UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

A IMPORTÂNCIA DA LÍNGUA MATERNA NO ENSINO DA MATEMÁTICA: uma análise intrínseca acerca dos significados da língua consoante ao conceito matemático para professores de matemática na abordagem da multiplicação

Alan Nunes Rangel

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

A IMPORTÂNCIA DA LÍNGUA MATERNA NO ENSINO DA MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE INTRÍNSECA ACERCA DOS SIGNIFICADOS DA LÍNGUA CONSOANTE AO CONCEITO MATEMÁTICO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA NA ABORDAGEM DA MULTIPLICAÇÃO

ALAN NUNES RANGEL

Sob a Orientação do Professor

LUCIANO VIANNA FÉLIX

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Fevereiro de 2021

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rangel, Alan Nunes, 1982-
R196i A importância da língua materna no ensino da matemática: uma análise intrínseca acerca dos significados da língua consoante ao conceito matemático para professores de matemática na abordagem da multiplicação. / Alan Nunes Rangel. - Rio de Janeiro, 2021.
84 f.: il.

Orientador: Luciano Vianna Félix.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2021.

1. Multiplicação. 2. Tabuada. 3. Língua Materna. I. Félix, Luciano Vianna, 1986-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Alan Nunes Rangel

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de **Mestre**, no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 24/02/2021.

Conforme deliberação número 001/2020 da PROPPG, de 30/06/2020, tendo em vista a implementação de trabalho remoto e durante a vigência do período de suspensão das atividades acadêmicas presenciais, em virtude das medidas adotadas para reduzir a propagação da pandemia de Covid-19, nas versões finais das teses e dissertações as assinaturas originais dos membros da banca examinadora poderão ser substituídas por documento(s) com assinaturas eletrônicas. Estas devem ser feitas na própria folha de assinaturas, através do SIPAC, ou do Sistema Eletrônico de Informações (SEI) e neste caso a folha com a assinatura deve constar como anexo ao final da tese / dissertação.

LUCIANO VIANNA FÉLIX (Dr. Orientador, Presidente da Banca)

EULINA COUTINHO SILVA DO NASCIMENTOv(Dr.ª UFRRJ

ELEN VIVIANI PEREIRA SPREAFICO (Drª, UFMS)

Aos meus pais João Luiz Rodrigues Rangel e Letícia Nunes de Oliveira,
por sempre estarem comigo em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus amigos de turma pela troca e apoio, não somente para escrever esta dissertação, mas em todos os momentos do mestrado dando apoio em horas que são difíceis na vida, por animar e estarem disponíveis a qualquer momento. Em especial aos meus amigos Leonardo Bueno e Rubens Lucena por todas as tardes de estudo durante o curso, e de uma forma especial o emu amigo José Carlos Maia, companheiro de turma que foi um leitor crítico deste trabalho em sua fase de finalização.

Agradeço ao meu orientador Luciano Félix realização deste trabalho de pesquisa me auxiliando sempre que precisei e interpelando sempre que necessário. Me incentivando e estando presente mesmo em momentos que não pude estar tão voltado para o presente trabalho.

Agradeço aos professores que sempre nos apoiaram e estiveram presentes durante nosso curso e de forma direta ou indiretamente são responsáveis por este momento, agradeço as professoras Aline e Eulina que estiveram conosco no início dos trabalhos de conclusão e não nos abandonaram até a conclusão.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

"Como é que os professores justificam que haja alunos que não aprendem, se desde que nascem, os seres humanos tendem para aprender?."

Bernard Charlot

RESUMO

O presente trabalho propõe uma abordagem pautada nos conceitos e propriedades pertinentes a multiplicação, bem como uma abordagem linguística para a introdução às tabuadas de multiplicação de 1 a 10 e com o objetivo de propor aos professores uma abordagem linguística acerca dos conceitos referentes à operação de multiplicação, assim como a realização de tarefas para aprimorar propriedades desta operação utilizando a língua materna como base estrutural para a compreensão dos significados acondicionando-os aos conceitos de soma de parcelas iguais na tabuada. Intervir semanticamente na tabuada procurando Interseções entre a linguagem verbal e a linguagem de códigos, analisando criticamente as tabuadas ofertadas para os professores e estudantes propondo uma realocação dos fatores para que o número principal da tabuada tenha participação ativa na interpretação aditiva na procura de contexto linguístico adequado à vivencia cotidiana promovendo uma interação entre o que é aprendido e o que já é conhecido através das expressões usadas na comunicação pela língua materna.

Palavras-chaves: Língua Materna, Matemática, Multiplicação.

ABSTRACT

The present work proposes an approach based on the concepts and properties relevant to multiplication, as well as a linguistic approach for the introduction to multiplication tables from 1 to 10 and with the objective of proposing to teachers a linguistic approach about the concepts related to the multiplication operation. , as well as performing tasks to improve properties of this operation using the mother tongue as a structural basis for understanding the meanings, conditioning them to the concepts of sum of equal plots in the multiplication table. Semantically intervene in the multiplication tables looking for Intersections between verbal language and code language, critically analyzing the multiplication tables offered to teachers and students proposing a reallocation of factors so that the main number of the multiplication table has an active participation in the additive interpretation in the search for an adequate linguistic context to everyday experience promoting an interaction between what is learned and what is already known through the expressions used in communication by the mother tongue.

Keywords: Mother Tongue, Mathematics, Multiplication

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MEC	Ministério da Educação
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacional
PISA	Programa Internacional de
PNE	Plano Nacional de Educação
Saeb	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\in$	Pertence

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em minha prática docente durante alguns anos percebi que grande parte das dúvidas geradas em matemática pelos alunos eram provenientes de ausência de significados nas ações que deveriam ser aplicadas a certos exercícios, bem como a deficiência em interpretações de texto. Algumas vezes, só ao ler os enunciados e encaminhar as operações matemáticas que deveriam ser pensadas por eles, já era o suficiente para eles resolverem, ou seja, o problema estava na "pré-solução" dos exercícios e não na solução em si, com a manipulação do algoritmos. Percebi que boa parte dos alunos não sabe a tabuada para a realização das multiplicações ficando dependente de uma consulta, sequer vislumbram uma forma alternativa de chegar ao produto desejado.

Apesar de todos sabermos que a matemática é de suma importância para o desenvolvimento pleno de um ser humano, seja por questões cotidianas relacionadas diretamente à matemática, seja por trabalhar o raciocínio, o poder de escolha e a tomada de decisões, o desempenho por grande parte dos estudantes da educação básica brasileira não tem sido satisfatório. Abordaremos aqui a utilização linguística como um apoio didático para a introdução dos conceitos de multiplicação desde o início do ciclo escolar. Para isso proporemos aos professores uma abordagem linguística acerca dos conceitos referentes à operação de multiplicação, assim como a realização de tarefas para aprimorar propriedades pertinentes a esta e utilizar a língua materna como base estrutural para a compreensão dos significados acondicionando-os aos conceitos de soma de parcelas iguais.

Sabemos que a linguagem é o principal caminho para o ensino e a aprendizagem de qualquer ciência e portanto deve servir como sustentação para conceitos abstratos, dando significado semântico e fazendo conexões com o que é sabido *à priori* pela linguagem que o aluno utiliza diariamente. Este trabalho prioriza a linguagem, métodos e a abordagem nos conceitos de multiplicação e sobretudo a tabuada com um olhar linguístico nas ações embutidas expressas na multiplicação. Lembrando que é "por meio da linguagem que a criança é exposta ao conhecimento humano e adquire conhecimentos sobre o mundo que a rodeia, aprimorando-se por meio da experiência acumulada pelo gênero humano no discurso da história cultural" (FREITAS, 1994 apud ZUCHI, 2004, p.49).

Os materiais e métodos utilizados foram: uma revisão teórica sob a ótica de diversas áreas sobre linguagem, tipos de linguagem e a importância da utilização apropriada para que o aluno seja capaz absorver, a assimilar e aplicar os conceitos, tais como Vigotski et al. (1998), Menezes (2000) e até mesmo nos PCN Brasil (1999a) da disciplina de português, pois ela é nossa maior aliada para alcançarmos o nosso principal objetivo enquanto educadores, (transmitir/receber o conhecimento) mas que esse conhecimento seja através de uma aprendizagem significativa para todos os envolvidos. Também foi utilizada uma pesquisa de campo sobre a forma de comunicação e a condução de determinadas situações envolvendo a multiplicação por professores em sua prática docente de caráter motivacional, que pode ser vista no Apêndice A.

O presente trabalho está subdividido em 5 capítulos e propõe uma interpretação linguística em busca de significados para o conceito multiplicação e sua tabuada de 1 a 10. Desde o entendimento pelos autores deste e outros trabalhos sobre a língua materna e a importância que ela exerce no aprendizado no sentido amplo da palavra, até a realização de atividades de multiplicação e tabuada propostas sob este olhar semântico.

No Capítulo 2 faremos o embasamento teórico, discutiremos o que entende-se por linguagem por diversos autores, a importância da língua materna no desenvolvimento de novos conhecimentos, além de situar no campo linguístico a "muda" linguagem matemática que só ganha voz através da linguagem que usamos para a comunicação. Mostraremos o ponto de vista de diferentes autores que selecionamos em nossa pesquisa na literatura para dar destaque a oralidade que usamos para interpretar a grafia matemática.

O Capítulo 3 apresenta os resultados do questionário utilizado em nossa pesquisa de campo disponível no Apêndice A com os professores que atuam no ensino da matemática; uma breve discussão sobre sobre cada pergunta, relacionando o que se queria investigar e o resultado obtido para a proposta deste trabalho, além de uma análise de perfil dos participantes para garantir que a nossa amostra esteja de acordo com o público que queremos atingir com este estudo.

Como estamos em busca de significados, uma inter-relação entre as duas linguagens (materna e matemática), no Capítulo 4 definiremos a semântica de acordo com alguns autores e já introduziremos a problemática existente na forma que a maioria das tabuadas estão representadas e como é o entendimento linguístico que está associado às orações implícitas na oralidade que utilizamos para dar voz às notações. Vamos iniciar um estudo semântico da multiplicação no contexto da palavra *vezes* e comparar com o que entendemos com ela associando ao método de adições de parcelas iguais como uma ferramenta para a exploração destas habilidades na sala de aula, em conformidade com a BNCC e os PCN.

Como o método proposto no Capítulo 4 é limitado, do ponto de vista numérico, por não fazer sentido quando avançamos para os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, proporemos e mostraremos no Capítulo 5 que, embora a ideia seja limitada em $\mathbb{N}$, pode ser aplicada nos algoritmos utilizados nas multiplicações de números em suas representações decimais. Que a apropriação desta maneira de associar a tabuada às adições, dando significado semântico a ela, possibilitará que os alunos conquistem sua independência da tabuada, sabendo construí-las. Mostraremos alguns métodos de multiplicação que podem servir como atividade de sala de aula para fortalecer operações simples de dobrar, pegar uma parte, somar, e também a explicação do porquê esses métodos funcionam. O algoritmo convencional utilizado para multiplicação, bem como a distributividade que a multiplicação tem em relação à adição também será discutido usando as abordagens da multiplicação evidenciando as propriedades envolvidas no processo.

Para finalizar nosso trabalho, no Capítulo 6, e reafirmar a necessidade de dar significado às tabuadas, faremos uma comparação de duas formas de representar a tabuada encontradas em diversas fontes, onde uma grande parte dos professores procuram suas atividades; e linguisticamente daremos representatividade do número em sua tabuada, mostrando que ele pode ser passivo ou ativo por uma mudança visual sutil, mas grandiosa no campo semântico. Além disso, na seção 6.3 faremos uma proposta de atividade para ser trabalhada em sala de aula utilizando apenas o recurso aditivo e com uma atraente tabuada que contempla as 100 multiplicações tradicionais, mas utilizando-se apenas de 55 delas.

2 EMBASAMENTO TEÓRICO

O proposto por esse trabalho não é somente estudar a importância incontestável da língua materna, mas sobretudo analisar a forma como se diz, se há uma relação sólida com o que é dito com o que se quer dizer com o intuito de facilitar a compreensão e propor uma nova interpretação das tabuadas para adequar ao sentido literal da palavra "vezes" como uma repetição e não somente como o símbolo matemático da multiplicação. De acordo com Zuchi (2004, p.51) quando afirma que "muitas vezes, o excesso de simbologia gera dificuldades desnecessárias para o aluno, chegando inclusive a impedir que ele compreenda a ideia representada pelo símbolo.".

Para isso, ao ministrar as aulas de matemática, o professor deve aproximar os termos utilizados de maneira própria pela matemática aos sinônimos compreensíveis e tornar a assimilação mais palpável e menos dolorosa. Para MACHADO "[...]a Matemática e a Língua Materna representam elementos fundamentais e complementares, que constituem condição de possibilidade do conhecimento, em qualquer setor, mas que não podem ser plenamente compreendidos quando considerados de maneira isolada." (MACHADO, 1998, p.83).

Não querendo dizer que a linguagem matemática seja insuficiente para ensinar, pois é uma linguagem, acima de tudo, sem ambiguidades que é essencial para o crescimento desta e outras ciências. Ainda para MACHADO a linguagem matemática é a "língua adequada para o exercício da razão, uma língua dos cálculos, cuja gramática teria características puramente lógicas e que possibilitaria uma expressão precisa, sem dar margens a querelas de qualquer tipo." (MACHADO, 1998, p.105), diferentemente da língua portuguesa que dá brecha para interpretações diversas com palavras e expressões com significados diferentes, mas aproveitar a riqueza ortográfica da língua materna para auxiliar na linguagem matemática e flexionar os verbos nas orações escritas na linguagem matemática.

Segundo (VIGOTSKI et al., 1998, p.104),

> O desenvolvimento dos conceitos, ou dos significados das palavras, pressupõe o desenvolvimento de funções intelectuais: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar. Esses processos psicológicos complexos não podem ser dominados apenas através da aprendizagem inicial. A experiência prática mostra também que o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. O professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto o verbalismo vazio, uma repetição de palavras pela criança, semelhante à de um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo .

Neste sentido defendemos que o uso de linguagem específica e simbologias características a determinadas operações matemáticas fiquem em um segundo momento quando o conceitual for alcançado com êxito. Não marginalizando tais simbologias que nós matemáticos sabemos de sua importância e poder nas análises mais profundas desta ciência.

Para LUVISON (2013, p.60):

> A Matemática não se restringe à linguagem de códigos e símbolos: está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias, mas também faz uso do movimento de outras linguagens. Além da relação de técnicas para operar, quando pensamos no conhecimento matemático e de construção e representação da realidade por meio da língua materna, é preciso refletir sobre a complementaridade das duas linguagens (língua materna e a matemática), pois ambas possuem seus estilos particulares, porém, são complementares; ou seja, existe entre elas uma relação de significados que independe de seu estilo.

2.1 O que é Língua Materna?

O termo “Língua Materna”, tem conceitos amplos, alguns autores sugerem que um indivíduo possa ter mais de uma língua materna conforme Spinassé (2006, p.5)

> A Língua Materna, ou a Primeira Língua (L1[1]) não é, necessariamente, a língua da mãe, nem a primeira língua que se aprende. Tão pouco trata-se de apenas uma língua. Normalmente é a língua que aprendemos primeiro e em casa, através do pais, e também é frequentemente a língua da comunidade. Entretanto, muitos outros aspectos linguísticos e não-linguísticos estão ligados à definição. A língua dos pais pode não ser a língua da comunidade, e, ao aprender as duas, o indivíduo passa a ter mais de uma L1 (caso de bilinguismo). Uma criança pode, portanto, adquirir uma língua que não é falada em casa, e ambas valem como L1

Para (MACHADO, 1998, p.9) “a Língua Materna pode ser entendida como a língua nativa ou primeira língua que aprendemos”. Neste trabalho utilizaremos este segundo conceito onde a língua materna é a linguagem a qual o individuo tem seu primeiro contato. É a linguagem de comunicação que todos nós temos acesso assim que nascemos, geralmente repetindo a linguagem dos nossos familiares. É por meio dela que aprendemos todas as coisas, das mais simples às mais sofisticadas como as ciências em geral e também outros tipos de linguagem, por este motivo a língua materna tem característica informal e com o passar do tempo as linguagens modificam-se, surgem expressões novas e outras vão perdendo seu uso e deixando de ser pronunciada regularmente. Neste trabalho, na maioria das vezes utilizaremos o termo língua materna no seu aspecto oral.

[1] L1 é como a autora se refere à língua materna.

2.2 Língua Materna e Aprendizagem.

O aprendizado, pelo menos os primeiros do indivíduo, perpassa pela língua materna, é através da linguagem que conhecemos, assimilamos e nos apossamos de novos conhecimentos diários.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1999):

> O domínio da linguagem, como atividade discursiva e cognitiva, e o domínio da língua, como sistema simbólico utilizado por uma comunidade linguística, são condições de possibilidade de plena participação social. Pela linguagem os homens e as mulheres se comunicam, têm acesso à informação, expressam e defendem pontos de vista, partilham ou constroem visões de mundo, produzem cultura (BRASIL, 1999a, p.19).

É incontestável o papel de destaque que a linguagem tem em todo o processo de aprendizagem em diversos contextos na vida cotidiana e acadêmica dos indivíduos, ela é o único acesso que outras linguagens têm para inserir seus conceitos e significados para que estas possam, também, tornar-se um canal de aprendizado. Mais do que isso é com seu uso adequado a cada fase do ser humano, em relação à maturidade linguística, que a aprendizagem pode ser significativa e sem traumas. Para Moreira (2003, p.2):

> É preciso entender que a aprendizagem é significativa quando novos conhecimentos (conceitos, ideias, proposições, modelos, fórmulas) passam a significar algo para o aprendiz, quando ele ou ela é capaz de explicar situações com suas próprias palavras, quando é capaz de resolver problemas novos, enfim, quando compreende. Essa aprendizagem se caracteriza pela interação entre os novos conhecimentos e aqueles especificamente relevantes já existentes na estrutura cognitiva do sujeito que aprende(...)

Para isso quem ensina deve utilizar o recurso linguístico que leva seus conhecimentos a quem quer ensinar, a língua materna; por este motivo o meio de comunicação em sala de aula deve ter níveis alcançáveis pelos alunos que ali frequentam e não níveis elevados de abstração e linguagem própria de quem ensina. O vocabulário deve ser adequado por quem ensina a quem aprende, sempre neste fluxo. Mesmo em conceitos tidos como elementares, pois tudo que é novo precisa de uma interlocução adequada para que seja alcançado por quem está em processo de aprendizagem.

Em uma aula já no Ensino Médio, ao fazer uma revisão sobre os conceitos de potenciação, não é raro o aluno dizer que "3^2", é "Duas vezes o três" , porém ao confrontar sua resposta e este aluno explicar melhor, o que ele quis dizer com "*Duas vezes três*" foi 3×3, o 3 apareceu duas vezes como fator, e de fato: $3^2 = 3 \times 3$; a linguagem não foi técnica, porém observando apenas o aspecto linguístico, deixando os conceitos matemáticos de lado, sua resposta estava certa. Quando este aluno usou a palavra *vezes* ele não se referia à operação de multiplicação, mas ao substantivo vezes, plural de vez. E nós, como matemáticos em exercício da função pensamos unicamente que o *"vezes"* se refere ao produto.

No processo de aprendizagem, a linguagem e como fazemos uso dela é parte fundamental e deve ter sua importância potencializada. Nas primeiras apresentações de um conceito novo, às vezes, *o que se fala* é menos importante do que *como se fala*, deixando os aspectos mais abstratos logo após preparar um ambiente propício para novas estruturas.

Para Moreira (2003, p.5)

> Para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente. Não se pode reduzir o significado nem ao significante nem às situações (referente). São as situações que dão sentido ao conceito, mas um dado conceito não se refere a um só tipo de situação e uma dada situação não pode ser analisada com um só conceito.

Portanto para uma aprendizagem significativa devemos, sem economia, explorar a linguagem adequando-a ao nível intelectual, à faixa etária e ao meio socio-cultural a que os alunos estão submetidos. Procurar ter clareza e usar um vocabulário que seja inteligível por todos, dando ênfase inicialmente aos conceitos e ideias em detrimento de uma linguagem mais rebuscada e rica de códigos. Assim a linguagem se tornará um aliado poderoso no ato de ensinar e um facilitador de absorção das ideias discutidas progressivamente.

2.3 A Matemática e a Língua Materna

A matemática e a língua materna, no nosso caso a língua portuguesa, têm papeis de destaque nos currículos em toda a educação básica tendo sempre a maior parte da carga horária e sendo objeto de avaliação da educação como um todo nas provas estaduais, federais e internacionais, como o caso da Prova Brasil/Saeb [2] e o Pisa[3].

Talvez por este motivo a comparação entre a aprendizagem em matemática e em língua materna ocupe uma infinidade de parágrafos acadêmicos. Pra nós, o foco em questão é aproveitar ao máximo a capacidade da linguagem em canalizar os conhecimentos, especialmente da matemática.

Para Machado (1998, p.109)

> Uma das questões mais candentes no que concerne ao ensino tanto da Matemática como da Língua Materna é a legitimidade ou a conveniência

[2] A Prova Brasil e o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) são avaliações para diagnóstico, em larga escala, desenvolvidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). Têm o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos . ***fonte:http://portal.mec.gov.br/prova-brasil***

[3] PISA:Programa Internacional de Avaliação de Estudantes.

