Universidade Estadual de Londrina

JEAN FELIPE DOS SANTOS

METODOLOGIAS ATIVAS DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DA MATEMÁTICA:

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Londrina

2021

JEAN FELIPE DOS SANTOS

METODOLOGIAS ATIVAS DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DA MATEMÁTICA:

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Regina Célia Guapo Pasquini

Londrina

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

S237m Santos, Jean Felipe dos.

Metodologias ativas de aprendizagem no ensino da Matemática : uma proposta para o ensino médio / Jean Felipe dos Santos. - Londrina, 2021.
106 f. : il.

Orientador: Regina Célia Guapo Pasquini.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Metodologias ativas - Tese. 2. Ensino de Matemática - Tese. 3. Peer Instruction - Tese. 4. Aula Invertida - Tese. I. Pasquini, Regina Célia Guapo. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

JEAN FELIPE DOS SANTOS

METODOLOGIAS ATIVAS DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DA MATEMÁTICA:

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

____

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Prof.ª Dr.ª Luciana Aparecida Ferrarezi
Faculdade de Tecnologia de Taquaritinga

____

Prof.ª Dr.ª Magna Natália Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, _____de ____________de _____.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus pela dádiva da vida.

Aos meus pais, José e Dirce; ao meu irmão, Douglas; à minha companheira, Julia; e aos familiares: pelo suporte, pela inspiração e pela motivação que sempre me foram dados nos momentos de imprevistos e de dificuldades.

Aos queridos professores que proporcionam uma inspiração difícil de transpor em palavras. Agradeço sempre por ter conhecido esses educadores maravilhosos, em especial, minha orientadora, Professora Doutora Regina Célia, meus professores do PROFMAT e da graduação em Matemática na UEL, como o Ricardo Cezar, a Neuza Teramon, a Regina Buriasco, o Bruno Teixeira, a Magna Pires, a Ana Lúcia e a Edilaine Santos. Os ensinamentos e os conhecimentos compartilhados me marcaram profundamente.

Aos meus colegas de profissão e de Mestrado: Vinícius, Matheus, Fernando e Loyanne, que compartilham os sonhos de uma melhor educação e que são grandes suportes e aliados quando existem dúvidas, questionamentos e debates. Muito obrigado por fazerem parte de minha trajetória de estudos e de vida.

Em tempos de crise, os sábios constroem pontes

enquanto os tolos constroem muros.

T'Challa, o Pantera Negra

SANTOS, Jean Felipe dos. **Metodologias ativas de aprendizagem no ensino da Matemática**: uma proposta para o Ensino Médio. 2021. 106 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

RESUMO

Há vários anos, no Brasil, vêm sendo elaboradas estratégias que permitem que a qualidade educacional do nosso país seja aprimorada e inovada. Ultimamente, parte dessas inovações tem se concentrado nos desafios apresentados pelas metodologias ativas, apoiando a importância da formação docente em relação às diversas estratégias educacionais e pedagógicas, com o efeito de alcançar melhorias categóricas na educação. Nesse contexto, amparado em diferentes tipos de metodologias ativas, este trabalho apresenta uma proposta para o ensino de conteúdos do Ensino Médio utilizando tais metodologias, adaptadas ao ensino virtual. Seguindo uma abordagem qualitativa, o trabalho se desenvolve com base em teóricos que discorrem sobre as metodologias ativas, apresentadas no texto, concentradas na sala de aula invertida e no *peer instruction*. A proposta é composta por quatro atividades, com algumas etapas, apresentada por meio de um relato de experiência. Procura-se, com essa exposição, evidenciar os detalhes para que essa produção se constitua como uma alternativa para o ensino de Matemática a partir de metodologias ativas. Os estudos realizados mostram que o uso de ferramentas educacionais, tais como os aplicativos on-line, produz resultados positivos no ensino virtual, bem como aprimora o trabalho dos professores em sala de aula em benefício direto dos alunos, neste caso, do Ensino Médio, promovendo um maior aproveitamento e envolvimento.

Palavras-chave: Metodologias ativas. Ensino de Matemática. Peer Instruction. Aula Invertida.

SANTOS, Jean Felipe dos. **Metodologias ativas de aprendizagem no ensino da Matemática**: uma proposta para o Ensino Médio. 2021. 106 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

ABSTRACT

For several years, in Brazil, strategies that allow the educational quality of our country to be improved and innovated have been elaborated. Lately, part of these innovations have focused on the challenges presented by active methodologies, supporting the significance of teacher training in relation to various educational and pedagogical strategies, with the effect of achieving categorical improvements in education. In this context,sustained by different types of active methodologies, this work presents a proposal for teaching high school content using such methodologies, adapted to virtual education. According to a qualitative approach, the work is developed based on theorists who discuss the active methodologies presented in the text as a way to contribute to teaching, focused on the inverted classroom and Peer Instruction. The proposal is composed by four activities, with some steps presented through an experience report. This exhibition seeks to highlight the details so that this production is an alternative for teaching Mathematics using active methodologies. The studies carried out show that the use of educational tools, such as online applications, produces positive results in virtual teaching, as well as improves the work of teachers in the classroom for the direct benefit of students, promoting greater promoting greater achievement and involvement by a part of the high school students.

Keywords: Active methodology. Mathematics Learning. Peer Instruction. Flipped Classroom

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O trabalho de dissertação aqui apresentado nasce da inquietação do pesquisador aqui posto, um professor de Matemática da rede particular de ensino de Londrina desde 2014, possuindo experiências com os anos finais do Ensino Fundamental e com o Ensino Médio. Este professor busca constantemente sua evolução e a aprendizagem no âmbito acadêmico, para que se transforme gradual e positivamente sua prática docente. Além disso, tem como objetivo o seu aprimoramento como estudante e como professor, ampliando os conhecimentos em “fazer Matemática” e no ensino dela para seus alunos, de forma a enriquecer as aulas e as trocas que ali se fazem presentes.

Nesse âmbito, em um trecho retirado de uma entrevista concedida ao professor Ubiratan D’Ambrosio[1], Paulo Freire afirma:

> Quando a gente olha o relógio, por exemplo, a gente já estabelece a quantidade de minutos que a gente tem para, se acordou mais cedo, se acordou mais tarde, para saber exatamente a hora em que vai chegar à cozinha, vai tomar o café da manhã, a hora que vai chegar o carro que vai nos levar ao seminário, para chegar às oito. Quer dizer, ao despertar os primeiros movimentos, lá dentro do quarto, são movimentos matematicizados (informação verbal).

Nesse sentido, o estudo da Matemática, a apropriação de seus conceitos e de suas ideias, bem como as experiências vivenciadas em seu ensino, podem proporcionar aos indivíduos inseridos nesse contexto um tipo de desafio que lhes permite: encontrar diferentes alternativas de solução; trabalhar com conflitos; comparar; manipular objetos; estabelecer relações; expressar propriedades observadas; desenvolver pensamento lógico lidando com hipóteses; interpretar e entender situações da vida cotidiana; tomar decisões; ter confiança e autoconfiança; ser crítico e persistente.

Apesar da influência que a Matemática exerce na vida das pessoas, seja no desenvolvimento de seu raciocínio ou na resolução de problemas diários, ao longo da trajetória percorrida em sala de aula, percebemos que, em sua maioria, os alunos não

---

[1] Entrevista gravada para o 8º Congresso Internacional de Educação Matemática e transcrita por Ubiratan D’Ambrosio, [19--], p. 5. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5650788/mod_resource/content/1/Ubiratan%20DAmbrosio%20-%20Por%20que%20se%20ensina%20matem%C3%A1tica.pdf. Acesso em: nov. 2020.

gostam dessa disciplina. Um dos motivos que contribui para esse desgosto em relação à Matemática pode estar ligado ao não entendimento dos conceitos que lhes são apresentados, quer seja no Ensino Fundamental, quer seja no Ensino Médio. Nessa linha de raciocínio, aprender Matemática na forma tradicional, em que o professor é o centro do conhecimento e o aluno, meramente receptor, em uma aula com lousa e giz, pode ser um dos fatores que implicam esse problema. Para muitos estudantes, essa forma de ensino causa tanto rancor pela disciplina quanto receio dela, que se enraízam e acompanham o aluno no decorrer de seus estudos.

Outra indicação a que se deve esse cenário pode estar atrelada à maneira como a Matemática é ensinada, ou seja, à metodologia utilizada para o seu ensino, pois, constantemente, o estudante é levado a executar um mecanismo automático, que ele não entende e no qual não vê nenhum significado, agindo como mero receptor e repetidor daquilo que lhe é posto. De modo geral, os alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio têm muitas dificuldades quanto à compreensão do que lhes é ensinado nas aulas de Matemática. Consequentemente, eles julgam-se incapazes de assimilar as ideias e os conceitos matemáticos tratados, construindo um cenário que os leva a ter aversão a essa disciplina. Para esses estudantes, então, a Matemática se torna monótona, sem sentido; em razão disso, eles apresentam desinteresse, falta de motivação e sentimento de desprazer em seu estudo.

Enquanto isso, outros alunos calculam corretamente, mas, em diversos casos, não sabem interpretar os números obtidos para dar resposta a um problema. Tratando-se do Ensino Médio, apesar de os alunos já terem aprendido multiplicação e divisão em anos anteriores, muitos apresentam grandes dificuldades na manipulação de atividades envolvendo as operações citadas. Quando implica frações, a situação é ainda pior. A dificuldade aumenta quando elas aparecem em situações-problema em que há a necessidade de interpretar um enunciado e de apresentar matematicamente a situação. Em razão disso, existem hoje o esforço e a preocupação em apresentar formas diferenciadas de ver, de entender e de tornar a Matemática mais agradável, desse modo, deixando de lado a superioridade comumente atribuída a ela.

De acordo com D’Ambrosio (1989), a escola necessita formar alunos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas. Por conseguinte, é preciso que a escola transforme o aluno em um estudante participativo e atuante. Além do mais, é por meio da condução de metodologias de ensino pelo professor que será possível transformar a matemática dos símbolos, artificiais e sem significado para o aluno, em "[...] conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2017, p. 8). Isto é, a partir da mediação adequada do professor será concebível desenvolver as habilidades para enfrentar situações-problema do cotidiano e do ambiente em que o indivíduo está inserido.

Por meio da pesquisa e do engajamento, é possível, gradualmente, transformar a educação. Nós, professores, devemos estar em constante atualização, pois o mundo em que vivemos está evoluindo tecnologicamente cada dia mais. Nossos alunos são jovens, pertencentes à chamada "geração Z", ou seja, já nasceram inseridos numa cultura digital. Dessa forma, a maioria dos estudantes "reina na internet", no linguajar deles, e domina mecanismos conectados a ela, amparados pela conexão wi-fi (rede sem fio). Além disso, muitos alunos têm *smartphones*, *tablets* e *notebooks* e possuem acesso à informação instantaneamente, então faz sentido que usem seus dispositivos em sala de aula e fora dela. Nessa linha de raciocínio, Almeida (2018, p. 9) ressalta:

> A intensa expansão do uso social das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) sob a forma de diferentes dispositivos móveis conectados à internet sem fio, utilizados em diferentes espaços, tempos e contextos, observada na segunda década do século XXI, gerou e continua gerando mudanças sociais que provocam a dissolução de fronteiras entre espaço virtual e espaço físico e criam um espaço híbrido de conexões.

Desse modo, por consequência da intensa expansão mencionada por Almeida (2018), os alunos, as escolas e, principalmente, a sociedade estão se transformando e se atualizando. Por esse e outros motivos o trabalho em metodologias ativas é de grande relevância. Cabe salientar que se tem plena consciência da desigualdade socioeconômica que assola o Brasil, sendo fato que milhões de estudantes brasileiros não têm acesso à internet. Neste trabalho, considera-se a premissa de que eles deveriam ter acesso, havendo igualdade de oportunidades, inclusive aos alunos de escolas públicas, com respaldo e assistência devidas do governo.

> No Brasil, cerca de seis milhões de estudantes, desde a pré-escola até a pós-graduação, não têm acesso à internet banda larga ou 3G/4G em casa e, consequentemente, não conseguem participar do ensino

> remoto. Desses, 5,8 milhões são alunos de instituições públicas de ensino (ARAÚJO e SÁ, 2020, [p.i.]).

A situação é extremamente delicada, principalmente em meio a uma pandemia, como a de Covid-19, a qual temos enfrentado desde março deste ano (2020). No mais, sabe-se que é um grande desafio garantir que todos tenham acesso à internet; mais ainda, que tenham aparelhos disponíveis para esse fim.

> A partir do impacto das novas tecnologias no mundo, o acesso ao conhecimento se transformou, mesmo assim as escolas permaneceram quase as mesmas, sem interagirem com o novo cenário. No entanto, com o advento da pandemia, tudo mudou rapidamente e o uso da internet, do computador, do celular e de aplicativos se interpôs como essencial para a manutenção da escola (PAULINO, 2020, p. 65).

À parte as inovações e os avanços tecnológicos, Machado e D'Ambrosio (2014, p. 13) apontam que: "Periodicamente, resultados de avaliações ou pesquisas acadêmicas chamam a atenção de todos para um fato basal: ressalvadas as exceções de praxe, de modo geral o ensino de matemática nas escolas básicas vai mal".

O Ministério da Educação do Brasil, por meio das provas do SAEB (2018) realizadas com os estudantes, determinou que há deficiência em nível nacional em Matemática, em quase todas as suas habilidades, mais uma preocupação que nos motiva a realizar este trabalho. Esta proposta pretende contribuir com melhorias ao ensino, propondo outros caminhos para o ensino de Matemática, com uso de estratégias e recursos tecnológicos e atuais, apoiando o futuro dos alunos nas universidades e preenchendo lacunas em seus conhecimentos, para tornar as vidas acadêmica, social e individual produtivas, reflexivas e questionadoras.

Sendo assim, uma vez que o nível de conhecimento em Matemática se aprimora, deve facilitar e, em muitos casos, possibilitar o acesso não só à universidade, mas também ao setor de empregos, em que o raciocínio lógico matemático básico dos conteúdos e dos conceitos é colocado em prática.

Nesse sentido, o uso das metodologias ativas é uma possibilidade de apoiar o ensino da Matemática no Ensino Básico. Nas palavras de Almeida (2018, p. 11), a metodologia ativa "[...] se caracteriza pela inter-relação entre educação, cultura, sociedade, política e escola, sendo desenvolvida por meio de métodos ativos e criativos, centrados na atividade do aluno com a intenção de propiciar a aprendizagem". Com o intuito de apresentarmos os propósitos da presente dissertação, recorremos às Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica:

> A Educação Básica de qualidade é um direito assegurado pela Constituição Federal e pelo Estatuto da Criança e do Adolescente. Um dos fundamentos do projeto de Nação que estamos construindo, a formação escolar é o alicerce indispensável e condição primeira para o exercício pleno da cidadania e o acesso aos direitos sociais, econômicos, civis e políticos. A educação deve proporcionar o desenvolvimento humano na sua plenitude, em condições de liberdade e dignidade, respeitando e valorizando as diferenças (BRASIL, 2013, p. 4).

A partir dessas premissas e dos estudos realizados com foco no modelo de ensino *sala de aula invertida*, elaborado por Bergmann e Sams (2020), e no método *peer instruction*[2] (instrução por pares), criado por Mazur (2015), o objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta para abordar conteúdos de Matemática para o Ensino Médio utilizando as metodologias ativas.

Convém ressaltar que, em nossos estudos, deparamo-nos com uma variedade de denominações para o que, em geral, a literatura aponta como “metodologia”, a qual, no Dicionário Michaelis[3], significa: “[...] estudo dos métodos, conjunto de regras e procedimentos para a realização de uma pesquisa”. No cenário das metodologias ativas, ou seja, nas obras, nos artigos ou nos textos sobre tal assunto, além de “metodologia de ensino”, encontramos a denominação “modelo” e, ainda, “método”, palavras utilizadas por autores que são referência em relação ao assunto, tais como: Moran (2018), Bergmann e Sams (2020) e Mazur (2015).

A saber, estratégia é tida, segundo o Dicionário Michaelis[4], como a “[...] arte de utilizar planejadamente os recursos de que se dispõe ou de explorar de maneira vantajosa a situação ou as condições favoráveis de que porventura se desfrute, de modo a atingir determinados objetivos”. Após várias reflexões sobre qual denominação utilizaríamos neste texto, decidimos respeitar a nomenclatura dos autores, ao fazer uso da produção científica de cada um. Então, o verbete aqui descrito vem esclarecer o que possa parecer confuso, ao nomearmos como

---

[2] Ao longo do trabalho, optamos pelo uso do termo em inglês, em concordância com o livro traduzido de Mazur (2015): “A revolução da aprendizagem ativa”. Assim como no livro em que se mantém o conceito utilizando a palavra na língua inglesa: *peer instruction*.

[3] Disponível em: http://michaelis.uol.com.br/busca?id=G97VM. Acesso em: nov. 2020.

[4] Disponível em: http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=estrat%C3%A9gia. Acesso em: nov. 2020.

“metodologia”, “estratégia de ensino”, “modelo” ou “método” o que, em nossa concepção, são as *estratégias de ensino*.

No mais, caracterizamos a investigação realizada no desenvolvimento desta dissertação e na elaboração da proposta como de caráter qualitativo, em que nos debruçamos em autores renomados que tratam das metodologias ativas de aprendizagem e que estão sendo utilizados na atualidade, por diferentes professores e pesquisadores.

Essa proposta nasce amparada/fundamentada no modelo de sala de aula invertida e no método *peer instruction*, aliados às atividades com resolução de problemas. O conteúdo sobre tais fundamentos será explicitado no segundo capítulo. Além disso, após essa exposição, serão evidenciados pormenores em relação ao uso dos *softwares*-aplicativos *Kahoot* e *Socrative*, ferramentas que, se bem usadas, podem auxiliar no ensino de Matemática.

Em nossos estudos iniciais, buscamos investigar, a partir das obras e dos trabalhos produzidos no cenário educacional, qual o impacto das metodologias ativas no ensino, trazendo nossos estudos para as aulas de Matemática dos alunos do Ensino Médio. Assim, com vistas às reflexões construídas sobre o amparo dado pela sala de aula invertida e pelo *peer instruction*, construímos a proposta anunciada. Nesse âmbito, no terceiro capítulo, elaboramos a proposta com algumas etapas descritas por meio de relatos de experiência, evidenciando como se deu esse processo de aula a partir do formato remoto, em que alunos e professor se encontram de modo virtual e simultâneo.

Buscamos, neste texto, evidenciar pormenores do trabalho a ser realizado pelos professores que desejarem utilizar nossas propostas e ideias para o ensino dos conteúdos aqui apresentados, ou, ainda, que quiserem adaptá-las a seus objetivos para o ensino de outros conteúdos da Matemática.

No cotidiano do professor, embora não tenham se originado do campo matemático, as metodologias ativas sala de aula invertida e *peer instruction*, que serão aqui apresentadas, constituem um conjunto de possibilidades para práticas pedagógicas realizadas no ensino, apresentando caminhos, também, para o ensino na área de Matemática.

2 METODOLOGIAS ATIVAS: *PEER INSTRUCTION*, SALA DE AULA INVERTIDA E APLICATIVOS

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS E CARACTERÍSTICAS DAS METODOLOGIAS ATIVAS

A metodologia ativa, por hipótese, surgiu do *paidocentrismo*[5] de Rousseau. Nele, a criança era considerada completa e portadora de características especiais, que precisavam ser adaptadas à ação educacional de maneira eficaz, tornando a criança protagonista de seu aprendizado (CANGALAYA, 2010).

Podemos afirmar que a metodologia ativa, também conhecida como aprendizado ativo, começou com os estudos de Iván Pavlov (1849-1936) e continuou com a proposta construtivista de Lev Vygotsky (1896-1934), na União Soviética; de Jean Piaget, na Suíça, na década de 1950; e de David Ausubel, na década de 1960 nos EUA (JEREZ, 2015).

Essa metodologia parte da ideia de que o aluno, graças à motivação e à mediação do professor, é o protagonista de seu próprio aprendizado. Isso o torna um ser autônomo, capaz de desenvolver plenamente suas atitudes — aspectos que a metodologia tradicional não proporciona aos alunos. Nesse sentido, Serrano (2005, p. 8) aponta que o aluno deve ser:

> [...] o principal protagonista do processo de ensino, planejador, colaborador e gerente de sua própria aprendizagem, ter uma predisposição para aprender, além de trabalhar em grupo ou individualmente. De acordo com as necessidades, organizando seu tempo e aproveitando-o, demonstrando responsabilidade, interesse e motivação ao aprender, sendo uma entidade organizadora e planejadora da matéria.

Na metodologia ativa, observou-se que os bons resultados no ensino são alcançados devido à boa relação entre professor e aluno, pois, nesse método, as ideias são compartilhadas, as relações interpessoais são aprimoradas e a confiança e o respeito são estimulados mediante o reforço de conteúdo e a participação contínua.

---

[5] *Paidocentrismo* é um termo usado na obra "Emilio", de Jean Jacques Rosseau, em que a criança deve ser o centro do processo educativo: de seu conhecimento depende toda a educação. A criança precisa ser vista como criança, não como um adulto em miniatura. Ademais, ainda segundo o filósofo iluminista, a educação é um processo natural e progressivo, que dura toda a vida e necessita respeitar as características próprias de cada fase do desenvolvimento humano (BERVIQUE, 2004).

Estudos realizados por Cangalaya (2010) colocam que a metodologia ativa reside na participação direta e dinâmica dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, além de promover ações e pesquisas autônomas por parte dos estudantes. Segundo o autor, ela é caracterizada da seguinte forma:

> 1. É dirigida ao aluno.
> 2. Dá importância aos interesses da criança.
> 3. É vital, introduz a vida na escola.
> 4. Permite ser social, motiva as atividades escolares do trabalho em grupo.
> 5. Promove a prática da comunicação horizontal-bilateral.
> 6. Atribui um papel ao professor como mediador na aprendizagem
> 7. Tende a disciplinar, permite que a criança seja ouvida, respeitada, considerada e assuma as responsabilidades de suas ações [...].
> 8. Promove atividades de ação-reflexão; a ação deve levar à reflexão sobre o que é feito e como é feito.
> 9. Incentiva a participação cooperativa, expressando ideias e sentimentos com liberdade; o aluno levanta discrepâncias e assume responsabilidades, livremente (CANGALAYA, 2010, p. 5, tradução nossa).

Essas características permitem que o aluno perceba a aprendizagem como um processo construtivo, não receptivo, e apreenda as características que tornam uma metodologia considerada ativa. Já ao considerar Villarroya e Molina (2015), as metodologias ativas partem das seguintes premissas:

- Devem partir dos interesses e das motivações dos alunos, que devem “aprender fazendo” em situações contextualizadas;
- Devem promover criatividade, crítica, senso de iniciativa e espírito empreendedor; devem estar associadas a uma avaliação abrangente com as características dos alunos;
- Devem ser definidas como um meio para o aluno alcançar autonomias intelectual e moral; baseadas em tópicos globalizados adaptados aos interesses dos estudantes;
- Precisam ter uma organização flexível de espaços, agrupamentos e horários; devem basear-se na colaboração e na cooperação dos estudantes por meio da criação de grupos heterogêneos;
- Devem ser usadas em combinação com as TIC; e o professor deve atuar como guia e facilitador do aprendizado.

Em seguida, passaremos às explanações sobre o método *peer instruction* e o modelo de ensino sala de aula invertida.

2.2 O *PEER INSTRUCTION* E A SALA DE AULA INVERTIDA

O método de ensino *peer instruction* foi criado pelo professor Eric Mazur em 1992. Antes de abordar o conceito, seguem algumas informações sobre o teórico:

> Eric Mazur é o Balkanski Professor de Física e Física Aplicada da Harvard University. Cientista e pesquisador internacionalmente reconhecido, lidera um programa robusto de pesquisa em física óptica e supervisiona um dos maiores grupos de pesquisa do Departamento de Física de Harvard. Fundou várias empresas e desempenha um papel ativo na indústria. Recebeu inúmeros prêmios, incluindo o Esther Hoffman Beller, da Optical Society of America, e a medalha Millikan, da American Association of Physics Teachers. Em 2014, tornou-se o destinatário inaugural do prêmio Minerva para Avanços na Educação Superior. É autor ou coautor de 297 publicações científicas, 36 patentes e vários livros, incluindo Principles and Practice of Physics (Pearson, 2014), livro que apresenta uma abordagem inovadora para o ensino introdutório de física baseada em cálculo. Mazur é um palestrante bastante requisitado nas áreas de óptica e da educação (MAZUR, 2015, p. 2).

No âmbito deste trabalho, Mazur é especialmente relevante, porque idealizou o método de ensino *peer instruction*, em sua disciplina de introdução à Física, na Universidade de Harvard. Preocupado com a metodologia de aula tradicional expositiva, Mazur verificou que, em suas aulas tradicionais, a aprendizagem era baseada na memorização dos conteúdos e das fórmulas, em vez de fundamentar-se na compreensão dos conteúdos trabalhados em aula. Sua aula era dada de forma expositiva, os conteúdos eram apresentados pelo professor e os alunos os recebiam de forma passiva. Na sequência, eram abordadas estratégias de resolução de problemas, nos quais predominava a aplicação de fórmulas, exigindo do aluno apenas uma habilidade algébrica.

