UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXTAS E EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Alessandra dos Santos Fernandes

Resolução de problemas olímpicos envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade através da Metodologia de Polya

Blumenau

2021

Alessandra dos Santos Fernandes

Resolução de problemas olímpicos envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade através da Metodologia de Polya

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof.ª. Dra. Louise Reips.

Blumenau

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

FERNANDES, Alessandra dos Santos
Resolução de problemas olímpicos envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade através da Metodologia de Polya / Alessandra dos Santos FERNANDES ; orientador, Louise Reips, 2021.
223 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Blumenau, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Metodologia de Polya para resolução de problemas . 3. Análise Combinatória e Probabilidade. 4. Problemas olímpicos. 5. BNCC. I. Reips, Louise. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Alessandra dos Santos Fernandes

Resolução de problemas olímpicos envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade através da Metodologia de Polya

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Professor Doutor Eleomar Cardoso Junior

Universidade Federal de Santa Catarina – Campus Blumenau

Professora Doutora Lindaura Maria Steffens

Universidade do Estado de Santa Catarina – Campus Balneário Camboriú

Professor Doutor Marcos Teixeira Alves

Universidade Estadual de Ponta Grossa -Campus Ponta Grossa

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

ICP-Edu

Documento assinado digitalmente
Marcio de Jesus Soares
Data: 05/05/2021 19:08:04-0300
CPF: 270.670.858-10
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

____

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

ICP-Edu

Documento assinado digitalmente
Louise Reips
Data: 04/05/2021 20:33:55-0300
CPF: 000.405.570-57
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

____

Prof.ª Dra. Louise Reips

Orientadora

Blumenau, 2021.

Este trabalho é dedicado ao meu esposo, aos meus filhos, aos meus pais e a todos os meus alunos e ex-alunos que me motivaram a tornar esse sonho possível.

AGRADECIMENTOS

A Deus pai, por olhar o meu caminho, por ter me acompanhado e me confortado.

Aos meus pais **João Manoel Fernandes** e **Maria Tereza dos Santos Fernandes**, por me ensinarem a ser persistente e nunca desistir.

Ao meu esposo **Roberson Goulart Hugen** pelo apoio em todos os momentos e aos meus filhos **Joana Fernandes Hugen** e **João Pedro Fernandes Hugen** pela paciência e cooperação durantes estes dois anos que se passaram.

Aos meus amigos e familiares que muitas vezes, por uma palavra dita ou um gesto de bondade, fizeram que eu renovasse cada dia mais a vontade de realizar o meu sonho.

Aos professores, pois somente eles são capazes de lapidarem com sabedoria as arestas que nos afligem. Em especial, à professora **Louise Reips**, minha orientadora, pelo maravilhoso trabalho realizado comigo durante a pandemia e pela paciência em todos os momentos.

E por fim não poderia deixar de agradecer a todos da família **"Escola de Ensino Fundamental Professor Emir Ropelato"** pelo carinho, pela oportunidade, pois sem eles, eu não teria chegado até aqui.

A felicidade de mais esta conquista é um reflexo de toda a dedicação, esforço, incentivo e amor que vocês sempre manifestaram por mim.

RESUMO

A busca por estratégias de ensino que facilitam a aprendizagem matemática e instigam seu estudo é a principal motivação desse trabalho. Portanto os dois principais objetivos dessa dissertação são buscar essas estratégias, principalmente no que se refere a interpretação de problemas e linguagem matemática, e uma melhor compreensão de conceitos envolvendo análise combinatória e probabilidade. Baseado nisso, apresenta-se aqui a Metodologia de George Polya, publicada em seu livro *A arte de resolver problemas*, bem como a sua aplicação em competições olímpicas de matemática, mais especificamente, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP. Essa Metodologia consiste basicamente na realização de quatro etapas: Compreensão do Problema, Estabelecimento de um Plano, Execução do Plano e Retrospecto. Para uma melhor compreensão da metodologia de George Polya, são desenvolvidas essas quatro fases em cada problema olímpico selecionado para esta dissertação. Tais problemas escolhidos envolvem análise combinatória e probabilidade e, para tal, abordam-se conceitos fundamentais envolvendo essa área da matemática, juntamente com aspectos históricos e exemplos que possibilitam ao leitor uma maior compreensão dessas ideias. É importante destacar que os problemas olímpicos abordados nesta dissertação podem ser aplicados no Ensino Fundamental (séries finais) e no Ensino Médio. Também explana-se aqui, algumas abordagens sobre a metodologia da resolução de problemas, análise combinatória e probabilidade contidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que define um conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver durante a Educação Básica. Ademais, aborda-se algumas considerações sobre a teoria de resolução de problemas e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Desse modo, através dos conceitos e da metodologia tratados nesta dissertação, deixa-se uma proposta de ensino para qualquer professor de matemática da educação básica que queira uma estratégia para facilitar a aprendizagem no que se refere à resolução de problemas.

Palavras-Chave: problemas olímpicos, análise combinatória, probabilidade, resolução de problemas, metodologia de Polya, OBMEP.

ABSTRACT

The search for teaching strategies that facilitate mathematical learning and instigate its study is the main motivation of this assignment. Therefore, the two main objectives of this dissertation are to search these strategies, mainly with regard to the interpretation of problems and mathematical language, and a better understanding of concepts involving combinatorial analysis and probability. Based on that, here is presented the Methodology of George Polya, published in his book *How to Solve It*, as well as its application in Mathematical Olympic Competitions, more specifically, the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools - OBMEP). This Methodology consists of carrying out four steps: Understanding the Problem, Establishing a Plan, Executing the Plan and Retrospect. For a better understanding of George Polya's methodology, these four phases will be developed in each Olympic problem selected for this dissertation. Such chosen problems involve combinatorial analysis and probability and, for this, fundamental concepts involving this area of mathematics are approached, together with historical aspects and examples that enable the reader to better understand these ideas. It is important to highlight that the Olympic problems addressed in this dissertation can be applied in Elementary School (final grades) and in High School. Also presented in this dissertation are some approaches on the problem solving methodology, combinatorial analysis and probability contained in the National Common Curricular Base (BNCC), a document that defines a set of essential learning that students must develop during Basic Education. In addition, some considerations about problem solving and the Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools (OBMEP) are addressed. Thus, through the concepts and methodology dealt with in this dissertation, a teaching proposal is left for any math teacher in basic education who wants a strategy to facilitate learning with regard to problem solving.

Keywords: Olympic problems, combinatorial analysis, probability, problem solving, Polya’s methodology, OBMEP.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Cinco modos de girar uma roda com 5 crianças. 46
Figura 2 – Disposição de *n* elementos em um círculo. 54
Figura 3: Possíveis caminhos para a formiga. 84
Figura 4 - Análise de caminhos com menor comprimento. 85
Figura 5 – Caminho mais curto. 86
Figura 6 – Região compreendida entre as diagonais vermelha e azul. 87
Figura 7 – Quadro com algarismos a serem utilizados. 87
Figura 8 – Círculos coloridos. 88
Figura 9 – Círculos coloridos ligados por triângulos. 88
Figura 10 – Modelo de preenchimento iniciado. 89
Figura 11 – Possibilidade de preenchimento. 89
Figura 12 – Análise da alternativa 1. 91
Figura 13 – Análise da impossibilidade de ocorre a alternativa 1. 91
Figura 14 – Possibilidades de preenchimento das bolas/triângulo azul. 92
Figura 15 - Possibilidades de preenchimento das bolas/triângulo vermelho. .. 93
Figura 16 - Possibilidades de preenchimento das bolas/triângulo verde. 93
Figura 17 – Quadrados a serem preenchidos. 95
Figura 18 – Análise de preenchimento dos quadrados. 96
Figura 19 – Análise de preenchimento dos quadrados com a = 2. 96
Figura 20 – Análise de preenchimento dos quadrados com b = 2. 97
Figura 21 – Círculo dividido em quatro regiões. 97
Figura 22 – Regiões do círculo identificadas com letras. 98
Figura 23 – Estacionamento com 10 vagas. 100
Figura 24 – Estacionamento com vagas numeradas. 100
Figura 25 – Bloco de algarismos para formar uma senha. 110
Figura 26 – Ilustração dos dados do enunciado (problema dos ratinhos). 121
Figura 27 – Figuras que Ana quer colorir. 123
Figura 28 – Bolinhas da Figura 1 numeradas. 124
Figura 29 - Bolinhas da Figura 2 numeradas. 124
Figura 30 - Figura 3 com as bolinhas numeradas. 126
Figura 31 – Figura bem preenchida. 128
Figura 32 – Figura com 9 bolinhas que devem ser bem preenchidas. 128

Figura 33 – Diagrama com 5 bolinhas que deve ser bem preenchido. 129
Figura 34 – Diagrama com 7 bolinhas que deve ser bem preenchido. 129
Figura 35 – Etapas do raciocínio abordado acima. 130
Figura 36 - Diagrama de 5 bolinhas contendo diagrama de 3 bolinhas 131
Figura 37 – Diagrama de 7 bolinhas contendo diagrama de 5 bolinhas 132
Figura 38 – Mesa circular com cadeiras numeradas. 136
Figura 39 – Mesa circular com 6 cadeiras diferentes (ABCDEF). 138
Figura 40 – Ocupações de forma quase-cheia para filas de 5 cadeiras. 139
Figura 41 – 5 Filas de 6 cadeiras cada. 139
Figura 42 – Ocupações quase cheias de uma fila de 8 cadeiras. 139
Figura 43 – Ocupações quase-cheias de uma fila de 6 cadeiras. 140
Figura 44 – Fila de 8 cadeiras com a segunda cadeira ocupada. 140
Figura 45 – Fila de 19 cadeiras com a primeira cadeira ocupada. 141
Figura 46 – Fila de 19 cadeiras com a segunda cadeira ocupada. 142
Figura 47 – Objeto construído com doze varetas iguais e seis bolinhas. 144
Figura 48 – Cartões quadrados de Rosa. 152
Figura 49 – Página de um álbum. 152
Figura 50 – Quatro maneiras diferentes de girar o triângulo. 152
Figura 51 – Composição de quadrados e triângulos. 154
Figura 52 - Quadrado e triângulo sombreados. 155
Figura 53 – Segmentos de reta e pentágonos. 159
Figura 54 – Nove maneiras diferentes de traçar dois segmentos/pentágono. 159
Figura 55 – Rotação do pentágono. 160
Figura 56 – Peças e Quadrados. 161
Figura 57 – Rã Zinza e dez pedras. 166
Figura 58 – Possíveis pulos da rã Zinza. 167
Figura 59 – Grade por onde a formiga irá caminhar. 170
Figura 60 – Grade com possíveis caminhos e adaptações. 171
Figura 61 – Movimentos verticais e horizontais. 172
Figura 62 – Grade com extremidades verticais destacadas. 172
Figura 63 – Mapa de uma cidade. 174
Figura 64 – Caixa com barbantes. 183
Figura 65 - O primeiro nó. 185
Figura 66 – Dado planificado. 197

Figura 67 – Circunferência dividida em 10 partes iguais. 202
Figura 68 – Brinquedo. 205
Figura 69 – Posição relativa ao brinquedo (esquerda/direita). 205
Figura 70 – Caminhos disponíveis para uma formiga. 218
Figura 71 – Pontos destacados nos possíveis caminhos para a formiga. 219
Figura 72 – Verificação das possibilidades. 220
Figura 73 – Quadriculado. 220
Figura 74 – Quadriculado e algumas marcações. 221

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Possibilidades de vagas em um estacionamento. 102

Tabela 2 - 28 possibilidades de obter soma 9 com três cartões...................... 120

Tabela 3 – Número de ocupações quase-cheias/filas de cadeiras. 140

Tabela 4: Quantidade de figurinhas e quantidade de pacotes. 148

Tabela 5 – Possibilidades de algarismos para cada posição........................... 151

Tabela 6 – Possibilidades de pintar os triângulos e quadrados. 157

Tabela 7 – Possíveis valores para x, y e z. 168

Tabela 8 – Possibilidades para retiradas de algarismo.................................. 192

Tabela 9– Probabilidades para as posições das bolinhas. 209

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 15
2. METODOLOGIA DE ENSINO BASEADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS..20
2.1 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE POLYA 21
2.1.1 Fase 1: Compreensão do Problema..23
2.1.2 Fase 2: Estabelecimento de um plano..24
2.1.3 Fase 3: Execução do plano...25
2.1.4 Fase 4: Retrospecto..26
2.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A BNCC..27
2.3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP) 31
3. CONSIDERAÇÕES SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE 34
3.1 O QUE É ANÁLISE COMBINATÓRIA?...34
3.2 ASPECTOS HISTÓRICOS...36
3.3 PRINCIPAIS CONCEITOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA 38
3.3.1 Princípio aditivo..38
3.3.2 Princípio Fundamental da Contagem...39
3.3.3 Fatorial 39
3.3.4 Permutação simples..40
3.3.5 Arranjos simples...41
3.3.6 Combinações Simples...44
3.3.7 Permutações circulares 45
3.3.8 Permutação com repetição..47
3.3.9 Combinações Completas...48
3.3.10 Definição de Permutação Caótica 50
3.3.11 Os lemas de Kaplansky 51

3.3.12 O princípio das gavetas de Dirichlet **55**

3.3.13 Triângulo de Pascal **56**

3.3.14 Teorema: Relação de Stifel **58**

3.3.15 Teorema (Combinação Complementar) **59**

3.3.16 Teorema das Linhas **59**

3.3.17 Teorema das colunas **60**

3.3.18 Binômio de Newton **61**

3.3.19 Contagem e Recorrências **63**

3.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE PROBABILIDADE 65

3.4.1 Aspectos históricos **65**

3.4.2 Conceitos e definições **66**

3.4.3 Probabilidade Condicional **73**

3.4.4 Teorema da probabilidade Total **77**

3.5 ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NA BNCC 78

4. ABORDAGENS DE PROBLEMAS OLÍMPICOS ENVOLVENDO ANÁLISE COMBINATÓRIA E/OU PROBABILIDADE **83**

4.1 PROBLEMAS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 1 84

3.2 PROBLEMAS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 2 135

3.3 PROBLEMAS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 3 166

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS **210**

REFERÊNCIAS BICLIOGRÁFICAS **213**

APÊNDICE A **215**

APÊNDICE B. **218**

1. INTRODUÇÃO

A matemática é, sem dúvida, essencial para qualquer ser humano. Ela está presente no cotidiano nas mais diversas situações; como por exemplo, nas brincadeiras infantis que envolvem números, na alimentação, na medicina, nas edificações, em qualquer transação financeira, nos aparelhos eletrônicos, e, principalmente nas senhas/codificações e no uso da internet, indispensável nos dias de hoje. Entender a matemática envolvida em cada uma dessas situações significa compreender um pouco mais como o mundo funciona. Dessa forma, a preocupação com o ensino-aprendizagem da matemática cresce cada vez mais e a busca por estratégias de ensino que facilitem a aprendizagem e que tornem o ensino atrativo para os estudantes se tornou um grande desafio para pesquisadores no mundo inteiro.

Para D'Ambrósio (2012, p. 29), " é muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas." As atividades desenvolvidas nas aulas de matemática precisam ser significativas e os conceitos bem desenvolvidos para permitir que essa aprendizagem de fato seja significativa, pois ainda nos dias de hoje, a matemática é considerada uma disciplina difícil de aprender e difícil de ensinar.

A matemática informal, ou seja, a matemática que faz parte do dia a dia do estudante é diferente da matemática ensinada nas escolas. São duas abordagens diferentes, em que muitos alunos têm dificuldades de relacionar. Muitas vezes os estudantes colocam que são muitos bons na matemática do seu cotidiano e apresentam grande dificuldade na matemática escolar. Por um lado, dar valor demais à "matemática informal" pode ser perigoso, já que falta a generalização e as demonstrações. Já a matemática ensinada nas escolas ainda muito abstrata, é considerada complicada e sem significado para muitos estudantes. Baseado nisso, é preciso propor um modelo de integração entre as duas abordagens, de modo que essas críticas mútuas sejam superadas, em que os problemas reais auxiliem na compreensão das teorias matemáticas e que a matemática formal, através da generalização de resultados, permita a resolução dos problemas reais (ou pelo menos prepare o estudante para tal).

Com base nos resultados disponíveis em (Resultados SAEB, 2020) referentes à Prova Brasil aplicada no 9º ano do ensino fundamental e também da aplicação do Exame

Nacional do Ensino Médio (ENEM), obtidos nos últimos anos, percebe-se ainda uma precariedade no ensino de matemática no Brasil. Na maioria das escolas, o rendimento é inferior ao desejado. Um dos pontos que pode ocasionar tal precariedade é a falta de uma metodologia de ensino que tenha significado, que faça o estudante pensar, ser ativo no processo de ensino-aprendizagem.

É preciso que o estudante comece a ter interesse em aprender matemática devido a sua importância em aplicações nas diversas áreas do conhecimento, e não porque precisa passar numa prova, num concurso ou algo do tipo. Muitos conceitos ensinados na educação básica, de fato, são difíceis de contextualizar, porém a maneira de como o professor irá abordá-los pode fazer toda a diferença, tornando-os significativos ou não.

É importante destacar que, deve-se tomar muito cuidado quando se fala em motivação no ensino de matemática e aprendizagem significativa. Isso não é o mesmo que querer contextualizar todos os conceitos a serem ensinados, visto que tal objetivo é demasiadamente complicado, pois nem sempre possível aplicar todos os conceitos envolvidos no cotidiano dos estudantes da educação básica.

Uma tendência que vem tomando conta do dia a dia escolar, é ensinar uma matemática que seja útil aos alunos no ambiente em que vivem conforme abordagens de D'Ambrósio (2012). É inegável que ensinar uma matemática útil é importante, porém, ao querer ensinar apenas a matemática básica, através de projetos contextualizando seus conceitos, corre-se o risco de perder o rigor matemático, a generalidade dos conceitos, a qualidade e o tempo para aprender as principais definições. Imagine se os antigos povos que desenvolveram grande parte da matemática pensassem assim, não teríamos o desenvolvimento de toda a tecnologia que existe hoje, já que pouquíssima matemática era aplicada naquela época, e na contemporaneidade é muito mais fácil mostrar sua utilidade.

Com esse pensamento, buscou-se desenvolver nesse trabalho um material que auxilie os professores de matemática da educação básica a tornar suas aulas mais desafiadoras e interessantes.

Através de todo o conhecimento trazido pela autora deste trabalho através de seus 17 anos de experiência em sala de aula, lecionando para alunos da Educação Básica, juntamente com pesquisas realizadas sobre metodologias de ensino de matemática, optou-se pela abordagem envolvendo resolução de problemas. Tema já conhecido pela autora em seus estudos durante sua especialização realizada em 2005 e em seus planejamentos escolares utilizando diversos livros didáticos.

Dessa maneira, através das pesquisas realizadas na busca por propostas envolvendo a metodologia de ensino através da resolução de problemas, a teoria metodológica proposta por George Polya, descrita no livro *Resolução de Problemas: Teoria e Prática* (ONUCHIC, ALLEVATO, *et al.*, 2014) foi uma grande novidade para a autora deste trabalho, metodologia essa, adequada para aplicação em sala de aula e indo ao encontro das ideias da autora. Conforme afirma ONUCHIC, ALLEVATO *et al* (2014), ainda são poucas as referências sobre a metodologia de ensino baseada na resolução de problemas, sendo a proposta por George Polya uma das melhores referências desde o século XX.

Sendo assim, a metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho trata-se basicamente de três etapas: a metodologia de ensino baseada na resolução de problemas proposta por George Polya, conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade, e resolução de alguns problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) com a aplicação da metodologia proposta por George Polya.

No capítulo 2, trata-se da metodologia de ensino baseada na resolução de problemas. Começando pelas ideias propostas por George Polya em seu livro *A Arte de Resolver Problemas* (2006), apresentando sua metodologia de resolução de problemas que consiste basicamente na realização de quatro etapas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Todas essas etapas são abordadas descrevendo passo a passo o que deve ser feito na utilização desse método.

Para Polya, resolver problemas é uma habilidade específica da inteligência humana, e que todo professor deveria fazer o máximo possível para desenvolver essa habilidade em seus alunos. Apresentar um problema ao estudante é o mesmo que apresentar uma meta e um processo de aprendizagem. Sendo assim, desafiando e ao mesmo tempo ensinando o que se deseja.

As sugestões e estratégias apresentadas no capítulo 2 contribuem para o ensino e aprendizagem de matemática, favorecendo um elo entre a matemática informal e a matemática escolar. Na abordagem apresentada pelo autor, o professor ao apresentar um problema aos estudantes, deverá iniciar no processo de compreensão do enunciado, e então nesse momento irá questionar o que eles já têm de conhecimento informal. Esse conhecimento informal, expressado pelo estudante, pode ser um grande passo para começar o processo de interpretação, ou seja, quando realmente se começa a entender onde se quer chegar. A partir daí, abordando o conhecimento informal, estabelecer um plano, lapidar os conceitos necessários através da resolução, até que se chegue no resultado.

Acredita-se que o desenvolvimento dessas etapas na abordagem de qualquer problema em sala de aula faz com que o aluno seja um participante ativo de sua aprendizagem, proporcionando possibilidades de fazer análises, discussões, conjecturas, construção de conceitos e, principalmente, a formalização do conteúdo.

Também serão apresentadas no capítulo 2, abordagens sobre resolução de problemas contidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que define um conjunto de aprendizagens essenciais que os alunos devem desenvolver durante a Educação Básica. Essas aprendizagens essenciais devem coexistir para assegurar aos alunos o desenvolvimento de dez competências gerais estabelecidas na BNCC, dentre essas competências se encontra a resolução de problemas, inclusive a formulação de problemas também como ações que devem ser desenvolvidas com estudantes nas diferentes áreas do conhecimento. Além disso, para finalizar o capítulo 2, faz-se uma abordagem sobre a metodologia de resolução de problemas e sobre a OBMEP.

A OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC.

A escolha desta olimpíada para ser explorada nesse trabalho deve-se ao fato da importância desse projeto em nosso país, e pelas possibilidades de aprendizagem que se pode obter trabalhando com questões olímpicas. No site da OBMEP (2019), é possível encontrar artigos sobre resultados desse projeto. Nesses artigos constam depoimentos sobre a melhora no ensino da matemática na maioria das escolas participantes. O fato de trabalhar com problemas, onde exige do estudante interpretação, organização e escrita formal, entre outras competências, contribui para um ensino de qualidade e significativo.

Dessa maneira, foram selecionados para esse trabalho algumas questões da OBMEP para serem estudadas no capítulo 4 com a metodologia de Polya aplicada. Ou seja, para cada questão selecionada, terá uma solução adaptada com as quatro fases da metodologia de resolução de problemas de Polya, oferecendo assim, um material riquíssimo aos professores para aplicarem em suas aulas.

Para selecionar as questões levou-se em consideração quais abordavam os conceitos de “Análise Combinatória e Probabilidade”. Já que esse conteúdo é de interesse da autora pela necessidade de aprender mais sobre, pelas dificuldades apresentadas pelos alunos na OBMEP e por ser um tema da atualidade que precisa ser mais explorado nas aulas de matemática.

Sendo assim, no capítulo 3 serão tratados conceitos e propriedades de Análise Combinatória e Probabilidade que serão necessários para o desenvolvimento e compreensão do capítulo 4 e algumas proposições que são de interesse da autora para complementar sua formação. Durante o estudo desse tema na disciplina "Matemática Discreta" despertou-se para autora deste trabalho o interesse em aprender mais sobre essas abordagens, além de inúmeras dúvidas.

É importante deixar claro que o foco desse trabalho não está em demonstrar todos os teoremas e proposições a serem tratadas no capítulo 3, e sim apresentá-los aqui para facilitar a compreensão dos problemas a serem abordados no capítulo 4.

Ainda no capítulo 3, será apresentada uma síntese do que a BNCC propõe para o ensino fundamental e médio envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade, já que o foco desse trabalho é a resolução de problemas olímpicos envolvendo referidos assuntos.

O capítulo 4 inicia-se com questões do nível 1 (6º e 7º anos), na sequência questões do nível 2 (8º e 9º anos) e, por fim, questões do nível 3 (ensino médio). Nas questões do nível 3 se encontram diversos problemas envolvendo Probabilidade, o que não foi possível explorar nos demais níveis aqui neste trabalho.

As questões selecionadas e apresentadas no capítulo 4, com suas soluções adaptadas à metodologia de resolução de problemas de Polya, podem ser aplicadas por qualquer professor de matemática, no ensino fundamental (anos finais) e no ensino médio, durante suas aulas. Seguindo cada fase sugerida por Polya, com certeza, serão aulas produtivas. Algumas destas questões seriam aplicadas em sala de aula pela autora desse trabalho e o resultado obtido seria relatado nessa dissertação. Porém, devido à pandemia por qual ainda estamos vivendo, não foi possível desenvolver essa etapa. Mas o material está pronto no capítulo 4 e pode ser aplicado por qualquer professor que tenha interesse.

2. METODOLOGIA DE ENSINO BASEADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo será apresentada inicialmente uma abordagem sobre a metodologia de ensino através da resolução de problemas. Na sequência, será abordada a proposta de George Polya sobre resolver problemas aplicando as quatro fases (Compreensão do Problema, Estabelecimento de um Plano, Execução do Plano e Retrospecto), seguida pelas considerações sobre a resolução de problemas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e por último, as abordagens sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

O ensino de matemática através da resolução de problemas ganhou importância recentemente, tendo seu início por volta de 1980, quando as principais teorias de aprendizagem eram o Construtivismo, a Psicologia Cognitiva e a Teoria Sociocultural de Vygotisky. "A meta, nessa fase, era a volta à aprendizagem por descoberta, construída através da resolução de problemas" (ONUCHIC, ALLEVATO, *et al.*, 2014, p. 36-37).

Baseado nisso, resolver problemas pode ser uma ferramenta importante para dar significado à matemática, estimular os estudantes a fazer matemática e principalmente dar sentido à matemática. Pois, muitas vezes, os estudantes questionam: "Para que serve esse conceito? Para que estudar isso?"

Se o professor de matemática gastar todo o seu tempo em sala de aula realizando uma prática de repetição de exercícios com aplicação direta de algoritmos e fórmulas sem uma contextualização, e resolvendo cálculos e não problemas, isso não permitirá que os alunos apresentem criatividade e variação na resolução, apagando o interesse dos estudantes e prejudicando o desenvolvimento intelectual desses. Entretanto, se o professor trabalhar com uma proposta de resolução de problemas, compatível com a bagagem de conhecimentos já adquiridos pelos estudantes, irá despertar a curiosidade, desenvolverá a capacidade de interpretação e a capacidade de argumentação, gerando o gosto para desafios matemáticos e principalmente proporcionando-lhes novos conhecimentos, confiança em si mesmos e o prazer da descoberta, conforme nos assegura Onuchic Allevato, et al (2014).

É preciso deixar claro para os estudantes que a matemática em si é uma linguagem, com um desenvolvimento lógico, nem sempre quando se está desenvolvendo um raciocínio matemático se pensa numa possível aplicação para resolução de problemas, muitas teorias e ferramentas matemáticas que seguem princípios matemáticos estruturados foram desenvolvidas e anos, ou séculos depois descobriu-se aplicações. Desse modo, o estudante entenderá que resolver um problema exige tempo, paciência, organização e, principalmente, persistência.

De acordo com a proposta de Polya (2006), em seu livro *A Arte de Resolver Problemas,* a metodologia de resolução de problemas apresenta dois aspectos importantes no ensino de matemática: uma matemática de maneira axiomática (ciência dedutiva e sistematizada), que necessita de rigor e conhecimentos fundamentados, e por outro lado, uma matemática experimental, inventada, não mais um produto pronto e acabado repassado aos estudantes.

A proposta de trabalhar com resolução de problemas em sala de aula exige do professor um planejamento que contenha determinada sequência de passos, onde prevê para o estudante os meios e a maneira de se iniciar a interpretação, como agir perante às grandes dificuldades, a motivação para não desistir, os procedimentos para iniciar a resolução, os conceitos envolvidos como pré-requisitos e os novos conceitos que serão apresentados. Além de incluir nesse planejamento uma boa conclusão dessa proposta, incentivando os alunos a se questionarem sobre sua resolução, analisando criticamente se o que fizeram está certo ou errado (FIDELIS, 2014).

Brousseau (2008) nos diz que "o aluno adquire conhecimento por meio da experiência de vida, mas aprende adaptando-se a fatores de dificuldades e desequilíbrio, por isso um meio sem intenções didáticas é incapaz de induzir o aluno a adquirir todos os conhecimentos que se espera que obtenha".

A partir dessa ideia, acredita-se que através de uma seleção de problemas interessantes, o professor irá conseguir provocar o aluno para a busca de novos conhecimentos. Além disso, no trabalho com resolução de problemas, o conhecimento é transmitido com significado, com uma contextualização que facilita o processo de compreensão.

2.1 A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE POLYA

A metodologia a ser apresentada aqui se encontra com mais detalhes no livro *A Arte de Resolver Problemas* do autor George Polya (2006). A escolha dessa bibliografia, envolvendo a metodologia da resolução de problemas se deve ao fato de apresentar uma proposta que vai ao encontro do pensamento da autora desse trabalho.

George Polya (1887-1985) foi um grande matemático húngaro que trabalhou numa grande variedade de tópicos matemáticos (Análise Matemática, Álgebra, Geometria, entre outras), mas sua pesquisa com maior destaque foi sobre o ensino de matemática através da resolução de problemas, que ganhou força nos Estados Unidos quando assumiu uma vaga como professor na Universidade de Stanford (ONUCHIC, ALLEVATO, *et al.*, 2014, p. 22).

A ideia principal do autor é incluir no planejamento do professor quatro etapas para cada resolução de problema: Compreensão do Problema, Estabelecimento de um Plano, Execução do Plano e Retrospecto. Basicamente, essas quatro etapas, que serão detalhadas a seguir, auxiliam na grande dificuldade apresentada pelos estudantes: "Como resolver um problema".

É importante deixar claro que muitas das questões que fazem parte da metodologia apresentada por Polya se aplicam apenas aos problemas de determinação e não aos problemas de demonstração. Nos problemas de determinação, o objetivo é encontrar a incógnita do problema, enquanto que num problema de demonstração o objetivo é mostrar conclusivamente que certa afirmativa é falsa ou verdadeira. As partes principais de um problema de determinação são a incógnita, os dados e a condicionante. Já nos problemas de demonstração, as partes principais são a hipótese e a conclusão (tese) do que se quer provar.

Para Polya, auxiliar o aluno no entendimento de um problema, para que o mesmo consiga resolvê-lo não é uma tarefa fácil, pois, o professor precisa deixar que o estudante adquira experiência pelo trabalho independente. Mas se o estudante for deixado sozinho, sem a devida atenção, pode ocorrer de não acontecer qualquer progresso. E por outro lado, se o professor passar muitas informações ao aluno, não restará muito para ele fazer. Desse modo, o professor precisa equilibrar essa "ajuda", nem tão pouco que desestimule o aluno e nem demais que prejudique a sua evolução.

De acordo com (POLYA, 2006), "se o aluno não for capaz de fazer muita coisa, o mestre deverá deixar-lhe pelo menos alguma ilusão de trabalho independente. Para isso deve auxiliá-lo discretamente."

É importante que o professor se coloque no lugar do estudante, tentar descobrir o que está lhe impedindo de progredir na interpretação do problema. Desse modo,

> Há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao dirigir a seus alunos uma indagação ou uma sugestão: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo,

> desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio. (POLYA, 2006, p. 3)

Portanto, se o aluno conseguir resolver apenas o problema que lhe foi proposto, ele apresentou uma pequena evolução na sua capacidade de resolver problema. Porém, se o estudante conseguir resolver qualquer problema semelhante ao que lhe foi apresentado, isso mostra que ele adquiriu o conhecimento necessário envolvido nessa problemática e reconhece o objetivo principal, independente das alterações no enunciado, e assim houve uma grande evolução no processo de interpretação para o estudante.

A arte de resolver problemas é uma habilitação prática, que pode ser adquirida através de imitação e prática. É importante sugerir ao estudante que ele observe outros problemas semelhantes ao que lhe é proposto e assim reconheça o que foi necessário para tal desenvolvimento. Feito isso, só lhe resta a prática.

O professor pode auxiliar nesse processo, apresentando alguns problemas aos estudantes, de maneira que ao resolvê-los se faça algumas indagações que supostamente os alunos fariam. Ou seja, dramatizar um pouco, se colocar no lugar do aluno para que todos consigam acompanhar e, assim, despertar o interesse da classe.

Na busca pela solução, o estudante pode mudar sua postura diante do mesmo problema constantemente. Pode ter muita dificuldade na primeira etapa, de ler o enunciado e não conseguir interpretar. Nesse caso, o professor precisa intervir. Mas há também casos, onde o estudante lê o enunciado, acha que entendeu, não segue um processo de resolução e arrisca numa resposta direta sem qualquer fundamentação escrita, não argumenta como chegou naquele resultado, e isso pode ser perigoso.

Outra situação que pode ser frustrante ao estudante é aquela na qual ele interpreta corretamente, registra o desenvolvimento de forma qualitativa, porém comete algum erro nessa etapa e perde todo o seu trabalho por não fazer a validação da resposta.

Por isso, a importância de se ensinar aos estudantes essa metodologia de resolução de problemas baseada no desenvolvimento das quatro etapas propostas por George Polya. Vejamos com mais detalhes a abordagem proposta pelo autor:

2.1.1 Fase 1: Compreensão do Problema

Muitas vezes os alunos respondem a questões que não compreenderam, dando resposta sem sentido. Mais do que compreender o problema, o estudante precisa desejar resolvê-lo.

De acordo com (POLYA, 2006, p. 5), “o aluno deve estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante”. Desse modo, o professor sugere ao estudante que se faça os seguintes questionamentos:

1ª) Qual é a incógnita?

O que se quer? O que se deve calcular ou demonstrar?

2ª) Quais são os dados do problema?

Que informações foram fornecidas no enunciado?

3ª) Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Escrever com detalhes a condicionante.

Observe que essas questões podem ser aplicadas independente de qual seja o problema. Para tratar qualquer tipo de problema de determinação, essas três questões auxiliam no processo de compreensão do enunciado. E para cada uma delas, deve-se escrever a resposta para desenvolver o raciocínio.

Já nos problemas de demonstração, o que deve ficar claro nessa fase é: o que se quer demonstrar? Qual é a tese? Quais são as hipóteses? O que se tem de informações para de fato auxiliar na demonstração da tese?

Ainda nessa fase de compreensão, uma estratégia que pode auxiliar muito em diversos problemas, é o traçado de uma figura e nela indicar a incógnita e os dados. Até mesmo um esquema, representações gráficas que facilitem o entendimento.

Utilizar uma notação adequada e deixar claro como isso será feito também facilita a compreensão e, até mesmo o desenvolvimento das próximas fases.

2.1.2 Fase 2: Estabelecimento de um plano

Nessa fase, o estudante deve se perguntar: Já vi esse problema antes? Ou algum parecido com este? Como seria a resolução desse problema com dados mais simples?

É preciso encontrar a conexão entre os dados e a incógnita. Identificar quais conceitos são necessários, qual o primeiro passo?

Assim que aparecerem as primeiras ideias, começar a registrar um plano de resolução. Na verdade, esse registro será uma espécie de roteiro.

Para Polya, ter um plano significa saber quais contas deverão ser feitas, cálculos em geral, desenhos ou qualquer esquema para chegar até a solução.

Nem sempre a resolução de um problema é simples ou rápida. Por isso a importância de fazer esse planejamento antes de sair calculando sem uma direção.

Nos problemas em que os alunos apresentam muita dificuldade para estabelecer um plano, ou seja, ter uma ideia de como resolver o desafio, sugere-se que o professor interfira, conforme afirma (POLYA, 2006, p. 7):

> Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma ideia brilhante. A melhor coisa que o professor pode fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa.

Muitas vezes, a dificuldade em encontrar um plano de resolução está atrelada ao fato do aluno não ter o conhecimento necessário para tal. Nesse caso, é importante a interferência do professor, revisando conhecimentos necessários, apresentando problemas correlatos, ou ainda, demonstrando teoremas ou proposições que serão necessárias para a resolução desse problema.

É importante que o professor oriente o aluno, no que se refere à busca de um problema correlato, que significa encontrar um problema parecido em relação à incógnita. Uma vez que existem muitos enunciados semelhantes, porém, a incógnita em si tem outro significado.

Outra estratégia importante para conseguir escrever um bom planejamento de resolução está na possibilidade de variar o problema. Ou seja, reescrevê-lo de um outro jeito, ou mesmo considerar dados mais simples para de alguma forma obter uma incógnita equivalente, porém mais compreensível. Por exemplo, em um problema de Análise Combinatória, muitas vezes, é possível propor aos alunos que calculem com números menores para, de fato, entender qual o caminho a percorrer para a resolução do caso mais avançado.

No entanto, independente da variação feita no problema, ou a escolha de um problema auxiliar, o estudante precisa conferir se na resolução em questão serão utilizados todos os dados, avaliar se a condicionante será satisfeita, não comprometendo a solução correta.

2.1.3 Fase 3: Execução do plano

Com o plano de resolução bem estabelecido, a execução desse plano será bem sucedida. É claro que se exige paciência, concentração, organização e uma boa habilidade com cálculos escritos ou mentais.

É muito importante que o plano estabelecido na Fase 2 tenha sido registrado, pois, corre-se o risco de esquecer e então o aluno terá dificuldades nessa etapa.

Na maioria das vezes, os estudantes não gostam de registrar suas ideias por escrito, ainda mais um plano de resolução, mas é importante incentivá-los. Principalmente, nas justificativas, eles preferem argumentar oralmente, sem ter que escrever, pois para muitos estudantes é difícil expressar de forma clara a ideia que tiveram para chegar até a solução. O que fica difícil para a avaliação do professor.

Por fim, é importante que o estudante verifique se cada passo está correto. Até mesmo demonstrar essa veracidade, deixar bem claro na resolução cada cálculo, argumento escrito, figura ou qualquer outra passagem utilizada.

2.1.4 Fase 4: Retrospecto

Nessa etapa, o estudante já desenvolveu seu plano, verificou cada passo e agora deve verificar se o resultado obtido de fato é válido. Isso pode ser feito de várias maneiras, dependendo do problema. Um caminho que pode ser usado é resolver o problema de um outro jeito e conferir se a resposta será a mesma.

Se a resolução for bem justificada, muitas vezes não há necessidade de fazer outra resolução, pois, se garantiu a validade da resposta.

O importante é deixar claro para todos os estudantes que é necessário, sim, essa análise ao final da resolução. Parar e avaliar se a resposta encontrada tem sentido, é válida, foi bem justificada?

Segundo Polya (2006, p. 12), “se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas.”

É importante ter humildade e orientar os estudantes que problema algum fica totalmente esgotado. Sempre é possível melhorar sua resolução. Quanto mais se aperfeiçoa a compreensão do enunciado e quanto mais se aprofunda no conhecimento, mais ideias surgem para a resolução.

Ao final, é importante refletir com o estudante se o método utilizado nesse problema poderia ser útil em outro. Fazendo assim, com que o estudante crie uma bagagem de métodos e procedimentos de resolução de problemas. Já que as maiores dificuldades dos estudantes são: resolver problemas, interpretar, registrar as ideias e parar para validar.

Para que essa metodologia dê certo, o professor precisa saber conduzir questionamentos necessários, levar em conta as possibilidades apresentadas pelos alunos, considerando as ideias adequadas sob diferentes perspectivas, e aos poucos introduzir novos pensamentos que contribuam para a evolução do estudante. Um bom questionamento, em etapas diferentes da resolução, permite consolidar os conhecimentos prévios e desenvolver o pensamento matemático para novos conhecimentos. A comparação entre uma ideia e outra, que surgem durante os questionamentos, pode ser uma ferramenta muito rica para auxiliar o estudante a reconhecer qual o caminho promissor a seguir.

2.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) aponta a resolução de problemas como um método importante de ensino em todos os componentes curriculares, principalmente, no ensino de matemática.

De acordo com a BNCC, o professor de matemática atuante na educação básica precisa conhecer diferentes abordagens metodológicas, buscar saberes necessários referentes às práticas pedagógicas que favoreçam o desenvolvimento do estudante. Dentre estas práticas pedagógicas, a metodologia de resolução de problemas favorece a integração entre as diversas áreas do conhecimento, a articulação entre os diversos campos da matemática e a autonomia do estudante.

> [...] por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver

> problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BRASIL, 2017)

Entretanto, o ensino da matemática deve ter um significado muito maior do que simplesmente servir para aplicações técnicas em outras áreas do conhecimento. É preciso garantir no desenvolvimento dessa ciência, através da articulação entre os campos da aritmética, álgebra, geometria, estatística e probabilidade, as competências e habilidades de compreensão, construção de significados, raciocínio lógico, argumentação, comunicação e a criatividade.

A resolução de problemas explorando uma variedade de contextos, em especial os problemas olímpicos, permite ao aluno o estabelecimento de conjecturas e o reconhecimento da importância dos saberes matemáticos.

A BNCC (2017) cita que o processo matemático de resolução de problemas é uma forma privilegiada da atividade matemática, pois ao mesmo tempo é objeto e estratégia para a aprendizagem dos conceitos matemáticos. É um processo rico para desenvolver o raciocínio, a habilidade de representar, a comunicação e a argumentação, e principalmente para o desenvolvimento computacional. Desse modo, ao trabalhar a resolução de problemas, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento assim como envolvendo a história da matemática, a aprendizagem passa a ser significativa para o estudante, despertando o interesse e a criatividade.

Nas competências específicas da matemática para o ensino fundamental, parte da BNCC, podemos reconhecer que a resolução de problemas dialoga com quase todas essas competências, como uma estratégia fundamental para o desenvolvimento destas ou como algo a ser ensinado. Vejamos o que diz a competência de número 6 desse documento:

> Enfrentar situações-problemas em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de textos escritos na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, 2017)

Além da competência citada acima, tem-se as competências específicas de número 1, 5 e 8 que também citam a resolução de problemas em seus textos.

Na primeira dessas competências tem-se a matemática como "uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos" (BRASIL, 2017, p. 269). Sendo essa, talvez, a competência mais tradicional da disciplina de matemática.

O uso de tecnologias digitais, principalmente nos dias atuais devido à pandemia do coronavírus, vem sendo um recurso muito rico no desenvolvimento da metodologia de resolução de problemas. Segundo a BNCC, na quinta competência específica para o ensino fundamental, sugere-se "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2017).

Já na competência 8 se destaca a importância do trabalho em equipe na resolução de problemas. A cooperação entre colegas de classe facilita o processo de ensino-aprendizagem, destacando as diferenças entre eles no que se refere a conhecimento prévio adquirido por cada um deles e assim promovendo o respeito.

A BNCC propõe ainda que desde os anos iniciais sejam abordados durante as resoluções de problemas, diferentes formas de resolução do mesmo problema, questionar sobre o que ocorreria se fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada no enunciado, justificativas para suas respostas e validação do resultado. Além de promover que os alunos criem seus próprios enunciados, formulem novos problemas em diferentes contextos.

No que se refere aos anos finais do ensino fundamental, a BNCC propõe que sejam explorados também, os problemas geométricos, onde somente números racionais não sejam suficientes para resolvê-los, e sim números irracionais. Nessa fase, é muito importante o uso de recursos didáticos como os instrumentos de geometria (compasso, régua, transferidor, entre outros), inclusive recursos digitais para motivação dos estudantes. Além de despertar o interesse, é possível questionar sobre a validade de resultados em algumas resoluções de problemas. Inclusive questioná-los: o desenho prova?

De acordo com a BNCC, no Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, "os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando um leque de recursos para resolver problemas, que exijam maior reflexão e abstração" (BRASIL, 2017, p. 471).

Nessa fase da educação básica, é muito importante levar em conta o interesse dos estudantes na hora da seleção dos problemas a serem explorados. Buscar compreender os interesses profissionais, tecnológicos, ou mesmo, temas da atualidade que lhes interessam, para que se possam explorar enunciados de problemas significativos para estes estudantes. De acordo com a BNCC,

> É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. (BRASIL, 2017, p. 473)

Assim como no ensino fundamental, a habilidade de resolver problemas é muito importante no ensino médio para que todos os propósitos para esta etapa da educação básica sejam concretizados. Enunciados cada vez mais sofisticados, porém com a mesma proposta na hora de resolver: compreensão do enunciado, qual é a incógnita, quais são as condições exigidas, usar notação adequada, utilizar uma figura (se necessário) para auxiliar na resolução, criar um plano de resolução, resolver e validar a solução.

Nas competências específicas para o ensino médio, propostas na BNCC, a resolução de problemas faz parte praticamente de todas elas, vejamos o que diz a número 3:

> “Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.” (BRASIL, 2017, p. 531)

No texto da BNCC, que se refere a esta competência, há uma abordagem sobre a importância de incentivar os estudantes a criarem problemas, escreverem novos enunciados, ou mesmo alterar uma informação do enunciado dado e ver o que acontece. Inclusive, isso pode ser feito com os problemas olímpicos tratados no capítulo 4.

Para finalizar essa seção, é importante deixar claro que a BNCC enfatiza a importância do registro do desenvolvimento de cada resolução de problema. Muitas vezes os alunos não gostam de escrever em matemática, não gostam de registrar seu raciocínio utilizado e isso acaba comprometendo o processo de avaliação. Na resolução de problemas olímpicos, o registro da resolução é fundamental, e percebe-se a grande dificuldade existente nas escolas brasileiras quanto a essa habilidade de representar aquilo que se pensou. Por isso, a importância de se trabalhar em classe essa proposta de resolução de problemas trazida neste trabalho.