> da utilização de um sistema de signos de um modo predominantemente técnico, operacional, restrito a regras sintáticas, em contraposição a um uso que privilegie o significado dos elementos envolvidos, portanto sua dimensão semântica. Entre as posições divergentes, há a daqueles que afiançam a suficiência da técnica operatória para os indivíduos que não se tornarão especialistas no assunto, o que abrange a grande maioria das pessoas. Para estes, seria natural utilizar um sistema simbólico como o da Matemática tal como o fazem com um automóvel ou um eletrodoméstico, sem uma compreensão mais profunda do modo como funcionam. Outra forma de abordagem da questão ressalta a importância de uma compreensão global do significado dos elementos e processos envolvidos em cada sistema; no caso do aprendizado da Língua Materna o ponto de partida são as unidades da primeira articulação - as palavras -, prenhes de significações, enquanto que no caso da Matemática, como uma reação às operações realizadas mecanicamente; algumas vezes ocorre uma subestimação dos algoritmos, como se fosse razoável realizar repetidas vezes uma determinada operação sem busca de um caminho ótimo ou a automatização natural de certos procedimentos.

Um ponto importante levantado por MACHADO é o fato que a maioria das pessoas não se tornarão especialistas no assunto, em questão, na matemática; alguns, inclusive, se esquivarão ao máximo desta disciplina que coleciona desafetos, desavenças essas construídas justamente pela fase em que estiveram na educação básica e não conseguiram, de fato, entender a fundo os conhecimentos a ponto de terem autonomia para interpretar e resolver questões, limitando-se a repetir passos decorados das soluções dos professores que tinham como verdade absoluta sem entender o porquê dos resultados obtidos. Uma situação preocupante, mas não rara é a incapacidade do aluno em resolver o mesmo problema com enunciados diferentes, por exemplo:

- Situação 1: A soma de dois números consecutivos é igual a 21. Qual é o menor deles?
- Situação 2: Qual o número que somado pelo seu sucessor é igual a 21?

Se na revisão o professor utilizar o enunciado da *Situação 1* e na avaliação utilizar o enunciado da *Situação 2*, embora seja para fazer a mesma coisa, muitos alunos terão dificuldade por ter mudado, achando que só conseguem resolver o que foi proposto na sua revisão.

Muitos alunos ficam presos à linguagem na forma escrita utilizada nos enunciados dos problemas e a partir daí escolhem o tipo de solução que utilizarão para resolver, isso se deve ao fato de que a grande maioria não entende o que é pra ser feito, não assimila o que está sendo feito, estão apenas reproduzindo, quase que às cegas o que “aprenderam” em sala. Para eles um bloco de palavras com algumas palavras-chave é suficiente e necessário na resolução de problemas. Este é um exemplo claro de como a má utilização da linguagem oral faz com que a linguagem gráfica seja determinante para agir de um modo A ou B na resolução. A língua materna tem a oralidade e a escrita, a matemática apenas a escrita e sua oralidade depende do uso da língua mãe. Para Smole (2000, pp.64-65)

> Por um lado, a língua materna é aquela na qual são lidos os enunciados, na qual se fazem comentários e que permite interpretar o que se lê de modo preciso ou aproximado, explícito ou vago. Nesse caso, a linguagem usual serviria para estabelecer relações entre o pensamento e a palavra, entre a escrita e a sua interiorização, entre a escrita e a sua interpretação. Por outro lado, a língua materna é parcialmente aplicada no trabalho matemático, já que os elos de raciocínio matemático se apoiam na língua, em sua organização sintática e em seu poder dedutivo. Mas as transformações, as operações que podem ser realizadas sobre as escritas matemáticas não têm equivalente na língua materna.

2.4 A Matemática como uma Linguagem

A matemática é uma ciência rica com uma linguagem própria e universal por meio de seus códigos, porém esta linguagem não possui oralidade e depende da língua materna para dar seus significados. É uma linguagem tão rica que em demonstrações praticamente não se utiliza a linguagem por palavras, mas por símbolos, e que são entendidos de forma universal pela comunidade científica. Ela é capaz de substituir o uso da língua materna, mas na escrita, pois quando a lemos, os códigos ganham oralidade de acordo com a língua mãe de quem lê. Este fato indica que os códigos matemáticos são substituíveis por palavras alcançando um grupo muito maior de pessoas quando estas não são deste ramo.

Quando nos deparamos com uma linguagem do tipo "$f(x) = x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$", embora esteja toda em códigos específicos, conseguimos ler perfeitamente que a função f de expressão $x^2 + 1$ é positiva qualquer que seja o número real que colocarmos no lugar de x. Mas se os conceitos fundamentais de função ainda não tiverem absorvidos pelos alunos, este tipo de linguagem deixará o conteúdo muito mais assustador do que realmente é. Por esse motivo, em determinadas situações em sala de aula, podemos usar uma escrita por extenso e deixar a escrita de códigos para um momento onde o conceito principal já esteja absorvido.

(MENEZES, 2000 apud ZUCHI, 2004, p.51) enfatiza que:

> Como a matemática é uma área do saber de enorme riqueza, é natural que seja pródiga em inúmeras facetas; uma delas é, precisamente, ser possuidora de uma linguagem própria, que em alguns casos e em certos momentos históricos se confundiu com a própria matemática. Na realidade, estamos perante um meio de comunicação possuidor de um código próprio, com uma gramática, e que é utilizado por uma certa comunidade. Esta linguagem tem registros orais e escritos e, como qualquer linguagem, apresentada diversos níveis de elaboração a competência dos interlocutores: a linguagem matemática utilizada pelos "matemáticos profissionais", por traduzir ideias de alto nível, é mais exigente do que a linguagem utilizada para traduzir ideias numa sala de aula.

Não estamos aqui marginalizando seu uso, muito pelo contrário, sabemos que esta linguagem é rica e completa para a sistematização desta ciência, mas no processo de aprendizagem a comunicação deve ser próxima à realidade de quem aprende e portanto o uso exagerado de símbolos causa um conflito de linguagens que podem acarretar em uma baixa produtividade por boa parte dos alunos.

GÓMEZ-GRANELL (2003) defende a aproximação entre a linguagem matemática e a linguagem verbal e dá outras visões.

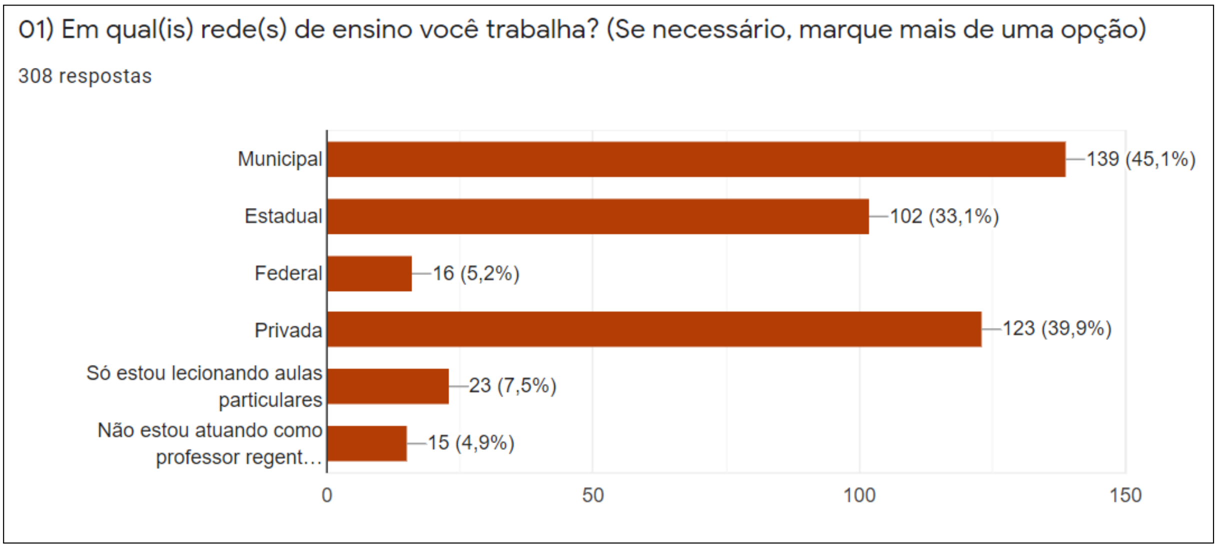
> E a linguagem matemática é compreendida como organizadora de visão de mundo, deve ser destacada com o enfoque de contextualização dos esquemas de seus padrões lógicos, em relação ao valor social e à sociabilidade, e entendida pelas intersecções que a aproximam da linguagem verbal. (GÓMEZ-GRANELL, 2003 apud LORENSATTI, 2009, p.91)

3 A PESQUISA REALIZADA COM OS DOCENTES

Para trazer pautas de discussão sobre linguagem na aula de matemática, estratégias para a solução de determinados problemas elementares nos conceitos de multiplicação sob uma ótica linguística, fizemos uma pesquisa de caráter motivacional para o trabalho utilizando o recurso de *Formulário do Google* que foi disparado em grupos de professores de matemática ou que lecionam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental em aplicativos de mensagens de celular, conforme pode ser visto no Apêndice A, onde 308 professores de diferentes redes de ensino contribuíram, residentes de diferentes áreas do estado do Rio de Janeiro, sendo sua maioria na capital. Destes, mais de 90% atuam na educação básica, que pode ser visto na Figura 2, e mais da metade atuam em escolas públicas, vide Figura 1, onde responderam um questionário contendo 8 questões, duas delas fazendo uma análise de perfil com informações sobre a rede em que trabalham: municipal, estadual, federal ou privada e a etapa que lecionam: Ensino Fundamental, anos iniciais, anos finais e Ensino Médio ou superior; cinco sobre linguagem e comunicação acerca de problemas envolvendo multiplicação, objeto de nosso estudo, e uma para que o entrevistado pudesse contribuir ou relatar uma experiência, caso quisesse, alguns professores relataram problemas enfrentados por eles em sala de aula para a abordagem da multiplicação e tabuada para os estudantes. Confirmando a necessidade de dialogarmos um pouco acerca deste primeiro e importante obstáculo para a maioria dos estudantes, a multiplicação. Propondo significados nas frases que dizemos quando lemos notações matemáticas, em especial a notação "$\times$ " que corresponde a palavra *vezes*, que será explorada nos capítulos seguintes deste trabalho.

A Figura 1 mostra o gráfico global sobre as redes trabalhadas pelos profissionais que participaram da pesquisa. Como os profissionais poderiam marcar mais de uma opção, detalho na lista abaixo a quantidade exata das principais respostas, as combinações de respostas não expostas na lista se deve a baixa frequência, que exponho aqui neste parágrafo para complementar as frequências: (Municipal/Aulas particulares/Não atuante): 1 resposta; (Municipal/Privada/Aulas particulares): 1 resposta; (Estadual/Federal/Privada): 1 resposta; (Municipal/Federal): 1 resposta; (Municipal/Aulas Particulares): 2 respostas; (Municipal/Não Atuante): 1 resposta; (Estadual/Não Atuante): 2 respostas; (Federal/Privada): 1 resposta; (Privada/Aulas Particulares): 2 respostas; (Aulas particulares/Não Atuante): 3 respostas e (Estadual/Federal): 1 resposta, totalizando 16 respostas que juntando com as 292 expostas na lista resultam em 308 participantes da pesquisa.

Figura 1 – Redes Trabalhadas pelos Entrevistados



Fonte: Gráfico gerado pelas respostas dos pesquisados no Google Forms

- (Municipal): 76 respostas;
- (Privada): 70 respostas;
- (Estadual): 34 respostas;
- (Municipal/Estadual): 30 respostas;
- (Estadual/Privada): 21 respostas;
- (Municipal/Privada): 14 respostas;
- (Municipal/Estadual/Privada):13 respostas;
- (Federal): 12 respostas;
- (Não Atuante): 8 respostas;
- (Aulas particulares): 14 respostas.

Totalizando 292 respostas.

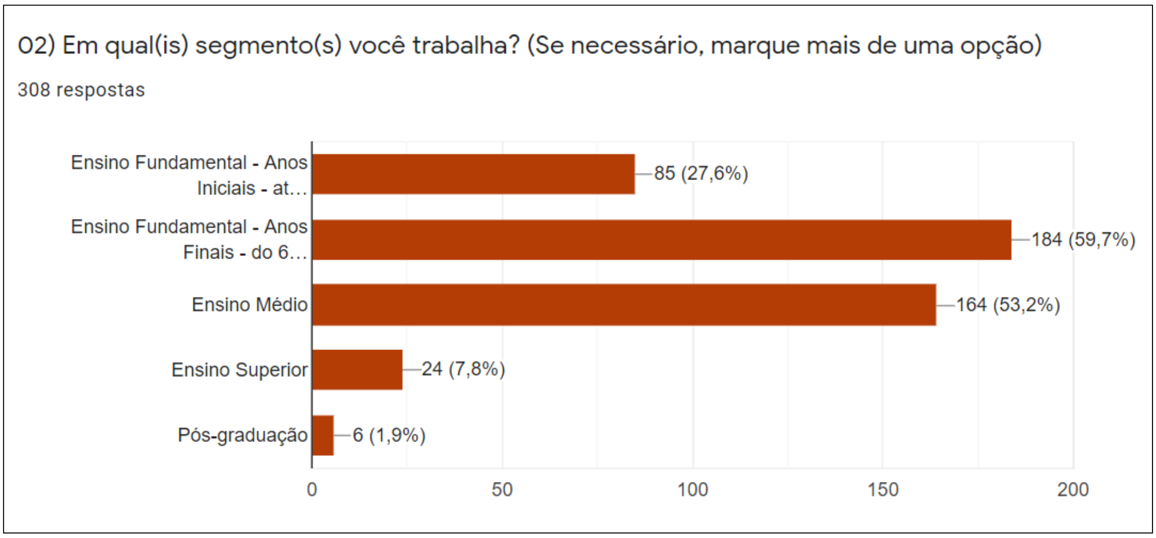
Esta análise nos dá uma boa referência sobre os alunos que são alcançados por esses profissionais. Se contarmos apenas as opções onde aparecem *municipal* ou *estadual*, teremos 188 profissionais atuantes na escola pública de educação básica. A pergunta 2 de nosso questionário representada na Figura 2 aprimora ainda mais a análise, se o público alvo da pesquisa foi alcançado (profissionais que lecionam matemática na educação básica).

Onde as principais respostas foram as seguintes:

EF1: Anos iniciais - até o 5° ano; **EF2**: Anos finais - do 6° ao 9° ano; **EM**: Ensino Médio; **SUP**: Ensino Superior; **PG**: Pós-graduação

- (EF2, EM): 88 respostas;
- (EF1): 62 respostas;
- (EF2): 59 respostas;
- (EM): 52 respostas;

Figura 2 – Perfil dos entrevistados na pesquisa de campo



Fonte: Gráfico gerado pelas respostas dos pesquisados no Google Forms

- (EF1, EF2): 13 respostas;
- (EF1, EF2, EM): 8 respostas;
- (EF1, EF2, SUP): 8 respostas;

Totalizando 290 respostas de 308 , as outras 18 respostas ficaram divididas em, (EF1, EF2, EM, SUP): 1 resposta; (EF2, EM, SUP, PG): 2 respostas; (EF2, SUP, PG): 1 resposta; (EM, SUP, PG): 2 respostas; (EF1, EM): 1 resposta; (EF2, SUP): 3 respostas; (EF2, PG): 1 resposta; (EM, SUP): 2 respostas;(SUP): 5 respostas. E ainda destacando professores que atuam no EF1 ou EF2, excluindo os que trabalham somente no EM, seriam mais de 77% dos entrevistados, com valor absoluto de 238 o que indica que a pesquisa alcançou o público pretendido.

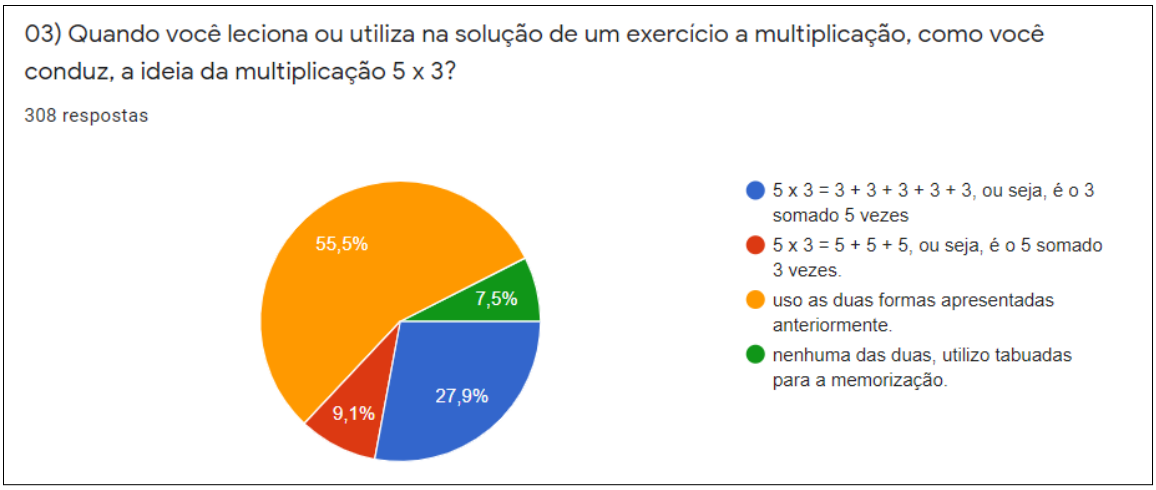
Terminado o bloco de análise de perfil dos entrevistado, vieram as 5 perguntas sobre métodos, linguagem e situações problema que serão utilizados e referenciados nos Capítulos 5 e 6.

A primeira pergunta deste bloco foi sobre a condução da ideia de multiplicação elementar pertencente à tabuada, 5×3 representada pela figura 3, com intuito de avaliar linguisticamente as práticas e se o recurso de multiplicação por soma de parcelas iguais é uma das ferramentas utilizadas pelos professores e se for, se está se relacionando com a língua em conformidade com as ideias levantadas pelo presente trabalho, onde vimos na Seção 6.1.

Analisando o gráfico global de respostas verificamos uma considerável parte dos professores(55,5%) que utilizam a ideia de adição de parcelas iguais juntamente com a comutatividade como algo natural. Destes, destaco a importância na fala de uma professora no espaço aberto para diálogo na questão 8 do presente questionário: *"Na multiplicação , ainda que seja comutativa, é muito importante a leitura e explicação na diferença entre* 3×5 *e* 5×3*."*. Outros 27,9% responderam de acordo com as ideias defendidas neste trabalho na Subseção 5.2.1, onde discutiremos melhor estas ideias.

A pergunta de número 4, representada pela Figura 4 aborda a questão dos recursos

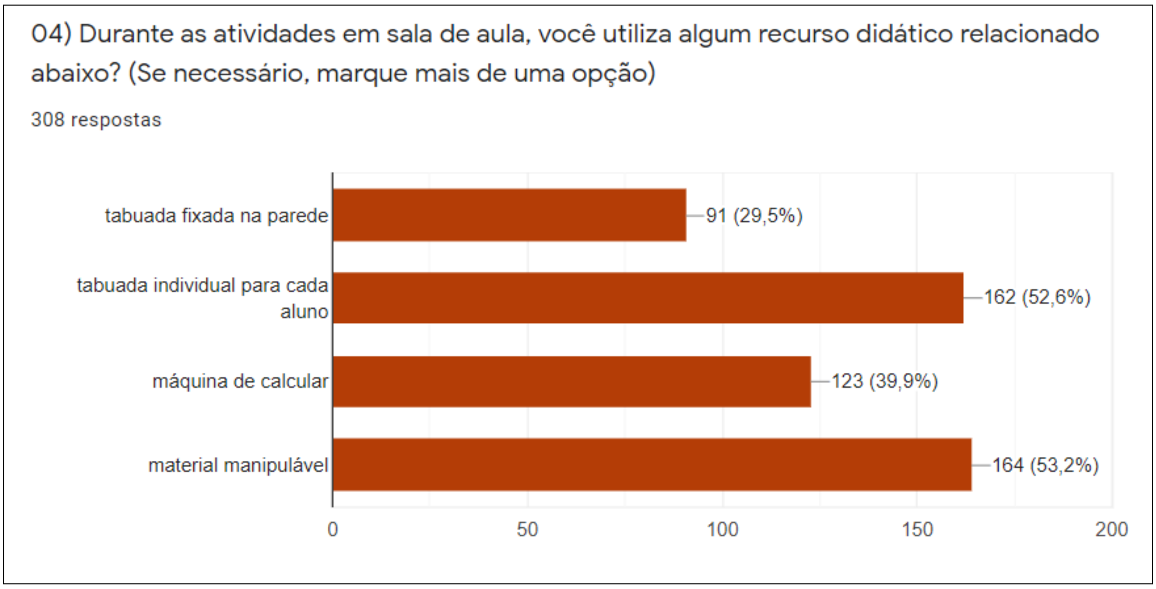
Figura 3 – Respostas da Pergunta 3 da Pesquisa



Fonte: Gráfico gerado pelas respostas dos pesquisados no Google Forms

utilizados por professores em sala de aula em relação à tabuada. Como os professores poderiam escolher mais de uma opção, também detalharemos logo abaixo as principais respostas:

Figura 4 – Gráfico de Barras Sobre Recursos Didáticos Utilizados pelos Profissionais



Fonte: Gráfico gerado pelas respostas dos pesquisados no Google Forms

TF: Tabuada fixa; **TI**: Tabuada individual; **MC**: Máquina de calcular; **MM**: Material manipulável.

- (MM): 62 respostas;
- (TI): 53 respostas;
- (MC): 35 respostas;
- (TF): 13 respostas;
- (TF, TI, MC): 28 respostas;
- (TI, MC): 26 respostas;

- (MC, MM): 20 respostas;
- (TF, TI, MM): 19 respostas;
- (TI, MM): 14 respostas;
- (TF, MM): 13 respostas;
- (TF, TI): 11 respostas.

