gerando os dados que efetivamente serão transmitidos aos satélites.



Figura 1.7: Disposição das estações

O terceiro é o grupo de usuários representado por todos os receptores distribuídos pelo mundo. Cada receptor pode calcular sua posição capturando sinais de pelo menos quatro satélites. Alguns dispositivos possuem mapas que permitem planejar rotas de viagem, sugerir rotas alternativas mais rapidamente e evitar congestionamentos. Também são usados na navegação marítima e aérea, geodésia, topografia, agricultura de precisão, cartografia e logística, rastreamento de veículos e cargas, etc.

Capítulo 2

Explorando a geometria do globo terrestre

Neste capítulo, vamos definir conceitos relacionados à localização, como latitude, longitude, meridiano e paralelos, provar alguns teoremas de geometria espacial e analítica, e lembrar alguns tópicos de álgebra linear, que podem ser encontrados nas referências Alves (2008), Lima (1993), Fitz (2008), Pereira (2014) e Rousseau e Saint-Aubin (2015). Desta forma, teremos os conhecimentos básicos necessários para compreender a matemática utilizada no GPS.

2.1 Localização de pontos

Já mencionamos que a latitude e a longitude são contribuições importantes dos humanos para seu posicionamento global. Para entender melhor esses conceitos, identificaremos alguns elementos com nomes conhecidos.

Segundo Fitz (2008), para determinar a localização precisa de um ponto na superfície, a Terra pode ser dividida em partes iguais, chamadas hemisférios.

De acordo com o sistema de convenções adotado, o hemisfério norte está localizado ao norte da linha do equador e o hemisfério sul ao sul da mesma linha. Chamamos respectivamente de **pólo Norte** e **pólo Sul** os pontos **N** e **S**, intersecções do eixo polar com a superfície da terra. O hemisfério ocidental, que está localizado à oeste do meridiano padrão (Greenwich); e o último é o hemisfério oriental que está a leste do mesmo meridiano. O Greenwich passa por Londres, na Inglaterra. Ele foi selecionado como meridiano

de referência na Conferência da Carta Internacional do Mundo ao Milionésimo, que foi realizada em Bonn, na Alemanha, em 1962.

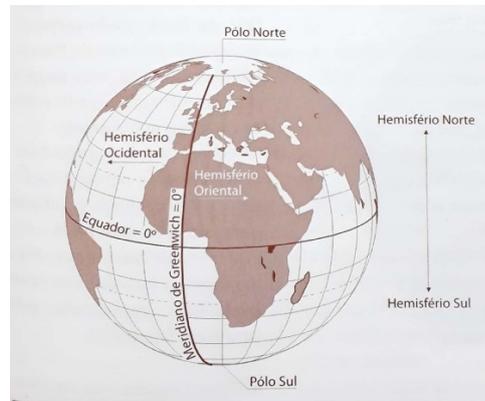


Figura 2.1: Hemisférios da Terra

Podemos observar na Figura 2.1 retirada de Fitz (2008), que os **meridianos** são semicírculos com extremidades em ambos os pólos. Destacamos o meridiano de Greenwich que, por definição, tem longitude 0° . Segundo Fitz (2008), é assim chamado porque passa pelo famoso Observatório Real de Greenwich, no sudeste de Londres. O plano que o engloba divide a Terra em duas partes (hemisfério oeste e hemisfério leste).

Já os paralelos são cada um dos cortes horizontais, ou seja, cada círculo que corta a Terra, perpendicularmente em relação aos meridianos. Podemos concluir que o equador é o único paralelo tido como círculo máximo.

Por outro lado, dois outros conceitos importantes também devem ser adicionados (ver Figura 2.2, retirada de Fitz (2008)). São eles:

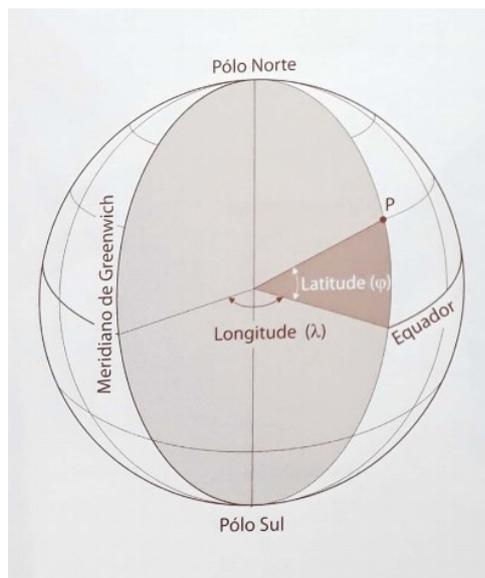


Figura 2.2: Latitude e longitude

Definição 1. *Dado um ponto P na superfície terrestre, a latitude de P é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de P até o Equador e que está contido em um meridiano. A latitude se mede de 0 grau a 90 graus e, dependendo do hemisfério onde P está, é classificado em N (North - Norte, em inglês) ou S (South - Sul, em inglês).*

Definição 2. *Dado um ponto P na superfície terrestre, a longitude de P é a medida (em graus, minutos e segundos) do arco que vai de P até o meridiano de Greenwich e que está contido em um paralelo. A longitude mede de 0 grau a 180 graus e, dependendo do hemisfério onde P está, é classificado em E (East - leste, em inglês) ou W (West - oeste, em inglês).*

2.2 Coordenadas no espaço

Agora iremos fornecer importantes definições, lemas e teoremas para melhor entender o processo de localização no dispositivo GPS.

Segundo Lima (1993), o sistema de eixo ortogonal $OXYZ$ consiste em três eixos OX , OY e OZ , e sua origem O é a mesma. Portanto, podemos observar na Figura 2.3 retirada de Pereira (2014), que quaisquer dois deles são perpendiculares.

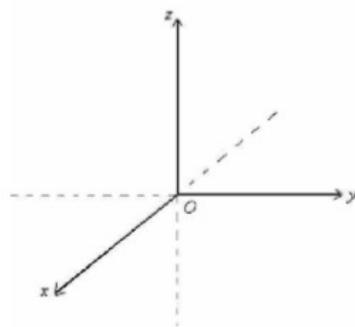


Figura 2.3: Sistema de coordenadas (x, y, z)

Cada par de eixos define um plano de coordenadas. Portanto, existem três planos de coordenação: xy , yz e zx .

Dado um sistema de coordenadas do espaço, cada ponto no espaço pode ser associado a uma coordenada composta por três números (x, y, z) , que podem ser obtidas da seguinte forma:

- 1 - Traça por P uma reta paralela ao eixo OZ .
- 2 - Sendo a interseção dessa reta com o plano xy o ponto P' .
- 3 - As coordenadas de $P'(x, y)$ no sistema de coordenadas xy são as duas primeiras coordenadas de P .

4 - A terceira coordenada de P é o comprimento do segmento PP' . Se P está acima do plano xy o sinal do comprimento é positivo, e se estiver abaixo do plano xy seu sinal de comprimento é negativo. (ver Figura 2.4 retirada de Pereira (2014)).

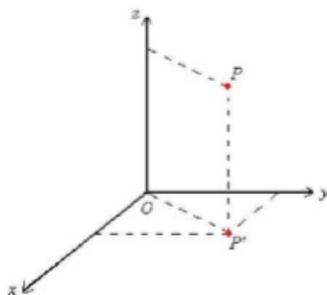


Figura 2.4: Ponto $P = (x, y, z)$

2.3 Distância entre dois pontos no espaço

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço (Figura 2.5).

De acordo com Pereira (2014), dados os pontos $P = (x, y, z)$ e Q (a projeção de P no plano Oxy) do espaço de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem O . Aplicando o teorema de Pitágoras, primeiramente no triângulo $\triangle QOR$, podemos determinar a distância $d(O, Q) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e depois, no triângulo $\triangle OPQ$, concluímos que a distância de P até O é dada por:

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

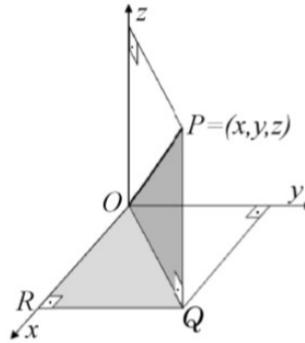


Figura 2.5: Sistema de eixos ortogonais

De modo geral, a distância entre os pontos $P = (x, y, z)$ e $C = (q, r, s)$ é dada por:

$$d(C, P) = \sqrt{(x - q)^2 + (y - r)^2 + (z - s)^2}.$$

2.4 Esfera

Definição 3. Dado um ponto C e um segmento de medida r , chama-se **esfera** S de centro C e raio r ao conjunto de todos os pontos P do espaço, tais que a distância $d(P, C)$ seja menor ou igual a r (Figura 2.6).

$$S = \{P \in \mathbb{R}^3 | d(P, C) \leq r\}$$

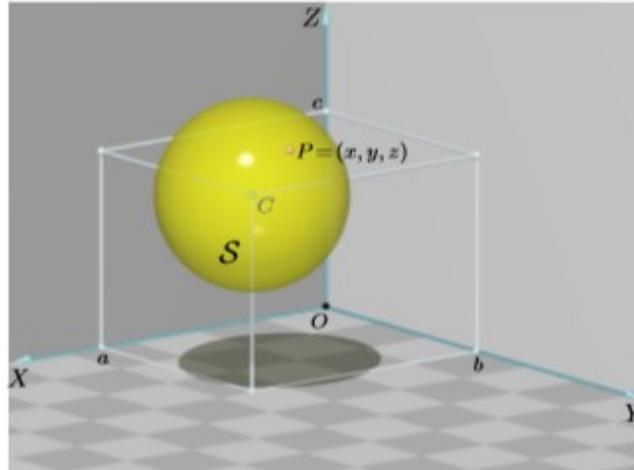


Figura 2.6: Esfera S de centro C e raio r

Sejam $C = (u, v, w)$ e $P = (x, y, z)$ as coordenadas de centro C e de um ponto genérico da superfície esférica S' contida na esfera S em relação a um sistema de eixos $OXYZ$.