2.3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP)

A OBMEP foi criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área. Esta olimpíada é destinada aos alunos do 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental e aos alunos do Ensino Médio; a partir de 2018 incluiu-se também alunos de 4º e 5º anos, considerado como nível A. Os objetivos principais da OBMEP são: estimular e promover o estudo da Matemática; contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas; incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas e promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento OBMEP (2019) .

A OBMEP é composta por duas fases: a primeira é uma prova de múltipla escolha para todos os inscritos (cerca de 18 milhões de estudantes em 2018), seguida de uma prova discursiva para os 5% dos candidatos com melhor nota na primeira etapa. De acordo com o desempenho na segunda prova, os jovens recebem medalhas de ouro, prata e bronze ou menção honrosa.

Como já mencionado anteriormente, a OBMEP amplia os limites do currículo tradicional. Seu objetivo principal é estimular o estudo da matemática por meio da resolução de problemas, contribuindo dessa maneira para a melhoria do ensino público.

Muitos problemas da OBMEP não requerem altos conhecimentos de matemática e, sim, a capacidade de interpretar, criar e improvisar o mais rápido possível. Resolver questões olímpicas faz com que o aluno adquira um conhecimento mais apurado da matemática, implicando assim numa melhoria do ensino-aprendizagem da referida disciplina.

É possível perceber que a matemática fica mais sólida com o trabalho de problemas olímpicos no cotidiano escolar, pois, para cada problema abordado é preciso buscar os conhecimentos prévios e desenvolvê-los para tal.

Fazer com que os alunos participem dessas provas, onde diversos problemas são propostos, é uma forma de incentivar o estudante a fazer construções, aplicar os conhecimentos matemáticos para resolvê-los, desenvolver sua capacidade de interpretação e criatividade.

A maioria dos estudantes não consegue bons resultados nas provas da OBMEP devido à dificuldade com interpretação e domínio de determinados conceitos que são exigidos nas questões e, assim, os problemas da OBMEP são considerados difíceis, diante da qualidade do ensino público na maioria das escolas brasileiras.

Desse modo, é necessário que se faça "um treinamento", a ser realizado pelo professor, em que o estudante aprenda algumas estratégias de resolução de problemas. É importante desenvolver no estudante a habilidade de argumentar, registrar o desenvolvimento de cada questão de maneira detalhada e organizada, de forma mais formal possível. Além de orientá-los a verificar a veracidade dos argumentos a serem utilizados e a resposta obtida.

Esse treinamento pode ser realizado de diversas maneiras, em classe com a abordagem do professor ou através de recurso digitais (WhatsApp, plataformas de ensino, tarefas, atividades em grupos, pesquisas na internet, encontros virtuais extraclasse, entre outros). A proposta de treinamentos em grupo, ou seja, propor resolução de problemas em grupos, equilibra o espírito competitivo com o espírito cooperativo, em que alunos com mais facilidade podem auxiliar aqueles com mais dificuldades. O uso de materiais concretos também enriquece esses momentos, deixando o processo de ensino-aprendizagem mais fortalecido e significativo para os estudantes.

Em 16 anos de existência da OBMEP, produziu-se um banco de questões, com diversos problemas curiosos e desafiadores, disponíveis em materiais impressos que são distribuídos gratuitamente às escolas participantes e por meio de endereço eletrônico www.obmep.org.br. Desse modo, há um material riquíssimo e gratuito para os professores utilizarem nas aulas envolvendo resolução de problemas.

Segundo Fidelis (2014), a maioria dos problemas da OBMEP são problemas processo ou problemas heurísticos, ou seja, são problemas cuja a solução envolve passos não descritos no enunciado. É preciso pensar numa estratégia criativa para resolvê-los.

Esses problemas descritos no parágrafo acima podem ser muito proveitosos para se desenvolver o raciocínio, a autonomia e o espírito investigativo dos alunos. Além de contribuir para o desenvolvimento dos conhecimentos de matemática.

No trabalho com problemas olímpicos, é importante destacar o cuidado que se deve ter quanto ao tratamento dado ao "erro" com os alunos. Para evitar frustrações e desinteresse na participação em olimpíadas, em particular na OBMEP, é importante que o professor discuta cada questão das provas em classe, debatendo possíveis erros ocorridos, esclarecendo e fazendo com que o estudante reconheça o que poderia ter feito diferentemente.

Muitas vezes o professor faz a correção no quadro, o aluno entende a correção feita pelo professor, mas não entende o que errou. É necessário que o professor auxilie o aluno a entender o seu erro, para que este não fique com a ideia de que é incapaz de aprender matemática, pois, muitos alunos "desistem da matemática" por não receberem a devida atenção quando precisam, e assim acabam perdendo a confiança em si mesmos. E, às vezes, aquilo que era tão simples tornou-se um bloqueio no desenvolvimento da aprendizagem desta disciplina, e alunos acabam descartando a matemática e carreiras que as envolva. Os estudantes precisam se sentir empoderados, acreditar que a matemática é acessível para todos. Incentivá-los a ter persistência, atenção, organização e dedicação que são fatores que favorecem neste processo. O erro é apenas um sinal de que a pessoa está pronta para crescer, evoluir. O tempo de memorização ou compreensão dos conceitos não é igual para todos os alunos; é preciso ter paciência. A dificuldade faz parte da aprendizagem para fazer novas conexões, deduzir novos conceitos.

Contudo, acredita-se que o trabalho com resolução de questões olímpicas proporciona ao estudante uma aprendizagem significativa da matemática, o desenvolvimento da escrita formal pelos alunos, favorece o cooperativismo e o empoderamento do discente.

3. CONSIDERAÇÕES SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Com o objetivo de aprofundar o estudo de problemas olímpicos, este capítulo destina-se a uma breve apresentação dos conceitos de análise combinatória e probabilidade, além de apontamentos históricos e uma pequena exposição das novas propostas da BNCC envolvendo tais conteúdos.

Aqui, serão apresentados aspectos históricos, seguidos de definições e conceitos básicos da Análise Combinatória, juntamente com alguns exemplos.

Na sequência, será feita uma abordagem sobre probabilidade, onde serão apresentadas definições e proposições importantes e alguns exemplos para facilitar a compreensão dessas ideias.

Por fim, será apresentada nesse capítulo, uma síntese do que a BNCC propõe para o ensino fundamental e médio envolvendo análise combinatória e probabilidade, já que o foco desse trabalho é a resolução de problemas olímpicos envolvendo os referidos assuntos.

3.1 O QUE É ANÁLISE COMBINATÓRIA?

Em qualquer ramo de atuação, a contagem faz parte do cotidiano das pessoas. Entretanto, contar nem sempre é um processo tão simples como pode parecer. Contar unidades uma a uma, que é o processo elementar, não é viável em diversas situações. Em vista disso, torna-se necessário estabelecer métodos de contagem que atinjam resultados mais rapidamente, de maneira correta e clara.

De acordo com Paiva (2009, p. 155), “a Análise Combinatória é alicerçada no princípio fundamental da contagem, também conhecido como princípio multiplicativo da contagem”.

Para Bezerra (2018), “Análise Combinatória é o ramo da Matemática que fornece as ferramentas necessárias para resolver problemas de contagem. Com origem no estudo de jogos de azar, hoje é aplicada em diversas áreas”. De fato, como veremos adiante, Pascal e Fermat fomentaram essa área com o objetivo de solucionarem problemas envolvendo jogos de azar (MORGADO, CARVALHO, *et al.*, 2016).

Para muitos alunos e até mesmo professores, entende-se análise combinatória como uma parte da matemática que estuda combinações, arranjos e permutações. Porém, o estudo de análise combinatória vai além desses conceitos. Na resolução de problemas de análise combinatória é possível realizar contagens cada vez mais precisas, utilizando técnicas como o princípio fundamental da contagem, o fatorial, agrupamentos, princípio das gavetas de Dirichlet, o princípio da Inclusão-Exclusão, entre outras técnicas; salienta-se aqui que nem todos esses conceitos serão abordados, mas foram citados para que o leitor tenha em mente a vasta gama de assuntos que fazem parte do estudo de análise combinatória.

Basicamente, a Teoria da Contagem busca reduzir um grande problema a outro despretensioso, onde é possível compreender a ideia principal e resolvê-lo. Podemos entender a Análise Combinatória como um conjunto de técnicas e métodos que são utilizadas para resolver problemas onde é necessário quantificar objetos de um dado conjunto sem a necessidade de listar ou enumerar todos os elementos. Um exemplo disso é a utilização nos cálculos envolvendo o Binômio de Newton.

Segundo Morgado *et al* (2016, p. 1), podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são:

1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.
2) Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Mesmo diante de diversas técnicas ou fórmulas para resolver problemas de análise combinatória, é necessário criatividade e uma compreensão clara do enunciado do problema, especialmente quando tratamos de problemas olímpicos.

Salientamos, ainda, que todo estudo de análise combinatória no ensino básico enfatiza problemas envolvendo combinações, arranjos ou permutações. De fato, pois dentre os diversos problemas existentes nessa área, esses são mais simples e de uso mais frequente.

Antes de abordarmos tais conceitos e técnicas de resolução, mencionaremos enfoques históricos sobre o desenvolvimento dessa área.

3.2 ASPECTOS HISTÓRICOS

A abordagem sobre a história da análise combinatória apresentada nesta seção foi baseada nos dados apresentados nos livros (MORGADO, CARVALHO, *et al.*, 2016) e (BOYER, 1974) e na dissertação de mestrado (GONÇALVES, 2014).

A busca por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da matemática e à forma como as pessoas se relacionam inicialmente com esta disciplina.

Acredita-se que o estudo de análise combinatória tenha tido origem ainda na antiguidade, como pode ser visto no desenvolvimento do binômio de Newton $(1+x)^n$ que está entre os primeiros problemas ligados à essa área do conhecimento. O caso específico, considerando $n = 2$ pode ser encontrado no livro Elementos, de Euclides, em torno de 300 a. C. O triângulo de Pascal era conhecido por Chu Shih-Chieh, na China (em torno de 1300) e, antes disso, pelos hindus e árabes. Além disso, vale enfatizar que o matemático hindu Bhaskara (1114 – 1185) sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de n objetos.

O desenvolvimento da análise combinatória deve-se em grande parte à necessidade de resolver problemas de contagem relacionados à Teoria das Probabilidades. Basicamente a necessidade de calcular possibilidades existentes nos chamados jogos de azar impulsionou o desenvolvimento desse ramo da matemática.

De acordo com os dados históricos apresentados no livro “Análise Combinatória e Probabilidade”,

> A primeira obra conhecida em que se estudam as probabilidades é o livro *De ludo Aleae*, (sobre os jogos de azar), de Jerônimo Cardano (1501-1576), publicado em 1663. É possível que o interesse de Cardano pelo assunto se dava a sua paixão por jogos de azar. (MORGADO, CARVALHO, *et al.*, 2016)

Além de Galileu (1564 – 1642), que também estudou problemas de contagem ao trabalhar com as probabilidades (estudando jogos de dados), muitos outros matemáticos contribuíram no desenvolvimento da análise combinatória e da probabilidade. Entre esses matemáticos, o assunto despertou grande interesse em Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665), devido ao ensejo de ganhar em certos jogos de cartas. Também Jaime Bernoulli (1646-1727), ao escrever sua principal obra, *A arte de conjecturar,* publicada em 1713, que apresenta uma teoria geral sobre combinações, permutações e probabilidades. Há registros que comprovam o início de seu interesse pelos problemas de combinatória e de probabilidades, em torno de 1685.

Euler (1710-1761) também deixou uma grande contribuição para a Análise Combinatória: a representação dos coeficientes binomiais, pelo símbolo $\binom{n}{p}$, resultando na fórmula de combinação $\frac{n!}{n!(n-p)!}$.

Certamente, o matemático que mais contribuiu para a Teoria das Probabilidades foi Laplace (1749-1827), famoso também pelas suas colaborações a outras áreas da matemática (MORGADO, CARVALHO, *et al.*, 2016).

Diante dos fatos, foi possível perceber que o desenvolvimento formal da Análise Combinatória se deu a partir do século XVII, quando ela passou a ser reconhecida como um ramo da ciência. Esse formalismo trouxe diversas contribuições para a comunidade matemática e para vários outros campos da ciência.

Pelo que se sabe da história da matemática, o estudo de Análise Combinatória e Probabilidade ganhou força quando se percebeu sua utilidade na previsão de taxas de mortalidade, prêmios de seguros, publicações estatísticas, e muitas outras situações importantes, tanto para organizações governamentais como também para a sociedade em geral. A partir de então, a área de estudo “Análise Combinatória e Probabilidade” foi reconhecida posteriormente, atreladas à Estatística como um poderoso instrumento de observação social, onde é possível deduzir a chance de um evento acontecer.

No século XIX, o matemático Peter Gustav Lejeune Dirichlet formulou pela primeira vez o princípio das gavetas, ou o princípio das casas dos pombos, uma das técnicas mais úteis, simples e muito intuitiva para resolver problemas de combinatória.

Por muito tempo, acreditava-se que a decisão de um evento ocorrer era somente dado à intervenção divina ou a algo sobrenatural. Não havia espaço para uma abordagem que atribuísse ao fenômeno do acaso. Talvez por isso o desenvolvimento forte da teoria da análise combinatória se deu apenas tão recentemente, considerando outras áreas da matemática.

A Análise Combinatória e a Teoria das Probabilidades, juntamente com a Estatística, nunca foram tão mencionadas como no momento em que vivemos devido à pandemia causada pelo coronavírus. A matemática sendo projetada para frente com modelagem de como a doença vai evoluir, obtendo assim uma repercussão ao se destacar nas mídias.

3.3 PRINCIPAIS CONCEITOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Esta seção está destinada à apresentação de conceitos, definições e fórmulas de análise combinatória, na sua maioria baseados nas obras (MORGADO, CARVALHO, *et al.*, 2016) e (SANTOS, MELLO e MURARI, 2007), onde alguns são necessários para o entendimento dos problemas abordados no Capítulo 4 e outros foram selecionados por interesse da autora para complementar sua formação.

3.3.1 Princípio aditivo

Muitos resultados da teoria de conjuntos têm importantes aplicações na Análise Combinatória. Um deles é o cálculo do número de elementos da união de dois conjuntos finitos, que será utilizado no desenvolvimento do princípio aditivo.

É importante relembrar que dois eventos são mutuamente exclusivos quando não podem ocorrer ao mesmo tempo, ou a realização de um desses eventos exclui a realização do outro. Em outras palavras, dois conjuntos são mutuamente exclusivos quando são disjuntos, ou seja, quando a interseção entre esses dois conjuntos é vazia.

Desse modo, entende-se por princípio aditivo:

Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, e A e B são mutuamente exclusivos, então o número de maneiras de ocorrer o evento A ou o evento B é $m + n$.

Utilizando a linguagem de conjuntos, o princípio aditivo é escrito da seguinte maneira:

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com m e n elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $m + n$ elementos. (MORGADO, CARVALHO, *et al.*, 2016)

A demonstração desse princípio não será apresentada nesse trabalho devido à necessidade de alguns conceitos que não foram abordados. Uma demonstração para este princípio pode ser encontrada na obra de Nazaré Bezerra (2018).

Extensão do princípio aditivo: “Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos, disjuntos 2 a 2, e se A_i possui a_i elementos, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos” (SANTOS, MELLO e MURARI, 2007, p. 40).

3.3.2 Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem também é conhecido como princípio da multiplicação, ou simplesmente, princípio multiplicativo.

De acordo com SANTOS, MELLO E MURARI (2007), “Se um evento E pode ocorrer de n maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas n maneiras possíveis de E ocorrer, um outro evento F pode ocorrer de k maneiras distintas, então, o número de maneiras de ocorrer o experimento composto de E e F, nessa ordem, é dado pelo produto $n \cdot k$”.

Em linguagem de conjuntos, como bem nos assegura Muniz Neto (2016), “se E é um conjunto com n elementos e F é um conjunto com k elementos, então, o conjunto $E \times F$ (lê-se E cartesiano F) dos pares ordenados (e, f), tais que e pertence a E e f pertence a F, tem cardinalidade $n \cdot k$”.

Diversas demonstrações para este princípio são encontradas em livros que abordam Análise Combinatória, e não serão aqui apresentadas. Uma demonstração para este princípio encontra-se em *Análise Combinatória e Probabilidade* (BEZERRA, 2018).

Extensão do princípio multiplicativo: Se um evento E_i pode ocorrer de n_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, \dots, l$ então esses l eventos podem ocorrer, em sucessão, de $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_l$ maneiras diferentes. Em linguagem de conjuntos, se o conjunto E_i tem cardinalidade n_i, para $i = 1, 2, 3, \dots, l$, então o produto cartesiano

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_l = \{(e_1, e_2, \dots, e_l)/e_i \in E_i, \text{para } i = 1,2, \dots, l\}$$

tem cardinalidade $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_l$.

3.3.3 Fatorial

A multiplicação de números naturais consecutivos é um cálculo muito frequente na Análise Combinatória, e, em muitos desses cálculos, o número de fatores é extremamente grande. Para facilitar as operações em situações como essas é necessário simplificar a escrita que indica a multiplicação dos fatores. Assim, adota-se a expressão $n!$ (lê-se n fatorial) para indicar o produto dos números naturais consecutivos $n, n-1, n-2, \dots, 1$ com $n \geq 2$.

Definição 1. Define-se o fatorial de n, n natural e $n \geq 2$, como o produto dos números naturais consecutivos $n, n-1, n-2, \ldots, 1$. Isto é:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1.$$

Além disso, define-se $0! = 1$ e $1! = 1$.

3.3.4 Permutação simples

Para abordar a ideia de permutação simples, vamos nos debruçar sobre um problema de Análise Combinatória que interpela o seguinte raciocínio: Dado n objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de quantas maneiras é possível ordená-los?

Conforme Morgado *et al* (2016), cada maneira que se ordena os objetos é chamada de uma permutação simples dos objetos. Então, respondendo à questão acima, temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ modos de escolher o objeto que ocupará o segundo lugar, e assim por diante, de maneira a ficar 1 modo de escolher o objeto que ocupará o último lugar. Portanto, o número de modos de ordenar n objetos distintos é

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!.$$

Desse modo, o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por P_n. Onde,

$$P_n = n!.$$

Observe que, sendo $0! = 1$ então $P_0 = 1$.

Vejamos um exemplo simples sobre permutação, em que é possível listar todas as possibilidades de ordenação dos objetos.

Exemplo 1: Três candidatos, A, B e C, disputaram uma eleição e não houve empate. Considerando como resultado a sequência 1º, 2º e 3º colocados, os possíveis resultados desse pleito são todas as permutações das letras A, B e C:

ABC,	ACB,	BAC,
BCA,	CAB,	CBA,

ou seja, 6 possíveis resultados. Esse número de possibilidades também poderia ser obtido fazendo o cálculo de P_3, o número de permutações de 3 objetos:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Contudo, gostaríamos de enfatizar que o número de permutações nem sempre é fácil de calcular, pois, quando esse número é relativamente grande, se torna difícil escrever todas as possibilidades, uma a uma. Nesse caso, para calcular o número de permutações, a fórmula se torna imprescindível.

Exemplo 2: Quantos são os anagramas da palavra CADERNO?

Solução: Um anagrama é uma palavra (não necessariamente fazendo sentido) formada com as mesmas letras da palavra original, mas em uma ordem qualquer. Quando as n letras de uma palavra são todas distintas, o número de anagramas é igual ao número de permutações de n elementos distintos, que, como vimos, é igual a $n!$ (CARVALHO, 2015).

Desse modo, cada anagrama de CADERNO nada mais é que uma ordenação das letras C, A, D, E, R, N, O. Portanto, o número de anagramas da palavra CADERNO é igual ao número de permutações simples de 7 letras distintas, isto é,

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

Logo, a palavra CADERNO tem 5040 anagramas.

3.3.5 Arranjos simples

Para compreender a ideia de arranjo, de um modo simples, considere o conjunto $I = \{a, b, c, d\}$. Vamos formar todas as sequências possíveis de três elementos distintos desse conjunto:

(a, b, c) (a, b, d) (a, c, d) (b, c, d)
(a, c, b) (a, d, b) (a, d, c) (b, d, c)
(b, a, c) (b, a, d) (c, a, d) (c, b, d)
(b, c, a) (b, d, a) (c, d, a) (c, d, b)
(c, a, b) (d, a, b) (d, a, c) (d, c, b)
(c, b, a) (d, b, a) (d, c, a) (d, b, c)

Por definição, essas sequências são chamadas de arranjos simples dos quatro elementos do conjunto *I*, tomados três a três. Isto é, um arranjo simples de três elementos de *I* é qualquer sequência formada por três elementos distintos de *I*. Observe que, dois arranjos simples quaisquer se diferenciam pela ordem dos elementos ou pela natureza dos elementos que os compõem:

- *(a, b, c) ≠ (b, c, a)*, pois, diferem pela ordem dos elementos;
- (*a, b, c) ≠ (a, b, d)*, pois, diferem pela natureza dos elementos (elementos diferentes).

Contando as sequências acima, constata-se que o número de arranjos simples dos quatro elementos de *I,* tomados três a três, é 24, que pode ser indicado da seguinte maneira: $A_4^3 = 24$ (lê-se arranjo simples de quatro elementos tomados 3 a 3). Esse número pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem:

$$\underbrace{4\, possibilidades}_{1^{\underline{o}}\ elemento} \text{ x } \underbrace{3\, possibilidades}_{2^{\underline{o}} elemento} \text{ x } \underbrace{2\, possibilidades}_{3^{\underline{o}}\ elemento}$$

Logo,

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

De maneira geral, define-se:

“Arranjos simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo. Notação A_n^p” (SANTOS, MELLO e MURARI, 2007, p. 57).

Utilizando o princípio multiplicativo, podemos obter uma expressão matemática que caracterize A_n^p.

Considere um conjunto com n elementos dois quais queremos tomar p, $p \leq n$. O cálculo do número de arranjos simples de n elementos de um conjunto, tomados p a p, pode ser organizado da seguinte maneira:

I) Fazer as escolhas de cada um dos p elementos, tendo em vista que a definição exige p elementos distintos:

n possibilidades de escolha para o primeiro elemento,

$n - 1$ possibilidades de escolha para o segundo elemento,

$n - 2$ possibilidades de escolha para o terceiro elemento,

...

$n - (p - 1)$ possibilidades de escolha para o p-ésimo elemento.

Ou seja:

$$\underbrace{1^{\underline{o}}\ elemento}_{n\ possibilidades} \quad \underbrace{2^{\underline{o}}\ elemento}_{n-1\ possibilidades} \quad \underbrace{3^{\underline{o}}\ elemento}_{n-2\ possibilidades} \quad \dots \quad \underbrace{p^{\underline{o}}\ elemento}_{n-(p-1)\ possibilidades}$$

II) Aplicar o princípio fundamental da contagem:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(p-1)].$$

Que pode ser reescrito como:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1).$$

III) Escrever a expressão acima de uma maneira mais simples. Para isso, vamos utilizar o conceito de fatorial e fazer uso de uma técnica de cálculo muito utilizada (multiplicar por 1 de maneira conveniente), pois, sabemos que uma igualdade não se altera se a multiplicarmos e dividirmos por um mesmo valor não-nulo. Nesse caso, vamos multiplicar e dividir o segundo membro da igualdade por $(n-p)!$. Veja:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1).\frac{(n-p)!}{(n-p)!}.$$

Observe que:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)! = n!.$$

Logo,

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!},$$

uma expressão bem mais simples para escrever.

Diante da abordagem acima, é possível perceber que não há necessidade de "decorar" a fórmula de arranjo simples para resolver problemas, desde que o estudante interprete a situação problema com clareza e utilize corretamente o princípio multiplicativo.

Exemplo 3: De quantas maneiras é possível escolher, com ordem de preferência, 3 cidades turísticas brasileiras de uma lista de 10?

Solução: Como é preciso escolher 3 cidades de uma lista de 10 e ordenar por preferência, estamos diante de uma situação de arranjo simples. Desse modo, utilizaremos a fórmula apresentada anteriormente para calcular:

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Logo, cada uma dessas 720 maneiras é um arranjo simples das 10 cidades tomadas 3 a 3. E assim, a resposta para o problema é: são 720 maneiras possíveis de escolher, com ordem de preferência, 3 cidades turísticas brasileiras de uma lista de 10.

Note que, a resposta também poderia ser obtida simplesmente utilizando o princípio fundamental da contagem:

Escolha da 1ª cidade: 10 possibilidades;

Escolha da 2ª cidade: 9 possibilidades;

Escolha da 3ª cidade: 8 possibilidades.

Assim, o número de possibilidades de escolha de 3 cidades brasileiras dentre 10 é

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

3.3.6 Combinações Simples

Mencionamos anteriormente que arranjos são agrupamentos em que a ordem dos elementos é considerada em cada formação. A combinação simples é um outro tipo de agrupamento onde a ordem dos elementos não é considerada. Isso fica evidente através da seguinte situação:

Entre quatro candidatos a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas de programador no departamento de informática de uma empresa. Como os candidatos são igualmente capazes, a escolha será feita por sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

Como os cargos dos profissionais escolhidos são idênticos, a ordem dos candidatos sorteados não é considerada.

Assim, o número de escolhas diferentes que podem ser feitas é o número de subconjuntos de três elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, que são:

$$\{a, b, c\}, \quad \{a, b, d\}, \quad \{a, c, d\} \quad \text{e} \quad \{b, c, d\}.$$

Esses subconjuntos são chamados de "combinações simples dos quatro elementos de I tomados três a três".

Desse modo, entende-se combinação simples como uma seleção de p objetos dentre n objetos. Vejamos a definição:

> Combinações simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e p é um número natural tal que $p \leq n$, são todas as escolhas não ordenadas de p elementos. Notação $C_n^p = \binom{n}{p}$ (lê-se combinação de n, p a p). Se $p > n$, p e n inteiros, define-se $C_n^p = 0$.

[...] De uma maneira geral, $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (SANTOS, MELLO e MURARI, 2007, p. 62-63)

Nessa última igualdade, envolvendo combinação e arranjo, é importante deixar claro que para cada combinação realizada de n elementos, tomados p a p, é possível reordenar os elementos de $p!$ maneiras. Assim o produto $p!\,C_n^p$ fornece todos os arranjos possíveis de um conjunto com n elementos, dos quais queremos tomar p.

Calcular o número de combinações simples de classe p de n objetos é o mesmo que calcular o número de subconjuntos com p elementos de um conjunto com n elementos.

Exemplo 4: Entre 8 policiais serão escolhidos cinco para garantir a segurança pessoal de um senador da República durante um evento. Quantos grupos de segurança diferentes podem ser formados se os escolhidos terão funções idênticas?

Solução: Como as funções são idênticas, a ordem dos elementos componentes não altera o grupo de segurança; logo, cada um dos grupos possíveis é uma combinação de pessoas. Assim o número possível de grupos que podem ser formados é:

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 6} = 56\,.$$

Portanto, podem ser formados 56 grupos de segurança diferentes.

Observação: Considerando n objetos distintos, o número de maneiras de escolher p objetos é idêntico ao número de maneiras de escolher $(n-p)$ objetos, pois, se dos n objetos tira-se p, sobram $(n-p)$ e consequentemente, se de n objetos tira-se $(n-p)$, sobram p objetos. Portanto,

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

Onde C_n^{n-p} é chamada de combinação complementar de C_n^p. Essa relação será abordada novamente no estudo do Triângulo de Pascal.

3.3.7 Permutações circulares

Para introduzirmos de forma acessível o conceito de permutações circulares, abordamos o seguinte problema:

“De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?”

A pergunta acima refere-se às permutações circulares de n objetos distintos, representada por $(PC)_n$. Diferentemente das permutações simples, onde importam os lugares que os objetos ocupam, nas permutações circulares o que importa é apenas a posição relativa dos objetos entre si.

Se não considerássemos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Considerando a equivalência, cada **permutação circular** é gerada por n disposições, ou seja,

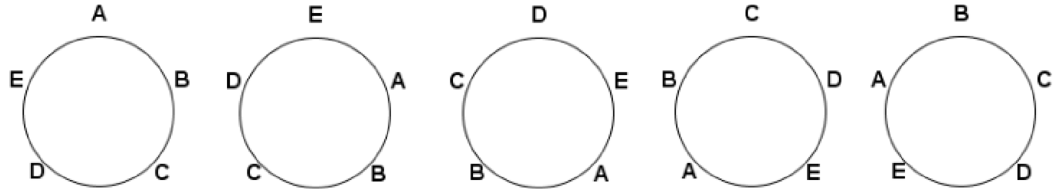
$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!.$$

Uma outra maneira de entender a ideia de permutação circular é pensar que há 1 modo de colocar o 1º objeto no círculo (onde quer que o coloquemos, ele será o único objeto no círculo); há $(n-1)$ modos de colocar o 2º objeto, já que sua posição será relacionada com o 1º objeto colocado; haverá $(n-2)$ modos de se colocar o 3ºobjeto, e assim por diante, até o e-nésimo objeto que terá apenas 1 modo de colocá-lo.

Exemplo 5: De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?

Solução: Num primeiro momento parece que para formar uma roda com as cinco crianças, nomeadas por A, B, C, D e E, basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de 5! = 120 modos. Entretanto, as rodas $ABCDE$ e $EABCD$ são iguais, pois na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si e a roda $ABCDE$ pode ser “girada” gerando a roda $EABCD$. Como cada roda pode ser “girada” de cinco modos, como mostra a imagem a seguir:

Figura 1: Cinco modos de girar uma roda com 5 crianças.



Fonte: centralexatas.com.br (04/08/2020)

Essa contagem de 120 modos contou cada roda 5 vezes e a resposta é $\frac{120}{5} = 24$.

Exemplo 6: De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher?

Solução: Há $(PC)_n = (n-1)!$ modos de formar uma roda com n pessoas. Desse modo, considerando primeiramente a distribuição das n mulheres na roda, tem-se $(PC)_n = (n-1)!$ modos de fazer isso. Como cada homem deve sentar ao lado de sua mulher, ele poderá sentar à esquerda ou à direita dela, gerando assim duas possibilidades de sentar-se na roda. Sendo n homens e considerando que cada homem tenha duas opções de escolha para sentar-se, há 2^n modos de distribuí-los na roda. Logo, através do princípio multiplicativo, a resposta para esse problema é $(n-1)!2^n$.

3.3.8 Permutação com repetição

Para essa seção, vamos considerar uma particularidade em relação à permutação simples. Suponha agora que queremos ordenar n elementos em fila, sabendo que há elementos repetidos. Dentre os n elementos existem:

$$n_1 \text{ iguais a } a_1;$$
$$n_2 \text{ iguais a } a_2;$$
$$\dots$$
$$n_r \text{ iguais a } a_r,$$

ademais,

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n.$$

Podemos escolher os n_1 lugares dentre os n lugares, para colocar os elementos iguais a a_1, de $C_n^{n_1}$ maneiras. Dentre os $n - n_1$ lugares restantes, escolhe-se n_2 lugares para colocar os elementos iguais a a_2, que pode ser feito de $C_{n-n_1}^{n_2}$ formas. E assim por diante, faz-se as escolhas até restar $n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{r-1}$ lugares, onde serão colocados os elementos iguais a a_r de $C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}^{n_r}$ maneiras. Desse modo, o número de permutações de n objetos com repetição pode ser calculado da seguinte maneira:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \cdots \cdot C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}^{n_r} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!\,(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{r-1})!}{n_r!\,(n-n_1-\cdots-n_r)!}.$$

Note que $(n-n_1-\cdots-n_r)! = 0! = 1$ e realizando simplificações onde aparecem numeradores e denominadores iguais no produto acima, obtém-se:

$$C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3}\cdot\cdots\cdot C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}^{n_r} =$$
$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_r!}.$$

Portanto, a permutação de n elementos, com repetição, será denotada por $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ e pode ser calculada através da fórmula:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\cdots n_r!}.$$

Exemplo 7: Quantos são os anagramas da palavra “MATEMATICA”?

Solução: Como temos três letras A, duas letras M, duas letras T, uma letra C, uma letra I e uma letra E, para cada palavra serão gerados $3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!$ anagramas idênticos. Ou seja, 24 repetições de anagramas. Assim a quantidade de anagramas é dada por

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200.$$

3.3.9 Combinações completas

O número de combinações completas é a quantidade de escolhas de p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados. A representação simbólica para combinações completas de classe p de n objetos é dada por CR_n^p .

Como bem nos assegura Morgado e Carvalho (2015),

> A quantidade de combinações completas também pode ser interpretada como o número de soluções da equação $x_1+x_2+\cdots+x_n=p$ em inteiros não negativos. Para determinar CR_n^p, vamos representar cada solução da equação por

> uma fila de sinais de + e I. Por exemplo, para a equação $x + y + z = 5$, as soluções (2,2,1) e (5,0,0) seriam representadas por ++I++I+ e +++++II, respectivamente. Na nossa representação, as barras são usadas para separar as incógnitas e a quantidade de sinais + indica o valor de cada incógnita.

Para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$, cada solução seria representada por uma fila com $(n-1)$ barras (as barras são para separar as incógnitas; para separar n incógnitas, usamos $(n-1)$ barras) e p sinais +. Assim, para formar uma fila com $(n-1)$ barras e p sinais +, basta escolher dos $(n+p-1)$ lugares da fila os p lugares onde serão colocados os sinais +, o que pode ser feito de C_{n+p-1}^{p} modos. Portanto,

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^{p}.$$

Exemplo 8: De quantos modos é possível comprar 3 sorvetes em uma lanchonete que os oferece em 6 sabores distintos?

Solução: Para solucionar esse problema, devemos resolver a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3.$$

Isso pode ser feito de

$$CR_6^3 = C_{6+3-1}^3 = C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56 \text{ modos.}$$

Para uma melhor compreensão do uso de sinais + e I indicados acima e considerando os sabores dos sorvetes por x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6, nesse exemplo, dentro dos 56 modos do resultado, estão as possibilidades:

+++IIIII que indica $x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$ e $x_6 = 0$ onde foram escolhidos 3 sorvetes do sabor x_1.

II+I+I+I que indica $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1$ e $x_6 = 0$, onde foram escolhidos um sorvete do sabor x_3, outro do sabor x_4 e o último do sabor x_5.

Perceba que, para esse caso, sempre é possível escolher o mesmo objeto mais de uma vez.

Exemplo 9: Quantas são as soluções inteiras e não negativas da inequação

$$x+y+z\leq 5?$$

Solução: As soluções inteiras e não negativas $x+y+z\leq 5$ são calculadas em várias etapas:

- Calcular as soluções onde $x+y+z=5$;
- Calcular as soluções onde $x+y+z=4$;
- Calcular as soluções onde $x+y+z=3$;
- Calcular as soluções onde $x+y+z=2$;
- Calcular as soluções onde $x+y+z=1$;
- E por fim calcular as soluções onde $x+y+z=0$.

Esse cálculo pode ser organizado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}&CR_3^5+CR_3^4+CR_3^3+CR_3^2+CR_3^1+CR_3^0=\\&=C_7^5+C_6^4+C_5^3+C_4^2+C_3^1+C_2^0=\\&=21+15+10+6+3+1=56.\end{aligned}$$

Uma outra maneira de resolver esse problema, seria calcular o número de soluções inteiras e não negativas da equação

$$x+y+z+f=5,$$

definindo f como uma “folga” da solução, ou seja, $f=5-(x+y+z)$. E, a partir daí calcular o número de soluções inteiras não negativas de

$$x+y+z\leq 5.$$

Pode ser feito através da fórmula $CR_4^5=C_8^5=56$.

3.3.10 Permutação caótica

Uma permutação de $a_1,a_2,a_3,...,a_n$, é chamada de caótica quando nenhum dos $a_i's$ se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição.

Portanto, a_2,a_1,a_5,a_3,a_4 e a_5,a_4,a_1,a_2,a_3 são exemplos de permutações caóticas de a_1,a_2,a_3,a_4,a_5. Já o exemplo a_2,a_1,a_3,a_5,a_4 não é, pois, a_3 está em sua posição original.

O número de permutações caóticas de *n* elementos é denotado por D_n.

Exemplo 10: (2, 1, 4, 5, 3) e (3, 4, 5, 2, 1) são permutações caóticas de (1, 2, 3, 4, 5), mas (3, 2, 4, 5, 1) não é, pois, 2 está no lugar original.

a) Determine D_4 listando todas as permutações caóticas de (1, 2, 3, 4).

Solução: As permutações caóticas de (1, 2, 3, 4) são 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 e 4321. Portanto, $D_4 = 9$.

b) Quantas são as permutações de (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) que têm exatamente três números em suas posições originais?

Solução: Primeiro escolhemos 3 números entre 1 e 7 que ficam na posição original, o que pode ser feito de $C_7^3 = 35$ maneiras. Em seguida, deve-se fazer uma permutação caótica com as demais 4 posições, e isso pode ser feito de $D_4 = 9$ maneiras (calculado no item a). Portanto, há

$$C_7^3 \cdot D_4 = 35 \cdot 9 = 315$$

permutações de (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) que têm exatamente três números em suas posições originais.

3.3.10.1 Fórmula para calcular o número de permutações caóticas

Podemos calcular D_n o número de permutações caóticas de (1,2,3, ..., *n*) através da fórmula:

$$D_n = n!\left[\frac{1!}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

A demonstração não será apresentada nesse trabalho, mas pode ser encontrada em (MORGADO, CARVALHO, *et al.*, 2016, p. 64).

3.3.11 Os Lemas de Kaplansky

Os Lemas de Kaplansky foram construídos em 1943 pelo matemático canadense Irving Kaplansky, cuja motivação era a resolução do chamado Problema de Lucas. Para maiores detalhes consultar *Análise Combinatória e Probabilidade* (MORGADO, CARVALHO, *et al.*, 2016).

Primeiro lema de Kaplansky: O número de subconjuntos de $\{1,2,3,\dots,n\}$ com p elementos, nos quais não há números consecutivos é

$$f(n,p) = C_{n-p+1}^{p}.$$

Justificativa:

Forme uma fila com os números $1,2,3,\dots,n$ e assinale com a letra E os p números escolhidos e com a letra N os $(n-p)$ não escolhidos. A condição para que não sejam escolhidos números consecutivos é que entre duas letras E haja pelo menos uma letra N. Comece escrevendo as $(n-p)$ letras N. A seguir, deve-se escolher, para colocar as letras E, p dentre os $[(n-p)+1]$ espaços situados antes, entre e depois das letras N. Isto pode ser feito de C_{n-p+1}^{p} modos.

Exemplo 11: De quantos modos é possível formar um subconjunto com 3 elementos de $\{1,2,3,4,5,6\}$ no qual não haja números consecutivos?

Solução: De acordo com a justificativa acima, ao formar um subconjunto, marcamos com a letra E os elementos escolhidos e com a letra N os elementos não escolhidos. Ora, para formar um subconjunto com 3 elementos não consecutivos, deve-se colocar três letras E e três letras N em fila, sem que haja duas letras E consecutivas:

1	2	3	4	5	6
E	N	E	N	E	N
			ou		
E	N	E	N	N	E
			ou		
E	N	N	E	N	E
			ou		
N	E	N	E	N	E.

Obtendo assim, 4 escolhas possíveis de subconjuntos com 3 elementos não consecutivos.

A ideia principal abordada acima consiste em escrever três vezes a letras N (correspondente à quantidade de números não escolhidos), e coloca-se as letras E nos quatro espaços representados pelos traços:

_ N _ N _ N _

Sendo no máximo uma letra E por espaço (C_4^3) modos. Daí a resposta para esse problema é:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Ou seja, é possível formar um subconjunto de 3 elementos de 4 modos, sendo eles:

$$\{1,3,5\}, \qquad \{1,3,6\}, \qquad \{1,4,6\}, \qquad \{2,4,6\}.$$

Exemplo 12: Uma fila tem 15 cadeiras nas quais devem sentar-se 5 homens, de modo que não fiquem dois homens sentados em cadeiras contíguas. De quantos modos isso pode ser feito? (MORGADO, CARVALHO, *et al.*, 2016)

Solução: Deve-se inicialmente escolher 5 cadeiras sem que haja cadeiras consecutivas. Isso pode ser feito de:

$$f(15,5) = C_{15-5+1}^5 = C_{11}^5$$

modos.

Escolhidas as 5 cadeiras, deve-se designar a cada homem uma cadeira, o que pode ser feito de $P_5 = 5!$ modos.

Portanto, a solução do problema é:

$$C_{11}^5 \times 5! = 55.440.$$

Segundo Lema de Kaplansky: O número de p-subconjuntos de $\{1,2,\ldots,n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n como consecutivos, igual a

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C_{n-p}^p.$$

Justificativa:

Suponha agora que os elementos de $\{1,2,\ldots,n\}$ estejam arrumados em círculo, conforme a figura a seguir:

Figura 2 – Disposição de n elementos em um círculo.

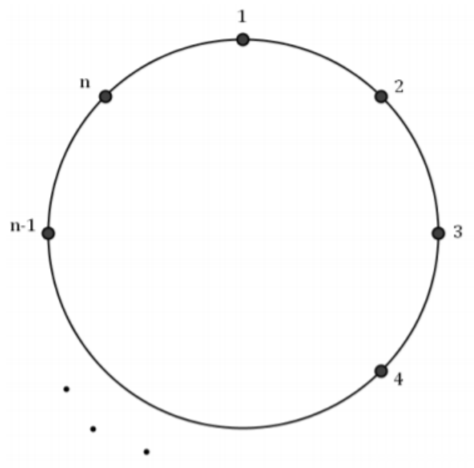


Figura: arquivo da autora.

Nesse caso os elementos 1 e n são consecutivos.

Desse modo, segundo Morgado *et al* (2016), a quantidade total de subconjuntos será a soma do número de subconjuntos nos quais o elemento 1 figura com o número de subconjuntos nos quais 1 não figura.

Caso I: Subconjuntos nos quais o elemento 1 figura.

Note que, os elementos 2 e n não podem figurar, já que 1 figura e queremos garantir que os elementos escolhidos nãos sejam consecutivos. Desse modo, deve-se escolher $(p-1)$ elementos em $\{3,4,\ldots,n-1\}$, não consecutivos, para que juntamente com o elemento 1, seja possível formar esses subconjuntos desejados. O número de modos em que isso pode ser feito, de acordo com o primeiro Lema Kaplansky, é:

$$f(n-3;p-1)=C_{n-3-(p-1)+1}^{p-1}=C_{n-p-1}^{p-1}.$$

Caso II: Subconjuntos nos quais o elemento 1 não figura.

Nesse caso, deve-se escolher p elementos em $\{2,3,\ldots,n\}$, não consecutivos. Novamente, aplicando o primeiro lema Kaplansky, tem-se que o número de maneiras de formar esses subconjuntos, nos quais o elemento 1 não figura, é:

$$f(n-1,p)=C_{n-1-p+1}^{p}=C_{n-p}^{p}.$$

Portanto, considerando as duas situações acima, o número de subconjuntos de $\{1,2,\ldots,n\}$, com p elementos, nos quais não há números consecutivos, considerando 1 e n como elementos consecutivos, é igual a:

$$g(n,p) = C_{n-p-1}^{p-1} + C_{n-p}^{p} = \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!\,(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!} =$$

$$= \frac{(n-p-1)!\,p + (n-p)!}{p!\,(n-2p)!} =$$

$$= (n-p-1)!\,\frac{p+(n-p)}{p!\,(n-2p)!} =$$

$$= n\frac{(n-p-1)!}{p!\,(n-2p)!} = \frac{n}{n-p}\frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!} = \frac{n}{n-p}C_{n-p}^{p}$$

.

Exemplo 13: Considere que 5 pessoas devem sentar-se em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?

Solução: A situação descrita nesse problema é um caso particular do segundo Lema de Kaplansky. Sendo assim, o número de possibilidades de escolha das cadeiras para que sejam utilizadas é

$$g(15,5) = \tfrac{15}{15-5}C_{15-5}^{5} = \tfrac{3}{2}C_{10}^{5} = \tfrac{3}{2}252 = 378.$$

Note que, escolhidas as cadeiras, há 5! modos de designá-las para as 5 pessoas. Assim, deve-se ainda multiplicar 378 por 120 para obter a resposta do problema.

Portanto, a solução do problema é 45360 modos.

Em combinatória, existem basicamente dois tipos de problemas: os de contagem e os de existência. Nesse capítulo, até então, foram fornecidos alguns conceitos e ferramentas muito úteis para resolução de problemas de contagem. A seção a seguir destina-se à apresentação de uma ferramenta importante na resolução de problemas de existência.

3.3.12 O Princípio das Gavetas de Dirichlet

Se *n* objetos forem colocados em, no máximo, $n-1$ gavetas, então, pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

Demonstração:

Esse princípio tem demonstração direta, pois, se cada uma das gavetas contiver, apenas um objeto, o número total de objetos nelas colocados será, no máximo, $n - 1$, faltando 1 objeto ser guardado.

■

Esse princípio recebeu esse nome após o matemático alemão, do século XIX, Gustav L. Dirichlet chamar atenção para a importância de tal conceito em matemática.

Tal princípio é muito conhecido como o **Princípio da Casa dos Pombos**, pelo fato de ser usualmente enunciado como: se distribuirmos n pombos em $n - 1$ gaiolas, então, ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, 2 pombos (MUNIZ NETO, 2016).

Uma ideia simples para representar o princípio das gavetas, é pensar que numa festa com mais de 12 crianças, existirão, necessariamente, pelo menos duas que nasceram no mesmo mês. Basta considerar os meses como as "gavetas" e as crianças como os "objetos". De maneira análoga, se em um evento tiver mais de 365 pessoas, então duas, pelo menos, aniversariam no mesmo dia, considerando que uma pessoa nascida em 29 de fevereiro tenha seu registro como 28 de efvereiro. Tal princípio também é muito utilizado no estudo da teoria de conjuntos, mas não vamos nos aprofundar nesse assunto, visto que o enfoque dessa dissertação é outro.