É de se destacar que muitos professores utilizam materiais manipuláveis, que comentaram na questão 8 material dourado, tabuada pitagórica, tabela de bingo, ponteiros do relógio, pega varetas, como veremos a seguir:

Professor 1 *"ideia legal cartela de bingo quando professor pegar o número 16 exemplo o professor deve ditar* 2×8 *o aluno devera perceber se o resultado está na cartela."*

Professor 2 *"Tive um aluno que associou imediatamente a tabuada do 5 ao relógio e adotei esse método para explicar aos alunos."*

Professor 3 *"O uso do material dourado confeccionado por mim para uso individual foi uma experiência muito relevante para a compreensão das operações matemáticas."*

Professor 4 *"Para fixar, gosto de jogar 'pega varetas' e estimular o cálculo dos pontos feitos por meio da multiplicação. Também uso 'pega-pega tabuada' (um jogo industrializado para multiplicação) que faz com que eles queiram memorizar a tabuada para marcarem pontos, além de outros jogos e situações-problema para auxiliar na compreensão."*

Professor 5 *"Sempre que proponho aos alunos o preenchimento da tabuada pitagórica alguns alunos conseguem perceber a regularidade a medida que preenchem a tabela."*

Professor 6 *"Eu gosto de construir com os meus alunos a tabuada em forma de tabela, onde fica mais fácil visualizar os quadrados perfeitos, consequentemente, a raiz quadrada, além dos múltiplos e divisores."*

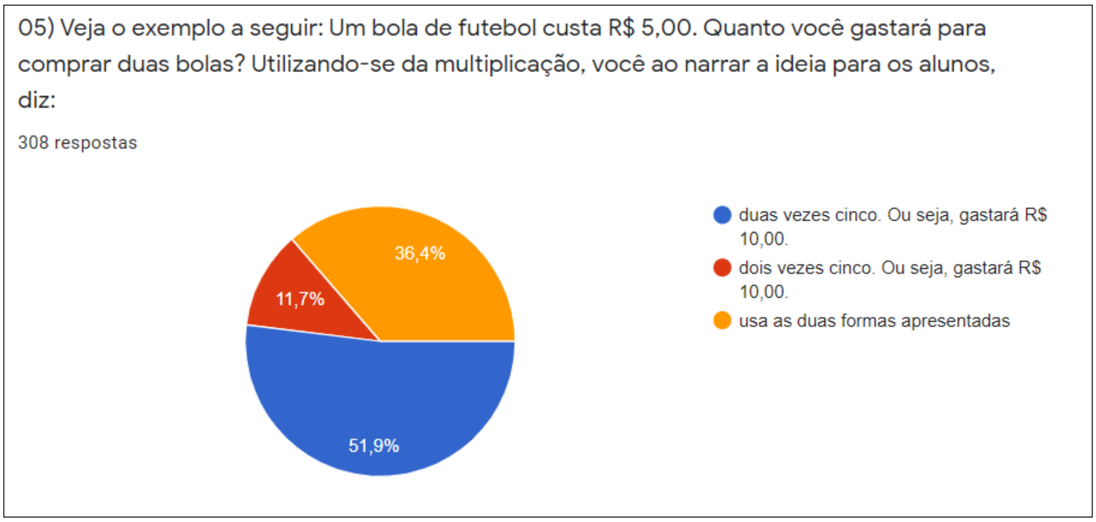
Professor 7 *"Uso alguns 'truques' com mãos e dedos, ábaco, quadros de multiplicação para que percebam o conceito e propriedades como a comutativa e a distributiva. A memorização da tabuada fica como consequência da aplicação de atividades que explorem os recursos mencionados."*

Professor 8 *"Utilizo uma malha quadriculada para relacionar a quantidade de linhas e colunas construídas pelo retângulo, formado com o produto dessas medidas e a quantidade de pontos."*

Destacamos ainda a utilização de tabuada individual como uma ferramenta bastante usual nas aulas ministrados pelos profissionais participantes de nossa pesquisa, pois na seção 6.3 faremos uma proposta de atividade neste sentido.

A questão número 5, representada pela figura 5 tem uma intenção mais profunda em relação à linguagem e sua colocação na análise de um problema matemático em uma situação-problema no âmbito da sala de aula. Ao questionar a oralidade utilizada para narrar o problema descrito, procuramos um apoio linguístico que será explorado na seção 6.1 dessa flexão do numeral em gênero.

Figura 5 – Respostas da Pergunta 5 da Pesquisa

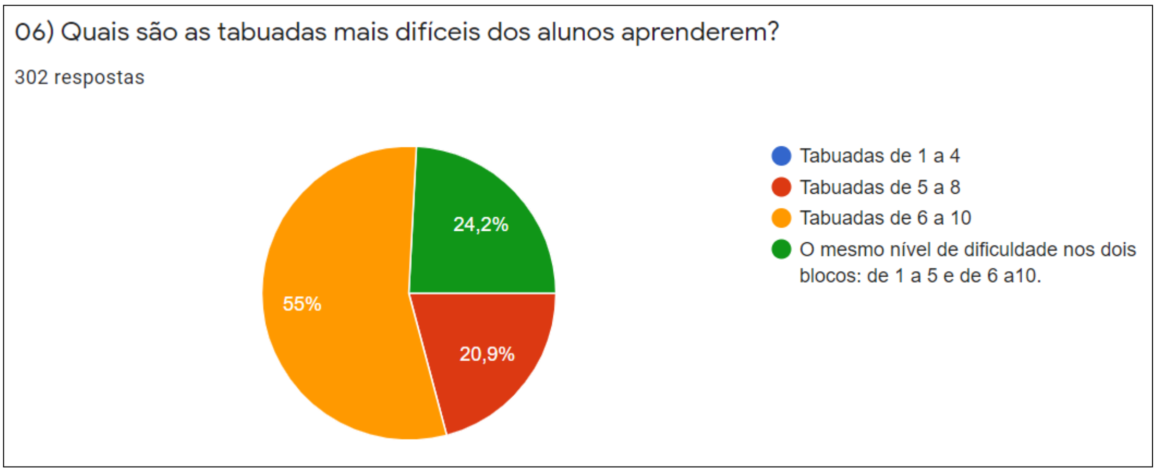


Fonte: Gráfico gerado pelas respostas dos pesquisados no Google Forms

Coletamos aqui embasamento na língua materna para defender a localização da notação 2×5 na tabuada utilizada pelos profissionais em suas aulas e como que podemos utilizar a oralidade e semântica da língua a favor da construção das definições e conceitos na aula de multiplicação pelo professor. As frequências absolutas desta pergunta foram: *duas vezes cinco*, 160; *usa as duas formas apresentadas*, 112 e *dois vezes cinco*, 36.

Nossa pergunta de número 6 do questionário procurou, através da experiência profissional de quem está ativamente trabalhando tabuadas com seus alunos, identificar blocos de maior dificuldade dos alunos em aprender ou aplicar os produtos na tabuada.

Figura 6 – Gráfico da Pesquisa sobre d Dificuldade da Tabuada



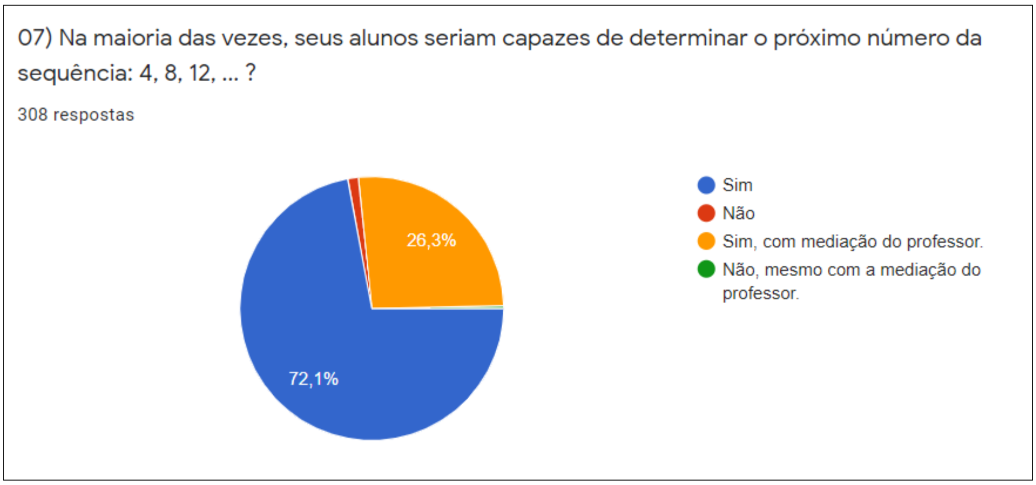
Fonte: Gráfico gerado pelas respostas dos pesquisados no Google Forms

A maioria dos professores, 166 deles (55%), disseram que o bloco de 6 a 10 é o mais difícil para seus alunos, enquanto que outros 73 (24,9%) não veem diferença de aprendizagem nos dois blocos: 1 a 5 e 6 a 10 conforme a Figura 6, ainda tivemos 63 respostas dizendo que as mais difíceis são de 5 a 8.

Em nossa proposta de tabuada e sua construção no Capítulo 6 e na Seção 6.3 iremos explorar um tipo de tabuada em que a metade da tabuada, de 1 a 5, equivale a 72,7% de sua construção, ficando apenas 27,3% dela no bloco tido como mais difícil pela nossa pesquisa. A construção detalhada está na referida Seção do Capítulo 6.

Nossa próxima pergunta, Figura 7 foi sobre uma habilidade prevista na BNCC (BRASIL, 2017) ilustrada na Figura 11 da Seção 4.1 de código EF03MA10 sobre construção de sequências ordenadas de números naturais resultantes de adições ou subtrações sucessivas, onde 98,4% dos profissionais acreditam que seus alunos consigam realizar essa previsão de um número oculto em uma sequência.

Figura 7 – Gráfico da Pesquisa sobre Sequências



Fonte: Gráfico gerado pelas respostas dos pesquisados no Google Forms

Para detalhar melhor, 222 professores (72,1%) disseram que sim e outros 81 (26,3%) que sim, mas com a mediação do professor. Este resultado é bem favorável para a nossa proposta de tabuada e sua construção no aspecto linguístico e nosso entendimento sobre a vantagem da utilização do método de adições de parcelas iguais para a construção da tabuada e com isso a sua compreensão. Ainda tivemos 4 respostas para “não” e 1 resposta para “não, mesmo com a mediação do professor”.

Dos 247 profissionais do Ensino Fundamental que responderam esta pergunta, 174 responderam *-sim-* e outros 70 *-sim, com mediação do professor-*. Apenas 4 professores dos 308 responderam que os alunos não conseguiriam determinar o próximo número dessa sequência. Este resultado também será explorado na Seção 6.3.

A questão número 8 serviu como um canal para que os professores, de uma forma geral, opinassem, sugerissem ou relatassem situações sobre as questões levantadas e apresentadas aqui. Obtivemos 109 respostas destes profissionais, algumas delas ganharam destaque no presente capítulo, outras serão exploradas nos Capítulos 4 e 6. As trocas e sugestões foram riquíssimas e contribuíram muito para a realização deste trabalho, motivando a necessidade de discutirmos sobre língua materna e matemática no contexto da multiplicação a procura de um equilíbrio entre o que se diz e o que se quer dizer.

4 SEMÂNTICA E OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

A matemática em sua linguagem, é possuidora de sua própria sintaxe e sobretudo a semântica. Visamos aqui aproximar a linguagem matemática à linguagem materna do indivíduo para fortalecer o cognitivo e deixar a linguagem matemática um pouco mais familiar para quem aprende. Mas afinal semântica é um termo com muitas ramificações e resumiremos à definição mais democrática de semântica, uma definição comum a maioria dos autores. “A semântica é o ramo da linguística voltado para a investigação do significado das sentenças.”(CANÇADO, 2005, p.16).

Ainda no aspecto de coexistirem duas linguagens, a materna e a de códigos, objeto de nosso estudo, pressupõe-se que cada uma carregue consigo palavras ou símbolos inerentes à sua estrutura, mas há interseções de palavras e é razoável imaginar que, ao se deparar com elas, a gente possa inferir o mesmo. As linguagens, sempre que possível, devem convergir para um mesmo significado. “Como assumimos que o linguista busca descrever o conhecimento linguístico que o falante tem de sua língua, assumimos, mais especificamente, que a semanticista busca descrever a conhecimento semântico que o falante tem de sua língua.”(CANÇADO, 2005, p.16).

Quando um aluno começa a trabalhar o *pensar matemático*, já traz vocábulos formados e ricos em conceitos relacionados à linguagem utilizada no dia-a-dia, a língua materna; nesse sentido, uma abordagem explorando tais conceitos acaba sendo mais próxima de sua realidade e torna o aprendizado mais familiar. O grande número de trabalhos relacionados a este tema de proximidade entre a matemática e a língua materna nos revela um problema vislumbrado por diversos autores e que já causa algum desconforto por parte dos professores pelos maus resultados obtidos pela maioria dos alunos cuja deficiência será potencializada conforme os conceitos forem evoluindo em sua formação na educação básica.

> Todas as línguas dependem de palavras e de sentenças dotadas de significado: cada palavra e cada sentença esta convencionalmente associada a pela menos um significado. Desse modo, uma teoria semântica deve, em relação a qualquer língua, ser capaz de atribuir a cada palavra e a cada sentença o significado (ou significados) que lhe(s) é (são) associado(s) nessa língua. (CANÇADO, 2005, p.19)

A linguagem utilizada em sala de aula deve ser sempre clara e objetiva, procurando significados e alicerce na língua falada pelos estudantes, “a linguagem matemática utilizada pelos ‘matemáticos profissionais’, por traduzir ideias de alto nível, é mais exigente do que a linguagem utilizada para traduzir ideias numa aula. Da mesma forma, a linguagem natural assume registos de complexidade diferente dependendo da competência dos falantes.” (MENEZES, 2000). Nesta perspectiva, discutiremos acerca da operação da multiplicação no sentido amplo, mas restrito às ideias de sentido na tabuada como base pra a realização de qualquer multiplicação.

> A aprendizagem significativa é aquela em que as ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé da letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende.(MOREIRA, 2011, p.13).

Percebemos que a multiplicação logo no início do ciclo escolar, gera uma "pré-seleção" de alunos, que em sua maioria apresentam no futuro outras dificuldades nos conceitos mais profundos da matemática e por isso deve ser bem trabalhada para a introdução de conceitos novos. A opção de decorar a tabuada e trabalhar mecanicamente faz com que muitos professores adotem essa opção esperando que de uma hora para a outra o raciocínio se modele e o aluno tenha bons resultados, o que pode acontecer ou não. Em nossa pesquisa, alguns professores mostraram que este problema dos alunos não saberem a tabuada já foi diagnosticado por eles e fizeram ponderações e sugestões. Veja abaixo algumas trocas e sugestões propostas pelos entrevistados:

Professora A:*"Eu sinalizo uma dificuldade muito grande, na maioria dos alunos, quando precisamos utilizar a tabuada."*

Professora B:*"Apresento a tabuada mais busco mostrar através de outros materiais de apoio que eles podem reconhecer a multiplicação sem decorar a tabuada."*

Professora C:*"Trabalhar a adição de parcelas iguais e através dela explicar a multiplicação, tudo fica simples para os alunos em sua maioria."*

Professora D:*"Gosto de trabalhar a ideia da soma dentro da multiplicação, mas na maioria das vezes, o aluno já chega no 6° ano com a ideia de decorar a tabuada, sem entender o processo que leva àqueles resultados."*

Professora E:*"É necessário que o aluno compreenda o real significado da multiplicação. A construção da tabuada de Pitágoras é de muita ajuda"*

Gostaria de destacar as falas das professoras D e E que mencionam as expressões *ideia* e *significado*, respectivamente. O que nos remete à definição de semântica que adotamos neste capítulo.

A **professora F** disse: *"A maioria dos alunos que tive acesso não compreendem a dinâmica da tabuada evoluíram por meio de memorização mecânica"*, que reforça a prática da memorização que tem seus resultados, mas que acaba deixando o entendimento em segundo plano. Em nossa pesquisa, 162(52,6%) dos professores disseram que utilizam a tabuada individual como ferramenta em sala de aula, o que evidencia a prática de memorização visual, mas 163 (53,2%) utilizam outros materiais manipuláveis para trabalhar conceitos e significados, conforme a Figura 4 no Capítulo 3; o que indica que os professores revezam diferentes técnicas em suas práticas para alcançar os diferentes tipos de alunos que compõem uma sala de aula.

> A qualidade do trabalho desenvolvido por uma turma, e consequentemente o tipo de linguagem e a qualidade da comunicação, depende, em grande medida, da forma como o professor organiza as situações de

> ensino/aprendizagem, da forma como organiza o trabalho dos alunos, de como os orienta e das tarefas que apresenta. (MENEZES, 2000)

Semanticamente, o estudo da tabuada para a inicialização do conceito multiplicação deve ter alguma relação com o mundo real, o que o aluno pode ver e correlacionar com o estudo aplicado na escola, tornar o *aprender* menos abstrato.

> "O que se pretende é a problematização do próprio conhecimento em sua indiscutível reação com a realidade concreta na qual se gera e sobre a qual incide, para melhor compreendê-la, explicá-la, transformá-la. Se 4x4 são 16 [...] não há de ser por isto que o educando deve simplesmente memorizar que são 16. [...] 4x4, sem uma relação com a realidade no aprendizado, sobretudo de uma criança seria uma falsa abstração. Uma coisa é 4x4 na tabuada que deve ser memorizada, outra coisa é 4x4 traduzidos na experiência concreta: fazer quatro tijolos quatro vezes. Em lugar de memorização mecânica de 4x4 impõe-se descobrir sua relação com um fazer humano. (FREIRE, 1980 apud KUHN; PEREIRA, 2020, p.474)

Neste trecho, Freire (1980) defende claramente a conexão entre a multiplicação da tabuada e a adição de parcelas iguais como um caminho natural para absorção por parte dos alunos, uma vez que há conexão com a realidade. Este método é uma das habilidades presentes na BNCC Brasil (2017) em diferentes etapas do ensino fundamental, conforme as Figuras 8, 9 e 10 .

Para Rocha e Menino (2009), a adição sucessiva de parcelas iguais normalmente é a primeira abordagem ao conceito de multiplicação que está na mesma linha da BNCC onde deixa bem explícito a não exigência de memorização da tabuada e devendo trabalhar $a \times b$ como uma notação para a escrita aditiva de parcelas iguais.

> A primeira abordagem ao conceito passa normalmente pela adição sucessiva de parcelas iguais. É nesta fase, quando reconhecem que três mais três é o mesmo que duas vezes três, que os alunos começam a desenvolver o conceito de multiplicação. Este conhecimento é aprofundado quando usam de forma flexível as propriedades da multiplicação para operar, recorrendo simultaneamente a produtos conhecidos, por exemplo das tabuadas. (ROCHA; MENINO, 2009)

Esta ideia privilegia o entendimento da palavra "*vezes*" em conformidade com a nossa língua, a ideia de repetição. "Quando um aluno responde a um problema de multiplicação com recurso à adição de parcelas iguais, encontra-se no nível de multiplicação por contagem. O cálculo estruturado na multiplicação corresponde à utilização da **ideia de quantas vezes**."(ROCHA; MENINO, 2009, p.111)

É sabido que, embora este método seja eficaz nos primeiros contatos com a multiplicação, não abrange outras multiplicações em conjuntos numéricos diferentes do conjunto dos números naturais. Veremos nos Capítulo 5 que mesmo não se aplicando às multiplicações em geral, a ideia pode ser explorada em cada etapa do processo de multiplicação por meio do algoritmo utilizado nas escolas, bem como outras técnicas de multiplicações pouco exploradas e até mesmo conhecidas com intenção de reafirmar que as adições sucessivas de parcelas iguais podem ser utilizadas sem prejuízos, independentemente do conjunto numérico ou a forma escolhida para a multiplicação

Há ainda casos de questões de matemática em um nível de complexidade maior, mas sua solução privilegia este conceito fundamental, onde a soma de parcelas iguais tem um papel de destaque em sua solução. Veja o exemplo abaixo de uma questão da OBMEP de 2012:

- (OBMEP - 2012) Quantas vezes 17^2 deve aparecer dentro do radicando na igualdade $\sqrt{17^2 + 17^2 + 17^2 + ... + 17^2} = 17^2 + 17^2 + 17^2$ para que ela seja verdadeira?

a. 9

b. 51

c. 289

d. 861

e. 2601

A pergunta de quantas parcelas 17^2 há no radicando, pode ser reescrita conforme a orientação da BNCC; sendo n o número de parcelas, esta quantidade pode ser representada por $n \times 17^2$, assim como no segundo membro onde há 3 parcelas de 17^2, e portanto pode ser reescrita por 3×17^2. O que deixaria a equação um pouco mais atraente e de resolução mais elementar.

$$\sqrt{\underbrace{17^2 + 17^2 + 17^2 + ... + 17^2}_{\text{n parcelas}}} = 17^2 + 17^2 + 17^2 \Longleftrightarrow \sqrt{n \times 17^2} = 3 \times 17^2$$

$\sqrt{n \times 17^2} = 3 \times 17^2$

$\Leftrightarrow 17\sqrt{n} = 3 \times 17^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} = \dfrac{3 \times 17^2}{17}$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} = 3 \times 17 = 51$, elevando a 2 ambos os lados;

$\Leftrightarrow n = 51^2 = 2601$, Letra e.

O que queremos mostrar com este exemplo é que, por mais que este conceito de adições de parcelas iguais esteja subentendido como uma habilidade pertinente aos anos iniciais, alguns problemas exigem que o estudante traga consigo este conceito fundamental. Associar este tipo de adição à multiplicação deveria ser natural e ser mais explorado durante as aulas nas elaborações e soluções das atividades propostas.

4.1 Matemática e Linguagem na BNCC: Compreensão e Aprendizagem

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que foi homologado em 2017, mas que já estava previsto na LDB[1] desde 1996, nele fica definido o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens que todos os alunos devem desenvolver em toda a educação básica, assegurando seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE)[2].