Então:

$$P \in S' \iff d(P, C) = r \iff \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2} = r$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última identidade, obtemos a equação da superfície esférica S' no sistema $OXYZ$:

$$S' : (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2 = r^2. \quad (2.1)$$

A equação (2.1) é denominada equação reduzida de S' . Desenvolvendo o quadrado de (2.1), obtém-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xu - 2yv - 2zw + u^2 + v^2 + w^2 - r^2 = 0$$

Sejam a, b, c e d números reais tais que $a = -2u, b = -2v, c = -2w$ e $d = u^2 + v^2 + w^2 - r^2$.

Logo, a equação será escrita da seguinte maneira:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad (2.2)$$

a qual é chamada de equação geral da superfície esférica.

Definição 4. *Seja um ponto C e um número real r , chamamos de superfície esférica de raio r e centro C , indicada por S' , o conjunto de todos os pontos P do espaço*

tais que $d(P, C) = r$, em que $d(P, C)$ denota a distância entre P e C . Na figura abaixo o ponto P pertence à superfície esférica (Figura 2.7).

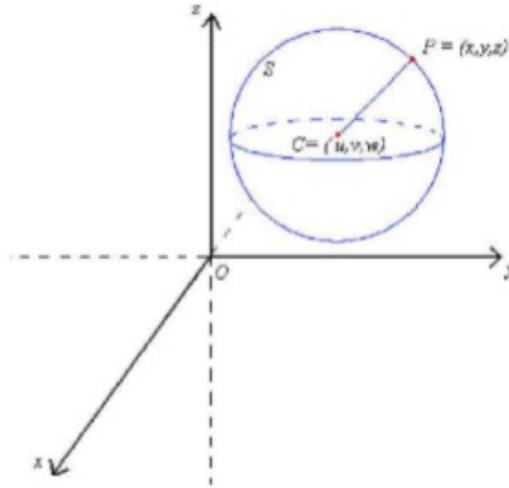


Figura 2.7: Superfície esférica

Segundo Pereira (2014), nem toda equação escrita na forma da equação (2.2) é uma superfície esférica, porque quando escrita na forma da equação (2.1), r deve ser positivo, e

$$r^2 = u^2 + v^2 + w^2 - d = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d}.$$

Então,

$$r > 0 \text{ se } a^2 + b^2 + c^2 > 4d.$$

Exemplo 1: Mostre que a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ representa uma superfície esférica.

Resolução:

Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 &= 0 \\ \iff (x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) + z^2 &= 7 \\ \iff (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + z^2 &= 7 + 1 + 1 \\ \iff (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 &= 9. \end{aligned}$$

Portanto, a equação representa a superfície esférica S' de centro $C = (1, -1, 0)$ e raio $r = 3$.

Exemplo 2: Verificar se a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 17 = 0$ representa uma superfície esférica.

Resolução:

Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 17 &= 0 \\ \iff (x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + (z - 2z)^2 &= -17 \\ \iff (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + (z - 2z + 1)^2 &= -17 + 4 + 9 + 1 \\ \iff (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 &= -3 \leq 0.\end{aligned}$$

Portanto, a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 17 = 0$, não representa uma superfície esférica e sim um conjunto vazio, visto que não existem x , y e z tais que a soma de seus quadrados seja negativa.

2.5 Pontos coplanares

Lema 1. Os pontos A , B , C e D em \mathbb{R}^3 são coplanares se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = 0,$$

sendo que cada linha é dada pelas coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB} = B - A$, $\overrightarrow{AC} = C - A$ e $\overrightarrow{AD} = D - A$.

Demonstração. Se quatro pontos distintos A , B , C e D em \mathbb{R}^3 são coplanares, então \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} também são coplanares. Logo, um desses vetores é combinação linear dos demais. Suponhamos, sem perda de generalidade, que \overrightarrow{AB} seja combinação linear de \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} , então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $B - A = \alpha \cdot (C - A) + \beta \cdot (D - A)$ então:

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot (C - A) + \beta \cdot (D - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot (C - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta \cdot (D - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix}.$$

Logo, segue que

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} (C - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} + \beta \cdot \begin{vmatrix} (D - A) \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix}.$$

como os determinantes possuem linhas iguais, obtemos:

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0.$$

Para a recíproca, se

$$\begin{vmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{vmatrix} = 0.$$

então temos duas possibilidades: Um dos vetores linha do determinante é nulo. Suponhamos que seja $B - A$. Isso implica que $A = B$, que é um absurdo, pois os pontos são distintos. Resta a possibilidade de um dos vetores linha, $B - A$ por exemplo, ser combinação linear dos outros dois. Assim, $B - A = \alpha \cdot (C - A) + \beta \cdot (D - A)$ o que implica que os vetores $B - A$, $C - A$ e $D - A$ são coplanares, Portanto, A , B , C e D do \mathbb{R}^3 são coplanares.

2.6 A intersecção de quatro superfícies esféricas

Agora, vamos apresentar um importante teorema para garantir a unicidade da localização determinada pelo GPS, que é o processo de trilateração no espaço. Usando este teorema, vamos provar que para o posicionamento de um objeto na terra, precisamos de pelo menos 4 satélites, que serão os centros de 4 esferas diferentes, e chegaremos à conclusão de que a intersecção das 4 esferas será um único ponto veja na Figura 2.8.



Figura 2.8: Quatro superfícies esféricas diferentes

Teorema 1. *Se quatro superfícies esféricas se intersectam e seus centros são não coplanares então essa intersecção consiste de um único ponto.*

Demonstração: 1. *Sejam S_1, S_2, S_3 e S_4 superfícies esféricas de centros C_1, C_2, C_3 e C_4 , respectivamente. Mostraremos que se $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ e C_1, C_2, C_3, C_4 são não coplanares, então $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \{P\}$.*

Dado $x^2 + y^2 + z^2 + a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0$, as equações gerais de S_i , sendo $i = 1, 2, 3, 4$. Ao subtrairmos essas equações duas a duas obtemos equações lineares em x, y e z , uma vez que os termos x^2, y^2 e z^2 são eliminados.

Essas equações lineares determinam o plano que contém o ponto de intersecção correspondente. Por exemplo, subtrair as equações S_1 e S_2 resulta em uma equação do plano que contém $S_1 \cap S_2$.

Considerando os planos que contém $S_1 \cap S_2, S_1 \cap S_3$ e $S_1 \cap S_4$, concluímos que se $P = (x, y, z)$ em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$, então (x, y, z) é a solução do Sistema linear

$$\begin{cases} (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + (d_1 - d_2) = 0 \\ (a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + (c_1 - c_3)z + (d_1 - d_3) = 0 \\ (a_1 - a_4)x + (b_1 - b_4)y + (c_1 - c_4)z + (d_1 - d_4) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Se provarmos que o sistema (2.3) tem uma única solução, a prova do teorema estará concluída, pois a existência de dois pontos diferentes em $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4$ nos levaria a duas soluções distintas para o sistema linear (2.3).

O sistema acima possui uma solução única se:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_1 - a_4 & b_1 - b_4 & c_1 - c_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

De fato, sabemos que os valores de $a_i = -2x_i$, $b_i = -2y_i$ e $c_i = -2z_i$, com $i = 1, 2, 3$ e 4. Logo:

$$D = \begin{vmatrix} -2x_1 + 2x_2 & -2y_1 + 2y_2 & -2z_1 + 2z_2 \\ -2x_1 + 2x_3 & -2y_1 + 2y_3 & -2z_1 + 2z_3 \\ -2x_1 + 2x_4 & -2y_1 + 2y_4 & -2z_1 + 2z_4 \end{vmatrix}$$

$$D = 8 \cdot \begin{vmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 & -z_1 + z_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 & -z_1 + z_3 \\ -x_1 + x_4 & -y_1 + y_4 & -z_1 + z_4 \end{vmatrix}$$

$$D = 8 \cdot \begin{vmatrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Portanto, pelo Lema 1, se os centros C_1 , C_2 , C_3 e C_4 não são coplanares, o determinante acima não é nulo, então (2.3) tem uma única solução.