De acordo com Mazur (2015), essa observação levou-o a questionar e a refletir sobre seu método de aula, o que provocou uma mudança em sua metodologia de ensino e se tornou o estímulo inicial para a criação do método *peer instruction*. O aprendizado dos conteúdos, então, foi priorizado, deixando em segundo plano o modo tradicional de aula.

Segundo Mazur (2015), no método *peer instruction*, as aulas são trabalhadas por meio da discussão conceitual dos assuntos, enquanto as estratégias de resolução de problemas ficam em segundo plano. Desse modo, estas se tornam consequência do forte alicerce implementado pelo debate relativo às questões conceituais das aulas. O foco das aulas, então, concentra-se na compreensão e na aprendizagem dos conteúdos, que avançam conforme o desempenho dos alunos, segundo o método descrito adiante.

Como mencionamos, o ensino tradicional manifestava problemas em relação à retenção dos conceitos por parte dos alunos, de acordo com Mazur (2015). Isso ocorria porque tais conceitos eram tratados em forma de monólogo, no qual o professor apresentava os conteúdos narrando as notas de aulas feitas anteriormente, ao passo que os alunos utilizavam o tempo de aula copiando. Dessa maneira, não havia discussões nem diálogos em sala, fato que não propiciava o pensamento crítico por parte dos alunos. Assim, buscando mudanças, o autor relata que as notas de aulas, que costumava distribuir ao final de cada aula, começaram a ser distribuídas antes da aula presencial.

Desse modo, os alunos teriam contato com as notas de aula em suas casas e, na aula presencial, o tempo seria utilizado para discutir os conteúdos abordados nas notas de aula feitas em casa pelos jovens. Sendo assim, as notas de aula fornecidas anteriormente, ou, então, as tarefas de leitura do livro, introduzem o material (MAZUR, 2015). Na sequência, as aulas expositivas auxiliam os estudantes a elaborarem o que foi lido, a esclarecerem as dificuldades potenciais, a aprofundarem a compreensão, a criarem confiança, além de fornecerem exemplos adicionais. Por fim, o livro e as notas servem de referência e de guia de estudo.

Nesse método de ensino, os alunos são agrupados em pares ou trios, não havendo um rigor no número de alunos em um grupo. Assim, existe um compartilhamento de opiniões referentes ao que foi discutido em sala, provocando uma colaboração entre os alunos e enriquecendo de forma geral o conhecimento de todos da turma. Daí o nome “instrução por pares” (tradução de *peer instruction*).

No mais, os objetivos do *peer instruction* consistem em explorar a interação e a comunicação entre os estudantes durante as aulas expositivas e em focar a atenção dos estudantes nos conceitos fundamentais que servem de pré-requisitos para a resolução de problemas. Ainda segundo Mazur (2015), as aulas expositivas devem contemplar uma série de apresentações curtas sobre os pontos-chave do conteúdo estudado, cada qual seguida de um teste conceitual, abordando um assunto que está sendo discutido em aula, de acordo com o nível de detalhes apresentado no livro ou nas notas de aula lidas em casa pelos alunos.

A aplicação dos testes conceituais segue a seguinte receita apontada por Mazur (2015), que, embora seja generalizada, dá um norte para o encaminhamento:

1) Proposição da questão aos alunos: duração de 1 minuto;
2) Tempo para os estudantes pensarem, individualmente, sobre a questão: duração de 1 minuto;
3) Os estudantes interagem entre si, na tentativa de convencer seus colegas a respeito da resposta do teste (essência do método *peer instruction*): duração de 1 a 2 minutos;
4) Ao chegarem ao consenso da resposta, os estudantes anotam as respostas que julgam ser corretas: duração opcional;
5) Feedback para o professor, com registro das respostas dadas pelos alunos (é nesse ponto que entra o uso dos aplicativos *Socrative* ou *Kahoot*);
6) A explicação da resposta correta: duração de 2 minutos.

De acordo com o autor, se a maioria dos estudantes escolher a resposta correta do teste conceitual, isto é, se uma porcentagem do número de alunos que acertarem for maior ou igual a 70%, a aula prossegue para o próximo tópico. Se a porcentagem de respostas corretas for muito baixa (por exemplo, menos de 30%), é necessário rever os conceitos fundamentais do mesmo tópico detalhadamente. Ademais, é preciso ir mais devagar e, na sequência, fazer uma nova avaliação com outro teste conceitual. Assim, Mazur (2015, p. 11) prossegue e justifica tal repetição:

> [...] essa abordagem de repetir se necessário evita a formação de um abismo entre as expectativas do professor e a compreensão dos estudantes – um abismo que, uma vez formado, só aumentará com o tempo até que a aula fique inteiramente perdida.

Ainda sobre os testes conceituais, caso a porcentagem de respostas corretas se encaixe na faixa de 30% a 70%, o professor deve agrupar novamente a turma, para que os alunos discutam e defendam seus pensamentos críticos, além de votarem nos testes na sequência. O professor deve avançar para o próximo tópico apenas: quando os conceitos fundamentais forem compreendidos e sinalizados pelas votações nos testes feitos pelos alunos; e quando estes tiverem fornecido o feedback para o professor.

Ademais, a votação dos testes conceituais pode ser feita de diversas formas, sendo a mais básica pedir aos alunos que levantem as mãos para indicarem suas respostas. Embora não seja imediata (tanto quanto um aplicativo ou um *software* de respostas) e não conte com um registro escrito, essa forma de coleta das respostas permite ao professor fazer uma contagem rápida e representa uma maneira de se aplicar o método sem recursos tecnológicos. Ainda no âmbito não virtual, também existe a possibilidade de se confeccionar cartões de respostas para que os estudantes possam levantá-las e o professor identificar as respostas.

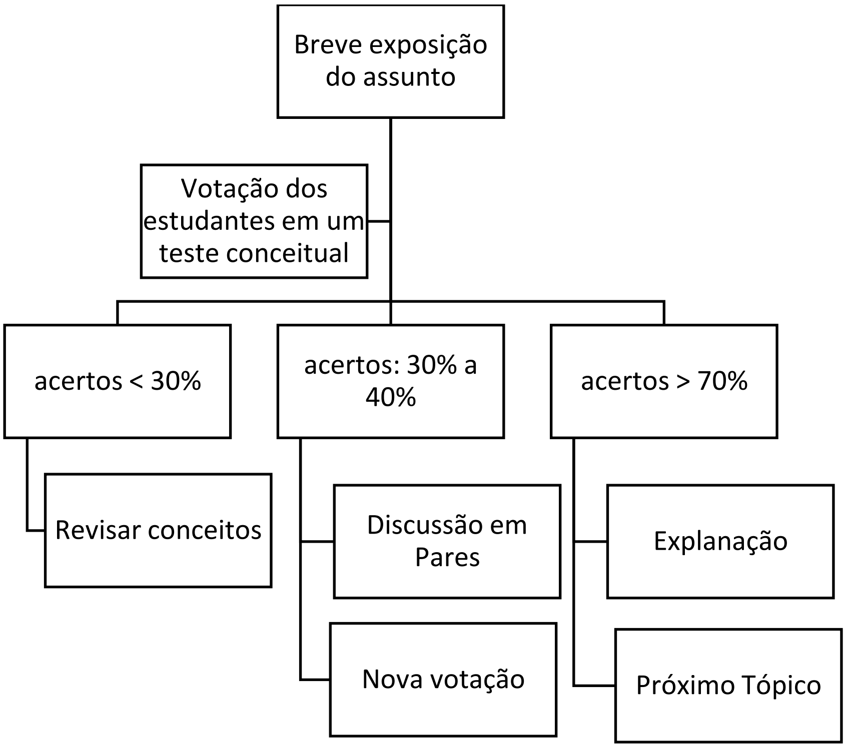
Nesta proposta, apresentaremos os aplicativos *Socrative* e *Kahoot*, nos quais a votação ocorrerá via dispositivos móveis ou computadores, o que gera um feedback imediato ao professor.

Conforme já colocado, a essência do *peer instruction* é baseada na troca de informações e na discussão da questão entre os alunos. Eles, na tentativa de convencerem os demais colegas ou de "negociarem" uma solução, produzem discussões que quebram a inevitável monotonia das aulas expositivas tradicionais. Além disso, ocorre o mais importante: os estudantes não se limitam a simplesmente assimilarem as matérias que lhes são apresentadas, pois eles devem pensar por si e verbalizar seus pensamentos, a fim de poderem discutir com seus colegas. É nessa perspectiva que Mazur (2015, p. 13) sublinha:

> [...] algumas vezes, parece que os estudantes são capazes de ensinar os conceitos uns aos outros, de forma mais eficiente do que seus professores. Uma explicação provável é que os estudantes, os que são capazes de entender o conceito que fundamentam a questão dada, acabaram de aprender a ideia e estão cientes das dificuldades que tiveram que superar para compreender o conceito envolvido. Consequentemente, eles sabem exatamente o que enfatizar em sua explicação.

Desse modo, a seguir, esboçamos um esquema de uma aula utilizando o *peer instruction:*

Figura 1 – Esquema de uma aula utilizando *peer instruction*



Fonte: compilação pelo próprio autor a partir de Pinto (2019)

Depois das colocações feitas até aqui, a seguinte pergunta pode ser levantada: “e as habilidades para resolver problemas?”. O desenvolvimento dessas habilidades é deixado para as tarefas extraclasses, assim como as sessões de discussão em uma aula podem ser empregadas especificamente nisso. Nesse sentido, Mazur (2015, p. 16) notou que “[...] uma melhor compreensão dos conceitos fundamentais levou a um melhor desempenho nos problemas convencionais”. Ele comprovou isso ao fazer testes referentes a resoluções de questões de exames envolvendo formulações matemáticas.

Além disso, um aspecto relevante a ser considerado refere-se ao planejamento, que deve ser realizado pensando no assunto abordado nos estudos em casa e como tratá-lo na aula presencial. Caso o professor reproduza exatamente o que aluno leu em casa, o método falhará, uma vez que voltará ao método tradicional de exposição e a leitura prévia perderá seu valor. Então, por meio do feedback das respostas dos alunos, o professor decide se é conveniente alguma intervenção ou se o conteúdo foi realmente compreendido pelos alunos.

Após o trabalho nas aulas expositivas, nas quais os assuntos lidos anteriormente pelos alunos são discutidos entre eles e com o professor e os resultados dessa discussão são conferidos por meio dos testes conceituais, faz-se necessário realizar uma aula cuja finalidade seja apenas a resolução de problemas. Essa necessidade se dá pelo fato de que, nas provas e nos exames, são cobradas questões apresentadas nos livros de classe e nos vestibulares, os quais geralmente possuem uma abordagem mais tradicional.

Já o modelo de sala de aula invertida começou a ser idealizado em 2006 por dois professores de Química, Jonathan Bergmann e Aaron Sams, quando lecionavam em uma escola rural em Woodland Park, Colorado, Estados Unidos. Os professores relatam o fato de que muitos alunos faltavam às aulas, pois praticavam esportes e representavam a escola em eventos e competições. Isto é, a prática desportiva comprometia a frequência dos alunos nas aulas. Isso ocorria porque tais escolas rurais eram distantes, o que fazia com que esses alunos passassem grande parte do tempo deslocando-se entre eventos realizados em lugares diferentes. Esse fator dificultava a chegada dos estudantes à escola e o acompanhamento das disciplinas.

Com isso, Sams, folheando uma revista de tecnologia, mostrou a seu colega Bergmann um artigo sobre um *software* que gravava apresentações de slides em *Power Point*, incluindo voz e anotações; além disso, esse instrumento convertia a gravação em arquivo de vídeo, podendo ser facilmente compartilhado na internet. Esse foi o início da criação da sala de aula invertida (BERGMANN e SAMS, 2020).

Os dois professores, então, começaram a gravar suas aulas em vídeo e a disponibilizá-las aos alunos que faltavam às aulas. Entretanto, ambos observaram que os outros alunos da classe também poderiam acessar esses vídeos. Sendo assim, pensaram: “E se gravássemos todas as aulas, e se os alunos assistissem ao vídeo como ‘dever de casa’ e usássemos, então, todo o tempo em sala para ajudá-los com os conceitos que não compreenderam?” (BERGMANN e SAMS, 2020, p. 4).

A partir dessa reflexão norteadora, Bergmann e Sams (2020) consideram o acesso ao vídeo assistido em casa, como tarefa ou complemento, o elemento principal para a sala de aula invertida. Cabe salientar que esse método está condicionado ao uso de vídeos, não simplesmente aos alunos lerem os conteúdos do livro em casa.

Ademais, eles ressaltam que, para que o método seja eficaz, é fundamental fornecer condições para que todos os estudantes da classe tenham acesso ao vídeo. A saber, isso era feito pelos professores por meio de sites, e-mails ou até por mídia gravável (*dvd-rom*, pen drive etc.). Com isso, o que os professores apresentariam aos alunos, antes, na sala de aula estaria no conteúdo dos vídeos e, então, o tempo em sala de aula poderia ser usado para tratar de dúvidas que viessem a surgir sobre a aula vista pelo vídeo. Posteriormente, eles concentrariam os esforços na realização de outras atividades inerentes ao conteúdo da aula, como resolução de problemas, atividades no laboratório, seminários, entre outras.

Segundo Bergmann e Sams (2020), basicamente, o conceito de sala de aula invertida consiste em: o que tradicionalmente era feito em aula, agora é executado em casa; o que tradicionalmente era feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula. De fato, o nome “sala de aula invertida” se relaciona a essa inversão de ações, tanto por parte dos alunos quanto por parte do professor.

Uma das vantagens desse método é o fato de o ensino ser personalizado. Segundo o relato dos autores, é possível dar mais atenção aos alunos com mais dificuldades, pois eles podem ser auxiliados não apenas pelo próprio professor, mas também pelos colegas que não possuem as mesmas dificuldades. Esse recurso pode ajudá-los de maneira mais eficiente, pois, por conta de as explicações serem realizadas por um colega de sala, a linguagem deste pode ser mais atraente que a linguagem técnica utilizada pelo professor. Essa proposta vai ao encontro da necessidade de uma mudança no papel do professor, que abandona a atitude de “transmissor de conceitos” para assumir a função de orientador e de mediador na construção dos conhecimentos, os quais são protagonizados pelos estudantes.

De forma geral, a aula passa a girar em torno do próprio aluno e deixa de ser centrada no professor. Nesse modelo, o professor se torna responsável por promover feedbacks personalizados em resposta ao trabalho dos alunos, que assistem previamente aos vídeos e trazem questionamentos para as aulas presenciais da turma. Para convencer os professores da relevância da inversão em suas aulas, Bergmann e Sams (2020) apresentam uma série de motivos para que ocorra tal mudança. Nessa perspectiva, os autores afirmam que a inversão proporciona uma aproximação com a linguagem dos estudantes, além de auxiliar aqueles que possuem maior dificuldade em relação ao tempo, por exemplo, oferecendo-lhes maior flexibilidade nos estudos.

O modelo de inversão também permite que os alunos com diferentes habilidades possam equilibrar seus processos de aprendizagem, pausando, avançando ou revendo a aula quando for preciso. A inversão, além de permitir uma intensificação da relação entre o aluno e o professor, proporciona aos alunos uma maior socialização entre si. Essa personalização do ensino ocorre pelo fato de atender às necessidades de cada aluno, já que cada um, em seu próprio tempo, pode assistir à aula no vídeo, quando e onde quiser, quantas vezes julgar conveniente.

Em aulas tradicionais, em contraponto, não existe a possibilidade de pausar e retroceder a fala do professor. De forma geral, os alunos precisam ser ágeis e habilidosos para, simultaneamente, atentarem-se às explicações e realizarem as anotações no caderno. Com o recurso dos vídeos, o controle das aulas está nas mãos dos estudantes, conforme analisam Bergmann e Sams (2017, p. 35):

> Quando damos aos alunos a capacidade de “pausar o professor”, eles têm a chance de dirigir a exposição em seu próprio ritmo. Recomendamos, em especial, aos alunos mais vagarosos que usem sem inibição o botão de retrocesso, para que ouçam nossa explicação mais uma vez e a absorvam profundamente. Se ainda assim não compreenderem, trabalharemos com eles individualmente ou em pequenos grupos na sala de aula.

Segundo os autores, nas aulas presenciais, o papel de mediador do professor realmente faz a grande diferença no aprendizado de seus alunos, aproximando as dificuldades particulares de cada um deles. Isso comprova a importância do modo de agir em sala de aula, quando todos estão presentes simultaneamente (presencial ou virtualmente), podendo-se usar o tempo para sanar dúvidas e aprofundar conteúdos. Nesse contexto, Cortelazzo et. al. (2018, p. 81) relatam que:

> O foco deve estar completamente centrado nas interações que ocorrem nos momentos presenciais, ou seja, na sala de aula! É aí que o professor deve ter a sensibilidade para compreender as deficiências ou os gaps na aprendizagem dos estudantes e reforçar, complementar, motivar e ligar conteúdos que os sensibilizem a ponto de compreenderem completamente aquele tema.

Desse modo, seguindo o modelo da sala de aula invertida, fica evidente a inversão do papel do professor e, por consequência, o do aluno. Portanto, a título de fechamento, para ampliar as estratégias de ensino, mostra-se relevante a utilização dos dois métodos citados, o *peer instruction* e a sala de aula invertida, que fazem parte das metodologias ativas de aprendizagem.

2.3 Características dos alunos do Ensino Médio

O Ensino Médio é a última etapa da Educação Básica para adolescentes, jovens e adultos, ou seja, espera-se que o grau de maturidade dos indivíduos seja maior daqueles que estão nesta fase. Ademais, existem elementos que caracterizam o estudante e precisam ser levados em consideração, como: o desenvolvimento próprio, os lares, as condições de vida, as famílias, as escolas ou as instituições pelas quais ele passou, as comunidades em que vive, as amizades, os professores que teve e que tem e até as formas de aprender.

Todos esses fatores podem exercer uma influência positiva ou negativa no desenvolvimento do estudante. Cada grupo de estudantes do Ensino Médio possui e se caracteriza com um conjunto com características diferentes, de tal modo que o professor deve conhecer para o planejamento do trabalho a ser realizado. Tal planejamento se refere tanto ao trabalho feito com o grupo de alunos como ao realizado com cada um dos membros da turma.

As condições apontadas podem ou não interferir no aprendizado, influenciando sobretudo a maneira como os alunos do Ensino Médio aprendem. Hoje, os alunos recebem informações de muitas outras fontes além da escola, e a missão dela deve ser ajudá-los a “digerir” esses dados e a transformá-los em conhecimento. Nesse sentido, os aspectos abordados nos permitem refletir sobre como o professor do Ensino Médio deve estar preparado e aberto a novas práticas e a novos modelos de ensino. Desse modo, ele pode dar atenção às transformações tecnológicas e às dificuldades dos alunos em aprender Matemática, para, assim, diagnosticar e amparar o progresso e os contratempos deles.

Ressaltam-se os apontamentos que os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) ao colocar que os alunos precisam ser educados de uma maneira que contribua para a construção da cidadania, para o conhecimento dos direitos fundamentais, para o respeito pela pluralidade e pela diversidade de crenças sexuais, étnicas, raciais, culturais, de gênero e religiosas. Essa concepção incorpora o entendimento de uma cidadania democrática.

Enquanto isso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) coloca que o Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos, tem como finalidades:

> • A consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento dos estudos.

> • A preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores.
> • O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.
> • A compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina (BRASIL, 2017, p. 464).

A última etapa do Ensino Básico amplia os conhecimentos propostos no Ensino Fundamental, os papéis crítico e ativo dos estudantes. Além disso, reforça conexões sobre a compreensão de teorias elaboradas por nossa espécie, melhorando nossa existência no mundo e fazendo refletir sobre nosso lugar nele. Com efeito, perante a cidadania democrática, o trabalho, a formação ética, promove-se o conhecimento dos direitos e dos deveres, da pluralidade dos indivíduos nos âmbitos cultural, racial, étnico, entre outros.

No mais, as mídias sociais influenciam demasiadamente o jovem, transmitindo uma série de padrões (culturais e conceituais) a serem seguidos, nos âmbitos de poder, prestígio, lazer, prazer, consumo, imagem, entre outros fatores. Isso cria sérias ilusões comparadas com as realidades do ambiente de trabalho e da vida escolar, que são muito diferentes, e plurais, exigindo do indivíduo a capacidade de viver conflitos e diferenças.

Pensando na educação perpassando o ambiente da escola, ressalta-se que, quando o jovem chega ao Ensino Médio, muitas vezes, os responsáveis enfrentam maior dificuldade para acompanharem os filhos no processo escolar, pois os trabalhos, as tarefas e os conteúdos em si exigem domínio de conhecimentos específicos, com maior complexidade. Além disso, o currículo apresenta maior número de disciplinas. Assim, nessa etapa de desenvolvimento do jovem, os responsáveis podem contribuir para o trabalho pedagógico da escola tomando algumas atitudes, tais quais:

- valorizar as atividades escolares como etapa de crescimento intelectual;
- valorizar o avanço social do jovem tanto no que se refere à continuidade dos estudos como na compreensão e participação do espaço em que convive;
- valorizar o acesso ao mundo do trabalho;
- observar e acompanhar a rotina das atividades sociais;

> - conversar e ouvir com atenção os seus questionamentos, lembrando que nesta etapa de desenvolvimento surgem muitas dúvidas sobre novos temas;
> - observar o comportamento: hábitos de higiene, sono, tratamento com as pessoas, mudanças de humor e converse com o psicólogo da escola;
> - alertar sobre as responsabilidades que acompanham a maior autonomia das suas relações;
> - manter contato com a coordenação da escola para se informar sobre o desempenho desses alunos;
> - verificar o material escolar utilizado pelo jovem: como estão suas anotações, a organização, capricho, o cuidado com os livros;
> - acompanhar a frequência às aulas;
> - buscar informações na escola sobre a participação nas atividades escolares;
> - participar das atividades propostas pela escola;
> - desenvolver uma boa parceria entre família e escola, pois esta relação fortalecerá tanto o trabalho dos professores e profissionais que acompanham o dia a dia da juventude, como a orientação desenvolvida pelos responsáveis junto aos jovens (MEC. 2020, [p.i.]).

Os tempos atuais (século XXI) exigem que os professores prestem a devida atenção nos alunos, implementando práticas, estratégias ativas e recursos tecnológicos; adotando novas oportunidades à medida que surgem; colaborando com outros professores; e criando relacionamentos efetivos. Os professores devem estimular os alunos a compartilharem ideias, inspirá-los e motivá-los a construírem seus próprios conhecimentos, a partir da busca constante por informações e experiências da prática cotidiana. Também cabe aos responsáveis cumprirem suas obrigações. Logo, é disso que se trata: a aprendizagem constante e significativa.

Ademais, acredito[6] na postura reflexiva do professor, com intenção de oportunizar um ensino também reflexivo. Desde jovem, no Ensino Médio, praticava esportes e jogava on-line (jogos de competição por celular ou pelo computador). Sou apaixonado por skate, um esporte individual, porém coletivo, pois, na busca por evolução, para aprender movimentos, manobras e posturas, o convívio com os mais experientes se torna uma aula de cidadania, em que se respeita o colega que explica como faz e como aprendeu, dando sugestões para que você tente por si só e descubra como realizar tal manobra. Os companheiros, então, propiciam um aprendizado, em um ambiente de cooperação e de colaboração, tendo em vista que todos na pista têm

[6] Abriu-se uma exceção para a escrita em primeira pessoa do singular, tendo em vista que o pesquisador considera importante relatar sua experiência pessoal como forma de motivação e de ambientação do contexto em que está inserido.

um mesmo objetivo: evoluir no skate. Para que atinjam suas finalidades, unem-se e trabalham juntos, alimentando o espírito de colaboração entre todos.

Em relação à outra modalidade, de jogos on-line, atualmente, jogo em campeonatos competitivos, em que 25 equipes de 4 membros são lançadas em um mapa arbitrário 8km *vs* 8km, cuja finalidade é eliminar as equipes adversárias. Nesse jogo, a título de exemplo, cada membro possui seu papel, trabalhando em conjunto, tomando decisões previamente bem planejadas e combinadas por todos os membros, lidando com erros e acertos e evoluindo como equipe. Na posição de professor, penso que, assim como nos esportes, as experiências prévias dos estudantes devem ter valor em aula e podem promover ações de cidadania, em que o espírito de colaboração e de cooperação esteja presente. Nesse contexto, a escola, a família e os professores podem ser proponentes e/ou participantes dessa evolução dos alunos.

Passando ao próximo tópico deste trabalho, cabe reiterar que os estudantes do Ensino Médio estão inseridos na cultura digital, então são considerados nativos digitais, fazendo uso de celulares, aplicativos e redes sociais todos os dias e com propriedade. Assim sendo, é de bom tom, de uma forma saudável, usar aplicativos tecnológicos no ensino, transpondo o universo digital para a sala de aula. Então, a seguir, apresentaremos os *softwares* aplicativos usados como ferramentas no ensino de Matemática: *Kahoot* e *Socrative*.