Embora, a área de linguagens presente na BNCC não contemple a matemática, possuidora de sua própria e exclusiva área, o documento traz o seguinte objetivo:

> Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.(BRASIL, 2017)

O trecho supracitado admite outros tipos de linguagens, artística, matemática e científica. A linguagem matemática na maioria das vezes em que é citada ou lembrada, está aprisionada na sua forma escrita, a de códigos que vimos no capítulo 2 se deve a ausência de oralidade desta linguagem. O documento também se refere ao *letramento matemático* que de acordo com ele, pode ser definido como as competências e habilidades de raciocinar, relacionar a aprendizagem a situações da vida cotidiana, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.

> É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). O desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática (BRASIL, 2017, p.266).

Sobre a ideia central deste trabalho, o aproveitamento da linguagem de forma paralela com os conceitos matemáticos, bem como a manutenção dos significados das sentenças tidas pelos alunos também está prevista na BNCC quando diz que:

> Ao longo do Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a progressão do conhecimento ocorre pela consolidação das aprendizagens anteriores e pela ampliação das práticas de linguagem e da experiência estética e intercultural das crianças, considerando tanto seus interesses e suas expectativas quanto o que ainda precisam aprender.(BRASIL, 2017, p.57)

[1] Lei de Diretrizes e Bases da Educação - LEI N° 9.394/1996
[2] Plano Nacional de Educação - LEI N° 13.005/2014

A BNCC propõe cinco unidades temáticas que orientam a formulação e desenvolvimento de competências e habilidades a serem desenvolvidas na educação básica: *Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas* e *Probabilidade e Estatística* .

> Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento(BRASIL, 2017, p.268).

O pensar matemático perpassa pela linguagem, depende da forma que leitor traduz as ideias descritas em enunciados e problemas, e exige um poder de abstração que nem sempre é trabalhado adequadamente, mas se modelando em alguns com o tempo e a experiência, "um problema matemático deve ser abordado também linguisticamente, pois, no interior de seu enunciado, existem uma sintaxe e uma **semântica**."(LORENSATTI, 2009, p.96). Pensar matematicamente é um objetivo, mas o caminho para que se alcance depende de questões linguísticas e a aproximação entre realidade e o problema a qual se pretende resolver, tornar menos abstrato. Para Lorensatti (2009), ainda no aspecto resolução de problema, "ler e compreender implica decodificar, atribuir e construir significado; é um ato interativo entre as características do texto e as do leitor.". O que está de acordo com a BNCC quando diz que "para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações." (BRASIL, 2017, p.268).

O uso da linguagem cotidiana, bem como seus significados devem servir como apoio a qualquer outro conhecimento; através da compreensão conectada com a realidade é que a aprendizagem em matemática fará sentido para o aluno e permitirá um avanço cognitivo quando a abstração for imprescindível em sua jornada acadêmica. "Portanto, a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações." (BRASIL, 2017, p.276).

A compreensão é condição sine qua non para a aprendizagem em matemática, qualquer aprendizagem que não seja precedida pela compreensão é apenas uma repetição de passos pré-definidos, uma mecanização que engessa a autonomia intelectual e impossibilita a resolução de um mesmo problema sob uma ótica diferente. Os PCN também fazem uma ligação entre aprendizagem e compreensão passando por significados e conexões com o cotidiano.

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais

> disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 1999b, p.19)

Nesta vertente iremos discutir nos próximos capítulos a aprendizagem da multiplicação, sobretudo a tabuada do ponto de vista linguístico em relação aos significados que os alunos trazem de situações cotidianas, mas restrito aos conceitos de multiplicação, técnicas e reformulação da tabuada; e uma proposta para professores abordarem estes assuntos com alunos no início do ciclo da educação básica ou para aqueles que avançaram, mas que não absorveram os conceitos adequados para sua série. Logo abaixo nas Figuras 8, 9 e 10 estão representadas as planilhas, na íntegra, no que diz respeito a multiplicação, múltiplos e a abordagem da multiplicação pela adição de parcelas iguais na BNCC.

Figura 8 – Planilha da BNCC 2° ano

Matemática	2º	Números	Problemas envolvendo adição de parcelas iguais (multiplicação)	(EF02MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.
Matemática	2º	Números	Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte	(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.

Figura 9 – Planilha da BNCC 3° ano

Matemática	3º	Números	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida	(EF03MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros.

Figura 10 – Planilha da BNCC 4° ano

Matemática	4º	Números	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Na planilha da BNCC comentada, disponibilizada no site do MEC, inclusive tem o seguinte comentário para a habilidade EF03MA07:

> Resolver e elaborar problemas de multiplicação com a ideia de adição de parcelas iguais (4 + 4 + 4 = 3 x 4) e elementos apresentados em disposição retangular, isto é, na forma de um retângulo (no exemplo seria um retângulo formado por três linhas com quatro quadradinhos em cada uma, o total de quadradinhos é 3 x 4 = 12). Considera-se que haja experiência anterior tanto com resolver e elaborar problemas quanto com a escrita aditiva e mesmo a multiplicativa para representar a resolução dos problemas. A ampliação trazida pela habilidade em relação ao 2º ano está na representação retangular. Não há exigência ainda de memorizar fatos básicos da multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10), mas deve ser incluída a representação do tipo a x b = c como uma forma de representar uma escrita aditiva de parcelas iguais. (BRASIL, 2017)

.

Destacamos ainda a habilidade EF03MA10 na Figura 11 que utilizaremos na Seção 6.3 para o auxílio da construção da tabuada pelo alunos com o recurso de adição de parcelas iguais para preenchimento da tabuada com intuito de absorção deste conceito por parte dos discentes.

Figura 11 – Habilidade EF03MA10 da BNCC

Matemática	3º	Álgebra	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.

5 MULTIPLICAÇÃO DO PONTO DE VISTA LINGUÍSTICO

Este trabalho propõe uma interpretação linguística em relação às tabuadas utilizadas desde o início do ciclo para professores utilizarem em sala de aula com seus alunos com uma abordagem mais interpretativa dos conceitos de multiplicação que acaba sendo um divisor de águas no que tange ao aprendizado da matemática, um obstáculo a ser vencido para que o aprendizado flua com menos dificuldade.

Faremos uma análise nos conceitos da multiplicação entre números naturais e em outros conjuntos numéricos, bem como processos diferentes de multiplicação, tradicionais ou não, com o intuito de mostrar que, embora o processo de multiplicação por adição de parcelas iguais se mostre frágil quando os números envolvidos não pertencem ao conjunto dos números naturais, ele ainda pode ser explorado; pois durante a utilização dos algoritmos na multiplicação entre números decimais, os algarismos que o compõe são multiplicados entre si e estes coincidem com os números naturais, portanto com a tabuada convencional de 1 a 10.

Para cada método de multiplicação apresentado na Seção 5.2, faremos uma análise do motivo pelo qual ele dá certo e reafirmaremos a intenção de defender a ideia de soma de parcelas iguais a cada passo de cada processo.

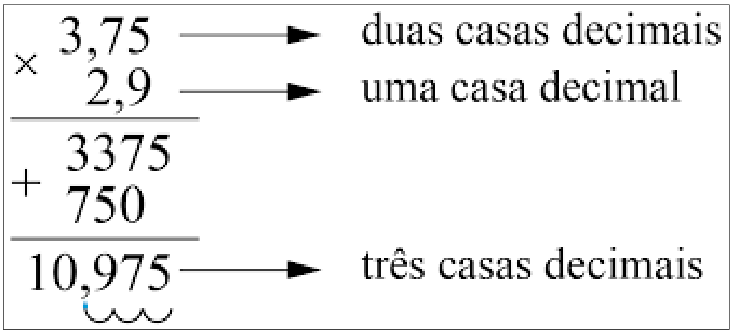
5.1 O Conceito de Multiplicação

A operação da multiplicação tem várias interpretações: *agrupamentos, área, arranjo retangular, calculo de possibilidades, soma de parcelas iguais*. Nós aqui estamos, no aspecto linguístico, estabelecendo uma correspondência entre a ciência e a língua, principalmente, portanto enfatizaremos a forma mais rudimentar em nossa opinião: *a adição entre parcelas iguais.* Esta interpretação está prevista nos PCN (BRASIL, 1999b, p.109) conforme o trecho a seguir:

> Uma abordagem frequente no trabalho com a multiplicação é o estabelecimento de uma relação entre ela e a adição: nesse caso a multiplicação é apresentada como uma adição de parcelas iguais. Por exemplo: preciso tomar 2 comprimidos durante 6 dias. Quantos comprimidos serão necessários? Assim, associa-se a escrita 6 x 2, na qual se definem papéis diferentes para o 6 (número de repetições) e para o 2 (número que se repete), não sendo possível tomar um pelo outro.
>
> Essa escrita apresenta-se como uma forma abreviada da escrita: 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 .
>
> No contexto de um problema como o que foi apresentado, essa abordagem gera ambiguidade. Embora 2 x 6 = 6 x 2, apenas a escrita 6 x 2 traduz o problema, pois a outra escrita indicaria que deve tomar 6 comprimidos durante 2 dias.

No entanto, esta definição se mostra frágil quando tomamos outros tipos de conjuntos numéricos, em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, por exemplo esta interpretação não faz sentido algum. Nos produtos -4×-5 e $\frac{2}{7} \times \frac{1}{6}$; fica impossível dizer que, no primeiro caso, temos -4 parcelas iguais a -5, e no segundo caso temos $\frac{2}{7}$ parcelas de $\frac{1}{6}$ pois a quantidade de parcelas em uma adição é discreta e isto não diminui a importância de tornar a multiplicação entre números naturais menos desgastante para o aluno em geral, pois até mesmo nas multiplicações em outros conjuntos numéricos, ao utilizarmos o algorítimo da multiplicação, a essência ainda é a multiplicação entre os algarismos que coincidem números naturais. Veja a seguir um exemplo da aplicação do algoritmo de multiplicação em $\mathbb{Q}$: $3,75 \times 2,9$:

Figura 12 – Multiplicação de Racionais



Fonte: <htpps://matematicanaweb.com.br>

Observe que, embora os números 3,75 e 2,9 não pertençam ao conjunto dos números naturais, as multiplicações envolvidas neste processo foram: $(9 \times 5), (9 \times 7), (9 \times 3), (2 \times 5), (2 \times 7), (2 \times 3)$, que são operações em $\mathbb{N}$. Por isso reforçamos o estudo pautado em uma linguagem que facilite a compreensão deste primeiro obstáculo na aprendizagem da matemática, a multiplicação. Em conformidade com os PCN (BRASIL, 1999b, p.36).

> Tornar o saber matemático acumulado um saber escolar, passível de ser ensinado/ aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado, pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicados diretamente aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fiéis dos objetos da ciência.

Quando aproximamos os conceitos matemáticos aos conceitos da língua materna, o processo de aprendizagem passa a ser mais natural, dando mais significado aos conteúdos em vez de manter a ideia de aprendizado por meio de repetições de exercícios que, para o aluno, não faz sentido algum. Ainda de acordo com os PCN (BRASIL, 1999b, p.37), "[...]essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos.". Dar significado semântico às multiplicações é de extrema importância, pois boa parte dos alunos não sabe a tabuada para a realização das multiplicações ficando dependente de uma consulta, sequer vislumbram uma forma alternativa de chegar ao produto desejado.

5.2 Métodos de Multiplicação

Há vários métodos para a multiplicação entre números naturais, alguns podendo ser explorados na escola, outros apenas ganham destaques em seções de curiosidades matemáticas. Cada um tem seu motivo pelo qual dá certo. Vamos aqui explorar a *soma de parcelas iguais* em 5.2.1, *arranjo retangular* em 5.2.2, o *algoritmo convencional de multiplicação* em 5.2.3 e por fim o *método egípcio* em 5.2.4 que também será explorado na Seção 6.4 como uma atividade pedagógica.

Ao realizarmos as contas necessárias em cada método, perceberemos que em todas, absolutamente todas, precisaremos como base de cálculo as multiplicações envolvendo os números naturais de 0 a 9 pelo fato de nosso sistema ser decimal.

5.2.1 Soma de Parcelas Iguais

Este método é sem dúvida o mais elementar, pois utiliza o conceito de adição e por isso é o mais difundido na educação básica, principalmente nos anos iniciais, conforme vimos nas habilidades previstas na BNCC na Seção 4.1. Esta maneira de pensar, inclusive, é nosso ponto de partida para a formação dos conceitos iniciais para a construção da tabuada de 1 até 10, que a base multiplicativa para todo o conjunto dos reais através dos algoritmos. Ao pensarmos em 4×3 (*"quatro vezes três"*), é intuitivo e adequado à língua a seguinte interpretação $3+3+3+3$, adequado por destacar quantas vezes o número 3 apareceu para determinarmos o produto: $4 \times 3 = 3+3+3+3 = 12$, são 4 parcelas do número 3. Observe que 3×4 tem uma interpretação um pouco diferente, porém equivalente: $3 \times 4 = 4+4+4 = 12$.

Claro que este método tem sua fragilidade, por exemplo não é vantajoso pensar desta maneira em produtos como, $18 \times 23, 125 \times 30$, cujas interpretações serão, respectivamente: $\underbrace{23+23+23+...+23}_{\text{18 parcelas}}$ e $\underbrace{30+30+30+...+30}_{\text{125 parcelas}}$, por isso defenderemos apenas para a tabuada de 1 a 10 que é o suficiente para, a partir daí, realizar qualquer tipo de multiplicação em quaisquer conjuntos numéricos, pois no processo convencional de multiplicação, os algarismos envolvidos são coincidentes com os números naturais de 0 a 9. Neste sentido, para nós, embora $4 \times 3 = 3 \times 4$ matematicamente, a interpretação de acordo com a língua é bem diferente e devemos tomar cuidado ao utilizar indiscriminadamente ambas as formas sem critérios bem estabelecidos e a proposta clara. Veja mais uma vez como ficam as interpretações, de acordo com a língua, das multiplicações 4×3 e 3×4, respectivamente:

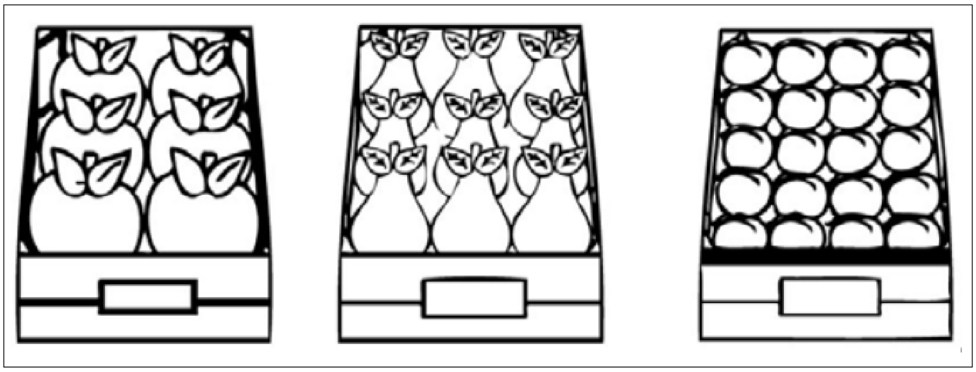
- $4 \times 3 = 3+3+3+3$
- $3 \times 4 = 4+4+4$

Embora os produtos (4×3 e 3×4) e os resultado ($3+3+3+3$ e $4+4+4$) sejam iguais, a comutatividade da multiplicação não é tão óbvia como parece e portanto não deve ser utilizada de qualquer maneira; para alguns o seu uso imediato não faz sentido, e pode acarretar em uma lacuna vaga entre a escrita na língua materna (como ela se conecta com o campo das ideias) e a escrita em códigos proposta pelo professor na solução de algum problema. No exemplo *"qual o número que multiplicado por 2 é igual a 10?"*, embora a equação "$2x = 10$" resolva o problema, o texto revela esta interpretação $x \times 2 = 10$. Um número desconhecido comumente chamado de x multiplicado ($\times$) por 2 é igual($=$) a 10. No ponto de vista semântico, um número multiplicado por dois não é o mesmo que o 2 multiplicado por um número. Esteticamente $2x = 10$ leva vantagem em $x \times 2 = 10$, porém um passo perdido na obtenção do entendimento por parte dos alunos pode colocar todo o processo em risco. Não quer dizer que sempre deveremos fazer desta forma, de estética menos favorável, mas também não deve ser ignorada na introdução de conceitos elementares e deixar para utilizar a comutatividade quando esta for tão natural quanto aparenta ser para todos os alunos, a comutatividade da multiplicação não é tão natural para para todos os alunos.

Alguns autores estimulam para que a comutatividade seja trabalhada desde o início da multiplicação por meio da distribuição retangular, Rocha e Menino (2009) defende esta exploração gradual ao se referir a Figura 13.

> "Com esta estratégia pode iniciar-se a compreensão de relações matemáticas importantes como a propriedade comutativa (o resultado de 2×3 é o mesmo de 3×2). Na verdade, a exploração gradual desta propriedade permitirá, mais tarde, ampliar o conhecimento das tabuadas (se já conhece o produto 3×2 da tabuada do dois, então passa a conhecer-se o produto 2×3 da tabuada do três)." (ROCHA; MENINO, 2009, p.114)

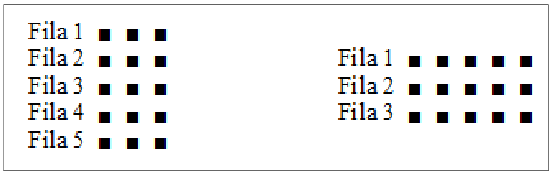
Figura 13 – Caixas de Frutas - Multiplicação por Arranjo



Fonte: (ROCHA; MENINO, 2009)

A comutatividade da multiplicação com a interpretação da multiplicação pela disposição retangular é muito palpável e fácil de ser aceita em qualquer nível de escolaridade, o que não acontece com a ideia de soma de parcelas iguais. Dispor 3 elementos em 5 fileiras ou dispor 5 elementos e 3 fileiras precisamos da mesma quantidade de elementos. O que não fica claro com os algarismos e a interpretação aditiva: $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ no primeiro caso e $5 + 5 + 5$ no segundo, mas com recurso geométrico fica muito óbvio, conforme a Figura 14.

Figura 14 – Comutatividade: Disposição Retangular



O importante é o professor conhecer os diferentes métodos, pois, às vezes para um tipo de conceito um método pode ser eficiente do ponto de vista didático, mas em outro conceito não. Antunes (1958) também defende que tais conceitos sejam logo trabalhados com a turma, que veremos com mais detalhes na Seção 6.2. Em nossa pesquisa 55,5% dos professores conduziriam a ideia de 5×3 das duas formas: $3+3+3+3+3$ e $5+5+5$, onde pode ser visto na Figura 3, até pelo fato de que a propriedade comutativa esteja tão enraizada em nós professores que tratamos como se fossem sinônimos. Do ponto de vista matemático é evidente que $5 \times 3 = 3 \times 5$, mas em um contexto pode fazer mais ou menos sentido o uso de uma dessas formas. Por exemplo, ao anunciarmos que arrecadamos R$ 5,00 de 3 pessoas é mais natural associarmos a adição $5+5+5$ para esse contexto do que $3+3+3+3+3$, portanto o produto 3×5, do ponto de vista semântico, faz mais sentido do que 5×3. Entenda que arrecadar R$ 3,00 de 5 pessoas é o mesmo que arrecadar R$ 5,00 de 3 pessoas, mas o problema definiu as parcelas pelo valor em dinheiro e a quantidade delas pelas pessoas que contribuíram.

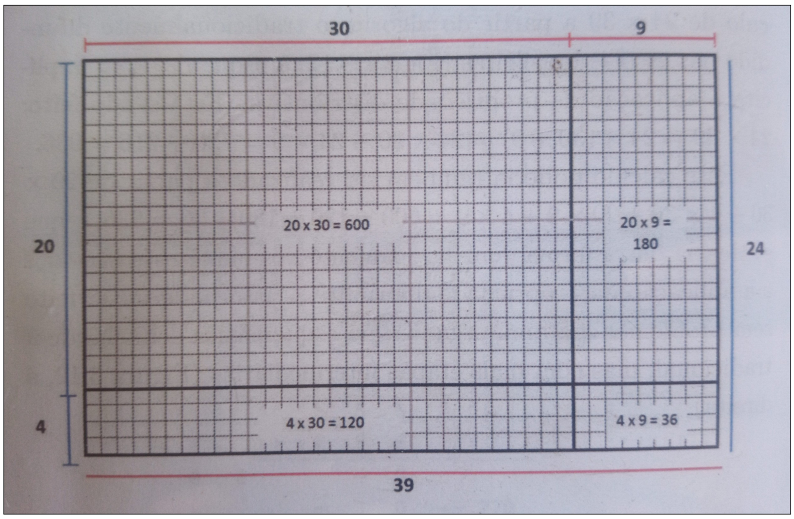
A comutatividade está tão enraizada nos conceitos de professores e de alguns alunos que têm algum tipo de vantagem na aprendizagem de matemática que acabam, mesmo querendo usar o recurso linguístico, dando outro significado para a própria resposta. Veja aqui o que disse a **Professora k** quando um aluno lhe fez uma pergunta: *“Um aluno já me perguntou: ‘professora quanto é* 2×3 *?’. Eu falei e só você somar o número 2 , 3 vezes ou seja* $3+3=6$.*”*, observe que a explicação não foi condizente com a pergunta, mas o exemplo dado foi. Somar o *dois* três vezes seria 2+2+2 que justifica a multiplicação 3×2. É este conflito de ideias que devemos combater quando o aluno está carente de significados e procurando respostas. Ao pensar no problema em português, semanticamente falando, ela deu uma resposta e matematicamente outra equivalente numericamente, mas e o entendimento? Lembrando que é por meio da linguagem que se aprende, que fazemos conexões.