Obviamente, o simples fato de o sistema linear (2.3) possuir uma única solução, significando que os centros não são coplanares, não significa necessariamente que a intersecção das quatro superfícies esféricas consiste de um único ponto P . Em outras palavras, a hipótese que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \neq \emptyset$ é crucial para a validade do teorema.

A solução final do sistema linear (2.3) nos fornecerá o ponto P que estamos procurando, desde que ele pertença simultaneamente às quatro superfícies esféricas S_1 , S_2 , S_3 e S_4 .

Na aplicação do GPS, o problema não linear tem solução, pois ela é garantida com a presença física do usuário. Logo, esta solução é única, desde que os centros das

esferas sejam não coplanares (o que é garantida pelas órbitas dos satélites, controladas em terra).

Um bom exemplo que ilustra isso é o das superfícies esféricas abaixo:

S_1 : centro $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{3}$

S_2 : centro $(2, 0, 0)$ e raio $\sqrt{2}$

S_3 : centro $(0, 2, 0)$ e raio $\sqrt{2}$

S_4 : centro $(0, 0, 2)$ e raio $\sqrt{2}$

Veja que seus centros são não-coplanares e substituindo os valores do centro e do raio no sistema linear (2.3), temos, neste caso:

$$\begin{cases} 4x - 5 = 0 \\ 4y - 5 = 0 \\ 4z - 5 = 0 \end{cases}$$

Temos, assim, uma única solução do sistema linear $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{4}$ e $z = \frac{5}{4}$. Uma simples verificação mostra que o ponto $P = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ pertence simultaneamente à S_1 , S_2 , S_3 e S_4 de modo que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \left\{ \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right) \right\}$.

2.7 A escolha dos eixos de nosso sistema de coordenadas

Agora, vamos estabelecer a relação entre o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais e as coordenadas geográficas para localizar qualquer ponto na Terra.

Como em Rousseau e Saint-Aubin (2015), para facilitar a tradução das coordenadas absolutas em latitude, longitude e altitude, faremos a seguinte escolha:

- o centro O de nosso sistema de coordenadas será o centro da Terra;
- o eixo z passa pelos dois polos, orientado na direção do polo Norte;
- os eixos x e y ficam ambos no plano equatorial (Equador);
- o eixo x positivo passa pelo ponto de longitude 0 grau (Greenwich);
- o eixo y positivo passa pelo ponto de longitude 90 graus oeste.

Seja P um ponto na superfície da Terra conforme se verifica na Figura 2.9. Podemos concluir que sua latitude e longitude são representadas respectivamente por θ e φ . A altura de P , que denotaremos por h é dada por:

$$h = OP - r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r, \quad (2.4)$$

em que OP é a elevação do ponto P e r é o raio da Terra. Conforme Rousseau e Saint-Aubin (2015), o raio r da Terra é aproximadamente 6.365km. Portanto, a altitude também terá seu valor de medição aproximado. Com relação à altitude, discutiremos mais adiante.

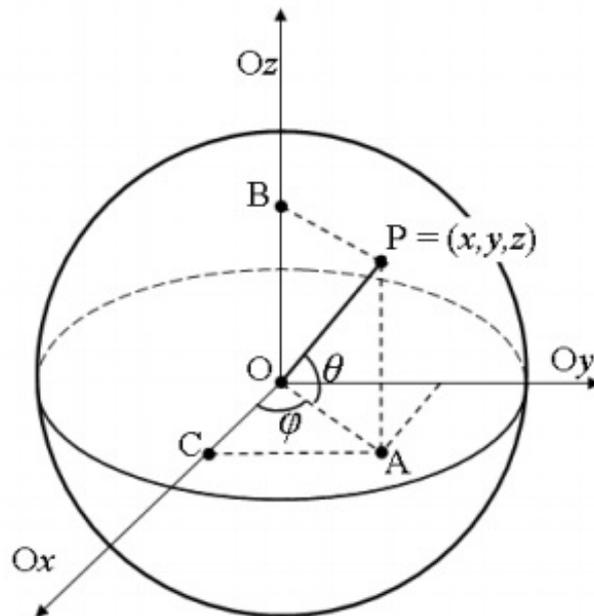


Figura 2.9: Latitude $\theta = m(\angle AOP)$ e longitude $\varphi = m(\angle COA)$

No triângulo retângulo $\triangle OPB$ da Figura 2.9, obtemos:

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Como $\cos(90^\circ - \theta) = \text{sen } \theta$, segue que:

$$\text{sen } \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.5)$$

Cabe ressaltar que esta expressão atribui a θ um único valor que vai de 0^0 a 90^0 quando $z > 0$ e um único valor entre -90^0 e 0^0 quando $z < 0$. No primeiro caso, dizemos que a latitude de P é θ N (Norte) e, no segundo caso, dizemos que a latitude de P é $-\theta$ S (Sul).

Por outro lado, no triângulo retângulo $\triangle OAC$ temos:

$$\text{sen } \varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.6)$$

e

$$\text{cos } \varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.7)$$

Essas expressões definem um único valor entre 0^0 e 180^0 quando $y > 0$. Dizemos que a longitude de P é φ E (Leste). Quando $y < 0$, ele assume um valor entre -180^0 e 0^0 . Nesse caso, a longitude de P é $(-\varphi)$ W (Oeste).

Como exemplo, vamos determinar as coordenadas geográficas do ponto P , cujas coordenadas cartesianas são dadas por $P = (3\sqrt{3} \cdot 10^6, -3 \cdot 10^6, 6\sqrt{3} \cdot 10^6)$. Vamos considerar como unidade de medida o metro.

Solução:

Temos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (3\sqrt{3} \cdot 10^6)^2 + (-3 \cdot 10^6)^2 + (6\sqrt{3} \cdot 10^6)^2 = \\ &= 27 \cdot 10^{12} + 9 \cdot 10^{12} + 108 \cdot 10^{12} = 144 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

e

$$x^2 + y^2 = (3\sqrt{3} \cdot 10^6)^2 + (-3 \cdot 10^6)^2 = 27 \cdot 10^{12} + 9 \cdot 10^{12} = 36 \cdot 10^{12}.$$

Logo, aplicando diretamente as equações (2.5), (2.6) e (2.7), obtemos:

$$\text{sen } \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 10^6}{\sqrt{144 \cdot 10^{12}}} = \frac{6\sqrt{3} \cdot 10^6}{12 \cdot 10^6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-3 \cdot 10^6}{\sqrt{36 \cdot 10^{12}}} = \frac{-3 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^6} = -\frac{1}{2}$$

e

$$\operatorname{cos} \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 10^6}{\sqrt{36 \cdot 10^{12}}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 10^6}{6 \cdot 10^6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, as coordenadas geográficas de P são $\theta = 60^\circ N$ (Norte) e $\varphi = 30^\circ W$ (Oeste). Supondo o raio da Terra igual a $6,4 \cdot 10^6$ metros, da equação $h = OP - r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r$, temos que a altura h de P é:

$$h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - r = \sqrt{144 \cdot 10^{12}} - 6,4 \cdot 10^6 = 12 \cdot 10^6 - 6,4 \cdot 10^6 = 5,6 \cdot 10^6 m.$$

Conforme Rousseau e Saint-Aubin (2015), longitude e latitude são ângulos que serão expressos em graus. Se um ponto (x, y, z) está exatamente na esfera de raio r (em outras palavras, se o ponto está na altitude zero), sua longitude e latitude podem ser encontradas resolvendo-se o sistema de equações seguinte:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{cos} \theta \operatorname{cos} \varphi, \\ y = r \operatorname{cos} \theta \operatorname{sen} \varphi, \\ z = r \operatorname{sen} \theta. \end{cases}$$

Os cálculos da posição por trás do GPS apresentado até aqui funcionaria em um mundo perfeito. Mas como afirma em Rousseau e Saint-Aubin (2015), infelizmente, a vida real é muito mais complicada, já que os tempos medidos são extremamente curtos e devem ser medidos com alta precisão.

Conforme Rousseau e Saint-Aubin (2015), sendo os satélites equipados com relógios atômicos que são bastante caros, eles são bem precisos e por isso permitem estar em uma sincronia apurada. Já os receptores médios, singulares, são dispostos de relógios comuns, cabendo no orçamento das pessoas.

Como o relógio do receptor não possui sincronia com o relógio dos satélites, os resultados gerados contam com um grau de imprecisão muito elevado, associado a essa falta de sincronia. A solução para este problema é simples e matemática: o erro do relógio do receptor é tratado como uma quarta incógnita, que requererá a disponibilidade de mais um satélite. Teremos, assim, um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, possível de ser solucionado. Não é por acaso, portanto, que a configuração orbital do GPS foi concebida de tal forma que pelo menos quatro satélites estejam sempre disponíveis

em qualquer momento aos usuários do sistema. No caso de haver a possibilidade de se trabalhar com satélites adicionais, eles serão utilizados para diminuir o erro das medidas.

Surge outra pergunta: sabendo que em certos pontos da Terra existem mais de quatro satélites transmitindo sinais ao receptor, como ele deve continuar a selecionar os quatro satélites necessários para determinar sua posição?