2.4 O USO DO *SOFTWARE*-APLICATIVO *KAHOOT*

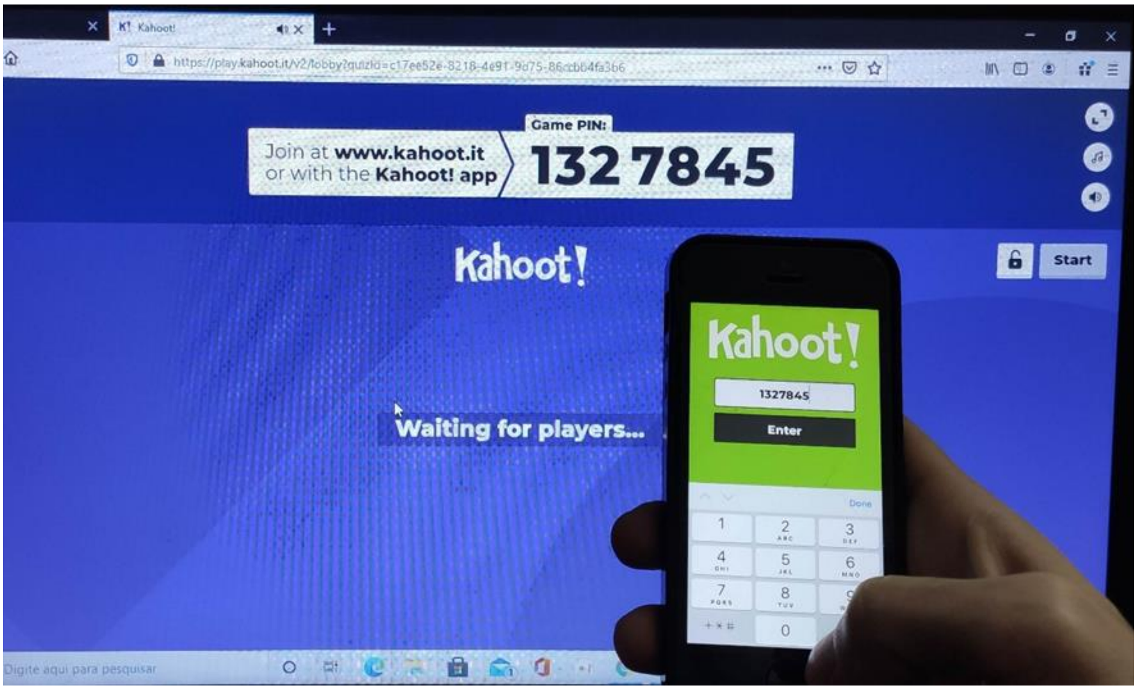
Nesta seção, iniciamos a explanação sobre uma das tecnologias inseridas na proposta: a plataforma de aprendizagem *Kahoot*. Tal plataforma pode ser usada como ferramenta para o ensino, trazendo à tona os recursos tecnológicos diversos com finalidades educacionais. Essas ferramentas, de modo geral, são hospedadas na web, permitindo que mais pessoas possam acessar os conteúdos, a qualquer hora e de qualquer local.

Para melhor apresentarmos o potencial dessa ferramenta específica, consideramos necessário trazer uma breve descrição da plataforma *Kahoot*. Segundo Brito (2019), ela foi fundada por Johan Brand, Jamie Brooker e Morten Versvik em um projeto realizado em conjunto com a Universidade Norueguesa de Ciência e Tecnologia, em Trondheim (Noruega). Trata-se de uma plataforma gratuita que permite a criação de questionários de avaliação, disponíveis em aplicativo ou em versão web. É uma ferramenta pela qual o professor cria concursos em sala de aula para reforçar a aprendizagem e para que os alunos assimilem o conteúdo. Nela, os alunos são os concorrentes, ou os competidores.

Para utilizá-la, inicialmente, os alunos escolhem seu apelido ou nome de usuário e respondem a uma série de perguntas usando um dispositivo móvel ou um computador, como mostramos na Figura 2. Existem dois modos de jogo: em grupo ou individual. Os jogos de perguntas, uma vez criados, são acessíveis para todos os usuários da plataforma, a fim de que possam ser reutilizados e até modificados. É possível alterar o tempo de contagem regressiva, as possíveis respostas e adicionar fotos ou vídeos. Finalmente, ganha o jogo quem obtém mais pontos (BRITO, 2019).

No entanto, embora seja um aplicativo destinado ao ensino e aprendizagem, há usuários que o utilizam como meio de entretenimento, criando testes sobre temas relacionados à cultura geral, aos videogames, aos logotipos de empresas famosas, ao anime, ao mangá, entre muitos outros assuntos. Por isso, ele tornou-se algo multifuncional, cumprindo as funções educacionais e as lúdicas.

Figura 2 – Formas de acesso ao *Kahoot*

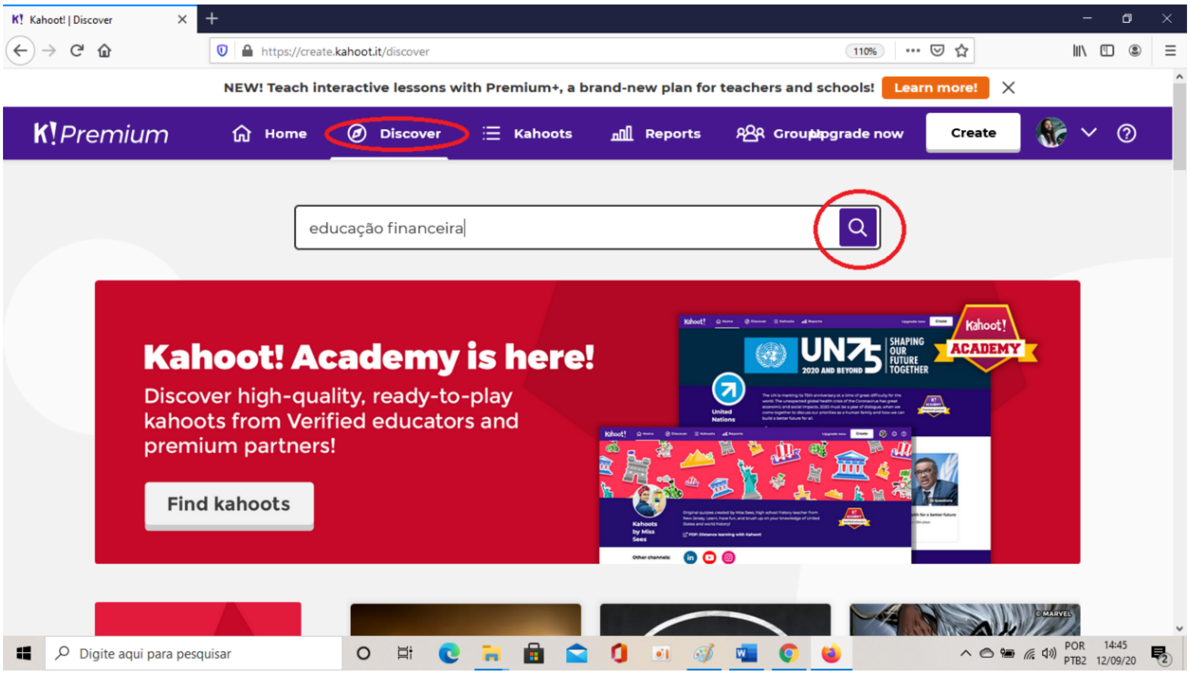


Fonte: compilação pelo autor (2020)

Esse aplicativo é englobado dentro da aprendizagem móvel (*Mobile-learning*) e da gamificação (games e jogos), permitindo que os alunos aprendam por meio do jogo, mas fora de um contexto puramente lúdico. A ideia é que o aluno aprenda jogando dentro da sala de aula para tornar a experiência de aprendizagem mais motivadora. Já para o professor, é uma ferramenta que promove análise em tempo real da aprendizagem dos alunos.

Para criar um *Kahoot*, o professor precisa se inscrever em um por meio de conta *Google* ou de e-mail. Nele, é possível criar questionários, adaptando-os às necessidades específicas da sala de aula. Além disso, é admitido ter um repositório de questionários criado e publicado na web por outros usuários. Na Figura 3, mostramos como acessar esse banco de questões. Clicando na opção "*Discover*", o professor pesquisa um tema e aperta no ícone da "lupa", a fim de pesquisar os questionários prontos. Depois de criar o *quiz*, como mostramos na Figura 4, o professor fornece aos alunos um código PIN (*Personal Identification Number)*. Essa chave permite o acesso ao jogo em outro site (kahoot.it[7]), ao qual eles se conectam a partir de seus dispositivos (móveis ou não).

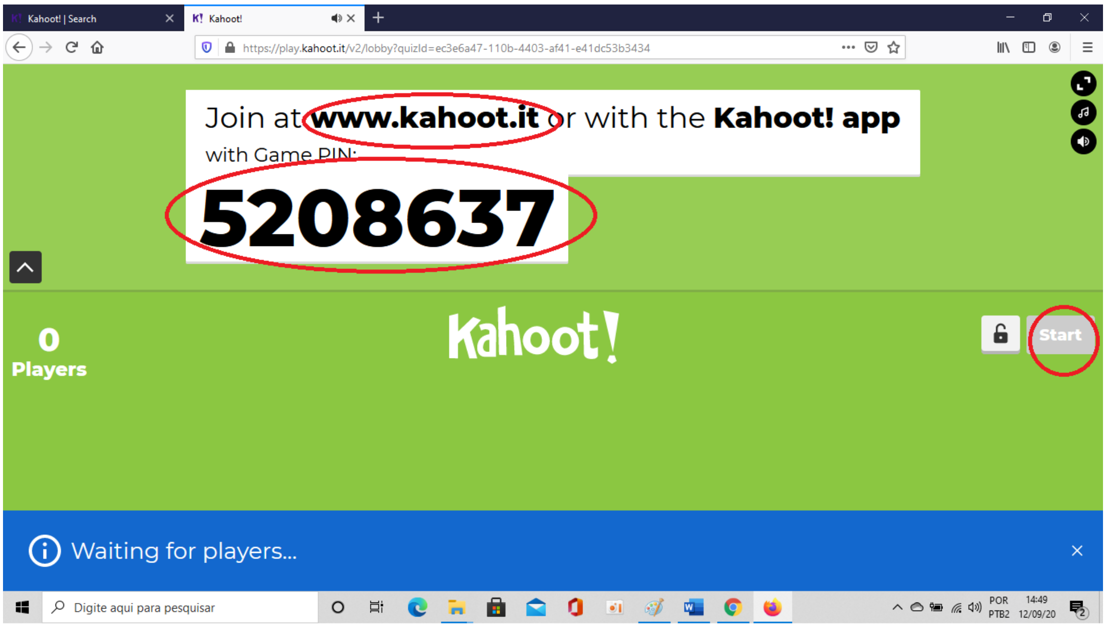
Figura 3 – Banco de questões do *Kahoot*



Fonte: compilação pelo próprio autor a partir de Kahoot.it. Acesso em: nov. 2020.

[7] Disponível em: Kahoot.it. Acesso em: nov. 2020.

Figura 4 – Compartilhando o código PIN



Fonte: compilação pelo próprio autor a partir de Kahoot.it. Acesso em: nov. 2020.

Começar é simples, basta projetar perguntas para os alunos em sala de aula, os quais, usando seus dispositivos móveis ou computadores, devem marcar a opção que acharem correta, conforme a Figura 5. Ao final, cada aluno pode saber sua pontuação e um ranking é estabelecido. Essa pontuação pode depender do número de respostas corretas, bem como da velocidade de resposta. O papel do professor vai no rumo da mediação, com os alunos sendo os protagonistas desse momento ativo.

Figura 5 – Aplicando *Kahoot* com alunos

Fonte: compilação pelo próprio autor a partir de Kahoot.it. Acesso em: nov. 2020.

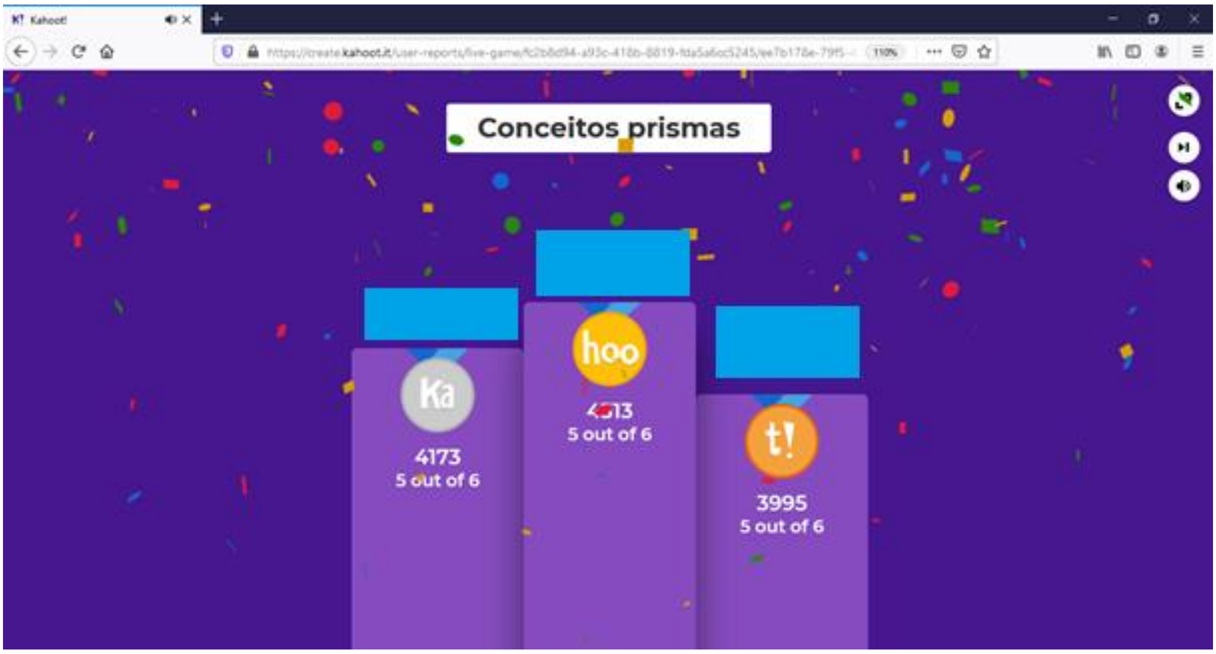
As funções de ensino do professor são reduzidas ao papel de apresentador do jogo, introduzindo e explicando o funcionamento deste; ademais, ele lê as perguntas e justifica as respostas, se necessário, com o objetivo de esclarecer possíveis dúvidas. O professor também pode definir um sistema de recompensa para o aluno que obtiver o melhor desempenho. Além do mais, o aplicativo permite exportar os resultados para o *Excel* ou incluí-los no *Google Drive*, para que o professor possa tê-los para avaliação (EDWARDS-GROVES, 2012).

Outra fonte de informação sobre o *Kahoot* é o estudo desenvolvido por Brito (2019, p. 8):

> O app apresenta três modalidades distintas: Quiz (Teste), Discussion (Debate) e Survey (Sondagem). O Quiz deverá ser utilizado para colocar questões a uma audiência, com o propósito de avaliar conhecimentos, através de um sistema de respostas de escolha múltipla. A mais-valia do Quiz prende-se com o facto de se ter uma audiência a ser testada em simultâneo e à qual é apresentado, através do app, um retorno imediato acerca do acerto ou não em cada questão colocada, aliado à especificidade de, a cada questão respondida, aparecer um ranking com os nomes dos melhores, em termos de acerto e rapidez de resposta, possibilitando a utilização da competição em sala de aula. O Quiz apresenta-se, assim, como a vertente mais dinâmica e atrativa da aplicação, uma vez que com ele se podem preparar testes de conhecimentos em vertente jogo e pode ser implementado por qualquer disciplina e professor. Deste modo, o professor apenas terá de preparar previamente o seu Quiz ou teste e aplicá-lo numa aula a determinar, para a qual os alunos se façam acompanhar pelo seu dispositivo móvel. Realça-se, no entanto, que os alunos também poderão responder ao Quiz através de qualquer computador com ligação à Internet.

Ao final dos *quizzes*, o *Kahoot* fornece um pódio com os alunos que mais pontuaram, conforme a imagem a seguir:

Figura 6 – Pontuação final e pódio no *Kahoot*



Fonte: compilação pelo próprio autor a partir de Kahoot.it. Acesso em: nov. 2020.

Agora, passamos aos pormenores do aplicativo Socrative.

2.6 O USO DO *SOFTWARE*-APLICATIVO *SOCRATIVE*

O *Socrative* é um aplicativo simples de criação de questionário (preparação de testes, *quizzes* etc.). Ele pode ser usado em sala de aula pelo professor, para receber feedback em tempo real da aprendizagem dos conceitos sobre certo tema. Por meio de um sistema de perguntas e respostas, o professor pode observar e analisar as respostas dos alunos, também em tempo real, percebendo melhor a compreensão dos estudantes em relação aos temas de estudo em aula. Ou seja, o aplicativo pode ser considerado gestor da participação dos alunos em sala de aula em tempo real, permitindo ao professor realizar testes, avaliações, atividades e gerenciar os dados.

No mais, o *Socrative* tem uma aplicação específica para o professor e outra para o aluno. Ele está disponível na *App Store*, no *Chrome Web Store*, no *Google Play* e na *Amazon*, bem como na web[8]. Há acesso diferenciado para ambos, permitindo que ele se adapte aos dispositivos e aos recursos de cada pessoa.

---

[8] Disponível em: www.socrative.com. Acesso em: nov. 2020.

Figura 7 – Ícone do Aplicativo *Socrative*

Fonte: Google Images.

Sobre o aplicativo em questão, Brito (2019, p. 9) aponta que:

> Socrative é um software que funciona baseado na internet, é gratuito e multiplataforma. Nele, professores podem criar salas de aula virtuais para acesso de modo interativo e simultâneo para até 50 pessoas. Basicamente, o Socrative disponibiliza quatro tipos de atividades que podem ser elaboradas.
> 1. Criar perguntas de saída, que nada mais são do que perguntas que servem para fazer um diagnóstico antes ou depois da aula sobre determinado assunto trabalhado com a turma, ou mesmo procurar saber se os alunos gostaram da metodologia usada durante a exposição do conteúdo.
> 2. Há também a possibilidade de usar a ferramenta como um jogo, onde as equipes formadas por alunos são divididas e levadas a responder um questionário, a primeira equipe a finalizar o questionário, vence a disputa que na ferramenta se chama “corrida espacial”.
> 3. Outra forma de uso é propor que alunos escolham um tema para ser estudado e cada resposta dada pode ser avaliada pelos próprios alunos como forma de democratizar essa escolha.
> 4. A última atividade disponível é a criação de questionários interativos, no qual os alunos respondem individualmente e o professor acompanha o desempenho dos mesmos em tempo real por meio de um painel que se pinta na cor vermelha quando o aluno erra a questão, ou na verde, quando o aluno acerta.
> 5.A possibilidade de elaborar questionários interativos dá ressignificação à forma como os alunos recebem o diagnóstico do ensino-aprendizagem e são avaliados.

Enquanto o professor precisa criar uma conta no *Socrative*, os alunos participam das aulas (*salas*, como são chamadas na plataforma) sem ter de criar uma conta para si. Para o professor, existem diferentes opções que permitem medir a aprendizagem dos alunos. Ele cria um questionário e os alunos respondem em tempo real a partir de seus dispositivos. O professor pode acompanhar os resultados ao vivo e/ou revisá-los mais tarde nos relatórios que o *Socrative* armazena. As perguntas feitas no aplicativo são de múltipla escolha, questões de verdadeiro ou falso e de respostas curtas. Esse feedback pode ser essencial para acompanhar o desempenho dos alunos.

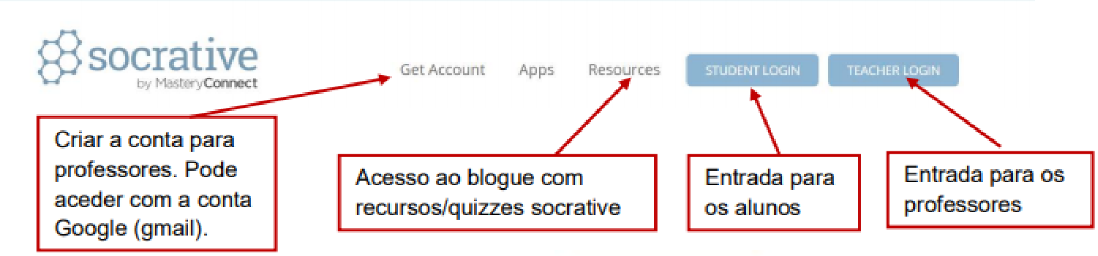
O *Socrative* é uma ferramenta que fornece aos alunos uma forma de atuar independentemente, ao responder aos testes no próprio ritmo, diante do tempo estipulado pelo professor em cada questão e com informação opcional sobre a correção das respostas. A ferramenta on-line pode proporcionar maior interatividade na sala de aula ao motivar os alunos para as “corridas” de reposta entre eles ou entre grupos de alunos, por meio de seus dispositivos móveis (*smartphone*, *tablet* ou *notebook*). Os testes e *quizzes* podem ficar temporariamente disponíveis, além de poderem ser respondidos em casa como testes conceituais descritos no método *peer instruction* e como dever de casa/tarefa, no modelo de sala de aula invertida.

Os estudos de Amaral (2018) expressam que o *Socrative* é uma ferramenta inteligível, tanto para o professor quanto para os alunos, devido a sua simplicidade.

Para acessar o *Socrative* e utilizar as ferramentas disponíveis, adaptamos o tutorial gratuito do workshop "Laboratórios de Aprendizagem (PT)/*Future Classroom Lab* (EUN)", das Embaixadoras LA-FCL, disponibilizado a seguir:

a) Para acessar o *Socrative*, é preciso acessar www.socrative.com. O professor deve criar uma conta ou entrar com a sua conta do *Google* para acessar o aplicativo e utilizar as ferramentas disponíveis. Vale ressaltar que o aplicativo possui recursos em versões pagas, aqui descrevemos apenas as que são acessíveis na versão gratuita.

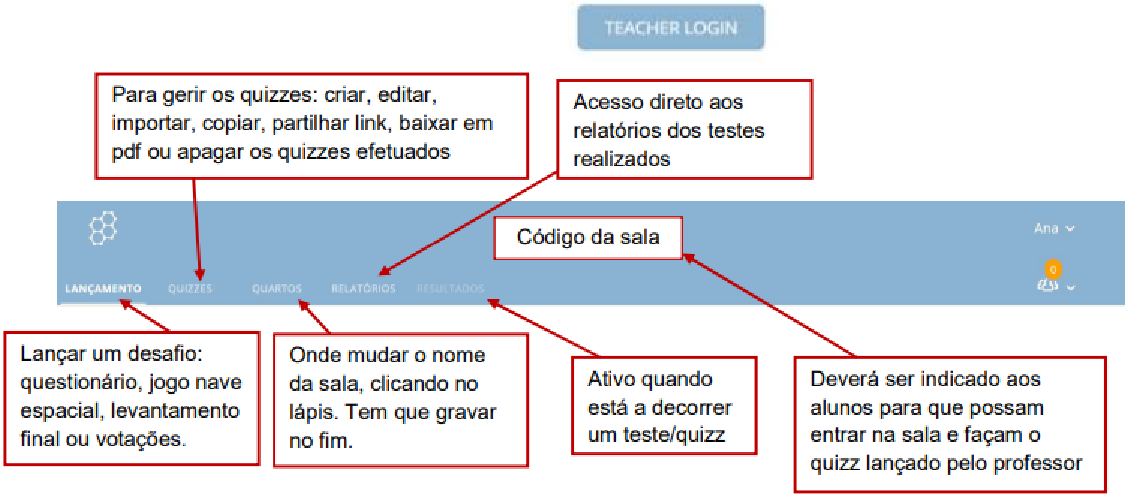
Figura 8 – Ícone do aplicativo *Socrative*



Fonte: http://edx.dge.mec.pt/asset-v1:ERTE+LA-FCL+LA-2016-2ed+type@asset+block/Tutorial_SOCRATIVE_MOOCedicao2.pdf. Acesso em: out. 2020.

b) O acesso para o professor ocorre no ícone *TEACHER LOGIN*, conforme figura 8. Acessando esse menu, podemos ter acesso às ferramentas ilustradas na figura, a seguir:

Figura 9 – Menu inicial do *Socrative*



Fonte: http://edx.dge.mec.pt/asset-v1:ERTE+LA-FCL+LA-2016-2ed+type@asset+block/Tutorial_SOCRATIVE_MOOCedicao2.pdf. Acesso em: out. 2020.

c) No menu LANÇAMENTO, temos uma gama de opções na elaboração dos testes. No questionário, o professor pode iniciar o lançamento de um teste; no jogo Nave Espacial, é possível estabelecer uma competição para ver quem chega primeiro; já no levantamento final, é possível compartilhar testes pré-definidos, e um teste a definir no momento. Aconselhamos o uso do questionário, pois é gratuito e muito prático na elaboração dos testes. Existem três opções de elaboração de teste: múltipla escolha, verdadeiro ou falso, e com uma resposta curta dissertativa. Dessa forma, o professor possui à mão uma ferramenta para elaborar questões e avaliar em tempo real a compreensão por parte dos alunos.