No próximo capítulo falaremos sobre a tabuada com olhar linguístico e discutiremos sobre as diferentes formas de representá-la, além de propor uma atividade para ser trabalhada em sala de aula com a perspectiva de auxílio da língua para a absorção dos conceitos envolvidos nas multiplicações pertinentes ao que chamamos de tabuada, seção 6.3, e outra para abordar as propriedades comutativa e distributiva da multiplicação em relação à adição, seção 6.4.

5.2.2 Arranjo Retangular

Um dos métodos presentes nos PCN (BRASIL, 1999b) é o de arranjo retangular, que consiste em dispor em um retângulo os fatores ocupando a sua base e a sua altura, conforme as Figuras 15 e 16; podendo ser explorada a distributividade que a multiplicação tem em relação à adição. No primeiro exemplo ilustrado em (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2015, p.128) temos a ideia deste tipo de multiplicação com uma interpretação mais geométrica e a seguir uma interpretação simplificada da multiplicação entre 24 e 39 utilizando a representação numérica, mas mantendo o mesmo princípio. Para tal feito, os números 24 e 39 foram parcelados de acordo com o sistema posicional decimal: $24 = (20 + 4)$ e $39 = (30 + 9)$ e em seguida organizados subdividindo-se o retângulo contendo 39 quadradinhos de base por 24 quadradinhos de altura, de maneira que essa subdivisão ficasse de acordo com o sistema posicional decimal, duas dezenas e 4 unidades e 3 dezenas e 9 unidades em sua altura e sua base, respectivamente.

Figura 15 – A Multiplicação em Arranjo Retangular



Fonte: (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2015)

Para nós professores é bem clara a associação que este método faz com áreas retangulares (que nem é nosso foco neste trabalho), mas o inconveniente deste tipo de distribuição é a construção demasiadamente grande, se não contarmos com um papel previamente quadriculado, que pode levar ao desinteresse por parte dos alunos. Por isso há uma maneira simplificada de calcular este produto utilizando a representação numérica, deixando de ser uma interpretação geométrica para ser estritamente algébrica que há o ganho em relação à construção e desenvolvimento e uma perda em relação a visualização e entendimento de saber o que está acontecendo por trás do algoritmo presente na Figura 16. Onde a operação distributiva fica responsável pelas parcelas e a comutativa pela liberdade de escolha da soma que será feita, linhas ou colunas. Portanto, ao utilizarmos este método, é importante que o visual seja trabalhado antes de pôr em prática o algoritmo para a realização desta multiplicação por meio algébrico.

Observe atentamente os passos utilizados neste método e como chegamos às parcelas por meio da distributividade.

24×39

$\Leftrightarrow (20 + 4) \times (30 + 9)$

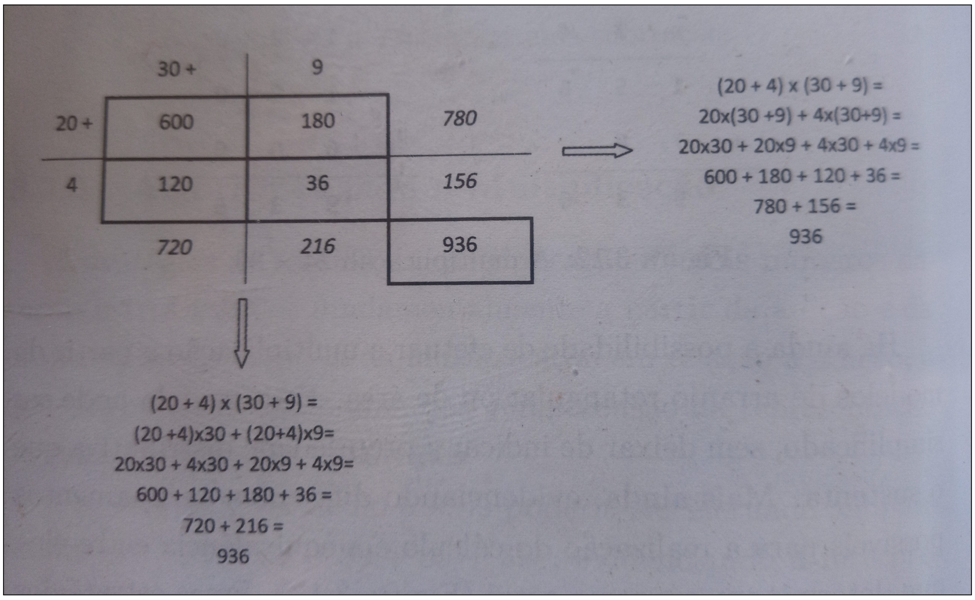
$\Leftrightarrow 20 \times 30 + 20 \times 9 + 4 \times 30 + 4 \times 9$

$\Leftrightarrow 600 + 180 + 120 + 36 = 936$

A associatividade da adição se justifica na liberdade de escolha da soma, pois $600 + 180 + 120 + 36 = 936$ independentemente da ordem escolhida das parcelas, pois a quantidade sempre será o total de quadradinhos representados na construção da multiplicação por esse método.

A construção na Figura 16 segue o mesmo principio, porém simplificado no que diz respeito ao número de quadradinhos, o que é um atrativo para o aluno, mas para entender este processo terá que ter entendido previamente o mais geométrico, pois os conceitos ficam mais visíveis.

Figura 16 – A Multiplicação em Arranjo Retangular simplificada: 24×39



Fonte: (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2015)

Para exemplificar ainda mais, faremos o produto 234×319 representado na Tabela 1, para isso escreveremos 234 como *duas centenas, 3 dezenas e quatro unidades*, $234 = 200 + 30 + 4$ e 319 como *três centenas, uma dezena e nove unidades*, $319 = 300 + 10 + 9$, conforme o sistema decimal. Observe que $234 \times 319 = (200 + 30 + 4) \times (300 + 10 + 9)$ que pela distributividade da multiplicação em relação à adição, teremos: $(200+30+4) \times (300+10+9) = 200 \cdot 300 + 200 \cdot 10 + 200 \cdot 9 + 30 \cdot 300 + 30 \cdot 10 + 30 \cdot 9 + 4 \cdot 300 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 60000 + 2000 + 1800 + 9000 + 300 + 270 + 1200 + 40 + 36 = 74646$.

.

Tabela 1 – Método de Multiplicação por Arranjo Retangular Simplificado: 319×234

	200+	30+	4	
300+	60000	9000	1200	70200
10+	2000	300	40	2340
9	1800	270	36	2106
	63800	9570	1276	**74646**

A associatividade da adição, de novo, se explica porque não importa se somarmos a última coluna ou a última linha, o resultado será o mesmo: 74646, pois

$$\overbrace{(60000+2000+1800)}^{63800}+\overbrace{(9000+300+270)}^{9570}+\overbrace{(1200+40+36)}^{1276}=$$

$=\overbrace{(60000+2900+1200)}^{70200}+\overbrace{(2000+300+40)}^{2340}+\overbrace{(1800+270+36)}^{2106}=74646$. Observe que em ambos os casos temos as mesmas parcelas tomadas em grupos diferentes.

Na Tabela 2 faremos a multiplicação entre 36 e 25 utilizando o método por arranjo retangular e para isso escreveremos os fatores 36 e 24 parcelados conforme o sistema decimal, $36 = 30 + 6$ e $25 = 20 + 5$

Tabela 2 – Método de Multiplicação por Arranjo Retangular Simplificado: Construção de 36×24

	20+	5	
30+			
6			

Para completar a Tabela 2 será feita a multiplicação entre os números da linha e coluna a qual pertence a célula. Por exemplo, a célula em branco abaixo do 20 e ao lado do 30 será preenchida por 600, pois $20 \times 30 = 600$, conforme vemos na Tabela 3 e assim faremos com todos. E por fim, as ultimas células, tanto das linha, quanto das colunas, faremos o somatório.

Tabela 3 – Método de Multiplicação por Arranjo Retangular Simplificado: 36×25

	20+	5	Soma ↓
30+	600	150	750
6	120	30	150
Soma →	720	180	**900**

No esquema abaixo, mostraremos como esse método de multiplicação utiliza a propriedade distributiva que a multiplicação tem em relação à adição.

$$(20+5)(30+6)$$

$\overbrace{20\cdot 30}^{\mathbf{600}}+\overbrace{20\cdot 6}^{\mathbf{120}}+\overbrace{5\cdot 30}^{\mathbf{150}}+\overbrace{5\cdot 6}^{\mathbf{30}} = 900$, que coincidem com as parcelas distribuídas nas células da Tabela 3.

Até aqui exemplificamos produtos com a mesma quantidade de algarismos, três algarismo cada em 319×234 e dois algarismos cada em 38×25. Na Tabela 4 faremos a multiplicação entre 112 e 23 para assimilarmos mais este recurso para a multiplicação. Para isso escreveremos: $112 = 100 + 10 + 2$ e $23 = 20 + 3$. Para isso precisaremos construir a tabela suficiente para os 6 produtos envolvidos no processo e mais a linha e coluna extras para o somatório dos produtos como fizemos nos casos anteriores.

Tabela 4 – Método de Multiplicação por Arranjo Retangular Simplificado: Construção de 112×23

	20+	3	
100+			
10+			
2			

Iremos preencher cada célula pelos produtos indicados na linha e na coluna a que pertencem: $\overbrace{100 \cdot 20}^{\mathbf{2000}} + \overbrace{100 \cdot 3}^{\mathbf{300}} + \overbrace{10 \cdot 20}^{\mathbf{200}} + \overbrace{10 \cdot 3}^{\mathbf{30}} + \overbrace{2 \cdot 20}^{\mathbf{40}} + \overbrace{2 \cdot 3}^{\mathbf{6}}$, conforme a Tabela 5.

Tabela 5 – Método de Multiplicação por Arranjo Retangular Simplificado: Construção de 112×23

	20+	3	Soma ↓
100+	2000	300	2300
10+	200	30	230
2	40	6	46
Soma →	2240	36	**2576**

Observe que $2300 + 230 + 46 = 2240 + 36$, pois os números foram construídos utilizando as mesmas parcelas tomadas em ordens diferentes, reforçando a propriedade associativa para os alunos.

Este procedimento de organizar posicionalmente os algarismos de acordo com o sistema decimal também é importante, porém fica oculto no método convencional de multiplicação que trataremos na Subseção 5.2.3 onde exploraremos melhor este assunto e também a distributividade da multiplicação.

5.2.3 Algoritmo Convencional de Multiplicação

O método que utilizamos nas escolas e em nosso cotidiano em geral também fica implícita a distributividade da multiplicação em relação à adição. Da mesma forma que o método por Arranjo Retangular, aqui também reorganizamos o número conforme o sistema posicional, mas de uma forma muito mais implícita. Observe os exemplos abaixo começando pela Figura 17.

Ao multiplicarmos 37 por 5, fazemos da seguinte forma:

Figura 17 – Multiplicação entre 5 e 37

$$
\begin{array}{rrr}
 & 3 & \\
 & 3 & 7 \\
 & \times & 5 \\
\hline
1 & 8 & 5
\end{array}
$$

Note que $37 \times 5 = (30 + 7) \times 5 = 30 \times 5 + 7 \times 5 = 150 + 35 = 185$. Este algoritmo esconde a distributividade, como mencionamos e podemos interpretar o processo de multiplicação da Figura 17 da seguinte maneira ilustrada na Figura 18.

Este é, sem dúvida, o método mais difundido nas aulas de matemática, tanto por professores quanto por alunos. Como se fosse o "jeito certo" de calcular multiplicações, admitindo outras maneiras tidas como "macete" para fazer multiplicações. A maioria de nós, ao lembrarmos de multiplicação, ou se precisarmos multiplicar números de produto difícil, recorremos a este método.

Figura 18 – Multiplicação entre 5 e 37 Evidenciando a Distributividade

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & 3 & 7 \\
 & & \times & 5 \\
\cline{2-4}
 & & 3 & 5 \\
+ & 1 & 5 & 0 \\
\hline
 & 1 & 8 & 5
\end{array}
$$

E nos casos onde ambos os fatores têm dois algarismos, como o nosso exemplo 23×18, a distributividade fica evidenciada em $23 \times 18 = (20+3) \times (10+8) = 20 \times 10 + 20 \times 8 + 3 \times 10 + 3 \times 8 = 200 + 160 + 30 + 24 = 414$. A Figura 19 mostra o algoritmo usado na escola e o evidenciando a distributividade que fica oculta com a manipulação da posição quando trocamos o algarismo da unidade para a dezena, e daí para a centena e assim por diante, conforme os exemplos a seguir:

$$
\begin{array}{rrr}
 & 2 & 5 \\
\times & 1 & 8 \\
\hline
2 & 0 & 0 \\
2 & 5 & \\
\hline
4 & 5 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 1 & 5 & 3 \\
 & & \times\ 4 & 3 & 2 & 1 \\
\cline{2-6}
 & & & 1 & 5 & 3 \\
 & & 3 & 0 & 6 & \\
 & 4 & 5 & 9 & & \\
6 & 1 & 2 & & & \\
\hline
6 & 6 & 1 & 1 & 1 & 3
\end{array}
$$

No primeiro caso o 200 é uma das parcelas presentes na soma quando utilizamos a propriedade distributiva, mas o 25 tem valor relativo de 250, pois deslocou uma casa para a esquerda por ter trocado de algarismo, o algarismo 1 em 18 exerce função de 10 na posição em que se encontra no sistema decimal. Vamos analisar pela distributividade, $25 \times 18 \Rightarrow 25 \times (10 + 8) \Rightarrow 25 \times 10 + 25 \times 8 = 250 + 200$. No segundo caso, analogamente, de cima para baixo, os valores relativos são: $153 \rightarrow 153, 306 \rightarrow 3060, 459 \rightarrow 45900, 612 \rightarrow 612000$, todos eles são parcelas quando utilizamos a distributividades em $153 \times \underbrace{(4000 + 300 + 20 + 1)}_{4321}$.

Na Figura 19 fazemos um comparativo com a forma tradicional deste algoritmo e a forma onde evidenciamos as parcelas embutidas pela distributividade. Note que $23 \times 18 \Rightarrow (20 + 3) \times (10 + 8)$, onde

$$(20 + 3)(10 + 8)$$

$$\Rightarrow 20 \times 10 + 20 \times 8 + 3 \times 10 + 3 \times 8$$

$$\Rightarrow 200 + 160 + 30 + 24 = 414.$$

Figura 19 – Multiplicação entre 18 e 23

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ 23 \\ \times\ 18 \\ \hline 184 \\ +\ 23 \\ \hline 414 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times\ 18 \\ \hline 24 \\ 160 \\ 30 \\ +\ 200 \\ \hline 414 \end{array}$$

Sobre as duas formas de multiplicação presentes na Figura 19, a primeira tem duas parcelas: 184 e a relativa 230, que são equivalentes a $\underbrace{(24 + 160)}_{184}$ e $\underbrace{(30 + 200)}_{230}$ da segunda que, caso os fatores fossem trocados, acabaria desenvolvendo as mesmas parcelas justificando mais uma vez a distributividade da multiplicação sobre a adição pela associatividade da adição, conforme podemos ver em:

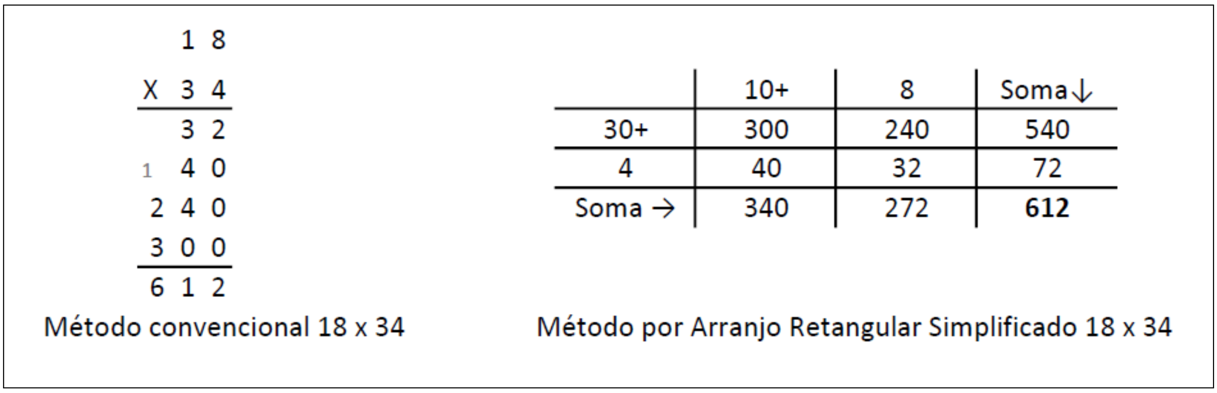
$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 18 \\ \hline 184 \\ 23 \\ \hline 414 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18 \\ \times\ 23 \\ \hline 54 \\ 36 \\ \hline 414 \end{array}$$

Onde ficam subentendias as somas tomadas de modos diferentes com as quatro parcelas: $\underbrace{(24+160)}_{184} + \underbrace{(30+200)}_{230}$ e $\underbrace{(24+30)}_{54} + \underbrace{(200+160)}_{360}$, onde 230 e 360 estão visualmente representados por 23 e 36, respectivamente. Observe que as duas adições são formadas pelas mesmas quatro parcelas: $24, 30, 160$ e 200.

Este processo de pular uma casa para a esquerda quando avançamos os algarismos do fator de baixo produz uma mecanização do procedimento sem o entendimento do real sentido que isso propõe. Para um bom entendimento, precisamos promover uma harmonia entre o método e o conceito, saber como fazer e o porquê fazer.

Quando fazemos a forma que evidencia as parcelas ocultas no processo, fica bem próximo do Método por Arranjo Retangular Simplificado que foi tratado na Seção 5.2.2. Observe a Figura 20.

Figura 20 – Multiplicação entre 18 e 34 comparativa



Note ainda que as parcelas da linha Soma $\rightarrow$ (340 e 272) e da coluna Soma $\downarrow$ (540 e 72) são os valores relativos das parcelas do modelo convencional trocando a ordem dos fatores, pois 54 tem valor relativo 540 e 34 tem valor relativo 340 por causa da mudança de casa para a esquerda, conforme podemos ver abaixo:

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 4 \\ \times & 1 & 8 \\ \hline 2 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & \\ \hline 6 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & 8 \\ \times & 3 & 4 \\ \hline & 7 & 2 \\ 5 & 4 & \\ \hline 6 & 1 & 2 \end{array}$$

Portanto o método por Arranjo Retangular Simplificado pode servir como base para absorção dos conceitos de multiplicação durante o processo de aprendizado pelo método convencional. Uma nova perspectiva acerca das operações realizadas para, através da comparação, entender o que fica por trás do algoritmo e a partir daí reforçar a distributividade da multiplicação em relação a adição e a propriedade associativa da adição.

$$(30+4)(10+8)$$

$$= \underbrace{30 \cdot 10}_{300} + \underbrace{30 \cdot 8}_{240} + \underbrace{4 \cdot 10}_{40} + \underbrace{4 \cdot 8}_{32}$$

Que são as mesmas parcelas encontradas na Figura 20 e que tomadas duas a duas em ordens distintas coincidem com as parcelas resultantes pelo método convencional: $\underbrace{240+32}_{272} + \underbrace{300+40}_{340} = \underbrace{40+32}_{72} + \underbrace{300+240}_{540}$ modificando a ordem dos fatores conforme nosso exemplo em 34×18 e 18×34.

5.2.4 Método Egípicio

Este método de multiplicação é bem interessante, pois utilizamos apenas a multiplicação por 2 para multiplicarmos quaisquer números naturais e isso se deve ao fato de que *todo número natural pode ser escrito como um somatório de potências de* 2 de forma única, onde está devidamente demonstrado em Steffenon (2016, pp.11-12). Para realizarmos as multiplicações devemos literalmente dobrar um os fatores juntamente com a sequência: $1, 2, 4, 8, 16, ...$ obtida também pela habilidade EF02MA08 da BNCC Brasil (2017), conforme a Figura 8 na Seção 4.1, até que consigamos reescrever o outro fator como resultado das parcelas pertinentes à sequência $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$.

Observe alguns exemplos de números naturais escritos como uma soma de potências de 2. Lembre-se que $2^0 = 1$.

- $8 = 2^3$
- $13 = 2^0 + 2^2 + 2^3$
- $45 = 2^0 + 2^2 + 2^3 + 2^5$
- $260 = 2^2 + 2^8$

A sequência $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ é a mesma que $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ e para utilizarmos este método deveremos reescrever um dos fatores como essa soma de potências, mas de uma forma natural, apenas dobrando até que se consiga chegar no número almejado. Por exemplo, ao multiplicarmos 8 por 17, basta ir dobrando ambas as colunas, conforme a Tabela 6, a do 1 (que sempre vai existir), pois escolhemos o 8 para ser parcelado em potências de 2, e a do 17 até conseguirmos formar uma soma na primeira coluna (potências de 2), onde o resultado seja o 8, mas neste caso é imediato , pois 8 é uma potência de 2, logo aparecerá explícito na sequência. Neste caso a explicação é que $8 = 2 \times 2 \times 2$, portanto $8 \times 17 \Rightarrow (2 \times 2 \times 2) \times 17 \Rightarrow 17 \times 2 \times 2 \times 2 = 136$, ou seja, para chegar ao produto o 17 foi dobrado 3 vezes.

Tabela 6 – Método Egípcio de Multiplicação: 8×17

1	17
2	34
4	68
8	136

Quando o produto não envolver algum fator que seja uma potência imediata de 2, utilizamos o fato de que todo número natural pode ser escrito como uma soma de potências de 2, mas a utilização deste procedimento não exige que os alunos saibam potenciação previamente, é exigido apenas que saibam dobrar um número e escolher parcelas conhecendo o resultado. O exemplo a seguir será a multiplicação 18 por 23, na Tabela 7. Uma estratégia inicial é controlar a primeira coluna de maneira que nenhum número supere o fator escolhido para ser dobrado repetidamente, neste caso o 23, então não poderá existir nenhum número maior que 23 na primeira coluna, o que indica que terão somente os números $1, 2, 4, 8, 16$, pois o próximo seria 32 e $32 > 23$, portanto não pode ser uma das parcelas.