A resposta deve considerar as tentativas de minimizar os erros. De acordo com Rousseau e Saint-Aubin (2015),

Na realidade, os tempos medidos são todos aproximados. Isto implica serem as distâncias calculadas aos satélites apenas aproximadas.

Graficamente, representaríamos a área de incerteza aumentando a grossura da casca de cada esfera. A intersecção das esferas engrossadas passa a ser um conjunto, cujo tamanho é relacionado à incerteza da solução. Pensando geometricamente, é fácil nos convencer de que, quanto maior o ângulo entre as superfícies de duas esferas engrossadas secantes, menor será o volume do espaço ocupado pela intersecção. No caso oposto, se as esferas intersectarem-se quase tangencialmente, o volume de intersecção (e portanto a incerteza) será maior.

Concluimos que devemos escolher as esferas S_i , que intersectam umas com as outras, com o maior ângulo possível (Rousseau e Saint-Aubin, 2015, p.10).

De acordo com a Figura 2.10 retirada de Rousseau e Saint-Aubin (2015), é fácil se convencer de que quanto maior o ângulo entre as duas superfícies de esferas cortadas espessadas, menor o espaço ocupado pela intersecção. No caso oposto, se as esferas se cruzam quase tangencialmente, o volume (e incerteza) da intersecção será maior.



Figura 2.10: Um pequeno ângulo de intersecção na parte esquerda (a perda de precisão) e um grande ângulo para a direita.

A geometria dos satélites em relação ao usuário é muito importante para melhorar a precisão, podemos ver a seguir na Figura 2.11 retirada de Moraes (2015), que a primeira geometria é boa e a segunda é ruim. Conforme mencionado acima, quando os satélites estão espaçados, a configuração dos quatro satélites será melhor porque isso resultará em um ângulo menor entre as esferas.

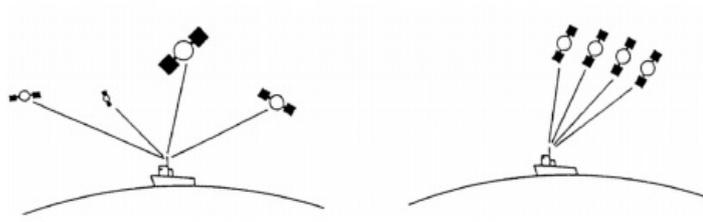


Figura 2.11: Melhor angulação de localização

Capítulo 3

Alguns refinamentos e aplicabilidades do GPS

Como todas as atividades humanas, os sistemas GPS estão sujeitos a erros. Minimizá-los é uma tarefa que, geralmente, envolve mais investimento em tecnologia e a exploração de técnicas de medição mais precisas. Agora, vamos explicar alguns tipos de refinamentos, algumas aplicabilidades e o futuro do GPS para melhor entendimento dessa tecnologia.

3.1 Alguns refinamentos

3.1.1 GPS diferencial (DGPS)

Segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015), “uma fonte de imprecisão no GPS vem do fato de que as distâncias são calculadas usando a constante c , que é a velocidade da luz no vácuo”. De acordo com Máximo e Alvarenga (2013), a velocidade da luz no vácuo é $c = 3 \cdot 10^8$ m/s e em outro meio qualquer é menor do que este valor.

De acordo com Rousseau e Saint-Aubin (2015), os sinais de rádio viajam pela atmosfera à velocidade da luz que só é constante no vácuo. Além disso, ao mudar do vácuo para a atmosfera, os sinais se desviam.

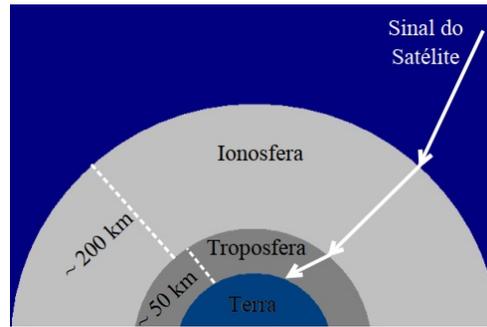


Figura 3.1: Difração atmosférica

Como podemos verificar na Figura 3.1 retirada de Lima (2013), o sinal do satélite ao atingir a ionosfera devido à presença de partículas ionizadas causam um erro de aproximadamente 5m. Depois, ao atingir a troposfera, devido à presença de grande quantidade de vapor d'água, o erro é da ordem de 0,5m.

Rousseau e Saint-Aubin (2015), afirmam que para obter uma melhor aproximação da velocidade média do sinal no trajeto do satélite ao receptor, podemos usar um sistema GPS Diferencial. “A ideia é refinar o valor de c a ser usado no cálculo da distância do satélite”. Podemos fazer isto equiparando o tempo de trânsito do sinal medido pelo receptor e o tempo de trânsito medido por outro em uma posição precisamente conhecida. Isto nos permitiria calcular com precisão a velocidade média da luz ao longo do caminho de um dado satélite ao receptor, o que, por sua vez, resultaria em cálculos de distância mais precisa. Quando ajudados por uma estação fixa, a precisão do GPS passa a ser da ordem de centímetros.

Ainda podemos verificar, conforme Rousseau e Saint-Aubin (2015), que:

O sinal enviado por cada satélite é um sinal aleatório que se repete em intervalos de tempos regulares. O período do sinal é relativamente curto, de forma que a distância coberta pelo sinal num período é da ordem de uns poucos milhares de quilômetros. Quando o receptor vê o início de um período do sinal, ele deve determinar em que momento precisamente este período foi emitido pelo satélite. A priori, temos uma incerteza de um número inteiro de períodos (Rousseau e Saint-Aubin, 2015, p.11).

3.1.2 Receptor de GPS em alta velocidade

Segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015), a instalação de receptores GPS em objetos de alta velocidade (como aviões) é uma aplicação natural. Se o avião precisa pousar em condições climáticas adversas, o piloto precisa sempre saber sua posição exata e o

cálculo deve ser reduzido ao mínimo absoluto.

Ainda conforme Rousseau e Saint-Aubin (2015), “a Terra não é realmente redonda!” Na verdade, como os polos da Terra são ligeiramente achatados, ela pode ser modelada matematicamente como um elipsoide, que é um sólido geométrico formado quando giramos uma elipse em torno de um de seus eixos.

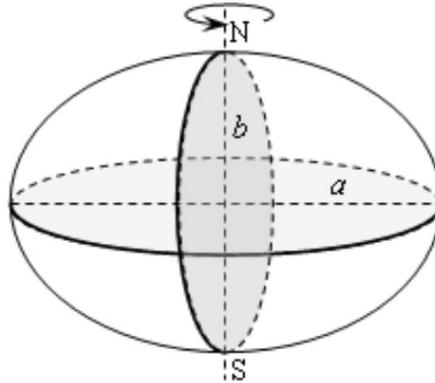


Figura 3.2: Elipsoide

Podemos observar na Figura 3.2 retirada de Lima (2013), uma elipse de eixo maior medindo $2a$ e eixo menor medindo $2b$. Quando giramos em torno do menor eixo, obtemos um elipsoide. No caso da Terra, chamamos de “elipsoide de referência” àquele ao qual os eixos $2a$ e $2b$ são o diâmetro equatorial e a distância entre os dois polos, respectivamente.

Segundo Lima (2013), “atualmente o elipsoide de referência mais usado num contexto de Sistema de Posicionamento Global é o World Geodetic System (do inglês - Sistema Geodésico Mundial), criado em 1984 e conhecido pela sigla WGS-84”.

Rousseau e Saint-Aubin (2015), dizem que o raio da Terra nos polos é de cerca de 6.356 quilômetros e o raio da Terra no equador é de cerca de 6.378 quilômetros, o cálculo da conversão das coordenadas cartesianas (x, y, z) em latitude, longitude e altitude deve ser melhorado para ajustar esse fato.

3.1.3 Correções relativísticas

Rousseau e Saint-Aubin (2015) observam que há uma diferença clara no potencial gravitacional entre os satélites GPS e os usuários na superfície da Terra. A alta velocidade desses satélites, a rotação da Terra e essa diferença de potencial, juntamente com a medição do tempo com precisão de nanossegundos com base em GPS, produzem efeitos

relativísticos importantes. Por outro lado, a sincronização do relógio dos satélites GPS na superfície da Terra e nas órbitas circundantes deve levar em consideração que devido à influência da relatividade geral e especial, o tempo de cada relógio envolvido é ligeiramente diferente. O tempo envolvido no sistema GPS deve vir de um esquema de sincronização auto-consistente, que é obtido através do uso de tempo coordenado (mantido por uma rede de relógio padrão).

“A Teoria da Relatividade Geral prediz um pequeno incremento na velocidade dos relógios a bordo dos satélites”. Como uma primeira aproximação, podemos modelar a Terra como uma enorme esfera não giratória sem carga elétrica. Com a métrica de Schwarzschild, que descreve o impacto da teoria da relatividade geral sob essas condições simplificadas, podemos calcular mais facilmente o impacto. Acontece que essa simplificação é suficiente para capturar os efeitos reais com alta precisão. Ambos os efeitos devem ser considerados ao mesmo tempo, porque apesar das direções opostas, eles são apenas parcialmente compensados.