Figura 10 – Menu LANÇAMENTO do *Socrative*

Fonte: http://edx.dge.mec.pt/asset-v1:ERTE+LA-FCL+LA-2016-2ed+type@asset+block/Tutorial_SOCRATIVE_MOOCedicao2.pdf. Acesso em: out. 2020.

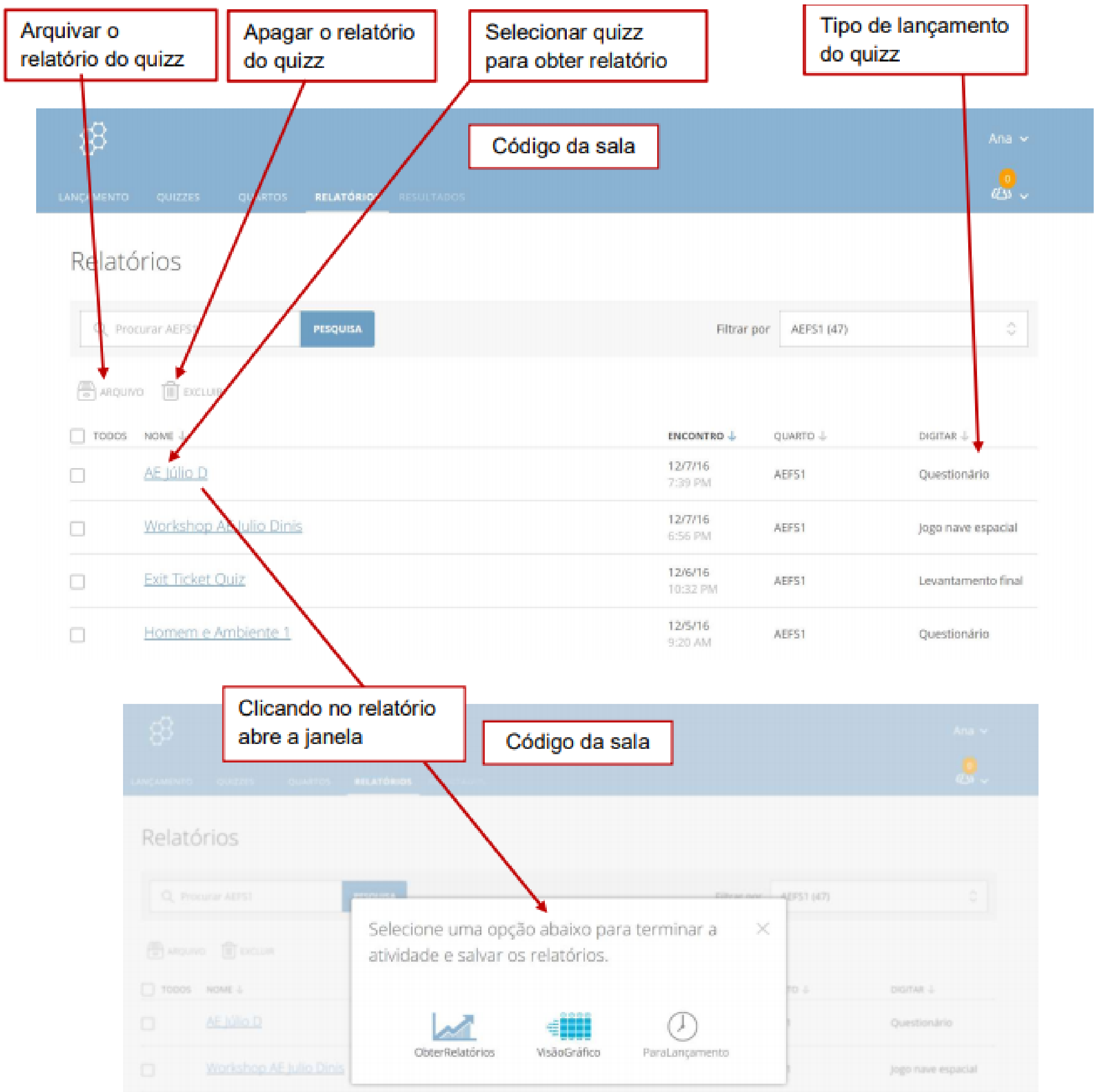
d) O menu *QUIZZES* é o ambiente em que é possível criar, compartilhar, apagar, editar, baixar, copiar e importar os questionários já prontos sobre determinados temas. Ali, também é possível disponibilizar para os alunos o código da sala, copiando-o e enviando-o on-line.

Figura 11 – Menu QUIZZES do *Socrative*

Fonte: http://edx.dge.mec.pt/asset-v1:ERTE+LA-FCL+LA-2016-2ed+type@asset+block/Tutorial_SOCRATIVE_MOOCedicao2.pdf. Acesso em: out. 2020.

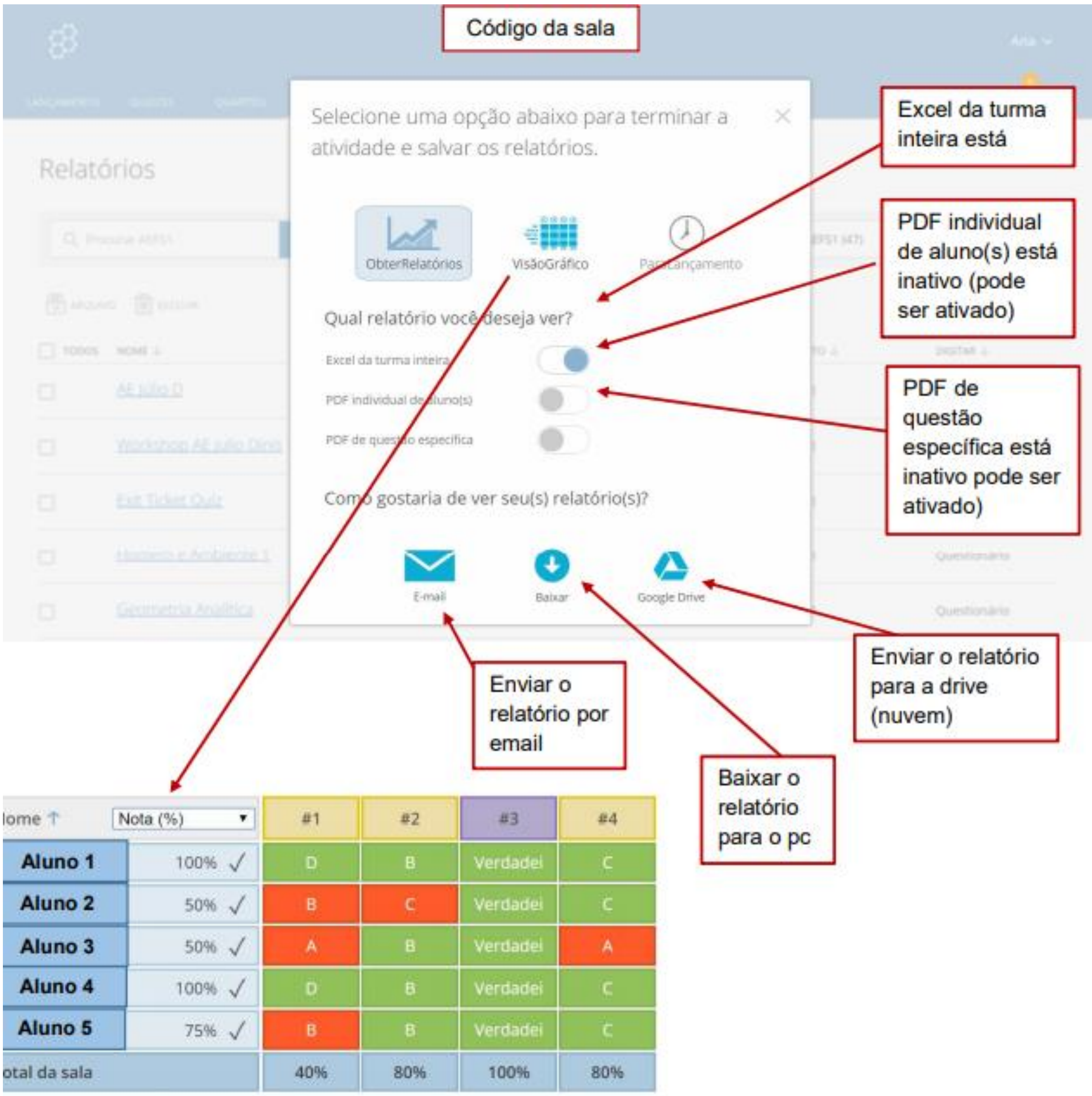
e) Menu Relatórios: é uma ferramenta do *Socrative* que fornece em tempo real a porcentagem de acertos que os alunos obtêm em cada teste liberado pelo professor. Ao final da realização dos testes, é possível baixar, compartilhar e disponibilizar o escore com o desempenho dos alunos. Desse modo, o professor, ao utilizar esse menu, pode decidir quais atitudes deve tomar para que, de fato, os alunos compreendam os temas propostos para o estudo.

Figura 12 – Menu Relatórios no *Socrative*



Fonte: http://edx.dge.mec.pt/asset-v1:ERTE+LA-FCL+LA-2016-2ed+type@asset+block/Tutorial_SOCRATIVE_MOOCedicao2.pdf. Acesso em: out. 2020.

Figura 13 – Acesso aos relatórios no *Socrative*



Fonte: http://edx.dge.mec.pt/asset-v1:ERTE+LA-FCL+LA-2016-2ed+type@asset+block/Tutorial_SOCRATIVE_MOOCedicao2.pdf. Acesso em: out. 2020.

3 METODOLOGIAS ATIVAS COM O USO DE APLICATIVOS EDUCACIONAIS

Nesta seção, trazemos estratégias que foram aplicadas pelo pesquisador no período de ensino remoto emergencial, compartilhando com o leitor experiências como professor de Matemática e trazendo à tona aprendizados e reflexões sobre a busca por novas formas de ensinar.

Inicialmente, este trabalho de dissertação se dedicaria somente a apresentar uma proposta para o ensino de conteúdos de Matemática para o Ensino Médio por meio das metodologias ativas de ensino. Entretanto, com o início da pandemia, decidimos adaptar a proposta para o ensino remoto emergencial, pois, ao mesmo tempo que desenvolvíamos nossos estudos, tínhamos a missão de realizar o nosso trabalho neste cenário essencialmente diferente de tudo o que havíamos vivido como e na escola.

Essas intempéries somaram-se ao modo de apresentação deste trabalho, pois escolhemos, por meio de alguns relatos, apresentar o trabalho que construímos, ou seja, a partir da proposta aqui anunciada, fomos colhendo dados para ilustrá-la, demonstrá-la ou refletir sobre ela.

Seguindo os objetivos deste trabalho, este capítulo traz como possibilidade uma adaptação para o ensino remoto da estratégia de ensino sala de aula invertida e *peer instruction,* expostos nos capítulos anteriores e, ainda, subsidiada por elementos inovadores relacionados às tecnologias: os aplicativos previamente apresentados.

3.1 USO DE METODOLOGIAS ATIVAS E RECURSOS TECNOLÓGICOS NO ENSINO REMOTO

O ano de 2020 ficará registrado na história devido à pandemia do vírus SARS-CoV-2, causador da Covid-19. No Brasil, o início do isolamento social se deu no meio do mês de março, causando uma mudança brusca na rotina dos cidadãos. As escolas, os comércios e as diversas instituições que recebiam diariamente aglomerações precisaram fechar seus estabelecimentos e/ou iniciar os trabalhos de forma remota.

Isso ocorreu em respeito às ordens das autoridades, que, seguindo as recomendações da Organização Mundial da Saúde (OMS), deliberaram pelo “confinamento”. Apenas os serviços essenciais foram mantidos, como mercados, farmácias e hospitais. Na posição de professor[9] do Ensino Básico, acostumado com o ambiente escolar presencial, confesso que foi um desafio migrar do ensino presencial para o virtual de forma integral.

Para a educação, como um todo, o desafio foi ensinar no modelo de ensino remoto. Assim, a comunicação com os alunos e o ensino passaram a ocorrer categoricamente via internet, por meio das ferramentas educacionais virtuais apropriadas que nela existem, as quais enriquecem as aulas, promovem engajamento e motivação dos alunos, e pela utilização de aparelhos como computadores, *tablets*, *smartphones* etc.

A partir dessa lógica e dos fatos, neste capítulo, apresentamos uma proposta de ensino motivada pelo trabalho no tema "metodologias ativas" e pelo momento vivido atualmente, com ensino remoto/virtual, no qual o uso das tecnologias se torna indispensável.

Sem dúvidas, o momento atual é conturbado para os professores. Aqueles que ainda se recusavam a se apropriar das tecnologias de educação e comunicação tiveram que, rapidamente, aprender a fazer uso de vários desses instrumentos para desenvolver seu trabalho. Pensando de modo geral em todos que lerem este texto e usarem as propostas nele contidas, procuramos pormenorizar todos os passos que precisam ser dados e todos os meios passíveis de serem utilizados. Evidentemente, adaptações podem ser feitas, considerando a especificidade de turmas e alunos.

A saber, as aulas remotas se apoiaram na ferramenta de videoconferência *Zoom* ou *Google Meet*. Esses aplicativos permitem o encontro virtual numa sala de reuniões on-line, em que o professor interage com os alunos por meio de áudio, vídeo e chat e pode compartilhar sua tela e seus arquivos.

Supondo como uma alternativa hipotética no ensino remoto, vamos batizar de forma genérica a comunidade escolar na qual utilizaremos os modelos de aula remota de escola, professores e alunos 5.0. Seguindo as orientações das estratégias de ensino escolhidas, sala de aula invertida e *peer instruction*, foram disponibilizados materiais — videoaulas (gravadas pelo aplicativo *Zoom*), slides (elaborados no aplicativo *Canva*[10]), páginas de livros, vídeos de instituições confiáveis — para que os

[9] Abriu-se uma exceção para a escrita em primeira pessoa do singular, tendo em vista que o pesquisador considera importante relatar e atestar sua experiência docente na área em análise e estudo.

[10] Canva é uma plataforma de design gráfico que permite criar artes para mídias sociais, apresentações, infográficos, pôsteres e outros materiais visuais. O acesso é feito on-line (com acesso por dispositivos móveis

alunos realizassem o estudo prévio dos conceitos e das propriedades dos objetos, motivando-os com recursos tecnológicos, a fim de otimizar a aula on-line com atividades envolvendo resolução de problemas.

Isso se deu porque, no início das aulas remotas, como era tudo muito novo e desafiador, deparamo-nos com o conflito relativo a quais estratégias utilizar a fim de atrair maior atenção dos alunos. Inicialmente, optamos pelas aulas expositivas de conteúdo, todavia era evidente a desmotivação deles. Os estudantes não interagiam pelas câmeras e pelos microfones nem engajavam em perguntas e desafios feitos oralmente. Diante dessa situação, a mudança seria de grande relevância, promovendo a participação dos alunos por meio de novas estratégias.

Evidencia-se, nesse contexto, que há diversos aplicativos educacionais e de comunicação disponíveis em versões gratuitas e pagas. Aqui, utilizamos aplicativos que possuem recursos interessantes na versão gratuita, todavia, nesses mesmos aplicativos, outras imersões estão disponíveis mediante o pagamento.

Nas aulas remotas on-line realizadas pela plataforma *Zoom,* de videoconferência, foi possível conferir se, de fato, os alunos compreenderam aquilo que foi disponibilizado anteriormente, utilizando aplicativos como o *Kahoot* e o *Socrative*. Essa prática fortaleceu o ensino dos alunos nesse período de aulas integralmente a distância.

Apresentamos uma proposta de ensino remoto por meio das estratégias ativas da sala de aula invertida e do *peer instruction,* com algumas etapas descritas por meio de relato de experiência. A proposta mencionada também constitui uma possibilidade no ensino presencial, pois seu formato possui conexões entre espaços virtuais e físicos. Embasados na pesquisa em torno da literatura sobre metodologias ativas, sentimo-nos motivados a observar como reagem os alunos e nós, professores, em relação ao uso dos recursos descritos no desenvolvimento do trabalho.

Desse modo, como já definimos e caracterizamos os aplicativos *Kahoot* e *Socrative*, vejamos como elaborar material de áudio e vídeo por meio do aplicativo *Zoom* e compartilhar esse conteúdo via *Google Drive* para os alunos. Cabe reiterar que aplicaremos a sala de aula invertida e o *peer instruction* como *um* caminho para o ensino remoto.

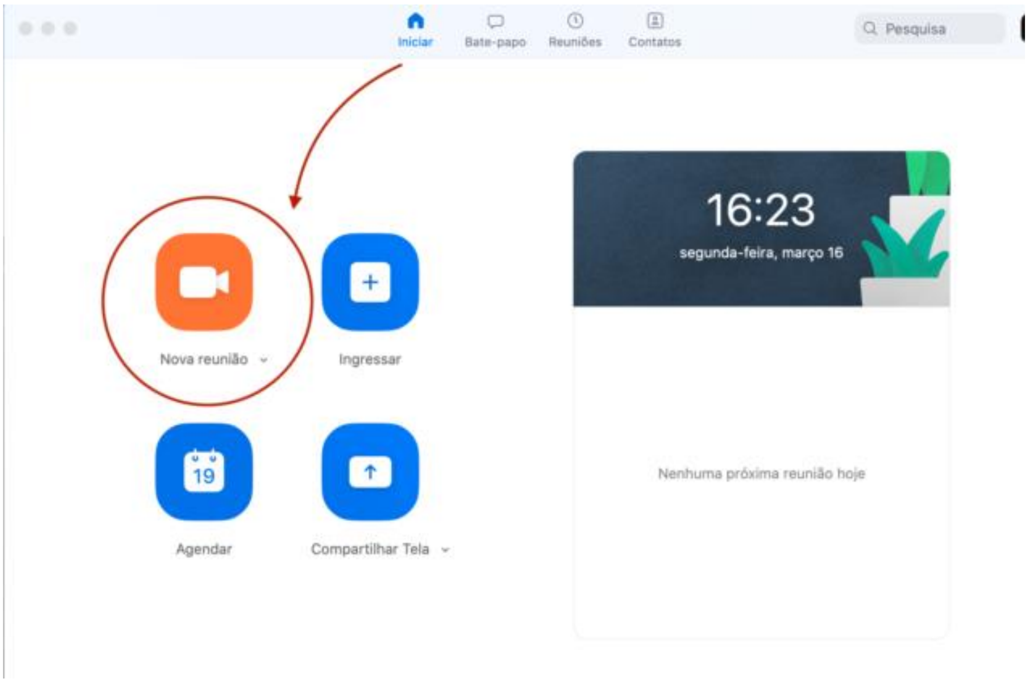
---

e computadores), com versões gratuita e paga, disponibilizando milhões de imagens, tipos e tamanhos de fontes, modelos de arquivos, gráficos e ilustrações.

Para que o professor possa gravar e compartilhar uma aula no *Google Drive* ou no *Youtube*, ele deve observar como operar o programa *Zoom*, como gravar com ele e como utilizar o *Google Drive* ou o *Youtube* para disponibilizar o conteúdo. Logo, dispomos as seguintes instruções:

a) Faça o download do aplicativo de reuniões *Zoom* pelo endereço: https://zoom.us/download;
b) Realize o login em sua conta *Zoom* por meio de sua conta do *Facebook*, do *Google* ou de outro e-mail;
c) É possível iniciar uma nova reunião com o vídeo da câmera ligado ou entrar em uma reunião existente por meio do celular, do *tablet* ou do computador. Também é permitido gerenciar a reunião a partir de mais de um dispositivo. A entrada padrão ocorre no menu Iniciar. Nesse ícone, o professor pode: iniciar uma nova reunião; agendá-la; e ingressar em uma reunião por meio de chave ou de ID obtidas mediante um link. Ou, então, ele pode já iniciar a reunião compartilhando a tela do computador com os demais convidados.

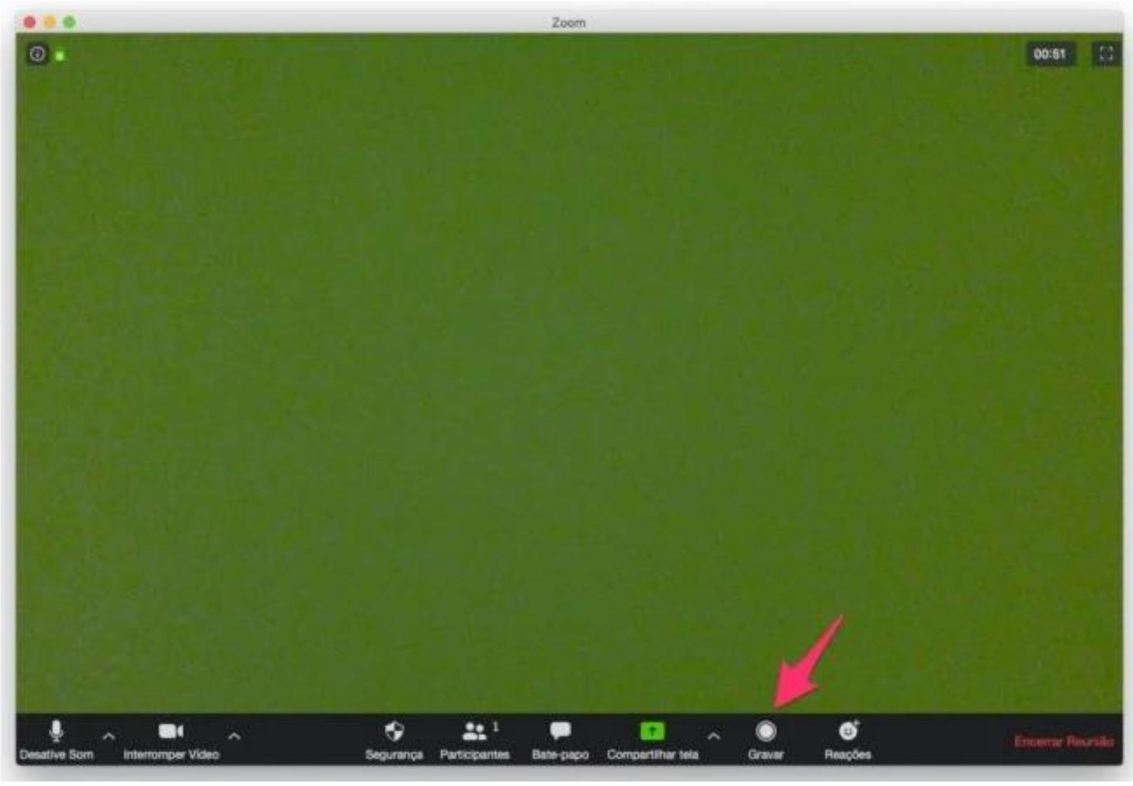
Figura 14 – Acesso ao aplicativo *Zoom*



Fonte: COSSETTI (2020)

d) Para criar uma reunião no *Zoom*, é preciso clicar em Nova reunião, exibido na imagem anterior. Ao clicar, a reunião iniciará, e os convidados que possuírem a chave da sala poderão entrar. Ou, então, caso o professor opte por gravar as aulas para os alunos, basta clicar no ícone GRAVAR, no canto inferior direito, conforme figura 15. Realizando a gravação, o aplicativo converte o vídeo para o formato mp4, ficando salvo em uma pasta criada pelo *Zoom* no computador. Concluído esse processo, é possível disponibilizar o arquivo para os alunos no *Google Drive* ou no *Youtube*. É possível, também, gravar a reunião ao vivo com os demais participantes, sendo sempre o anfitrião da sala o professor, que pode compartilhar recursos caso seja conveniente.