3.3.13 Triângulo de Pascal

Em registros históricos, datados dos séculos XII e XIII, encontram-se provas que chineses e árabes já utilizavam as propriedades desse triângulo (BONGIOVANNI, LEITE e LAUREANO, 1993). O matemático italiano Nicolo Fontana Tartaglia (1500-1557), além de suas contribuições no desenvolvimento da fórmula para resolver cúbicas, também deixou registros fundamentais para o estudo do triângulo aritmético, favorecendo o trabalho que viria no século seguinte.

Embora as propriedades desse triângulo já fossem utilizadas, somente no século XVII, elas foram sistematizadas num tratado do matemático, físico e filósofo francês Blaise Pascal (1623-1662).

O Triângulo de Pascal também é conhecido como Triângulo Aritmético. Esse triângulo é formado com os diversos valores de C_n^p. Esses valores C_n^p, são chamados de números binomiais, coeficientes binomiais ou números combinatórios.

$$
\begin{array}{lllll}
C_0^0 & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 \\
\ldots & & & &
\end{array}
$$

Observe que, enumerando as linhas e colunas a partir de zero, C_n^p aparece na linha n e na coluna p.

Mas, enfim, para que serve esse triângulo? Essa pergunta, muitas vezes, é feita pelos estudantes e podemos usar isso a nosso favor, motivando-os, já que esse triângulo tem propriedades curiosas e interessantes.

Primeiramente, é importante destacar que a forma em que os números estão dispostos proporciona o reconhecimento de muitas propriedades entre esses números binomiais.

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & \ldots & &
\end{array}
$$

De acordo com Oliveira (2020), na antiguidade, essas propriedades eram utilizadas para auxiliar na resolução de cálculos envolvendo raízes quadradas ou cúbicas, e atualmente, no desenvolvimento do Binômio de Newton e no cálculo das probabilidades. Em suas diagonais, por exemplo, podem ser encontrados os números triangulares. Até os termos da sequência de Fibonacci podem ser obtidos através de um padrão dentro do Triângulo de Pascal. E, essas são apenas algumas situações em que o Triângulo de Pascal é utilizado.

Uma propriedade dos números binomiais que permite a construção do Triângulo de Pascal de maneira rápida e fácil é a Relação de Stifel. Michael Stifel era alemão, fez pesquisas em aritmética e álgebra, nasceu em 1487 e morreu em 1567, (BOYER, 1974, p. 199).

Mencionaremos, aqui, algumas propriedades do Triângulo de Pascal, que serão utilizadas posteriormente:

Propriedade 1: Em qualquer linha do triângulo, o primeiro elemento é sempre 1.

De fato, o primeiro elemento do Triângulo de Pascal é $C_n^0 = 1,$ para qualquer n pertencente ao Conjunto dos Números Naturais.

Propriedade 2: O último elemento de qualquer linha, do Triângulo de Pascal também é igual a 1.

Da mesma maneira, $C_n^n = 1$, para qualquer n pertencente ao Conjunto dos Números Naturais.

3.3.14 Teorema (Relação de Stifel). *Se* $\boldsymbol{p}$ *e* $\boldsymbol{n}$ *pertencem ao Conjunto dos Números Naturais e* $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{n} - \mathbf{1}$, *então*

$$\boldsymbol{C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}}.$$

Demonstração:

Pela definição de combinação simples, tem-se

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}.$$

Colocando o fator comum em evidência,

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right].$$

Efetuando os cálculos dentro dos colchetes na expressão acima, obtém-se

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left[\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right] = \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-p)(p+1)}.$$

Portanto, simplificando a expressão obtida acima,

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)![n+1-(p+1)]!} = C_{n+1}^{p+1}.$$

■

Essa relação indica que, somando dois elementos consecutivos de uma mesma linha no Triângulo de Pascal, obtém-se o elemento situado abaixo da última parcela dessa soma. Tal relação pode, ainda, ser estendida para coeficientes multinomiais, que não é o foco dessa dissertação. Para maiores detalhes, ver Gosset, Eric (DISCRETE MATHEMATICS WITH PROOF, 2009).

3.3.15 Teorema (Combinação Complementar). *Em uma mesma linha do Triângulo de Pascal, elementos equidistantes dos extremos são iguais, ou seja,*

$$\boldsymbol{C_n^p = C_n^{n-p}}.$$

Demonstração:

Pela definição de combinação simples, C_n^p é o número de modos de escolher, entre n objetos, p deles. E pode ser calculado da seguinte maneira:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Mas, utilizando algumas propriedades das operações, a expressão acima pode ser escrita do seguinte modo:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = C_n^{n-p},$$

o que prova o desejado.

■

A relação acima é conhecida como combinação complementar.

3.3.16 Teorema (Teorema das Linhas)**.** *A soma dos elementos da linha n do Triângulo de Pascal vale* $\boldsymbol{2^n}$*, ou seja,*

$$\boldsymbol{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n}.$$

Demonstração:

Vamos demonstrar esse teorema por indução. Considere

$$S_n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n.$$

Pode-se verificar que, para $n = 0$, tem-se

$$S_0 = C_0^0 = 1 = 2^0.$$

Já, para $n = 1$,

$$S_1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2^1.$$

Suponha, então, que o resultado é válido para todo $n = 1,2, \dots, k$, ou seja, $S_k = 2^k$. Vamos mostrar que o resultado é valido para $n = k + 1$. Assim,

$$S_{k+1} = C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + \cdots + C_{k+1}^{k+1},$$

fazendo uso da Relação de Stifel, e usando o fato de que

$$C_k^0 = C_{k+1}^0 \text{ e } C_{k+1}^{k+1} = C_k^k,$$

temos

$$S_{k+1} = C_k^0 + C_k^0 + C_k^1 + C_k^1 + \cdots + C_k^k$$
$$= \underbrace{C_k^0 + C_k^1 + \cdots + C_k^k}_{S_k} + \underbrace{C_k^0 + C_k^1 + \cdots + C_k^k}_{S_k}.$$

Por hipótese de indução, $S_k = 2^k$. Isso implica em

$$S_{k+1} = 2S_k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Portanto, como a validade da propriedade para k implica na validade para $(k + 1)$, temos pelo princípio de indução finita, que a relação

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

é válida para todo n pertencente ao conjunto dos números naturais.

■

Uma aplicação interessante do teorema acima será abordada no exemplo a seguir.

Exemplo 14: Um palácio tem 7 portas. De quantos modos pode ser aberto o palácio?

Solução: Para abrir uma porta só, há C_7^1 modos de abrir; para abrir exatamente duas portas, há C_7^2 modos; e assim sucessivamente. Fazendo uso do teorema das linhas, temos

$$C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7.$$

Logo, o número de modos em que palácio pode ser aberto é dado por:

$$C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7 - C_7^0 = 128 - 1 = 127.$$

3.3.17 Teorema (Teorema das Colunas)**.** *Dados inteiros não negativos* $\boldsymbol{p}$ *e n, a soma dos* $\boldsymbol{n+1}$ *primeiros termos da coluna* $\boldsymbol{p}$ *do Triângulo de Pascal é*

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \cdots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}.$$

Demonstração:

A demonstração desse teorema será feita por indução. Vamos considerar

$$S_n = C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \cdots + C_{p+n}^p.$$

Como $C_p^p = C_{p+1}^{p+1}$, então, para $n = 0$, tem-se $S_0 = C_p^p = C_{p+1}^{p+1}$.

No caso de $n = 1$, tem-se

$$S_1 = C_p^p + C_{p+1}^p.$$

Sabendo que $C_p^p = C_{p+1}^{p+1}$ e aplicando a relação de Stifel, tem-se

$$S_1 = C_p^p + C_{p+1}^p = C_{p+1}^{p+1} + C_{p+1}^p = C_{p+2}^{p+1}.$$

Suponha, então, que o resultado é valido para todo $n = 1,2, \dots, k$. Vamos mostrar que o resultado vale para $n = k + 1$,

$$S_{k+1} = C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \cdots + C_{p+k}^p + C_{p+k+1}^p.$$

Note que,

$$S_{k+1} = \underbrace{C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \cdots + C_{p+k}^p}_{S_k} + C_{p+k+1}^p.$$

Por hipótese de indução, $S_k = C_{p+k+1}^{p+1}$. Isso implica em

$$S_{k+1} = C_{p+k+1}^{p+1} + C_{p+k+1}^p.$$

Logo, aplicando a relação de Stifel, obtemos

$$S_{k+1} = C_{p+k+1}^{p+1} + C_{p+k+1}^p = C_{p+k+2}^{p+1}.$$

Portanto, como a validade da propriedade para k implica na validade para $(k + 1)$, temos pelo princípio de indução finita, que a relação

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \cdots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$$

é válida para todo n natural.

3.3.18 Binômio de Newton

De acordo com (PAIVA, 2009), “o matemático, físico e astrônomo inglês Isaac Newton transitou com sucesso por várias áreas do conhecimento. Sempre que um problema surgia em suas pesquisas, Newton tentava criar ferramentas matemáticas para resolvê-lo”.

Um dos trabalhos de Newton, foi sobre o estudo de potências da forma $(x + a)^n$, onde x e a são números reais e n é um número natural. Segue o desenvolvimento de algumas dessas potências:

$$(x + a)^0 = 1,$$

$$(x + a)^1 = x + a,$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2,$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3.$$

Note que, quanto maior for o expoente, mais trabalhosos serão os cálculos. No entanto, aplicando o raciocínio usado em análise combinatória, pode-se deduzir uma expressão relativamente simples para desenvolver essas potências.

De maneira geral, a fórmula do Binômio de Newton possibilita o desenvolvimento de $(x+a)^n$, para quaisquer valores reais para x e a, e n natural. Para obtê-la, basta realizar a multiplicação

$$(x+a) \cdot (x+a) \cdot \ldots \cdot (x+a).$$

O termo genérico do produto é obtido tomando em p fatores, $p = 0, 1, 2, \ldots, n$, a segunda parcela e tomando nos restantes $(n-p)$ fatores a primeira parcela. Como isso pode ser feito de C_n^p modos, o termo genérico do produto é $C_n^p a^p x^{n-p}$ e assim, o **Binômio de Newton** é representado pela seguinte fórmula:

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p x^{n-p} \\ &= C_n^0 a^0 x^n + C_n^1 a^1 x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^n a^n x^0,\end{aligned}$$

em que x e a representam números reais quaisquer e n é um número natural.

Exemplo 15: Considere a potência $(x+a)^5$.

Para desenvolvê-la, deve-se efetuar as multiplicações:

$$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+a).$$

Aplicando a propriedade distributiva, multiplica-se de todas as maneiras possíveis, cinco fatores, x ou a, escolhendo cada um deles em uma das expressões entre parênteses, $(x+a)$, da multiplicação acima. Vamos analisar o caso específico sobre quantos termos iguais a x^3a^2 serão obtidos depois de efetuadas todas as multiplicações possíveis.

Uma das possibilidades é multiplicar os termos em vermelho:

$$(\color{red}{x} + a)(\color{red}{x} + a)(\color{red}{x} + a)(x + \color{red}{a})(x + \color{red}{a})$$

obtendo x^3a^2.

Existem, porém, outras possibilidades de multiplicações que resultam no termo x^3a^2, por exemplo, multiplicando os termos em vermelho da expressão a seguir:

$$(\color{red}{x} + a)(\color{red}{x} + a)(x + \color{red}{a})(\color{red}{x} + a)(x + \color{red}{a}).$$

Desse modo, quantos termos iguais a x^3a^2 serão obtidos depois de efetuadas todas as multiplicações possíveis?

Para responder essa pergunta específica em relação ao termo x^3a^2, recorre-se a análise combinatória. Deve-se calcular o número de modos diferentes de escolher x em três dos cinco fatores $(x + a)$, e a nos outros dois. Note que escolhido x em três fatores, a escolha de a fica automaticamente determinada nos fatores restantes. Assim, basta calcular o número de maneiras diferentes de escolher x em três dos cinco fatores. Esse número é C_5^3. Portanto, o termo x^3a^2 aparecerá C_5^3 vezes depois de efetuadas todas as multiplicações.

Com um raciocínio análogo:

- O termo x^5 aparecerá C_5^5;
- O termo x^4a aparecerá C_5^4;
- O termo x^3a^2 aparecerá C_5^3;
- O termo x^2a^3 aparecerá C_5^2;
- O termo xa^4 aparecerá C_5^1;
- O termo a^5 aparecerá C_5^0.

Portanto, o binômio dado pode ser desenvolvido da seguinte maneira:

$$(x + a)^5 = C_5^5x^5 + C_5^4x^4a + C_5^3x^3a^2 + C_5^2x^2a^3 + C_5^1xa^4 + C_5^0a^5.$$

Como $C_5^5 = 1$, $C_5^4 = 5$, $C_5^3 = 10$, $C_5^2 = 10$, $C_5^1 = 5$ e $C_5^0 = 1$, tem-se:

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5.$$

3.3.19 Contagem e recorrências

A técnica de contagem recursiva ou por recursão também é muito utilizada na resolução de muitos problemas. Muitas sequências são definidas recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s) (LIMA, CARVALHO, *et al.*, 2016).

Uma recorrência de primeira ordem é aquela em que cada termo é expresso em função do antecessor imediato. Já uma recorrência de segunda ordem é aquela onde cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos. Vejamos um exemplo:

Exemplo 16: Seja D_n o número de permutações caóticas de 1, 2, 3, ..., n, isto é, o número de permutações simples de 1, 2, 3, ..., n, nas quais nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo. Mostre que, se $n \geq 1$,

$$D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n).$$

Solução: Calculemos D_{n+2}, número de permutações simples de 1, 2, 3, ..., $n + 2$ nas quais nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo.

As permutações podem ser divididas em dois grupos: aquelas nas quais o 1 ocupa o lugar do número que ocupa o primeiro lugar e aquelas nas quais isso não ocorre.

Para formar uma permutação do primeiro grupo, devemos escolher o número que trocará o lugar com o 1, o que pode ser feito de $n + 1$ modos e, em seguida, devemos arrumar os demais n elementos nos restantes n lugares, sem que nenhum ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_n modos. Há $(n + 1) \cdot D_n$ permutações no primeiro grupo.

Para formar uma permutação do segundo grupo, temos de escolher o lugar que será ocupado pelo número 1 (chamaremos esse lugar de k), o que pode ser feito de $n + 1$ modos, e, em seguida, devemos arrumar os restantes $n + 1$ elementos nos demais $n + 1$ lugares, sem que o elemento k ocupe o primeiro lugar e sem que nenhum dos demais elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_{n+1} modos.

Sendo assim, há $(n+1)(D_{n+1})$ do segundo grupo.

Portanto,

$$D_{n+2}=(n+1)(D_{n+1} + D_n),$$

como queríamos demonstrar.

Acabamos de ver um exemplo de recorrência de segunda ordem.

Existem muitos conceitos envolvendo recorrência, porém, neste trabalho não serão apresentados. Aqui foi abordada apenas uma ideia do que é uma recorrência, tendo em vista que o foco dessa dissertação é outro.

3.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE PROBABILIDADE

3.4.1 Aspectos históricos

A Teoria das Probabilidades é uma das aplicações mais importantes dos resultados anteriores envolvendo análise combinatória.

Como nos assegura Morgado *et al* (2016), a probabilidade, no decorrer da História, nem sempre foi como a conhecemos na atualidade, tendo sido longo e árduo o caminho percorrido por matemáticos em diferentes épocas, culminando com a construção de um conjunto de conceitos e ferramentas capazes de modelar diversos fenômenos, portanto, com vasto campo de aplicação.

O desenvolvimento do cálculo de probabilidades teve início apenas no século XVI. A base da teoria do cálculo das probabilidades e os avanços dos cálculos probabilísticos devem ser atribuídos a vários matemáticos, em especial, ao italiano Girolamo Cardano (1501-1576), considerado por muitos como o iniciador do estudo matemático das probabilidades. Cardano foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória para calcular a quantidade de possibilidades favoráveis em um evento aleatório e, assim, determinar a probabilidade da ocorrência de um evento como a razão entre a quantidade de possibilidades favoráveis e a quantidade total de possibilidades associadas ao experimento. O discernimento de Cardano sobre o funcionamento da aleatoriedade representou uma nova ideia e uma nova metodologia, formando a base da descrição matemática da incerteza, pelos séculos que se seguiram.

O cálculo de probabilidades ganhou força com os estudos de Blaise Pascal (1623 – 1662) e Pierre de Fermat (1601 – 1665). Há registros do século XVII, trazendo Pascal e Fermat como pioneiros no estudo de problemas não numéricos da Teoria das Probabilidades.

Outro matemático que também se dedicou ao estudo das probabilidades, de acordo com Morgado et al (2016), foi Jacob Bernoulli (1654-1705), que em seu livro "*A arte da Conjectura*" (1713), publicado postumamente, foi o primeiro a escrever um tratado científico matemático sobre a probabilidade. Bernoulli aliou à probabilidade, assuntos como: combinações, permutações e classificação binomial.

Certamente, segundo Vieira Filho (2020), "o matemático que mais contribuiu para a teoria das probabilidades foi Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), físico e matemático francês, deu início ao período clássico da teoria probabilística, seguido por outros matemáticos". Seus inúmeros trabalhos sobre as probabilidades foram incorporados em seu monumental *Tratado Analítico das Probabilidades*.

Atualmente, o conceito de probabilidade faz parte da vida das pessoas, pois, o nosso dia a dia é permeado de incertezas: a do meteorologista ao prever o clima de um determinado período; a dos pais ao especular sobre o sexo do futuro bebê; a do candidato ao ponderar as possibilidades de sua eleição; a de diminuir o risco de contágio do novo coronavírus; etc.

A necessidade de ter algum controle sobre as incertezas motivou a elaboração da teoria das probabilidades, uma ferramenta capaz de medir a possibilidade de um experimento produzir determinado resultado. Tal teoria cria, desenvolve em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. Para tanto, são necessários muitos conceitos e definições que compõem toda essa teoria, dentre esses, serão abordados a seguir, aqueles essenciais para o desenvolvimento desse trabalho.

3.4.2 Conceitos e definições

Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso é chamado de **experimento aleatório.** Para (MAGALHÃES, 2006) "um experimento aleatório é qualquer processo que, quando repetido sob as mesmas condições, não necessariamente fornece o mesmo resultado".

Um **experimento** é considerado **determinístico** quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos. Os experimentos que repetidos sob as mesmas condições produzem resultados geralmente diferentes serão chamados **experimentos aleatórios.**

Definição 2. Chama-se de **espaço amostral** o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória.

O espaço amostral será representado pela letra S e serão considerados aqui apenas os casos em que S é finito ou infinito enumerável. Os elementos do espaço amostral são chamados de eventos elementares. Os subconjuntos de S serão chamados de **eventos**. Um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao subconjunto "evento".

Definição 3. Seja S um espaço amostral e A um subconjunto de S. Uma **probabilidade** é uma função que associa a cada evento A um número P(A) de forma que:

i) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;

ii) $P(S) = 1$;

iii) Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \emptyset$) então,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exemplo 17: No lançamento de uma moeda, observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é o conjunto

$$S = \{\text{cara, coroa}\}.$$

Como todos os subconjuntos de S são, por definição, denominados eventos, para esse caso há 4 eventos: $\emptyset$, $A =$ {cara}, $B =$ {coroa} e S.

$\emptyset$ é um evento que nunca ocorre e é chamado de evento impossível. O evento A ocorre se, e somente se, o lançamento resulta em cara. S ocorre sempre e é chamado de evento certo. Uma probabilidade que pode ser definida é:

$$P_1(\emptyset) = 0, \quad P_1(A) = P_1(\{cara\}) = 0{,}5, \; P_1(\{coroa\}) = 0{,}5, \; P_1(S) = 1,$$

satisfazendo as três condições da Definição 3.

Exemplo 18: No lançamento de um dado, observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

onde há 64 eventos, já que S tem 2^6 subconjuntos. Alguns desses eventos são: $\emptyset$, que nunca ocorre; S, que ocorre sempre; $A = \{1,3,5\}$, que ocorre se, e somente se, o resultado do lançamento for ímpar. Se o resultado do lançamento for 5, ocorrem os eventos $\{5\}, \{5,6\}, \{1,3,5\}$, etc.

A probabilidade que usaremos neste trabalho será um caso particular da situação geral definida acima. Esse caso particular é muito importante e será utilizado no desenvolvimento dos problemas olímpicos abordados nesse trabalho.

No que nos assegura Hazzan (1977), num experimento aleatório, embora não se saiba qual o evento que irá ocorrer, sabe-se que alguns eventos ocorrem frequentemente e outros, raramente. Para relacionar os eventos aos números que indicam as quantidades de ocorrências desses eventos, quando o experimento é repetido muitas vezes, nas mesmas condições, é necessário definir frequência relativa.

Definição 4. Considere um experimento aleatório com espaço amostral S, finito, isto é

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

e que o experimento seja repetido N vezes, nas mesmas condições. Seja n_i o número de vezes que ocorre o evento elementar a_i. Define-se **frequência relativa** do evento $\{a_i\}$ como sendo o número f_i, tal que:

$$f_i = \frac{n_i}{N},$$

para qualquer $i \in \{1,2,3 \dots, k\}$.

Definição 5. Um espaço amostral é **equiprovável** se as frequências relativas de seus elementos tendem a um mesmo valor quando o número de experimentos aumenta indefinidamente.

Definição 6. Seja E um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, e A um evento de E. A probabilidade de ocorrer algum elemento de A é indicada por $P(A)$ e definida por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)},$$

em que $n(A)$ e $n(E)$ indicam, respectivamente, o número de elementos de A e de E.

Em outras palavras, quando todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de resultados relativos ao evento e o número total de resultados; ou simplesmente, é a razão entre o número de casos favoráveis à ocorrência do evento e o número total de casos.

Esse modelo foi adotado por vários matemáticos como Girolamo Cardano (1501-1576), Blase Pascal (1623-1662) e Pierre Simon Laplace (1749-1827), entre outros, no estudo dos jogos de azar. Laplace referia-se aos elementos de A como os casos favoráveis. Os elementos do espaço amostral eram chamados de casos possíveis.

A definição de probabilidade como "quociente do número de casos favoráveis sobre o número total de casos possíveis" foi a primeira definição formal de probabilidade (MORGADO, CARVALHO, *et al.*, 2016).

Exemplo 19: Qual é a probabilidade de se obter um resultado maior que 3 ao se lançar um dado honesto?

Solução: O espaço amostral é $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, com todos os resultados possíveis. A probabilidade associada a cada face é 1/6. Desejamos calcular a probabilidade do evento $A = \{4, 5, 6\}$, que é dada por $P(A) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Exemplo 20: No lançamento de dois dados, não viciados, qual é a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima, a soma dos pontos igual a 5?

Solução: Considerando E como espaço amostral, temos que E consiste de todos os pares *(i, j),* onde *i* e *j* são inteiros positivos compreendidos entre 1 e 6, conforme representação abaixo:

$$E = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \dots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) \dots & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) \dots & (3,6) \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) \quad \dots & (6,6) \end{Bmatrix}, \text{ em que } n(E)=36.$$

Note que o número de elementos desse espaço amostral (casos possíveis) pode ser calculado pelo princípio fundamental da contagem:

$$\left(\underbrace{1^{\underline{o}} dado}_{6\ possibilidades} \quad , \qquad \underbrace{2^{\underline{o}} dado}_{6\ possibilidades} \right)$$

implicando assim em

$$n(E) = 6 \cdot 6 = 36.$$

Seja H o conjunto dos pares (i, j) tais que $i + j = 5$. Desse modo, o evento que esperamos ocorrer é:

$$H = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\},$$

em que $n(H) = 4$.

Logo, a probabilidade de se obter, nas faces voltadas para cima, a soma dos pontos igual a 5 é:

$$P(H) = \frac{n(H)}{n(E)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

É importante ressaltar que existem muitas probabilidades, funções com as propriedades i), ii) e iii) da definição geral, que não são da forma particular definida acima (num espaço equiprovável). Vejamos um exemplo que trata isso:

Exemplo 21: Considere $S = \{0,1\}$, tal que:

$$P(\emptyset) = 0,\ \ P(S) = 1,\ \ P(\{0\}) = \tfrac{2}{3}\ \ e\ \ P(\{1\}) = \tfrac{1}{3}.$$

A seguir, serão apresentadas algumas proposições envolvendo probabilidade. Para tanto, é necessário definir anteriormente, um evento complementar e, também conjunto diferença.

Definição 7. Seja S um espaço amostral de um experimento aleatório e seja A um evento de S. Chama-se **evento complementar** de A, que se indica por $\bar{A}$, o evento formado pelos elementos que pertencem a S e não pertencem a A.

Definição 8. Seja S um espaço amostral de um experimento aleatório e sejam A e B eventos de S, ou seja, A e B contidos em S. O conjunto

$$A \cap \bar{B} = \{x \in S / x \in A \ \text{ e } \ x \notin B\}$$

é chamado **conjunto diferença** de A e B e representado, geralmente, por $A - B$.

A seguir serão apresentadas quatro proposições e um corolário sobre probabilidade, cujas demonstrações se encontram no apêndice desse trabalho.

Proposição 1: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Proposição 2: $P(\emptyset) = 0$.

Proposição 3: Se $A \subset B$, então $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

Corolário 1: Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Proposição 4: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemplo 22: Em um grupo de r pessoas, qual é a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia? Vamos considerar aqui que as pessoas que nascem em 29 de fevereiro (anos bissextos) tenham seu registro de nascimento em 28 de fevereiro.

Solução: Inicialmente iremos calcular a probabilidade de isso não acontecer. O número de casos possíveis para os aniversários das r pessoas é 365^r. O número de casos favoráveis a que todas aniversariem em dias diferentes é $365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - r + 1)$, havendo r fatores nesse produto. Portanto, a probabilidade de não haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia é de

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - r + 1)}{365^r}.$$

Através da Proposição 1, podemos afirmar que a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que tenham o mesmo dia de aniversário é de

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \cdots \cdot (365 - r + 1)}{365^r}.$$

Exemplo 23: Um número entre 1 e 300 é escolhido aleatoriamente. Calcular a probabilidade de que ele seja divisível por 3 ou por 5.

Solução: Sejam A e B os eventos que acontecem se o número escolhido for divisível por 3 e por 5, respectivamente. Temos que calcular $P(A \cup B)$.

Os números entre 1 e 300 (considerando, inclusive, 1 e 300) divisíveis por 3 são 100; os divisíveis por 5 são $\frac{300}{5} = 60$, e os divisíveis por 3 e 5, simultaneamente são $\frac{300}{15} = 20$.

Tem-se, portanto,

$$P(A) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3},$$

$$P(B) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5},$$

$$P(A \cap B) = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}.$$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}.$$

Ou seja, a probabilidade de o número escolhido ser divisível por 3 ou por 5, satisfazendo as condições do enunciado, é $\frac{7}{15}$.

O próximo exemplo, uma questão do exame nacional de qualificação do PROFMAT, envolve os dois conceitos principais apresentados até o momento: o princípio fundamental da contagem e a probabilidade. Além disso, nos mostra a importância da fórmula de combinação para facilitar os cálculos. Uma questão, com um enunciado não muito simples de compreender, mas que se torna interessante após entender o que se quer.

Exemplo 24 (ENQ 2020): Um ônibus possui 32 poltronas distribuídas em 8 fileiras, ou seja, quatro em cada fileira, duas em cada lado do corredor. Pergunta-se:
a) Se forem os primeiros a entrar no ônibus, de quantas formas uma criança e seus dois responsáveis podem ocupar três poltronas do ônibus de modo que todos fiquem na mesma fileira e um dos adultos fique ao lado da criança, sem que esteja separado pelo corredor?
b) Se outras 29 pessoas já entraram no ônibus, ocupando as poltronas de forma completamente aleatória, deixando apenas 3 poltronas livres, qual a probabilidade de que seja possível os três se sentarem da forma estabelecida no item anterior?

Solução:
a) Ao entrar no ônibus vazio a criança tem 32 duas possibilidades de escolha. Depois que a criança estiver sentada deve-se decidir qual dos responsáveis sentará ao seu lado, para o que há 2 possibilidades. Estando um dos responsáveis sentado ao lado da criança, o outro deverá então escolher uma dentre as 2 poltronas restantes na mesma fileira. Considerando estas três etapas (escolha da criança, escolha do responsável ao seu lado e escolha da poltrona do outro responsável) e aplicando a elas o princípio fundamental da contagem (PFC) podemos concluir que há

$$32 \cdot 2 \cdot 2 = 128$$

configurações de ocupação das três poltronas pela criança e seus responsáveis que atendem as condições do enunciado.
b) Para encontrar a probabilidade de haver uma configuração que atenda ao item (a), devemos calcular o número de configurações do espaço amostral que atendem a essas

condições e dividir esse número pelo total de configurações do espaço amostral. Para encontrar o total de configurações basta notar que precisamos escolher quais serão as três poltronas vazias dentre as 32, o que corresponde a

$$C_{32}^{3} = \frac{32!}{3!29!} = 32 \cdot 31 \cdot 5 = 4960.$$

Já as configurações desejadas são aquelas nas quais as três poltronas livres estão todas na mesma fileira. Assim, para encontrar o total de configurações desejadas, basta escolhermos uma dentre as 8 fileiras existentes e, a seguir, qual dentre as 4 poltronas da fileira escolhida estará ocupada, totalizando, pelo PFC novamente,

$$8 \cdot 4 = 32$$

possibilidades. Portanto, a probabilidade procurada é

$$\frac{32}{4960} = \frac{32}{32 \cdot 31 \cdot 5} = \frac{1}{155}.$$

3.4.3 Probabilidade Condicional

De acordo com Benevides (2020), “o conceito de probabilidade condicional é de fundamental importância dentro do estudo da teoria das probabilidades. Dado um experimento aleatório e dois eventos dele, digamos A e B, queremos atribuir um valor para a probabilidade do evento A acontecer considerando que já temos a certeza de que o evento B acontece”.

De uma maneira simples, vamos começar a abordagem de probabilidade condicional considerando a experiência que consiste em jogar um dado não viciado e observar a face de cima. Consideremos o evento

$$B = \{o\ resultado \text{ é } ímpar\}.$$

Desse modo,

$$P(B) = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Essa é a probabilidade de B à priori, isto é, antes da experiência, de fato, se realizar. Suponha que, realizada a experiência, alguém informa que o resultado não foi o número 3, isto é, que

$$A = \{o\ resultado \text{ é } diferente\ de\ 3\}$$

ocorreu.

A análise sobre a ocorrência de B se modifica com essa informação, pois agora tem-se apenas 5 casos possíveis, dos quais apenas 2 são favoráveis à ocorrência de B.

Essa análise é quantificada com a introdução de uma probabilidade à posteriori, ou probabilidade de B na certeza de A,

$$P(B|A) = \frac{2}{5} = 0{,}4,$$

que será definida, logo a seguir, como **probabilidade condicional**.

Dessa maneira, os casos possíveis já não são mais todos os elementos do espaço amostral S e, sim, os elementos de A e, os casos favoráveis à ocorrência de B não são mais todos os elementos de B, mas, os elementos de $A \cap B$, pois, somente os elementos que pertencem a A devem ocorrer.

Definição 9. Dados dois eventos A e B, com $P(A) \neq 0$, a **probabilidade condicional** de B na certeza de A é o número

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

A expressão $P(B|A)$ também pode ser lida como "a probabilidade de B dado A".

A definição acima será muito útil em problemas em que é necessário calcular $P(A \cap B)$. Basta fazer,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Analogamente, invertendo os papéis de A e B na expressão acima e observando que $A \cap B = B \cap A$, também podemos escrever

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B),$$

com $P(B) > 0$.

As expressões acima auxiliam a encontrar o valor da probabilidade da interseção dos eventos A e B, desde que seja possível encontrar os valores de $P(A)$ e $P(B|A)$ (ou aqueles de $P(B)$ e $P(A|B)$. Estratégia muito útil para ser utilizada na fórmula

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B),$$

decorrente da Proposição 4.

Deve-se ter muita atenção para não confundir as probabilidades condicionais $P(A|B)$ e $P(B|A)$. Esses valores possuem interpretações diferentes e, em geral, são distintos.

De fato, pelas equações

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \text{e} \quad P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B),$$

tem-se que

$$P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Desse modo, no caso em que tais valores são diferentes de zero, a igualdade acima garante que $P(A|B)$ será igual a $P(B|A)$ se, e somente se, $P(A)$ for igual a $P(B)$.

A seguir se apresenta um exemplo abordando a definição de Probabilidade Condicional.

Exemplo 25 (Portal da OBMEP): Considere uma urna com 20 bolas, sendo 12 pretas e 8 brancas, de onde iremos retirar duas bolas. Encontre a probabilidade de:

(a) Ambas serem pretas, se houver reposição.

(b) Ambas serem pretas, se não houver reposição.

(c) Ambas serem da mesma cor, se não houver reposição.

(d) Elas serem de cores diferentes, se não houver reposição.

Solução: Façamos cada item separadamente:

a) O fato da retirada ser feita com reposição indica que, após a primeira bola ser retirada, ela é reposta, ou seja, recolocada dentro da urna. Dessa forma, a segunda bola retirada pode ser qualquer uma das 20 bolas originais. Se A é o evento "a primeira bola é preta", temos claramente que $P(A) = \frac{12}{20}$. Por outro lado, seja B o evento "a segunda bola é preta". Uma vez que houve reposição, saber que a primeira bola é preta não nos fornece qualquer informação extra sobre as chances da segunda bola ser preta. Sendo assim,

$$P(B|A) = P(B) = \frac{12}{20}$$

e, daí,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{12}{20} \cdot \frac{12}{20} = \frac{144}{400} = \frac{36}{100}.$$

b) Se A e B são definidos como no item anterior, ainda temos $P(A) = \frac{12}{20}$. Contudo, como não há reposição, temos apenas 19 possíveis candidatas para a segunda bola. Por outro lado, como queremos calcular a probabilidade de ambas as bolas serem pretas, então implicitamente temos a informação de que A ocorre, ou seja, de que a primeira bola retirada foi preta. Assim, apenas 11 das 19 bolas restantes são pretas, e o valor de $P(B|A)$ é $\frac{11}{19}$.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{33}{95}.$$

c) Para que as duas bolas sejam da mesma cor, temos que ambas são brancas ou ambas são pretas. A probabilidade do evento de que ambas sejam pretas foi calculada no item anterior. De forma, análoga, a probabilidade de que ambas sejam brancas é igual a

$$\frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} = \frac{14}{95}.$$

Como esses dois eventos são disjuntos, temos que a probabilidade desejada é igual a

$$\frac{33}{95} + \frac{14}{95} = \frac{47}{95}.$$

d) Este evento é o complementar do evento do item (c). Logo, sua probabilidade é

$$1 - \frac{47}{95} = \frac{48}{95}.$$

Outra maneira de obter esse resultado, agora utilizando o conceito de probabilidade condicional, é considerar inicialmente o caso em que a primeira bola seja preta e a segunda seja branca e, em seguida, o caso em que a primeira seja branca e a segunda seja preta. Raciocinando, como nos dois itens anteriores, concluímos que o resultado é:

$$\frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{48}{95}.$$

Definição 10. Dois eventos A e B são chamados independentes se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Essa definição de eventos independentes nos mostra a ideia intuitiva da não influência de um evento A sobre a ocorrência ou não de um outro evento B. Essa ideia é formalizada a partir do fato onde

$$P(B|A) = P(B),$$

com $P(A) > 0$. Substituindo essa identidade na expressão apresentada na definição de probabilidade condicional,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

obtém-se

$$P(B) \cdot P(A) = P(A \cap B),$$

exatamente a identidade da definição de eventos independentes.

Com isso, ao resolver um problema onde figuram dois eventos independentes, no qual pretende-se calcular a probabilidade de que ambos ocorram, basta multiplicar as probabilidades de que cada um deles ocorra.

A definição, que acabamos de ver, pode ser estendida para n eventos.

Exemplo 26: Uma moeda é lançada 3 vezes. Sejam os eventos:

A: ocorrem pelo menos duas caras.

B: ocorrem resultados iguais nos três lançamentos.

Vamos utilizar a letra k para representar "cara" e a letra c para representar "coroa". Temos assim:

S = {(k, k, k), (k, k, c), (k, c, k), (k, c, c), (c, k, k), (c, k, c), (c, c, k), (c, c, c)}

como espaço amostral. E,

A = {(k, k, k), (k, k, c), (k, c, k), (c, k, k)}, com $P(A) = \frac{1}{2}$,

B = {(k, k, k), (c, c, c)}, com $P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$,

$A \cap B =${(k, k, k)}, com $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

Logo, $P(A \cap B) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$. Portanto, A e B são independentes.

3.4.4 Teorema da Probabilidade Total. Se $\boldsymbol{B}$ é um evento contido numa união de eventos disjuntos $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \dots, \boldsymbol{A_n}$, e

$$P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \dots, P(A_n) > 0,$$

então

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n).$$

A demonstração se encontra no apêndice A.

Exemplo 27: Uma urna (I) tem 2 bolas vermelhas (V) e 3 bolas brancas (B); outra urna (II) tem 3 bolas vermelhas e uma branca e a urna (III) tem 4 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é extraída uma bola. Qual a probabilidade dessa bola ser vermelha?

Solução:

Sejam os eventos:

$U_I = \{sair\ urna\ I\}$,

$U_{II} = \{sair\ urna\ II\}$,

$U_{III} = \{sair\ urna\ III\}$

$V = \{sair\ bola\ vermelha\}$

Note que os eventos U_I, U_{II} e U_{III} são disjuntos e V está contido na união desses eventos.

Assim, pelo Teorema da Probabilidade Total,

$$P(V) = P(U_I \cap V) + P(U_{II} \cap V) + P(U_{III} \cap V).$$

Porém, pela definição de probabilidade condicional,

$$P(U_I \cap V) = P(U_I) \cdot P(V|U_I) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15},$$

$$P(U_{II} \cap V) = P(U_{II}) \cdot P(V|U_{II}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4},$$

$$P(U_{III} \cap V) = P(U_{III}) \cdot P(V|U_{III}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Segue-se então, que:

$$P(V) = \frac{2}{15} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{109}{180}.$$

3.5 ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NA BNCC

Além de apresentar alguns conceitos de análise combinatória e probabilidade, faz-se necessário, neste trabalho, mostrar como é a proposta desses assuntos na Base Nacional Comum Curricular, tendo em vista que para se desenvolver um bom trabalho como professor de matemática, é necessário além do conhecimento específico, conhecer também o que traz o documento principal em nosso país que determina o currículo básico.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2017)

Nesse documento são apresentadas as competências específicas de matemática para o ensino fundamental e também para o ensino médio, dentre elas, sugere-se a compreensão das relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sendo muito importante para desenvolver no estudante o sentimento de segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

A BNCC propõe a abordagem de problemas envolvendo a incerteza e o tratamento de dados, desenvolvendo assim habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos. Além de “utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos.” (BRASIL, 2017, p. 274)

Para os anos iniciais, sugere-se ensinar que nem todos os fenômenos são determinísticos, buscando a resolução de problemas que desenvolvam a noção de aleatoriedade, eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis.

Nos anos finais do ensino fundamental, sugere-se que o estudo seja ampliado e aprofundado, por meio de resolução de problemas nos quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica - probabilidade frequentista. A progressão desses conhecimentos ocorrerá pelo aprimoramento da capacidade de enumeração dos elementos do espaço amostral, associados aos problemas de contagem.

Na busca pelas abordagens desses conceitos na BNCC, encontram-se as seguintes habilidades propostas (iniciando-se de modo simples no 1º ano e avançando pelos anos seguintes), para o ensino fundamental (anos iniciais):

- Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano;
- Analisar a ideia de aleatório em situações do cotidiano;
- Classificar resultados de eventos cotidianos aleatórios como “pouco prováveis”, “muito prováveis”, “improváveis” e “impossíveis”;
- Analisar a ideia de acaso em situações do cotidiano: espaço amostral;
- Identificar, em eventos familiares aleatórios, todos os resultados possíveis, estimando os que têm maiores ou menores chances de ocorrência.
- Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos

possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais;

- Analisar as chances de eventos aleatórios;
- Identificar, entre eventos aleatórios cotidianos, aqueles que têm maior chance de ocorrência, reconhecendo características de resultados mais prováveis, sem utilizar frações.
- Resolver problemas de contagem do tipo: “Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?”
- Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
- Identificar o Espaço amostral e analisar chances de eventos aleatórios;
- Calcular a probabilidade de eventos equiprováveis;
- Apresentar todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, estimando se esses resultados são igualmente prováveis ou não.
- Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).

Para o ensino fundamental (anos finais), as habilidades pretendidas de análise combinatória e probabilidade são:

- Calcular a probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista);
- Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos;
- Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura;

- Identificar experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências;
- Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências;
- Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo;
- Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1;
- Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Dessa maneira, pretende-se no Ensino Fundamental, referente a área da matemática, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade – garantir que os alunos adquiram os conhecimentos básicos no que se refere à análise combinatória e probabilidade. Assim, ao chegar no ensino médio, o estudo de estatística, por exemplo, poderá ser melhor explorado considerando que o estudante tenha base suficiente.

Na proposta para o ensino médio, dentro da BNCC, as abordagens envolvendo contagem e probabilidade aparecem nas seguintes habilidades:

- Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, etc.);
- Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore;
- Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade;
- Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos;

- Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Os livros didáticos utilizados nas escolas de Ensino Fundamental, a partir de 2020, seguirão os moldes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 14 de dezembro de 2018, criando assim um currículo padrão no sistema de educação. Essa referência nacional obrigatória para os currículos pedagógicos é mínima, tanto para a rede pública, quanto para a rede particular, e, devido a ela, deve-se trabalhar obrigatoriamente estes conteúdos e podendo acrescentar outros, mediante a necessidade dos alunos ou da realidade social. Assim a produção de materiais didáticos para serem utilizados em sala de aula, atendendo as referências da BNCC, é de fundamental importância.

4. ABORDAGENS DE PROBLEMAS OLÍMPICOS ENVOLVENDO ANÁLISE COMBINATÓRIA E/OU PROBABILIDADE

Os problemas abordados, a seguir, foram selecionados das provas da OBMEP em PROVAS E SOLUÇÕES (2019), ocorridas desde 2005 até 2019. No processo de seleção dos problemas, o foco principal foi identificar aqueles que envolviam conceitos de Análise Combinatória ou Probabilidade. Os problemas envolvendo probabilidade são explorados apenas no nível 3, enquanto que de análise combinatória em todos os níveis.

O objetivo desse capítulo é apresentar soluções mais claras, sempre que possível, para esses problemas. Procurando assim disponibilizar aos professores de educação básica um material rico para aplicação em sala de aula ou mesmo em treinamentos para olimpíadas de matemática, envolvendo os conceitos de análise combinatória ou probabilidade. Além disso, oferecer soluções “adaptadas” à metodologia da resolução de problemas de Polya, seguindo algumas etapas que facilitam a compreensão do problema para o aluno e a explicação a ser abordada pelos professores, sempre que possível. Alguns enunciados dos problemas olímpicos também serão adaptados nesse trabalho.

É interessante que para cada problema a ser apresentado aos estudantes, o professor dê um tempo para os alunos pensarem e tentarem resolver, sem apresentar qualquer etapa da metodologia proposta por Polya. Caso o professor perceba que a turma não está progredindo, daí sim iniciar essa metodologia de resolução de problemas aqui apresentada.

Essas etapas sugeridas por Polya, buscam auxiliar na organização do raciocínio, deixando o processo de interpretação mais simples para o estudante. Como foi visto no capítulo 2, as quatro etapas são:

1ª) Compreensão do problema através das seguintes questões: Qual é a incógnita? Quais são os dados do problema? Qual é a condicionante? É possível representar a ideia com uma figura? É necessário adotar uma notação adequada?

2ª) Estabelecer um plano.

3ª) Executar o plano.

4ª) Verificação do resultado.

Para a primeira etapa, nem sempre será possível representar a ideia do problema com uma figura, assim como nem sempre será necessário utilizar uma notação adequada, porém, as demais questões são indispensáveis.

Será anexado no apêndice desse trabalho, os demais problemas da OBMEP sobre análise combinatória e/ou probabilidade que foram estudados, mas não estão nesse Capítulo, visto que muitos possuem raciocínio análogo.

É importante observar que nas questões da primeira fase selecionadas para esse trabalho, não serão apresentadas as opções de respostas (múltipla escolha) como na prova original. Também serão dispensadas imagens contidas nos enunciados que não interfiram na interpretação.

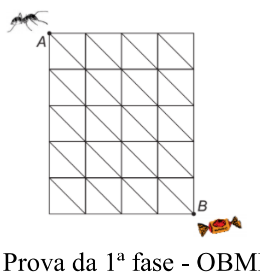
No que segue neste capítulo, serão abordadas primeiramente 15 questões do nível 1(6º e 7º anos), na sequência 12 questões do nível 2 e, por fim, 12 questões de nível 3, todas retiradas de provas da OBMEP. Nos problemas selecionados da 2ª fase da OBMEP, aparecem vários itens para cada questão, porém em alguns casos, será apresentada apenas um desses itens.

4.1 PROBLEMAS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 1

Nesta seção serão apresentadas algumas questões da OBMEP aplicadas ao nível 1 (6º e 7º anos) com suas respectivas resoluções adaptadas à metodologia de Polya. No início de cada enunciado, constará o número da questão (original), a fase em que foi aplicada e o ano em que a prova da OBMEP ocorreu.

Questão 12 - 1ª fase – ano 2019: A formiguinha da OBMEP está no ponto A e quer ir até o doce que está no ponto B. Ela anda sobre as linhas da figura e faz um caminho com o menor comprimento possível. Quantos são esses caminhos de menor comprimento?

Figura 3: Possíveis caminhos para a formiga.



Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2019

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

A quantidade de caminhos de menor comprimento possível que leve a formiga até o doce.