Tabela 7 – Método Egípcio de Multiplicação: 18×23

1	23
2	**46**
4	92
8	184
16	**368**

Como $18 = 2 + 16$, somamos as linhas referentes ao 2 e 16: $46 + 368 = 414$, portanto $18 \times 23 = 414$. Este método também traz consigo a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Observe que fizemos estas transformações nesta cadeia de igualdades: $18 \times 23 = \underbrace{(2 + 16)}_{18} \times 23 = \underbrace{2 \times 23}_{46} + \underbrace{16 \times 23}_{368} = 46 + 368 = 414$.

Poderíamos escolher dobrar o 18 e escolher o 23 para ser a soma de parcelas da primeira coluna que o resultado obtido seria o mesmo, pois a multiplicação é comutativa. Neste caso colocaremos o 18 na segunda coluna e na primeira faremos a combinação de parcelas que somadas resultem em 23 na Tabela 8.

Tabela 8 – Método Egípcio de Multiplicação: 23×18

1	**18**
2	**36**
4	**72**
8	144
16	**288**

Como 23 pode ser reescrito como $1 + 2 + 4 + 16$, faremos a soma referente a estas linhas: $18 + 36 + 72 + 288 = 414$. Podemos interpretar com a propriedade distributiva: $23 \times 18 = \underbrace{(1 + 2 + 4 + 16)}_{23} \times 18 = \underbrace{1 \times 18}_{18} + \underbrace{2 \times 18}_{36} + \underbrace{4 \times 18}_{72} + \underbrace{16 \times 18}_{288} = 18 + 36 + 72 + 288 = 414$.

Este método egípcio aparenta ter um obstáculo, a escolha certa das parcelas da lista de potências de 2 que resultam no fator envolvido na multiplicação. Mas não é muito difícil se começarmos das maiores potências para as menores. Por exemplo, qual seria a representação do número 74 em potências de 2?

Começamos com a maior potência imediatamente menor que 74, será $2^6 = 64$, ainda faltam 10 unidades para chegar a 74 e a maior potência de 2 menor que 10 é $2^3 = 8$ e agora só faltam 2 unidades para completar $2^1 = 2$, portanto $64 + 8 + 2 = 2^6 + 2^3 + 2 = 74$. A próxima multiplicação, 56×26, será tratada desta maneira, tentando encaixar a soma da maior parcela (potência de 2) para a menor. Veja a Tabela 9.

Tabela 9 – Método Egípcio de Multiplicação: 56×26

1	26
2	52
4	104
8	208
16	416
32	832

Para começarmos, calcularemos os dobros de cada número das colunas e dobramos novamente, e novamente,... até que a primeira não ultrapasse o fator que ainda está oculto, mas que é o nosso objeto de procura, neste caso fomos até 32, pois o próximo seria o 64 e $64 > 56$. Pela nossa recomendação começaremos de baixo para cima e a tarefa é formar o número 56:

Agora vamos modelar para que a soma resulte no que estamos esperando, $32 + 16 = 48$, observe que faltam 8 unidades para chegamos no 56, $32 + 16 + 8 = 56$. Fazer esta tarefa do maior para o menor é o caminho mais curto, pois caso ultrapasse, pegamos o próximo e assim o número fica formado utilizando esses números da primeira coluna da tabela.

$$56 = (8 + 16 + 32)$$

1	26
2	52
4	104
8	**208**
16	**416**
32	**832**

Como $56 = 32 + 16 + 8$, o produto procurado é a soma das dobras da segunda coluna referentes a estas parcelas: $832 + 416 + 208 = 1456$, que analisando pela propriedade distributiva: $56 \times 26 = \underbrace{(32 + 16 + 8)}_{56} \times 26 = \underbrace{32 \times 26}_{832} + \underbrace{16 \times 26}_{416} + \underbrace{8 \times 26}_{208} = 832 + 416 + 208 = 1456.$

Utilizar este método em sala de aula também enriquece a percepção da propriedade distributiva como as demais que falamos até aqui. Um ponto positivo é que a tarefa de descobrir as parcelas que resultam no fator que queremos construir é desafiadora. Devemos deixar que os alunos por si próprios criem estratégias e apliquem suas ideias em busca destas parcelas, devendo o professor auxiliar e no fim, mostrar (caso não tenham percebido sozinhos) que é mais rápido começar das maiores parcelas como propomos aqui.

Com essa estratégia, podemos começar a pensar até em fazer produtos maiores contando que só precisaremos multiplicar por 2 e escolher parcelas. Nosso próximo exemplo será 162×210.

Escolheremos 162 para parcelar e o 210 para dobrar, conforme a Tabela 10. Como $162 = 128 + 32 + 2$, vamos pegar as parcelas referentes a estes números presentes na segunda coluna: 26880, 6720 e 420, respectivamente. O produto procurado será: $26880+6720+420 = 34020$ e de fato $162 \times 210 = 34020$.

Tabela 10 – Método Egípcio de Multiplicação: 162×210

1	210
2	**420**
4	840
8	1680
16	3360
32	**6720**
64	13440
128	**26880**

Olhando do ponto de vista da propriedade distributiva embutida neste processo teríamos:

$$\underbrace{162}_{=} \cdot 210 = (2 + 32 + 128) \cdot 210 = 2 \cdot 210 + 32 \cdot 210 + 128 \cdot 210 = 420 + 6720 + 26880 = 34020.$$

Proporemos um atividade com este método na Seção 6.4, pois vislumbramos grandes possibilidades de serem trabalhadas habilidades presentes na BNCC Brasil (2017), conforme vimos no primeiro parágrafo desta subseção e também como uma forma alternativa de idealização da tabuada do 4 como sendo o dobro da do 2 e a do 8 sendo o dobro que a do 4, além de despertar o interesse por se tratar de um método não muito conhecido e desafiante para que os alunos manipulem parcelas para que forme um determinado número com um clima de jogo matemático.

6 UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA À TABUADA

Inicialmente faremos um comparativo entre as formas de tabuadas encontradas em livros didáticos e sites especializados em matemática, sempre dialogando a linguagem matemática semanticamente conforme a língua.

É nosso dever como professores procurarmos estratégias e soluções em nossa prática pedagógica quando o desempenho não é o esperado por parte dos alunos e isso envolve pensar em novas possibilidades de adequar o conteúdo, criar estratégias e fazer com que tenha sentido semântico; fazer com que o conceito matemática se enriqueça de significabilidade linguística. Para Franco (2015, p.607)

> As práticas pedagógicas estruturam-se em mecanismos paralelos e divergentes de rupturas e conservação. À medida que diretrizes de políticas públicas consideram a prática pedagógica como mero exercício reprodutor de fazeres e ações externas aos sujeitos, essas se perdem e muitos se perguntam: por que não conseguimos mudar a prática? A prática não muda por decretos ou por imposições. A prática pode mudar quando houver o envolvimento crítico e reflexivo dos sujeitos da prática.

Um aluno pode estar matriculado em uma série além do que temos como inicial, mas para ele os conceitos matemáticos não fluíram de maneira condizente ou até mesmo convincente para transformar o que foi passado no decorrer dos anos em saber adquirido.

Nesta vertente reafirmamos o dever que temos em procurar soluções, pois um aluno que iniciou de forma desastrosa sua relação com a matemática tende a piorar seu relacionamento com ela em toda a sua vida acadêmica e ignorá-la; os seres humanos tendem à desistir das coisas que não são ou pensam que não são capazes de executar com um mínimo de sucesso. Ainda de acordo com Franco (2015, p.608)

> As práticas pedagógicas incluem desde planejar e sistematizar a dinâmica dos processos de aprendizagem até caminhar no meio de processos que ocorrem para além dela, de forma a garantir o ensino de conteúdos e de atividades que são considerados fundamentais para aquele estágio de formação do aluno, e, através desse processo, criar nos alunos mecanismos de mobilização de seus saberes anteriores construídos em outros espaços educativos.

Uma grande aliada em todo o processo de ensino é a utilização da língua materna, não somente pelo fato de que é pela língua que nos comunicamos, mas também utilizar os significados das palavras na comunicação cotidiana no mesmo fluxo do que se quer ensinar em matemática. Para Smole (2000) , “aproximar a linguagem matemática da língua materna permite emprestar à primeira a oralidade da segunda e, nesse caso, a oralidade pode significar um canal aberto de comunicação.”.

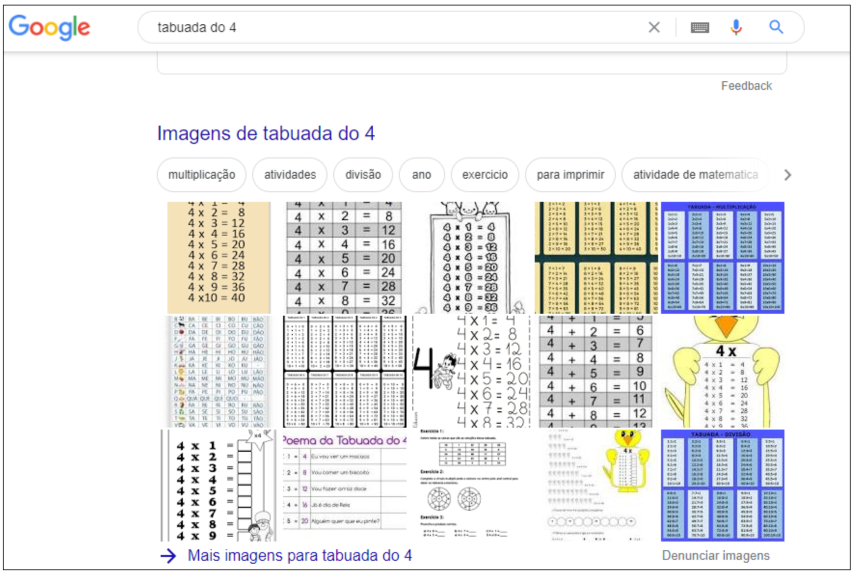
A linguagem por meio de códigos matemáticos necessitam de uma oralidade pertinente à língua materna e portanto devem estar de acordo com seus significados,"parece urgente que professores, pesquisadores e formadores dirijam suas atenções para o delicado processo de desenvolvimento de estratégias de leitura para o acesso a gêneros de textos próprios da atividade matemática escolar." (OLIVEIRA, 2007, p.131).

Neste sentido, no que tange ao conteúdo de multiplicação, sobretudo às tabuadas trabalhadas por professores ao ensinar matemática no início do ciclo escolar, defenderemos uma formatação onde o número em si seja o sujeito de sua tabuada e assuma um papel de destaque na interpretação de somas de parcelas iguais enfatizando o sentido cotidiano empregado à palavra *vezes*.

6.1 O Número Como Sujeito de sua Tabuada

A maioria das tabuadas encontradas na internet, umas das fontes de pesquisa de professores para o planejamento de suas aulas e que são utilizadas na aprendizagem da multiplicação nos anos iniciais do ensino fundamental, mantém um padrão que para nós não contempla o número para qual a tabuada foi feita. Por exemplo, quando pensamos na tabuada do 4, o que vem a nossa mente? E quando pesquisamos na internet a tabuada do quatro? As figuras abaixo mostram algumas opções; para não tendenciar pegaremos as primeiras imagens obtidas pelo buscador na internet.

Figura 21 – Print Screen da Pesquisa Realizada no Dia 27/05/2020

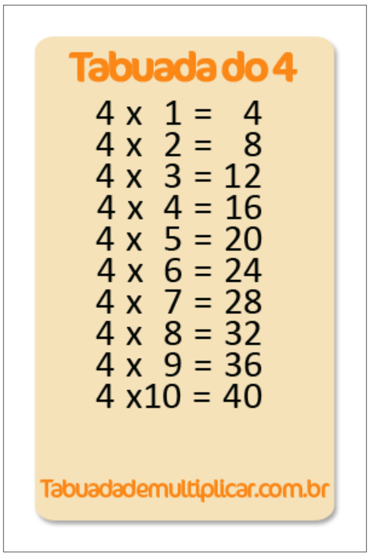


Faremos uma análise dos resultados dessa pesquisa na internet sobre as tabuadas. A forma mais encontrada foi a que já esperávamos onde se vê nas Figuras 22, 23 e 24 com seguinte organização:

- Primeiro fator: O número da tabuada em questão
- Segundo fator: os números de 1 a 10.

As figuras a seguir foram retiradas desta pesquisa nos sites descritos.

Figura 22 – Tabuada do 4 no Site Tabuadademultiplicar.com.br



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/615726580279124080/>

A Figura 22 foi a primeira opção no site de buscas e sua formatação segue as demais, tendo o fator principal na primeira posição; chamamos de fator principal o que se refere ao numeral que é título da tabuada, que no caso é o 4.

Para nós, no entanto, esta formatação, embora seja a mais usual, quase que unânime, tanto nas pesquisas quanto no uso nas salas de aula, não está contemplando o conceito mais simples possível que é o da adição, a soma de parcelas iguais, que pode ser explorado nas aulas, principalmente na educação básica. Quando linguisticamente pensamos nas ações que esta formatação nos remete, não contempla o fator principal na sua interpretação aditiva.

Observe:

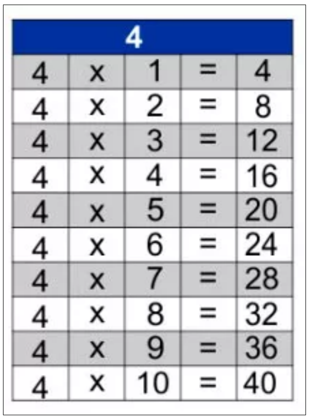
$4 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1$

$4 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2$

$4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$

A tabuada é do quatro, mas o quatro não aparece ativamente na interpretação aditiva a não ser pela quantidade de parcelas, tendo uma participação passiva. As Figuras 23 e 24 reforçam esta maneira de dispor a tabuada onde o fator principal é o primeiro.

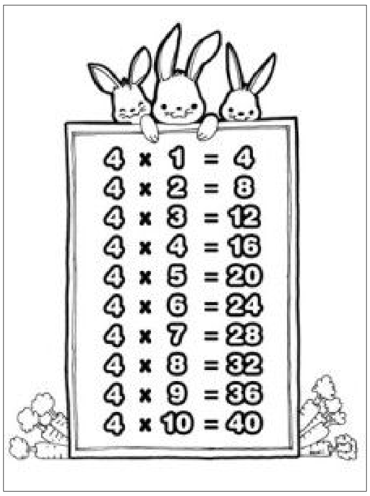
Figura 23 – Tabuada do 4 no Site matematicazup



4				
4	x	1	=	4
4	x	2	=	8
4	x	3	=	12
4	x	4	=	16
4	x	5	=	20
4	x	6	=	24
4	x	7	=	28
4	x	8	=	32
4	x	9	=	36
4	x	10	=	40

Fonte: <https://matematicazup.com.br/>

Figura 24 – Tabuada do 4 no Site Pinterest



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/153333562294370696/>

Para nós a melhor tabuada, no aspecto interpretativo da língua, é o caso onde o fator principal ocupa a segunda posição enfatizando a quantidade de vezes que o numeral, dono de sua tabuada, se repete conforme encontramos na Figura 25 onde o número 4 está simbolizado na quantidade de ovos na cesta e a quantidade de cestas indicada pelo primeiro fator:

$1 \times 4 = 4$

$2 \times 4 = 4 + 4$

$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$

$4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4$

$5 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

$6 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

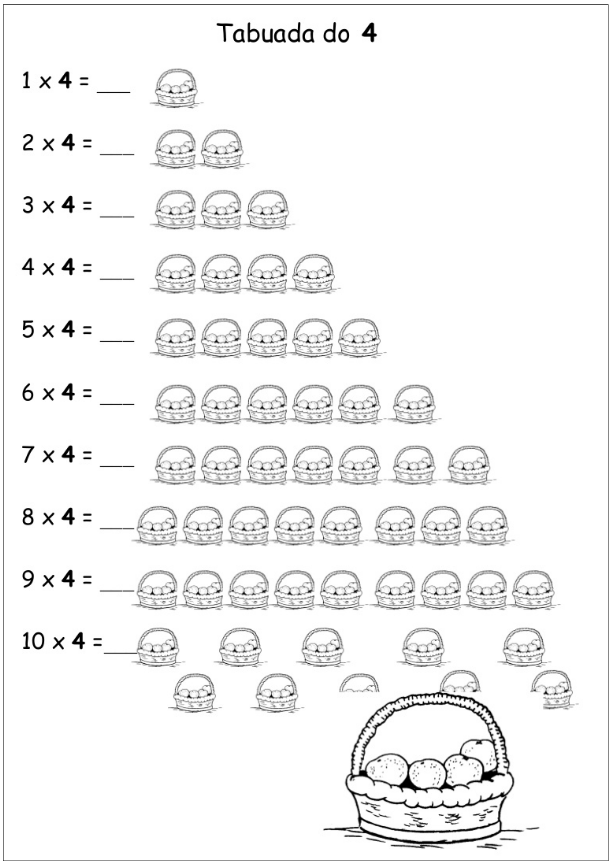
$7 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

$8 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

$9 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

$10 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

Figura 25 – Tabuada do 4 com 4 no Segundo Fator



Fonte:<https://pt.slideshare.net/CrescendoEAprendendo/tabuada-do-4-35083697>

Em relação a isso, uma das professoras que participou da pesquisa, sinalizou favoravelmente a este conceito, que fica bem subjetivo no estudo da tabuada: "*Sobre a pergunta 3*[1]*: eu normalmente falo 5 vezes o 3. Isso trabalhando com o ensino médio (ensino fundamental tenho pouco tempo de experiência, comecei após o início da pandemia já com ensino remoto). Mas os alunos acabam falando que tanto faz 5 vezes 3 ou 3 vezes 5, então por isso uso as duas formas.* ***Mas percebi que a tabuada tradicional...*** 5×1***,*** 5×2***,*** 5×3***, ... que a gente fala que é a tabuada do 5, traz uma falta de significado nesse sentido. Pois quando eu falo*** 5×1***, da forma como entendo, seria 5 vezes o 1, ou seja, deixou de ser a tabuada do 5 e parece mais com a 'tabuada' do 1***". Esta diferença acaba não sendo percebida pelos professores pela naturalidade em que entendem a comutatividade como sinônimo e não como propriedade. O que queremos dizer aqui que matematicamente $2 \times 3 = 3 \times 2$, mas que linguisticamente *duas vezes três* é diferente de *três vezes dois*. Em nosso questionário para os professores foi perguntado o seguinte: *Quando você leciona ou utiliza na solução de um exercício*

[1] Pergunta 3 representada na Figura 3

a multiplicação, como você conduz a ideia da multiplicação 5×3*?*, apenas 86 professores (27,9%) deram a interpretação $3+3+3+3+3$ que traduz exatamente a ideia de *cinco vezes o três*, a grande maioria usa a comutatividade como algo natural 171(55,5%), 28 professores (9,1%) usam a forma de significado por adição invertido, talvez pela vantagem de trabalhar com menos parcelas, estas informações estão ilustradas na Figura 3 no Capítulo 3. O fato é que nós professores não damos muita importância pra essa ordem, pois *dá no mesmo*.

A tabuada do dois reforça ainda mais o que estamos discutindo aqui, pois o numeral dois flexiona para o feminino e fica evidente de como a troca dos fatores na tabuada influenciam na interpretação.

Em nossa pesquisa foi perguntado como se conduziria uma situação problema onde se comprará duas bolas de R$ 5,00, 51,9% dos entrevistados responderam que narrariam como *duas vezes cinco*, conforme a Figura 5, outros 11,7% narrariam com *dois vezes cinco* e 36,4% não veem diferença nas duas formas com o numeral 2 usado no masculino ou feminino. Mas será que essa sutil diferença causa algum impacto positivo ou negativo para o receptor da mensagem, o aluno? De fato, matematicamente falando, as duas formas se traduzem em apenas uma: 2×5, mas do ponto de vista semântico, por se tratar da ideia de *quantas vezes*, é mais natural utilizar no feminino; ninguém diz *"fui ao mercado dois vezes"*, mas *"fui ao mercado duas vezes"*. Além disso, esta situação-problema reforça ainda mais que *"Duas vezes cinco"* tem maior significado na tabuada do 5 e não na tabuada do dois, já que reflete uma situação que envolve o número 5.

Construímos uma tabela que dá a interpretação por adições de parcelas iguais segundo as duas formas de representação da tabuada do *dois*. Observe na Tabela 11 onde a tabuada do dois está representada até a quinta linha com duas interpretações distintas quanto a interpretação.

Tabela 11 – Tabuada do 2 com Duas Interpretações Distintas

$2 \times 1 = 1+1$	$1 \times 2 = 2$
$2 \times 2 = 2+2$	$2 \times 2 = 2+2$
$2 \times 3 = 3+3$	$3 \times 2 = 2+2+2$
$2 \times 4 = 4+4$	$4 \times 2 = 2+2+2+2$
$2 \times 5 = 5+5$	$4 \times 2 = 2+2+2+2+2$

Na primeira coluna está a forma mais usual, onde a oralidade fica explicitada assim: *"Duas vezes um"*, *"Duas vezes dois"*, *"Duas vezes três"*, *"Duas vezes quatro"*, *"Duas vezes cinco"*. Já na segunda coluna, a oralidade fica: *"Uma vez dois"*, *"Duas vezes dois"*, *"Três vezes dois"*, *"Quatro vezes dois"*, *"Cinco vezes dois"*.

Observe que nem dizemos "dois" na tabuada do dois quando ele vem no primeiro fator, dizemos "duas". Este troca sutil na mudança na ordem dos fatores, em nossa opinião causa uma ou outra interpretação que faz mais, ou menos sentido no aspecto da interpretação aditiva. Nada mais esperado que o número, dono de sua tabuada, seja o sujeito das orações implícitas na leitura: *"uma vez **o dois**"*, *"duas vezes **o dois**"* e que de fato tenha representatividade ativa na sua tabuada.