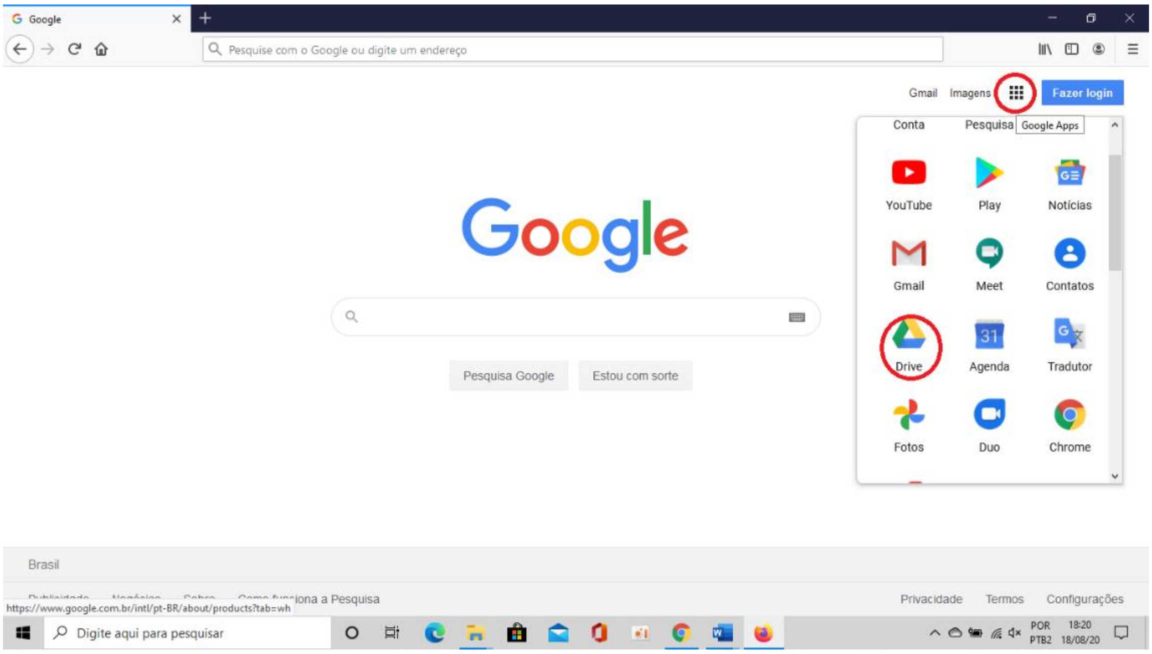
Figura 15 – Gravando aula no aplicativo *Zoom*



Fonte: COSSETTI (2020)

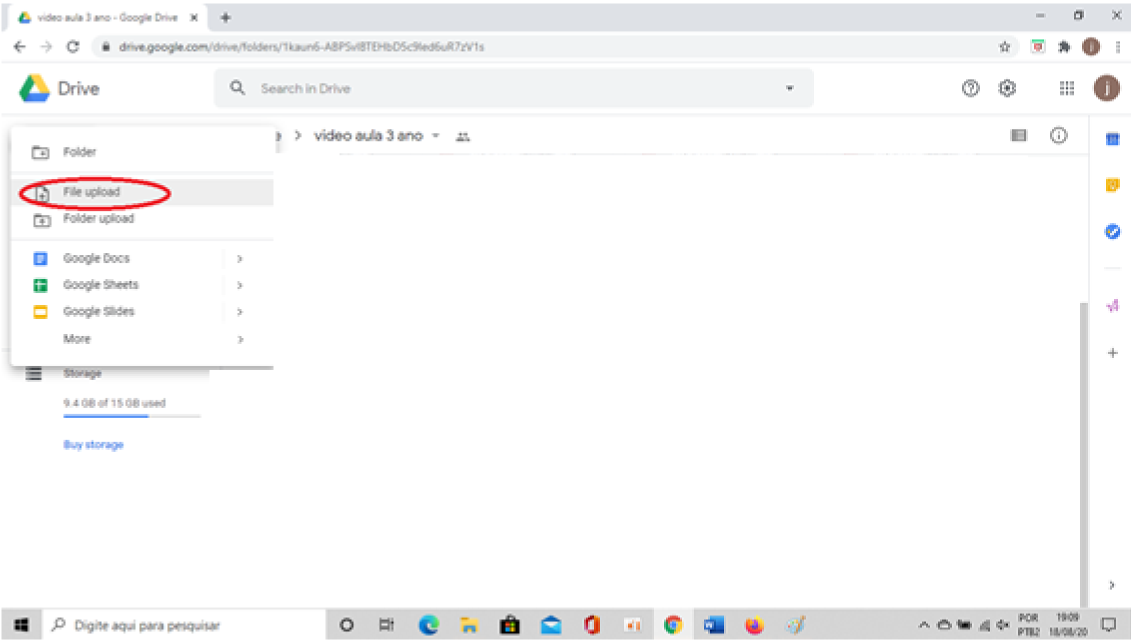
e) Após a gravação, é preciso entrar no site google.com e, no guia Aplicativos, no canto superior direito, abrir o *Drive*, pois nele será possível guardar nas “nuvens” os materiais que serão disponibilizados aos alunos como mostra a figura 16. Depois, basta criar uma pasta e fazer upload dos vídeos gravados que se encontram na pasta *Zoom*, de acordo com figura 17. Por fim, pode-se compartilhar o link da pasta com alunos e professores, a fim de enriquecer o material de trabalho como mostra a figura 18.

Figura 16 – Acesso ao *Google Drive*



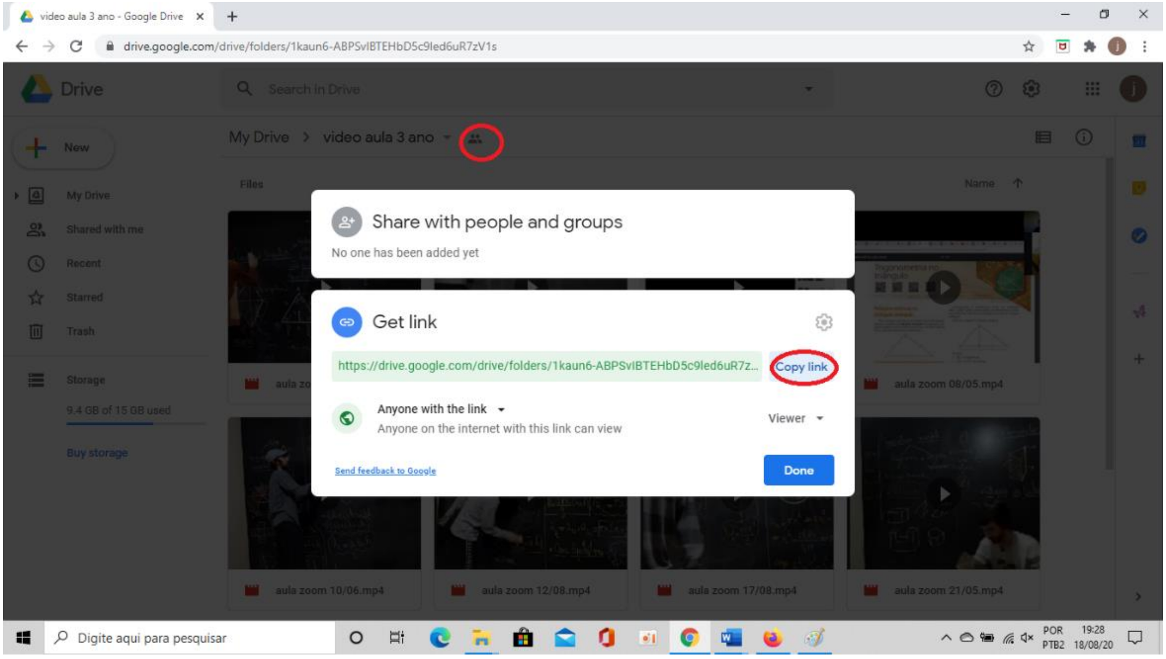
Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Figura 17 – Importando vídeo gravado para o *Drive*



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

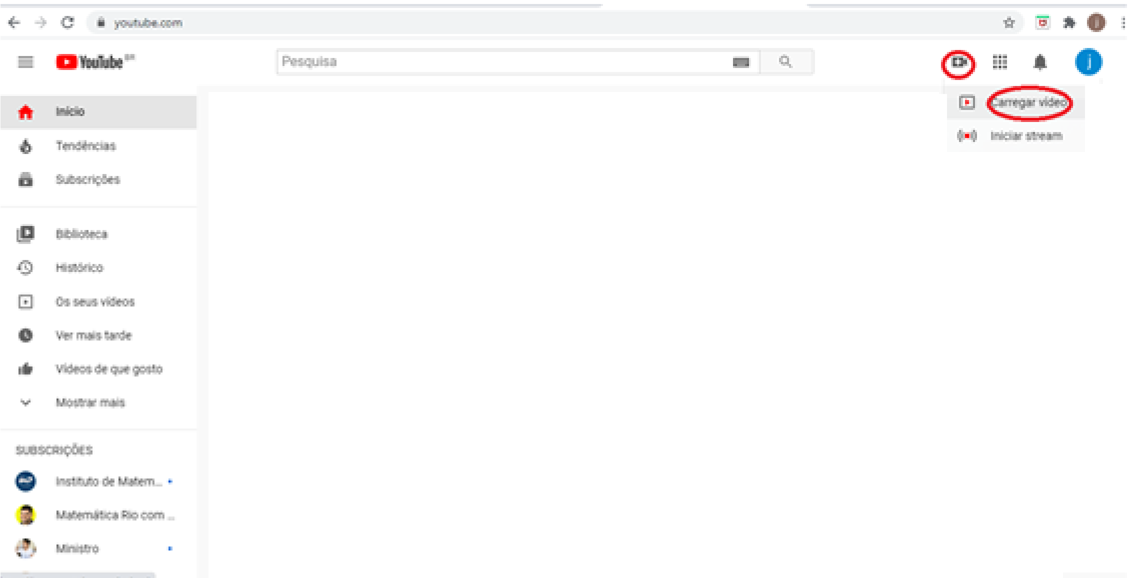
Figura 18 – Gerando link de compartilhamento



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

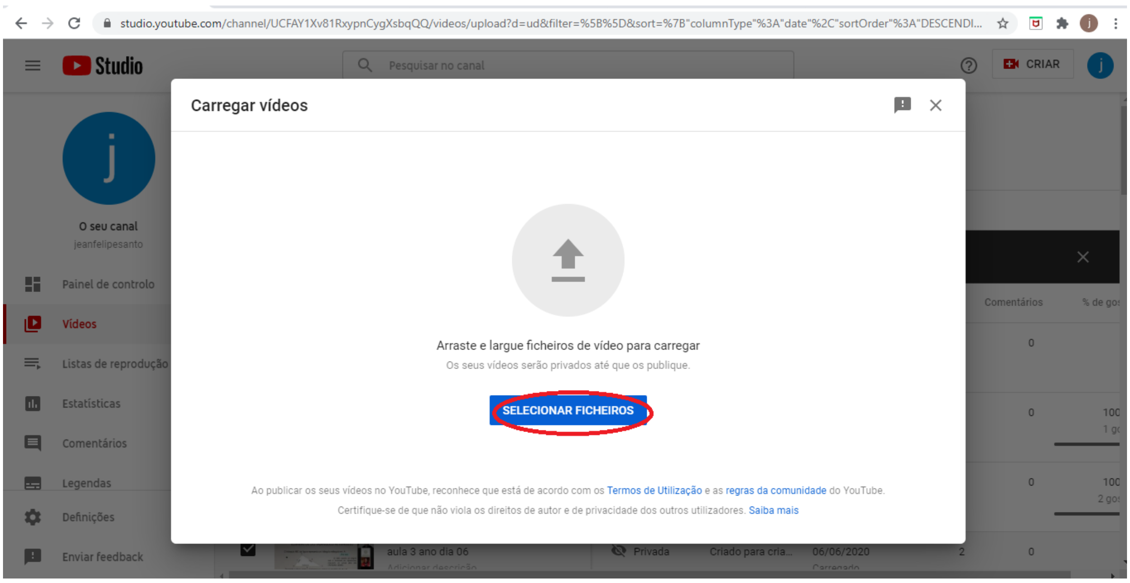
f) Existe a possibilidade de armazenarmos vídeos gravados no *Zoom* também no youtube.com. O *Youtube* é de fácil acesso e conhecido pelos alunos, e disponibilizar os vídeos nessa plataforma é simples. Primeiro, vinculamos a conta *Google* ao *Youtube*. Depois, fazemos upload do vídeo no canal do *Youtube*.conforme as figuras abaixo o professor pode restringir a visualização dos vídeos da maneira que o agrade. No formato que elaboramos, optamos por restringir o acesso ao vídeo via link.

Figura 19 – Compartilhando vídeos no *Youtube*



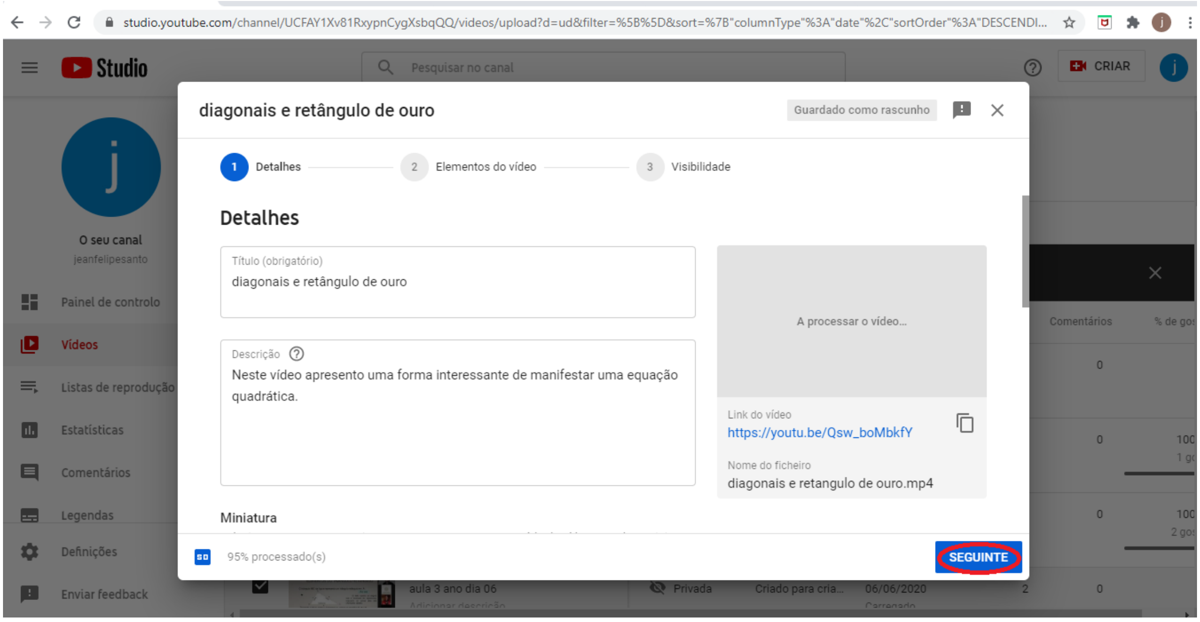
Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Figura 20 – Selecionando vídeos no *Youtube*



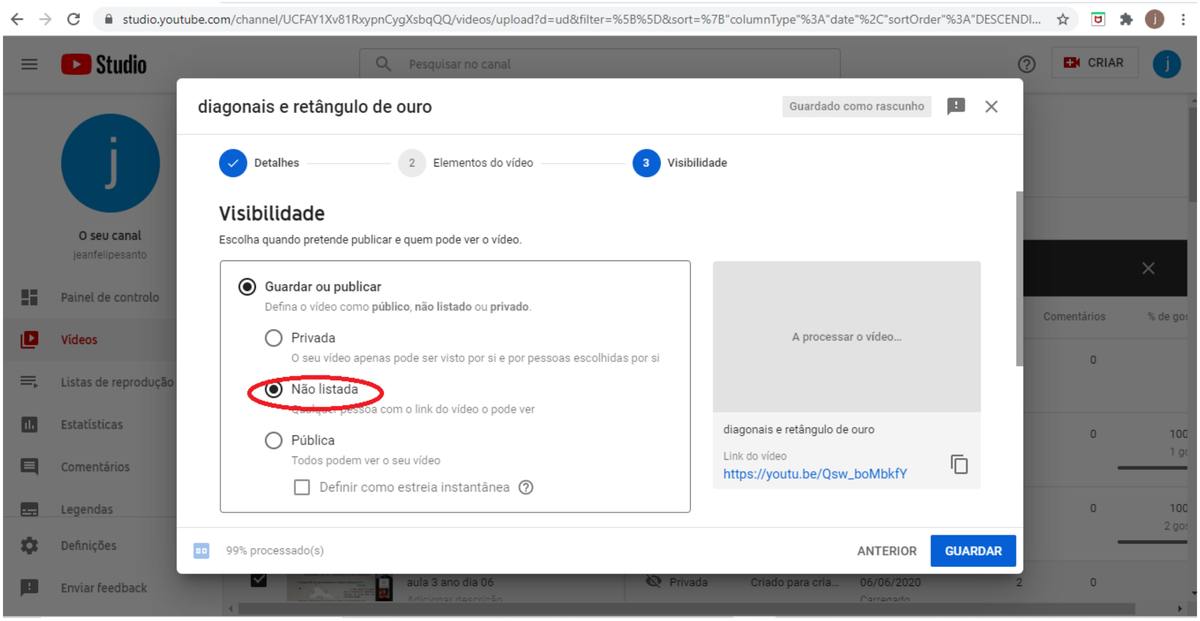
Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Figura 21 – Descrevendo postagem no *Youtube*



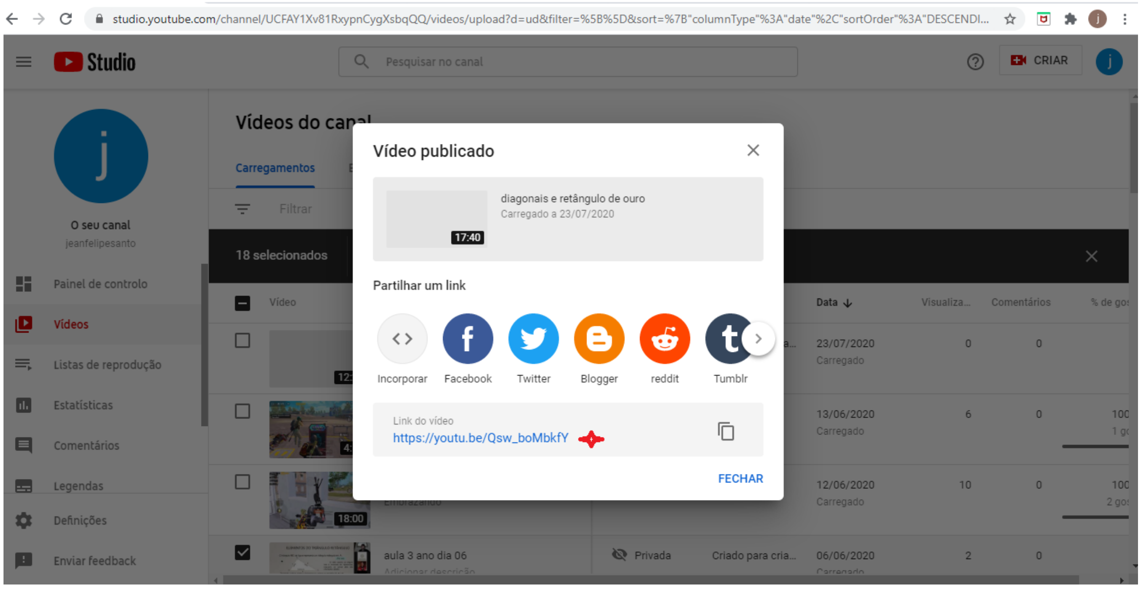
Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Figura 22 – Acesso ao vídeo do *Youtube* via *link*



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Figura 23 – Vídeo publicado no *Youtube*: opções de compartilhamento



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

g) Desse modo, o professor promove aos alunos a possibilidade de estudarem os conceitos e as teorias em casa, deixando para os encontros on-line as dúvidas e as ações mediadas pelo professor. Assim, por meio do *Kahoot*, é possível verificarmos o nível de compreensão dos alunos sobre o material compartilhado. Enquanto isso, a partir do *Socrative*, promovem-se discussões entre os pares ou entre os grupos sobre situações-problema nas aulas on-line.

3.2 A PROPOSTA NO ENSINO REMOTO

A proposta aqui discorrida se dá como uma alternativa ao ensino remoto emergencial, apresentando *um* caminho para as aulas de Matemática no Ensino Médio. Seguindo a Base Nacional Comum Curricular, a unidade temática Grandezas e Medidas foi a escolhida para os conteúdos que trataremos, tomando a “Competência 5” como norteadora:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2017, p. 532).

Além disso, leva-se em conta, igualmente, a Habilidade 4, que se refere a Áreas e Volumes: “Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras” (BRASIL, 2017, p. 533). A proposta será dividida em momentos, utilizando a sala de aula invertida e o *peer instruction* apoiados na resolução de problemas como atividade matemática.

Tem-se como objetivo oportunizar aos alunos a participação nas tarefas propostas, trabalhando para a construção do conhecimento sobre geometria espacial, como identificar e classificar sólidos geométricos e calcular áreas de superfícies e volumes desses sólidos. Segundo aponta Cantoral (1999 *apud* D’Amore, 2007, p. 315):

> Conhecimento é a informação sem uso; o saber é a ação deliberada para fazer do conhecimento um objeto útil diante de uma situação problemática. Disso se deduz que a aprendizagem é uma manifestação da evolução do conhecimento em saber. A aprendizagem consiste, portanto, em dar a resposta correta antes da situação concreta.

Dessa maneira, uma das tendências de ensino adotadas para a proposta deste trabalho é ensinar mediante a resolução de problemas, face à sua contribuição para o progresso da aprendizagem dos alunos, como estratégia consolidada e reconhecida, já que eles próprios têm a oportunidade de construir o conhecimento. Assim, a proposta alinha-se aos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução (BRASIL, 1998, p. 39).

Também utilizamos como amparos os modelos de ensino ativos da sala de aula invertida e do *peer instruction*, previamente apresentados aqui. Assim, visamos ampliar a caixa de ferramentas do professor no ensino remoto emergencial. Apresentamos a seguir os problemas que escolhemos para o tratamento dos conteúdos referentes à unidade temática Grandezas e Medidas.

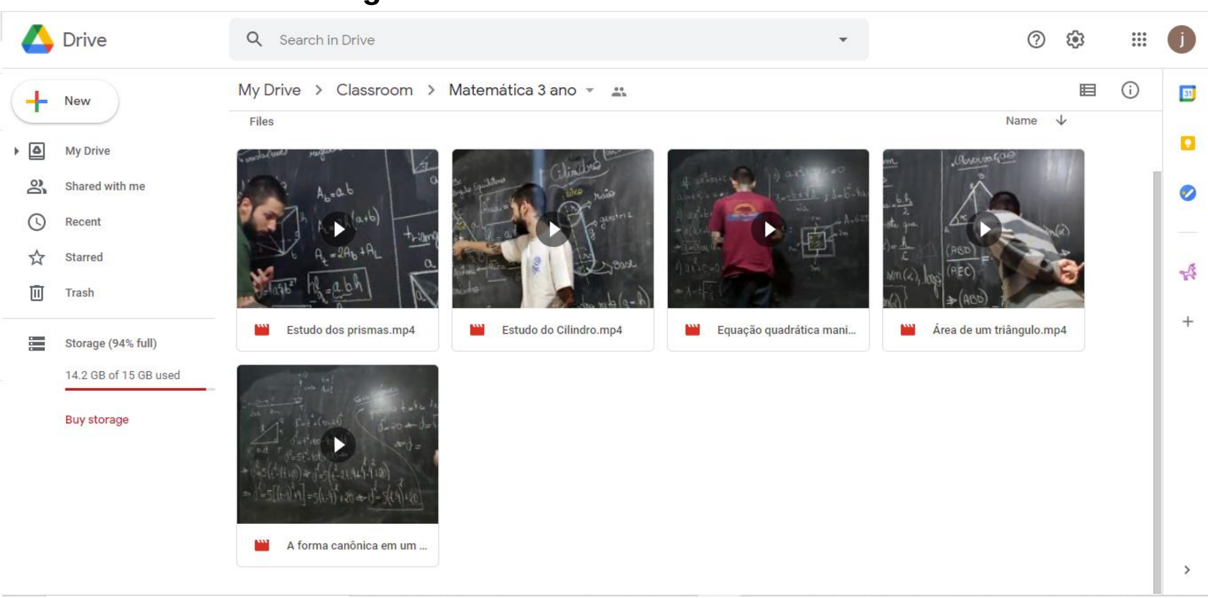
3.2.1 Primeiro momento: contextualização, aula invertida

Tomando como princípio as ideias de Bergmann e Sams (2020) sobre a sala de aula invertida, no momento inicial, o professor fornece o subsídio para o estudo por parte dos alunos, isto é, dá o material de estudo contendo conceitos, características, propriedades, curiosidades e, por vezes, desafios que promovam a aquisição de conhecimentos prévios, realizados de forma autônoma pelos alunos.

Seguindo esse raciocínio, disponibilizamos aos alunos o link do *Google Drive* (*iDrive*), em que vídeos gravados podem ser postados e compartilhados, contendo os conceitos, as propriedades, algumas demonstrações e justificativas de resultados que, antes, eram vistos no ensino presencial, mas que seguem sendo de relevância. Então, nesse formato remoto, o aluno pode vê-los em casa e no tempo dele, pois o material fica salvo nas “nuvens”. Consequentemente, isso proporciona tempo em aula, que pode ser investido em atividades com resolução de problemas.

O canal do *Youtube*, em nossa experiência, foi uma forma de interagir em outra plataforma digital com os alunos e obter um maior alcance da turma no acesso às aulas gravadas, bem como um link com vídeos para fins de curiosidades e de aprofundamento como aponta as figuras 24 e 25. Isso porque devemos observar a sala de aula em sua pluralidade, oferecendo também o acesso às informações simples, além das mais complexas.