2º) Quais são os dados?

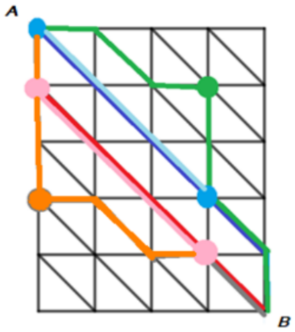
- A formiga está no ponto A e quer ir até o doce (ponto B).
- A Figura 3 indicando as possibilidades de caminhos.

3º) Qual é a condicionante?

- A formiga deve andar sobre as linhas da Figura 3.
- Ela deve fazer um caminho com o menor comprimento possível. Note que isso exige que a formiga ande simultaneamente para frente e para baixo, ou seja, na diagonal, o máximo de vezes possível.

4º) Representar a ideia com uma figura, para facilitar a compreensão do problema:

Figura 4 - Análise de caminhos com menor comprimento.



Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2019

5º) Adotar uma notação adequada:

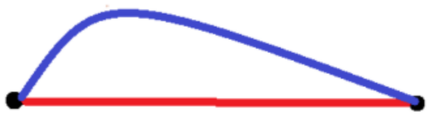
D – Representa andar na diagonal.

B – Representa andar para baixo.

6º) Estabelecer um plano:

A principal ideia para a resolução desse problema é a percepção de que o caminho mais curto para ir de um ponto a outro é através do segmento de reta que une os dois pontos, representado na Figura 5. Pode-se abordar também a ideia de diagonal de um retângulo.

Figura 5 – Caminho mais curto.



Fonte: Solução - Prova da 1ªfase - OBMEP 2019

Mostrar ao estudante alguns caminhos possíveis que leve a formiga ao doce e comparar aqueles que são mais longos com aqueles mais curtos.

Para ir até o doce andando sobre as linhas da Figura 3, a formiguinha deve andar 4 vezes para frente (horizontal) e 5 vezes para baixo (vertical). Um caminho de menor comprimento possível ocorre quando ela anda simultaneamente para frente e para baixo, ou seja, na diagonal, o máximo de vezes possível.

7º) Executar o plano:

De acordo com as linhas da Figura 4, esse caminho de menor tamanho possível ocorre quando ela anda 4 vezes na diagonal, escolhendo uma vez só para andar para baixo. Logo, se a letra D representar andar na diagonal e a letra B andar para baixo, os caminhos de menor comprimento possível são:

DDDDB, DDDBD, DDBDD, DBDDD e BDDDD.

Portanto, são 5 os caminhos de menor comprimento possível.

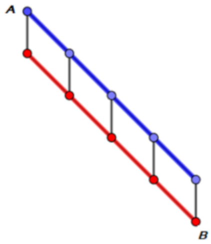
8º) Verificação do resultado:

Vamos a duas considerações:

I) Nenhum caminho mínimo pode passar por qualquer ponto acima da diagonal azul indicada na Figura 4. Isso é fato, pois, a formiga começa em um ponto da diagonal azul e, se em algum momento passar, por exemplo, no ponto verde, obrigatoriamente terá que tornar a passar na diagonal azul e, portanto, o caminho que fosse direto do ponto inicial até este ponto de retorno à diagonal seria menor que o caminho em questão.

II) O mesmo raciocínio se aplica para concluirmos que o caminho mínimo não pode passar por qualquer ponto abaixo da diagonal vermelha, pois, se passar por um ponto, o laranja por exemplo, ela obrigatoriamente passaria por dois pontos da diagonal vermelha e, portanto, esse caminho ficaria maior do que o que une os dois pontos diretamente.

Figura 6 – Região compreendida entre as diagonais vermelha e azul.



Fonte: Solução - Prova da 1ªfase - OBMEP 2019

Portanto, todos os caminhos mínimos precisam ficar restritos à região compreendida entre as paralelas azul e vermelha, destacadas na Figura 6. A formiga começa na diagonal azul e, em algum momento, desce para vermelha. Como há 5 segmentos verticais unindo as duas diagonais, há 5 maneiras de ela fazer um caminho mínimo.

Considerações: Nessa questão foi possível perceber o raciocínio de análise combinatória na contagem das possibilidades de caminhos que leve a formiga até o doce. Para determinar a solução com quatro descidas pela diagonal e apenas uma na vertical (baixo), poderíamos pensar em $C_5^1 = \frac{5!}{4!1!} = 5$, uma combinação. Logicamente, sendo essa questão de nível 1, a abordagem para resolução não será através do uso da fórmula de combinação que, claramente, para o professor, pode ser relacionada à questão.

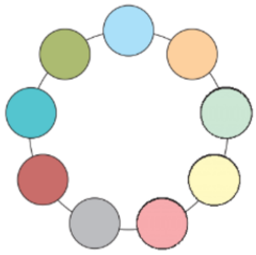
Questão 6 – 2ª fase -2019 (adaptada): Os números da tabela abaixo serão colocados nos círculos coloridos de modo que nenhum deles apareça mais de uma vez e a soma dos números em três círculos consecutivos seja sempre um múltiplo de 3.

Figura 7 – Quadro com algarismos a serem utilizados.

Coluna 1 ↓	Coluna 2 ↓	Coluna 3 ↓
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fonte: Prova da 2ªfase - OBMEP 2019

Figura 8 – Círculos coloridos.



Fonte: Prova da 2ªfase - OBMEP 2019

Quantos preenchimentos diferentes são possíveis?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

Número de preenchimentos diferentes possíveis para o círculo dado com todos os números da tabela.

2º) Quais são os dados do problema?

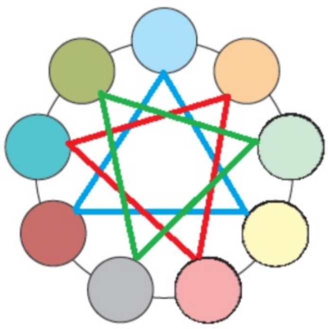
- Os algarismos de 1 a 9 e o modelo do círculo dado pela Figura 8.

3º) Qual é a condicionante?

- Todo número da tabela (Figura 7) deve ser utilizado e apenas uma única vez.
- A soma dos números em três círculos consecutivos deve ser um múltiplo de três.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 9 – Círculos coloridos ligados por triângulos.



Fonte: Solução - Prova da 2ªfase - OBMEP 2019

5º) Adotar uma notação adequada:

Bola azul, bola amarela e bola marrom ligadas pelo triângulo azul.

Bola laranja, bola rosa e bola azul escura ligadas pelo triângulo vermelho.

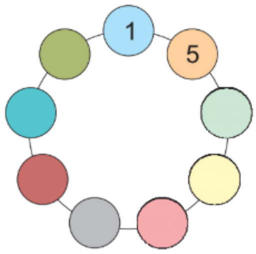
Bola cinza, bola verde escura e bola verde clara ligadas pelo triângulo verde.

6º) Estabelecer um plano:

Sugere-se que inicialmente se faça os itens (a) e (b) abaixo, e a partir daí resolver o item (c) que responde à questão contida no enunciado.

a) Comece com o preenchimento da Figura 10.

Figura 10 – Modelo de preenchimento iniciado.



Fonte: Prova da 2ªfase - OBMEP 2019

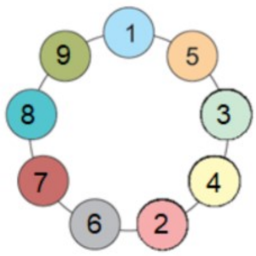
b) Explique por que, em qualquer preenchimento, três círculos consecutivos sempre serão preenchidos com números de colunas diferentes da tabela.

c) A partir da ideia expressa na Figura 9, com a notação adequada e o resultado obtido no item (b) desse plano, calcular o número de possibilidades.

7º) Executar o plano:

a) Há muitos exemplos, segue um deles:

Figura 11 – Possibilidade de preenchimento.



Fonte: Solução - Prova da 2ªfase - OBMEP 2019

b) Para que a soma de três números seja um número múltiplo de 3, uma dentre duas das alternativas seguintes, deve ocorrer:

1. Os três deixam o mesmo resto da divisão por 3, ou seja, os 3 são de uma mesma coluna da tabela apresentada na figura 5.

Ou,

2. Cada um dos três deixa resto diferente na divisão por 3, ou seja, os 3 números são de três colunas diferentes.

Observação: Para que um estudante possa compreender melhor essa abordagem, seria ideal desenvolver através da divisão euclidiana, como nos assegura HEFEZ em (ARITMÉTICA - Coleção PROFMAT, 2016), que todo número natural pode ser escrito em uma das formas: $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$. E a partir disso, mostrar todas as possibilidades das somas de três números. Porém, para um estudante de nível 1, poderá ser bem complicado esse discernimento e compreensão.

Desse modo, nos resta mostrar com os números da tabela, o que pode acontecer:

$$1 + 4 + 7 = 12,$$

$$2 + 5 + 8 = 15,$$

$$3 + 6 + 9 = 18,$$

ou seja, foram obtidos três múltiplos de 3. Mostrando assim que as adições com números da mesma coluna resultam em um múltiplo de 3.

Já no caso de tomar um número de cada coluna temos, por exemplo:

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

$$1 + 5 + 3 = 9,$$

...

E dessa maneira fazer com que o estudante compreenda esse resultado, que ao somar três números de colunas diferentes resultará em um múltiplo de 3.

Analogamente, mostrar que tomando dois números de uma mesma coluna e um terceiro número de outra coluna, não obteremos um múltiplo de 3. Também com exemplos, fica fácil para o aluno perceber que não obteremos um múltiplo de 3:

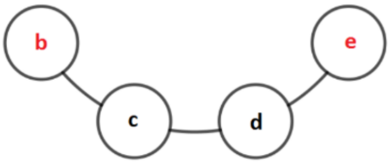
$$1 + 4 + 2 = 7,$$

$$1 + 4 + 3 = 8,$$

...

Vamos ver que a alternativa 1 não pode ocorrer. Para isso, suponhamos que dois vizinhos, os quais indicaremos pelas letras **c** e **d**, estão em uma mesma coluna da tabela, ou seja, deixam o mesmo resto da divisão por 3. Indiquemos por **b** e **e** os vizinhos de **c** e de **d**, respectivamente, como na Figura 12:

Figura 12 – Análise da alternativa 1.

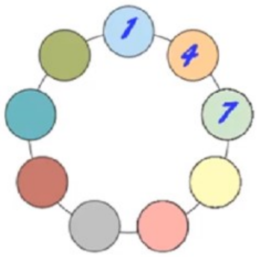


Fonte: Solução - Prova da 2ªfase - OBMEP 2019

Então, como (**b** + **c** + **d**) é múltiplo de 3, obrigatoriamente **b** terá que ser da mesma coluna da tabela onde ficam **c** e **d**. Da mesma forma, como (**c** + **d** + **e**) é múltiplo de 3, obrigatoriamente **e** também estaria na mesma coluna da tabela, o que é impossível pois, pelo enunciado, nenhum número pode repetir no preenchimento e em cada coluna da tabela só há espaço para três números.

Se ainda ficar confuso para o estudante, é possível argumentar essa ideia através da Figura 13:

Figura 13 – Análise da impossibilidade de ocorre a alternativa 1.



Fonte: Solução - Prova da 2ªfase - OBMEP 2019

Note que foram colocados os números da primeira coluna um ao lado outro, para analisarmos se é possível ter dois vizinhos da mesma coluna e obter o resultado esperado.

Se colocarmos qualquer número da coluna 2 ou da coluna 3 como vizinho do 7, não teremos um múltiplo de 3. Veja:

$$4 + 7 = 11.$$

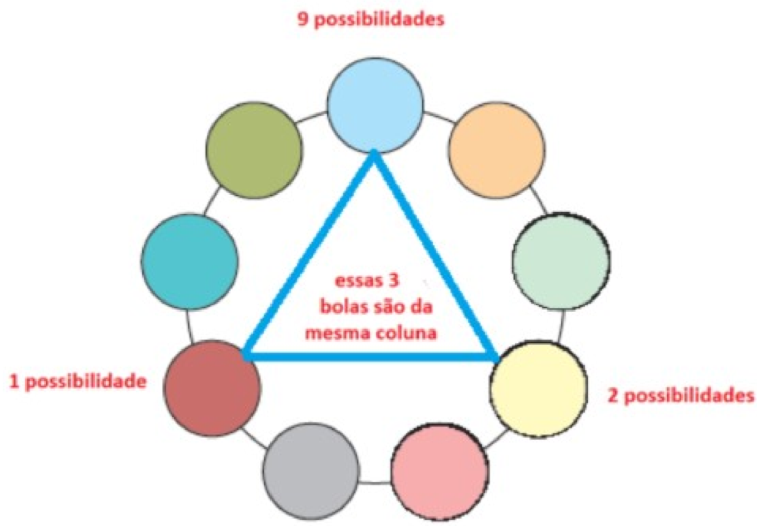
Daí, 11 + 3 = 14, 11 + 6 = 17, 11 + 9 = 20, 11 + 2 = 13, 11 + 5= 16 e 11 + 8 = 19, ou seja, nenhum múltiplo de 3. Deixando claro que não é possível colocar números da mesma coluna como vizinhos.

Assim, já que não se pode ter 2 vizinhos de uma mesma coluna, então só sobra a alternativa 2, ou seja, 3 bolas consecutivas precisam ser preenchidas com 3 números posicionados em 3 colunas diferentes da tabela apresentada na Figura 7.

c) Calcular de quantas formas é possível preencher as bolas coloridas:

Começar escolhendo os números que serão colocados nas bolas ligadas pelo triângulo azul, indicado na Figura 9. Para preencher a bola azul clara, haverá 9 possibilidades; em seguida, para preencher a bola amarela tem-se 2 possibilidades, pois, é da mesma coluna da azul clara e; por fim, a bola marrom (1 possibilidade), pois também é da mesma coluna, conforme o diagrama a seguir:

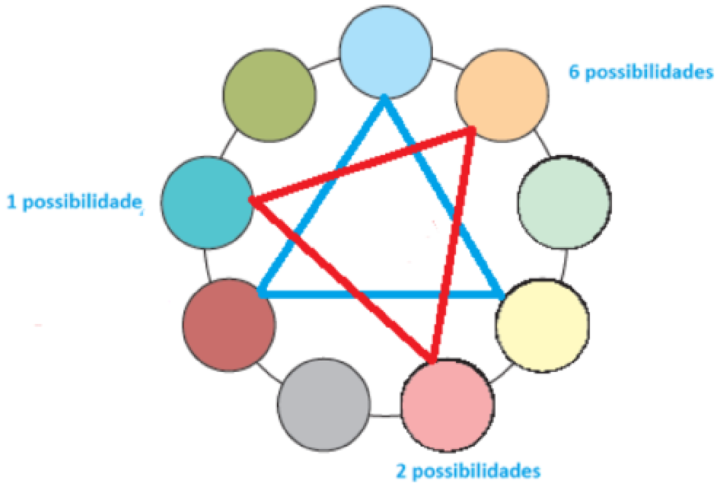
Figura 14 – Possibilidades de preenchimento das bolas ligadas pelo triângulo azul.



Fonte: Solução - Prova da 2ªfase - OBMEP 2019

Agora, vamos preencher o trio de bolas da figura abaixo, que estão nos vértices do triângulo vermelho (os números dessas bolas devem estar na mesma coluna da tabela dada): 6 possibilidades para bola laranja, 2 possibilidades para bola rosa e 1 possibilidade para bola azul escura, conforme o diagrama a seguir:

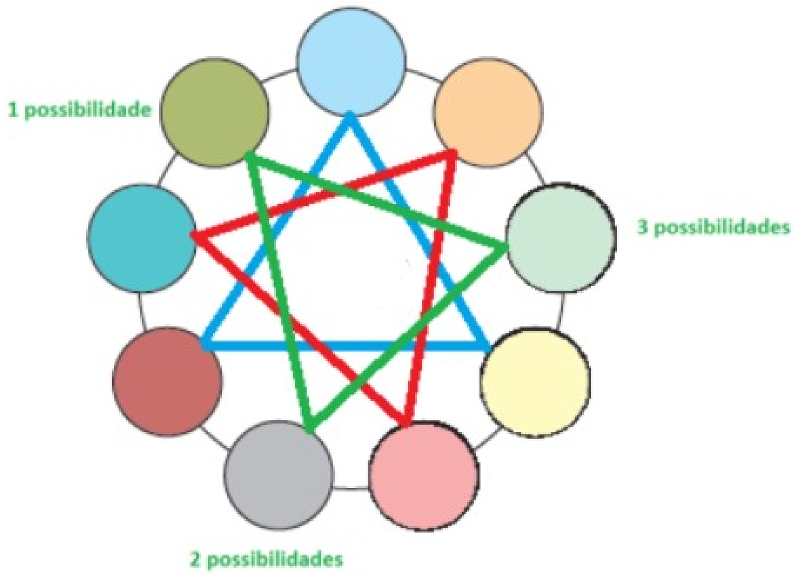
Figura 15 - Possibilidades de preenchimento das bolas ligadas pelo triângulo vermelho.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2019

Enfim, vamos preencher os 3 círculos que faltam, lembrando que as bolas nos vértices do triângulo verde devem pertencer à mesma coluna restante da tabela, conforme o diagrama abaixo:

Figura 16 - Possibilidades de preenchimento das bolas ligadas pelo triângulo verde.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2019

Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, o total de possibilidades é

$$9 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1296.$$

8º) Verificação do resultado:

Para ter certeza da validade do resultado obtido acima, podemos verificar através de um outro raciocínio. Começaremos escolhendo o número que preencherá a bola azul clara (9 possibilidades), em seguida, o número da bola laranja (6 possibilidades), pois, deve ser de uma das outras duas colunas, que não aquela da azul clara e, por fim, a bola verde clara (3 possibilidades), pois, deve ser da coluna restante, diferente da coluna da azul clara e da laranja.

Agora, vamos preencher a bola amarela (2 possibilidades), pois este número deverá ser de uma coluna diferente da laranja e da verde clara, logo, deve ser da mesma coluna da azul clara. O número que preencherá a bola rosa deve ser da mesma coluna da laranja (2 possibilidades), e o número que preencherá a bola cinza da mesma coluna da verde clara (2 possibilidades).

Enfim, vamos preencher os 3 círculos que faltam. Seguindo o mesmo raciocínio, a bola marrom deve ser da coluna das bolas amarela e azul clara (1 possibilidade), a bola azul escura deve ser da coluna das bolas rosa e laranja (1 possibilidade) e a bola verde escura deve ser da mesma coluna das bolas cinza e verde clara (1 possibilidade).

Obtendo, através do princípio fundamental da contagem, como total de possibilidades:

$$9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1296.$$

Considerações:

Na versão original do problema tratado acima, havia três itens no enunciado solicitando algumas tarefas. No item (a), foi pedido para completar o preenchimento já iniciado; no item (b), explicar por quê, em qualquer preenchimento, três círculos consecutivos sempre serão preenchidos com números de colunas diferentes da tabela; e no item (c), quantos preenchimentos diferentes são possíveis?

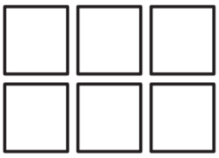
Desse modo, percebe-se que os itens (a) e (b) são partes de um plano de resolução. Respondendo esses dois primeiros itens, o estudante compreenderá melhor o processo de resolução necessário no item (c).

Por isso, foi feita essa adaptação no enunciado, excluindo os itens (a) e (b) da questão original e deixando apenas a pergunta do item (c). E claro, incluindo esses dois itens que foram retirados, no planejamento da resolução.

Sendo assim, uma sugestão de abordagem aos professores que queiram aplicar essa metodologia de trabalho, é fazer o estudo da questão e verificar a necessidade de adaptá-la, sem perder o foco principal do problema.

Questão 13 – 1ª fase -2018: Os seis números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 devem ser colocados nos quadrados de tal forma que eles fiquem em ordem crescente em cada linha (da esquerda para a direita) e em cada coluna (de cima para baixo). De quantas maneiras isso pode ser feito?

Figura 17 – Quadrados a serem preenchidos.



Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2018

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de possibilidades de colocar os seis números dados nos quadrados seguindo as exigências dadas do enunciado.

2º) Quais são os dados do problema?

- Seis números para colocar nos quadrados: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

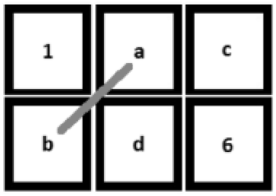
- A Figura 17 indicando os quadrados a serem preenchidos.

3º) Qual é a condicionante?

- Os seis números dados devem ser colocados;
- Os números devem ficar em ordem crescente em cada linha (da esquerda para a direita) e em coluna (de cima para baixo).

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 18 – Análise de preenchimento dos quadrados.



Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2018

5º) Adotar uma notação adequada:

Sejam **a**, **b**, **c** e **d** os possíveis números a serem colocados nos quadrados livres (como indicado na Figura 18), já que o número 1 deve estar na primeira posição da primeira linha e o número 6 na última posição da segunda linha.

6º) Estabelecer um plano:

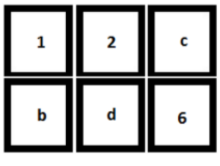
Primeiramente, vamos observar que o quadrado do canto superior esquerdo deve ser preenchido com um número inferior a todos os demais, portanto, deve ser preenchido com o número 1. Por raciocínio idêntico, o quadrado do canto inferior direito deve ser preenchido com o número 6. O número 2 obrigatoriamente precisa entrar em um dos dois quadrados nomeados com as letras **a** e **b** na figura acima. E a partir desse raciocínio explorar as possibilidades.

7º) Executar o plano:

Considerando que há apenas uma possibilidade de lugar para colocar o número 1 e apenas uma possibilidade de colocar o número 6, resta analisar cada caso onde o número 2 é colocado:

I) O número 2 é colocado no quadrado **a**:

Figura 19 – Análise de preenchimento dos quadrados com a = 2.

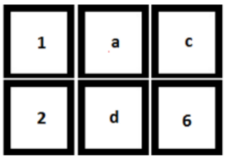


Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2018

Neste caso, podemos preencher o quadrado c com qualquer um dos três números restantes (3, 4 ou 5) e os quadrados **b** e **d** ficarão determinados pelos dois outros números ainda não utilizados, escritos em ordem crescente. Desse modo, nesta primeira hipótese, há 3 maneiras de se preencherem os quadrados dentro das regras do enunciado:

II) O número 2 é colocado no quadrado **b**:

Figura 20 – Análise de preenchimento dos quadrados com b = 2.



Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2018

Neste caso, o quadrado **a** precisa ser preenchido com o menor número que ainda não foi usado, o número 3. Então, só falta colocar o 4 no quadrado **c** ou no **d**. Desse modo, nessa segunda hipótese, há 2 maneiras de se preencherem os quadrados, dentro das regras do enunciado.

Juntando as duas hipóteses e utilizando o princípio aditivo, há um total de 3 + 2 = 5 maneiras de se preencherem os seis quadrados.

8º) Verificação do resultado:

É possível conferir o resultado, escrevendo todas as possibilidades:

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

1	3	4
2	5	6

1	3	5
2	4	6

Questão 17 – 1ª fase -2018: Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. Ele quer pintar cada região da figura de uma cor de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?

Figura 21 – Círculo dividido em quatro regiões.

Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2018

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

- Número de possibilidades de pintar a Figura 21 seguindo as condições exigidas.

2º) Quais são os dados do problema?

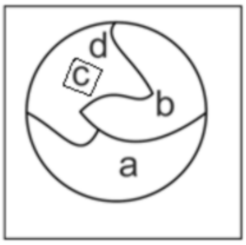
- Quatro cores de tinta diferentes;
- A Figura 21 que representa a região em questão.

3º) Qual é a condicionante?

- Cada região deve ser pintada de uma cor de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 22 – Regiões do círculo identificadas com letras.



Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2018

5º) Adotar uma notação adequada:

Vamos rotular por **a**, **b**, **c** e **d** as quatro regiões da Figura 22.

Além disso, para mencionar regiões vizinhas, poderá também ser utilizada a linguagem “faz fronteira”. Por exemplo, a região **d** é vizinha das regiões **a**, **c** e **b**, portanto pode-se se dizer que a região **d** faz fronteira com as regiões **a**, **c** e **b**.

6º) Estabelecer um plano:

O círculo é composto de quatro regiões. Rotulamos as regiões como na Figura 22 e calculamos as possibilidades.

7º) Executar o plano:

Começando a pintar as regiões a partir da menor (região **c**), teremos quatro cores para fazê-lo. A região em volta, região **d**, terá apenas três cores disponíveis. As duas outras regiões que são vizinhas à região **d** e vizinhas entre si; portanto, a próxima região a ser pintada tem três cores disponíveis e a última, apenas duas, já que é vizinha de duas regiões. Pelo Princípio Multiplicativo, o número total de maneiras possíveis de pintar as regiões do círculo é, portanto,

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72.$$

8º) Verificação do resultado:

Podemos começar a pintar numa outra ordem, mas isso exige mais cuidado e deve-se evidenciar isto ao estudante. Por exemplo, podemos pintar a figura na seguinte ordem: **a**, **c**, **d** e **b**. Para a região **a**, temos 4 possibilidades de escolha da cor e precisamos dividir em casos. Pois a região **c**, poderá ter a mesma cor da região **a** ou não. Se for igual, temos então 4 possibilidades de escolha de cor para pintar a região **a**, apenas 1 possibilidade de escolha da cor para pintar a região **c** (a mesma escolhida para a região **a**), 3 possibilidades para a escolha da cor para pintar a região **d** e 2 possibilidades para a escolha da cor para pintar a região **b**. Note que, são 3 possibilidades de escolha da cor para a região **d**, devido ao fato de que essa região faz fronteira com as regiões **a** e **c**. Analogamente, como a região **b** faz fronteira com as regiões **a** e **d**, pintadas com cores diferentes, então só restam 2 cores para serem escolhidas. Desse modo, utilizando o princípio multiplicativo, o número total de possibilidades é

$$4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Se a cor escolhida para a região **c** for diferente da cor escolhida para a região **a**, temos então 4 possibilidades de escolha da cor para pintar a região **a** e 3 possibilidades de escolha da cor para pintar a região **c**. Dessa maneira, para pintar a região **d**, que faz fronteira com as regiões **a** e **c**, temos 2 possibilidades de escolha da cor. Analogamente, para pintar a região **b** que faz fronteira com as regiões **a** e **d**, restarão apenas 2 possibilidades de escolha da cor. Portanto, utilizando o princípio multiplicativo, o número de possibilidades é

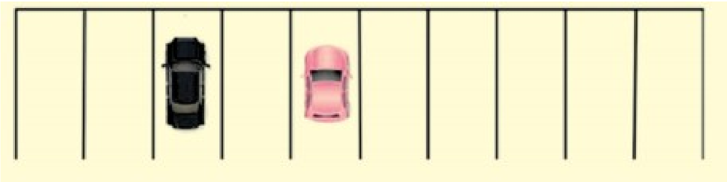
$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48.$$

Assim, considerando as duas situações analisadas acima, temos pelo princípio aditivo, que o número total de possibilidades é

$$48 + 24 = 72.$$

Questão 19 – 1ª fase -2018: Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

Figura 23 – Estacionamento com 10 vagas.



Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2018

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de possibilidades diferentes que os carros preto e rosa podem ocupar duas vagas no estacionamento indicado, de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles.

2º) Quais são os dados do problema?

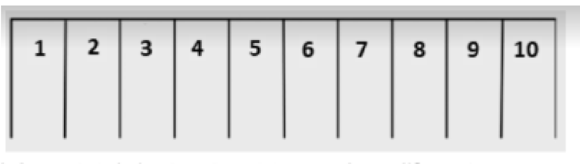
- O estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres.
- Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento.
- Figura 23 representando a ideia do estacionamento.

3º) Qual é a condicionante?

- O carro preto e o carro rosa devem estacionar de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 24 – Estacionamento com vagas numeradas.



Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2018

5º) Adotar uma notação adequada:

Enumerar as vagas de 1 a 10 para facilitar a resolução.

6º) Estabelecer um plano:

É necessário dividir a resolução em dois casos: inicialmente calcular as possibilidades quando o motorista do primeiro carro estaciona nas vagas 1 ou 10; e depois calcular as possibilidades quando o primeiro motorista estaciona em uma das vagas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9.

Pois, se o motorista do primeiro carro escolher uma das vagas das extremidades, vaga 1 ou vaga 10, o raciocínio é o mesmo, restarão 8 possibilidades para o segundo motorista escolher sua vaga. Já que o segundo motorista não poderá estacionar na vaga ocupada e nem na vaga vizinha à ocupada (que poderá ser a vaga 2 ou a vaga 9).

E no caso do primeiro motorista escolher uma das vagas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, deve-se considerar que deverão ser deixadas desocupadas duas vagas vizinhas. Desse modo, o segundo motorista terá dentre as 10 vagas do estacionamento, somente 7 opções de escolha para estacionar. Pois não poderá estacionar na vaga ocupada e nem nas duas vagas vizinhas desta vaga ocupada.

7º) Executar o plano:

Para resolver a questão deve-se considerar dois casos:

a) O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcadas com os números 1 ou 10. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá 8 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de $2 \cdot 8 = 16$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Multiplicativo da Contagem).

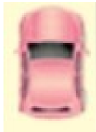
b) O motorista do primeiro carro decide estacionar em uma das vagas marcadas com os números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Para cada uma dessas escolhas, o segundo motorista terá somente 7 opções disponíveis de estacionamento; logo, nesse caso, há um total de $8 \cdot 7 = 56$maneiras diferentes para o estacionamento dos carros.

De acordo com as situações acima, há um total de $16 + 56 = 72$ maneiras diferentes para o estacionamento dos carros (utilizamos aqui o Princípio Aditivo da Contagem).

8º) Verificação do resultado:

De uma maneira simples, o estudante poderia pensar vaga por vaga, sem dividir em dois casos. E assim, as possibilidades poderiam ser organizadas em uma tabela:

Tabela 1 – Possibilidades de vagas em um estacionamento.

Possível vaga ocupada pelo carro preto: 	Vagas que não poderão ser ocupadas pelo carro rosa: 	Possibilidades para o motorista do carro rosa estacionar: 
1	2	**8 possibilidades** (3,4,5,6,7,8,9 ou 10)
2	1 e 3	**7 possibilidades** (4,5,6,7,8,9 ou 10)
3	2 e 4	**7 possibilidades** (1,5,6,7,8,9 ou 10)
4	3 e 5	**7 possibilidades** (1,2,6,7,8,9 ou 10)
5	4 e 6	**7 possibilidades** (1,2,3,7,8,9 ou 10)
6	5 e 7	**7 possibilidades** (1,2,3,4,8,9 ou 10)
7	6 e 8	**7 possibilidades** (1,2,3,4,5,9 ou 10)
8	7 e 9	**7 possibilidades** (1,2,3,4,5,6 ou 10)
9	8 e 10	**7 possibilidades** (1,2,3,4,5,6,7)
10	9	**8 possibilidades** (1,2,3,4,5,6,7 ou 8)

Fonte: Elaborada pela autora.

Desse modo, utilizando o princípio aditivo da contagem, o total de possibilidades para que os carros preto e rosa sejam estacionados de acordo com as exigências, são:

$$8 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 8 = 72.$$

Observação: Essa questão também consta nas provas do nível 2 (questão 13) e do nível 3 (questão 10) da OBMEP 2018.

Questão 17 – 1ª fase – 2017: Após digitar um número de seis algarismos em sua calculadora, Cecília observou que dois algarismos 9 que ela havia digitado não apareceram no visor; o que apareceu foi 2017. Quantas são as possibilidades para o número que ela digitou?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?
A quantidade de possibilidades para o número digitado por Cecília.

2º) Quais são os dados do problema?
- Cecília digitou um número de seis algarismos em sua calculadora;
- Cecília observou que dois algarismos 9 que ela havia digitado não apareceram no visor;
- O número que apareceu foi 2017.

3º) Qual é a condicionante?
- Possibilidades de números de seis algarismos contendo os algarismos 2, 0, 1 e 7, nessa ordem, podendo estar juntos ou separados, e o algarismo 9 aparecendo duas vezes.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Estabelecer um plano:

Há vários números que Cecília pode ter digitado, como 920179 ou 299017. Pode ser usada a seguinte estratégia: dada uma sequência de 6 algarismos, decidir onde os dois algarismos iguais a 9 deveriam estar. Uma vez decidido, os algarismos 2, 0, 1 e 7 preenchem as posições restantes, nessa ordem.

Um bom caminho também é enumerar todos os casos possíveis.

7º) Executar o plano:

Considerando que a sequência deve ter 6 algarismos, há 6 posições para colocarmos o primeiro número 9. Feito isto, há cinco posições para colocarmos o segundo número 9, o que dá, pelo princípio multiplicativo, um total de 6 x 5 = 30 escolhas; entretanto, como esses dois números 9 são indistinguíveis, devemos dividir o resultado por 2. Assim há 30 ÷ 2 = 15 possibilidades de se colocar os dois algarismos 9. Feito isso, os algarismos 2, 0, 1 e 7 preenchem as posições restantes. Portanto, tem-se 15 possibilidades para a digitação de Cecília.

8º) Verificação do resultado:

O resultado pode ser validado, através de uma outra resolução:
Dividir o problema em dois casos: quando os dois 9´s aparecerem juntos ou quando eles ficarem separados. Observe o esquema:

__ 2__0__1__7__

No primeiro caso, podemos colocar dois 9´s juntos em qualquer dos espaços vazios (5 possibilidades). No segundo caso, escolhemos primeiramente um lugar para colocar o primeiro dos números 9 (5 possiblidades) e, a seguir, um lugar para colocar o segundo número 9 (4 possibilidades). Há nesse caso, então, pelo princípio multiplicativo, 5 · 4 = 20 possibilidades; porém, como os dois números 9 são indistinguíveis, devemos dividir esse resultado por 2. Conclusão: há 10 possibilidades para o caso dos 9´s aparecerem separados. Logo, pelo princípio aditivo da contagem, teremos um total de 5 + 10 = 15 possibilidades.

Note que esse problema também pode ser resolvido por meio de uma listagem organizada:

- Com os algarismos 9 juntos: 992017, 299017, 209917, 201997 e 201799.
- Com os algarismos 9 separados: 929017, 920917, 920197, 920179, 290917, 290197, 290179, 209197, 209179 e 201979.

Fornecendo, através do princípio aditivo da contagem, os 15 (10 + 5) possíveis números digitados por Cecília.

Questão 20 – 1ª fase – 2017: Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas. Joãozinho quer retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de 7 bolas com três cores diferentes, sendo três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira cor. Qual é o número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?
O número mínimo de bolas que Joãozinho deve retirar da caixa, seguindo as exigências contidas no enunciado do problema.

2º) Quais são os dados do problema?
- Uma caixa contém 10 bolas verdes, 10 bolas amarelas, 10 bolas azuis e 10 bolas vermelhas.

3º) Qual é a condicionante?
- Retirar uma certa quantidade de bolas dessa caixa, sem olhar, para ter a certeza de que, entre elas, haja um grupo de 7 bolas com três cores diferentes;
- Sendo, dentre estas sete bolas, três bolas de uma cor, duas bolas de uma segunda cor e duas bolas de uma terceira cor.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada:
Sejam C_1, C_2 e C_3, as cores diferentes dentre as 7 bolas que Joãozinho pretende retirar da caixa. Assim,

$$\underbrace{C_1}_{3\ bolas} \qquad \underbrace{C_2}_{2\ bolas} \qquad \underbrace{C_3}_{2\ bolas}$$

6º) Estabelecer um plano:

Primeiramente podíamos pensar que tirando todas as bolas, garantido teríamos as 7 bolas da maneira que Joãozinho quer, porém não será o número mínimo. Desse modo, devemos estudar as possibilidades de tirar o número mínimo para que a condição aconteça.

Observamos primeiro que Joãozinho pode escolher 22 bolas sem que nenhum grupo de 7 delas satisfaça as condições do enunciado; por exemplo, ele pode escolher 10 bolas verdes, 10 amarelas, 1 azul e 1 vermelha. Por outro lado, se ele escolher 23 bolas haverá, necessariamente, um grupo de 7 delas que satisfará a condição do enunciado. Podemos ver isso como segue.

7º) Executar o plano:

Se Joãozinho retirar apenas 7 bolas da caixa, nada garante que sejam de três cores diferentes. Ele poderia tirar as 7 bolas de uma mesma cor.

Se ele retirar exatamente 10 bolas, com um pouco de "azar", elas podem ser todas da mesma cor, por exemplo da cor C_1. Novamente com muito "azar", ele poderia tirar mais 10 bolas e elas serem todas da cor C_2, o que não ajudaria, pois estaria com 20 bolas, sendo 10 da cor 1 e 10 da cor 2.

Continuando a busca pela solução, na próxima retirada de bola, com certeza Joãozinho irá pegar 1 bola de uma terceira cor. Ótimo, estamos quase lá. Porém como são quatro cores de bolas dentro da caixa, pode ser que a 22ª bola seja de uma quarta cor, assim Joãozinho ainda não teria 7 bolas nas condições desejadas. Portanto ele precisará tirar mais uma bola, ou seja, retirar a 23ª bola e, nesse caso com certeza será uma bola de uma terceira cor ou uma bola de uma quarta cor, o que garante no mínimo, duas bolas de uma mesma cor que faltavam.

Assim, no mínimo, Joãozinho precisa retirar 23 bolas para garantir que, dentre essas, tenham 7 bolas, onde 3 são de uma mesma cor, 2 bolas de uma segunda cor e 2 bolas de uma terceira cor.

8º) Verificação do resultado:

Ao escolher 23 bolas, pelo menos 6 delas serão de uma mesma 1ª cor. De fato, se isso não acontecesse, então haveria no máximo 5 bolas de cada cor, ou seja, Joãozinho teria escolhido no máximo 5+ 5 +5 + 5 = 20 bolas, o que não é o caso, já que estamos supondo que ele escolheu 23. O maior número possível de bolas dessa cor entre as escolhidas é 10; sobram, então, no mínimo 23 −10 = 13 bolas para as outras três cores. O mesmo raciocínio aqui mostra que há pelo menos 5 bolas de uma 2ª cor e que sobram no mínimo 13 − 10 = 3 bolas para as duas cores restantes; finalmente, outra vez o mesmo raciocínio mostra que há pelos menos 2 bolas de uma 3ª cor.

Mostrou-se assim, que, se Joãozinho escolher 23 bolas, entre elas haverá um grupo de 13 bolas com 6 de uma 1ª cor, 5 de uma 2ª cor e 2 de uma 3ª cor; em particular, entre essas bolas aparecerão 3 da 1ª cor, 2 da 2ª cor e 2 da 3ª cor. Segue que 23 é o menor número de bolas que ele deve escolher para garantir a condição do enunciado.

Observação: O argumento empregado nessa solução pode ser identificado como o P**rincípio das Gavetas de Dirichlet.** E pode ser formalizado como segue: se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais e sua média aritmética é m, isto é,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = m$$

então, ou $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = m$ ou existe pelo menos um índice i tal que a_i < m e, pelo menos, um índice j tal que a_j > m. No nosso caso, fizemos uma escolha de a_1 bolas verdes, a_2 bolas amarelas, a_3 bolas azuis e a_4 bolas vermelhas tal que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 23$; temos

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{23}{4} > 5$$

Segue que existe pelo menos um *i* tal que $a_i > 5$, e, como a_i é um número inteiro, temos que $a_i \geq 6$; em outras palavras, entre as 23 bolas existem pelo menos 6 de uma mesma cor, e analogamente detalha-se o restante da solução. A demonstração do fato geral do início desse parágrafo é inteiramente análoga ao caso particular que acabamos de analisar.

Questão 6 – 2ª fase – 2015: Apertando teclas de zero a nove de um cofre, Pedro cria uma senha de 11 algarismos.

a) Quantas são as senhas que começam com 20152015?
b) Quantas são as senhas que contêm todos os algarismos juntos e em ordem crescente, isto é, quantas são as senhas que contêm o bloco 0123456789?
c) Pedro quer criar uma senha de forma que, quando se exclui um de seus algarismos, restam os algarismos de 0 a 9 em ordem crescente. Por exemplo, 80123456789 e 01234456789 são senhas possíveis, mas 01324567890 não. Nessas condições, quantas senhas Pedro pode criar?

Solução adaptada:

a) Para criar uma senha de 11 algarismos que inicie com o bloco 20152015, Pedro precisa apenas determinar os três últimos algarismos que definem a senha.

20152015_ _ _

Ele pode usar qualquer um dos 10 algarismos na antepenúltima, penúltima e última posição da senha. Pelo Princípio Multiplicativo, há

$$10 \times 10 \times 10 = 1000$$

possibilidades. Portanto, existem mil senhas que começam com o bloco 20152015.

b) Como o bloco 0123456789 é formado por 10 algarismos, resta acrescentar 1 algarismo para se criar uma senha. Esse algarismo deve ser colocado ou na primeira ou na última posição, para não separar os demais algarismos, conforme a questão exige. Ou seja,

_0123456789 ou 0123456789_.

Na primeira posição é possível colocar 10 algarismos. O mesmo ocorre na última posição. Assim, pelo Princípio Aditivo, existem

$$10 + 10 = 20$$

senhas diferentes que contêm o bloco 0123456789.

c) solução desse item com aplicação da metodologia de Polya:

1º) Qual é a incógnita?

O número de senhas que Pedro pode criar de acordo com as condições exigidas.

2º) Quais são os dados do problema?

- Pedro cria senhas de 11 algarismos, utilizando as teclas de zero a nove de um cofre.

3º) Qual é a condicionante?

- A senha deve ser criada de maneira que, quando se exclui um de seus algarismos, restam os algarismos de 0 a 9 em ordem crescente.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade

5º) Adotar uma notação adequada:

Serão utilizados traços para indicar os possíveis lugares para escrever um algarismo na senha.

6º) Estabelecer um plano:

Para se criar uma senha de acordo com as novas condições exigidas, devemos inserir um algarismo no bloco 0123456789: à esquerda, à direita ou entre dois de seus algarismos. Há 11 espaços possíveis para se inserir um dos dez algarismos:

_0_1_2_3_4_5_6_7_8_9_

7º) Executar o plano:

Como são 11 espaços possíveis e 10 algarismos para a escolha, há, nas condições descritas e utilizando o princípio multiplicativo, 11 x 10 = 110 possibilidades de se criar senhas. Entretanto, algumas dessas senhas assim criadas são repetidas, e devemos descontá-las de nossa contagem. Observemos um exemplo: a senha 00123456789 pode ser obtida de duas maneiras diferentes:

- 00123456789 (colocando-se 0 à esquerda do número 0123456789)
- 00123456789 (colocando-se 0 entre 0 e 1 no número 0123456789)

Cada um dos algarismos de 0 a 9 pode gerar uma, e só uma, duplicação de senha. Assim, devemos descontar da contagem inicial uma senha para cada algarismo. Portanto, como são dez algarismos, deve-se descontar 10 senhas repetidas das 110 possibilidades de senhas.

Desse modo, são100 senhas que Pedro pode criar nas condições descritas.

8º) Verificação do resultado:

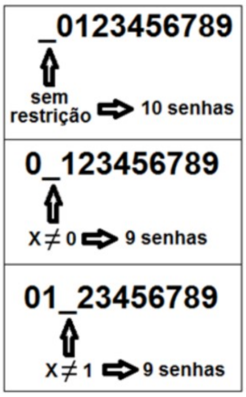
Para facilitar a escrita, será representado pela letra X o algarismo a ser excluído. Para determinar o número de senhas possíveis, observa-se as possibilidades de escolha para X, conforme a posição que ele ocupa na senha.

Para o caso em que X ocupa a primeira posição, ou seja, o bloco inicia na segunda posição, não existe restrição para a escolha de X. Portanto, para esse caso, há 10 senhas diferentes.

Por outro lado, se X não ocupa a primeira posição, isto é, o bloco inicia na primeira posição, a única restrição é que X seja diferente do algarismo que está na posição anterior, para evitar duplicidade na contagem.

Por exemplo, se X ocupa a segunda posição, então a senha inicia com 0. Consequentemente, nesse caso, devemos ter X diferente de zero, pois as senhas que iniciam com 00 já foram contabilizadas anteriormente. Assim, nesse caso, haverá 9 senhas diferentes entre si e das anteriores. A ideia é representada no esquema da Figura 25:

Figura 25 – Bloco de algarismos para formar uma senha.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2015

O mesmo ocorrerá se X ocupa a terceira posição, a senha deve iniciar com 01. Consequentemente, X deve ser diferente de 1, pois, as senhas que iniciam com 011 já foram contabilizadas no caso anterior. Assim, nesse caso, temos 9 senhas diferentes entre si e das anteriores.

Seguindo este raciocínio, temos que, para X na primeira posição, existem 10 senhas e para cada uma das demais posições de X, 9 senhas.

Consequentemente, o total de senhas possíveis é $10 + 10 \cdot 9 = 10 + 90 = 100$.

Questão 20 – 1ª fase – 2014: Quantos são os números ímpares, de cinco algarismos, nos quais a soma dos algarismos das unidades e das dezenas é 16 e a soma de todos os algarismos é um múltiplo de 5?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

A quantidade de números ímpares, de cinco algarismos satisfazendo as condições exigidas no enunciado.

2º) Quais são os dados do problema?

- Considerar números de cinco algarismos.

3º) Qual é a condicionante?

- O número deve ser ímpar;
- A soma dos algarismos das unidades e das dezenas deve ser 16;

- E a soma de todos os algarismos deve ser um múltiplo de 5.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada:

Será utilizado um traço para representar a posição a ser ocupada pelo algarismo das centenas.

6º) Estabelecer um plano:

Os números devem ser ímpares e a soma dos algarismos das unidades e das dezenas deve ser igual a 16. Desse modo, o número deve terminar em 97 ou 79. Esse é o primeiro passo a ser dado. Após essa análise, verificar as possibilidades para o algarismo das dezenas de milhares e na seguida o algarismo para as unidades de milhares. E por fim, definir as possibilidades para o algarismo das centenas, de maneira que a soma dos algarismos do número formado seja um múltiplo de 5.