3.2 Aplicabilidade do GPS

Os GPS podem ser aplicados de inúmeras formas. Vejamos algumas comuns citadas em Rousseau e Saint-Aubin (2015):

- Este aparelho permite que uma pessoa encontre facilmente sua localização em uma área externa. Sendo assim, é muito utilizado por trilheiros, caçadores, canoístas, marinheiros, velejadores e diversos outros.

Grande parte dos receptores permite a marcação dos pontos, sejam pela presença física do operador ou através da inserção das coordenadas no aparelho. O receptor fornece informações como a posição atual, o destino a ser seguido e até mesmo a rota a ser seguida. Os aparelhos mais modernos podem até guardar mapas detalhados, a posição da tela em relação à rota ser a seguida.

- O GPS vem sendo utilizado com frequência em veículos, permitindo ao motorista encontrar o seu caminho até o endereço a ser localizado. Em diversos continentes, os aparelhos vendidos fornecem direções precisas a qualquer endereço.

- Imagine que você tem um mapa antigo e deseja traçar uma rota para seguir nele. A rota pode ter sido salva no GPS junto com a viagem e posteriormente carregada

no computador por meio de um programa apropriado. Esse programa pode sobrepor a rota seguida em um mapa digital. Se você ainda não tem uma versão digital do mapa, pode digitalizá-lo primeiro e, em seguida, (com um programa adequado) marcá-lo com um sistema de coordenadas, bastando mostrar as localizações de três pontos conhecidos.

Os satélites GPS realizam varreduras na superfície terrestre para gerar mapas de grande precisão, oferecendo dados de longitude, latitude e altitude para cada ponto do planeta.

- Nas aeronaves, o GPS é um item essencial, ele permite a diminuição do tamanho dos corredores aéreos, permitindo também que os aviões nos diversos corredores mantenham uma distância segura entre si.

Atualmente o GPS é aplicado na aviação civil em rota oceânica, rota doméstica, área terminal, na orientação para a aproximação sem precisão, orientação do pouso por instrumento categoria I, altimetria da aeronave, detecção e incursão à pista da aeronave.

O GPS será usado para determinar a direção de pouso com precisão, a orientação do rumo de referência, a direção da superfície do aeroporto e a determinação da atitude da aeronave.

Os sistemas de satélite GPS fornecem segurança na aviação para controle de tráfego aéreo e operações de aeronaves. A combinação do sistema GPS e satélites de comunicação na vigilância do espaço aéreo reduzirá a separação horizontal e vertical entre aeronaves no nível de rotas domésticas, economizando combustível e tempo de voo.

- Frotas inteiras de veículos podem ser equipadas com GPS, para possibilitar o rastreamento simultâneo de todos os veículos. Assim, o sistema GPS pode ser acoplado a um sistema de comunicações, transmitindo as coordenadas de cada veículo. Deste modo, uma companhia de aluguel de veículos poderia controlar os limites territoriais impostos no contrato. Outro exemplo é o uso de GPS para o rastreamento da vida selvagem em estudos ambientais.

- O GPS pode ajudar pessoas cegas a seguir determinado trajeto caminhando. Ele foi desenvolvido para proporcionar aos deficientes visuais a possibilidade de conhecer a sua localização e obter informações sobre o percurso a seguir. O usuário coloca o dedo no mapa, o aplicativo dirá onde ele está e fornecerá as coordenadas para chegar ao destino.

- Geógrafos utilizam GPS para medir o crescimento do Monte Everest. Embora sua geleira esteja diminuindo, o Monte Everest cresce lentamente. No intervalo de dois

anos uma expedição sobe ao cume do monte para atualizar sua altura. O GPS foi o instrumento que pôs fim ao conflito de altura entre o monte *K2* e o Everest, consagrando este último como a montanha mais alta do planeta, medindo 8.830m.

- O GPS possui inúmeras aplicações militares. Lembrando que ele foi originalmente desenvolvido com finalidade militar, é atualmente uma orientação precisa para o uso de bombas.

3.3 O futuro

3.3.1 GPS e Galileo

De acordo com Rousseau e Saint-Aubin (2015), os americanos mantiveram por muito tempo o monopólio do GPS no mercado. Entretanto, em 2002 a União Europeia em conjunto com a Agência Espacial Europeia financiaram o desenvolvimento do programa Galileo, como uma alternativa ao GPS. Dois satélites foram lançados em 2011 e mais 28 em 2019.

Ainda segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015), satélites GPS não fornecem informações sobre a qualidade do sinal ou o estado do satélite, resultando numa demora de horas para descobrir um satélite defeituoso. Neste período, a precisão é afetada gravemente. Isto dificulta a orientação por GPS em condições climáticas hostis. Entretanto, os satélites Galileo foram projetados para corrigir esse problema, possibilitando ignorar o sinal emitido por satélites com defeito. Para isso, utiliza de um sistema terrestre que mede a posição real do satélite e compara com sua posição calculada. O sistema envia esta informação ao satélite defeituoso que a repassa ao receptor.

3.3.2 Problemas do atual GPS

Já se passaram mais de duas décadas desde o lançamento do primeiro satélite. Desde que o sistema GPS começou a operar, muitos defeitos se tornaram cada vez mais graves, como os causados por mudanças atmosféricas ou baixa precisão, com erros de até 20 metros.

Mas o principal fator que levou os países europeus a buscar alternativas foi o fato de o GPS ter sido desenvolvido e mantido pelo Departamento de Defesa dos Estados

Unidos. Isso significa que, mesmo que o sinal seja liberado para uso civil, o sistema deve servir, principalmente, às forças armadas dos EUA. Portanto, o exército daquele país tem total liberdade para modificar ou até mesmo desativar os sinais GPS sem prévio aviso.

Para evitar que o sistema fosse usado para atacar os próprios Estados Unidos, o governo também manteve a chamada “disponibilidade seletiva”. Até 2000, o sistema limitava a precisão do uso civil a menos de 100 metros. Embora a contramedida tenha sido desativada hoje, ela ainda existe e pode ser reativada a qualquer momento.

Capítulo 4

O GPS e a uberização

As formas de trabalho vêm sofrendo fortes e contínuas mudanças desde a primeira revolução industrial, na Inglaterra em 1760, quando ocorreu a transição do sistema feudal para o sistema capitalista. Esse atual modelo de produção sistematicamente automatiza o trabalho visando aumento da produção e, conseqüentemente, do lucro por parte dos proprietários. Por outro lado, também sistematicamente, submete trabalhadores a exaustivas jornadas e precárias condições de trabalho e, também, a não raros altos níveis de desemprego (Dutra e Coutinho, 2020, p.205-210).

A tecnologia, à medida em que foi avançando, foi brutalmente modificando as formas de trabalho e nos dias atuais, o uso do GPS tem se tornado presente no processo de locomoção ou transporte comercial, dando origem ao termo desse capítulo “O GPS e a uberização”. Abilio (2019) ressalta que é um “novo estágio da exploração do trabalho [...]” e acrescenta ainda que:

Consolida a passagem do estatuto de trabalhador para o de um nano-empresário-de-si permanentemente disponível ao trabalho; retira-lhe garantias mínimas ao mesmo tempo que mantém sua subordinação; ainda, se apropria, de modo administrado e produtivo, de uma perda de formas publicamente estabelecidas e reguladas do trabalho (Abilio, 2019, p.41-51).

Qualquer pessoa que queira utilizar um transporte que substitua o tradicional serviço de táxi ou serviço público de transporte (ônibus), poderá utilizar um aplicativo como Uber, 99, Pop, etc. Tanto o aparelho celular do cliente como do motorista precisam da tecnologia do GPS para que o cliente seja localizado e levado ao seu destino. Essa tecnologia está também largamente presente nos serviços de entregas, especialmente de alimentos. Tais serviços são conhecidos como “delivery”, palavra de origem da língua

inglesa que significa “entrega”. Mas as questões que desejamos refletir aqui são:

1) Como o GPS é usado na exploração do trabalho e na precarização dessas relações?

2) Qual o papel da educação frente às mudanças recentes e suas implicações na uberização?

O GPS, assim como diversas outras tecnologias, pode servir para ajudar a vida do homem de diversas formas, mas pode também estar associado ao surgimento de meios de exploração dos trabalhadores. Para melhor compreensão, lembramos que os serviços de entrega de pizza, por exemplo, já eram feitos antes da existência dos aplicativos de delivery. De modo geral, os comerciantes contratavam os trabalhadores para fazerem as entregas. Esses trabalhadores trabalhavam para aquele empregador e as entregas, na maioria das vezes, se restringia à região próxima ao estabelecimento. Com a prática diária, o entregador ampliava seu conhecimento das ruas, dos bairros próximos e isso otimizava o seu trabalho. Existia um vínculo empregatício entre o comerciante e o entregador. Se acontecesse algo com ele, como um acidente ou um assalto, o comerciante tinha conhecimento e sentia-se na obrigação de participar dos prejuízos.