Figura 24 – *Drive* com aulas sobre conceitos



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)[11]

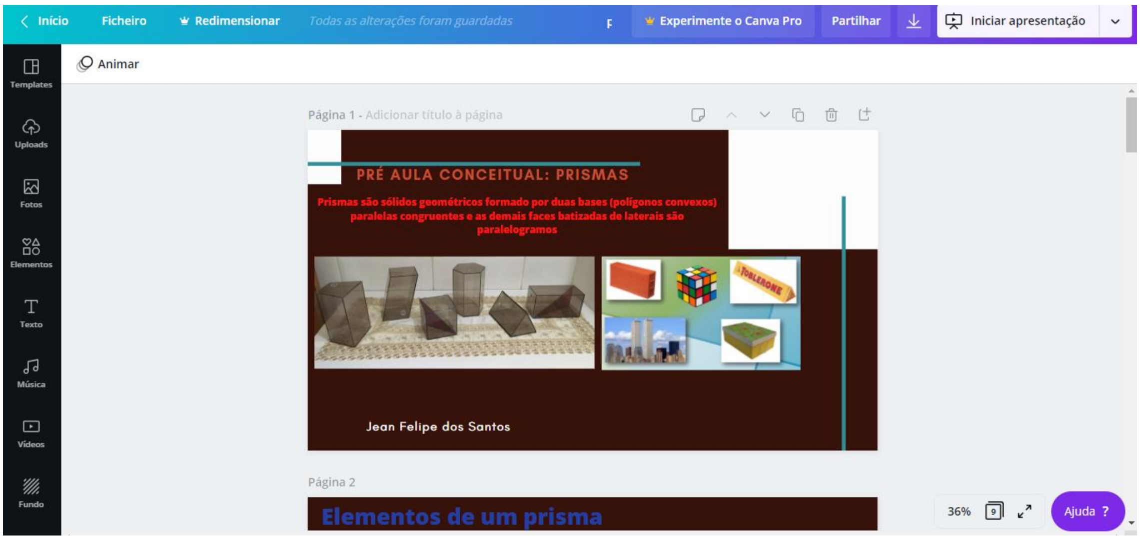
[11] Link compartilhado: https://drive.google.com/drive/folders/0B4EmOqJ1hSkHfkZLRldreGdWR2ttSWFOY2VWU1EzNUxOcEFIVmg5TDFXQm44djdxTFFCVUU?usp=sharing

Figura 25 – Canal do *Youtube* como material de estudo para os alunos

Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)[12]

Como esse momento se refere a compartilhar material de estudo, disponibilizamos apresentações e slides conforme a figura 26. Anexamos, sempre, um teste final para os alunos responderem pelo *Socrative*, a fim de obter um feedback do estudo feito por eles. Logo, a partir do retorno fornecido pelo aplicativo ilustrado na figura 27, realizamos o planejamento do momento on-line com professor e alunos. Assim sendo, o aplicativo aponta as dificuldades dos estudantes com as porcentagens de acertos e, no encontro on-line, investimos nos pontos em que os alunos apresentaram dificuldades.

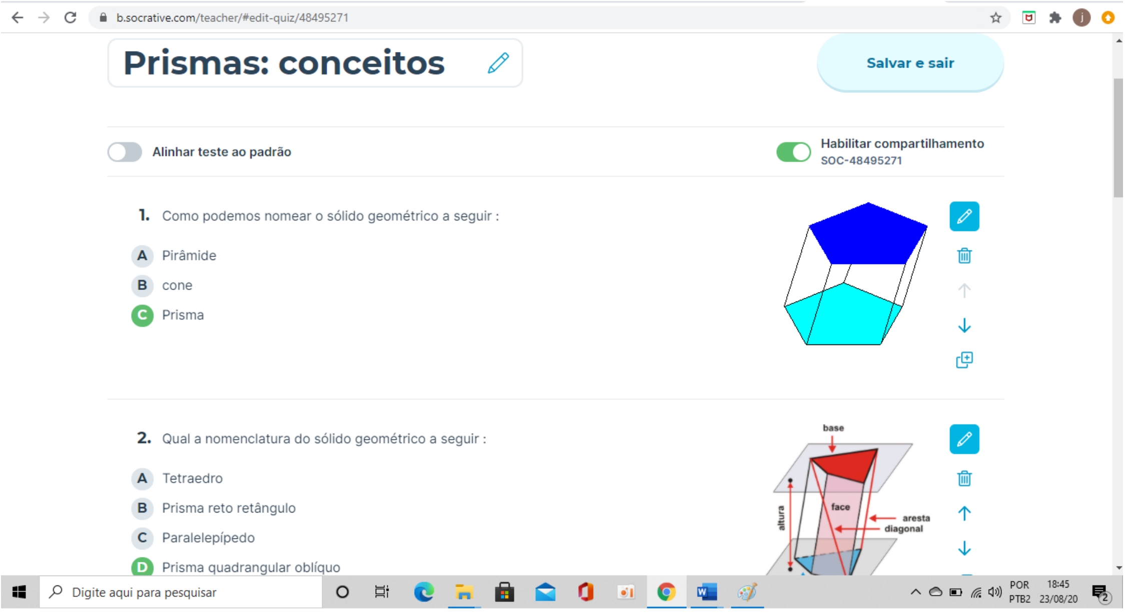
Figura 26 – Apresentação no *Canva* compartilhada como material de estudo



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)[13]

[12] Link compartilhado: https://www.youtube.com/jeanfelipesanto
[13] Link compartilhado:

Figura 27 – Testes conceituais para verificar as dificuldades perante o material de estudo



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)[14]

3.2.2 Segundo momento: aplicando o *peer instruction* em aula remota com professor e alunos on-line simultaneamente

Para essa segunda etapa, analisamos o feedback do momento de contextualização fornecido pelo relatório dos testes conceituais aplicados no *Socrative*. Além disso, observamos se deveríamos retomar e reforçar os conceitos apresentados no material de estudo fornecido no primeiro momento.

Segundo Mazur (2015), se a porcentagem de acertos for menor que 30%, o professor deve retomar explicações breves e expositivas aos alunos e realizar novo teste conceitual. Caso a porcentagem se encontre na faixa de 30% a 70%, entra, nesse momento, o *peer instruction,* promovendo-se grupos ou pares, para que os alunos convençam seus parceiros de suas respostas e enriqueçam o debate e a discussão. Se a porcentagem de acertos for maior que 70%, o professor decide se avança no tema ou se aplica um novo teste. Em nossa experiência, os três casos ocorreram. Na posse dos resultados oferecidos pelo *Socrative,* mediante os testes conceituais sobre prismas, observamos os relatórios fornecidos pelo aplicativo:

---

https://www.canva.com/design/DAD_p8axWrA/XVHApkS4gETR5WNAFPwxNg/view?utm_content=DAD_p8axWrA&utm_campaign=designshare&utm_medium=link&utm_source=sharebutton

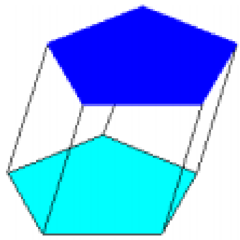
[14] Link compartilhado: https://b.socrative.com/teacher/#import-quiz/48495271

Figura 28 – Relatório com número de acertos em cada teste conceitual sobre prismas

Prismas: conceitos

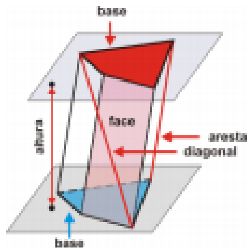
8 Questions

1. Como podemos nomear o sólido geométrico a seguir :



1/35	A	Pirâmide
0/35	B	cone
34/35	C	Prisma

2. Qual a nomenclatura do sólido geométrico a seguir :

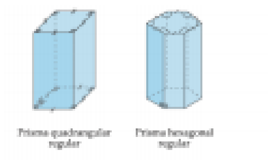


1/38	A	Tetraedro
7/38	B	Prisma reto retângulo
1/38	C	Paralelepípedo
29/38	D	Prisma quadrangular oblíquo

3. A base do prisma é o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos.

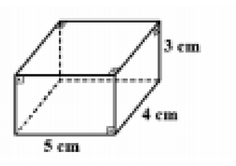
9/38	V	Verdadeiro
29/38	F	Falso

4. Qual a propriedade que caracteriza os prismas abaixo ?



3/39	A	Arestas da base com medidas diferentes
17/39	B	Arestas da base perpendiculares as arestas laterais
15/39	C	Polígono da base equilátero e equiângulo
4/39	D	Polígono da base convexo

5. Qual o volume do prisma abaixo ?



3/36	A	60 m^3
32/36	B	60 cm^3
1/36	C	12 cm
0/36	D	12 cm^3

Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Figura 29 – Relatório com porcentagem de acertos em cada teste conceitual sobre prismas

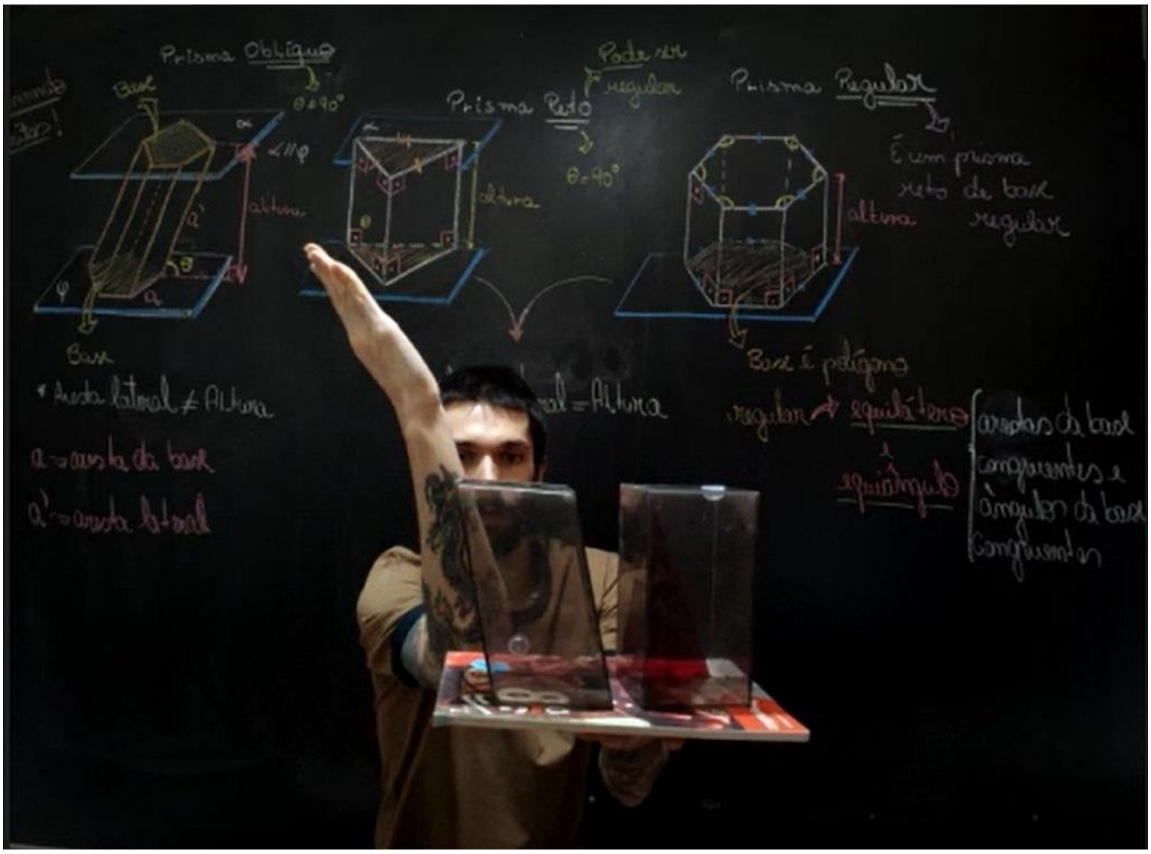
b.socrative.com/teacher/#final-results/53838376/44120160/table

67%	C	D	Falso	B	B			
50%	C	D	Falso	B				
67%	C	D	Falso	D	B			
67%	C	D	Falso	D	B			
67%	C	D	Falso	B	B			
50%	C	D	Falso	B	A			
50%	C	B	Verdadei	C	B			
50%	C	D	Falso	A	A			
50%	C	A	Falso	B	B			
83%	C	D	Falso	C	B			
33%	C	C	Verdadei	B	B			
67%	C	D	Falso	B	B			
Total da turma	**97%**	**76%**	**76%**	**38%**	**89%**			

Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

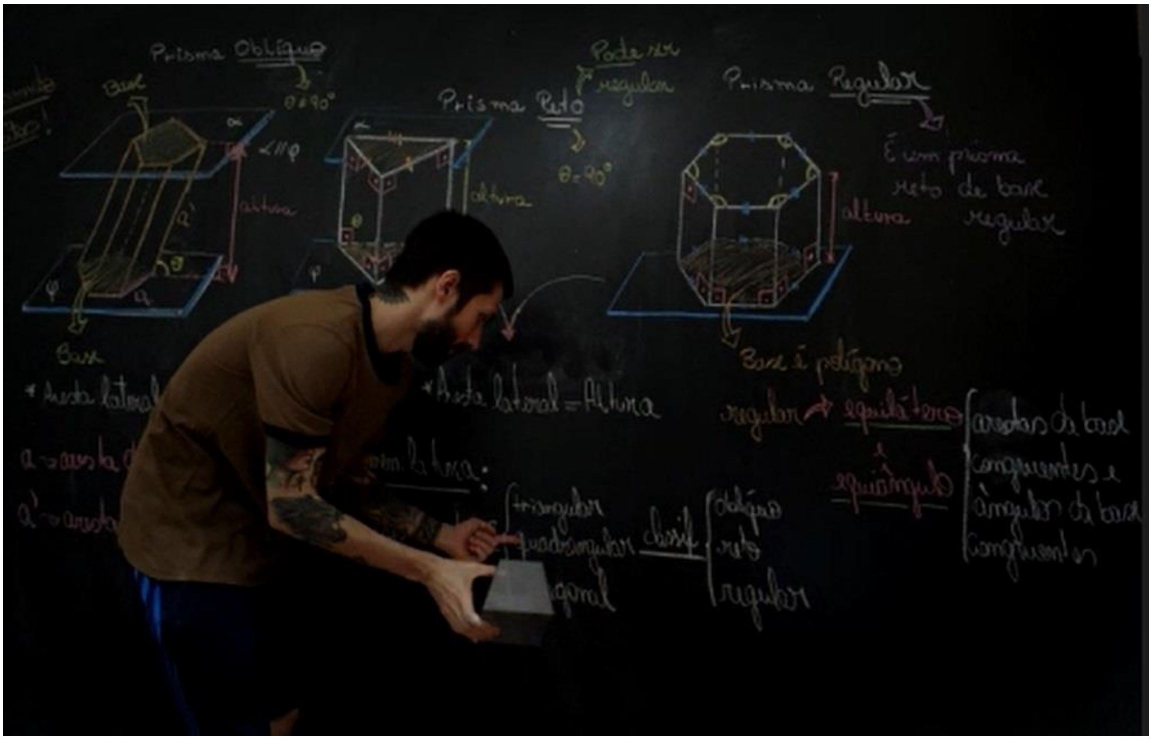
Como se pode observar, foram aplicados cinco testes conceituais após o estudo do material fornecido no momento de contextualização (primeiro momento). Dentre eles, o teste 4 obteve uma porcentagem baixa, de acordo com o feedback do aplicativo *Socrative*. Logo, foi necessário, no momento on-line, retomar e reforçar as propriedades dos prismas regulares. Desse modo, já iniciamos a aula remota realizando esses reforços necessários e pontuais conforme figura 30 e 31.

Figura 30 – Reforçando conceitos em aula remota



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Figura 31 – Retomando conceitos em aula remota

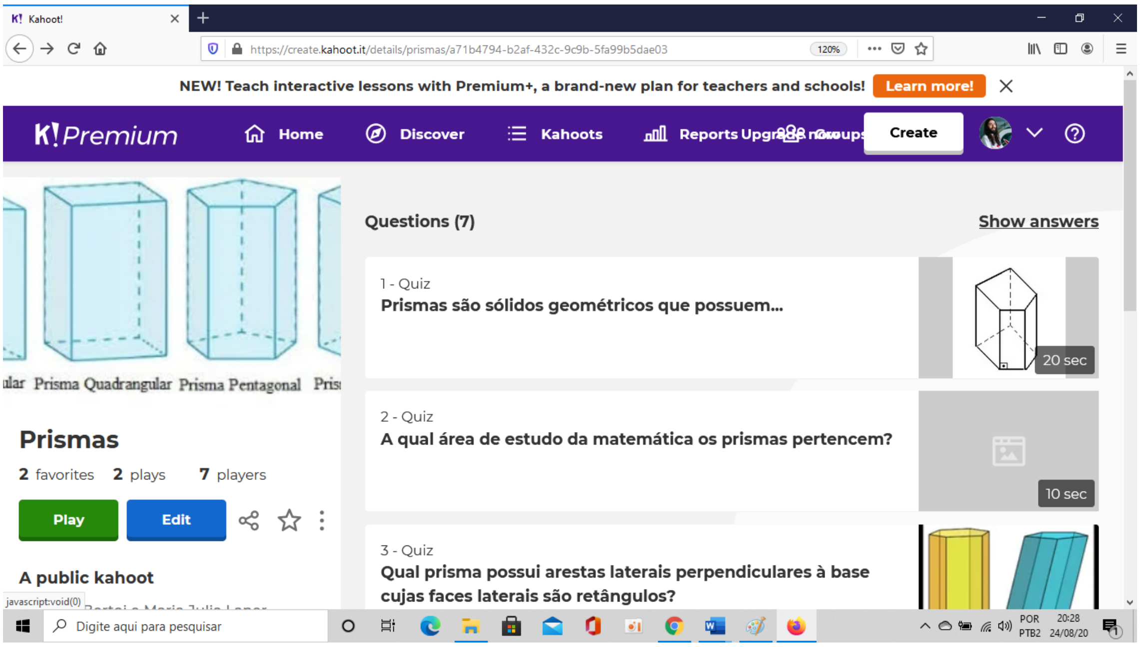


Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Com isso, os tópicos avançaram apenas quando percebemos uma compreensão por parte dos alunos sobre os assuntos compartilhados nos materiais de contextualização e nos encontros on-line. Nossas experiências mostraram uma enorme motivação dos alunos em utilizar o *Socrative* e o *Kahoot*. Sobre o aplicativo *Kahoot*, especificamente, recomendamos seu uso, também, pelo fato de fornecer em sua plataforma democrática o acesso a banco de questões prontas, com possibilidade de edição.

Ademais, pela aula remota no aplicativo *Zoom*, é possível dividir os alunos em pares ou grupos para realizarem discussões sobre testes no *Kahoot*. Cabe salientar que este possui pontos em comum com o *Socrative*, mas também há diferenças. Quando utilizado de forma a promover a competição — um diferencial do *Kahoot* —, propicia-se uma notável euforia nos alunos para iniciar as aulas já com os testes. Quando, por meio dos relatórios do momento de contextualização gerados pelo *Socrative*, percebíamos que os conceitos fundamentais compartilhados foram compreendidos, começávamos as aulas com a utilização do *Kahoot* mediante os questionários existentes nele como na figura 32.

Figura 32 – Testes conceituais no *Kahoot*



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Ainda que alguns alunos não cumpram com o combinado, isto é, realizar os estudos prévios do material fornecido, recomendamos iniciar a aula com uma breve exposição e comentários sobre a contextualização (primeiro momento). Em seguida, aconselhamos aplicar o *Kahoot*, pois isso provoca certa frustração no aluno que não realizou a tarefa de estudo em casa. Observamos, também, que a competitividade pelo pódio proposta no *Kahoot* atinge positivamente os alunos, motivando-os a fazerem os estudos prévios. Com o tempo, notamos que, ao iniciar as aulas remotas, muitos já estavam preparados e indagavam em qual momento ocorreriam os testes no *Kahoot*, mostrando responsabilidade com o dever de casa.

Voltados a enriquecer os conceitos fundamentais que são compartilhados em aula, são de fácil acesso vídeos em canais educativos e criativos do *Youtube*, como os canais do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), do Programa de Iniciação Científica (PIC) Júnior e do Portal da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Eles podem amparar a busca por novos conhecimentos e pontos de vista, bem como aprofundar os estudos por meio de excelentes cursos listados nos canais do *Youtube*. Listamos alguns a seguir:

a) Princípio de Cavalieri: https://www.youtube.com/watch?v=wQpi2ZfrITw;
b) Princípio de Cavalieri - aprofundado: https://www.youtube.com/watch?v=pFqWhIfNwfY&t=7s;
c) Princípio de Cavalieri - manipulando material: https://www.youtube.com/watch?v=mxpwmQaCu7A&t=228s.

3.2.3 Terceiro momento: aula remota com atividades de resolução de problemas

Conforme as aulas caminham a partir do modelo da sala de aula invertida, somada ao uso do *peer instruction*, os alunos adquirem conceitos e informações relevantes que podem ser interpretados como subsídios para as aulas via resolução de problemas. Em outras palavras, utilizando a sala de aula invertida e o *peer instruction*, o professor promove discussões e troca de informações, fortalecendo os conceitos-chave e as propriedades significativas de objetos que serão abordados em situações-problema nas aulas remotas.

Nesse último momento da aplicação da proposta, compartilhamos, por meio do *Socrative*, atividades de resolução de problemas.

Assim, a proposta, apresentada a seguir, constitui em sugestões para aulas de 45 minutos com professores e alunos on-line simultaneamente. Nesse aspecto, cabe ao professor refletir sobre sua realidade e realizar as consideráveis adaptações, pois o que dá certo com algumas turmas não necessariamente tem sucesso com outras. De todo modo, podemos afirmar que a proposta se trata de um caminho plausível para as aulas remotas.

3.2.3.1 Atividade 1: volume de prismas

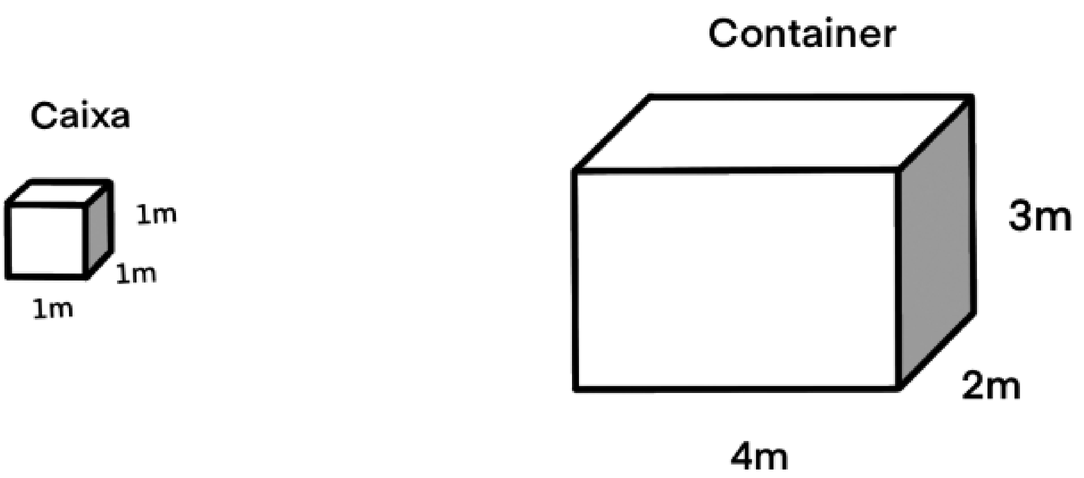
Objetivos específicos

A primeira atividade tem como objetivos fazer com que os alunos: interpretem corretamente o problema; discutam suas resoluções e suas dúvidas; e compreendam formalmente o **cálculo do volume de um prisma**.

PROBLEMA

Um *container* precisa ser completamente carregado com caixas de volume igual a 1 m³, como mostra a figura a seguir:

Figura 33 - Caixas de volume



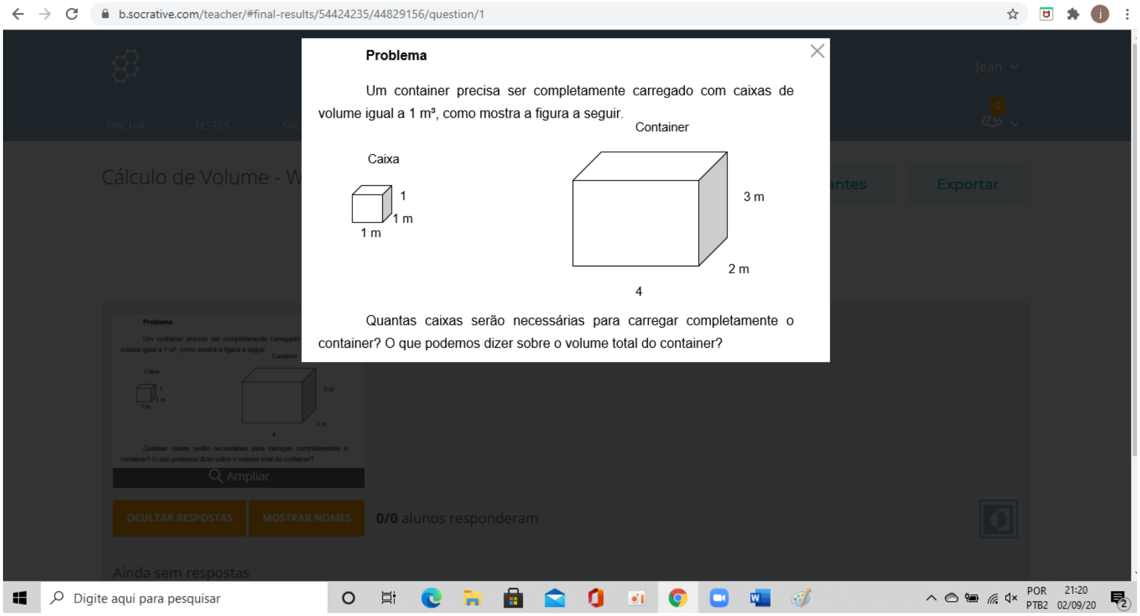
Fonte: o próprio autor (2020)

Quantas caixas serão necessárias para carregar completamente o *container*?