7º) Executar o plano:

Como os números devem terminar em 79 ou 97, são 2 possibilidades de escolha para os dois últimos algarismos.

Para a escolha do algarismo das dezenas de milhar temos 9 possibilidades, pois como os números devem ter cinco algarismos, não podem ter 0 nesta casa.

Para a casa das unidades de milhar tem-se 10 possibilidades, todos os algarismos de 0 a 9.

Agora, resta analisar as possibilidades para o algarismo das centenas. Para facilitar, serão abordadas algumas situações, onde será possível identificar um padrão.

Primeira situação: 10_79 (o traço indica o algarismo que está faltando para a casa das centenas).

Nessa situação, a soma $1 + 0 + 7 + 9 = 17$ indica que o algarismo das centenas deverá ser 3 ou 8, para que a soma de todos os algarismos seja um múltiplo de 5. Note que, ao pensar no 3 para obter a soma 20, automaticamente já se sabe que 8 será a segunda possibilidade para o algarismo das centenas, basta somar 5 ao algarismo 3. Sendo assim, os números obtidos escrevendo 3 ou 8 na casa das centenas, 10379 e 10879, são múltiplos de 5.

Segunda situação: 84_97 (o traço indica o algarismo que está faltando para a casa das centenas).

Já nesse caso, a soma $8 + 4+ 9 + 7 = 28$ indica que o algarismo das centenas deverá ser 2 ou 7, para que a soma de todos os algarismos seja um múltiplo de 5. Da mesma forma abordada acima, ao pensar no 2 para obter a soma 30, automaticamente somando 5 ao algarismo 2, se obtém o algarismo 7 como segunda possibilidade para a casa das centenas. Obtendo agora, os números 84297 ou 84797, múltiplos de 5.

Com pensamento análogo, para qualquer outro número de cinco algarismos, terminando em 97 ou 79, independente das escolhas dos algarismos das dezenas de milhares e das unidades de milhares, podemos escolher o algarismo das centenas de duas maneiras distintas, a fim de que a soma de todos os algarismos do número seja um múltiplo de 5.

De maneira geral, já que o resto da divisão de um número por 5 tem que ser igual a 0, 1, 2, 3, ou 4. Assim, dado qualquer número natural, somando a ele 0, ou 1, ou 2, ou 3 ou 4 sempre encontraremos um (e só um) múltiplo de 5. Uma vez determinado qual dos algarismos 0, 1, 2, 3 ou 4 é o que produz o múltiplo de 5, basta somar 5 a ele para obter um novo algarismo (5, 6, 7, 8 ou 9) para que um novo número de cinco algarismos seja produzido, também com a propriedade de que a soma de seus algarismos seja um número múltiplo de 5.

Portanto, são 2 possibilidades para escolher a dupla de algarismos das dezenas e das unidades, 9 possibilidades para a escolha do algarismo das dezenas de milhares, 10 possibilidades para o algarismo das unidades de milhares e por fim, para cada escolha definida, restam 2 possibilidades para o algarismo das centenas, de maneira que a soma dos algarismos resulte em um múltiplo de 5.

Logo, pelo princípio multiplicativo, há $2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 2 =360$ possibilidades.

8º) Verificação do resultado:

Inicialmente, deve ficar claro que não há outra possibilidade de dupla para os algarismos das dezenas e das unidades, ou seja, apenas 97 ou 79, 2 possibilidades, devido às exigências: ser ímpar e a soma do algarismo das dezenas com o algarismo das unidades ser 16.

Quanto às escolhas dos algarismos para as dezenas de milhares e para as unidades de milhares também ficou facilmente claro na abordagem acima, que são 9 possibilidades (todos os algarismos exceto o zero) de escolha para o primeiro e 10 possibilidades para o segundo, respectivamente.

E a soma do algarismo das dezenas de milhares com o algarismo das unidades de milhares será um dos valores abaixo: 1,2, 3,4, ..., 17 ou 18. Já que:

$$1 + 0 = 1,$$
$$1 + 1 = 2,$$
$$1 + 2 = 3,$$
$$\ldots$$
$$9 + 9 = 18.$$

São todas as possibilidades de resultados na adição desses dois primeiros algarismos.

Vamos analisar todas as possibilidades de se obter as diferentes somas:

- Para se obter 1, tem-se apenas uma possibilidade:
  i) $1 + 0$
- Para se obter 2, tem-se duas possibilidades:
  i) $2 + 0$
  ii) $1 + 1$
- Para se obter 3, tem-se três possibilidades:
  i) $3 + 0$
  ii) $1 + 2$
  iii) $2 + 1$

  ... e assim por diante até chegar na soma 18.
- Para se obter 17, tem-se duas possibilidades:
  i) $9 + 8$
  ii) $8 + 9$
- Para se obter 18, tem-se uma única possibilidade:
  i) $9 + 9$.

Desse modo, contabilizando todas as adições, são 90 possibilidades diferentes. Para cada adição acima, haverá 2 possibilidades diferentes para acrescentar 16, referente às possibilidades de escrever 79 ou 97 nas casas das dezenas e das unidades e para cada uma dessas adições, haverá 2 possibilidades de escolha do algarismo da centena, para que resulte em um múltiplo de 5. Pois, analisando cada caso, para obter um múltiplo de 5:

$1 + 16 = 17$, basta somar 3 ou 8,

$2 + 16 = 18$, basta somar 2 ou 7,

$$3 + 16 = 19, \text{ basta somar 1 ou 6,}$$
$$...$$
$$18 + 16 = 34, \text{ basta somar 1 ou 6.}$$

Ou seja, sempre duas possibilidades para cada adição.

Logo, pelo princípio multiplicativo, temos

$$90 \cdot 2 \cdot 2 = 360$$

possibilidades de escrever números de cinco algarismos seguindo as exigências do enunciado.

Questão 2 – 2ª fase – 2013: Um hotel tem 15 andares com 25 quartos cada um. As chaves dos quartos são identificadas por um número de três ou quatro algarismos indicando o andar, de 1 a 15, seguido do número do quarto, de 01 a 25. Por exemplo, a chave 106 é a do quarto número 06 do 1º andar e a chave 1315 é a do quarto número 15 do 13º andar.

a) Quantos são os quartos do 10º andar para cima?

b) Quantas chaves têm número em que aparece o algarismo 1?

c) Dionísio não aceita ficar em um quarto cuja chave aparece o algarismo 1 seguido de 1 ou de 3. Em quantos quartos do hotel ele pode se hospedar?

Solução adaptada (apenas para o item c**):**

a) Do 10º andar até o 15º andar há 6 andares, cada um com 25 quartos. Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de quartos do 10º andar para cima é $6 \cdot 25 = 150$.

b) O número de uma chave é formado pelo número do andar, de 1 a 15, seguido do número do quarto, de 01 a 25. Podemos dividir as chaves em quatro casos, como segue:

I. andar com o algarismo 1, quarto sem o algarismo 1;

II. andar sem o algarismo 1, quarto com o algarismo1;

III. andar e quarto com o algarismo 1;

IV. andar e quarto sem o algarismo 1.

Note que, os andares cujos números têm o algarismo 1 são 1, 10, 11, 12, 13, 14 e 15, num total de 7; segue que os andares sem o algarismo 1 são em número de 15 – 7 = 8.

Os quartos com o algarismo 1 são 01, 10, 11, ... ,19 e 21, num total de 12; os quartos sem o algarismo 1 são então em número de 25 – 12 = 13. O princípio fundamental da contagem nos permite saber quantas chaves aparecem em cada um dos grupos:

I. andar em que aparece o algarismo 1, quarto sem o algarismo 1: $7 \cdot 13 = 91$.

II. andar sem o algarismo 1, quarto com o algarismo 1: $8 \cdot 12 = 96$.

III. andar e quarto com algarismo 1: $7 \cdot 12 = 84$.

IV. andar e quarto sem o algarismo 1: $8 \cdot 13 = 104$.

Os três primeiros grupos consistem das chaves com 1, que são em número de

$$7 \cdot 13 + 8 \cdot 12 + 7 \cdot 12 = 271.$$

Podemos também proceder, observando que para obter o número de chaves com algarismo 1 basta retirar, do total de chaves, as chaves do grupo 4 acima. Como o número total de chaves é $15 \cdot 25$, isso nos leva ao cálculo

$$15 \cdot 25 - 8 \cdot 13 = 271.$$

c) Resolução com aplicação da metodologia de resolução de problemas de Polya:

1º) Qual é a incógnita?

O número de quartos do hotel cujas chaves não apresentem as sequências 11 ou 13.

2º) Quais são os dados do problema?

- O hotel tem 15 andares com 25 quartos cada um.
- As chaves dos quartos são identificadas por um número de três ou quatro algarismos, indicando o andar, de 1 a 15, seguido do número do quarto, de 01 a 25.

3º) Qual é a condicionante?

- Os quartos em que Dionísio aceita ficar não podem apresentar em suas respectivas chaves, o algarismo 1 seguido dos algarismos 1 ou 3.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Estabelecer um plano:

Primeiramente calcula-se o número total de quartos. Em seguida, calcular o número de quartos dos andares 11 e 13 e subtrair do total de quartos. Dos andares restantes, também calcular quantos quartos apresentam a numeração 11 e 13, que também devem ser subtraídos do total de quartos. Finalmente, deve-se considerar as chaves do andar 1 e, neste andar, os quartos cujo dígito das dezenas seja também 1, para então também subtrair do total de quartos. Restando apenas as possibilidades com as condições exigidas por Dionísio.

7º) Executar o plano:

O número total de chaves é $15 \cdot 25 = 375$. Para obter o número de chaves procurado, primeiro elimina-se as chaves de quartos nos andares 11 e 13, que são em número de $2 \cdot 25 = 50$. Restam 13 andares a considerar; deve-se eliminar também as chaves dos quartos 11 ou 13 desses andares, o que nos dá $13 \cdot 2 = 26$ chaves. Finalmente, deve-se considerar as chaves do andar 1 e, neste andar, de quartos cujo dígito das dezenas seja também 1. Como foram eliminados os quartos de números 11 e 13 de todos os andares, os números possíveis para esses quartos são 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18 e 19, ou seja, deve-se ainda eliminar 8 chaves. Desse modo, o número de chaves em que não aparecem as sequências 11 ou 13 é:

$$375 - 50 - 26 - 8 = 291.$$

8º) Verificação do resultado:

Outra maneira de encontrar a solução, seria fazer uma análise das chaves que devem ser eliminadas dividindo os andares em três grupos:

I) 1º andar,

II) 11º e 13º andar,

III) os outros andares.

No caso (I), tem-se as chaves dos quartos de 10 a 19, num total de 10. No caso (II), tem-se todas as chaves desses andares, num total de $2 \cdot 25 = 50$. Em (III), tem-se 12 andares e as chaves dos quartos 11 e 13, num total de $12 \cdot 2 = 24$. Como o número total de chaves é 375, restam $375 - 10 - 50 - 24 = 291$ chaves nas quais não aparecem 11 ou 13.

Questão 5 – 2ª fase – 2012: Vitor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes. Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

a) De quantas maneiras Vitor pode escolher 2 cartões azuis de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

b) De quantas maneiras Vitor pode escolher 2 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?
c) De quantas maneiras Vitor pode escolher 3 cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9?

Solução adaptada:

a) O número 9 pode ser escrito como soma de duas parcelas inteiras de quatro maneiras diferentes:

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5.$$

Como a ordem em que os cartões são escolhidos não altera sua soma, segue que Vítor pode escolher dois cartões azuis cujos números somam 9 de 4 maneiras diferentes.

b) Resolução com aplicação da metodologia de resolução de problemas (Polya);

1º) Qual é a incógnita?
O número de possibilidades para Vitor escolher 2 cartões cuja soma de seus números seja 9.

2º) Quais são os dados do problema?
- Vitor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes.
- Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

3º) Qual é a condicionante?
A soma dos números dos dois cartões escolhidos deve ser 9.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade

6º) Estabelecer um plano:

Primeiramente escrever as possibilidades de expressões de adição com dois algarismos, de 1 a 8, cuja soma seja 9. A partir disso, analisar as escolhas das cores dos cartões, que pode ser feita através de duas etapas: primeiro considerar os dois cartões com cores iguais e depois os cartões com cores diferentes.

7º) Executar o plano:

As possibilidades de escrever expressões de adição de dois algarismos, de 1 a 8, cuja soma seja 9 são:

$$1 + 8,$$
$$2 + 7,$$
$$3 + 6,$$
$$4 + 5,$$

totalizando 4 maneiras.

No caso de cartões com a mesma cor, escolhemos uma das expressões de adição acima, cuja soma seja 9 e depois a cor dos cartões; como as cores são em número de 3, isso pode ser feito de $4 \cdot 3 = 12$ maneiras. No caso de cartões de cores diferentes, escolhe-se uma das expressões de adição acima, cuja soma seja 9, a cor de um dos cartões e uma cor diferente para o outro cartão; isso pode ser feito de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneiras diferentes. No total, é possível escolher dois cartões cuja soma seja 9 de $12 + 24 = 36$ maneiras diferentes.

8º) Verificação do resultado:

Uma outra maneira de resolver esse problema é a seguinte: Para fazer uma escolha possível, Vitor deve pegar um par de cartões de modo que a soma de seus números seja igual a 9. Os números desses cartões podem ser escolhidos de 4 maneiras diferentes, como foi visto no item anterior. Para cada um desses pares, a cor do cartão com o menor número pode ser escolhida de 3 maneiras diferentes, bem como a cor do cartão com o maior número; no total, as cores dos cartões de um par podem ser escolhidas de $3 \cdot 3 = 9$ maneiras diferentes. Como são 4 pares, o número total de escolhas é $4 \cdot 9 = 36$.

c) Também será aplicada a metodologia de resolução de problemas.

1º) Qual é a incógnita?

O número de possibilidades de Vitor escolher 3 cartões cuja soma dos algarismos escritos nesses cartões seja igual a 9.

2º) Quais são os dados do problema?

- Vitor tem 24 cartões, sendo oito azuis, oito brancos e oito verdes.
- Para cada cor, ele numerou os cartões de 1 a 8.

3º) Qual é a condicionante?

- A soma dos algarismos escritos nos 3 cartões escolhidos seja 9.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: as letras A, B e V indicam, respectivamente, azul, branco e verde.

6º) Estabelecer um plano:

Considerar três casos:

I) Os três cartões têm a mesma cor;

II) Dois cartões de uma mesma cor e o terceiro com uma cor diferente;

III) Os três cartões com cores diferentes.

7º) Executar o plano:

Há três casos a considerar.

• Os três cartões têm a mesma cor: as possibilidades para que sua soma seja 9 são:

$$1 + 2 + 6,$$
$$1+ 3 + 5,$$
$$2 + 3 + 4.$$

Totalizando três possibilidades.

Como são 3 cores, o número de possiblidades nesse caso é $3 \cdot 3 = 9$.

• Dois cartões de uma cor e o terceiro de uma cor diferente: os dois cartões da mesma cor somam de 3 a 8; as possibilidades são:

$3 = 1 + 2$,

$4 = 1 + 3$,

$5 = 1 + 4$ ou $5 = 2 + 3$,

$6 = 1 +5$ ou $6 = 2 + 4$,

$7 = 1 + 6$ ou $7 = 2 + 5$ ou $7 = 3 + 4$,

$8 = 1 + 7$ ou $2 + 6$ ou $3 + 5$.

Num total de 12 possibilidades; em qualquer caso, para completar a soma 9, o número do terceiro cartão (sem considerar a cor) pode ser escolhido de uma única maneira. Para as cores, temos 3 possibilidades para os cartões de mesma cor e 2 para o de cor diferente. No total, temos pelo princípio multiplicativo,

$$12 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 72$$

possibilidades.

• Os 3 cartões têm cores diferentes: listamos a seguir as 28 possibilidades nesse caso; as letras A, B e V indicam, respectivamente, azul, branco e verde.

Tabela 2 - 28 possibilidades de obter soma 9 com três cartões.

Cor	Possibilidades de obter soma 9																											
A	1	1	7	1	1	2	2	6	6	1	1	3	3	5	5	1	4	4	2	2	5	2	2	3	3	4	4	3
B	1	7	1	2	6	1	6	1	2	3	5	1	5	1	3	4	1	4	2	5	2	3	4	2	4	2	3	3
V	7	1	1	6	2	6	1	2	1	5	3	5	1	3	1	4	4	1	5	2	2	4	3	4	2	3	2	3

Fonte: elaborado pela autora desse trabalho.

No total, o número de maneiras é então $9 + 72 + 28 = 109$.

8º) Verificação do resultado:

Para fazer uma escolha possível, Vitor deve pegar um trio de cartões cuja soma seja igual a 9. Quanto aos números, há sete possibilidades para esses trios:

$$9 = 1 + 1 + 7 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3.$$

Observa-se que os trios são de três tipos diferentes:

- (3,3,3) os três números são iguais;
- (1,2,6), (1,3,5) e (2,3,4) – os três números são diferentes;
- (1,1,7), (1,4,4) e (2,2,5) – um número é repetido duas vezes e o terceiro é diferente.

Há uma única maneira de escolher cartões para o trio (3,3,3), a saber, um de cada cor.

Já para os trios do segundo tipo, cada um dos números pode aparecer em qualquer das cores; nesse caso, há $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ maneiras de escolher um desses trios. Como são 3 trios, o total aqui é $3 \cdot 27 = 81$ possibilidades.

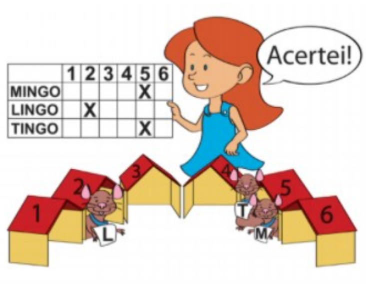
Para um trio do terceiro tipo, devemos escolher duas cores distintas para os números repetidos, o que pode ser feito de 3 maneiras (AB, AV e BV) e depois uma cor qualquer para o número diferente, o que pode ser feito de 3 maneiras. Nesse caso, o total de possibilidades é $3 \cdot 3 = 9$; como são 3 trios desse tipo, obtemos $3 \cdot 9 = 27$ possibilidades.

Finalmente, o número total de possibilidades, pelo princípio aditivo, é a soma das possibilidades de cada caso, ou seja,

$$1 + 81 + 27 = 109.$$

Questão 4 – 2ª fase – 2011: Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus ratinhos Mingo, Lingo e Tingo irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram. As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha. Ela registra suas previsões em cartões como o da Figura 26, marcando um X em cada linha.

Figura 26 – Ilustração dos dados do enunciado (problema dos ratinhos).



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2011

a) De quantas maneiras Cristina pode preencher um cartão?
b) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que os ratinhos se esconderão em três casinhas diferentes?
c) De quantas maneiras ela pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente?

Solução adaptada:

a) Para cada ratinho, Cristina tem 6 possibilidades de escolha para marcar no cartão o número da casinha que possivelmente cada um deles irá se esconder. Como são três ratinhos, então, ela poderá preencher o cartão de $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ maneiras.
b) Supondo que os ratinhos escolhem casinhas diferentes para se esconder, então, Cristina tem para o primeiro ratinho 6 escolhas possíveis de marcar no cartão, para o segundo tem 5 escolhas possíveis e para o terceiro, ela tem 4. Logo o número de maneiras em que Cristina pode preencher o cartão é $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

c) Aplicação da metodologia de resolução de problemas:

1º) Qual é a incógnita?

A quantidade de maneiras que Cristina pode preencher um cartão, supondo que dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente.

2º) Quais são os dados do problema?

- Cristina gosta de adivinhar em quais casinhas seus três ratinhos irão se esconder, após ser aberta a gaiola em que eles moram.
- As casinhas são numeradas de 1 a 6 e dois ou mais ratinhos podem se esconder na mesma casinha.
- Ela registra suas previsões em cartões como o da figura, marcando um X em cada linha.

3º) Qual é a condicionante?

- Dois ratinhos se esconderão em uma mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente.

4º) Representar a ideia com uma figura: utilizar a figura do enunciado.

5º) Adotar uma notação adequada: Representar cada ratinho por uma letra: Mingo por M, Lingo por L e Tingo por T.

6º) Estabelecer um plano:

Verificar as possíveis duplas de ratinhos inicialmente, e então para calcular as possibilidades de escolha da casinha para cada dupla e para o terceiro ratinho.

7º) Executar o plano

Utilizando a notação indicada para os ratinhos, pode-se formar as seguintes duplas: ML, MT e LT. Assim são 3 possibilidades de escolha da dupla, sendo que para cada dupla há 6 possibilidades de escolha para a casinha e para o ratinho que não faz parte da dupla há 5 possibilidades diferentes para a escolha da casinha. Portanto, há

$$3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$$

possibilidades.

8º) Verificação do resultado:

Para verificar se a solução obtida acima realmente está correta, é possível resolver esse problema de outros dois modos diferentes:

I) Para preencher um cartão supondo que dois ratinhos se esconderão na mesma casinha e o terceiro em uma casinha diferente, Cristina deve colocar duas marcas “X” em uma mesma coluna e uma marca “X” em uma coluna diferente. Para colocar as duas marcas “X” ela tem 6 escolhas de coluna e, depois disso, 3 maneiras de colocar esses dois “X” nessa coluna (1ª e 2ª linhas, 1ª e 3ª linhas e 2ª e 3ª linhas), num total de $6 \cdot 3 = 18$ maneiras. Isso feito, ela tem 5 escolhas para colocar o terceiro “X”, o que nos dá o total de $18 \cdot 5 = 90$ cartões.

II) Os ratinhos podem se esconder nas casinhas de três maneiras diferentes:

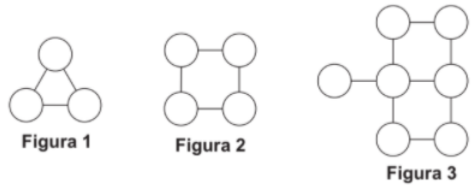
• os três na mesma casinha; temos aqui 6 possibilidades, uma para cada casinha;

• os três em três casinhas diferentes; temos aqui 120 possibilidades, que calculamos no item (b);

• dois em uma mesma casinha e o terceiro em uma outra casinha, que é o que queremos calcular. Assim, para achar o número procurado, basta subtrair do número total de preenchimentos possíveis (calculado no item (a)) as possibilidades para os outros dois casos; o resultado é então $216 - 6 - 120 = 90$, conferindo com o que foi calculado anteriormente.

Questão 5 – 2ª fase – 2009 (adaptada): Ana quer colorir as bolinhas das figuras 1, 2 e 3 (subfiguras da Figura 27), de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.

Figura 27 – Figuras que Ana quer colorir.



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2009.

a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 1?

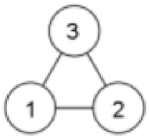
b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 2?
c) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 3?

Observação: No enunciado desse problema, a Figura 27 é composta por 3 subfiguras, que serão mencionadas na resolução a seguir como Figura 1, Figura 2 e Figura 3.

Solução adaptada:

a) Ana pode pintar a bolinha 1 com qualquer uma das três cores. A bolinha 2 deve então ser pintada de uma cor diferente da primeira, restando a Ana duas cores para pintá-la. A bolinha 3 deve ser pintada com a cor que sobrar. Portanto, a Figura 1 pode ser pintada de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes.

Figura 28 – Bolinhas da Figura 1 numeradas.

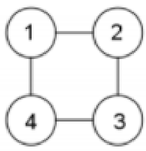


Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2009.

A solução pode ser facilmente encontrada pelo estudante ao "desenhar" todas as possibilidades.

b) Vamos dividir as maneiras de pintar a Figura 2 em dois casos.

Figura 29 - Bolinhas da Figura 2 numeradas.



Fonte: Solução – Prova da 2ª fase - OBMEP 2009.

1º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas da mesma cor. Essa cor pode ser escolhida de três maneiras diferentes; após esta escolha, a cor da bolinha 2 pode ser escolhida de duas maneiras diferentes, bem como a da bolinha 4. O número de maneiras de pintar a Figura 2 nesse caso é

$$3 \times 2 \times 2 = 12.$$

2º caso: as bolinhas 1 e 3 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, a cor da bolinha 1 pode ser escolhida de três maneiras diferentes e após isso, restam duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Para as bolinhas 2 e 4 há apenas uma possibilidade, que é a cor que não foi usada nas bolinhas 1 e 3. Logo o número de maneiras de pintar a Figura 2 nesse caso é

$$3 \times 2 \times 1 = 6.$$

No total, a Figura 2 pode ser pintada de 12 + 6 = 18 maneiras diferentes.

c) Aplicação da metodologia de resolução de problemas de Polya:

1º) Qual é a incógnita?

O número de maneiras diferentes que Ana pode colorir as bolinhas da Figura 3.

2º) Quais são os dados do problema?

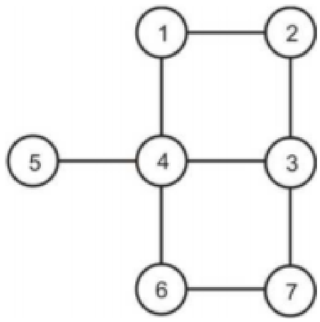
- A Figura 3;
- Ana quer colorir as bolinhas de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes;
- Solução do item (b).

3º) Qual é a condicionante?

Bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes. Pintar todas as bolinhas e usar todas as cores dadas.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 30 - Figura 3 com as bolinhas numeradas.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2009

5º) Adotar uma notação adequada: De acordo com a Figura 30, as bolinhas serão mencionadas na solução por bolinha 1, bolinha 2, etc.

6º) Estabelecer um plano:

Aproveitar a solução do item anterior para iniciar a resolução desse item, já que as bolinhas de 1 a 4 formam a figura estudada no item (b). A partir disso, calcular as possibilidades para pintar a bolinha 5 e logo em seguida as possibilidades para as bolinhas 6 e 7, considerando os casos onde as bolinhas 3 e 6 tenham a mesma cor e quando tenham cores diferentes.

7º) Executar o plano:

As bolinhas de 1 a 4 formam a figura do item anterior, portanto, para pintá-las, Ana tem 18 possibilidades.

Para pintar a bolinha 5, ele tem duas cores disponíveis, pois a bolinha 4 já está pintada. Logo, temos $18 \cdot 2 = 36$ possibilidades para pintar as bolinhas de 1 a 5.

Dividimos agora nossa contagem em dois casos:

1º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas da mesma cor. Nesse caso, temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (pois a bolinha 3 já foi pintada) e duas para a bolinha 7, ou seja, temos $1 \cdot 2 = 2$ possibilidades.

2º caso: as bolinhas 3 e 6 são pintadas de cores diferentes. Nesse caso, também temos uma única escolha para a cor da bolinha 6 (diferente das cores das bolinhas 3 e 4) e sobra apenas uma cor para a bolinha 7. Aqui, temos apenas uma possibilidade.

No total, há então

$$36 \cdot 2 + 36 \cdot 1 = 108$$

maneiras diferentes de pintar a Figura 3.

8º) Verificação do resultado:

Uma pergunta que deve ser feita ao interpretar esse problema é "Existe uma bolinha que pode estar ligada a outras duas bolinhas que tenham a mesma cor?

Diante dessa pergunta, várias ideias e interpretações podem surgir. Uma maneira de resolver esse problema com base na pergunta do parágrafo acima é analisando as bolinhas 1, 3 e 6, já que são bolinhas que podem estar ligadas a outras bolinhas com mesma cor.

Para resolver esse problema, serão abordados 4 casos com considerações sobre as bolinhas 1, 3 e 6. Pelo menos duas dessas bolinhas precisam ser da mesma cor, pois se as três fossem de cores diferentes teríamos uma contradição, já que essas três bolinhas estão ligadas com a bolinha 4.

Sendo assim, os quatro casos são:

1º) As bolinhas 1, 3 e 6 são da mesma cor. Nesse caso, há 3 maneiras de escolher essa cor, 2 maneiras de escolher a cor da bolinha 4, 2 maneiras de escolher a cor da bolinha 5, 2 maneiras de escolher a cor para a bolinha 2 e 2 maneiras de escolher a cor para a bolinha 7. Portanto, o número de possibilidades de colorir as bolinhas nesse caso, seguindo todas as exigências é:

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48.$$

2º) As bolinhas 1 e 3 são de mesma cor e a bolinha 6 é de cor diferente. Há 3 possibilidades de escolha dessa cor para as bolinhas 1 e 3 e duas possibilidades para a escolha da cor da bolinha 6. Com isso, para a bolinha 4, só restará uma possibilidade de colorir. Para a bolinha 2, há 2 possibilidades, para a bolinha 7 apenas 1 possibilidade e para a bolinha 5 há 2 possibilidades. Logo, o número de possibilidades nesse caso é:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 24.$$

3º) As bolinhas 3 e 6 são de mesma cor e a bolinha 1 tem cor diferente. Como a figura é simétrica em relação a essas bolinhas, tem-se o mesmo resultado do caso anterior, ou seja, 24 possibilidades.

4º) Nesse último caso, resta analisar quando as bolinhas 1 e 6 são de mesma cor, diferente da bolinha 3. São 3 possibilidades de escolha para a cor das bolinhas 1 e 6, duas possibilidades para a cor da bolinha 3. Daí, restará apenas uma possibilidade para colorir a bolinha 4. Já, para a bolinha 5, há 2 possibilidades. E para colorir a bolinha 2, há 1 maneira, assim como haverá apenas 1 maneira de colorir a bolinha 7. Sendo assim, o número de possibilidades nesse caso é:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12.$$

Então, o total de possibilidades que Ana tem para colorir as bolinhas é:

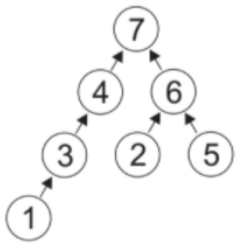
$$48 + 24 + 24 + 12 = 108.$$

Isso confere a resposta encontrada na solução feita acima e garantido que foram abordados todos os casos possíveis.

Observação: A questão acima, do ano de 2009, também foi aplicada ao nível 2.

Questão 5 – 2ª fase – 2008: Os círculos da Figura 31 foram preenchidos com os números de 1 a 7, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um maior. Neste caso, dizemos que a figura foi bem preenchida.

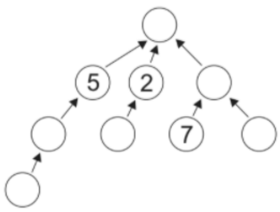
Figura 31 – Figura bem preenchida.



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2008

a) Complete a Figura 32 com os números de 1 a 9 de modo que ela fique bem preenchida.

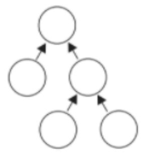
Figura 32 – Figura com 9 bolinhas que devem ser bem preenchidas.



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2008.

b) De quantas maneiras a Figura 33 pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5?

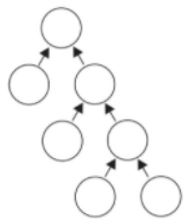
Figura 33 – Diagrama com 5 bolinhas que deve ser bem preenchido.



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2016.

c) De quantas maneiras a Figura 34 pode ser bem preenchida com os números de 1 a 7?

Figura 34 – Diagrama com 7 bolinhas que deve ser bem preenchido.



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2008

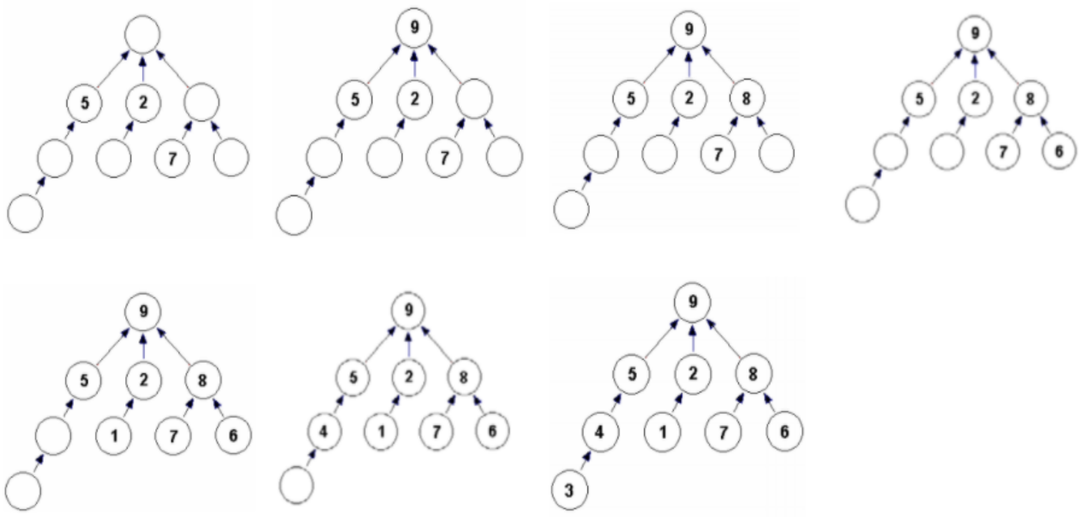
Solução adaptada:

a) Só existe uma maneira de preencher o diagrama contido na Figura 32, veja:

- O número 9 não pode ficar abaixo de algum número, logo, deve ficar no topo.
- Acima do número 7 só podemos colocar o 9 e 8. Como o 9 já está no topo, o 8 ficará acima do 7.
- O número 6 não pode ficar abaixo do 5 nem do 2, logo ficará abaixo do 8, ao lado do 7.
- O número 1 é o único que pode ficar abaixo do 2.
- Os números 3 e 4 devem ficar abaixo do 5, com o 3 abaixo do 4.

A sequência de figuras a seguir ilustra as etapas deste raciocínio.

Figura 35 – Etapas do raciocínio abordado acima.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2008

b) Aplicação da metodologia de resolução de problemas de Polya:

1ª) Qual é a incógnita?

O número de maneiras no qual a figura dada pode ser bem preenchida com os números de 1 a 5.

2º) Quais são os dados do problema?

- Uma explicação do que significa uma figura ser bem preenchida, com exemplo, logo no começo do enunciado.
- Utilizar os números de 1 a 5; também foi dado o modelo da figura.

3º) Qual é a condicionante?

- Colocar os números de 1 a 5, um em cada bolinha da figura dada, de maneira que ela fique bem preenchida, ou seja, de modo que todas as flechas apontam de um número menor para um número maior.

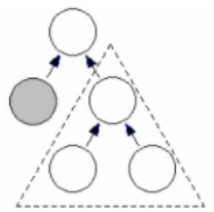
4º) Representar a ideia com uma figura: utilizar a figura dada.

5º) Adotar uma notação adequada: para se referir as bolinhas, algumas vezes será utilizada a palavra “topo” para a bolinha que está na posição acima de todas; bolinhas “sombreada” para a bolinha com uma cor acinzentada.

6º) Estabelecer um plano:

Inicialmente deve-se analisar o diagrama menor de três bolinhas, conforme exposto na Figura 36:

Figura 36 - Diagrama de 5 bolinhas contendo um diagrama de 3 bolinhas destacado.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2008.

Para que esse diagrama fique bem preenchido com quaisquer três números positivos distintos, o maior número deve ficar no topo e os outros dois poderão ser colocados nos dois círculos de baixo de 2 maneiras diferentes.

Considerar que o número 5 é o maior, portanto, pela disposição das bolinhas, ele deverá ficar no topo. Em seguida ver as possibilidades para a bolinha sombreada. E por fim calcular as possibilidades para as três bolinhas dentro do triângulo pontilhado.

7º) Executar o plano:

Para que o diagrama completo do problema fique bem preenchido com os números de 1 a 5, o número 5 deve ficar no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 4. As três casas restantes, marcadas com o triângulo pontilhado, formam o diagrama analisado acima e poderão então ser preenchidas de 2 maneiras, com os três números restantes.

Resumindo, pode-se preencher o diagrama do seguinte modo:

• preenchemos o círculo do topo com o 5: 1 possibilidade;

• preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3 ou 4: 4 possibilidades;

• preenchemos as três casas que faltam com os três algarismos restantes: 2 possibilidades.

Logo, o diagrama pode ser preenchido de 1 · 4 · 2 = 8 maneiras diferentes. Nota-se que este raciocínio se aplica para quaisquer cinco números positivos distintos. Isto será importante na resolução do item (c).

8º) Verificação do resultado:

Nota-se primeiro que o 5 deve sempre ocupar a bolinha de cima. O 4 deve então ocupar uma das duas bolinhas abaixo do 5, e então:

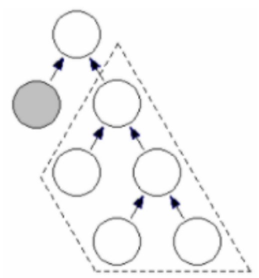
• se o 4 ocupar a bolinha sombreada, o 3 deve ocupar a outra bolinha abaixo do 5, e o 1 e o 2 podem ser colocados de duas maneiras diferentes nas duas bolinhas que sobram; temos duas possibilidades neste caso;

• se o 4 ocupar a outra bolinha abaixo do 5, a casa sombreada pode ser ocupada por qualquer dos números de 1 a 3, e os outros dois números podem ser colocados nas duas últimas bolinhas vazias de duas maneiras diferentes; neste caso, temos 3 · 2 = 6 possibilidades.

Deste modo, o número de maneiras de preencher o diagrama é 2 + 6 = 8.

c) Para que o diagrama da Figura 37 fique bem preenchido com os números de 1 a 7, tem-se que colocar o número 7 no topo. A casa sombreada pode ser preenchida com qualquer número de 1 a 6, conforme a figura abaixo:

Figura 37 – Diagrama de 7 bolinhas contendo o diagrama de 5 bolinhas destacado.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2008

A parte circundada pela linha pontilhada foi analisada no item (b) e pode ser preenchida com os 5 números restantes de 8 formas diferentes. Ou seja, pode-se preencher o diagrama como segue:

• preenchemos o círculo do topo com o 7: 1 possibilidade;

• preenchemos a casa sombreada com 1, 2, 3, 4, 5 ou 6: 6 possibilidades;

• preenchemos a parte circundada com os algarismos restantes: 8 possibilidades.

Logo, o diagrama pode ser preenchido de

$$1 \cdot 6 \cdot 8 = 48$$

maneiras diferentes.

Observação: A questão acima, de 2008, também foi aplicada ao nível 2.

Consideração: As duas últimas questões abordadas (2008 e 2009), assim como a questão 5 de 2017 (nível 1/fase 2) exigem do estudante um raciocínio muito peculiar. Nessas situações, os estudantes apresentam muita dificuldade, caso nunca tenham visto algo parecido e não conseguem enxergar todas as possibilidades, explorar o raciocínio combinatório que está por trás ou mesmo se organizar para iniciar uma estratégia de resolução. Por isso, a importância de se trabalhar em sala de aula essa proposta. Apresentar o problema, deixar que eles pensem, tentem resolver mostrando sua criatividade, e de acordo com as dificuldades expostas, o professor entra com a metodologia de resolução de problemas, o passo a passo sugerido por Polya, para que então os estudantes possam desenvolver seu raciocínio. É muito importante abordar esses problemas que trazem uma interpretação diferenciada, utilizar esquemas, figuras, e insistir na leitura. Também é necessário que o professor apresente situações, como estes problemas citados abordados anteriormente, e verifique o que acontece se escolher o caminho errado. Porque nem sempre o estudante irá começar do jeito certo. Mostrar para eles que se deve analisar e voltar, sem se preocupar com o erro ou com o tempo "perdido".

Além disso, como uma maneira de facilitar a aprendizagem desses raciocínios, sugere-se o uso de material concreto para complementar as explicações. Principalmente, para alunos do nível 1, onde o lúdico ainda faz a diferença.

Questão 7 – 1ª fase – 2006: Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os quatro podem sentar-se no banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

Solução adaptada:

1ª) Qual é a incógnita?

O número de ordens diferentes em que as quatro pessoas (dois casais) podem sentar-se em um banco, seguindo as exigências.

2º) Quais são os dados do problema?

- Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça.

3º) Qual é a condicionante?

- Cada namorado deve ficar ao lado de sua namorada.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: para facilitar a escrita, serão utilizadas as letras H_1M_1 para indicar o homem e a mulher, respectivamente, do primeiro casal e, H_2M_2 para indicar o homem e a mulher, respectivamente, do segundo casal.

6º) Estabelecer um plano:

Inicialmente deve-se considerar que cada namorado deve sentar ao lado de sua namorada, por isso, as possibilidades de ordenar essas 4 pessoas cairão dentro de dois casos:

Caso 1: casal 1 / casal 2

Caso 2: casal 2 / casal 1

Considerando essa ordem como esquerda/direita, analisar as maneiras de organizar as 4 pessoas e escrever cada uma dessas maneiras.

7º) Executar o plano:

Considerando então os dois casos de colocar os casais no banco, como indicado acima, tem-se as seguintes possibilidades:

Caso 1: casal 1 / casal 2

$$H_1M_1/H_2M_2,$$
$$H_1M_1/M_2H_2,$$
$$M_1H_1/H_2M_2,$$
$$M_1H_1/M_2H_2.$$

Totalizando 4 possibilidades.

Caso 2: de maneira análoga ao caso 1, também haverá 4 possibilidades.

Logo, os casais poderão sentar-se de 8 maneiras distintas nesse banco.

8º) Verificação do resultado:

Outra maneira de resolver esse problema poderia ser assim:
Considere ABCD as ordens dos lugares no banco da esquerda para a direita. No lugar A, há 4 pessoas que podem escolher sentar-se. Já no lugar B, apenas uma pessoa poderá sentar-se, que será o/a namorado(a) da pessoa que sentou no lugar A. No lugar C, as duas pessoas podem escolher esse lugar para sentar-se e no lugar D apenas uma, o/a namorado(a) de quem sentou no lugar C.

Portanto, pelo princípio multiplicativo, o número total de possibilidades de ordenar essas 4 pessoas no banco, de modo que cada namorado sente ao lado de sua namorada é:

$$4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 8.$$

Observação: Essa questão foi aplicada ao nível 2 alterando apenas o número de casais para 3:

Três casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os seis podem sentar-se de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?
Nesse caso a solução seria:

Os casais 1, 2 e 3 podem sentar-se em seis ordens distintas: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Cada casal pode sentar-se de duas maneiras distintas: com o namorado à direita ou à esquerda de sua namorada. Logo, em cada uma das 6 ordens possíveis para os casais, temos

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

possibilidades. Logo, o número de ordens distintas em que as seis pessoas podem sentar-se é

$$6 \cdot 8 = 48.$$

4.2 PROBLEMAS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 2

Nesta seção serão apresentadas algumas questões da OBMEP aplicadas ao nível 2 (8º e 9º anos) com suas respectivas resoluções adaptadas à metodologia de Polya. No início de cada enunciado, constará o número da questão (original), a fase em que foi aplicada e o ano em que a prova da OBMEP ocorreu.

Questão 16 – 1ª fase – 2019: Uma mesa circular tem seis lugares com cadeiras de cores diferentes. De quantos modos três casais de namorados podem ocupar esses seis lugares de forma que os três rapazes fiquem juntos e as três moças também, mas nenhum rapaz fique junto de sua namorada?

Solução adaptada:

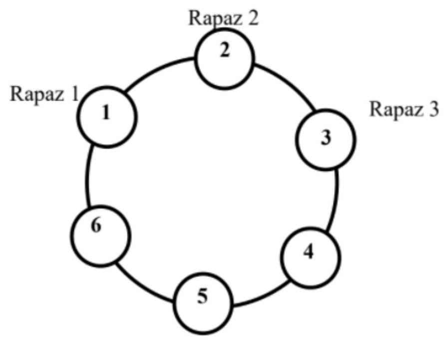
1º) Qual é a incógnita?
O número de possibilidades de três casais de namorados ocuparem seis lugares em uma mesa circular, onde nenhum rapaz fique junto de sua namorada e os três rapazes fiquem juntos.

2º) Quais são os dados do problema?
- Uma mesa circular tem seis lugares com cadeiras de cores diferentes.

3º) Qual é a condicionante?
- Os três rapazes devem ficar juntos e as três moças também, mas nenhum rapaz deve ficar junto de sua namorada.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 38 – Mesa circular com cadeiras numeradas.



Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2019

5º) Adotar uma notação adequada:

Utilizar as indicações rapaz 1 (R1), rapaz 2 (R2) e rapaz 3 (R3) para os rapazes.

6º) Estabelecer um plano:

Inicialmente escolher as possibilidades de acomodar os rapazes. Os rapazes devem se sentar juntos ao redor da mesa; escolhe-se primeiramente três posições vizinhas e a ordem dos rapazes nas posições escolhidas. Em seguida acomodar as garotas, considerando que nenhuma delas deve sentar ao lado do namorado.

7º) Executar o plano:

Os rapazes devem se sentar juntos ao redor da mesa. Escolhe-se primeiramente três posições vizinhas (6 modos diferentes) e a ordem dos rapazes nas posições escolhidas (6 modos diferentes). Para ficar bem claro, utilizando a ideia da Figura 38, os 6 modos diferentes de escolher três posições vizinhas são: 123, 234, 345, 456, 561, 612. Assim como os 6 modos de ordenar os rapazes, conforme notação indicada acima, podem ser: R1R2R3, R1R3R2, R2R1R3, R2R3R1, R3R1R2 e R3R2R1.

Portanto, isso pode ser feito de $6 \cdot 6 = 36$ modos diferentes.

Fixemos uma dessas escolhas. Para raciocinar, digamos que foi escolhida a seguinte acomodação para os rapazes (observe que não há perda de generalidade aqui): 123 e ordem R1R2R3, exatamente como mostra a Figura 38.