Por este motivo defendemos utilizar a forma da segunda coluna como a tabuada de um número natural, porém com a comutatividade natural, mas como propriedade e não como sinônimo. Na próxima seção falaremos um pouco mais sobre esta representação, bem como a vantagem de trabalhar a comutatividade concomitantemente com o próprio conceito de multiplicação, deixar claro que $3 \times 8 = 8 + 8 + 8$, pertencente à tabuada do 8, mas que numericamente já foi estudado na tabuada do 3 em $8 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$. Com essa mudança de estratégia pedagógica há um ganho significativo, pelo menos em razão da quantidade de multiplicações a serem estudadas.

6.2 Tabuada Triangular

Em 1958 já havia uma ideia sobre a simplificação da tabuada que foi chamada de ***TABUADA ABREVIADA DE MULTIPLICAR*** e ainda divididos por períodos para ser utilizada conforme a Figura 26. Como Antunes (1958) chama de ***SIMPLIFICAÇÃO DO ESTUDO*** diz que "o professor explicará por exemplo, 9 grupos de 3 correspondem a 3 grupos de 9; 4 grupos de 6 são o mesmo que 6 grupos de 4." (ANTUNES, 1958, p.29). Mostrando que a comutatividade da multiplicação deve ser explorada logo no início da aprendizagem para evitar "desperdício" ao aprender duas coisas equivalentes como se não fossem. Logo a seguir, em suas palavras: "Dest'arte a própria classe expurgará a Tabuada comum de 45 repetições inúteis. Restam, portanto, apenas as 55 igualdades dignas de estudo constantes da tabuada abreviada." (ANTUNES, 1958, p.29).

Figura 26 – Tabuada Abreviada de Multiplicar (ANTUNES, 1958)

TABUADA ABREVIADA DE MULTIPLICAR

									CASAS
1 × 1	1 × 2	1 × 3	1 × 4	1 × 5	1 × 6	1 × 7	1 × 8	1 × 9	1 × 10 — Um
	2 × 2	2 × 3	2 × 4	2 × 5	2 × 6	2 × 7	2 × 8	2 × 9	2 × 10 — Dois
1.º GRAU		3 × 3	3 × 4	3 × 5	3 × 6	3 × 7	3 × 8	3 × 9	3 × 10 — Três
			4 × 4	4 × 5	4 × 6	4 × 7	4 × 8	4 × 9	4 × 10 — Quatro
				5 × 5	5 × 6	5 × 7	5 × 8	5 × 9	5 × 10 — Cinco
	1.º SEMESTRE				2.º SEMESTRE				
		2.º GRAU	MARÇO —		6 × 6	6 × 7	6 × 8	6 × 9	6 × 10 — Seis
	1.º SEMESTRE				ABRIL —	7 × 7	7 × 8	7 × 9	7 × 10 — Sete
						MAIO —	8 × 8	8 × 9	8 × 10 — Oito
							JUNHO —	9 × 9	9 × 10 — Nove
									10 × 10 — Dez

Do ponto de vista quantitativo há uma considerável vantagem em diminuir de 100 para 55 multiplicações que Antunes (1958) chamou de dignas de estudo, além do mais, ao olharmos com atenção, em colunas, os fatores estão trocados conforme nossa orientação neste trabalho dando protagonismo ao número pelo qual a tabuada está associada e em conformidade com o sentido literal de repetições contidos na palavra *vezes* representada pelo símbolo "$\times$" na linguagem matemática. Outra vantagem neste tipo de tabuada é que ela deixa explícito, na "diagonal" os produtos de fatores iguais, enfatizando a noção de números quadrados perfeitos e, portanto propício ao aprendizado de raízes quadradas no início do ciclo escolar.

Ao explorar sua tabuada Antunes (1958) chama de *'CASAS'* o que chamamos hoje de *'Tabuada do'*; perceba que em sua primeira linha é explorada a *'CASA do Um'*, a tabuada do 1, que é negligenciada por muitas vezes pela sua trivialidade, porém, neste tipo de tabuada ela é fundamental para a construção do pensamento multiplicativo. É tão natural a compreensão que $1 \times A = A, \forall A \in \mathbb{N}$ e, através disso dar uma passo a diante com $2 \times A = A + A$ e que $3 \times A = A + A + A$, onde A é o número pelo qual estamos idealizando a tabuada e os primeiros fatores contam as parcelas pelo princípio aditivo da noção de multiplicação.

Durante o avanço das *"casas"*, é notório a diminuição gradual de produtos e este declive favorece o estudo dos conceitos onde a tabuada é tida como mais simples, de 1 a 5 e acelera os conceitos onde ela é tida como mais complexa para o estudante, de 6 a 10, apontada pela nossa pesquisa. A maioria dos professores apontaram como mais difícil as tabuadas a partir da tabuada do 5, apenas 24,2% dizem que os dois blocos, de 1 a 5 e de 6 a 10 têm o mesmo nível de dificuldade, conforme a Figura 6 no Capítulo 3. Neste modelo de tabuada, porém, ao estudar até a tabuada do 5, o aluno já teria aprendido quase 73% da tabuada simplificada e não 50% como é esperado ao utilizarmos as tabuadas convencionais e isso é um grande avanço para quem está dando os primeiros passos na aprendizagem da matemática.

Em conformidade com esta estrutura, organizamos uma tabuada contendo as 55 multiplicações ocultando as outras 45 comutáveis com outras, mas diferentemente de Antunes (1958), a organizamos em colunas da *Tabuada do 1* com 10 multiplicações à *Tabuada do 10* com apenas uma multiplicação (10×10), com o título de Tabuada Triangular conforme a Figura 27.

Figura 27 – Tabuada Triangular

	Tabuada do 1	Tabuada do 2	Tabuada do 3	Tabuada do 4	Tabuada do 5	Tabuada do 6	Tabuada do 7	Tabuada do 8	Tabuada do 9	Tabuada do 10
Linha 1	1x1=1									
Linha 2	2x1=2	2x2=4								
Linha 3	3x1=3	3x2=6	3x3=9							
Linha 4	4x1=4	4x2=8	4x3=12	4x4=16						
Linha 5	5x1=5	5x2=10	5x3=15	5x4=20	5x5=25					
Linha 6	6x1=6	6x2=12	6x3=18	6x4=24	6x5=30	6x6=36				
Linha 7	7x1=7	7x2=14	7x3=21	7x4=28	7x5=35	7x6=42	7x7=49			
Linha 8	8x1=8	8x2=16	8x3=24	8x4=32	8x5=40	8x6=48	8x7=56	8x8=64		
Linha 9	9x1=9	9x2=18	9x3=27	9x4=36	9x5=45	9x6=54	9x7=63	9x8=72	9x9=81	
Linha 10	10x1=10	10x2=20	10x3=30	10x4=40	10x5=50	10x6=60	10x7=70	10x8=80	10x9=90	10x10=100

Uma ótima atividade para ser proposta na sala de aula é a construção desta tabuada pelos próprios alunos, pois, por incrível que pareça, essa construção depende apenas da *Tabuada do 1* e *Tabuada do 2* que veremos na Seção 6.3, mostrando como o professor deverá conduzir a atividade para que o aluno consiga completar a tabuada por inteiro apenas utilizando a técnica de soma de parcelas iguais analisando padrões de crescimento seguindo uma determinada lógica.

Começar a pensar na tabuada do 1, depois do 2 e a partir daí construir toda a tabuada triangular e entender o seu processo de construção partindo de algo tão elementar será fundamental para a absorção dos conceitos envolvidos na multiplicação e uma eventual compreensão da tabuada.

Para FIALHO (2011)

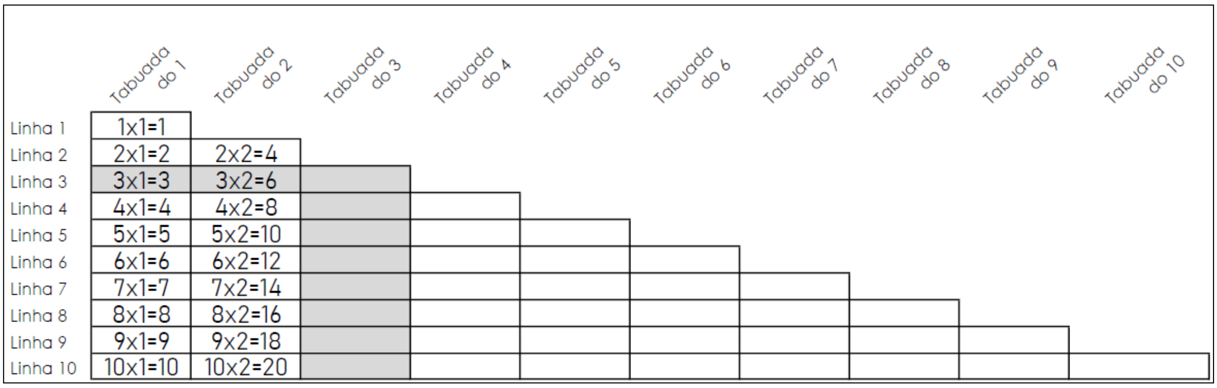
> Geralmente se aprende melhor quando os elementos de aprendizagem são colocados num nível hierárquico superior, isto é, de uma memória simples para a mais complexa, em relação ao desafio na superação dos obstáculos. A melhora da aprendizagem frente os desafios acontece mais especificamente, quando o mediador aperfeiçoa sua forma de ensinar.
>
> (FIALHO, 2011 apud BEBER et al., 2014, p.344)

6.3 Construindo a Tabuada Triangular

Nesta Seção faremos uma construção passo-a-passo da tabuada triangular como uma atividade pedagógica para os professores proporem em sala de aula para seus alunos com o objetivo de apropriação dos conceitos de multiplicação por entendimento em consonância com a língua materna admitindo uma maneira diferente de propor a tabuada a partir de de habilidades fundamentais da matemática em conformidade com a BNCC Brasil (2017).

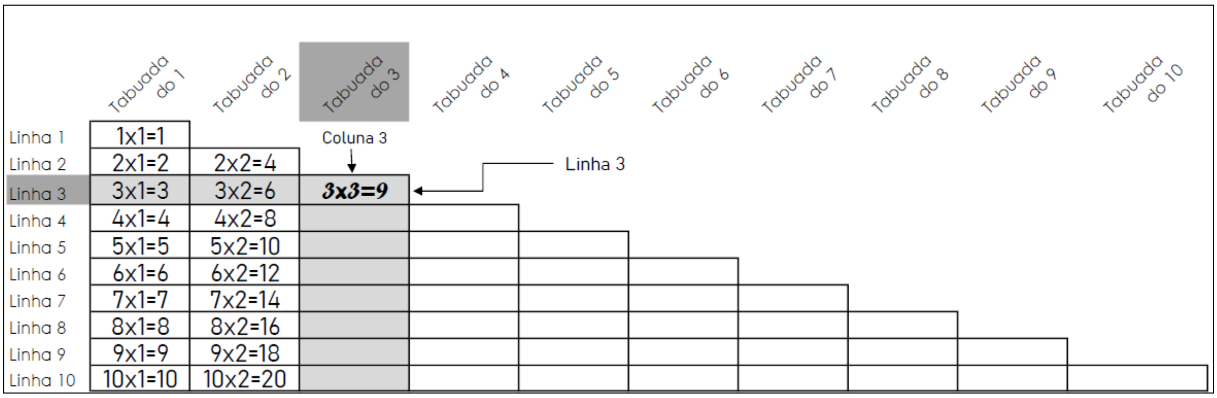
Para inciar o preenchimento de todas as colunas, as duas primeiras deverão estar preenchidas, a *Tabuada do* 1 e *Tabuada do* 2, conforme a Figura 28.

Figura 28 – Preenchimento da Coluna 3 na Tabuada Triangular



Começaremos pela *Tabuada do* 3, onde sua primeira célula a ser preenchida já inicia na linha 3, pois as duas linhas anteriores são casos de comutatividade (1×3 e 2×3) presentes nas tabuadas do 1 e do 2, respectivamente. Além disso, estes casos de comutatividade auxiliam a determinar por onde se inicia a coluna 3; acompanhando horizontalmente, a linha 3, temos (3×1), (3×2) e neste momento o professor deverá conduzir com a ideia de sequências; é esperado que o aluno perceba que ao lado será (3×3) para completar (3×1), (3×2), (3×3), formatação até familiar da maioria das tabuadas convencionais que ocupariam as três primeiras posições da tabuada do 3.

Figura 29 – Preenchimento da 1^a célula na Tabuada Triangular



Ao colocar 3×3 na primeira célula da coluna, faltará apenas o produto para iniciar a coluna e de novo, olhando para a linha 3, temos a seguinte sequência de produtos: $3, 6, ?$ e o professor deverá instigar seus alunos a determinar qual será o próximo número, que é uma das habilidades das habilidades previstas na BNCC (BRASIL, 2017) desde o 3° ano do Ensino Fundamental, conforme a Figura 11 na Seção 4.1 e a maioria dos professores participantes do nossa pesquisa sinalizou que a grande parte dos alunos são capazes de fazer essa previsão, conforme a Figura 7 no Capítulo 3.

Depois de concluir que o próximo número será o 9, conforme a Figura 29 deverá seguir o preenchimento de toda a coluna 3, utilizando a interpretação linguística onde o primeiro fator fica responsável pela quantidade de parcelas e o segundo fator como o sujeito de sua tabuada: $(4 \times 3), (5 \times 3), (6 \times 3), (7 \times 3), (8 \times 3), (9 \times 3), (10 \times 3)$,e completar a sequência $3, 6, 9,$ **12,15,18,21,24,27,30**, concluindo o preenchimento da tabuada do 3.

Note que a junção da linha 3 com coluna 3 formam todas as 10 multiplicações pertencentes à tabuada convencional de 100 produtos, porém nas linhas com a configuração habitual e nas colunas de acordo com nossa interpretação por adições de parcelas iguais. Generalizando, as linhas de ordem n juntamente com as colunas de mesma ordem, formam as 10 multiplicações de cada tabuada. Além disso, os produtos formam sequências seguindo uma lógica de adições de parcelas que coincidem com o número da tabuada pelo qual está sendo preenchida.

Para construir a Tabuada do 4, será repetido o procedimento, mas nesta hora o aluno já tem a experiência anterior e provavelmente sentirá mais facilidade.

Figura 30 – Preenchimento da coluna 4 na Tabuada Triangular

	Tabuada do 1	Tabuada do 2	Tabuada do 3	Tabuada do 4	Tabuada do 5	Tabuada do 6	Tabuada do 7	Tabuada do 8	Tabuada do 9	Tabuada do 10
Linha 1	1x1=1									
Linha 2	2x1=2	2x2=4								
Linha 3	3x1=3	3x2=6	3x3=9							
Linha 4	4x1=4	4x2=8	4x3=12							
Linha 5	5x1=5	5x2=10	5x3=15							
Linha 6	6x1=6	6x2=12	6x3=18							
Linha 7	7x1=7	7x2=14	7x3=21							
Linha 8	8x1=8	8x2=16	8x3=24							
Linha 9	9x1=9	9x2=18	9x3=27							
Linha 10	10x1=10	10x2=20	10x3=30							

Observando a Linha 4: (4×1), (4×2), (4×3) e esperamos que, intuitivamente, seja pensado em (4×4) para ocupar a primeira célula da coluna 4. E descendo a coluna com: (5×4), (6×4), (7×4), (8×4), (9×4), (10×4). Neste momento o aluno já terá uma multiplicação a menos para fazer, porém seguindo a sequência lógica, completará facilmente a tarefa. A sequência será: $4, 8, 12, ?$, onde será inserido o próximo número em 4×4 e prosseguindo na coluna chegará em: $4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36$ e 40, conforme a Figura 31.

Figura 31 – Preenchimento da Coluna 5 na Tabuada Triangular

	Tabuada do 1	Tabuada do 2	Tabuada do 3	Tabuada do 4	Tabuada do 5	Tabuada do 6	Tabuada do 7	Tabuada do 8	Tabuada do 9	Tabuada do 10
Linha 1	1x1=1									
Linha 2	2x1=2	2x2=4								
Linha 3	3x1=3	3x2=6	3x3=9							
Linha 4	4x1=4	4x2=8	4x3=12	4x4=16						
Linha 5	5x1=5	5x2=10	5x3=15	5x4=20						
Linha 6	6x1=6	6x2=12	6x3=18	6x4=24						
Linha 7	7x1=7	7x2=14	7x3=21	7x4=28						
Linha 8	8x1=8	8x2=16	8x3=24	8x4=32						
Linha 9	9x1=9	9x2=18	9x3=27	9x4=36						
Linha 10	10x1=10	10x2=20	10x3=30	10x4=40						

O mesmo raciocínio será utilizado para preencher a coluna 5 e todas as outras, com a vantagem de sempre diminuir em uma unidade o número de preenchimentos a medida que vai se avançando a tabuada, o que incentiva o desenvolvimento da tarefa pelo aluno, pois quanto mais se entende o que está fazendo, menos tem para fazer. Na Figura 32 temos a tabuada toda preenchida com 45 multiplicações a menos do que a habitual.

Figura 32 – Preenchimento total da Tabuada Triangular

	Tabuada do 1	Tabuada do 2	Tabuada do 3	Tabuada do 4	Tabuada do 5	Tabuada do 6	Tabuada do 7	Tabuada do 8	Tabuada do 9	Tabuada do 10
Linha 1	1x1=1									
Linha 2	2x1=2	2x2=4								
Linha 3	3x1=3	3x2=6	3x3=9							
Linha 4	4x1=4	4x2=8	4x3=12	4x4=16						
Linha 5	5x1=5	5x2=10	5x3=15	5x4=20	5x5=25					
Linha 6	6x1=6	6x2=12	6x3=18	6x4=24	6x5=30	6x6=36				
Linha 7	7x1=7	7x2=14	7x3=21	7x4=28	7x5=35	7x6=42	7x7=49			
Linha 8	8x1=8	8x2=16	8x3=24	8x4=32	8x5=40	8x6=48	8x7=56	8x8=64		
Linha 9	9x1=9	9x2=18	9x3=27	9x4=36	9x5=45	9x6=54	9x7=63	9x8=72	9x9=81	
Linha 10	10x1=10	10x2=20	10x3=30	10x4=40	10x5=50	10x6=60	10x7=70	10x8=80	10x9=90	10x10=100

Fazendo uma análise geométrica, por disposição retangular, destas multiplicações presentes nos 100 produtos da tabuada, temos 45 cujas representações por arranjo retangular têm "bases" e "alturas" diferentes (não quadrados), portanto comutáveis e 10 números quadrados. É como se esta "diagonal" de $(1 \times 1 = 1), (2 \times 2 = 4)...(10 \times 10 = 100)$ fosse um espécie de eixo de simetria, tal como a tabuada pitagórica, mas ocultadas 45. Ficam 45 produtos abaixo, 10 produtos neste eixo e 45 produtos acima, que totalizam 100.

A partir deste momento podemos explorar novas ideias, por exemplo, a primeira célula de cada coluna, por se tratar da sequência de números quadrados perfeitos, conforme a Figura 33 , poderíamos já começar a falar de números ao quadrado e auxiliar quando for falar de raiz quadrada de um número natural.

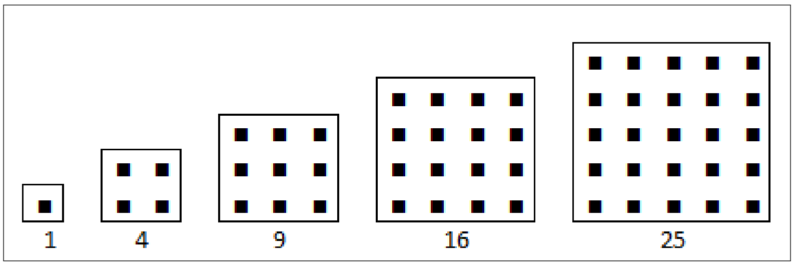
A tabuada tem um formato semelhante a de um triângulo retângulo e onde seria a hipotenusa ficam as multiplicações de mesmos fatores: (1×1), (2×2), (3×3), (4×4), (5×5), (6×6), (7×7), (8×8), (9×9), (10×10) cujos produtos são os dez primeiros números quadrados perfeitos: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$, respectivamente, podendo ser explorado as potências de expoente 2, bem como um interpretação geométrica destes números, como veremmos na Figura 34.

Figura 33 – A Tabuada Triangular e os Números Quadrados Perfeitos

	Tabuada do 1	Tabuada do 2	Tabuada do 3	Tabuada do 4	Tabuada do 5	Tabuada do 6	Tabuada do 7	Tabuada do 8	Tabuada do 9	Tabuada do 10
Linha 1	1x1=1									
Linha 2	2x1=2	2x2=4								
Linha 3	3x1=3	3x2=6	3x3=9							
Linha 4	4x1=4	4x2=8	4x3=12	4x4=16						
Linha 5	5x1=5	5x2=10	5x3=15	5x4=20	5x5=25					
Linha 6	6x1=6	6x2=12	6x3=18	6x4=24	6x5=30	6x6=36				
Linha 7	7x1=7	7x2=14	7x3=21	7x4=28	7x5=35	7x6=42	7x7=49			
Linha 8	8x1=8	8x2=16	8x3=24	8x4=32	8x5=40	8x6=48	8x7=56	8x8=64		
Linha 9	9x1=9	9x2=18	9x3=27	9x4=36	9x5=45	9x6=54	9x7=63	9x8=72	9x9=81	
Linha 10	10x1=10	10x2=20	10x3=30	10x4=40	10x5=50	10x6=60	10x7=70	10x8=80	10x9=90	10x10=100

Podendo fazer por arranjo retangular e deixar que eles percebam que formam quadrados e assim associar o nome à figura geométrica, dando significado e mais sentido para para este conceito de quadrados e raízes quadradas no conjunto dos números naturais, se fizermos a analogia de base para a raiz, assim a raiz quadrada de 9 é 3, pois 3 é a base do número 9 disposto em um quadrado conforme a orientação da prática de multiplicação de 3×3 por arranjo retangular. Claro que este conceito só faz sentido em $\mathbb{N}$.