O que podemos dizer sobre o volume total do *container*?

Esse problema foi compartilhado via *Socrative*, como se vê a seguir:

Figura 34 – Problema 1 via *Socrative*



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Resolução

Os alunos podem tomar diferentes estratégias para a resolução deste problema:

- <u>Resolução 1</u>: uma opção é preencher todo o *container* encaixando as caixas e, em seguida, contar o total de caixas necessárias para preenchê-lo. O resultado é que são necessárias 24 caixas para completar o *container*. Como cada caixa tem volume de 1 m³, pois são cubos de 1 m de lado, o *container* tem 24 m³.
- <u>Resolução 2</u>: alguns alunos podem preencher, primeiramente, toda a base, totalizando 8 caixas, e contar quantas cabem na altura, que são 3. Em seguida, podem efetuar a multiplicação 3.8=24 caixas no total. Como cada caixa tem volume de 1 m³, pois são cubos de 1 m de lado, o *container* tem 24 m³.
- <u>Resolução 3</u>: pode acontecer também de alguns alunos contarem quantas caixas cabem no comprimento, na altura e na profundidade. Assim, basta efetuar a multiplicação 4.2.3=24 caixas. Como cada caixa tem volume de 1 m³, pois são cubos de 1 m de lado, o *container* tem 24 m³.

Discussão com a turma

Durante este momento, é preciso discutir com os alunos as resoluções expostas por eles, observando possíveis erros de resolução e diferentes ideias encontradas pelos estudantes. Deve-se buscar um consenso para a parte da sistematização das ideias e do conteúdo.

Possíveis dúvidas e encaminhamentos

Em relação às dúvidas referentes à leitura e à interpretação do texto, procuramos resolver com toda a turma e, caso necessário, individualmente. Estão listadas, a seguir, dúvidas que podem surgir e possíveis encaminhamentos para elas:

- O que é um *container*? – É um recipiente de metal ou de madeira, geralmente de grandes dimensões, destinado ao acondicionamento e ao transporte de carga em navios, trens etc.
- O que é volume? – É uma medida relacionada ao espaço ocupado por um corpo.

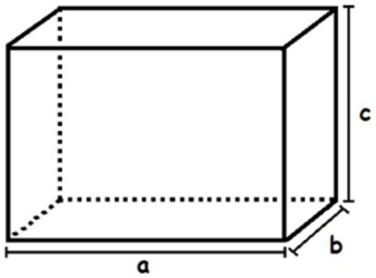
Sobre as dúvidas que aparecerem com maior frequência e que são dúvidas de vários grupos, o ideal é fazer uma interrupção da atividade para esclarecê-las junto de toda a turma.

Sistematização

O prisma é um sólido geométrico constituído por: base, altura, vértices, arestas e faces laterais. Ele pode ter formas variadas, porém é definido por certas características básicas. Possuindo duas bases idênticas e paralelas, o prisma é classificado de acordo com o formato de sua base e de acordo com o ângulo que as laterais formam com ela. Se formarem um ângulo reto, trata-se de um prisma **reto**; se formarem qualquer outro ângulo que não seja reto, é um prisma **oblíquo**.

> Um paralelepípedo retangular é um sólido de seis lados que possui faces retangulares planas e paralelas. Tente imaginar o paralelepípedo abaixo como uma piscina. Se nós queremos saber a capacidade dele, é o mesmo que dizer que queremos descobrir quanto de água cabe nele. Para chegarmos a uma resposta, precisaremos analisar alguns dados desse sólido, como a largura e o comprimento do retângulo da base, bem como a altura ou profundidade (RIBEIRO, 2020, n.p).

Figura 35 - Prisma retangular



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Para calcular o volume do paralelepípedo, temos a seguinte fórmula: **V = a. b. c**, onde a, b, e c são as medidas das arestas do sólido.

Logo, a terceira resolução seria uma ligação direta com a formalização do volume do paralelepípedo. Podemos, também, por meio da segunda resolução, mostrar que o volume de um prisma qualquer pode ser calculado com a área da base multiplicada pela altura do sólido.

Ademais, verificando que o nível de dificuldade da atividade não se constitui problema para a maioria dos estudantes, dado as medidas expressas por números inteiros, o problema poderia conter dimensões não inteiras do paralelepípedo. Então, tem-se uma sugestão ao professor: problematizar o enunciado com medidas de comprimento, largura e altura expressas por números racionais, isto é, as medidas *a*, *b* e *c* podem ser escritas como razões entre dois inteiros reduzidas a um mesmo denominador.

Assim, $a = \frac{m}{d}, b = \frac{n}{d}$ e $c = \frac{p}{d}; m, n, p, d \in \mathbb{Z}; (m, d) = (n. d) = (p, d) = 1$, isto é, frações em sua forma irredutível. Supondo a unidade de volume a ser comparada, um cubo (hexaedro regular) de aresta 1 (unidade de comprimento), devemos fracionar o cubo unitário com cubos de aresta $\frac{1}{d}$, implicando d^3 cubos de aresta $\frac{1}{d}$ cobrindo o cubo unitário, ou seja, o volume de cada "cubinho" é dado por $\frac{1}{d^3}$. Daí, preenchendo o paralelepípedo com os "cubinhos" de aresta $\frac{1}{d}$, percebemos que esses "cubinhos" cobrem o comprimento *m* vezes; a largura, *n* vezes; e a altura, *p* vezes. Logo, o volume V do paralelepípedo é a quantidade de "cubinhos" que preenchem o paralelepípedo, com efeito: $V = m.n.p.(\frac{1}{d^3}) = \frac{m}{d}.\frac{n}{d}.\frac{p}{d} = a.b.c.$ Além disso, podemos lembrar que a passagem dos racionais para as medidas expressas por números reais se manifesta como um resultado do Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

3.2.3.2 Atividade 2: volume de cilindros

A saber, a atividade proposta a seguir foi retirada do livro "Resolução de Problemas: Teoria e Prática", de Onuchic et al. (2014).

Objetivos específicos

A segunda atividade tem como objetivos fazer com que os alunos: interpretem corretamente o problema; discutam suas resoluções e suas dúvidas; compreendam formalmente o **cálculo do volume de cilindros**; e sejam capazes de **fazer relações entre volumes**.

PROBLEMA

A professora Elvira entregou a cada um de seus alunos uma folha de papel, de 20 cm por 30 cm, e fita adesiva. Ela lhes pediu para enrolar o papel e fazer um cilindro. Os alunos seguiram as instruções, mas seus cilindros se mostraram de dois tamanhos diferentes. A professora pediu, então, que determinassem qual desses dois cilindros tinha o maior volume.

Jorge disse: – No meu cabe mais, porque é mais alto.

Ema disse: – No meu cabe mais, porque é mais largo.

Laura disse: – Eles devem conter a mesma quantidade, porque foram feitos a partir de folhas de papel de mesmo tamanho.

Quem está certo? Como você sabe?

Fonte: Onuchic et al (2014, p. 119)

Figura 36 - Problema 2 via Socrative

Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Resolução

Para resolver essa tarefa, é indicado aos alunos utilizarem uma folha de papelão com medidas 30 cm x 20 cm e ter uma régua à disposição para efetuarem as medições necessárias. Analisando separadamente os dois cilindros em questão, definiremos como cilindro A o que tem altura medindo 30 cm e como cilindro B o de altura de 20 cm. O valor dos raios dos cilindros pode ser encontrado realizando a medição com a régua ou, sabendo o comprimento da circunferência, utilizando $C = 2\pi r$ onde C é o comprimento da circunferência e r é o raio.

Desse modo, com raio igual a 3,18 cm e considerando π igual a 3,14, o volume do cilindro A fica:

$$V_A = Área\ da\ base\ .\ altura \Rightarrow V_A = \pi {r_A}^2 h_A$$

$$\Rightarrow V_A = 3{,}14.(3{,}18)^2.30$$

$$\Rightarrow V_A = 952{,}5\ \text{cm}^3$$

De maneira análoga, com raio igual a 4,78 cm e considerando π igual a 3,14, o volume do cilindro B fica:

$$V_B = Área\ da\ base\ .\ altura \Rightarrow V_B = \pi {r_B}^2 h_B$$

$$\Rightarrow V_B = 3{,}14.(4{,}78)^2.20$$

$$\Rightarrow V_B = 1434{,}8\ \text{cm}^3$$

Assim, o cilindro de altura maior tem um volume de 952,5 cm^3, enquanto o de altura menor tem um volume de 1434,8 cm^3. Portanto, fica comprovado matematicamente que o cilindro B tem volume maior que o cilindro A.

A razão entre os dois volumes é dada por:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{952{,}5\mathrm{cm}^3}{1434{,}8\mathrm{cm}^3} = 0{,}66.$$

Discussão com a turma

Durante este momento, é preciso discutir com os alunos as resoluções expostas por eles, observando possíveis erros de resolução e diferentes ideias encontradas pelos estudantes, mesmo que não estejam corretas. Deve-se buscar um consenso para a parte da sistematização.

Possíveis dúvidas e encaminhamentos

Seguem dúvidas que podem surgir e possíveis encaminhamentos para explicá-las:

- O que é um cilindro? – É um corpo roliço, de diâmetro igual em todo o seu comprimento[15]. Ex.: lata de óleo, lata de chocolate em pó etc.
- O que é diâmetro? – É uma linha reta que passa pelo centro de um círculo, terminando de ambos os lados na circunferência ou na periferia, e que assim o divide em duas partes iguais[16].
- O que é volume?[17] – O espaço ocupado por um corpo.
- O que significa razão? – É a relação existente entre grandezas da mesma espécie[18] (a **razão aritmética** averigua a diferença ou o excesso de uma quantidade sobre outra; a **razão geométrica** estabelece o número de vezes que uma quantidade contém a outra).

[15] Acepção disponível em: http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=cilindro. Acesso em: nov. 2020.
[16] Acepção disponível em: http://michaelis.uol.com.br/busca?id=7XGl#:~:text=1%20Geom%20Linha%20reta%20que,3%20Geom%20Eixo%20da%20esfera. Acesso em: nov. 2020.
[17] Acepção disponível em: http://www.brasilescola.com/matematica/. Acesso em: nov. 2020.
[18] Acepção disponível em: http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=raz%C3%A3o. Acesso em: nov. 2020.

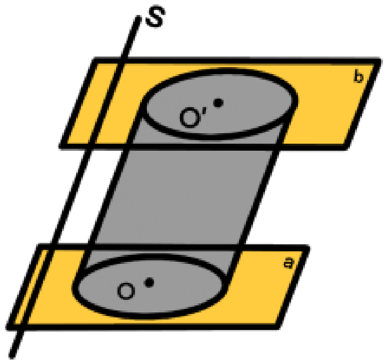
Sobre as dúvidas que aparecerem com maior frequência, é relevante fazer uma interrupção da atividade para esclarecê-las para toda a turma e não somente para a equipe ou o aluno em si.

Sistematização

Cilindro circular

Parte-se da constatação de que *a* e *b* são dois planos paralelos distintos, existem uma reta *s* secante aos planos, um círculo de centro *O* contido em *a* e um de centro *O'* contido em *b*. Consideremos, aqui, todos os segmentos de reta paralelos a *s*, de modo que cada um deles tenha uma extremidade pertencente ao círculo contido em *a* e o outro extremo pertencente ao círculo em *b*.

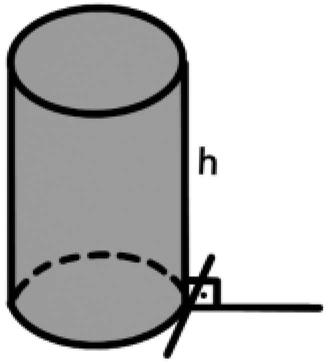
Figura 37 - Cilindro circular



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido denominado cilindro circular, limitado de bases circulares nos planos paralelos. No cilindro circular reto, a geratriz forma um ângulo de 90º com o plano da base. Nesse cilindro, a medida *h* de uma geratriz é a altura do cilindro.

Figura 38 - Cilindro circular reto



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Levando em conta que o cilindro tem uma construção semelhante à do prisma, expõe-se que o volume V de um cilindro circular de altura h e raio da base r é igual ao produto da área da base, πr^2, pela altura h, isto é:

$$V = \pi r^2 h$$

A resolução apresentada anteriormente nos mostra que, no caso do problema que estudamos, o volume do cilindro A é menor que o volume do cilindro B. Podemos, então, generalizar a relação entre cilindros desse tipo com as medidas de altura e de comprimento da base alternando-se entre si.

Afirmamos que: a razão entre dois números *a* e *b* é a relação *a/b*, em que *a* e *b* são números reais, com *b* ≠ 0. Dessa forma, concluímos que razão é uma fração, a qual é utilizada no intuito de comparar grandezas. A razão pode ser representada por uma fração, um número na forma decimal, uma porcentagem ou até mesmo um quociente.

Considerando a folha de papelão com lados medindo a e b, com $a < b$, construímos dois cilindros: um enrolando a folha ao longo de a com altura b, chamado cilindro A; e outro enrolando ao longo de b com altura a, chamado cilindro B. Sendo a o perímetro da base de A, tem-se que o raio da base de A é $r_A = \frac{a}{2\pi}$, portanto seu volume será:

$V_A = \frac{a^2 \mathrm{b}}{4\pi}$. Analogamente, o volume do cilindro B será $V_B = \frac{b^2 \mathrm{a}}{4\pi}$. A razão entre os volumes será, então, $\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{a^2 \mathrm{b}}{4\pi}}{\frac{b^2 \mathrm{a}}{4\pi}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} < 1$, pois $a < b$.

Assim, $V_A < V_B$ e a razão entre os volumes é a mesma razão existente entre os lados da folha, ou seja, o volume do cilindro construído com maior altura será inferior ao volume do cilindro construído com menor altura.

Utilizando a resolução que apresentou como resposta que a razão entre os dois volumes é dada por $\frac{V_A}{V_B} = \frac{952,5}{1434,8} = 0,66$, podemos concluir que o volume do cilindro A corresponde a aproximadamente 66% do volume do cilindro B.

Complemento para a Atividade 2

Após a realização da Atividade 2, pode-se, no formato presencial, apresentar aos alunos dois novos cilindros, de modo que eles não saibam inicialmente suas medidas. Um cilindro será formado com uma folha de 30 cm de altura e 20 cm de base. Para o outro, será usada uma folha com 5 cm de altura e 49 cm de base. Sugerimos perguntar aos alunos qual cilindro tem o volume maior. Espera-se que eles fiquem em dúvida, pois, na atividade anterior, mostramos que o cilindro mais baixo tinha volume maior que o cilindro mais alto, porém a diferença de altura pode impressionar alguns alunos. Recomendamos deixar que os alunos realizem as medições e concluam que, nesse caso, os cilindros têm o mesmo volume. Assim, é evidente que não podemos tirar conclusões precipitadas sem comprovações matemáticas.

3.2.3.3 Atividade 3: volume de sólidos

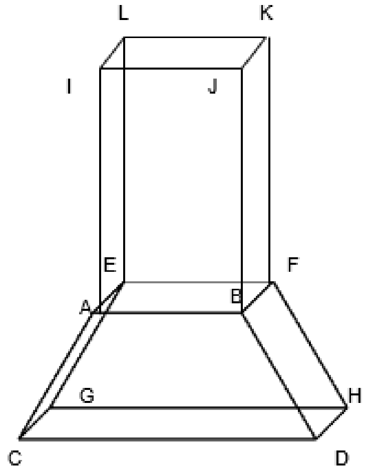
A terceira atividade foi adaptada do vestibular da “Fundação Universitária para o Vestibular” (Fuvest), de São Paulo (SP).

Objetivos específicos

A terceira atividade tem como objetivos fazer com que os alunos: interpretem corretamente o problema; resolvam-no utilizando conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente; discutam suas resoluções e suas dúvidas; e compreendam o **cálculo do volume de sólidos formados por sólidos já conhecidos** pelos alunos.

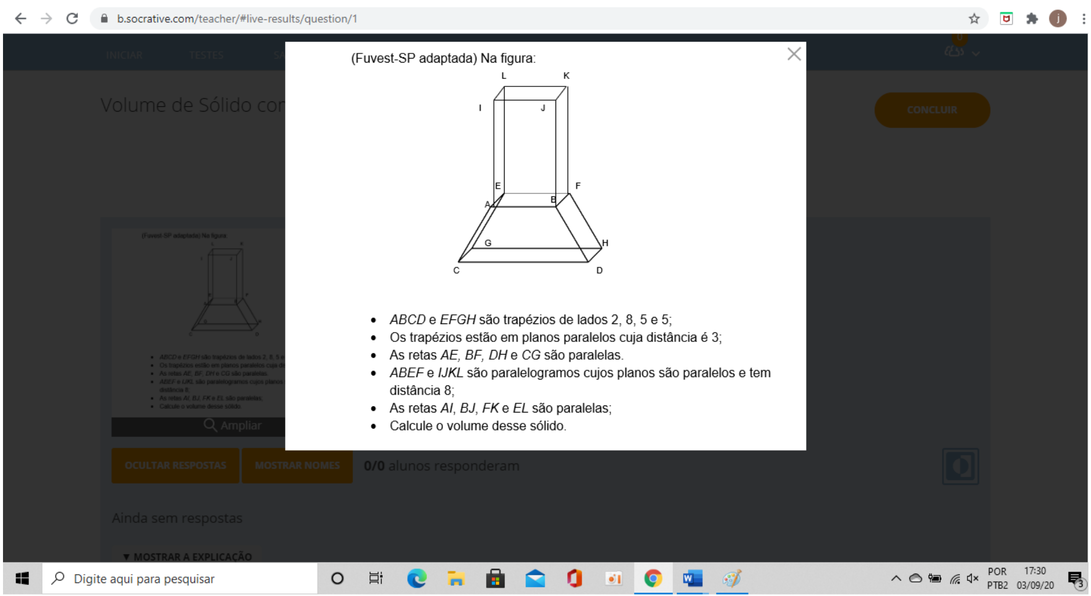
PROBLEMA

(Fuvest-SP adaptada) Na figura:



- *ABCD* e *EFGH* são trapézios de lados 2, 8, 5 e 5;
- Os trapézios estão em planos paralelos cuja distância é 3;
- As retas *AE, BF, DH* e *CG* são paralelas.
- *ABEF* e *IJKL* são paralelogramos cujos planos são paralelos e tem distância 8;
- As retas *AI*, *BJ*, *FK* e *EL* são paralelas;
- Calcule o volume desse sólido.

Figura 39 - Problema 3 via Socrative

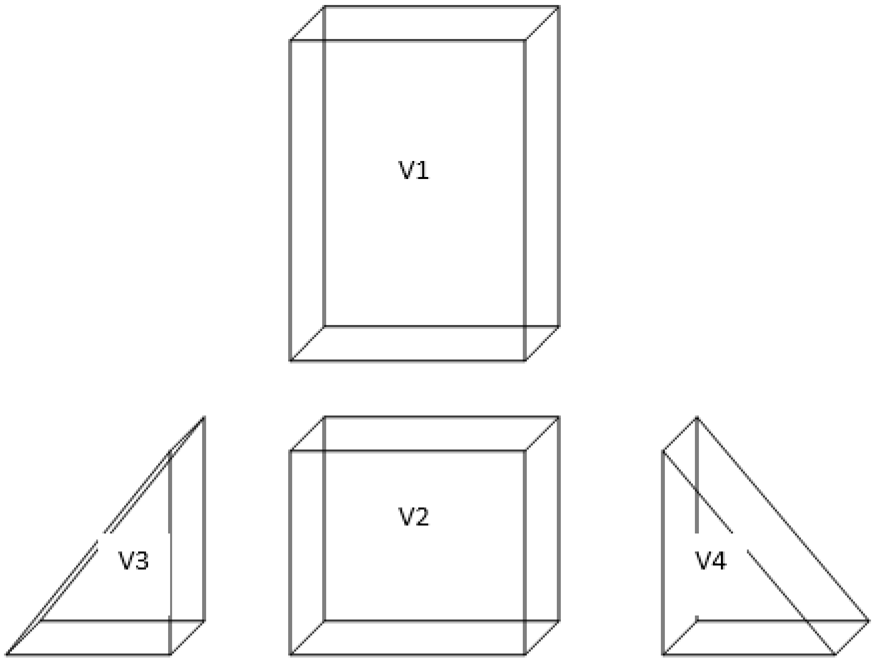


Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Resolução

Analisando a figura, observamos que podemos dividi-la em quatro sólidos:

Figura 40 - Sólido dividido



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Assim, temos que:

$$V_1 = (\acute{a}rea\ da\ base).(altura) = (2.3).(8) = 48\ unidades\ de\ volume$$

$$V_2 = (\acute{a}rea\ da\ base).(altura) = (2.3).(4) = 24\ unidades\ de\ volume$$

$$V_3 = V_4 = \frac{(\acute{a}rea\ da\ base).(altura)}{2} = \frac{(3.3).(4)}{2} = 18\ unidades\ de\ volume$$

Em que $V_1, V_2, V_3\ e\ V_4$ representam separadamente o volume do sólido composto pelos sólidos 1, 2, 3 e 4. Desse modo, o volume do sólido será:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 48 + 24 + 18 + 18 = 108$$

Ou seja, 108 unidades de volume.

Discussão com a turma

Durante este momento, é preciso discutir com os alunos as resoluções expostas por eles, observando possíveis erros de resolução e diferentes ideias encontradas pelos estudantes. Deve-se buscar um consenso para a parte da sistematização.

Possíveis dúvidas e encaminhamentos

Em relação às dúvidas referentes à leitura e à interpretação do texto, procuramos resolver com toda a turma e, caso necessário, individualmente. No que tange à Matemática, podem aparecer dúvidas como:

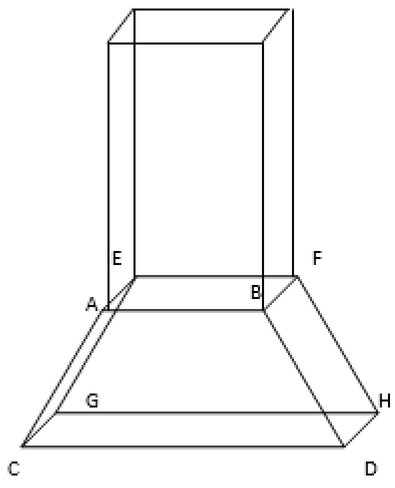
- O que é um sólido geométrico? – São volumes formados por figuras geométricas.

Outras possíveis dúvidas já foram abordadas nas tarefas anteriores. Sobre as dúvidas que aparecerem com maior frequência e que são dúvidas de vários grupos, o ideal é fazer uma interrupção da atividade para esclarecê-las junto de toda a turma.

Sistematização

Considerando o exemplo do problema, tratar-se-ia de uma fórmula que desconhecemos para calcular o volume do sólido. No entanto, podemos analisá-lo e dividi-lo em sólidos dos quais conhecemos o cálculo do volume.

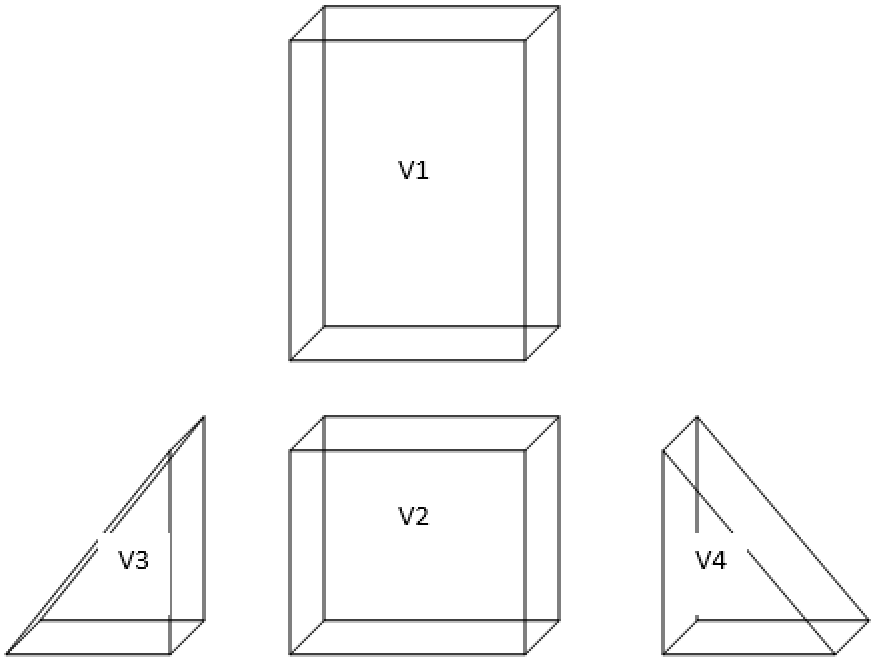
Figura 41 - Sólido composto



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

O sólido representado acima é um poliedro, mas não temos fórmula para calcular seu volume. Então, dividimos o sólido desta maneira:

Figura 42 - Sólido dividido



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Agora, temos que V_1 e V_2 são paralelepípedos e V_3 e V_4 são duas metades de paralelepípedo. Logo, o volume total V do sólido original se dá pela expressão:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

Para o caso de termos um sólido geométrico formado por *n* sólidos de que conhecemos o cálculo do volume, seu volume total V será:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \cdots + V_n$$

3.2.3.4 Atividade 4: volume de cilindro oco

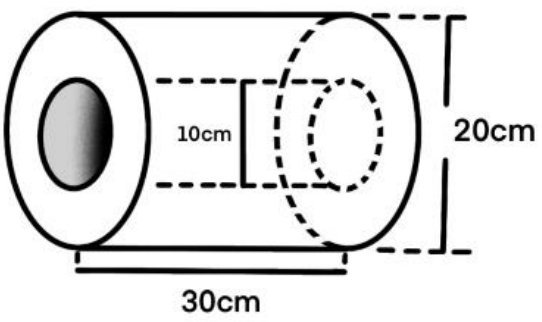
Objetivos específicos

A quarta atividade tem como objetivos fazer com que os alunos: interpretem corretamente o problema; discutam suas resoluções e suas dúvidas; e compreendam o **cálculo do volume de cilindro oco**.