Vamos pensar na acomodação das moças. Na cadeira de número 6 não deve se sentar a namorada do rapaz 1 e, assim, há dois casos a considerar:

- Na cadeira 6 senta-se a moça que namora o rapaz 2. Nesse caso, como na cadeira 4 não deve se sentar a moça que namora o rapaz 3, há somente uma possibilidade de acomodação das moças. Fazendo variar a posição dos rapazes, há, portanto, um total de $1 \cdot 36 = 36$ possibilidades.
- Na cadeira 6 senta-se a moça que namora o rapaz 3. As cadeiras 4 e 5 podem ser usadas pelas namoradas dos rapazes 1 e 2 (duas possibilidades). Fazendo variar a posição dos rapazes, há, portanto, um total de $2 \cdot 36 = 72$ possibilidades.

Pelo princípio aditivo, considerando os dois casos acima, conclui-se que há

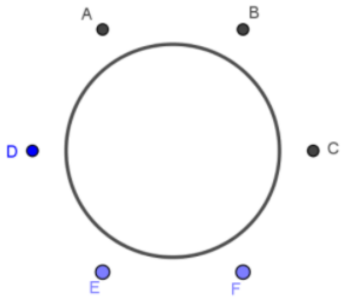
$$36 + 72 = 108$$

possibilidades de ocupar as cadeiras, de acordo com as exigências do enunciado.

8º) Verificação do resultado:

Outra solução: Pensando primeiramente no trio de homens, chamaremos o que fica entre os outros dois de "homem central" e os outros dois de "homem da direita" e "homem da esquerda".
Em qual cadeira ficará o homem central? 6 possibilidades.
Qual será o homem central? 3 possibilidades.
Qual será o homem da direita? 2 possibilidades.
Qual será o homem da esquerda? 1 possibilidade.
Após posicionados os homens, vamos chamá-los de A, B e C, e as respectivas namoradas de A', B' e C'.

Figura 39 – Mesa circular com 6 cadeiras diferentes (ABCDEF).



Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2019

Basta decidir agora em qual cadeira (D, E ou F) B' (namorada do homem central) se sentará, pois, após ela se sentar, as posições das outras namoradas ficarão determinadas.
Qual será a posição de B'? 3 possibilidades.
Qual será a posição de A'? 1 possibilidade.
Qual será a posição de C'? 1 possibilidade.

Assim, o número de maneiras de arrumar os 3 casais nas condições estabelecidas é

$$6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 108.$$

Estratégia de ensino com material concreto: para uma melhor compreensão dos alunos, da questão acima, seria interessante que o professor em sua correção desse problema, utilize material concreto. Isso pode ser feito com um círculo grande de cartolina (mesa), 6 círculos coloridos diferentes (bancos) e 6 cartões retangulares com nomes indicados por R1, R2, R3, M1, M2 e M3, para representar os rapazes e suas respectivas namoradas.

Desse modo, fixar os círculos no quadro e manipular os cartões retangulares, se necessário, utilizar fita adesiva.

Questão 5 – 2ª fase – 2019: Dizemos que uma fila de cadeiras de cinema está ocupada de forma quase-cheia quando não há duas cadeiras consecutivas ocupadas, mas a próxima pessoa a chegar será obrigada a sentar-se ao lado de uma cadeira já ocupada. Uma fila de 5 cadeiras tem exatamente quatro ocupações quase-cheias, mostradas abaixo. As cadeiras marcadas com X indicam que elas estão ocupadas.

Figura 40 – Ocupações de forma quase-cheia para filas de 5 cadeiras.

Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2019

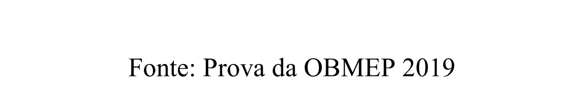
a) Uma fila de 6 cadeiras possui cinco ocupações quase-cheias. Marque com X as cadeiras dessas ocupações.

Figura 41 – 5 Filas de 6 cadeiras cada.

Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2019

b) Quantas são as ocupações quase-cheias em uma fila de 8 cadeiras em que a segunda cadeira já está ocupada?

Figura 42 – Ocupações quase cheias de uma fila de 8 cadeiras.



Fonte: Prova da OBMEP 2019

c) A tabela abaixo apresenta o número de ocupações quase-cheias para algumas filas de cadeiras. Calcule o total de ocupações quase-cheias em uma fila com 19 cadeiras. Justifique.

Tabela 3 – Número de ocupações quase-cheias para algumas filas de cadeiras.

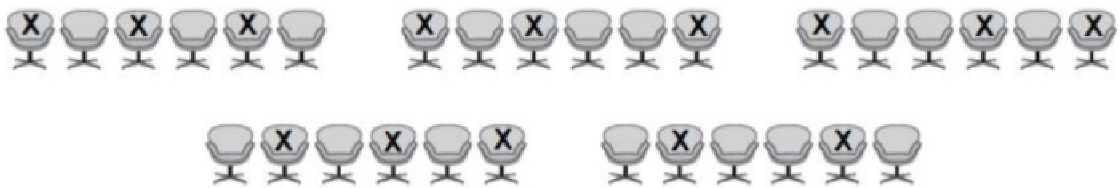
Número de cadeiras da fila	Número de ocupações quase-cheias
5	4
6	5
...	...
16	86
17	114
18	151
19	-

Fonte: Prova da OBMEP 2019.

Solução adaptada:

a) A solução desse item está representada na Figura 43:

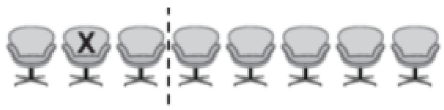
Figura 43 – Ocupações quase-cheias de uma fila de 6 cadeiras.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2019

b) Como a segunda cadeira já está ocupada, a primeira e terceira cadeiras necessariamente devem ficar livres.

Figura 44 – Fila de 8 cadeiras com a segunda cadeira ocupada.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2019

Assim, os demais a chegar devem ocupar, de modo quase cheio, as 5 cadeiras restantes. Como visto no enunciado, na Figura 40, há 4 possibilidades para a ocupação dessas cadeiras.

c) Aplicação da metodologia de resolução de problemas de Polya:

1º) Qual é a incógnita?

O total de ocupações quase-cheias em uma fila com 19 cadeiras.

2º) Quais são os dados do problema?

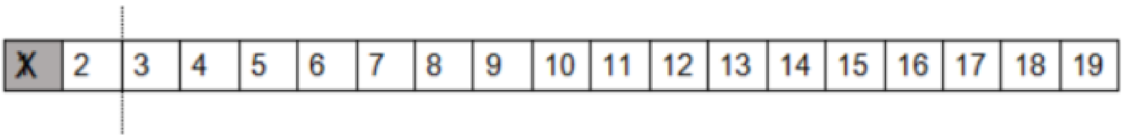
- Definição de uma fila de cadeiras de cinema “quase cheia”: quando está ocupada de forma que não há duas cadeiras consecutivas ocupadas, mas a próxima pessoa a chegar será obrigada a sentar-se ao lado de uma cadeira já ocupada.
- Uma fila de 5 cadeiras apresenta 4 possibilidades de ocupação “quase cheia”.
- As soluções dos itens (a) e (b).
- As informações na tabela 4, dadas nesse item.

3º) Qual é a condicionante?

- Formar ocupações quase-cheias em uma fila com 19 cadeiras.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 45 – Fila de 19 cadeiras com a primeira cadeira ocupada.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2019

5º) Adotar uma notação adequada: Nomear cada cadeira dessa fila de 19 lugares pelo número conforme a figura acima. E utilizar a marcação com a letra X para uma cadeira ocupada.

6º) Estabelecer um plano:

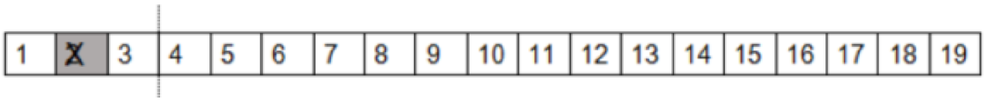
Vamos enumerar as cadeiras em ordem crescente. Em uma ocupação quase cheia de 19 cadeiras, exatamente uma das duas primeiras cadeiras deve estar ocupada. Analisar os dois casos e juntamente com as informações da tabela acima, calcular o total de possibilidades.

7º) Executar o plano:

De acordo com a Figura 57, onde a primeira cadeira está ocupada (e, em consequência, a segunda livre), as demais pessoas devem ocupar, de modo quase cheio, as outras 17 cadeiras. De acordo com a tabela 4, há 114 possibilidades para essa ocupação.

Com a segunda cadeira ocupada (e, em consequência, as duas cadeiras vizinhas livres), as demais pessoas devem ocupar, de modo quase cheio, as outras 16 cadeiras, conforme a figura 46:

Figura 46 – Fila de 19 cadeiras com a segunda cadeira ocupada.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2019

De acordo com a tabela 4, há 86 possibilidades para essa ocupação. Portanto, pelo princípio aditivo, há um total de

$$114 + 86 = 200$$

ocupações quase cheias para 19 cadeiras.

8º) Verificação do resultado:

O resultado acima pode ser verificado através de uma melhor compreensão da validade dos dados da tabela. De fato, é possível relacionar as quantidades de ocupações quase cheias de filas com numerações consecutivas.

A quantidade a_n de ocupações quase cheias de n cadeiras é dada pela recorrência:

$a_1 = 1, a_2 = 2\,, a_3 = 2 \;\; e \;\; a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$, para todo n ≥ 4.

Veja a análise abaixo, considerando os traços como cadeiras vazias e X para cadeiras ocupadas:

Fila com uma cadeira: apenas 1 ocupação quase cheia X

Fila com 2 cadeiras: somente 2 ocupações quase cheias X_ ou _X

Fila com 3 cadeiras: somente 2 ocupações quase cheias X _ X ou _ X_

Fila com 4 cadeiras:

Será utilizado o traço vermelho para indicar as relações com os termos anteriores.

X I _ X _ (gerada de a_1),

X_ I_ X (gerada de a_2) ,

_ X I _X (gerada de a_2).

Sendo assim 3 possibilidades.

É importante observar que as ocupações de filas com 4 cadeiras podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$a_4 = a_2 + a_1.$$

Fila com 5 cadeiras: Figura 52 contida no enunciado (4 possibilidades).

Observando as ocupações quase-cheias da figura 52, é possível perceber que duas delas se originam de filas com 2 cadeiras e as outras duas de filas com 3 cadeiras. Sendo assim:

$$a_5 = a_3 + a_2.$$

Fila com 6 cadeiras: item (a)

Foram obtidas 5 possibilidades de ocupações. Sendo duas obtidas a partir de filas com 3 cadeiras:

X _ X I _X_

_ X _ I _X_

E três obtidas a partir de filas com 4 cadeiras:

X_ X _ I _ X

X _ _ X I _ X

_ X _ X I _ X

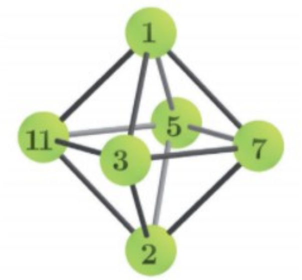
E assim sucessivamente, obtém-se a_n a partir de a_{n-2} e a a_{n-3}, para qualquer n maior igual que 4.

Estratégia de ensino com material concreto: para esse problema também é possível confeccionar cartões retangulares para simbolizar as cadeiras e círculos pequenos para simbolizar “ocupação”, e assim colocar no quadro com fita adesiva, possíveis casos de ocupações para algumas filas. Ou até mesmo, utilizar as próprias cadeiras de sala de aula enfileiradas como no cinema, e apresentar as ocupações com os alunos; pelo menos para filas de até 6 cadeiras.

Também é importante ressaltar que o conceito de recorrência faz parte dos objetos de conhecimento proposto pela BNCC, e essa questão é muito interessante, pois traz essa ideia de recorrência e ainda o raciocínio combinatório. E além disso, é uma questão que pode ser trabalhada de modo lúdico, interessante e com uma ideia simples de ser compreendida pelos alunos do nível 2.

Questão 5 – 2ª fase – 2017 (adaptada): Um objeto foi construído com doze varetas iguais e seis bolinhas numeradas com 1,2,3,5,7 e 11, como na Figura 47.

Figura 47 – Objeto construído com doze varetas iguais e seis bolinhas.



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2017

Uma formiguinha caminha pelas varetas, passeando de bolinha em bolinha, a partir de uma bolinha inicial. Quando termina um passeio, ela multiplica todos os números das bolinhas que visitou e obtém um número para esse passeio. Por exemplo, ao final do passeio

$$3 \to 1 \to 3 \to 2 \to 3 \to 11 \to 1$$

ela obtém

$$3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 1 = 594.$$

Quantos passeios diferentes a formiguinha pode fazer para obter ao final o número 30?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de passeios diferentes que a formiguinha pode fazer para obter ao final o número 30.

2º) Quais são os dados do problema?

- Um objeto foi construído com doze varetas iguais e seis bolinhas numeradas com 1,2,3,5,7 e 11;
- Uma imagem do objeto;
- Uma formiguinha caminha pelas varetas, passeando de bolinha em bolinha, a partir de uma bolinha inicial;
- Quando termina um passeio, ela multiplica todos os números das bolinhas que visitou e obtém um número para esse passeio.

3º) Qual é a condicionante?

- Obter, no final da caminhada, o número 30.

4º) Representar a ideia com uma figura: Não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: Cada bolinha será indicada pelo seu número e o símbolo $\rightarrow$ para indicar uma passagem.

6º) Elaborar um plano:

A fatoração do número 30 em produto de números primos é $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Para obter o número 30 no final de um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2, 3 e 5, passando uma única vez pelas bolinhas 2, 3 e 5. A formiguinha não pode passar mais de duas vezes pela bolinha 1, pois, se isso acontecesse, ela passaria mais de uma vez pelas bolinhas 3 ou 5.

Assim, é preciso analisar as seguintes situações:

- obter 30 sem passar pela bolinha 1;
- obter 30 passando somente uma vez pela bolinha 1;
- obter 30 passando duas vezes pela bolinha 1;

7º) Executar o plano:

Na primeira situação, a formiguinha tem duas possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 3 ou 5) e, em cada uma delas, uma única direção a seguir. Temos, então, $2 \cdot 1 = 2$ possibilidades. São as seguintes:

- $3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$,
- $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.

Na segunda situação, a formiguinha tem quatro possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 1, 2, 3 ou 5) e, em cada uma delas, duas direções a seguir. Temos então, pelo princípio multiplicativo da contagem, $4 \cdot 2 = 8$ possibilidades.
São elas:

- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$,
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3$,
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5$,
- $2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3$,
- $3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2$,
- $3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$,
- $5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$,
- $5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

Na terceira situação, a formiguinha tem três possibilidades: iniciar e terminar na bolinha 1, iniciar na bolinha 1 e terminar na bolinha 2, ou iniciar na bolinha 2 e terminar na bolinha 1; em cada uma elas, ela tem duas direções a seguir. Então, pelo princípio multiplicativo, $3 \cdot 2 = 6$ possibilidades. São as seguintes:

- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$,
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$,
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 2$,
- $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$,
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1$,
- $2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

No total, temos

$$2 + 8 + 6 = 16$$

passeios diferentes em que a formiguinha obtém, ao final, o número 30.

8º) Verificação do resultado:

Para verificar a validade do resultado, basta ter clareza do argumento utilizado "A fatoração do número 30 em produto de números primos é $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$". A decomposição em números primos de qualquer número natural é única, garantido pelo Teorema Fundamental da Aritmética: todos os números inteiros positivos maiores que 1 podem ser decompostos num produto de números primos, sendo esta decomposição única a menos de permutações dos fatores. Isso garante que a formiguinha não passará por outras bolinhas com números diferentes de 2, 3, 5 ou 1.

Questão 20 – 1ª fase – 2016: Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?
O número de possibilidades diferentes de Bruno fazer um pacote com pelo menos 3 figurinhas.

2º) Quais são os dados do problema?
- Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia.
- Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 das figurinhas.

3º) Qual é a condicionante?
- Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 das figurinhas.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: serão utilizadas as letras A, B e C para denotar Alemanha, Brasil e Colômbia.

6º) Elaborar um plano:

Primeiramente deve-se contar quantos pacotes distintos é possível fazer com qualquer número de figurinhas (total geral), incluindo o pacote sem nenhuma figurinha.

Logo em seguida, elaborar uma tabela com todas as possibilidades de pacotes contendo menos que três figurinhas. Por fim subtrair o total de possibilidades encontrado através da tabela do total geral.

7º) Executar o plano:

Para fazer um pacote, Bruno pode, por exemplo, escolher primeiramente quantas figurinhas da Alemanha, depois quantas do Brasil e finalmente quantas da Colômbia ele deseja colocar no pacote. Pelo princípio multiplicativo, isso pode ser feito de $6 \cdot 7 \cdot 5 = 210$ maneiras diferentes; observemos que o fator 6 nessa expressão corresponde ao fato de que Bruno tem 6 escolhas (a saber, 0, 1, 2, 3, 4, 5) para o número de figurinhas da Alemanha; já o fator 7 é o número de escolhas para o número de figurinhas do Brasil e 5 é o número de escolhas para o número de figurinhas da Colômbia que ele pode colocar no pacote. Por outro lado, o número de pacotes com menos que três figurinhas é 10, como vemos na tabela abaixo:

Tabela 4: Quantidade de figurinhas e quantidade de pacotes.

Quantidade de figurinhas escolhidas para colocar no pacote	O que fica dentro do pacote	Quantidade de pacotes
0 figurinha	Nada	1
1 figurinha	A ou B ou C	3
2 figurinhas	AA ou BB ou CC ou AB ou AC ou BC	6
Total		10

Fonte: elaborado pela autora/OBMEP.

Segue, então, que o número de pacotes distintos com pelo menos três figurinhas é

$$210 - 10 = 200.$$

8º) Verificação do resultado:

Podemos verificar o resultado, explorando a resolução por um outro caminho:

Um pacote com pelo menos três figurinhas poderá conter figurinhas com as três bandeiras diferentes, ou figurinhas com somente duas das bandeiras ou ainda figurinhas com apenas uma das bandeiras. Vamos fazer a contagem do número de pacotes distintos que podem ser feitos em cada um desses casos, com atenção para que sempre os pacotes contenham, no mínimo, três figurinhas. Veja:

I) Pacotes de figurinhas com as três bandeiras diferentes: Bruno tem 5 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira da Alemanha que poderá colocar em um pacote: A, AA, AAA, AAAA, AAAAA. Da mesma forma, terá 6 possibilidades para o número de figurinhas com a bandeira do Brasil e 4 para figurinhas com a bandeira da Colômbia. O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas com as três bandeiras diferentes será

$$5 \cdot 6 \cdot 4 = 120.$$

II) Pacotes de figurinhas com todas as figurinhas com a mesma bandeira: O número de pacotes distintos que Bruno poderá formar com pelo menos três figurinhas e todas as figurinhas no pacote com a mesma bandeira é

$$3 + 4 + 2 = 9,$$

(AAA, AAAA, AAAAA, BBB, BBBB, BBBBB, BBBBBB, CCC e CCCC).

III) Pacotes de figurinhas com bandeiras de exatamente dois países: Se os países forem, por exemplo, Alemanha e Brasil, haverá $5 \cdot 6 - 1$ possibilidades, já que os pacotes devem conter pelo menos três figurinhas, e precisamos desconsiderar o pacote que tem apenas uma figurinha com a bandeira da Alemanha e uma do Brasil. A mesma contagem para as outras duplas (Alemanha-Colômbia e Brasil-Colômbia) nos dará, neste caso, o número de pacotes procurado:

$$(5 \cdot 6 - 1) + (5 \cdot 4 - 1) + (6 \cdot 4 - 1) = 29 + 19 + 23 = 71.$$

Somando os valores obtidos nas três contagens parciais, teremos

$$120 + 9 + 71 = 200$$

pacotes distintos.

Questão 5 – 2ªfase – 2016 (adaptada): Fernanda precisa criar uma senha para poder usar o computador da escola. A senha deve ter cinco algarismos distintos de modo que, da esquerda para a direita, o algarismo da 1.ª posição seja maior do que 1, o da 2.ª posição seja maior do que 2, e assim por diante. Por exemplo, 25476 é uma senha possível, mas

52476 não é, pois o algarismo na segunda posição não é maior do que 2. Quantas senhas Fernanda poderá formar?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de senhas que Fernanda poderá formar.

2º) Quais são os dados do problema?

- Fernanda precisa criar uma senha para poder usar o computador da escola.
- A senha deve ter cinco algarismos distintos de modo que, da esquerda para a direita, o algarismo da 1.ª posição seja maior do que 1, o da 2.ª posição seja maior do que 2, e assim por diante.

3º) Qual é a condicionante?

- A senha deve ter cinco algarismos distintos de modo que, da esquerda para a direita, o algarismo da 1.ª posição seja maior do que 1, o da 2.ª posição seja maior do que 2, e assim por diante.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Elaborar um plano:

Inicialmente observar que há apenas 4 possibilidades para a última posição. E assim seguir a análise da direita para à esquerda, verificando as possibilidades para a 4ª posição, 3ª posição, 2ª posição, até chegar na 1ª posição.

7º) Executar o plano:

Observamos primeiramente que há 4 possibilidades de escolha para a 5.ª posição (6, 7, 8 ou 9). Feita uma dessas escolhas, vemos que há somente 4 possibilidades de escolha para a 4ª posição. Feitas as escolhas das duas últimas posições, vemos também que há 4 escolhas para a terceira posição (das possibilidades 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 devemos excluir duas escolhas já feitas). Utilizando-se exatamente o mesmo raciocínio, teremos também 4 escolhas para a segunda posição e 4 escolhas para a primeira posição. Pelo Princípio Multiplicativo, há

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$$

senhas diferentes que Fernanda poderá formar.

8º) Verificação do resultado:

Para verificar se de fato o resultado acima é válido, analisa-se o problema de um outro modo:

Através de uma tabela, lista-se todas as possibilidades de algarismos para cada posição. Vejamos:

Tabela 5 – Possibilidades de algarismos para cada posição.

Posição	Possibilidades de algarismos	Número de possibilidades
5ª posição	6, 7, 8 e 9	4
4ª posição	5, 6, 7, 8 e 9	5 – 1 = 4
3ª posição	4, 5, 6, 7, 8 e 9	6 – 2 = 4
2ª posição	3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9	7 – 3 = 4
1ª posição	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9	8 – 4 = 4

Fonte: Elaborado pela autora dessa dissertação.

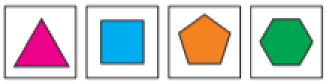
Note que a subtração em cada linha da última coluna é necessária devido ao fato de que a senha deve conter cinco algarismos distintos.

Portanto, pelo princípio multiplicativo da contagem, o número total de senhas que Fernanda poderá formar, satisfazendo as condições do enunciado, é:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024.$$

Questão 2 – 2ª fase – 2014: Rosa tem quatro cartões quadrados e cada um deles apresenta um polígono regular diferente, de 3 a 6 lados, como mostrado na ilustração.

Figura 48 – Cartões quadrados de Rosa.



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2014

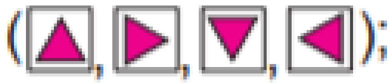
Ela quer colar esses cartões nos quatro espaços disponíveis da primeira página de um álbum (Figura 49).

Figura 49 – Página de um álbum.

Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2014

Dependendo de como ela cola o cartão, as figuras podem ser vistas de maneiras diferentes. Por exemplo, girando o cartão com o triângulo, ele pode ser visto de quatro maneiras diferentes:

Figura 50 – Quatro maneiras diferentes de girar o triângulo.



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2014

Já o quadrado só pode ser visto de uma única maneira.

a) De quantas maneiras diferentes o pentágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?
b) De quantas maneiras diferentes o hexágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?
c) De quantas maneiras diferentes Rosa pode colar os quatro cartões nos quatro espaços da primeira página do álbum?

Solução adaptada:

a) O pentágono pode ser visualizado de 4 maneiras distintas. Basta observar que o pentágono tem apenas um lado paralelo a um dos lados do cartão, logo há 4 lados possíveis para esse lado ficar paralelo a um dos lados do cartão.

b) O hexágono pode ser visualizado de 2 maneiras distintas. Basta observar que o hexágono tem dois lados opostos paralelos aos lados do cartão, logo esses lados podem estar paralelos aos lados de cima e de baixo, ou aos lados direito e esquerdo.

c) Aplicação da metodologia da resolução de problemas de Polya:

1º) Qual é a incógnita?

O número de possibilidades diferentes de Rosa poder colar os quatro cartões nos quatro espaços da primeira página do álbum.

2º) Quais são os dados do problema?

- Rosa tem quatro cartões quadrados e cada um deles apresenta um polígono regular diferente, de 3 a 6 lados;
- Ilustração (dos quatro cartões);
- Ela quer colar esses cartões nos quatro espaços disponíveis da primeira página de um álbum (também tem ilustração);
- Dependendo de como ela cola o cartão, as figuras podem ser vistas de maneiras diferentes;
- Resolução dos itens (a) e item (b) também auxiliam.

3º) Qual é a condicionante?

- Colar os quatro cartões nos quatro espaços da primeira página do álbum de maneiras diferentes.

4º) Representar a ideia com uma figura: apenas utilizar as imagens do enunciado na interpretação.

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Elaborar um plano:

Iniciar analisando as possibilidades para colocar o triângulo, depois o quadrado, o pentágono e o hexágono. Feito isso, aplicar o princípio multiplicativo para obter a resposta final.

7º) Executar o plano:

Pelo princípio multiplicativo, o triângulo pode ser colado em 4 posições e de 4 maneiras distintas ($4 \cdot 4 = 16$ possibilidades). O quadrado terá 3 posições possíveis de uma única maneira. O pentágono terá 2 posições possíveis e pode ser colado de 4 maneiras e o hexágono deverá ser colado na quarta e última posição, de duas maneiras possíveis. Logo, há

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 768$$

maneiras distintas.

8º) Verificação do resultado:

Podemos verificar o resultado da seguinte maneira: começar posicionando as figuras no álbum. Isso pode ser feito de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ maneiras diferentes. Depois, para cada uma das 24 maneiras, podemos modificar a posição das figuras: Triângulo, 4 maneiras; quadrado, 1 maneira; pentágono, 4 maneiras; hexágono, 2 maneiras.

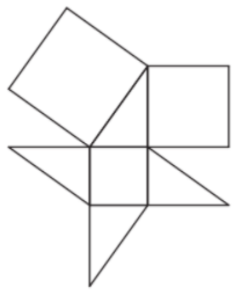
Logo, teremos um total de

$$24 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 = 768$$

configurações diferentes para a primeira página do álbum.

Questão 5 – 2ª fase – 2011 (adaptada): João vai pintar uma figura composta por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor. Determine de quantas maneiras João pode pintar a figura a seguir:

Figura 51 – Composição de quadrados e triângulos.



Fonte: Prova da OBMEP 2011

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de possibilidades para João pintar a Figura 51.

2º) Quais são os dados do problema?

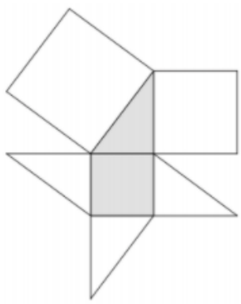
- João vai pintar uma figura composta por quadrados e triângulos;
- Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor;
- Figura 51.

3º) Qual é a condicionante?

- Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 52 - Quadrado e triângulo sombreados.



Fonte: Solução - Prova da 2ª fase - OBMEP 2011

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Elaborar um plano:

Considerando a Figura 52, analisar as possibilidades de pintar os triângulos adjacentes ao quadrado sombreado, quando João escolher azul ou vermelho para pintar esse quadrado. Observar que em metade dessas maneiras o triângulo sombreado é azul ou vermelho e na outra metade ele é amarelo. Feito isso, verificar as possibilidades para pintar os quadrados adjacentes à esse triângulo sombreado.

Em seguida, analisar as possibilidades de pintar os triângulos adjacentes ao quadrado sombreado, caso João escolha verde para esse quadrado.

Por fim utilizar o princípio aditivo para calcular o total de possibilidades.

7º) Executar o plano:

Se João escolher azul ou vermelho para o quadrado sombreado, os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ maneiras diferentes. Como metade dessas maneiras o triângulo sombreado é azul ou vermelho, teremos que os quadrados adjacentes a esse triângulo poderão ser pintados de $2 \cdot 2$ maneiras; e na outra metade ele é amarelo, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $3 \cdot 3$ maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3) = 208$$

maneiras diferentes.

Já no caso em que João escolhe verde para o quadrado sombreado, os triângulos adjacentes poderão ser pintados de $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ maneiras diferentes; em dois terços dessas maneiras o triângulo sombreado é azul ou vermelho, caso em que os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $2 \cdot 2$ maneiras; e no terço restante ele é amarelo, quando os quadrados adjacentes poderão ser pintados de $3 \cdot 3$ maneiras diferentes. Nesse caso, a figura poderá ser pintada de

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 3) = 459$$

maneiras diferentes.

No total, a figura poderá ser pintada de

$$208 + 459 = 667$$

maneiras diferentes.

8º) Verificação do resultado:

Para verificar a validade do resultado encontrado para esse problema, façamos uma outra resolução, através de uma organização em tabela. Aqui podemos contar separadamente as formas de pintar para cada um dos 7 modos de pintar o quadrado central e o triângulo superior.

Tabela 6 – Possibilidades de pintar os triângulos e quadrados.

Quadrado central	**Triângulo de cima**	**Triângulos de baixo**	**Quadrados de cima**	**Possibilidades**
Azul	Vermelho	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
Vermelho	Azul	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
Azul	Amarelo	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$3 \cdot 3$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$
Vermelho	Amarelo	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$3 \cdot 3$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$
Verde	Vermelho	$3 \cdot 3 \cdot 3$	$2 \cdot 2$	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 108$
Verde	Azul	$3 \cdot 3 \cdot 3$	$2 \cdot 2$	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 108$
Verde	Amarelo	$3 \cdot 3 \cdot 3$	$3 \cdot 3$	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

Fonte: Elaboração feita pela autora desse trabalho.

Dessa forma, o total de possibilidades é:

$$32 + 32 + 72 + 72 + 108 + 108 + 243 = 667.$$

Observação: A tabela permite que o estudante perceba com maior clareza cada passo (ou cálculo) mencionado anteriormente e se sinta seguro em relação a veracidade da resposta.

Questão 19 – 1ª fase – 2010: De quantas maneiras é possível escolher três números inteiros de 1 a 19, de modo que o maior e o menor sejam ímpares e o outro seja par?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de maneiras em que é possível escolher três números inteiros de 1 a 19, de modo que o maior e o menor sejam ímpares e o outro seja par.

2º) Quais são os dados do problema?

- Os números que podem ser escolhidos devem ser de 1 a 19.

- Dentre os três números a serem escolhidos, o maior e o menor devem ser ímpares e o outro par.

3º) Qual é a condicionante?

- Escolher três números inteiros de 1 a 19, de modo que o maior e o menor sejam ímpares e o outro seja par.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Elaborar um plano:

Começar analisando pelo número par, e a partir daí ver as possibilidades para os dois números ímpares até obter todas as triplas possíveis. Também poderia se iniciar analisando cada escolha de números ímpares, porém não seria tão imediato como na estratégia sugerida acima.

7º) Executar o plano:

O número central pode ser qualquer dos pares de 2 a 18. Se o número central for 2, há um único ímpar de 1 a 19 menor que ele e 9 ímpares maiores que ele; logo há $1 \cdot 9$ triplas nesse caso. Se o número central for 4, há 2 ímpares menores e 8 ímpares maiores que ele; nesse caso temos então $2 \cdot 8$ triplas. Continuando esse processo, através dos princípios multiplicativo e aditivo, vemos que o número total de triplas é

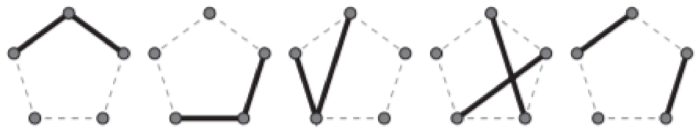
$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 165.$$

8º) Verificação do resultado:

A verificação do resultado é imediata.

Questão 19 – 1ª fase – 2009 (adaptada): Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

Figura 53 – Segmentos de reta e pentágonos.



Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2009

Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de figuras diferentes que podem ser feitas com exatamente dois segmentos de reta unindo os vértices de um pentágono.

2º) Quais são os dados do problema?

- Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono.
- Cinco figuras ilustradas como exemplos.

3º) Qual é a condicionante?

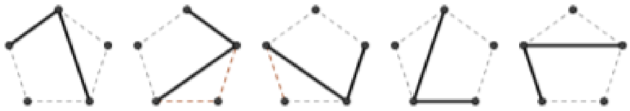
- Utilizar exatamente dois segmentos de reta unindo os vértices do pentágono.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 54 – Nove maneiras diferentes de traçar dois segmentos contendo o vértice superior do pentágono.

Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2009

Figura 55 – Rotação do pentágono.



Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2009

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Elaborar um plano:

Verificar quantas figuras diferentes podem ser feitas contendo o vértice superior do pentágono. E a partir daí concluir que cada uma destas figuras dá origem, através de rotações do pentágono, a outras 4 figuras diferentes.

7º) Executar o plano:

Na Figura 54 mostrou-se as 9 figuras diferentes, formadas por dois segmentos, que contêm o vértice superior do pentágono. Observamos que nenhuma destas figuras pode ser obtida a partir de outra através de rotações do pentágono. Cada uma destas figuras dá origem, através de rotações do pentágono, a outras 4 figuras diferentes, conforme ilustrado na Figura 55. Segue que o número de figuras diferentes que podemos fazer com dois segmentos é

$$9 \cdot 5 = 45.$$

8º) Verificação do resultado:

Uma outra maneira de verificar o resultado é: O pentágono tem 5 lados e 5 diagonais, num total de 10 segmentos. Uma figura consiste de 2 destes segmentos, e escolhas distintas de dois segmentos correspondem a figuras distintas. Assim, há 10 possibilidades de escolha para o primeiro segmento e 9 possibilidades de escolha para o segundo segmento. Ou seja, $10 \cdot 9$ possibilidades de escolher dois segmentos entre lados e diagonais. Porém, haverá repetições, para cada escolha terá uma outra exatamente igual e isso pode ser facilmente mostrado ao estudante, construindo as figuras repetidas. Desse modo, deve-se dividir o total por 2. Segue que o número de figuras distintas é

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Observações:

Essa questão também foi aplicada ao nível 3. Para o nível 3, alunos já com conhecimento de fórmulas da análise combinatória poderiam resolver a abordagem acima da seguinte maneira:

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Numa abordagem em sala de aula é interessante propor aos estudantes que desenhem todas as possibilidades, que realmente se convençam de que foram exploradas todas as situações; inclusive fazer as rotações na prática. Essa é uma ideia para ser trabalhada em situações onde se percebe que é a primeira vez que os alunos resolvem problemas desse tipo. Assim, ficará bem esclarecido e numa próxima vez que o estudante resolver um problema correlato, ele terá mais facilidade no processo de interpretação e resolução.

Questão 20 – 1ª fase – 2008: As peças da Figura I são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro. A Figura III mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da Figura II. De quantas maneiras diferentes é possível fazer isso?

Figura 56 – Peças e Quadrados.

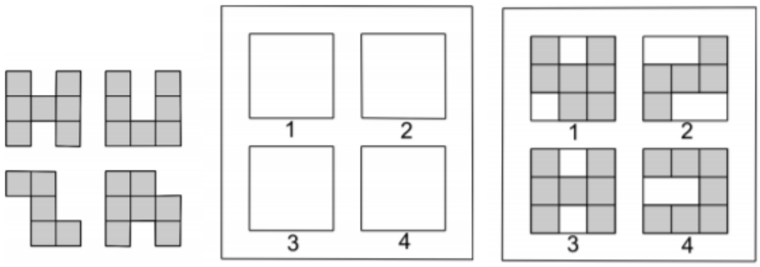


Figura I Figura II Figura III

Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2008

Observação: No enunciado desse problema, a Figura 56 é composta por 3 subfiguras, que serão mencionadas na resolução como Figura I, Figura II e Figura III.

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de maneiras diferentes de encaixar as peças da Figura I com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da Figura II.

2º) Quais são os dados do problema?

- As peças da Figura I são feitas de quadradinhos de cartolina cinza de um lado e branca do outro.
- A Figura III mostra uma maneira de encaixar essas peças com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da Figura II.
- As imagens do enunciado.

3º) Qual é a condicionante

- Encaixar as peças da Figura I com o lado cinza para cima nos quatro quadrados da Figura II.

4º) Representar a ideia com uma figura: utilizar as mesmas do enunciado.

5º) Adotar uma notação adequada:

Vamos denotar as peças, da esquerda para a direita e de cima para baixo, de H, U, Z e R que compõe a Figura I.

6º) Elaborar um plano:

Verificar de quantas maneiras é possível colocar a peça H em um quadrado, a peça U em um quadrado, a peça Z em um quadrado e a peça R em um quadrado. E por fim calcular de quantas maneiras diferentes elas podem ser distribuídas nos quatro quadrados.

7º) Executar o plano:

A peça H só pode ser colocada de duas maneiras diferentes em um quadrado, a peça U de quatro maneiras diferentes, a peça Z de duas maneiras diferentes e a peça R de quatro maneiras diferentes. Uma vez fixada a posição em que as peças vão entrar nos quadrados, elas podem ser distribuídas de

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

maneiras diferentes. Logo o número de maneiras diferentes de colocar as peças nos quadrados é

$$2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 24 = 1536.$$

8º) Verificação do resultado:

A verificação é imediata na resolução acima.

Observação: Sugere-se fazer uso de material concreto, na abordagem dessa questão em sala de aula, para mostrar algumas das possibilidades e evidenciar a importância de que, em alguns exercícios, a quantidade é tão grande que nem sempre é possível escrever todas as possibilidades em pouco tempo.

Questão 16 – 1ª fase – 2007: Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes, azul e rosa, fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de maneiras diferentes que Manuela pode pintar seu quarto de acordo com as exigências do enunciado.

2º) Quais são os dados do problema?

- Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente;

- Ela não quer que as paredes, azul e rosa, fiquem de frente uma para a outra.

3º) Qual é a condicionante?

- Usar as cores azul, rosa, verde e branco, para pintar as quatro paredes, sendo que cada parede deve ser pintada de uma cor diferente;

- As paredes, azul e rosa, não devem ficar de frente uma para a outra.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Elaborar um plano:

Iniciar com a escolha da parede que será pintada de azul; com isso ver as possibilidades para pintar a parede oposta e por fim utilizar as duas cores restantes para a as duas paredes restantes.

7º) Executar o plano:

Manuela pode começar pintando uma das 4 paredes de azul. Depois disso, sobram 2 escolhas de cor para a parede oposta (verde ou branco). Para acabar, ela pode pintar uma das paredes ainda não pintadas com uma das 2 cores não usadas, e então pintar a última parede com a cor que falta. O número de maneiras diferentes é

$$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

8º) Verificação do resultado:

A verificação é imediata.

Questão 3 – 2ª fase – 2005: Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons. Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, além disso são de duas formas: quadrados e redondos. Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada. Quantos botões há na caixinha?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de botões existentes dentro da caixinha.

2º) Quais são os dados do problema?

- Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons.
- Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, além disso são de duas formas: quadrados e redondos.
- Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.

3º) Qual é a condicionante?

- Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: serão utilizadas as letras P, B e M para indicar as cores, as letras minúsculas p, m e g para indicar os tamanhos e as letras q e r para indicar as formas quadrado e redondo.

6º) Elaborar um plano:

Iniciar analisando as possibilidades para tamanho, em seguida as possibilidades para a forma e, por fim, as possibilidades para cor. Do total obtido, considerando que há um botão apenas de cada, deve-se subtrair o número de botões pequenos redondos e o número de botões grandes pretos, condição dada no enunciado.

7º) Executar o plano:

Como são 3 possibilidades para tamanho, 2 possibilidades para a forma e 3 possibilidades para cor, segue que o número de possíveis tipos de botões é

$$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18.$$

Por outro lado, como não há botões pequenos redondos (seriam 3, um para cada cor) nem botões grandes pretos (seriam 2, um para cada forma) e só há um botão de cada tipo. O total de botões na caixinha de Lilavati é

$$18 - (3 + 2) = 13.$$

8º) Verificação do resultado:

Outra solução equivalente, para verificar se de fato o resultado acima é válido, é fazer uma tabela listando todos os tipos possíveis de botões e depois excluir os pequenos redondos e os grandes pretos. No quadro a seguir serão usadas as letras mencionadas em “notação adequada”

:

Quadro 1 - Tipos de botões.

Botão preto (P)	Botão branco (B)	Botão marrom (M)
Ppq – Pmq- **Pgq** **Ppr** – Pmr - **Pgr**	Bpq – Bmq – Bgq **Bpr** – Bmr – Bgr	Mpq – Mmq – Mgq **Mpr** – Mmr - Mgr

Fonte: elaborado pela autora desse trabalho.

Sendo um total de 18 botões. Tendo em vista que devem ser subtraídos os botões pequenos redondos (**Ppr, Bpr** e **Mpr)** e os botões grandes pretos (**Pgq e Pgr),** em negrito na tabela, obtém-se como resultado:

$$18 - 5 = 13$$

botões dentro da caixinha de Lilavati.

4.3 PROBLEMAS E SOLUÇÕES DO NÍVEL 3

Para esta última seção do capítulo 4 serão apresentadas algumas questões da OBMEP aplicadas ao nível 3 (ensino médio) com suas respectivas resoluções adaptadas à metodologia de Polya. No início de cada enunciado, constará o número da questão (original), a fase em que foi aplicada e o ano em que a prova da OBMEP ocorreu.

Questão 16 – 1ª fase – 2019: A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos, pulando de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras. De quantas maneiras diferentes Zinza pode fazer isso?

Figura 57 – Rã Zinza e dez pedras.

Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2019

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de maneiras diferentes que a rã Zinza pode ir da pedra 1 até a pedra 10 seguindo as exigências do enunciado.

2º) Quais são os dados do problema?

- A rã Zinza quer ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos;
- Ela pode pular de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras.

3º) Qual é a condicionante?

- Ir da pedra 1 até a pedra 10 em cinco pulos;
- Esses pulos podem ser de uma pedra para a seguinte ou por cima de uma ou de duas pedras.

4º) Representar a ideia com uma figura: utilizando a figura do enunciado, podemos marcar um espaço (vermelho) quando a rã pula de uma pedra para a outra, dois espaços (em verde) quando a rã pula por cima de uma pedra; e três espaços (azul), quando a rã pula por cima de duas pedras.

Figura 58 – Possíveis pulos da rã Zinza.

Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2006
(com adaptações feitas pela autora desse trabalho)

5º) Adotar uma notação adequada: serão utilizadas as letras x, y e z para indicar o número de saltos que a rã percorre. Ou seja, a letra x para indicar o número de saltos de 1 espaço, a letra y para indicar o número de saltos de 2 espaços e a letra z para indicar o número de saltos de 3 espaços. Também serão utilizadas nessa resolução, as notações pulo A, pulo B e pulo C, para indicar qual tipo de pulo a rã deu, se foi de 1 espaço, 2 espaços ou 3 espaços, conforme mencionado no item 4 (acima) envolvendo a imagem.

6º) Elaborar um plano:

Na ida da pedra 1 até a pedra 10, a rã tem que transpor 9 espaços entre pedras consecutivas. Em cada salto, a rã pode percorrer 1, 2 ou 3 espaços. A partir disso, considerar as incógnitas *x, y* e *z* para representar o número de saltos em que a rã percorre 1, 2 ou 3 espaços, respectivamente, e escrever equações que representem os 5 pulos que a rã deve fazer e os 9 espaços que ela deve percorrer. Ou seja, escrever duas equações:

- a primeira deverá indicar quantos saltos de cada tipo a rã deu, totalizando 5 pulos. (número de pulos A) + (número de pulos B) + (número de pulos C) = 5
- a segunda deverá indicar os espaços percorridos, totalizando 9 espaços.

Assim, será possível encontrar um sistema de equações que nos trará uma condição para encontrar os valores de *x, y* e *z*. Organizar essas informações em uma tabela e calcular as possibilidades.

7º) Executar o plano:

Na ida da pedra 1 até a pedra 10, a rã tem que transpor 9 espaços entre pedras consecutivas. Em cada salto, a rã pode percorrer 1, 2 ou 3 espaços. Se chamarmos de *x, y* e *z* o número de saltos em que a rã percorre 1, 2 ou 3 espaços, respectivamente, temos

- $x + y + z = 5$ (já que a rã dará 5 pulos)
- $x + 2y + 3z = 9$ (já que são 9 espaços a percorrer)

Subtraindo a primeira equação da segunda, encontramos $y + 2z = 4$. A Tabela 9 dá os possíveis valores de *x, y* e *z* e o número de possibilidades em cada caso.

Tabela 7 – Possíveis valores para *x, y* e *z*.

z	*y*	*x*	**Número de possibilidades**
0	4	1	5
1	2	2	30
2	0	3	10

Fonte: Solução da prova da 1ª fase - OBMEP 2006
(com adaptações feitas pela autora desse trabalho)

- Justificativa para o número de possibilidades obtido na linha 1 da tabela 7: a rã dará 4 pulos B (2 espaços), um pulo A (1 espaço) e nenhum do tipo C. O pulo A, em que é percorrido 1 espaço, pode ser qualquer um dos 5 saltos.
- Justificativa para o número de possibilidades obtido na linha 2 da tabela 7: nesse caso, a rã dará 1 pulo C (3 espaços), 2 pulos B (2 espaços) e 2 pulos A (1 espaço).

O salto em que são percorridos 3 espaços pode ser escolhido de 5 modos. Dos 4 saltos restantes, 2 devem percorrer dois espaços; esses saltos podem ser escolhidos de $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ modos. Logo, há 5 · 6 = 30 possibilidades.