Figura 34 – Interpretação Geométrica dos Quadrados Perfeitos Naturais



Há inúmeras possibilidades, contanto que os alunos aprendam de fato a organizar suas ideias e interpretar problemas envolvendo multiplicações elementares e daí partir para as mais complexas. Trabalhar a tabuada de forma em que os alunos sejam ativamente responsáveis pela seu próprio avanço trará resultados nesta etapa e ajudará em todas as que virão.

6.4 Método Egípcio de Multiplicação: Uma Atividade Pedagógica

Este método foi apresentado na Subseção 5.2.4, bem como a explicação pela propriedade distributiva, dos conceitos que estão por trás desse método e faz com que ele dê certo para quaisquer multiplicações envolvendo dois números naturais utilizando apenas a habilidade de calcular o dobro de números, ou seja, apenas multiplicando por 2.

Um atrativo para os alunos, ao começar a ter contato com essa proposta, é pelo fato se parecer com um jogo onde o desafio será descobrir quais parcelas escolher para que consiga fazer a multiplicação desse jeito diferente. Nesta atividade o professor pode separar a turma em grupos e pedir para que façam as multiplicações deste modo utilizando uma lista de multiplicações pré-definidas de complexidade gradativamente crescente. A começar por números que sejam potências imediatas de 2, depois o sucessor de uma potência de 2, e também por algum que seja com apenas 3 parcelas de potências de dois e por fim com mais de 3 parcelas. Lembrando que não é preciso saber previamente potenciação para realizar esta atividade, pois a ideia de potência apenas justifica o método, mas não faz parte do desenvolvimento do mesmo.

Sugestões de multiplicações para a atividade:

a. 8×21

b. 17×12

c. 14×25

d. 39×32

e. 45×51

f. 51×45

Para a introdução ao procedimento, o professor deve iniciar com uma tabela contendo os números 1 na primeira coluna e o segundo fator na segunda coluna, que será o número que contaremos a quantidade de parcelas, conforme o método de adições sucessivas. Neste caso do item *a*, a tabela ser´composta por 1 e por 21. Veja a Tabela 12.

Tabela 12 – Tabela Explicativa do Método Egípcio de Multiplicação: 8×21

1	21

Neste momento o professor deve pedir para que os alunos preencham as linhas abaixo de cada número com o dobro dos que estão imediatamente acima, e multiplicar por 2 até que se esgote a possibilidade da primeira coluna ter um número que ultrapasse o fator que estamos modelando, no caso o 8. Depois de preenchida corretamente, a tabela ficará conforme a Tabela 13. Observe que se continuássemos dobrando as colunas, a próxima teria o 16 na primeira coluna e 16 não pode ser uma das parcelas naturais de 8, pois $116 > 8$.

Tabela 13 – Método Egípcio de Multiplicação: 8×21

1	21
2	42
4	84
8	168

E agora o professor deve dizer que devemos escolher parcelas na coluna 1 cuja soma resulte no fator que estamos parcelando; como 8 é um desses números da coluna, basta pegar o valor referente ele na coluna 2, o 168, de fato $8 \times 21 = 168$. Com isso a multiplicação está feita pelo método egípcio, só que com a soma contendo apenas uma parcela, mas que a partir desse momento serão mais parcelas e eles terão que escolher a única maneira de forma o fator a ser modelado, essa unicidade também está provada em Steffenon (2016, pp.11-12).

A multiplicação do item *b*, pela complexidade gradativa, terá duas parcelas e o método começará a fazer mais sentido; de novo começaremos pela tabela contendo o 1 na primeira célula da coluna 1 e o 12 na da coluna 2, conforme a Tabela 14.

Tabela 14 – Tabela explicativa do método egípcio de multiplicação: 17×12

1	12

Agora com os alunos já começando a entender o que deve ser feito, apenas dobrar os números sucessivamente, a tabela preenchida ficará de acordo com a Tabela 15.

Tabela 15 – Método egípcio de multiplicação: 17×12

1	12
2	24
4	48
8	96
16	192

Nesta segunda etapa que é escolher números na coluna 1 que resulte em 17 quando somados, a opção $16 + 1$ certamente será apresentada sem nenhum problema. Como o 17 é a soma de 1 e 16, o produto 17×12 será a soma dos números presentes nestas linhas, mas na coluna 2, $12 + 192 = 204$. De fato $17 \times 12 = (1 + 16) \times 12 = 1 \times 12 + 16 \times 12 = 12 + 192 = 204$.

Nosso próximo exemplo será de complexidade um pouco maior e, portanto mais desafiante: 14×25. Vamos aqui já supor que os alunos já preencheram as colunas de acordo com as orientações dadas pelo professor e a tabela ficará em conformidade com a Tabela 16. Este exemplo dará um pouco mais de trabalho, pois precisaremos de 3 parcelas para resultar em 14. Pois, $14 = 2+4+8$ e isso indica que 14×25 é a soma dos números referentes a 2, 4 e 8 da primeira coluna; logo $50 + 100 + 200 = 350$.

Tabela 16 – Método Egípcio de Multiplicação: 14×25

1	25
2	50
4	100
8	200

Este é um momento propício para explicar o porquê que isso dá certo e explorar a propriedade distributiva por trás desse método que ainda é desconhecido e com muitas interrogações por parte dos alunos. Explicar que $14 \times 25 = \underbrace{(2 + 4 + 8)}_{14} \times 25$, que utilizando a distributividade fica, $\underbrace{(2 \times 25)}_{50} + \underbrace{(4 \times 25)}_{100} + \underbrace{(8 \times 25)}_{200} = 350$.

Partindo deste princípio podemos aproveitar para modelar a tabuada de um número conhecendo a tabuada de outros que podem compor a sua soma, por exemplo a tabuada do 7 é a soma da tabuada do 3 e do 4, ou a do 2 somada com a do 5, pois $4 \times 7 = 4 \times (2 + 5) =$

$4 \times 2 + 4 \times 5 = 8 + 20 = 28$. A apropriação prática da propriedade distributiva auxilia até para a realização de cálculos mentais, por exemplo 14×25, poderia ter sido pensado como $(10 + 4) \times 25 = 250 + 100 + 350$.

Neste próximo exemplo, supondo a primeira parte do desenvolvimento já ter sido realizada pelos alunos e supervisionada pelo professor, ficará em conformidade com a Tabela 17.

Tabela 17 – Método egípcio de multiplicação: 39×32

1	32
2	64
4	128
8	256
16	512
32	1024

Onde o 39 é modelado como soma das parcelas, 32, 4, 2 e 1. Note que $39 = 1 + 2 + 4 + 32$, portanto o produto procurado sairá do resultado $32 + 64 + 128 + 1024$, que são os valores da segunda coluna correspondentes aos da primeira coluna utilizados para a construção do 39. Seguindo a interpretação pela propriedade distributiva: $39 \times 32 = \underbrace{(1 + 2 + 4 + 32)}_{39} \times 32 = \underbrace{(1 \times 32)}_{32} + \underbrace{(2 \times 32)}_{64} + \underbrace{(4 \times 32)}_{128} + \underbrace{(32 \times 32)}_{1024} = 1248$.

As Tabelas 18 e 19 referentes às multiplicações, respectivamente, serão comentadas simultaneamente, pois trataremos também da comutatividade da multiplicação. Queremos dizer que este método, até por ser válido para o produto de quaisquer números naturais, funciona independentemente de quem irá ocupar a vaga de *fator a ser parcelado*, que o produto será o mesmo. Na Tabela 18 parcelaremos o fator 45 e na Tabela 19 parcelaremos o fator 51 e mostrar que $45 \times 51 = 51 \times 45$, mesmo com as suas somas contendo parcelas totalmente diferentes.

Tabela 18 – Método Egípcio de Multiplicação: 45×51

1	51
2	102
4	204
8	408
16	816
32	1632

Tabela 19 – Método egípcio de multiplicação: 51×45

1	45
2	90
4	180
8	360
16	720
32	1440

Neste momento o professor pode dar a dica que foi dada na Seção 5.2.4 de começar a escolha das parcelas sempre da maior para a menor, com isso os alunos deverão ganhar tempo para as escolhas certas. As parcelas das Tabelas 18 e 19 são: $32+8+4+1=45$ e $32+16+2+1=51$, portanto as somas $1632+408+204+51$ e $1440+720+90+45$ são equivalentes. De fato:
$45 \times 51 = \underbrace{(1+4+8+32)}_{45} \times 51 = \underbrace{(1 \times 51)}_{51} + \underbrace{(4 \times 51)}_{204} + \underbrace{(8 \times 51)}_{408} + \underbrace{(32 \times 51)}_{1632} = 2295.$
$51 \times 45 = \underbrace{(1+2+16+32)}_{51} \times 45 = \underbrace{(1 \times 45)}_{45} + \underbrace{(2 \times 45)}_{90} + \underbrace{(16 \times 45)}_{720} + \underbrace{(32 \times 45)}_{1440} = 2295.$

Logo após estes exercícios, para praticar a construção de qualquer número natural como parcelas da sequência numérica $1, 2, 4, 8, 16, 32, ...$ com a dica de sempre começar pelo maior, o professor poderá pedir que eles construam alguns números em forma dessa soma.

6.5 Considerações Finais

Este trabalho representou um desconforto por parte do autor em relação ao uso exagerado de linguagem técnica e simbologia na matemática, principalmente em etapas do ensino onde os alunos sequer aprenderam o básico, em detrimento de uma abordagem um pouco mais significativa e em conexão com sua realidade. Trabalhar a linguagem, modelar situações-problema que abordem a realidade com um linguagem clara e relacionada com o significado que o aluno já traz consigo das relações extraescolares, mas sobretudo com significabilidade que as expressões têm por si só na língua materna, torna o aluno apto a aprender com significado e portanto apropriar-se desse conhecimento.

Ao lecionarmos para alunos do 6° ano ao 9° ano do Ensino Fundamental é notória a deficiência por grande parte dos alunos com a operação da multiplicação, nem tanto do algoritmo convencional em si explorado na Subseção 5.2.3, mas de tabuada mesmo. E é nesse momento que devemos intervir, pois o conhecimento em matemática é acumulativo; para dividir precisa saber multiplicar, para calcular potência também, e daí em diante com lacunas abertas em fundamentos da matemática ficará muito difícil que a aprendizagem seja satisfatória. Por esse motivo escolhemos a multiplicação e em especial a tabuada como nosso primeiro passo de comunhão entre a língua materna e a matemática, uma trabalhando semanticamente com a outra.

Estávamos aqui procurando um problema nas entrelinhas das aulas de matemática, a linguagem que exerce função nos bastidores das aulas e propomos aqui dar um papel de destaque merecidamente juntamente com a linguagem matemática. Para isso fizemos uma pesquisa contendo algumas perguntas acerca de significados, de condução de linguagem e escrita, tanto por extenso (em português), quanto por códigos (em matemática) explorada no Capítulo 3 para fazermos nossas interpolações e interpretações de acordo com a linguagem e seus significados.

Verificamos no decorrer da pesquisa que propriedades, talvez pela trivialidade, são tratadas com obviedade durante as aulas, e devemos sim trabalhá-las, mas enfatizando propriedades como a devida importância evitando que as interpretem sem o devido rigor. E com isso apresentamos uma maneira alternativa de apresentar e construir uma tabuada alternativa em consonância com a língua materna e os conceitos matemáticos na Seção 6.3, bem como exploramos as propriedades relativas a multiplicação interpretando-a sob a ótica de diferentes métodos de multiplicação, inclusive o que utilizamos convencionalmente nas escolas para fazer multiplicações na Seção 5.2.

Este presente trabalho trata a linguagem como uma aliada no ensino da matemática dando um caminho que poderá ser seguido analisando com cautela as expressões e conceitos presentes na linguagem de comunicação natural e a matemática. A abordagem nesse sentido de múltiplos, divisores é uma possibilidade de continuação deste trabalho, o MMC e MDC com significados por trás destas siglas que acabam afastando da língua materna e aproxima de um simples algorítimo sem significado. Explorar que M(mínimo)M(múltiplo)C(comum), pode ser entendido e encontrado por duas listas de múltiplos e deixar o método de fatoração como alternativo para números grandes. É desnecessário que, ao calcular o MMC entre 3 e 4, o aluno seja direcionado a fatoração e que o 12 encontrado pelo professor não tenha significado e ele não relacione que este 12 é o mesmo 12 que estaria presente nas listas de múltiplos: múltiplos do 4: $\{4, 8, \mathbf{12}, 16, 20, ...\}$, múltiplos do 3: $\{3, 6, 8, \mathbf{12}, 15, 18, ...\}$.

Outro ponto que poderia ser explorado linguisticamente é a resolução de equações do ponto de vista sintático, analisar se os conectivos estão coerentes em sua solução. É comum em soluções de estudantes ir colocando sinais de igual em todos os passos, o que acaba afirmando como verdadeiro algo falso, por exemplo: $3x = 6 = x = \frac{6}{3} = x = 2$, que se pegarmos os extremos da cadeia de igualdade fica que $3x = 2$ que não é verdade para a equação proposta. O certo seria $3x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x = 2$ e daí concluir que as expressões *"igual a"* e *"equivalente a"* têm valores sintáticos diferentes. Trabalhar a escrita matemática com o rigor que a ciência exige, mas sintática e semanticamente em conformidade com a língua portuguesa, mas respeitando suas particularidades.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, F. Revista do professor, 1958, n. 42, sp. 1958. Citado 4 vezes nas páginas 10, 46, 64 e 65.

BEBER, B. et al. Metacognição como processo da aprendizagem. 2014. Citado na página 66.

BRASIL, B. N. C. C. ensino médio. *Brasília: Ministério da Educação*, 2017. Citado 9 vezes nas páginas 32, 36, 38, 39, 41, 54, 57, 66 e 67.

BRASIL, P. C. N. Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: língua portuguesa/ secretaria de educação fundamental. *Brasília: Ministério da Educação*, 1999. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pcn/portugues.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 21.

BRASIL, P. C. N. Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática/ secretaria de educação fundamenta. *Brasília: Ministério da Educação*, 1999. Disponível em: <http://http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pcn/matematica.pdf>. Acesso em: 15/05/2020. Citado 4 vezes nas páginas 40, 42, 43 e 46.

CANÇADO, M. Manual de semântica. *Belo Horizonte: Editora UFMG*, 2005. Disponível em: <http://www.academia.edu/download/60662799/Manual_de_semantica20190921-20261-dip8y0.pdf>. Citado na página 34.

FIALHO, F. A. P. Psicologia das atividades mentais: introdução às ciências da cognição. *Florianópolis: Insular*, 2011. Citado na página 66.

FRANCO, M. A. S. Práticas pedagógicas de ensinar-aprender: por entre resistências e resignações. *Educação e Pesquisa*, SciELO Brasil, v. 41, n. 3, p. 601–614, 2015. Citado na página 58.

FREIRE, P. Extensão e comunicação? *Rio de Janeiro: Paz e Terra*, 1980. Citado na página 36.

FREITAS, M. T. de A. *Vygotsky e Bakhtin: psicologia e educação: um intertexto*. [S.l.]: Ática, 1994. Citado na página 16.

GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. *TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Ana. Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Editora Ática*, p. 257–282, 2003. Citado na página 25.

KUHN, M. C.; PEREIRA, J. de F. A multiplicação nos anos iniciais do ensino fundamental: da teoria para a prática. *Revista Thema*, v. 17, n. 2, p. 464–482, 2020. Citado na página 36.

LORENSATTI, E. J. C. Linguagem matemática e língua portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemáticos. *CONJECTURA: filosofia e educação*, v. 14, n. 2, 2009. Disponível em: <http://ucs.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/17/16>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 39.

LUVISON, C. d. C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de matemática. *Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática–1 ed.–Campinas, SP: Mercado de Letras*, 2013. Citado na página 20.

MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua*. 4. ed. São Paulo, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 22.

MENEZES, L. *Matemática, linguagem e comunicação*. [S.l.], 2000. Disponível em: <www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 24, 34 e 36.

MOREIRA, M. A. Linguagem e aprendizagem significativa. In: *Conferência de encerramento do IV Encontro Internacional sobre Aprendizagem Significativa, Maragogi, AL, Brasil*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 8. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares. *São Paulo: Editora Livraria da Física*, p. 25, 2011. Citado na página 35.

OLIVEIRA, N. de. Linguagem, comunicação e matemática. *Revista de Educação*, v. 10, n. 10, 2007. Citado na página 59.

RIPOLL, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. Livro do professor de matemática na educação básica: números naturais. *Rio de Janeiro: SBM*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.

ROCHA, M. I.; MENINO, H. A. Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação: Um estudo de caso com crianças de 7/8 anos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, v. 12, n. 1, p. 103–134, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 45.

SMOLE, K. C. S. *A matemática na educação infantil: a teoria das inteligência múltiplas na prática escolar*. Porto Alegre, 2000. 64-72 p. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 58.

SPINASSÉ, K. P. Os conceitos língua materna, segunda língua e língua estrangeira e os falantes de línguas alóctones minoritárias no sul do brasil. *Contingentia*, v. 1, n. 1, 2006. Citado na página 20.

STEFFENON, R. R. Belos problemas: Induçao e princípio das gavetas de dirichlet. 2016. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/resumos/m04.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 71.

VIGOTSKI, L. et al. Ls vigotski pensamento e linguagem. 1998. Disponível em: <http://psicod.org/l-s-vigotski-pensamento-e-linguagem.html>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 19.

ZUCHI, I. A importância da linguagem no ensino de matemática. *Educação Matemática em Revista*, n. 16, p. 49–55, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/1056/584>. Citado 3 vezes nas páginas 16, 19 e 24.

Apêndices

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DA PESQUISA

A IMPORTÂNCIA DA LÍNGUA MATERNA NO ENSINO DA MATEMÁTICA: Uma análise intrínseca acerca dos significados da língua consoante ao conceito matemático para professores de matemática na abordagem da multiplicação.

Trata-se de um questionário direcionado a professores que ensinam matemática e que tem por objetivo reunir dados para Dissertação de Mestrado profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT do Instituto de Ciências Exatas da UFRRJ. dados de contato com o professor Alan Rangel:
E-mail: profalanrangel@gmail.com Telefone: (21) 975988999
*Obrigatório

Perfil profissional

1. 01) Em qual(is) rede(s) de ensino você trabalha? (Se necessário, marque mais de uma opção) *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Municipal
- [ ] Estadual
- [ ] Federal
- [ ] Privada
- [ ] Só estou lecionando aulas particulares
- [ ] Não estou atuando como professor regente de turma

2. 02) Em qual(is) segmento(s) você trabalha? (Se necessário, marque mais de uma opção) *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] Ensino Fundamental - Anos Iniciais - até 5º ano inclusive
- [ ] Ensino Fundamental - Anos Finais - do 6º ao 9º ano
- [ ] Ensino Médio
- [ ] Ensino Superior
- [ ] Pós-graduação

A pesquisa

3. 03) Quando você leciona ou utiliza na solução de um exercício a multiplicação, como você conduz, a ideia da multiplicação 5 x 3? *

Marcar apenas uma oval.

- ( ) 5 x 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3, ou seja, é o 3 somado 5 vezes
- ( ) 5 x 3 = 5 + 5 + 5, ou seja, é o 5 somado 3 vezes.
- ( ) uso as duas formas apresentadas anteriormente.
- ( ) nenhuma das duas, utilizo tabuadas para a memorização.

4. 04) Durante as atividades em sala de aula, você utiliza algum recurso didático relacionado abaixo? (Se necessário, marque mais de uma opção) *

Marque todas que se aplicam.

- [ ] tabuada fixada na parede
- [ ] tabuada individual para cada aluno
- [ ] máquina de calcular
- [ ] material manipulável

5. 05) Veja o exemplo a seguir: Um bola de futebol custa R$ 5,00. Quanto você gastará para comprar duas bolas? Utilizando-se da multiplicação, você ao narrar a ideia para os alunos, diz: *

   Marcar apenas uma oval.

   - duas vezes cinco. Ou seja, gastará R$ 10,00.
   - dois vezes cinco. Ou seja, gastará R$ 10,00.
   - usa as duas formas apresentadas

6. 06) Quais são as tabuadas mais difíceis dos alunos aprenderem?

   Marcar apenas uma oval.

   - Tabuadas de 1 a 4
   - Tabuadas de 5 a 8
   - Tabuadas de 6 a 10
   - O mesmo nível de dificuldade nos dois blocos: de 1 a 5 e de 6 a10.

7. 07) Na maioria das vezes, seus alunos seriam capazes de determinar o próximo número da sequência: 4, 8, 12, ... ? *

   Marcar apenas uma oval.

   - Sim
   - Não
   - Sim, com mediação do professor.
   - Não, mesmo com a mediação do professor.

8. 08) Caso você deseje escrever alguma experiência que teve com seus alunos, no ensino da tabuada, fique à vontade.

APÊNDICE B – TABUADA TRIANGULAR PARA PREENCHER

	Tabuada do 1	Tabuada do 2	Tabuada do 3	Tabuada do 4	Tabuada do 5	Tabuada do 6	Tabuada do 7	Tabuada do 8	Tabuada do 9
Linha 1	1x1=1								
Linha 2	2x1=2	2x2=							
Linha 3	3x1=3	3x2=							
Linha 4	4x1=4	4x2=							
Linha 5	5x1=5	5x2=							
Linha 6	6x1=6	6x2=							
Linha 7	7x1=7	7x2=							
Linha 8	8x1=8	8x2=							
Linha 9	9x1=9	9x2=							
Linha 10	10x1=10	10x2=							