O que mudou? Atualmente, o comerciante contrata uma empresa de aplicativo, terceirizando o serviço de entrega. E a relação da empresa de aplicativo com o trabalhador não prevê garantia de direitos, caso ele seja assaltado ou se acidente, não há por parte da empresa de aplicativo nenhuma solidariedade com relação ao trabalhador. Sua força de trabalho só tem valor enquanto ela está ativa, enquanto é útil, conforme mostra a Figura 4.1¹.

¹Fonte: Dias (2020).



Figura 4.1: Uberização

É verdade que existe um Projeto de Lei (PL) que visa garantir direitos sociais a esses trabalhadores, pois da forma como é hoje não há amparo em caso de acidentes de trabalho, assaltos, etc. Além disso, devido ao aumento de trabalhadores atuando no ramo e ao surgimento de vários aplicativos que oferecem o mesmo serviço, houve diminuição na remuneração, obrigando o prestador de serviço a fazer jornadas exaustivas de trabalho a fim de garantir uma remuneração suficiente para sua sobrevivência. Ao mesmo tempo em que a empresa de aplicativo, visando sua permanência e ascensão no mercado, cria formas de atrair o consumidor através de promoções ou programas que, na prática, tiram do prestador de serviço um percentual maior de sua remuneração, tornando-a cada vez menor. Diante desse cenário, e tendo consciência de coletividade, muitos trabalhadores começaram a lutar pelos seus direitos.

O PL 3.754/2020 encontra-se em tramitação no Plenário do Senado Federal, e é pautado em três objetivos, sendo o primeiro:

[...] garantir um nível de proteção social mínimo aos trabalhadores. Para isso, propõe-se a inclusão de direito à licença maternidade e ao afastamento remunerado em caso de incapacidade temporária por doença ou acidente de trabalho. Em caso de descadastramento do trabalhador por iniciativa da empresa, é assegurado o direito ao seguro-desemprego, mas somente nos casos em que o trabalhador presta serviços de forma não eventual e cumpre um período de carência de 15 meses com remuneração igual ou superior ao salário mínimo (Senado Federal, 2020).

Uma vez que o trabalho com transporte tem sido o único ou principal meio de renda familiar de muitos brasileiros, principalmente durante a pandemia, é fundamental que existam garantias básicas dos direitos trabalhistas a essa categoria.

Devido ao confinamento forçado, causado pelo COVID 19, a entrega de alimentos e produtos teve um grande aumento. De acordo com a Revista Exame os “aplicativos de serviços - como Uber, 99, iFood e Rappi - se tornaram, em conjunto, o maior ‘empregador’ do País, com quase 4 milhões de trabalhadores autônomos utilizando hoje as plataformas como fonte de renda”.

O segundo objetivo defendido pelo projeto de lei visa questões salariais e condições de trabalho adequadas a essa nova realidade:

[...] remuneração não inferior ao salário mínimo hora, além de outros direitos previstos na constituição aos trabalhadores, como repouso semanal remunerado, férias com adicional de 1/3 (um terço), décimo terceiro-salário, calculados de forma proporcional de modo a oferecer condições materiais para o gozo de descanso, mas com a preocupação de não estabelecer regras impositivas quanto a um período obrigatório de inatividade por parte do trabalhador. Foi prevista também indenização dos custos arcados pelo trabalhador para a realização dos serviços, incluindo insumos e equipamentos de proteção (Senado Federal, 2020).

Destaca-se no terceiro objetivo que o trabalho exercido por entregadores ou motoristas de aplicativos se ampliou aos gêneros, atividade não mais executada somente pelo sexo masculino, tendo como objetivo do projeto de lei:

[...] assegurar condições mínimas de trabalho, por meio de medidas para redução dos riscos à saúde e segurança do trabalhador e medidas para prevenção do assédio, violência e discriminação. Além disso, propõe-se que incentivos e regras estabelecidos pela empresa não tenham efeitos negativos para o trabalhador ou para a sociedade (Senado Federal, 2020).

Muitas mulheres realizam a atividade como renda familiar prioritária. Sabendo que vivemos em uma sociedade patriarcal, os distritos trabalhistas às mulheres sempre foram retardatários aos dos homens. Porém, o projeto viabiliza essa necessidade, não somente às mulheres mas a todos os trabalhadores que sofrem abusos e violências durante as jornadas de trabalho.

A criação do primeiro aplicativo de transporte, o Uber, em 2009, pelo canadense Garrett Camp e pelo norte americano Travis Kalanick, foi lançado nos Estados Unidos em 2010, ganhando popularidade ao redor do mundo, fazendo com que o número de usuários aumentasse significativamente em um curto intervalo de tempo.

Tal popularidade fez com que a categoria dos taxistas se sentisse prejudicada pela concorrência com os motoristas de aplicativo, uma vez que o trabalho de taxista é regulamentado e pautado em leis trabalhistas que destacam os direitos e deveres dos moto-

ristas, tendo como regra a classificação da carteira de habilitação, licença para transporte remunerado, valor do quilômetro percorrido preestabelecido pelo sindicato da categoria, padronização do veículo de acordo com a exigência da região, entre outras obrigações, que não são exigidas aos motoristas de aplicativo. Essa insatisfação dos taxistas gerou manifestações e greves em 2014, como vimos nas Figura 4.2², Figura 4.3³, Figura 4.4⁴ e 4.5⁵ que são ao redor do mundo.



Figura 4.2: Greve de taxistas contra Uber na Espanha

²Fonte: Welle (2018).

³Fonte: Kitwood (2014).

⁴Fonte: Gallup (2014).

⁵Fonte: Araújo (2014).



Figura 4.3: Manifestação contra o aplicativo em Londres, Inglaterra



Figura 4.4: Taxistas se reúnem nos arredores do Estádio Olímpico de Berlim para protestar contra os aplicativos de compartilhamento de passeio, na Alemanha



Figura 4.5: Taxistas protestam contra o uso do aplicativo Uber, em São Paulo - Brasil

A mídia sempre foi veículo transmissor da informação instantânea, tecnologia essa que nos mostrou as diversas manifestações contra o aplicativo, tendo como objetivo principal a proibição. Porém a facilidade de pedir um carro pelo celular e visualizar sua localização atual pelo GPS, a rota a ser traçada e o cálculo do valor percorrido, fez com que os usuários se fidelizassem aos aplicativos de transporte, gerando inúmeros outros aplicativos, como de entrega de alimentos e produtos.

A mesma mídia que em 2014 apresentou noticiários da maior greve de taxistas ao redor do mundo, exaltou o serviço de entregadores e motoristas de aplicativo durante a pandemia do COVID 19. O surgimento e a proliferação acelerada de um vírus fez com que a maior parte da população mundial ficasse em casa, ocasionando o grande aumento de entregadores nas ruas, dando força ao questionamento da categoria sobre a criação de leis e sindicatos trabalhistas.

Entregadores e motoristas de aplicativos: a uberização do trabalho e a resistência dos trabalhadores

15/07/2020 | Colunistas | 0 Comments



Figura 4.6: Entregadores de aplicativo fazem protestos por melhores condições de trabalho

Em contrapartida às primeiras greves dos taxistas contra o aplicativo, em 2019 tivemos a greve dos entregadores de alimentos e produtos veja na Figura 4.6⁶, que destacavam as jornadas excessivas de trabalho, baixa remuneração, más condições de trabalho, desamparo trabalhista em caso de acidentes, licenças e desligamento da empresa, uma vez que a terceirização do serviço faz com que os deveres do empregador sejam minimizados diante do trabalhador.

Muitas vezes esses trabalhadores têm que trabalhar doentes e com fome. Ganharam repercussão durante as manifestações frases como: “Você sabe a tortura que é carregar comida nas costas e sentir fome?”, sensibilizando a sociedade para a causa.

Portanto, em conclusão à primeira questão levantada nesse capítulo, é possível observar que o GPS em aplicativos de transporte, possibilitou a abrangência do local de entrega ou locomoção do cliente, fazendo com que o trabalhador se locomova na cidade toda com facilidade e sem conhecimento prévio do destino final, ou até mesmo entre cidades próximas. Assim houve um aumento no número de trabalhadores e na terceirização do serviço por parte do empregador, gerando a baixa qualidade nas condições de trabalho, visando a mecanização do serviço e desvalorizando a parte humana inserida na atividade.

Especialmente no caso dos serviços de delivery, o GPS possibilitou a criação e a expansão de empresas que podem mandar o trabalhador para qualquer lugar da cidade, para atender um cliente contratante do aplicativo (comerciante) sem que este tenha com

⁶Fonte: Prado (2020).

o trabalhador nenhum vínculo empregatício. Mesmo sem conhecer a região da entrega do produto, o trabalhador pode chegar ao seu destino utilizando a tecnologia do GPS, caracterizando uma “facilidade” na entrega, desconsiderando as implicações físicas do trabalhador e mecânica do seu meio de trabalho (carro, moto ou bicicleta).