- Justificativa para o número de possibilidades obtido na linha 3 da tabela 7: na última possibilidade, satisfazendo a equação y + 2z = 4, a rã dará 2 pulos C (3 espaços), nenhum pulo B (2 espaços) e 3 pulos A (1 espaço). Os dois saltos em que são percorridos 3 espaços podem ser escolhidos de $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ modos. Os demais saltos são de 1 espaço cada. Há 10 possibilidades.

Logo, o número total de possiblidades para os saltos da rã é 5 + 30 + 10 = 45.

8º) Verificação do resultado:

Veja que, para $x = 1,\ y = 4\ e\ z = 0$, é fácil verificar as 5 possibilidades: (1,2,2,2,2), (2,1,2,2,2), (2,2,1,2,2), (2,2,2,1,2) e (2,2,2,2,1).

Para $x = 2,\ y = 2\ e\ z = 1$, que indica dois saltos de 1 espaço cada, dois saltos de 2 espaços cada e um salto de 3 espaços, tem-se: 5 possibilidades para a escolha da ordem do salto de 3 espaços. Pode ser o primeiro (3, __,__,__,__), pode ser o segundo (__, 3 ,__,__,__), pode ser o terceiro (__,__,3__,__), ou o quarto (__, __, __, 3, __) ou o quinto (__, __, __, __, 3) lugar.

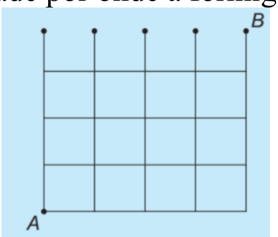
Supondo que o primeiro salto passe por duas pedras, ou seja, o salto de 3 espaços, tem-se as seguintes possibilidades: (3,1,1,2,2), (3,1,2,1,2), (3,1,2,2,1), (3,2,1,1,2), (3,2,1,2,1) e (3,2,2,1,1). Analogamente acontecerá para cada caso: (__, 3 ,__,__,__) onde o salto de 3 espaços seja o segundo, teremos 6 possibilidades; (__,__,3__,__) onde o salto de 3 espaços seja o terceiro, há 6 possibilidades, e assim por diante, veremos que para cada uma das 5 possibilidades de escolher a ordem do passo de 3 espaços, haverá 6 possibilidades diferentes de organizar os demais saltos. Sendo então 5 · 6 = 30 possibilidades.

Para $x = 3, y = 0\ e\ z = 2$, ou seja, nas situações onde são três pulos de 1 espaço cada e dois pulos de 3 espaços cada, tem-se 10 possibilidades no total: (1,1,1,3,3), (1,1,3,1,3), (1,1,3,3,1), (1,3,1,1,3), (1,3,1,3,1), (1,3,3,1,1), (3,1,1,1,3), (3,1,1,3,1), (3,1,3,1,1) e (3,3,1,1,1).

Consideração: Esta é uma questão de análise combinatória, porém não foram aplicadas as fórmulas de combinação. Pois é preciso considerar que esta questão foi aplicada para alunos do ensino médio (do 1º ano ao 3º ano), portanto nem todos conhecem, ainda, essas fórmulas.

Questão 17 – 1ª fase – 2019: Uma formiga caminha pela grade abaixo, podendo se mover apenas para a direita ou para cima. Se tiver duas opções para se mover, ela escolhe uma ao acaso, com probabilidade 1/2. Qual é a probabilidade de que a formiga comece no ponto A e termine no ponto B?

Figura 59 – Grade por onde a formiga irá caminhar.



Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2019

Solução adaptada:

1ª) Qual é a incógnita?

A probabilidade da formiga partir de A e chegar em B.

2ª) Quais são os dados?

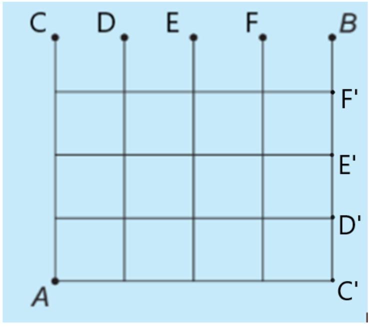
- A formiga pode se mover apenas para a direita ou para cima.
- Se tiver duas opções para se mover, ela escolhe uma ao acaso, com probabilidade ½.
- A grade indicando os possíveis caminhos para a formiga (Figura 59).

3ª) Qual é a condicionante?

- A formiga pode se mover apenas para a direita ou para cima;
- Se tiver duas opções para se mover, ela escolhe uma ao acaso, com probabilidade $\frac{1}{2}$.
- A formiga deve começar seu percurso no ponto A e terminar no ponto B.

4ª) Representar a ideia com uma figura:

Figura 60 – Grade com possíveis caminhos e adaptações.



Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2019
(com adaptações feitas pela autora desse trabalho)

5ª) Adotar uma notação adequada:

Seja **p** a probabilidade de partir de A e chegar em B e seja **q** a probabilidade de a formiga chegar a algum dos pontos nas extremidades superiores C, D, E ou F, indicados na Figura 60. Para facilitar a compreensão da resolução desse problema, vamos denominar por C', D', E' e F' os pontos nas extremidades à direita das linhas horizontais. Conforme indicado na Figura 60.

6ª) Estabelecendo um plano:

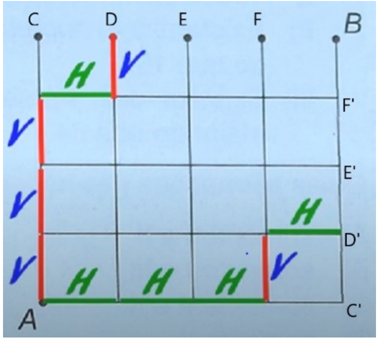
Como ela se move horizontalmente (direita) ou verticalmente (para cima), ela inevitavelmente chegará a um dos pontos C, D, E, F ou B. Assim temos **p** + **q** = 1.

Além disso, qualquer caminho que parte de A até B tem que ser do seguinte tipo: partindo de A chega até um dos pontos C', D', E' ou F' e sobe até B. Isso significa que **p** é a soma das probabilidades de partir de A e chegar a um dos pontos C', D', E' ou F'. Mas cada caminho desse tem um caminho correspondente, com a mesma probabilidade que chega a um dos pontos C, D, E ou F.

7ª) Execução do plano:

Vamos denominar por V cada movimento vertical e por H cada movimento horizontal. Observando a ideia representada na Figura 61, num caminho que parte de A até o ponto D, a formiga percorre o caminho VVVHV, quatro movimentos verticais e um movimento horizontal.

Figura 61 – Movimentos verticais e horizontais.



Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2019

(com adaptações feitas pela autora desse trabalho)

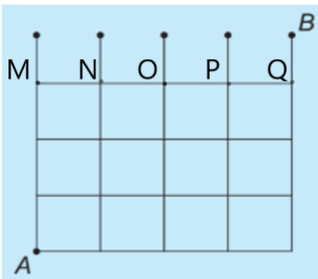
E um caminho partindo de A para Chegar até D’, a formiga percorre o caminho HHHVH (Figura 61). Ou seja, ela fez quatro movimentos horizontais e um vertical. Desse modo, cada caminho desses que parte de A e chega a C, D, E ou F, corresponde um caminho que parte de A e chega até C’, D’, E’ ou F’, obtido pela troca de V por H. Por exemplo, o caminho HHHVH que vai de A até D’ corresponde ao caminho VVVHV vai de A até D. Esses dois caminhos têm a mesma probabilidade.

Portanto, a soma das probabilidades de se partir de A e chegar a C’, D’, E’ ou F’, é **q**. E isso implica que **p** = **q**. Mas, como **p** + **q** = 1, então **p** = $\frac{1}{2}$.

8ª) Verificando o resultado:

De fato, considere os pontos M, N, O, P e Q na figura abaixo:

Figura 62 – Grade com extremidades verticais destacadas.



Fonte: Prova da 1ª fase -OBMEP 2019

(com adaptações feitas pela autora desse trabalho)

Vamos calcular quantos caminhos possíveis a formiga pode percorrer para chegar a cada um dos pontos M, N, O, P ou Q, conforme indica a Figura 62. Pois para chegar a qualquer um dos pontos que ficam nas extremidades das linhas verticais, inevitavelmente a formiga deverá passar por um dos pontos M, N, O, P ou Q.

Assim, considerando cada movimento vertical por V e cada movimento horizontal por H,

- Saindo de A para ir até M, temos uma 1 possibilidade apenas VVV.
- Saindo de A para ir até N, a formiga deverá fazer um movimento horizontal (H) e três movimentos verticais (VVV). Como é possível ver na Figura 62, dos possíveis percursos, há quatro possibilidades diferentes de escolher o movimento horizontal, assim são 4 possibilidades nesse caso: HVVV, VHVV, VVHV e VVVH.
- Saindo de A para ir até O, a formiga deverá fazer 5 movimentos, sendo dois movimentos horizontais e três movimentos verticais. Por exemplo VVVHH é uma possibilidade. Desse modo, considerando que a formiga tem opção de escolher V ou H em cada movimento, ela terá 5 possibilidades de escolha no primeiro movimento (V, V, V, H ou H), feito essa escolha, restarão 4 possibilidades no segundo movimento, 3 possibilidades no terceiro movimento, 2 possibilidades no quarto movimento e apenas uma no último movimento. Portanto, temos

  $$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

  possibilidades para fazer esse percurso. Porém, devemos descontar algumas repetições, já que VVV e HH se repetem no cálculo acima. Ou seja, VVV se repete $3 \cdot 2 \cdot 1$ e HH se repete $2 \cdot 1$. Portanto, devemos dividir o resultado 120 por 6 e por 2, o que nos dá 10 possibilidades.
- Analogamente, usando o mesmo raciocínio, para ir de A até P, a formiga deve fazer 3 movimentos horizontais HHH e três movimentos verticais VVV. Com isso ela pode escolher de

  $$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

  maneiras de fazer esse percurso. Porém há $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ repetições de movimentos VVV e $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ repetições de movimentos HHH. Então devemos descontar, efetuando a divisão de 720 por 6 duas vezes. O que nos dá 20 possibilidades.

- E por fim, para sair de A e chegar até Q, temos quatro movimentos horizontais e três movimentos verticais. Da mesma forma que calculamos nos itens anteriores, considerando as repetições, temos

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(3 \cdot 2 \cdot 1)} = 35$$

possibilidades.

Dessa forma, temos

$$35 + 20 + 10 + 4 + 1 = 70$$

possibilidades para a formiga fazer o percurso e chegar a um dos pontos M, N, O, P ou Q, para então chegar a um dos pontos das extremidades das linhas verticais.

Dessas 70 possibilidades, temos 35 chances favoráveis para ela chegar ao ponto Q que a leva ao ponto B. Portanto, a probabilidade dessa formiga sair do ponto A e chegar ao ponto B é $\frac{35}{70} = \frac{1}{2}$. E isso confirma o raciocínio utilizado na resolução inicial desse problema.

Complemento:

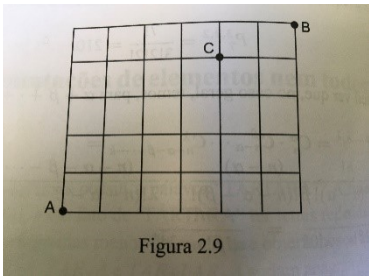
Uma boa maneira de auxiliar os alunos a interpretar um problema, quando se percebe um grau elevado de dificuldade na classe, é apresentando um outro "parecido". Dessa maneira o estudante irá se familiarizar com a linguagem envolvida na questão e o professor, então resolve o problema sugerido.

Aqui apresentamos o seguinte problema:

Problema correlato (livro Análise Combinatória e Probabilidade – SBM)

A Figura 63 representa o mapa de uma cidade, na qual há 7 avenidas na direção norte-sul e 6 avenidas na direção Leste-Oeste.

Figura 63 – Mapa de uma cidade.



Fonte: Página 44 - Livro "Análise Combinatória e Probabilidade" - SBM

a) Quantos são os trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B?

Solução:

Para ir de A até B, deve-se andar para a direita 6 vezes e para a cima 5 vezes. O número de ordens em que isso pode ser feito é $P_{11}^{6,5} = \frac{11!}{6!5!} = 462$.

Como a resolução desse problema irá auxiliar na interpretação da questão da OBMEP anterior (questão 17 – 2019 – nível 3)?

Na compreensão dos caminhos possíveis!

Note que, para aplicar o cálculo de permutação no problema atual, deveríamos tomar cuidado com o detalhe de que os pontos no topo das linhas verticais não são interligados como nessa Figura 63.

Observação: há também um problema correlato na prova da 1ª fase da OBMEP-2008, questão 11 - nível 2.

Questão 3 – 2ª fase – 2019: As amigas Ana, Beatriz, Cláudia e Diana têm uma bola cada uma. Quando toca um sinal, cada menina escolhe, ao acaso, uma de suas três amigas para jogar sua bola.

a) Qual é a probabilidade de que Ana receba três bolas?
b) Qual é a probabilidade de que Ana receba exatamente duas bolas?
c) Qual é a probabilidade de que cada menina receba uma bola?

Solução adaptada: os três itens a) b) e c) serão abordados em cada questão a seguir, de forma única ou separadamente.

1º) Qual é a incógnita?

a) A probabilidade de que Ana receba três bolas;
b) A probabilidade de que Ana receba exatamente duas bolas;
c) A probabilidade de que cada menina receba uma bola.

2º) Quais são os dados do problema?

- As amigas Ana, Beatriz, Cláudia e Diana, têm uma bola cada uma.

- Quando toca um sinal, cada menina escolhe, ao acaso, uma de suas três amigas para jogar sua bola.

3º) Qual é a condicionante?
- Quando toca um sinal, cada menina escolhe, ao acaso, uma de suas três amigas para jogar sua bola.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: para a resolução dos itens a e b não há necessidade. Na resolução da questão do item c, serão utilizadas as notações C_1, C_2, C_3 e C_4 para indicar as quatro meninas de maneira aleatória. Também serão utilizadas as notações $P(A), P(B), P(C)\ e\ P(D)$ para indicar, respectivamente, as probabilidades relacionadas às meninas Ana, Beatriz, Cláudia e Diana.

6º) Elaborar um plano:
a) Para que Ana receba três bolas, todas as outras três amigas devem necessariamente mandar sua bola para ela. E cada garota pode mandar a bola para uma dentre três possíveis pessoas. Assim, verificar a probabilidade de garota mandar sua bola para Ana e como todos esses lançamentos são independentes, isto é, o resultado de um lançamento não afeta o resultado de outro lançamento, calculemos o produto desses três valores obtidos. Ou seja, se $P(B), P(C)\ e\ P(D)$, forem respectivamente as probabilidades de Beatriz, Cláudia e Diana jogarem suas bolas para Ana, então a probabilidade de Ana receber as três bolas é

$$P(B) \cdot P(C) \cdot P(D).$$

b) Baseado em contagem, calcular o número que indica as possibilidades totais de jogar a bola, e em seguida analisar em quantos desses jogos Ana recebe exatamente 2 bolas. Como queremos a probabilidade em que Ana receba exatamente duas bolas, uma boa maneira de fazer essa análise é pensar que só existem 3 possibilidades de isso acontecer:
I) Beatriz e Cláudia jogam suas bolas para Ana; ou
II) Beatriz e Diana jogam suas bolas para Ana; ou
III) Cláudia e Diana jogam suas bolas para Ana.

Dessa maneira, basta calcular as possibilidades em cada um dos casos acima e através do princípio aditivo, teremos o total de possibilidades favoráveis de Ana receber exatamente 2 bolas.
Feito isto, basta calcular a probabilidade que se pede.

c) Inicialmente considerar que existem 3^4= 81 possibilidades do jogo. Em seguida calcular o número de casos favoráveis, ou seja, calcular o número de possibilidades em que cada menina receba uma bola. Para facilitar esse raciocínio, vamos fixar uma das meninas, sem perda de generalidade, para começar o cálculo. Seja C_1 a primeira menina a ser observada. Note que, a primeira menina C_1 tem 3 possibilidades de para quem jogar a bola. Seja C_2 a menina que recebeu a bola de C_1 e observe que C_2 também tem 3 possibilidades para jogar sua bola. Agora, as outras duas meninas, C_3 e C_4, têm apenas uma opção cada, pois se C_2 jogou a sua bola para C_1, necessariamente C_3 deve jogar a bola para C_4 e vice-versa. Na possibilidade de C_2 ter jogado a sua bola para C_3 ou C_4 (digamos C_3), então C_3 terá que necessariamente jogar para C_4 que, por sua vez, devolve para C_1. Com esse raciocínio e através do Princípio Multiplicativo, calcular as possibilidades favoráveis e chegar na probabilidade desejada.

7º) Executar o plano:

a) Para que Ana receba três bolas, todas as outras três amigas devem necessariamente mandar sua bola para ela. Note que cada garota pode mandar a bola para uma dentre três possíveis pessoas. Assim, a probabilidade de que Beatriz mande a bola para Ana é $\frac{1}{3}$. Empregando o mesmo raciocínio, percebemos que a probabilidade de que Cláudia mande a bola para Ana é $\frac{1}{3}$ e de que Diana mande a bola para Ana também é $\frac{1}{3}$. Assim, a probabilidade de Ana receber as três bolas será de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$.

b) Existem 3^4= 81 possibilidades de se jogar a bola, pois cada menina tem 3 possibilidades de escolha para jogar a bola. Como queremos a probabilidade em que Ana receba exatamente duas bolas, o cálculo pode ser feito da seguinte maneira:

Partindo do fato que se uma dessas amigas, por exemplo a Diana na situação (I), descrita no plano acima, é a única que não joga sua bola para Ana, há 6 possibilidades de jogo, pois Diana deve jogar sua bola para Beatriz ou para Cláudia (2 possibilidades), e

Ana pode jogar sua bola para qualquer uma de suas três amigas (três possibilidades). Portanto, temos através do princípio multiplicativo, 6 possibilidades de jogo nesse caso.
No caso II, se Cláudia for a única que não joga sua bola para Ana, há 6 possibilidades de jogo, pois Cláudia deve jogar sua bola para Diana ou Beatriz, e Ana pode jogar sua bola para qualquer uma de suas três amigas.
No caso III, de maneira análoga, também teremos 6 possibilidades, se Beatriz for a única que não joga sua bola para Ana.

Desse modo, através do princípio aditivo, haverá 18 possibilidades de jogos onde Ana recebe exatamente 2 bolas. Logo, a probabilidade de que Ana receba exatamente duas bolas é $\frac{18}{81} = \frac{2}{9}$.

c) Existem 3^4= 81 possibilidades do jogo. Vamos calcular o número de casos favoráveis. Observa-se que a primeira menina C_1 tem 3 possibilidades de para quem jogar a bola. Seja C_2 a menina que recebeu a bola de C_1 e observe que C_2 também tem 3 possibilidades para jogar sua bola. Agora, as outras duas meninas, C_3 e C_4, têm apenas uma opção cada, conforme foi justificado no plano acima, em (c). Pelo princípio multiplicativo, as possibilidades favoráveis são $3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 9$. Logo, a probabilidade de que cada menina receba uma bola é $\frac{9}{81} = \frac{1}{9}$.

8º) Verificação do resultado:

a) Existem 3^4= 81 possibilidades de se jogar a bola, pois cada menina tem 3 possibilidades de escolha para jogar a bola. Ana deve receber as bolas de Beatriz, de Cláudia e de Diana e deve jogar sua bola para uma dessas três amigas, o que nos dá $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3$ possibilidades de Ana receber as três bolas; logo a probabilidade de Ana receber três bolas é $\frac{3}{81} = \frac{1}{27}$.

b) Vamos calcular inicialmente a probabilidade de que Ana receba a bola de Beatriz e Cláudia, mas não receba a bola de Diana. Observe que a probabilidade desse evento é

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

uma vez que Diana não entrega a bola a Ana. Note ainda que também devemos considerar o evento no qual Beatriz é a única que não manda a bola para Ana e o evento no qual Cláudia é a única que não manda a bola para Ana. Estes dois eventos também possuem probabilidade igual a $\frac{2}{27}$ pelo mesmo raciocínio utilizado para encontrarmos a probabilidade do primeiro evento analisado neste item. Assim, a probabilidade de Ana receber exatamente duas bolas é

$$\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}=\frac{2}{9}.$$

c) Sendo C_1, C_2, C_3 e C_4, as notações para indicar as quatro meninas. Considere que C_1, sem perda de generalidade, seja a primeira menina a jogar a bola, digamos para C_2. Dividimos em dois casos que dependem de para quem a segunda pessoa, C_2, joga a bola:
I) de volta para a primeira pessoa (C_1) ou;
II) para outra pessoa (C_3 ou C_4).
A probabilidade do primeiro caso ocorrer é de $\frac{1}{3}$, pois estamos considerando que C_2 jogará a bola de volta para C_1, 1 possibilidade em 3. E, dentro desse caso, a probabilidade de que, ao final, todas as meninas estejam com uma bola é de $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. Pois C_3 terá apenas 1 possibilidade de 3 para jogar a bola, que será C_4 e da mesma forma, C_4 terá apenas 1 possibilidade de 3 para jogar a bola que será C_3.
A probabilidade do segundo caso ocorrer é de $\frac{2}{3}$, pois nessa situação, C_2 poderá jogar a bola para C_3 ou para C_4, 2 possibilidades em 3. E, dentro desse caso, a probabilidade de que ao final todas as meninas estejam com uma bola, também é de $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. Já que, se C_2 jogar para C_3, então C_3 terá apenas 1 possibilidade em 3 para jogar, que será C_4. Analogamente, se C_2 jogar para C_4, obrigatoriamente C_4 deverá jogar para C_3, sendo assim 1 possibilidade de 3.

Portanto, podemos calcular a probabilidade desejada da seguinte maneira:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}.$$

Observações:

I) Na resolução desse problema com os alunos, sugere-se fazer esquemas no quadro, mostrando cada passo. Pode ser feito com bolinhas e traços para indicar cada possibilidade de ocorrência dos casos. Não deve ser desenho pronto, deve ser construído ao fazer cada etapa para auxiliar o raciocínio.

II) É interessante mostrar aos estudantes que existem outras maneiras de calcular probabilidade, oferecendo outros conhecimentos que talvez não apareçam em livros didáticos. Para calcular o número de casos favoráveis no item c) poderíamos ter utilizado a fórmula para o cálculo do número de permutações caóticas (apresentada no capítulo 3, na Subseção 3.3.10.1), nesse caso com 4 elementos. Já que calcular a probabilidade onde cada menina recebe uma bola envolve o conceito de permutações caóticas. Pois cada menina deve jogar sua bola (não pode jogar para si mesma) e cada menina receberá uma bola. Vejamos:

$$D_4 = 4!\left[\frac{1!}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = 24\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 9.$$

Sendo 81 possibilidades totais, já calculado anteriormente, temos então $\frac{9}{81}$ como probabilidade de ocorrer que cada menina receba uma bola.

Questão 19 – 1ª fase – 2018: Tomás tem duas caixas, cada uma com cinco bolas numeradas de 1 a 5. As dez bolas são idênticas, exceto pelo seu número. Ele sorteia uma bola da primeira caixa e a coloca na segunda. Em seguida, ele sorteia duas bolas da segunda caixa. Qual é a probabilidade de que a soma dos números das duas bolas sorteadas da segunda caixa seja igual a 6?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

A probabilidade de que a soma dos números das duas bolas sorteadas da segunda caixa seja igual a 6.

2º) Quais são os dados do problema?

- Tomás tem duas caixas, cada uma com cinco bolas numeradas de 1 a 5.
- As dez bolas são idênticas, exceto pelo seu número.

3º) Qual é a condicionante?

- Ele sorteia uma bola da primeira caixa e a coloca na segunda. Em seguida, sorteia duas bolas da segunda caixa.
- A soma dos números das duas bolas sorteadas da segunda caixa seja igual a 6.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada:

Usaremos a notação 3a e 3b para indicar as bolas de número 3, no caso em que a bola de número 3 seja transferida da primeira caixa para a segunda caixa. Analogamente para 1a e 1b, no caso em que a bola transferida seja a de número 1. E assim também será feito para as outras bolas: 2a e 2b, 4a e 4b, 5a e 5b.

6º) Elaborar um plano:

Primeiramente calcular o número de casos possíveis, considerando que há 5 possibilidades de escolher a bola que será transferida para a segunda caixa, e com isso terão 6 bolas na segunda caixa para fazer a primeira retirada e restarão 5 para fazer a segunda retirada.

Em seguida, analisar dois casos:

I) supor que a bola transferida seja a de número 3.
II) supor que a bola transferida seja a de número 1, 2, 4 ou 5.

Com essa análise será possível calcular todos os casos favoráveis.

7º) Executar o plano:

Há 5 possibilidades para uma bola ser transferida para a segunda caixa. A seguir, a primeira bola da segunda caixa pode ser escolhida de 6 modos e a segunda, de 5. Há, portanto, $5 \cdot 6 \cdot 5 = 150$ casos possíveis. Vamos contar os casos favoráveis separando-os em duas situações:

a) A bola transferida para a segunda caixa é a de número 3. A segunda caixa passa a contar com 6 bolas, sendo duas com o número 3, que vamos representar por 3a e 3b. A soma 6 pode ocorrer retirando duas bolas iguais a 3 (há duas possibilidades para a ordem: 3a depois de 3b ou 3b depois de 3a) ou retirando as bolas 1 e 5, em qualquer ordem (duas possibilidades) ou retirando as bolas 2 e 4 em qualquer ordem (duas possiblidades). Há, portanto, 6 casos favoráveis nesta situação.

b) A bola transferida é uma das bolas 1, 2, 4 ou 5. Consideremos, por exemplo, o caso em que a bola transferida é a bola 1 (a situação é a mesma com as demais). A segunda caixa tem 6 bolas, sendo duas com o número 1, que representaremos por 1a e 1b. A soma 6 pode ser formada retirando bolas 1 e 5 ou bolas 2 e 4 (note que não é possível tirar duas bolas 3). No primeiro caso, há 4 possibilidades, a saber: (1a depois de 5), (1b depois de 5), (5 depois de 1a) ou (5 depois de 1b); no segundo há 2 possibilidades (2 depois de 4) ou (2 depois de 3). Temos, então, 6 casos favoráveis quando a bola transferida é a 1. O mesmo ocorre quando a bola transferida é 2, 4 ou 5. Há, portanto, 4 · 6 = 24 casos favoráveis nesta situação.

Assim, o número total de casos favoráveis é 6 + 24 = 30 e a probabilidade de se obter soma 6 é $\frac{30}{150} = \frac{1}{5}$.

8º) Verificação do resultado:

Vamos considerar todas as somas possíveis dos números nas bolas da segunda caixa depois de feita a transferência; entretanto, agora, não estaremos interessados na ordem em que as bolas são sorteadas (a escolha de uma bola a depois de uma bola b será considerada a mesma que o da bola b depois da a), lembrando que a soma é comutativa. Assim, o número de casos possíveis é

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

O evento desejado é que as duas bolas sorteadas tenham soma 6. Independentemente de qual foi a bola transferida, sempre haverá 3 escolhas de duas bolas favoráveis ao evento desejado. Por exemplo:

i) se a bola transferida for a de número 3, teremos os pares favoráveis: {1,5}, {2,4} e {3,3};

ii) se a bola sorteada for a de número 1, teremos os pares favoráveis: {1,5}, outro par {1,5} e {2,4} (lembre-se: há, nesse caso, duas bolas com o número 1 na segunda caixa). Logo, o número de casos favoráveis é 3.

Assim, a probabilidade pedida é

$$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Questão 5 – 2ª fase – 2018: Em uma caixa há 6 barbantes idênticos. Em cada etapa, duas extremidades de barbantes são escolhidas ao acaso e amarradas com um nó. O processo é repetido até que não haja mais extremidades livres. Qual é a probabilidade de que, ao final do processo, os barbantes estejam todos amarrados em um único laço?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?
A probabilidade de que, ao final do processo, os barbantes estejam todos amarrados em um único laço.

2º) Quais são os dados do problema?
- Em uma caixa há 6 barbantes idênticos.
- Em cada etapa, duas extremidades de barbantes são escolhidas ao acaso e amarradas com um nó.
- O processo é repetido até que não haja mais extremidades livres.

3º) Qual é a condicionante?
- Em cada etapa, duas extremidades de barbantes são escolhidas ao acaso e amarradas com um nó; ao final do processo, os barbantes estejam todos amarrados em um único laço.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 64 – Caixa com barbantes.

Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2018

Para facilitar a compreensão do problema e sua resolução, sugere-se que se façam esquemas com bolinhas, traços e alguns arcos para representar pontas, barbantes e nós, respectivamente. Mas essas representações ilustrativas devem ser feitas passo a passo, de acordo com cada possibilidade explorada. Não se trata de uma figura pronta a ser apresentada. Uma ideia como essa será apresentada na Figura 65.

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Elaborar um plano:

Começar respondendo algumas questões:

a) Quantos nós serão feitos até o final do processo?
b) Qual é a probabilidade de que, na primeira etapa, sejam amarradas as duas pontas de um mesmo barbante?
c) Qual é a probabilidade de que, na última etapa, sejam amarradas as duas pontas de um dos barbantes originais?

7º) Executar o plano:

a) No início do processo há 12 pontas livres. Cada vez que um nó é dado, duas dessas pontas são amarradas, reduzindo em duas unidades o número de pontas livres. Portanto, são dados exatamente seis nós.

b) Uma vez escolhida a primeira ponta a ser amarrada, restam 11 possibilidades para a escolha da segunda ponta. Apenas uma dessas pontas faz com que seja formado um laço. Logo a probabilidade de formar um laço no primeiro nó é $\frac{1}{11}$. Alternativamente, temos 12 x 11 modos de escolher as duas pontas a serem amarradas e 12 maneiras de fazer essa escolha de modo a formar um laço (o barbante pode ser escolhido de 6 modos e há 2 possibilidades para a ordem em que as pontas são escolhidas). Logo, a probabilidade de formar um laço é

$$\frac{12}{12 \cdot 11} = \frac{1}{11}.$$

c) Escolhendo uma ponta a ser amarrada de cada vez, o número de possibilidades para a feitura dos nós é $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$. Para calcular o número de casos favoráveis, observamos que:

- O barbante a ser amarrado no último passo pode ser escolhido de 6 modos.
- Há 2 possibilidades para a ordem em que essas pontas são escolhidas.

• Nos 5 nós anteriores as 10 pontas restantes podem ser escolhidas arbitrariamente; ou seja, há $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ possibilidades de escolhas para os 5 primeiros nós. Logo, o número de casos favoráveis é $6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ e a probabilidade de que sejam amarradas as duas pontas de um dos barbantes originais é

$$\frac{6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{11}.$$

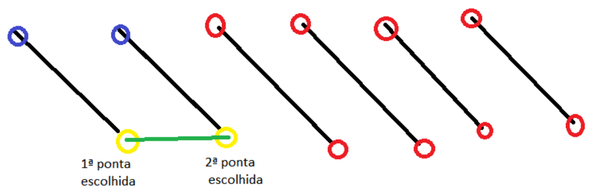
Agora, com base no desenvolvimento das questões sugeridas nos itens a, b e c, vamos responder a questão do enunciado.

Sabemos que o número total de possibilidades para a escolha das pontas para fazer os nós é $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Para calcular o número de casos favoráveis, devemos observar que é formado um único laço se e só se não é formado nenhum laço em qualquer das etapas anteriores. Assim:

• A primeira ponta do primeiro nó pode ser qualquer uma das 12 possíveis. Já a segunda ponta não poderá ser a outra ponta do mesmo barbante; há, portanto, 10 possibilidades.

• A primeira ponta do segundo nó pode ser qualquer uma das 10 pontas disponíveis nesta etapa. A segunda ponta do segundo nó não pode ser a outra ponta do mesmo barbante (não importa se o barbante é um dos originais ou o que foi formado na etapa anterior); Note que, as pontas livres dos barbantes utilizados no primeiro nó, não poderão formar um nó entre elas mesmas, senão teríamos um laço com dois barbantes. Por isso, se usarmos uma das pontas livres dos barbantes utilizados no primeiro nó, só poderão ser escolhidas pontas dos outros quatros barbantes para amarrar com esta. Sendo assim, há, portanto, 8 possibilidades. Veja a imagem abaixo:

Figura 65 - O primeiro nó.



Fonte: elaborada pela autora desse trabalho.

Nessa imagem, representou-se os barbantes através de traços pretos, e de amarelo as duas primeiras pontas escolhidas para dar o primeiro nó (traço verde); representou-se de azul as pontas desses dois barbantes utilizados no primeiro nó e de vermelho as 8 pontas dos quatro barbantes que ainda não foram utilizados. Aqui fica mais claro perceber que não é possível amarrar as duas pontas indicadas em azul, pois senão já faria um laço. Desse modo percebe-se que existem 10 possibilidades (bolinhas azuis e vermelhas) para escolher a 3ª ponta para fazer o segundo nó. E somente 8 possibilidades para a escolha da 4ª ponta para esse segundo nó. Pois, se a primeira ponta do segundo nó for uma das marcadas em azul, a segunda ponta para esse segundo nó só poderá ser uma das vermelhas, 8 possibilidades. Ou se, a primeira ponta do segundo nó for uma das pontas indicadas em vermelho, a segunda ponta para esse segundo nó não poderá ser a outra extremidade desse barbante, e assim restarão 8 possibilidades (6 "vermelhas" e 2 "azuis").

De maneira análoga, é possível representar cada etapa como a imagem acima, para facilitar a compreensão.

• Repetindo o mesmo raciocínio para os demais nós, concluímos que o número de casos favoráveis é $12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$.

Logo, a probabilidade de que seja formado um único laço é

$$\frac{12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{256}{693}.$$

8º) Verificação do resultado:

Como visto acima, é formado um único laço se e só se nenhum laço é formado nos cinco primeiros nós. A probabilidade de que não seja formado laço em nenhum dos cinco primeiros nós é:

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5.$$

Onde $P_1, P_2, P_3, P_4\ e\ P_5$ representam as seguintes probabilidades:

$P_1 = P$(não laço no 1º),

$P_2 = P$ (não laço no 2º | não laço no 1º),

$P_3 = P$(não laço no 3º | não laço no 1º e no 2º),

$P_4 = P$(não laço no 4º | não laço no 1º, no 2º e no 3º),

$P_5 = P$(não laço no 5º | não laço no 1º, no 2º, no 3º e no 4º).

A probabilidade de que não seja formado um laço no primeiro passo é $\frac{10}{11}$ (uma vez escolhida a primeira ponta entre as 12 disponíveis, a segunda pode ser qualquer uma das 11 restantes exceto a outra ponta do mesmo barbante). Ou seja:

$$\frac{Possibilidades\ de\ não\ fazer\ laço\ no\ 1^{\underline{o}}\ nó}{Possibilidades\ totais} = \frac{12 \cdot 10}{12 \cdot 11} = \frac{10}{11}.$$

Dado que não foi formado um laço no primeiro nó, a probabilidade condicional de não ser formado um laço no segundo nó é 8/9. Pois, o número de possibilidades de escolher a 1ª ponta do segundo nó é 10 e tem-se 9 possibilidades para escolher a segunda ponta para esse segundo nó, totalizando $10 \cdot 9$ possibilidades de escolha. Dessas escolhas tem-se como possibilidades favoráveis, $10 \cdot 8$, pois são 10 possibilidades de escolha para a primeira ponta do segundo nó e apenas 8 possibilidades de escolha para a segunda ponta, já que não poderão ser utilizadas pontas de barbantes já utilizados no primeiro nó para essa segunda ponta. Logo, a probabilidade condicional de não ser formado um laço no segundo nó é:

$$\frac{10 \cdot 8}{10 \cdot 9} = \frac{8}{9}.$$

Repetindo o raciocínio para os demais nós, concluímos que as probabilidades condicionais subsequentes são iguais a $\frac{6}{7}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3},$ e a probabilidade de que nenhum laço seja formado nos primeiros cinco nós (o que é equivalente a formar um único laço no final) é:

$$\frac{10}{11} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{256}{693}.$$

Questão 19 – 1ªfase – 2017: Uma caixa contém nove bolas idênticas numeradas de 1 a 9. Uma primeira bola é sorteada, seu número é anotado e a bola é devolvida à caixa. Repete-se esse procedimento mais duas vezes, anotando-se também os números da segunda e terceira bolas sorteadas. Qual é a probabilidade de que a soma dos números nas duas primeiras bolas sorteadas não seja um múltiplo de 3 e a soma dos números nas três bolas sorteadas seja um múltiplo de 3?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

Temos aqui duas incógnitas:

Primeira: a probabilidade de que a soma dos números nas duas primeiras bolas sorteadas não seja um múltiplo de 3;

Segunda: a probabilidade de que a soma dos números nas três bolas sorteadas seja um múltiplo de 3.

2º) Quais são os dados do problema?

- Uma caixa contém nove bolas idênticas numeradas de 1 a 9.
- Uma primeira bola é sorteada, seu número é anotado e a bola é devolvida à caixa.
- Repete-se esse procedimento mais duas vezes, anotando-se também os números da segunda e terceira bolas sorteadas.

3º) Qual é a condicionante?

- Após o sorteio, as bolas são devolvidas à caixa.
- Para a primeira incógnita: a soma dos números nas duas primeiras bolas sorteadas não seja um múltiplo de 3;
- Para a segunda incógnita: a soma dos números nas três bolas sorteadas seja um múltiplo de 3.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: representar as três bolas sorteadas através das trincas (**a**, **b**, **c**) com **a**, **b** e **c** variando de 1 a 9.

6º) Elaborar um plano:

Primeiramente deve-se calcular o espaço amostral. Também é necessário considerar que um número natural pode ser múltiplo de 3 ou não, sendo que, caso não seja múltiplo de 3 deverá apresentar resto 1 ou 2 na divisão por 3. A partir daí, aplicar as seguintes estratégias:

Estratégia para encontrar o valor da primeira incógnita: verificar as possibilidades para **a** e **b**, respectivamente as bolas sorteadas na primeira e na segunda retiradas. Lembrando que não queremos que a soma de **a** e **b** seja um múltiplo de 3. Para isso, após fazer a escolha da bola **a**, deve-se estar atento que **b** não pode ser qualquer bola.

Vejamos: se **a** = 6, **b** não poderá ser 3, 6 ou 9.

Estratégia para encontrar o valor da segunda incógnita: analogamente ao que foi feito antes, usaremos para calcular as possibilidades para **c**, levando em conta que agora se quer um múltiplo de 3 na soma de **a**, **b** e **c**. Como a soma de **a** e **b** deve ser um número natural não múltiplo de 3 (que apresenta resto 1 ou 2) na divisão por 3, deve-se considerar que **c** também deverá ser um número que apresenta resto 1 ou 2 na divisão por 3. Por exemplo: se **a** = 5 e **b** = 3, temos **a** + **b** = 8. O número 8 deixa resto 2 na divisão por 3, assim **c** deverá ser 1, 4 ou 7 (números que deixam resto 1 na divisão por 3) para que a soma de **a**, **b** e **c** seja um múltiplo de 3. Aqui foi usado o fato de que a soma de um número que deixa resto 2 na divisão por 3 com um número que deixa resto 1 na divisão por 3, será um múltiplo de 3. Esse argumento tem por base o "Teorema da Divisão Euclidiana", o qual está disponível em *Aritmética* coleção PROFMAT (HEFEZ, 2016, p. 46).

Desse modo, com essas estratégias sugeridas acima, ficará mais fácil encontrar os casos favoráveis e assim calcular a probabilidade que se pede.

7º) Executar o plano:

O espaço amostral desse experimento é formado pelas trincas **(a, b, c)** com **a, b** e **c** variando de 1 a 9, ou seja, $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ trincas equiprováveis. Observe que um número natural pode ser múltiplo de 3 ou apresentar resto 1 ou 2 na divisão por 3.

Por exemplo, 4 não é múltiplo de 3 e apresenta resto 1 na divisão por 3. O número 5 também não é múltiplo de 3 e apresenta resto 2 na divisão por 3.

Vejamos que **a** pode ser escolhido de 9 maneiras.

Para a escolha de **b** devemos analisar três casos:

I) **a** é um múltiplo de 3 (3,6 ou 9). Nesse caso, **b** não poderá ser um múltiplo de 3, pois senão a soma de **a** e **b** seria um múltiplo de 3. Logo **b** deve ser 1,2,4,5,7 ou 8, ou seja, 6 possibilidades para a escolha de **b**.

II) **a** não é múltiplo de 3 e deixa resto 1 na divisão por 3 (1,4 ou 7): nesse caso, **b** só não poderá ser um número que deixa resto 2 na divisão por 3, para que não ocorra a soma de **a** e **b** ser um múltiplo de 3. Assim **b** poderá ser 1, 3, 4, 6, 7 ou 9, também 6 possibilidades para a escolha de **b**.

III) **a** não é múltiplo de 3 e deixa resto 2 na divisão por 3 (2, 5 ou 8). Analogamente ao que foi feito no caso anterior, terão 6 possibilidades para a escolha de **b**.

Assim, **b** pode assumir 6 valores, para qualquer que seja a escolha de **a**.
Para a escolha de **c**, utilizamos o mesmo argumento, só que agora queremos que assuma um dos três valores que tornem o resultado da soma **a** + **b** + **c** um múltiplo de 3. Vamos analisar isso também em dois casos, já que **a** + **b** não é um múltiplo de 3:
I) Se **a** + **b** deixa resto 1 na divisão por 3: a escolha de **c** deverá ser 2, 5 ou 8 para que a soma **a** + **b** + **c** seja um múltiplo de 3. Ou seja, apenas 3 possibilidades para a escolha de **c**.
II) Se **a** + **b** deixa resto 2 na divisão por 3: a escolha de **c** deverá ser 1, 4 ou 7 para que a soma **a** + **b** + **c** seja um múltiplo de 3. Também 3 possibilidades para a escolha de **c**.

Então, **c** pode assumir 3 valores, para qualquer que seja o resultado de **a** + **b**.

Portanto, o número de casos favoráveis satisfazendo o enunciado é $9 \cdot 6 \cdot 3 = 162$, e a probabilidade é

$$\frac{162}{729} = \frac{2}{9}.$$

8º) Verificação do resultado:

Uma maneira de conferir o resultado seria fazendo o estudo dos casos que não satisfazem as condições do enunciado. Serão utilizados os mesmos argumentos abordados anteriormente, no que se refere a números múltiplos de 3 e restos possíveis na divisão de um número natural por 3. Ou seja, para não satisfazer as condições exigidas, devemos ter:

I) **a** + **b** múltiplo de 3. Nesse caso, podemos ter **a** + **b** + **c** múltiplo de 3 ou **a** + **b** + **c** não múltiplo de 3. Para que **a** + **b** seja múltiplo de 3, temos $9 \cdot 3$ possibilidades. Daí, teremos $9 \cdot 3 \cdot 3$ para obter **a** + **b** + **c** múltiplo de 3; E $9 \cdot 3 \cdot 6$ para obter **a** + **b** + **c** não múltiplo de 3. Ou seja 81 + 162 possibilidades nesse caso.

II) **a** + **b** não múltiplo de 3 e **a** + **b** + **c** não múltiplo de 3: para ter **a** + **b** não múltiplo de 3, teremos 9 possibilidades para a escolha de a e 6 possibilidades para a escolha de **b**.
E para obter **a** + **b** + **c** não múltiplo de 3, dado que **a** + **b** não é múltiplo de 3, teremos 6 possibilidades para a escolha de **c**. Portanto 9 x 6 x 6 possibilidades, ou seja, 324 casos favoráveis aqui.

Logo, temos

$$\frac{81 + 162}{729} + \frac{324}{729} = \frac{567}{729} = \frac{7}{9}.$$

Como a probabilidade total é 1, temos que $1 - \frac{7}{9}$ nos dá os casos que satisfazem o enunciado. Daí, chegamos a $\frac{2}{9}$.

Questão 6 – 2ª fase – 2016 (adaptada): Seis bolas idênticas foram numeradas de 1 a 6 e colocadas em uma caixa. Joaquim retira, uma a uma, quatro bolas da caixa e observa seus números, sem recolocá-las na caixa. Qual é a probabilidade de que o menor número observado saia na primeira bola retirada e o maior, na última bola?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

A probabilidade de que o menor número observado saia na primeira bola retirada e o maior, na última bola.

2º) Quais são os dados do problema?

- Seis bolas idênticas foram numeradas de 1 a 6 e colocadas em uma caixa.
- Joaquim retira, uma a uma, quatro bolas da caixa e observa seus números, sem recolocá-las na caixa.

3º) Qual é a condicionante?

- Joaquim retira, uma a uma, quatro bolas da caixa e observa seus números, sem recolocá-las na caixa.
- O menor número observado saia na primeira bola retirada e o maior, na última bola.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: para indicar a ordem de retirada das bolas, será utilizado na tabela 10 a indicação de algarismos entre parênteses. Exemplo: (1345) indica que na primeira retirada saiu a bola de número 1, na segunda retirada a bola de número 3, na terceira retirada a bola de número 4 e na quarta retirada a bola de número 5.

6º) Elaborar um plano:

Calcular primeiramente o número de possibilidades totais de retiradas. Em seguida, construir uma tabela com todas as possibilidades favoráveis de obter o menor número observado já na primeira retirada e o maior na última. Ou seja, verificar as possibilidades quando 1 for o menor número e 4 o maior; se 1 for o menor número e 5 o maior; se 1 for o menor e 6 o maior; se 2 é o menor e 5 o maior; se 2 é o menor e 6 é o maior; se 3 é o menor e 6 é o maior. Com isso calcular a probabilidade desejada.

7º) Executar o plano:

O número de retiradas possíveis é $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. As possibilidades para o menor e o maior número retirado e o número de retiradas em que eles ocorrem na primeira e última posição, respectivamente, são listados na tabela a seguir:

Tabela 8 – Possibilidades para retiradas de algarismo.