À respeito da segunda questão apontada no capítulo em questão, que trata do papel da educação frente às mudanças recentes e suas implicações na uberização, é preciso dizer que aqui o termo “uberização” deve ser entendido mais como relação precarizada do trabalho do que como utilização de serviço de Uber. Essa significação surge porque a Uber foi uma das primeira empresas do ramo de transporte de passageiro a estabelecer a precarização de direitos trabalhistas, causando manifestações por parte dos motoristas e entregadores exigindo direitos iguais ou minimamente próximo aos trabalhadores formais.

Nesse sentido, enquanto educadores, formadores daqueles que, em sua maioria, não serão detentores dos meios de produção, mas meros trabalhadores, é importante destacar as tendências das relações de trabalho, suas implicações na qualidade de vida do trabalhador, quais direitos estão sendo fragilizados e quem mais ganha com esses novos modelos de trabalho.

O proletariado sempre foi a classe mais frágil da sociedade, desde a instalação do sistema capitalista. No entanto, melhorias foram alcançadas no decorrer dos anos depois de greves, manifestações, questionamentos, assembleias, criação de leis e, principalmente, com o surgimento de líderes que pensavam em melhorias à classe, analisando criticamente os sistemas em que estavam inseridos.

Capítulo 5

Sugestão de atividades

Nesse capítulo apresentaremos algumas atividades, para serem feitas em sala de aulas com alunos do ensino fundamental e médio, com vistas a apresentar o funcionamento do GPS. Também apresentaremos uma atividade em que refletiremos as relações entre trabalhadores e as empresas com as quais trabalham.

5.1 Atividade 1

Público alvo:

Os alunos do nono ano e ensino médio que tenham visto o teorema de Pitágoras.

Objetivos:

Oferecer noções elementares de geometria analítica no espaço através do teorema de Pitágoras, como forma de curiosidade, instigando o estudante para estudos posteriores;

Utilizar o teorema de Pitágoras para se chegar a fórmula da distância entre dois pontos no espaço.

Materiais:

Caderno, lápis e borracha.

Desenvolvimento:

Para este problema, explicaremos o teorema de Pitágoras e a fórmula da equação de uma superfície esférica no sistema cartesiano tridimensional e a fórmula da distância entre dois pontos no espaço. Iremos acompanhar o desenvolvimento da atividade de modo que o estudante consiga ligar o teorema de Pitágoras até chegar ao cálculo de distância entre dois pontos no espaço. Acompanharemos até que eles cheguem aos resultados corretos,

fazendo as observações necessárias e valorizando os possíveis erros existentes.

Atividade: O sistema solar não é o único sistema planetário existente. Na verdade, quase todas as estrelas possuem um ou mais planetas em sua órbita. Ao estudar um determinado sistema planetário, um astrofísico considerou um sistema de eixos xyz com unidades de medidas em km, com escala de 1km para 10^3 km. Nesse sistema de eixos ele identificou um planeta com centro de coordenadas $(4, 2, 5)$ e raio 12.

1. Determine a equação da superfície desse planeta.
2. Sabendo que esse planeta tem uma lua com centro de coordenadas $(-20, 8, 6)$ e raio 3, determine a distância entre a superfície do planeta e de sua lua.

5.2 Atividade 2

Público alvo:

Os alunos do oitavo ano que tenham conhecimento prévio de perímetro e proporção.

Objetivos:

Associar meridianos e paralelos aos seus respectivos modelos matemáticos;

Esclarecer ao aluno da existência das geometrias não-euclidianas;

Definir com o aluno o que é circunferência máxima e dar exemplos;

Construir e aplicar uma fórmula para o cálculo de comprimento de arcos.

Materiais:

Bolas de isopor de vários tamanhos, lápis, borracha, caderno, pincel atômico, barbante colorido, palitos de churrasco, palitos de dente e globo terrestre.

Desenvolvimento:

Para o desenvolvimento desta atividade, iniciaremos perguntando aos alunos sobre o que eles sabem a respeito de meridianos, paralelos, polos, eixo de rotação, etc. Então, iremos apresentar o globo terrestre. Depois que todos souberem o que são esses elementos, pediremos aos alunos que tentem inserir o palito de churrasco em uma bola de isopor exatamente em seus “polos”. daí pediremos a outros alunos para marcar alguns pontos na superfície da bola com um pincel. Iremos gradualmente fazer os questionamentos abaixo e com base nas respostas iremos conduzir a discussão para os objetivos.

Podemos utilizar os palitos para marcar os pontos e o barbante, amarradas a eles para desenhar a trajetória entre os pontos. Conduziremos a discussão para a necessidade de estabelecer uma relação entre o comprimento de uma circunferência maior e a distância entre dois pontos na esfera. É necessário discutir o ângulo central, e então podemos sugerir que eles calculem a distância entre os pontos na esfera, dado o raio e a medida do ângulo central. Daremos um tempo para que eles discutam em grupo de 3 ou 4 membros, e em seguida, apresentem os resultados.

1. Que tipo de trajetória conecta os dois pontos marcados na bola?
2. Qual trajetória representa a distância mais curta entre dois pontos marcados na bola?
3. Como poderíamos calcular essa distância?
4. De qual forma poderíamos calcular o comprimento da linha do Equador?
5. Como poderíamos calcular a distância entre os polos?
6. Qual relação têm as distâncias calculadas nas questões 3 e 4?

5.3 Atividade 3

Público alvo:

Os alunos do terceiro ano do ensino médio, que tenham conhecimento de distância entre dois pontos, a equação da circunferência, a escala de mapas e o sistema de equação quadrática.

Objetivos:

Oferecer aos alunos uma compreensão preliminar da geometria analítica espacial;
Relacionar a equação da circunferência com o princípio de orientação do GPS;
Aplicar proporção na interpretação de escalas;
Aplicar os conhecimentos sobre velocidade;
Aplicar sistemas de equações no processo de localização.

Materiais:

Lápis, borracha, caderno, computadores com GeoGebra instalado e um arquivo de imagem do mapa com escala.

Desenvolvimento:

Para o desenvolvimento desta atividade pode ser utilizado um software educacional e livre de geometria chamado GeoGebra. Basta instalar o GeoGebra no computador e um arquivo de imagem de mapa com escala. Os alunos devem ter conhecimento básico do programa. As etapas desta atividade no GeoGebra são as seguintes:

Primeiro:

Inserir o mapa: Menu Ferramentas → Objetos especiais → Inserir imagens;

Segundo:

Ajustando a escala: coloque o gráfico em um local conveniente, e então gire o rolete do mouse para ajustar a unidade de medida do eixo à escala do mapa, o que ajudará na conversão;

Terceiro:

Colocar a figura para fundo do plano: Menu Editar → Propriedades. Marcar a opção “imagem de fundo” do objeto “fig x ”;

Quarto:

Utilizando a regra de três, definimos os raios das circunferências;

Quinto:

Desenhar as circunferências: Menu Ferramentas → Círculos e Arcos → Círculo dado Centro e Raio. Clicar sobre o ponto que representa a cidade e digitar na caixa de diálogo o valor do raio, utilizando “.” (ponto) ao invés de “,” (vírgula).

Sexto:

Definir o ponto de intersecção: Menu Ferramentas → pontos → intersecção de dois Objetos. Em seguida, colocar o ponteiro sobre o possível ponto (as circunferências ficarão destacadas) e clicar;

Sétimo:

Use a roda do mouse para dar um “*zoom*” no ponto de intersecção e verificar se os três círculos realmente se intersectam (provavelmente não) e, em seguida, discuta a imprecisão do programa

5.4 Atividade 4

Público alvo:

Alunos do segundo ano do ensino médio que tenham conhecimento prévio de esferas e superfícies esféricas.

Objetivos:

Explicar como funciona o GPS;

Expor aos alunos a matemática envolvida na programação do GPS;

Aplicar na prática como se dá a intersecção entre esferas;

Incentivar o trabalho em equipe e a cooperação.

Materiais:

Bola em Isopor 3,5cm (100mm), tesouras, estiletes, compassos, quadro negro, giz, pistola de cola quente e kit audiovisual para exibição de vídeo.

Desenvolvimento:

Primeiramente, reproduziremos o vídeo “As Aventuras do Geodetive - GPS”, disponível em Costa et al. (2012). Logo após a apresentação, faremos as seguintes perguntas aos alunos:

Vocês entenderam como funciona o GPS?

Quais foram os elementos da geometria que vocês identificaram no vídeo?

Vocês seriam capazes de reproduzir as ilustrações das intersecções apresentadas no vídeo, utilizando o quadro negro?

Após duas a três tentativas de voluntários, perguntaremos a outros alunos sobre a compreensão dos desenhos e a dificuldade de construí-los, e faremos algumas sugestões para promover a visualização induzindo a construção de modelos em três dimensões.

A partir daí, iremos dividir a turma em grupos. Cada grupo tem: quatro bolas de isopor, uma bússola, uma tesoura, um estilete e uma pistola de cola quente. Então daremos um determinado tempo, para que tentem fazer o modelo para reproduzir as intersecções fazendo maquetes (se necessário for, forneceremos mais esferas de isopor para novas tentativas). Após a construção das maquetes, pediremos a cada equipe que apresente seu projeto, explicando como é o funcionamento do GPS e comente as dificuldades encontradas no processo de construção das maquetes e as estratégias para superá-las. Podemos mostrar os melhores trabalhos para toda a escola.