Menor número	Maior número	Número de retiradas	Possibilidades em cada caso
1	4	$2\times 1 = 2$	(1234) e (1324).
1	5	$3 \times 2 = 6$	(1235), (1325), (1245), (1425), (1345) e (1435).
1	6	$4 \times 3 = 12$	(1236), (1326), (1246), (1426), (1256), (1526), (1346), (1436), (1356), (1536), (1456) e (1546).
2	5	$2 \times 1 = 2$	(2345) e (2435)
2	6	$3 \times 2 = 6$	(2346), (2436), (2356), (2536) (2456) e (2546)
3	6	2	(3456) e (3546)

Fonte: elaborada pela autora.

Logo, a probabilidade de que o menor número saia na primeira posição e o maior na última é

$$\frac{2+6+12+2+6+2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{30}{360} = \frac{1}{12}.$$

8º) Verificação do resultado:

Quaisquer que tenham sido as 4 bolas retiradas, as diversas ordenações dos números das bolas têm todas a mesma chance de ocorrer. O número de ordenações possíveis é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. As ordenações em que o menor número aparece na primeira posição e o maior na última são apenas duas (correspondentes às duas possíveis ordenações dos números do meio). Logo, a probabilidade de que o menor número saia na primeira posição e o maior na última é:

$$\frac{2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{12}.$$

Questão 6 – 2ªfase – 2014: Cada uma das cem pessoas de uma fila escolhe, ao acaso, um número de 1 a 20 e o escreve em um papel, mantendo esse número em segredo. Depois que todos escreveram, o primeiro da fila anuncia o seu número. Em seguida, o segundo da fila faz o mesmo, e assim sucessivamente. A primeira pessoa que anunciar um número igual a um número já anunciado ganha um prêmio.

a) O primeiro da fila não tem chance de ganhar o prêmio. Qual é a posição da próxima pessoa da fila que também não tem chance alguma de ganhar o prêmio?
b) Qual é a probabilidade de que o terceiro da fila ganhe o prêmio?
c) Quem tem maior probabilidade de ganhar o prêmio: o sétimo da fila ou o oitavo? Justifique.
d) Em que posição ou posições da fila é maior a probabilidade de ganhar o prêmio? Justifique.

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

Nesse caso, como são 4 itens com questões diferentes, temos 4 incógnitas diferentes:

a) a posição da próxima pessoa da fila, que não seja a primeira, que também não tem chance alguma de ganhar o prêmio;
b) a probabilidade de que o terceiro da fila ganhe o prêmio;
c) quem tem maior probabilidade de ganhar o prêmio: o sétimo da fila ou o oitavo;
d) a posição ou as posições da fila em que é maior a probabilidade de ganhar o prêmio.

2º) Quais são os dados do problema?

- Cada uma das cem pessoas de uma fila escolhe, ao acaso, um número de 1 a 20 e o escreve em um papel, mantendo esse número em segredo.
- Depois que todos escreveram, o primeiro da fila anuncia o seu número.
- Em seguida, o segundo da fila faz o mesmo, e assim sucessivamente.
- A primeira pessoa que anunciar um número igual a um número já anunciado ganha um prêmio.

3º) Qual é a condicionante?

- A primeira pessoa que anunciar um número igual a um número já anunciado ganha um prêmio.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: nessa resolução serão utilizados números ordinários para indicar a posição de uma pessoa na fila. Por exemplo: 21º da fila, 22º, e assim por diante. Na resolução do item c) serão utilizadas as notações P_7 e P_8 para indicar as probabilidades das pessoas que estão nas posições 7ª e 8ª da fila, de ganhar o prêmio.

No item d) também serão utilizadas notações para probabilidades:

P_n: indica a probabilidade da n-ésima pessoa da fila a ganhar o prêmio;

P_{n+1}: indica a probabilidade da pessoa que está na posição $n+1$ da fila a ganhar o prêmio.

E analogamente, serão utilizadas as notações $P_2, P_3, \dots, P_{21}$ para indicar as respectivas probabilidades da segunda, terceira, ..., vigésima primeira pessoa da fila a ganhar o prêmio.

6º) Elaborar um plano:

No item (a) utilizar o Princípio da Casa dos Pombos. No item (b) deve-se primeiramente calcular os casos possíveis de escolher números para as três primeiras pessoas da fila e, em seguida calcular os casos favoráveis, considerando que a segunda pessoa não pode escolher o mesmo número da primeira da fila e a terceira irá repetir o número da primeira ou da segunda da fila. Para o item (c), calcular a probabilidade do sétimo da fila ganhar o prêmio (P_7) e do 8º da fila de ganhar o prêmio (P_8). Com isso, calcular $\frac{P_7}{P_8}$, e então se quociente for menor do que 1 teremos que $P_7 < P_8$, caso contrário, teremos $P_8 < P_7$.

No item d), faz-se de forma análoga ao que foi feito no item c), calcula-se $\frac{P_{n+1}}{P_n}$. Em seguida, analisar a partir de qual n, maior do que 1, P_{n+1} fica menor que P_n e quando $P_{n+1} = P_n$. Com isso, será possível descobrir a posição ou as posições da fila em que é maior a probabilidade de ganhar o prêmio.

7º) Executar o plano:

a) O 22º da fila, pois até o 21º da fila teremos 21 cartões para 20 números. Na pior das hipóteses, considerando que cada uma das 20 primeiras pessoas da fila peguem, todas, números diferentes, o 21º terá que pegar um número repetido, e então o 22º com certeza já não será mais o primeiro a ter um cartão com número repetido. E então podemos afirmar, pelo Princípio das Casas de Pombos, que haverá pelo menos dois cartões com o mesmo número, ou seja, o prêmio já terá saído.

b) O total de casos possíveis de escolha de números para as três primeiras pessoas da fila é dado por $20 \cdot 20 \cdot 20$. Para calcular o número de casos favoráveis devemos considerar: para que o terceiro ganhe, o segundo deve ter um número diferente do primeiro e o terceiro ter um número igual a um dos cartões dos dois primeiros. O primeiro terá 20 possibilidades diferentes de pegar um número. Como não queremos que o segundo tenha o mesmo número do primeiro da fila, então para ele será considerado 19 possibilidades diferentes. Então como queremos que o terceiro da fila ganhe o prêmio, ele deverá ter o mesmo número do primeiro ou do segundo, ou seja, 2 possibilidades. Logo o número de casos favoráveis é dado por $20 \cdot 19 \cdot 2$.

Portanto, a probabilidade de que o terceiro da fila ganhe o prêmio é:

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 2}{20 \cdot 20 \cdot 20} = \frac{19}{200} = 9{,}5\%.$$

c) Vamos calcular as probabilidades para a 7ª pessoa ganhar o prêmio (P_7) e para a 8ª pessoa ganhar o prêmio (P_8). O número de casos possíveis para a escolha de números de 1 a 20, até a sétima pessoa da fila é dado por $20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20$. E o número de casos favoráveis para que a sétima pessoa da fila ganhe o prêmio é $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 6$, pois até a sexta pessoa da fila ninguém poderá repetir números e a sétima deverá repetir um dos 6 números escolhidos pelas pessoas que estão nas posições à sua frente.O número de casos possíveis para a escolha de números de 1 a 20, até a oitava pessoa da fila, é dado por $20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20$. E o número de casos favoráveis para que a oitava pessoa da fila ganhe o prêmio é $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 7$, pois até a sétima pessoa da fila ninguém poderá repetir números e a oitava deverá repetir um dos 7 números escolhidos pelas pessoas que estão nas posições à sua frente.

Desse modo,

$$\frac{P_7}{P_8} = \frac{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 6}{20^7}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 7}{20^8}} = \frac{6 \cdot 20}{14 \cdot 7} = \frac{120}{98} > 1.$$

Logo, $P_7 > P_8$, ou seja, a sétima pessoa da fila tem maior probabilidade de ganhar o prêmio.

d) Vamos calcular a fração $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, $n \in N$.

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cdots \cdot [20-(n-2)] \cdot [20-(n-1)] \cdot n}{20^{n+1}}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cdots \cdot [20-(n-3)] \cdot [20-(n-2)] \cdot (n-1)}{20^n}} =$$

$$= \frac{\frac{(21-n) \cdot n}{20}}{\frac{(n-1)}{1}} = \frac{21n - n^2}{20n - 20}.$$

Vamos analisar agora a partir de qual n, maior do que 1, P_{n+1} fica menor que P_n, ou seja, $\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1$.

$$\frac{21n-n^2}{20n-20} < 1 \Leftrightarrow 21n - n^2 < 20n - 20 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 > 0 \Leftrightarrow n > 5 \Leftrightarrow n \geq 6.$$

Logo, $P_6 > P_7 > P_8 > \cdots > P_{21}$. Analogamente, $P_{n+1} = P_n$ quando

$$n^2 - n - 20 = 0,$$

ou seja, quando $n = 5$. Logo, $P_5 = P_6$ e $P_{n+1} > P_n$ quando

$$n^2 - n - 20 < 0,$$

ou seja, quando $n < 5$. Logo, $P_2 < P_3 < P_4 < P_5$.

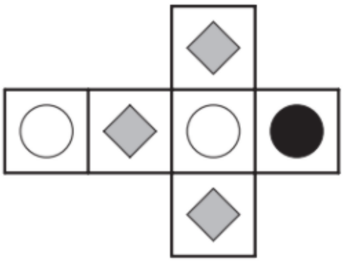
Portanto, a maior probabilidade ocorre para os participantes nas posições 5 e 6.

8º) Verificação do resultado:

A verificação é imediata, considerando que cada item apresenta justificativas em sua resolução.

Questão 14 – 1ªfase – 2013: Um dado foi construído usando a planificação da figura. Qual é a probabilidade de obtermos dois resultados diferentes quando jogamos esse dado duas vezes?

Figura 66 – Dado planificado.



Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2013

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

A probabilidade de obtermos dois resultados diferentes quando jogamos esse dado duas vezes.

2º) Quais são os dados do problema?

- Um dado foi construído usando a planificação da figura proposta no enunciado.

3º) Qual é a condicionante?

- Obter dois resultados diferentes quando ao jogar esse dado duas vezes.

4º) Representar a ideia com uma figura: basta a figura dada no enunciado.

5º) Adotar uma notação adequada: para não ter que desenhar as figuras que aparecem nas faces do dado, serão utilizadas as notações: círculo branco, círculo preto e quadrado cinza.

6º) Elaborar um plano:

É importante observar que esse dado não é equiprovável, basta observar as figuras contidas nas faces dos dados, elas aparecem em quantidades diferentes. A probabilidade de sair um quadrado cinza é a maior do que sair um círculo branco ou maior do que sair um círculo preto. Desse modo, para resolver faz-se necessário analisar os casos separadamente. No primeiro caso, considerar que saia uma bola preta, no 2º caso considerar que saia uma bola branca e no 3º e último caso considerar que saia um quadrado cinza. Com essas três considerações calcular a probabilidade desejada.

7º) Executar o plano:

Analisando cada caso sugerido no plano acima:

1º caso: Suponhamos que saia um círculo preto no primeiro lançamento, logo, no segundo lançamento não podemos obter um círculo preto. A probabilidade de sair um círculo preto no primeiro lançamento é $\frac{1}{6}$ e a probabilidade de sair uma figura diferente do círculo preto no segundo lançamento é $\frac{5}{6}$. Assim a probabilidade desses dois lançamentos acontecerem é:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}.$$

2º caso: agora partimos da hipótese que no primeiro lançamento saia um círculo branco, com probabilidade $\frac{2}{6}$. Desse modo, no segundo lançamento não pode sair nenhum círculo branco, com probabilidade $\frac{4}{6}$. Sendo assim, a probabilidade de obter dois resultados diferentes nos dois lançamentos, nesse caso, é

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{36}.$$

3º caso: vamos considerar que saia um quadrado cinza no 1º lançamento com probabilidade $\frac{3}{6}$ e que não saia um quadrado cinza no segundo lançamento, $\frac{3}{6}$. Logo, a probabilidade de sair dois resultados diferentes nos dois lançamentos é:

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}.$$

Portanto, todas as hipóteses, apresentadas nos três casos acima, satisfazem a condição exigida no enunciado, tem-se como solução para esse problema a probabilidade:

$$\frac{5}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}=\frac{22}{36}=\frac{11}{18}.$$

8º) Verificação do resultado:

O problema poderia ser resolvido de outra maneira:

As probabilidades de obter um quadrado cinza, um círculo branco ou um círculo preto em um lançamento desse dado são, respectivamente, $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{6}$. A probabilidade de obter dois símbolos iguais em dois lançamentos consecutivos é então:

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{9}{36}+\frac{4}{36}+\frac{1}{36}=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}.$$

Portanto, segue da Proposição 1 abordada no capítulo 3, que a probabilidade de obter dois símbolos distintos é

$$1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}.$$

Conferindo assim a resposta obtida anteriormente.

Questão 5 – 2ª fase – 2012: Em uma caixa há 9 bolas amarelas numeradas de 1 a 9 e, em uma segunda caixa, há 9 bolas brancas, também numeradas de 1 a 9. Todas as bolas são idênticas, exceto por sua cor e seu número. Uma bola amarela é sorteada e colocada na segunda caixa; a seguir, uma bola é sorteada da segunda. Qual é a probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa tenha número 1?

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

A probabilidade de que a bola sorteada da segunda caixa tenha número 1.

2º) Quais são os dados do problema?

-Em uma caixa há 9 bolas amarelas numeradas de 1 a 9.

-Em uma segunda caixa, há 9 bolas brancas, também numeradas de 1 a 9.
-Todas as bolas são idênticas, exceto por sua cor e seu número.
-Uma bola amarela é sorteada e colocada na segunda caixa; a seguir, uma bola é sorteada da segunda caixa.

3º) Qual é a condicionante?
- A bola sorteada da segunda caixa tenha número 1.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Elaborar um plano:
Calcular o número total de possibilidades para o sorteio, considerando que para sortear a primeira bola há 9 possibilidades e para sortear a segunda bola há 10 possibilidades, pois foi colocada uma bola da primeira caixa na segunda caixa. Para calcular o número de casos favoráveis, será considerado dois casos:

- a bola sorteada da 1ª caixa tem o número 1;
- a bola sorteada da 1ª caixa não tem o número 1.

Com isso, calcular a probabilidade desejada.

7º) Executar o plano:

A primeira bola pode ser sorteada de 9 maneiras e a segunda de 10. O número total de possibilidades para o sorteio das duas bolas é, portanto, $9 \cdot 10 = 90$. Para contar quantos são os sorteios em que a segunda bola tem o número 1, consideraremos dois casos:

• A bola sorteada da 1ª caixa tem o número 1. Neste caso, há apenas uma possibilidade para o sorteio da 1ª bola, mas duas para o sorteio da 2ª bola (já que há duas bolas com o número 1 na segunda caixa quando ela é sorteada). Logo, há $1 \cdot 2 = 2$ possibilidades de se obter 1 na 2ª bola.

• A bola sorteada da 1ª caixa tem o número diferente de 1. Neste caso, há 8 possibilidades para o sorteio da 1ª bola, e apenas uma para o sorteio da 2ª (já que há somente uma bola com o número 1 na segunda caixa quando ela é sorteada). Logo, há $8 \cdot 1 = 8$ possibilidades de se obter 1 na 2ª bola.

A probabilidade de que a segunda bola tenha o número 1 é, portanto,

$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{2+8}{9 \cdot 10} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

8º) Verificação do resultado:

Podemos verificar esse resultado, utilizando a ideia de probabilidade condicional. Vamos definir algumas notações necessárias:

$P(B)$: probabilidade da 2ª bola sorteda ser 1;

$P(A)$: a probabilidade da 1ª bola sorteada ser 1;

$P(B|A)$: a probabilidade da 2ª bola sorteada ser 1, dado que a 1ª bola sorteada é 1.

$P(C)$: a probabilidade da 1ª bola sorteada ser diferente de 1;

$P(B|C)$: a probabilidade da 2ª bola sorteada ser 1, dado que a 1ª bola sorteada é diferente de de 1.

Desse modo,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(C \cap B) =$$

$$= P(A) \cdot P(B|A) + P(C) \cdot P(B|C) =$$

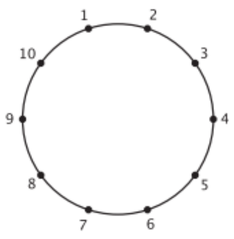
$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{10} + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{90} + \frac{8}{90} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

E então a probabilidade da segunda bola sorteada ser 1 é $\frac{1}{9}$.

Questão 5- 2ª fase – 2011: Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.

a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?
b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo?
c) Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo?

Figura 67 – Circunferência dividida em 10 partes iguais.



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2011

Solução adaptada:

Nessa questão, a metodologia de resolução de problemas proposta por Polya será aplicada à pergunta do item (c). As abordagens referentes aos itens (a) e (b) acontecerão juntamente com a proposta de resolução do item (c), como segue abaixo.

1º) Qual é a incógnita?
A probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um retângulo.

2º) Quais são os dados do problema?
- Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10.
- O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais.
- Considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.

3º) Qual é a condicionante?
- Os pontos correspondentes às bolas retiradas ao acaso sejam vértices de um retângulo.
- As bolas serão retiradas, uma a uma, sem reposição.

4º) Representar a ideia com uma figura: utilizar a figura do enunciado.

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Elaborar um plano:

Para compreender melhor o problema, sugere-se responder primeiramente as seguintes questões:

a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que o segmento determinado pelos pontos correspondentes seja um diâmetro da circunferência?

b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo retângulo?

Observação: aqui, deve-se lembrar que um ângulo inscrito em uma circunferência é reto, se e somente se, o arco correspondente é uma semicircunferência. Feito isso, considerar que para as quatro bolas retiradas determinarem um retângulo, as três primeiras devem formar um triângulo retângulo, e assim haverá uma única escolha para a quarta bola entre as sete remanescentes.

7º) Executar o plano:

Respondendo à questão (a): O princípio multiplicativo mostra que o número de maneiras de retirar duas bolas, uma a uma, é $10 \cdot 9 = 90$. Dessas retiradas, há dez que determinam diâmetros, a saber, (1,6), (2,7), (3,8), (4,9), (5,10), (6,1), (7,2), (8,3), (9,4) e (10,5). Logo a probabilidade pedida é

$$\frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Respondendo à questão (b): O princípio multiplicativo mostra que o número de maneiras de retirar três bolas, uma a uma, é $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Para que uma retirada determine um triângulo retângulo, ela deve conter duas bolas a e b que determinam um diâmetro e uma terceira bola x distinta dessas duas; ordenando essas bolas das 3! = 6 maneiras possíveis, vemos que há seis retiradas que consistem dessas bolas. Como há cinco pares de bolas que determinam um diâmetro e a bola extra pode ser escolhida de oito maneiras diferentes, o número de retiradas que determinam um triângulo retângulo inscrito é $6 \cdot 5 \cdot 8 = 240$. Logo a probabilidade procurada é

$$\frac{240}{720} = \frac{1}{3}.$$

Por fim, respondendo a questão do item (c), para que as quatro bolas retiradas determinem um retângulo, as três primeiras devem determinar um triângulo retângulo, o que acontece com probabilidade $\frac{1}{3}$; uma vez isso feito, há uma única escolha para a quarta bola entre as sete remanescentes. Logo a probabilidade procurada é

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{21}.$$

8º) Verificação do resultado:

(**a**) Retira-se uma bola qualquer. Das nove possibilidades de retirar outra bola, apenas uma determinará, junto com a primeira, um diâmetro. Logo a probabilidade de retirar duas bolas que determinam um diâmetro é $\frac{1}{9}$**.**

(**b**) Uma vez retiradas três bolas, podemos formar com elas, três grupos de duas bolas. Observamos que se um desses grupos determina um diâmetro então isso não pode acontecer para os outros dois grupos. Como cada grupo de duas bolas tem probabilidade $\frac{1}{9}$ de determinar um diâmetro, a probabilidade procurada é então

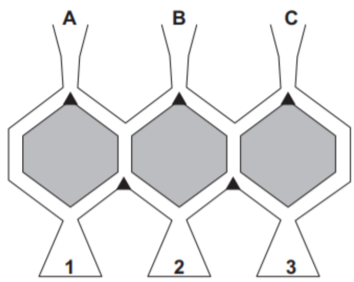
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}.$$

(c) Há $C_{10}^{4}=210$ maneiras de escolher quatro bolas, ou seja, há 210 quadriláteros inscritos com vértices nos vértices do decágono. Por outro lado, um retângulo inscrito é determinado por dois diâmetros, ou seja, há $C_{5}^{2}=10$ retângulos inscritos, correspondentes a dez escolhas de quatro bolas. Logo a probabilidade procurada é

$$\frac{10}{210}=\frac{1}{21}.$$

Questão 5 – 2ª fase – 2008: No brinquedo ilustrado na figura 68, bolinhas são colocadas nas entradas **A**, **B** ou **C** e movem-se sempre para baixo, terminando em uma das caixas 1, 2 ou 3. Ao atingir um dos pontos marcados com ▲, as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dos dois lados. Se colocarmos uma bolinha em cada entrada (uma de cada vez), qual é a probabilidade de que, no final, haja uma bolinha em cada caixa?

Figura 68 – Brinquedo.



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2008

1º) Qual é a incógnita?

A probabilidade de que, no final, haja uma bolinha em cada caixa, considerando que foram colocadas uma bolinha em cada entrada (uma de cada vez).

2º) Quais são os dados do problema?

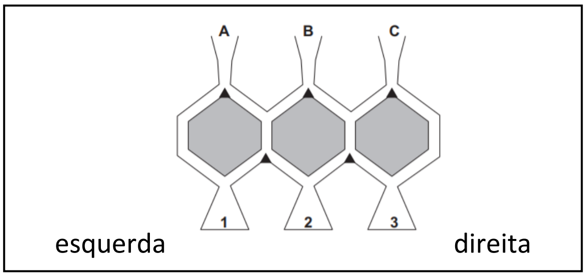
- No brinquedo ilustrado na figura, bolinhas são colocadas nas entradas **A**, **B** ou **C** e movem-se sempre para baixo, terminando em uma das caixas 1, 2 ou 3.
- Ao atingir um dos pontos marcados com ▲, as bolinhas têm chances iguais de ir para cada um dos dois lados.

3º) Qual é a condicionante?

Ter uma bolinha em cada caixa ao final da experiência de colocar uma bolinha em cada entrada (uma de cada vez).

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 69 – Posição relativa ao brinquedo (esquerda/direita).



Fonte: Prova da 2ª fase - OBMEP 2008

(com adaptações feitas pela autora desse trabalho)

5º) Adotar uma notação adequada: serão utilizadas as notações sugeridas no enunciado: Entradas **A**, **B** e **C**, e caixas 1, 2 e 3 conforme mostra a Figura 69.

6º) Elaborar um plano:

Como uma forma de entender melhor o problema, sugere-se responder duas questões antes de responder o que se pede no enunciado.

I) Se uma bolinha for colocada em C, em quais caixas ela pode parar? E se ela for colocada em B?

II) Se uma bolinha for colocada em A, qual é a probabilidade de que ela vá parar na caixa 2? E se ela for depositada em B, qual é essa probabilidade?

Feito isso, vamos buscar estratégias para responder a pergunta do enunciado. Existem três situações possíveis para que no final haja uma bolinha em cada caixa. Descrevemos estas situações no Quadro 2, onde (por exemplo) a primeira linha indica a situação em que uma bolinha colocada em A cai na caixa 1, outra colocada em B cai na caixa 2 e a última, colocada em C, cai na caixa 3.

Quadro 2 – Situações possíveis para que se tenha uma bolinha em cada caixa.

	Caixa 1	Caixa 2	Caixa 3
1ª situação	A	B	C
2ª situação	A	C	B
3ª situação	B	A	C

Fonte: elaborada pela autora.

Observação: Aqui, vale relembrar ao aluno a definição de eventos independentes.

Com isso, calcular a probabilidade de que cada uma destas situações e por fim efetuar a soma desses valores obtidos, tendo em vista que a ocorrência de cada uma das configurações acima é um evento disjunto dos outros dois; a probabilidade de ao menos um deles ocorrer é, então, igual à soma das probabilidades dos eventos individuais.

7º) Executar o plano:

Respondendo às questões I e II:

Resposta para questão I) Uma bolinha colocada em C só poderá parar nas caixas 2 ou 3; se colocada em B, ela poderá parar em qualquer uma das três caixas.

Resposta para questão II) Se ela parte de A, para chegar à caixa 2 ela deve ir para a direita tanto na primeira como na segunda bifurcação. Como a bolinha tem chances iguais de ir para a direita ou para a esquerda em cada bifurcação, a probabilidade de ela chegar à caixa 2 é

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Se a bolinha for depositada em B, pelo mesmo raciocínio, ela poderá chegar à caixa 2 por dois caminhos diferentes: direita, esquerda ou esquerda, direita; ambos ocorrem com probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Como estes eventos são disjuntos, a probabilidade de um deles ocorrer é a soma das probabilidades de cada evento individual. Logo a probabilidade de a bolinha sair de B e chegar à caixa 2 é

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Partindo agora para os cálculos que nos auxiliarão a chegar na probabilidade de que, no final, haja uma bolinha em cada caixa.

A probabilidade de que a 1ª situação da tabela 11 ocorra é:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32}.$$

Pois para a bolinha que é colocada na entrada A, há duas situações que podem ocorrer. A bolinha pode ir para a esquerda na primeira bifurcação, com 50% de chance, e cairá direto na caixa 1, ou a bolinha vai para direita na primeira bifurcação (50% de chance) e ao chegar na segunda bifurcação terá 50% de chance de cair na caixa 1. Assim,

$$50\% + (50\%) \times (50\%) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Para a bolinha colocada na entrada B cair na caixa 2, a probabilidade é 50%, calculada anteriormente na solução da questão II sugerida nessa resolução.

E para a bolinha colocada na entrada C cair na caixa 3, a probabilidade é $\frac{3}{4}$, cálculo análogo ao que foi feito para a bolinha da entrada A cair na caixa 1.

A probabilidade de ocorrer a segunda situação é:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{64}.$$

De fato, já vimos que para a probabilidade da bolinha colocada em A cair na caixa 1 é $\frac{3}{4}$. E para a bolinha colocada na entrada B cair na caixa 3 é $\frac{1}{4}$, já que essa bolinha terá 50% de chance na primeira bifurcação de ir para a direita e 50% de chance na segunda bifurcação de cair na caixa 3. Analogamente a bolinha colocada na entrada C terá probabilidade igual a $\frac{1}{4}$ de cair na caixa 2.

De maneira muito parecida com o que acabamos de fazer, se justifica a probabilidade de ocorrer a 3ª situação:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}.$$

Logo a probabilidade de que haja uma bolinha em cada caixa satisfazendo as condições do enunciado é:

$$\frac{9}{32}+\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}.$$

8º) Verificação do resultado:

Uma maneira de conferir o resultado é listando todas situações possíveis, conforme será apresentado na tabela 9.

Tabela 9– Probabilidades para as posições das bolinhas.

Caixa 1	Caixa 2	Caixa 3	Probabilidade
A - $\frac{3}{4}$	B - $\frac{1}{2}$	C - $\frac{3}{4}$	$\frac{18}{64} = \frac{9}{32}$
A - $\frac{3}{4}$	C - $\frac{1}{4}$	B - $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{64}$
A - $\frac{3}{4}$	BC- $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$	Vazia	$\frac{6}{64} = \frac{3}{32}$
A - $\frac{3}{4}$	Vazia	BC - $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{9}{64}$
AB - $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$	Vazia	C - $\frac{3}{4}$	$\frac{9}{64}$
AB - $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$	C - $\frac{1}{4}$	Vazia	$\frac{3}{64}$
B - $\frac{1}{4}$	A - $\frac{1}{4}$	C - $\frac{3}{4}$	$\frac{3}{64}$
B - $\frac{1}{4}$	AC - $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$	Vazia	$\frac{1}{64}$
Vazia	AB - $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$	C - $\frac{3}{4}$	$\frac{6}{64}$
Vazia	ABC - $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$	Vazia	$\frac{2}{64}$
Vazia	AC - $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$	B - $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{64}$
Vazia	A - $\frac{1}{4}$	BC - $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$	$\frac{3}{64}$

Fonte: Elaborada pela autora.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi explorar problemas olímpicos envolvendo os conceitos de análise combinatória ou probabilidade, através da metodologia de resolução de problemas apresentada por George Polya, e dessa maneira apresentar um material que possa ser utilizado por professores em suas aulas de matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio.

O primeiro passo para a realização dessa dissertação foi a busca por bibliografias que tratassem de metodologias de ensino de matemática com ideias inovadoras. Diante de tantas possibilidades, foi difícil escolher o tema para realizar esse trabalho. Mas algumas abordagens foram despertando mais interesse para a autora e indo ao encontro do que se quer aplicar em sala de aula. Muitas vezes, encontram-se propostas maravilhosas teoricamente, mas que são complicadas de colocar em prática, devido às várias condições do dia a dia escolar e, por esse motivo, a busca por estratégias de ensino que despertem nos estudantes o interesse em aprender matemática foi o grande estímulo desse trabalho. No cotidiano escolar, nem sempre é possível ensinar matemática de maneira que seja significativa e motivadora, não se tem tempo para pesquisas de novas metodologias de ensino. Foi com essa ideia que buscou-se mais formação, novas ideias e muito estudo.

Dessa forma, a metodologia de resolução de problemas foi a escolhida, por ser uma forma de despertar interesse, motivar e garantir um ensino de matemática qualitativo. E mais, ao explorar problemas olímpicos, foi possível preparar um material interessante para ser aplicado em qualquer escola, para os alunos dos anos finais do ensino fundamental ou para alunos do ensino médio.

No decorrer de 17 anos trabalhando com diversos alunos, em diferentes escolas e até mesmo em diferentes cidades, é possível afirmar que a maior dificuldade dos estudantes se encontra na interpretação de enunciados. Em especial, em problemas de análise combinatória ou probabilidade, a dificuldade na interpretação é maior. Há uma confusão muito grande para o aluno em relacionar as informações dadas no enunciado e o que de fato precisa ser feito.

Nas resoluções de provas das olimpíadas de matemática, acontece sempre um desastre de desempenho. O que sempre é dito pela maioria dos estudantes “não entendi quase nada”, “chutei a maioria”, “essas provas não são pra nós profe”, e isso incomoda qualquer professor que deseja fazer um trabalho digno.

Dessa maneira, algo deve ser feito, para que mude essa realidade. Comecemos com aplicações de problemas olímpicos em classe, utilizando a metodologia de resolução de problemas de Polya, onde as quatro etapas sugeridas pelo autor farão com que os estudantes se familiarizem com a linguagem matemática, escrevam suas resoluções com mais clareza, fazendo demonstrações se necessário, e mais do que isso, fazendo conexões que sejam significativas.

Mesmo com tanto conteúdo, projetos, e atividades escolares que comprometem o tempo em sala de aula, é possível criar uma rotina nas aulas de matemática com o objetivo de ensinar aos estudantes a "interpretar problemas". Ou melhor, possibilitar momentos, talvez uma vez por semana, onde o foco é entender a linguagem matemática, desenvolver as quatro etapas propostas para resolver um problema, buscando assim ensinar os alunos uma maneira de entender enunciados, planejar soluções, a escrever melhor suas ideias, validar seus resultados e mais do que isso, desenvolver sua criatividade e autonomia.

É importante ressaltar que foram analisadas todas as provas já aplicadas da OBMEP desde 2005, tanto da primeira fase quanto da segunda fase. Nesta análise, buscou-se identificar quais questões abordavam conceitos de análise combinatória ou probabilidade. Desse modo, após seleção de todas essas questões, foi realizada a etapa de resolução das questões, procurando entender cada detalhe. Com isso, partiu-se para a adaptação da solução de cada problema à metodologia de resolução de problema de George Polya.

Em cada resolução desses problemas selecionados, buscou-se colocar-se no lugar do aluno, identificando possíveis dúvidas e qual a melhor maneira de conduzir a resolução para que de fato o problema seja entendido e mais do que isso, a resolução seja significativa.

A ideia inicial era selecionar alguns desses problemas aqui apresentados e aplicar em algumas turmas. Porém devido a situação que estamos vivendo desde março de 2020, isso não foi possível na escola. A metodologia que propomos segue a seguinte ordem: primeiramente pedir aos alunos que resolvessem (individualmente) sem qualquer auxílio do professor; depois, caso houvesse muitas dúvidas, as etapas da metodologia de resolução de problemas de G. Polya seriam aplicadas, ou seja, os alunos receberiam instruções para que o desempenho fosse melhor. E ainda assim, se alguns alunos não conseguissem resolver, haveria o momento de cooperação, onde alguns grupos seriam formados para estudo e resolução do problema sugerido.

Apesar da impossibilidade da realização da etapa “aplicação, essa dissertação desenvolvida teve seus objetivos plenamente alcançados, pois graças à tecnologia, tanto a pesquisa quanto os momentos de encontro com a orientadora, puderam ocorrer e assim tornar possível esse trabalho.

Acreditamos que este trabalho possa servir como um incentivador a novas pesquisas acerca de metodologias de ensino de matemática, não só sobre Análise Combinatória e Probabilidade, mas também sobre outros conceitos da matemática. Assim como a proposta aqui apresentada possa ser aproveitada por muitos professores de nosso país, buscando mais qualidade e motivação para o ensino desta disciplina tão importante que é a matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENEVIDES, F. S. PORTAL DA MATEMÁTICA - material teórico - probabilidade condicional. **Portal da OBMEP**, 2020. Disponível em: <https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep>. Acesso em: 26 agosto 2020.

BEZERRA, M. D. N. C. **ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE**. 1ª. ed. Belém: EditAedi, 2018.

BONGIOVANNI, V.; LEITE, O. R. V.; LAUREANO, J. L. T. **MATEMÁTICA E VIDA**. 1ª. ed. São Paulo: Ática, v. 2, 1993.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. **Ministério da Educação**, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 27 agosto 2020.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**. [S.l.]: Ática, 2008.

CARVALHO, P. P. C. **MÉTODOS DE CONTAGEM E PROBABILIDADE**. IMPA/OBMEP. Rio de Janeiro, p. 89. 2015.

D'AMBRÓSIO, U. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA:** DA TEORIA À PRÁTICA. 23ª. ed. Campinas-SP: Papirus, 2012.

FIDELIS, E. C. **A OBMEP sob uma perspectiva de Resolução de Problemas.** Brasília: Trabalho de Conclusão de Curso- Universidade de Brasília, 2014.

GONÇALVES, R. R. S. **UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática (IMPA). Rio de janeiro, p. 111. 2014.

GOSSETT, E. **DISCRETE MATHEMATICS WITH PROOF**. 2ª. ed. New York - United States: John Wiley & Sons, Inc Publication, 2009.

HAZZAN, S. **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR**. 1ª. ed. São Paulo: Atual, v. 5, 1977.

HEFEZ, A. **ARITMÉTICA - Coleção PROFMAT**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, L. E. et al. **A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**. 7ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, v. 2, 2016.

MAGALHÃES, M.. **PROBABILIDADE E VARIÁVEIS ALEATÓRIAS**. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2006.

MEC. Resultados SAEB. **Portal do Inep**, 2020. Disponivel em: <www.portal.inep.gov.br>. Acesso em: 12 setembro 2020.

MORGADO, A. C. et al. **ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE**. 10ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **MATEMÁTICA DISCRETA**. 2ª. ed. Rio de janeiro: SBM, 2015.

MUNIZ NETO, A. C. **TÓPICOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, v. 4, 2016.

OLIVEIRA, R. R. D. MATEMÁTICA. **BRASIL ESCOLA**, 2020. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/triangulo-pascal.htm.>. Acesso em: 11 agosto 2020.

ONUCHIC, L. D. L. R. et al. **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. 1ª. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

PAIVA, M. **MATEMÁTICA PAIVA**. 1ª. ed. São Paulo: Moderna, v. 2, 2009.

POLYA, G. **A ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de janeiro: Interciência, 2006.

PROVAS e Soluções. **OBMEP**, 2019. Disponível em: <www.obmep.org.br>. Acesso em: 03 jun 2020.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **INTRODUÇÃO À ANÁLISE COMBINATÓRIA**. 4ª. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

SÓ, M. Biografias de matemáticos. **http:** //www.somatematica.com.br, 2020. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/biograf/stifel.php>. Acesso em: 20 agosto 2020.

VIEIRA FILHO, A. D. S. **PROBABILIDADE E SUAS APLICAÇÕES**. Trabalho de Conclusão do mestrado PROFMAT - Universidade Federal de Rondônia. Porto velho, p. 82. 2020.

Apêndice A – Proposições sobre Probabilidade e Demonstrações.

Proposição 1: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Demonstração: Sabemos que

$$S = A \cup \bar{A} \text{ e } A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

E pela definição geral de probabilidade,

$$P(S) = 1 \text{ e } P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

Daí,

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

Portanto,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

■

Proposição 2: $P(\emptyset) = 0$.

Demonstração: De fato,

$$P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset).$$

Pois S e $\emptyset$ são mutuamente excludentes. Logo,

$$P(\emptyset) = 0.$$

■

Proposição 3: Se $A \subset B$, então $P(A) = P(B) - P(B - A)$.

Demonstração: Como $B = A \cup (B - A)$ temos

$$P(B) = P\big(A \cup (B - A)\big) = P(A) + P(B - A)$$

e, portanto

$$P(A) = P(B) - P(B - A).$$

■

Corolário 1: Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Demonstração: Pela proposição 3,

$$P(A) = P(B) - P(B - A)$$

e $P(B - A) \geq 0$ (item (i) da definição geral de probabilidade), o que resulta em

$$P(B) - P(A) \geq 0.$$

Logo, $P(A) \leq P(B)$.

■

Proposição 4: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração: Temos pela definição de conjunto diferença que

$$P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) \text{ e } P(B - A) = P(B \cap \bar{A}).$$

Desse modo,

$$P(A) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)] = P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Pois $A - B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes. Obtendo assim

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

E assim,

$$P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] = P(A - B) + P(B),$$

já que $A - B$ e B são mutuamente excludentes.

O que implica

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B),$$

ou seja,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

■

Teorema da probabilidade Total

Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, e

$$P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \dots, P(A_n) > 0,$$

então

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n).$$

Demonstração: Por hipótese, B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$. Assim

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

e

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B).$$

Aplicando a definição de probabilidade condicional, nessa última igualdade, tem-se:

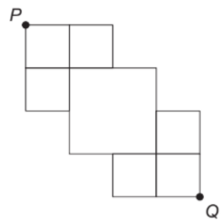
$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

■

Apêndice B – Questões resolvidas da OBMEP

Questão 16 – 1ª fase – nível 1 – 2016: Uma formiguinha caminha pelos lados dos quadrados da figura, sempre para baixo (↓) ou para a direita (→). Quantos são os caminhos diferentes que ela pode percorrer para ir do ponto P ao ponto Q?

Figura 70 – Caminhos disponíveis para uma formiga.



Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2016

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?
A quantidade de caminhos diferentes que a formiguinha pode percorrer para ir de P a Q.

2º) Quais são os dados do problema?
- A formiguinha caminha pelos lados dos quadrados da figura dada.

3º) Qual é a condicionante?
- A formiguinha, além de caminhar sobre os lados dos quadrados da figura, deve caminhar sempre para baixo ou para a direita.
- Sair do ponto P e chegar ao ponto Q.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 71 – Pontos destacados nos possíveis caminhos para a formiga.

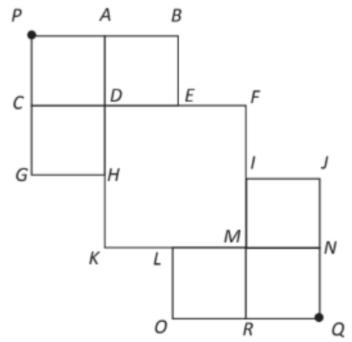


Figura 99: Solução – Prova da 1ª fase - OBMEP 2016

5º) Adotar uma notação adequada:

Alguns pontos serão nomeados por A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O e R, para facilitar a escrita da resolução.

6º) Estabelecer um plano

Para ir de P a Q, a formiguinha deve passar ou pelo ponto E ou pelo ponto H; o enunciado mostra que não há nenhum caminho que passe por ambos esses pontos. Assim, deve-se analisar o número de caminhos de P a Q como:

(número de caminhos de P a Q passando por E) + (número de caminhos de P a Q passando por H).

7º) Executar o plano

Vamos analisar os casos então. De E ela deve seguir necessariamente a I e depois para Q. O Princípio Multiplicativo nos mostra que o número de caminhos de P a Q passando por E é dado por X, onde,

X = (número de caminhos de P a E) × (número de caminhos de I a Q)

Do mesmo modo, o número de caminhos de P a Q passando por H é dado por Y, onde,

Y = (número de caminhos de P a H) × (número de caminhos de L a Q)

E assim, segue que o número total de caminhos de P a Q é dado por:

X + Y

De acordo com os pontos indicados na figura acima, temos que os percursos possíveis de P até E são: PABE, PADE ou PCDE, ou seja, 3 percursos possíveis.

Agora analisando os percursos para ir de I até Q, tem-se as seguintes possibilidades: IJNQ, IMNQ ou IMRQ, também 3 possibilidades.

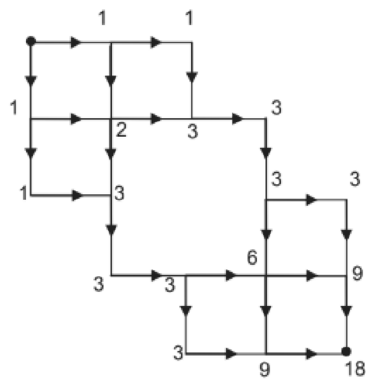
A simetria da figura nos mostra que o número de possibilidades de percursos para ir de P a H também é 3 e para ir de L a Q, também são 3 possibilidades diferentes.

Segue então que o número total de caminhos é $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$.

8º) Verificação do resultado:

Outra solução: Podemos anotar, em cada vértice, o número de caminhos que chegam naquele vértice (basta somar os números anteriores associados a lados que chegam naquele vértice). O que pode ser visto através da Figura 72.

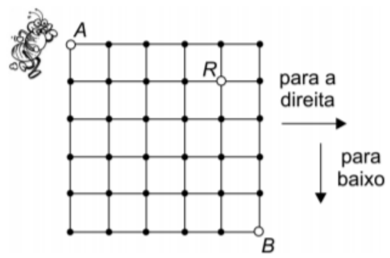
Figura 72 – Verificação das possibilidades.



Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2016

Questão 11 – 1ª fase – nível 2 – 2008: Uma formiguinha está no ponto A do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto B passando pelo ponto R. Ela anda sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?

Figura 73 – Quadriculado.



Fonte: Prova da 1ª fase - OBMEP 2008

Solução adaptada:

1º) Qual é a incógnita?

O número de maneiras que a formiguinha pode fazer o trajeto de A até B passando por R.

2º) Quais são os dados do problema?

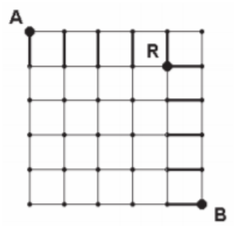
- Uma formiguinha está no ponto A do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto B passando pelo ponto R.
- Ela anda sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo.

3º) Qual é a condicionante?

- Passar por R, andar sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo.

4º) Representar a ideia com uma figura:

Figura 74 – Quadriculado e algumas marcações.



Fonte: Solução - Prova da 1ª fase - OBMEP 2008

5º) Adotar uma notação adequada: ir de A até R significa ir do ponto A até o ponto R. Da mesma forma ir de R até B significa ir do ponto R até o ponto B.
Pode-se também usar as letras b e d para dizer se a formiguinha percorre um segmento para baixo ou para direita.

6º) Elaborar um plano:

Analisar as possibilidades para ir de A até R, considerando que a formiguinha deve escolher um dos cinco segmentos verticais em traço mais grosso na primeira linha da Figura 73. De modo análogo, verificar as possibilidades para ir de R até B.

7º) Executar o plano:

Para ir de A até R a formiguinha deve escolher um dos cinco segmentos verticais em traço mais grosso na primeira linha da figura. Uma vez escolhido esse segmento, há um único caminho de A até R que passa por ele. Desse modo, a formiguinha pode ir de A até R de cinco maneiras diferentes. Analogamente, ela pode seguir de R até B de cinco maneiras diferentes. Logo o número de maneiras que ela tem para ir de A até B é

$$5 \cdot 5 = 25.$$

8º) Verificação do resultado:

Podemos também usar as letras b e d para dizer se a formiguinha percorre um segmento para baixo ou para direita, respectivamente. Um caminho de A até R é então uma sequência de um b e quatro d's, de modo que há cinco desses caminhos, a saber bdddd, dbddd, ddbdd, dddbd e ddddb. Analogamente, há cinco caminhos de R até B, e a resposta segue como acima.

Questão 16 – 1ª fase- nível 3 – 2006: Uma caixa contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Dela são retiradas ao acaso duas bolas. Qual a probabilidade de que o maior número assim escolhido seja o 4?

1º) Qual é a incógnita?

A probabilidade de que o maior número assim escolhido seja o 4.

2º) Quais são os dados do problema?

Uma caixa contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Dela são retiradas ao acaso duas bolas.

3º) Qual é a condicionante?

O maior número sorteado seja o 4.

4º) Representar a ideia com uma figura: não há necessidade.

5º) Adotar uma notação adequada: não há necessidade.

6º) Elaborar um plano:

Listar todas as possibilidades de retirar duas bolas da caixa e verificar em quais, o 4 aparece como maior número.

7º) Executar o plano:

O número de maneiras de retirarmos duas bolas da caixa é 10, o que podemos ver listando as possibilidades: {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {3,4}, {3,5} e {4,5}. O 4 é o maior número escolhido em {1,4}, {2,4} e {3,4}, ou seja, em 3 casos. Logo a probabilidade pedida é $\frac{3}{10}$.

8º) Verificação do resultado:

A verificação é imediata.