5.5 Atividade 5

Público alvo:

Alunos do ensino fundamental e médio.

Objetivos:

Explicar o avanço que o GPS trouxe a mobilidade urbana;

Expor aos alunos a matemática envolvida na programação do GPS;

Aplicar na prática uma reflexão sobre esse avanço;

Incentivar o trabalho em equipe e a cooperação.

Desenvolvimento:

Primeiramente, reproduziremos a notícia da Figura 5.1, disponível em STJ (2020).



Figura 5.1: Motorista de Aplicativo

Logo após a apresentação, faremos as seguintes perguntas aos alunos:

Vocês conhecem algum trabalhador de aplicativo?

Na sua opinião há algum vínculo empregatício entre o trabalhador de aplicativo e a empresa de aplicativo?

Se o motorista de aplicativo chegar a se machucar, qual seria o vínculo dele com a empresa de aplicativo?

Após essas perguntas faremos uma breve reflexão sobre o tema: Os aplicativos exerceriam um papel de aproximação entre motoristas/entregadores e clientes, não havendo relação de hierarquia entre as pessoas envolvidas. Como fazer para manter os direitos sociais que historicamente foram conquistados por trabalhadores.

5.6 Atividade 6

Para alunos de qualquer ano. Fazer parte em casa (leitura), parte na sala (debates).

Materiais:

Texto da reforma trabalhista de 2017 (Lei 13.467, de 2017)

Desenvolvimento:

1. Ler o texto.
2. Identificar as alterações sobre: trabalho intermitente, trabalho terceirizado, negociado sobre o legislado, sindicatos, etc.
3. Verificar se essa reforma acelerou o processo de uberização do trabalho.
4. Discutir e apontar quem foram os maiores interessados na realização dessa reforma.
5. Os trabalhadores se beneficiaram, de alguma forma, com essa reforma?

Considerações finais

Nesta pesquisa, realizamos uma explanação através de um breve histórico sobre a localização humana até chegarmos a essa tecnologia de posicionamento: o GPS. Podemos constatar que é evidente a importância desse sistema para a sociedade, sua estrutura operacional e a aplicação desse recurso tecnológico no auxílio da solução de problemas em diversas áreas profissionais, o que é notório e mostra que os recursos matemáticos são essenciais para o desenvolvimento deste sistema.

Os conhecimentos matemáticos relacionados ao sistema GPS podem ser aplicados ao ensino com o objetivo de mostrar a importância da matemática no meio científico e para o desenvolvimento da sociedade. Logo, pode ser exposto para os alunos do ensino fundamental e médio, para que eles possam entender a importância da matemática na contribuição para o desenvolvimento tecnológico. Também acadêmicos de diversas áreas do conhecimentos podem utilizar esse estudo como uma opção de pesquisa e trabalhos científicos, sendo ainda útil para leitores em geral que usam a tecnologia, mas não sabem como funciona o sistema GPS. Professores do ensino fundamental, médio e superior poderão utilizar este trabalho para dar sentido aos conteúdos de matemática que devem ser ensinados aos alunos de forma a estimular e despertar o interesse das pessoas pela matemática. Poderemos apresentar esse trabalho quando fizermos a explanação de temas da geometria analítica, geometria plana, geometria espacial e álgebra linear.

Explorar a origem dos conhecimentos envolvidos neste trabalho relacionado com a história e origem do sistema GPS, enriquece a importância da produção do conhecimento científico e mostra as contribuições matemáticas para o desenvolvimento da ciência e, dessa forma, desenvolve e expande a tecnologia existente.

Por outro lado, apesar da importância indiscutível do GPS em si, esse trabalho também apontou diversos problemas, especialmente nas relações de trabalho mediadas por essa tecnologia. Nessa perspectiva, um dos aspectos que podem ser destacados é

o fenômeno conhecido como “uberização”, que é a utilização da tecnologia do GPS pelos aplicativos de mobilidade urbana bem como de entrega de alimentos, os populares “delivery”.

A utilização do GPS é basilar para o funcionamento do mercado operado por essas empresas que geram milhões de postos de trabalho informais ao redor do mundo, a senso comum isso parece ser extremamente benéfico, contudo os trabalhos gerados por essas empresas não fornecem qualquer garantia trabalhista aos contratados, que por muitas vezes são submetidos a uma jornada de trabalho exaustiva e mal remunerada, estando entregues a própria sorte quando sofrem um acidente ou são vítimas de assalto.

Junto a isso, diversos postos de trabalho formais deixaram de existir e vários trabalhadores que tinham sua carteira assinada perderam seus empregos, pois é mais barato ao empregador contratar uma empresa de aplicativo do que arcar com os direitos trabalhistas exigidos pela legislação na contratação de um trabalhador formalizado.

Referências Bibliográficas

- Abilio, L. C. (2019). Uberização: Do empreendedorismo para o autogerenciamento subordinado. *Psicoperspectivas*, 18(3):41–51.
- Alves, S. (2008). A geometria do globo terrestre, II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. URL: <http://http://www.bienasbm.ufba.br/> Acesso em: 03/01/2021.
- Araújo, J. (2014). Taxistas protestam contra o uso do aplicativo Uber, em São paulo – Brasil. URL: <https://images.app.goo.gl/C2a3QPC36ceF2ihV6> Acesso em: 02/03/2021.
- Costa, S., Limberger, R., e Rodrigues, C. I. (2012). As aventuras do Geodetete 6: Gps. URL: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1107> Acesso em: 05/02/2021.
- Departamento Cartografia (1999). Noções básicas de cartografia. In *Manuais técnicos em Geociências*. IBGE, R.Janeiro.
- Dias, T. (2020). Até a pornografia tem: o que é uberização, como surgiu e outras dúvidas. URL: <https://tab.uol.com.br/faq/uberizacao-o-que-e-como-funciona-como-surgiu-e-outras-duvidas.htm> Acesso em: 02/03/2021.
- Dutra, R. Q. e Coutinho, R. (2020). Aceleração social, uberização e pandemia: quem precisa do direito do trabalho? *Revista de Direito da UnB*, 4(2):198–223. URL: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/39545> Acesso em: 16/02/2021.
- Fitz, P. R. (2008). *Cartografia básica*. Oficina de Textos, S.Paulo.
- Gallup, S. (2014). Taxistas se reúnem nos arredores do estádio olímpico de berlim para protestar contra os aplicativos de compartilhamento de passeio, na alemanha. URL: <https://images.app.goo.gl/C2a3QPC36ceF2ihV6> Acesso em: 02/03/2021.

- Gonçalves, A. (2020). Instrumentos de navegação. URL: <http://cvc.instituto-camoes.pt/arte-de-navegar-roteiristica-e-pilotagem/instrumentos-de-navegacao.html>
Acesso em: 29/06/2020.
- Kitwood, D. (2014). Manifestação contra o aplicativo em Londres, Inglaterra. URL: <https://images.app.goo.gl/Hfx9s931Zaia6HJi7> Acesso em: 02/03/2021.
- Lima, D. D. (2013). Desvendando a Matemática do GPS. Dissertação de Mestrado, Profmat–UFSE, S. Cristóvão/SE.
- Lima, E. L. (1993). *Coordenadas no espaço*. Sociedade Brasileira de Matemática/IMPA, R. Janeiro.
- Máximo, A. e Alvarenga, B. (2013). Física: contexto & aplicações. página 189. Ed. Scipione, S. Paulo.
- Moraes, M. C. (2015). O funcionamento do GPS e a matemática do ensino médio. Dissertação de Mestrado, Profmat–UFSCar, S. Carlos/SP.
- Pereira, E. H. U. (2014). A matemática do GPS. Dissertação de Mestrado, Profmat–UFPI, Teresina/PI.
- Prado, M. R. (2020). Entregadores e motoristas de aplicativos: a uberização do trabalho e a resistência dos trabalhadores. URL: <https://revistaafirmativa.com.br/entregadores-e-motoristas-de-aplicativos-a-uberizacao-do-trabalho-e-a-resistencia-dos-trabalhadores/> Acesso em: 05/03/2021.
- Rousseau, C. e Saint-Aubin, Y. (2015). Matemática e atualidade, volume 1. In *Coleção Profmat*, página 3 a 13. Ed. SBM, R. Janeiro.
- Senado Federal (2020). Projeto de lei nº 3754, de 2020. URL: <https://www25.senado.leg.br/web/atividade/materias/-/materia/143376> Acesso em: 01/03/2021.
- STJ (2020). Motorista de aplicativo é trabalhador autônomo, e ação contra empresa compete à justiça comum. URL: <https://www.stj.jus.br/sites/portalp/Paginas/Comunicacao/Noticias/Motorista-de-aplicativo-e-trabalhador-autonomo-e-acao-contra-empresa-competem-a-Justica-comum.aspx> Acesso em: 27/02/2021.

Welle, D. (2018). Greve de taxistas contra uber ganha força na espanha.
URL: <https://www.dw.com/pt-br/greve-de-taxistas-contra-uber-ganha-for> Acesso em:
02/03/2021.