PROBLEMA

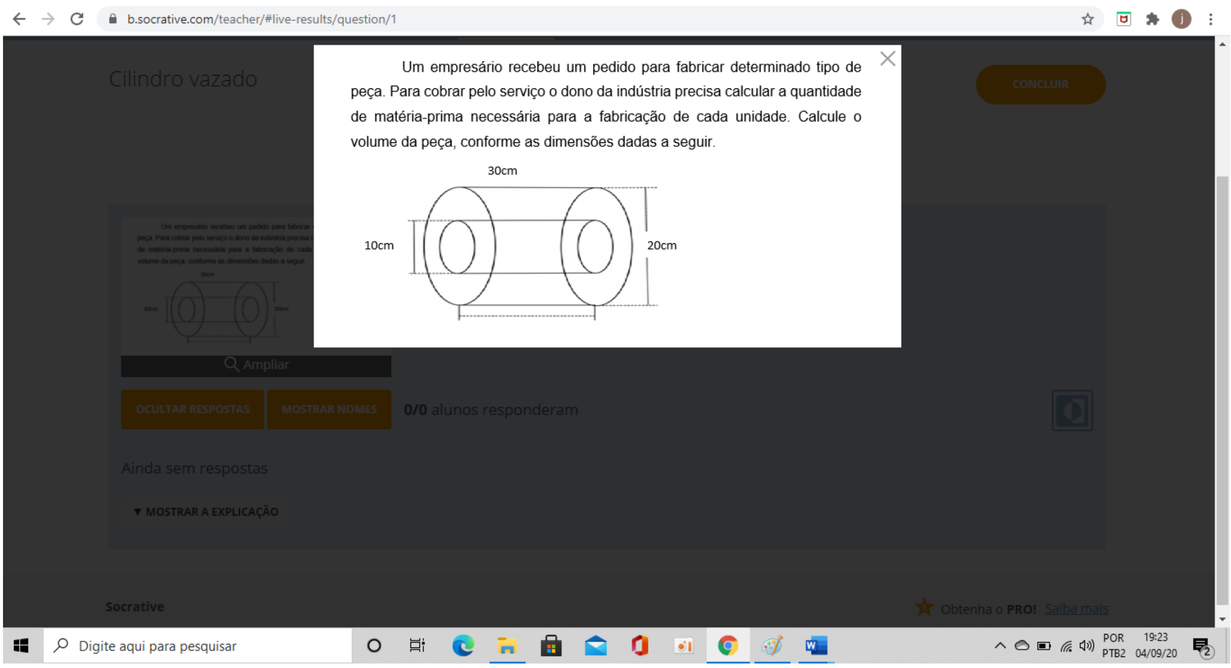
Um empresário recebeu um pedido para fabricar determinado tipo de peça. Para cobrar pelo serviço, o dono da indústria precisa calcular a quantidade de matéria-prima necessária para a fabricação de cada unidade. Calcule o volume da peça conforme as dimensões dadas a seguir:

Figura 43 - Cilindro oco



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Figura 44 - Problema 4 via Socrative



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Resolução

Sabe-se de antemão que o volume do cilindro é calculado multiplicando a área da base pela altura. Assim, o volume da peça em questão será o volume do cilindro, que tem 20 cm de diâmetro, menos a parte interna, que é vazia. Ou seja:

V = volume do cilindro - parte interna

$V = \pi.10^2.30 - \pi.5^2.30$

$V = 2250\pi$

Ou seja, o volume será 2.250 π centímetros cúbicos.

Discussão com a turma

Durante este momento, é preciso discutir com os alunos as resoluções expostas por eles, observando possíveis erros de resolução e diferentes ideias encontradas pelos estudantes. Deve-se buscar um consenso para a parte da sistematização.

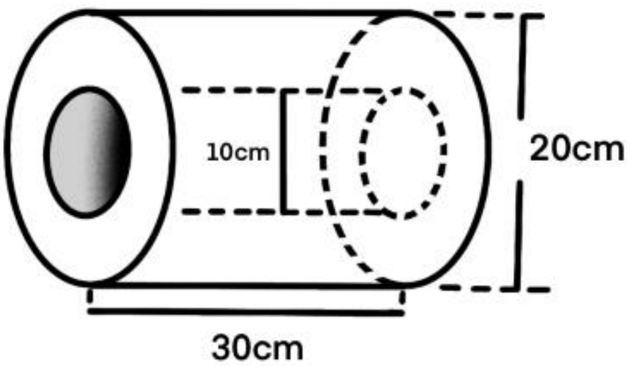
Possíveis dúvidas e encaminhamentos

Em relação às dúvidas referentes à leitura e à interpretação do texto, procuramos resolver com toda a turma e, caso necessário, individualmente. As dúvidas relacionadas à Matemática que aparecerem com maior frequência podem ser esclarecidas, com uma pausa na atividade, junto de toda a turma.

Sistematização

No problema proposto, tem-se um cilindro com um furo:

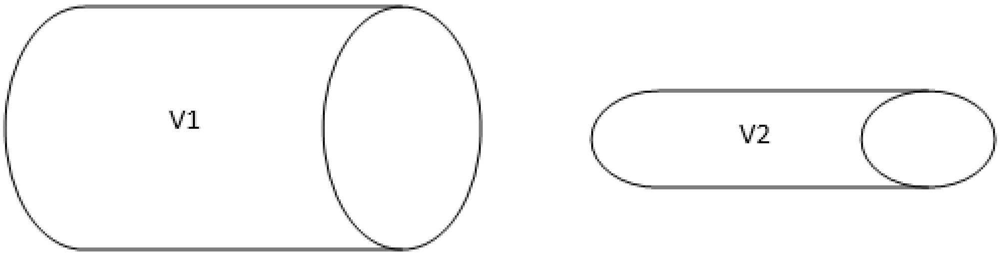
Figura 45 - Cilindro oco



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Contudo, podemos enxergar a peça como dois sólidos distintos, da seguinte maneira:

Figura 46 - Separando a peça em dois cilindros



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Em que V_1 é o volume completo do cilindro maior e V_2 é a parte vazia da peça. Logo o volume V da peça é dado pela expressão:

$$V = V_1 - V_2$$

Então, sempre que formos calcular volumes de sólidos vazados, o volume do sólido em questão será do volume total externo subtraído o volume interno.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação do trabalho aqui apresentado está associada à evolução e à aprendizagem no âmbito acadêmico do pesquisador aqui posto, para que se renove gradual e positivamente sua prática docente. Além disso, o trabalho propiciou aprimoramento como estudante e professor, ampliando os conhecimentos em “fazer Matemática” e no ensino dela para seus alunos, de forma a enriquecer as aulas e as trocas que ali se fazem presentes.

Nesse âmbito, cabe destacar que a contribuição do PROFMAT para a formação deste mestrando foi muito significativa, ampliando a destreza com diferentes temas da Matemática, provocando reflexões sobre as formas de ensinar Matemática e sobre o domínio de conteúdo matemático relevante à prática docente.

Propusemo-nos a cumprir com os objetivos deste trabalho, apresentando uma proposta para abordar conteúdos de Matemática para o Ensino Médio, utilizando metodologias ativas.

Compreendemos, por meio do trabalho apoiado nas metodologias ativas — modelo de sala de aula invertida e método *peer instruction* — e na atividade de resolução de problemas, que as práticas pedagógicas devem ser focadas no planejamento, na elaboração e na implementação de novas estratégias metodológicas de ensino, para promover o desenvolvimento das competências e das habilidades dos alunos. Eles não podem mais ser considerados como beneficiários passivos das explicações do professor.

Além disso, reconhecemos que os desafios do ensino remoto, tal como estamos praticando neste momento, ainda são muitos. Todavia, nós, professores acostumados com o ensino presencial, devemos notar que também dispomos de mecanismos que viabilizam a modalidade a distância. Podemos perceber, no cenário atual, quão enriquecedoras são as ferramentas e as estratégias compartilhadas entre nós, a fim de melhorar a qualidade de ensino nas escolas.

Diante das dificuldades de adaptação ao ensino remoto, os modelos de ensino ativo fornecem ferramentas excelentes para aflorar o papel de protagonismo nos alunos, fomentando a mediação do professor em fornecer recursos aos alunos e promover desafios que os confrontem na resolução de problemas matemáticos relevantes, tanto na vida escolar quanto em sua comunidade.

O desenvolvimento das estratégias adotadas promove maior qualidade do ensino de Matemática no Ensino Médio. Ademais, elas incentivam os alunos, motivando-os a ter autonomia, e estabelecem integração social, aprimorando a cidadania. No ensino remoto, ficou evidente que conteúdos matemáticos desenvolvidos em sala despertam maior engajamento dos alunos quando apoiados nas tecnologias.

De forma geral, acreditamos que, no período de pandemia, muitos professores repensaram e repensarão suas práticas de ensino tradicionais e expositivas. Ponderarão, igualmente, sobre como as aulas remotas refletem as situações vividas em sala, no tocante à motivação dos alunos e à participação deles nas aulas.

Cabe salientar, diante da experiência obtida como pesquisador e professor, que antes das práticas de ensino ativo serem aplicadas, quase todos os estudantes não ligavam as câmeras e os microfones no momento das aulas on-line. Após o uso de novas formas de compartilhar informações e da realização de atividades com tecnologias, por meio dos aplicativos apresentados, muitos demonstraram interesse e houve um aumento relevante na participação de alunos que não interagiam.

Depois de iniciar as aulas remotas com as práticas amparadas nas metodologias ativas, os alunos, entusiasmados, sempre perguntavam de antemão: “Professor, hoje vamos usar *Kahoot* ou *Socrative*?”. É gratificante perceber que, mesmo em momentos de fragilidade, seja psicológica, financeira ou física, nossos alunos se sentem acolhidos. Simultaneamente, é motivador sentir que somos realmente mediadores no ensino e na aprendizagem. Por fim, esperamos que a proposta realizada no trabalho favoreça ao leitor um olhar crítico para as práticas desenvolvidas em aulas e contribua para utilização de ferramentas tecnológicas no ensino de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Caroline Medeiros Martins de et al. Sistema circulatório no 8° ano do Ensino Medio - séries finais: utilizando *tablets* como ferramenta de estudo. *In*: **X Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências** – X ENPEC. Águas de Lindóia (SP), nov. 2015. Disponível em: http://www.xenpec.com.br/anais2015/resumos/R0224-1.PDF. Acesso em: 8 abr. 2020.

ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini de. Apresentação. *In*: BACICH, L.; MORAN, J. (Orgs.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

ARAÚJO, Ana Lídia; SÁ, Ana. Cerca de seis milhões de alunos brasileiros não têm acesso à internet. **EU Estudante - Correio Braziliense**, 04 set. 2020. Disponível em: https://www.correiobraziliense.com.br/euestudante/educacao-basica/2020/09/4873174-cerca-de-seis-milhoes-de-alunos-brasileiros-nao-tem-acesso-a-internet.html#:~:text=Dos%205%2C8%20milh%C3%B5es%20de,%2C%20tablet%2C%20celular%20ou%20notebook. Acesso em: out. 2020.

BACICH, Lilian; MORAN, José (Orgs.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. **Sala de aula invertida**: uma metodologia ativa de aprendizagem. Tradução de: Afonso Celso da Cunha Serra. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. **Sala de aula invertida**: uma metodologia ativa de aprendizagem. Tradução de: Afonso Celso da Cunha Serra. 1ª ed [Reimpr.]. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

BERVIQUE, Janete de Aguirre. Naturalismo pedagógico no Emílio de Rousseau. **Revista Científica Eletrônica de Pedagogia**, on-line, ano II, n. 4, jul. 2004.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**: Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SED, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006. v. 2, 2006

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, Vitor Caiaffo. *Educacional Softwares - Kahoot and Socrative - and Anatomic Learning.* Metodologias disruptivas na educação: formas inovadoras de ensinar e aprender. **Congresso de Tecnologia na Educação**, 2019. Disponível em: http://www.pe.senac.br/cte/senac-2019/pdf/poster/. Acesso em: 15 out. 2020.

CANGALAYA, Jose Antonio (2010). **Estrategias de aprendizaje de la metodología activa.** Educar: grupo de capacitación pedagógica. Disponível em: https://pt.scribd.com/doc/110122891/estrategias-de-aprendizaje-de-la-metodologia-activa. Acesso em: 14 out. 2020.

CORTELAZZO, Angelo Luiz et al. **Metodologias ativas e personalizadas de aprendizagem**: para refinar o seu cardápio metodológico. Rio de Janeiro: Alta Books, 2018.

COSSETTI, Melissa Cruz. Como usar o Zoom Meetings [App de Reuniões]. **Tecnoblog**, [2020?]. Disponível em: https://tecnoblog.net/329502/como-funciona-o-zoom-app-de-reunioes/. Acesso em: nov. 2020.

D’AMBROSIO, Beatriz. Como Ensinar Matemática Hoje? Temas e debates. **SBEM**, Brasília, ano II, n. 2, p. 15-19, 1989.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Do saber matemático ao fazer pedagógico: o desafio da Educação. *In*: **Encontro de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, 2, 1999.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas (SP): Papirus, 1996.

D’AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. Tradução de: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

EDWARDS-GROVES, Christine. Interactive creative technologies: changing learning practices and pedagogies in the writing classroom. **Australian Journal of Language and Literacy**, v. 35, n, 1, p. 99-113, 2012.

JEREZ, Oscar Y. **Aprendizaje Activo, Diversidad e Inclusión - Enfoque, Metodologías y Recomendaciones para su Implementación**. 1ª ed. Departamento de Pregado. Chile: Ediciones Universidad de Chile, 2015. Disponível em: http://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/136742/Aprendizaje-activo-diversidad-e-inclusion.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 14 out. 2020.

MACHADO, Nilson José; D’AMBROSIO, Ubiratan. **Ensino de matemática**. Organização: Valéria Amorim Arantes. São Paulo: Summus, 2014.

MAZUR, Eric. O autor. *In*: MAZUR, E. **Peer instruction**: a revolução da aprendizagem ativa. Tradução de: Anatólio Laschuk. Porto Alegre: Penso, 2015.

MAZUR, Eric. **Peer instruction**: a revolução da aprendizagem ativa. Tradução de: Anatólio Laschuk. Porto Alegre: Penso, 2015.

MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. **Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania**: aproximações jovens, v. 2, p. 15-33, 2015.

O JOVEM no Ensino Médio. **Portal MEC**. Gov.BR. 2020, [p.i.]. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dia-a-dia-do-seu-filho/o-jovem-no-ensino-medio. Acesso em: 10 ago. 2020.

OLIVEIRA, Terezinha Marisa Ribeiro de; AMARAL, Carmen Lúcia Costa. O uso do aplicativo Socrative como ferramenta de diagnóstico e intervenção no ensino da Matemática. *In*: **Congresso Internacional de Educação e Tecnologias** – Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância, 2018. Disponível em: https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2018/article/view/863/315. Acesso em: 10 nov. 2020.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner; JUSTULIN, Andresa Maria (Orgs.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Ensino de Primeiro Grau. **Currículo Básico para a Escola Pública do Paraná**. Curitiba: SEED/DEPG, 1990.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**: Matemática. Curitiba, 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 11 out. 2020.

PAULINO, Danielle Krislaine Pereira. Medo, insegurança e/ou oportunidade para mudança? Questionamentos de uma professora gestante diante das ameaças da pandemia. *In*: OLIVEIRA, S. R. F. de (Org.). **Escolas em quarentena**: o vírus que nos levou para casa. Londrina: Ed. Madrepérola, 2020. p. 57-68.

PÉREZ SERRANO, Martina. Rol docente y pedagogía activa en la formación universitaria. La enseñanza centrada en el aprendizaje del alumno. **Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe - Humanismo y Trabajo social**, Universidad de León, España, n. 4, p. 153-175, 2005. Disponível em https://www.redalyc.org/pdf/678/67800409.pdf. Acesso em: 23 out. 2020.

PINTO, Diego de Oliveira. O que é Peer Instruction e como aplicá-la? **Blog Lyceum**, 01 abr. 2019. Disponível em: https://blog.lyceum.com.br/o-que-e-peer-instruction/. Acesso em: nov. 2020.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação de: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196p.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. Volume do Paralelepípedo, do Cubo e do Cone. **Brasil Escola**. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/volume-paralelepipedo-cubo-cone.htm. Acesso em: 04 nov. 2020.

VILLARROYA, Alberto Toro; MOLINA, Marta Arguis. Metodologías activas. **A tres bandas**, n. 38, p. 69-77, 2015. Disponível em: https://bit.ly/34UzjSZ. Acesso em: 15 out. 2020.

WORKSHOP "Laboratórios de Aprendizagem (PT)/*Future Classroom Lab* (EUN)". Embaixadoras LA-FCL. Iniciativa “Laboratórios de Aprendizagem” - Tutorial Socrative. **República Portuguesa – Educação**. Disponível em: http://edx.dge.mec.pt/asset-v1:ERTE+LA-FCL+LA-2016-2ed+type@asset+block/Tutorial_SOCRATIVE_MOOCedicao2.pdf. Acesso em: out. 2020.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Atividades extras para o Ensino Fundamental

Aqui, constam atividades elaboradas que não foram adaptadas, ainda, ao *Socrative* e ao *Kahoot*, pois serão incorporadas às práticas do próximo bimestre nos anos finais do Ensino Fundamental. Elas serão apresentadas de forma dinâmica com as tecnologias oferecidas pelos aplicativos. Portanto, acrescenta-se o material como forma de compartilhar com os leitores e os simpatizantes do ensino em Matemática as atividades relacionadas à **Geometria** e às **Medidas**.

As atividades propostas são adaptações do "Caderno de oficina com atividades de Geometria", elaborado pelos autores Lúcia Helena da Cunha Ferreira e João Bosco Laudares, da PUC-Minas[19].

Atividade 1

Objetivos específicos

A presente atividade visa fazer com que os alunos:

- Estabeleçam relações do cotidiano com as formas geométricas;
- Desenvolvam a capacidade de observar diferenças ou semelhanças na forma dos objetos;
- Visualizem as figuras planas;
- Calculem a área do retângulo.

Problema[20]

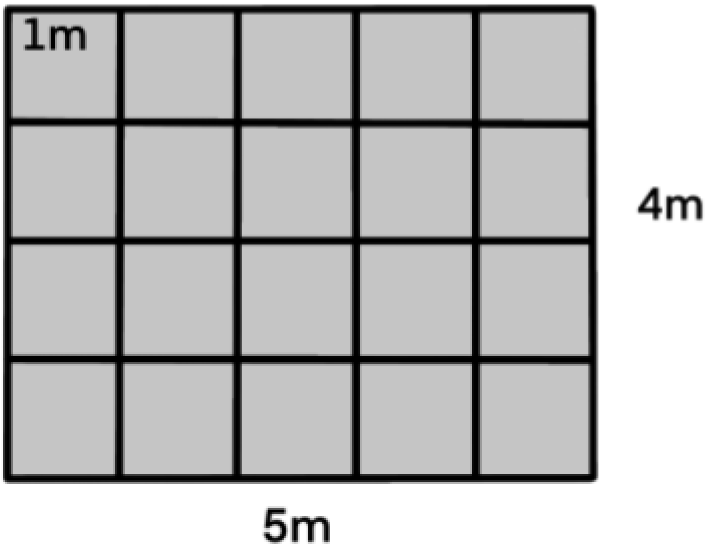
Aproveitando uma promoção de uma loja de materiais para construção, uma família resolve trocar o piso da sala de sua residência. Os integrantes sabem que a sala mede 4 metros de largura e possui um comprimento de 5 metros. Sabem,

[19] FERREIRA, Lúcia H. C.; LAUDARES, João B. **Caderno de Oficina com atividades de Geometria**. 2010. 41 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

[20] Situação-problema disponível em: http://www.matematicadidatica.com.br/GeometriaCalculoAreaFigurasPlanas.aspx#anchor_prob1. Acesso em: nov. 2020.

também, que o ladrilho desejado é quadrado, com 1 metro de lado. Quantos ladrilhos serão necessários para ladrilhar o piso da sala inteira?

Figura 47 - Medidas da sala



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Possíveis resoluções

a) Os alunos podem relacionar contando o número de ladrilhos possíveis na largura e no comprimento, contabilizando 20 ladrilhos.
b) Em outra possível solução, os alunos poderiam interpretar que, encaixando 4 ladrilhos de 1 metro na largura e 5 ladrilhos de 1 metro no comprimento, preencher-se-iam a largura e o comprimento. Desse modo, basta multiplicar 4x5, que é igual a 20, isto é, há 20 ladrilhos no total.

Discussão com a turma

Durante este momento, podemos discutir a ideia de quantidade de superfície existente na sala hipotética e a quantidade preenchida, encaminhando as noções de área de uma superfície plana.

Possíveis dúvidas e encaminhamentos

Em relação às dúvidas referentes à leitura e à interpretação do texto, procuramos resolver com toda a turma e, caso necessário, individualmente. No campo matemático, podem aparecer as dúvidas adiante:

- Quanto à obtenção de uma estratégia de resolução: seguindo a estratégia de ensino por meio da resolução de problemas, devemos nos portar como mediadores, guiando os alunos a partir de perguntas e de dicas, deixando um tempo necessário para pensarem e continuarem suas resoluções.
- Como resolver multiplicações? Retomam-se, nesse aspecto, operações que forem alvo de dúvidas.

Sobre as dúvidas que aparecerem com maior frequência e que são dúvidas de vários grupos, o ideal é fazer uma interrupção da atividade para esclarecê-las junto de toda a turma.

Sistematização

Para a formalização dos conceitos, a segunda resolução apresentada seria ideal. Caso nenhum grupo utilize essa resolução, podemos sugeri-la e resolver a questão junto com toda a turma.

Tendo a superfície da sala diferentes medidas, porém iguais aos pares, podemos concluir que se trata de uma superfície cuja figura plana é representada por um retângulo. Logo, poderemos generalizar a quantidade de superfície do retângulo como sendo a área do retângulo. Assim, para um retângulo com comprimento a e largura b, sua área é expressa pelo produto da largura e seu comprimento.

Atividade 2

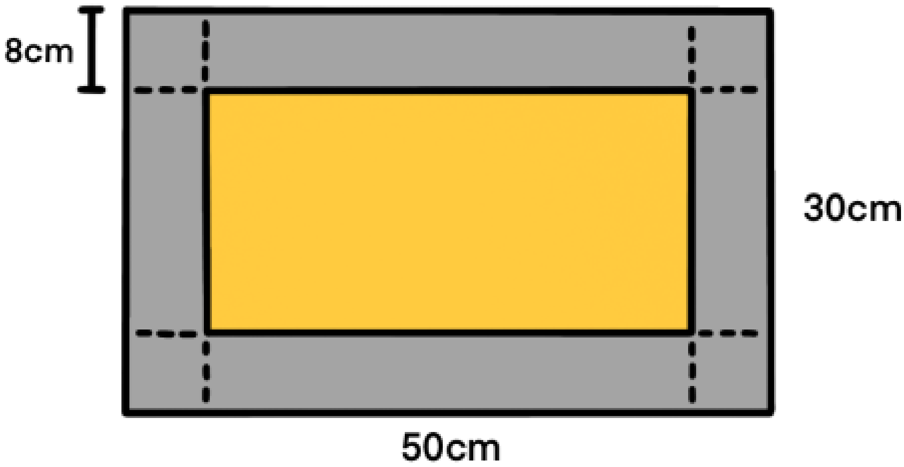
Objetivos específicos

- Identificar as regiões retangulares formadas pela caixa;
- Calcular a área dessas regiões retangulares;
- Classificar o formato da caixa em poliedro;
- Identificar um prisma;
- Calcular a área da superfície desse prisma;
- Compreender o cálculo da área da superfície de um prisma qualquer.

Problema

Dispondo de uma folha de papelão de 50 cm de comprimento por 30 cm de largura, pode-se construir uma caixa aberta cortando um quadrado de 8 cm de lado em cada canto da folha (ver figura).

Figura 48 - Cortes da folha



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

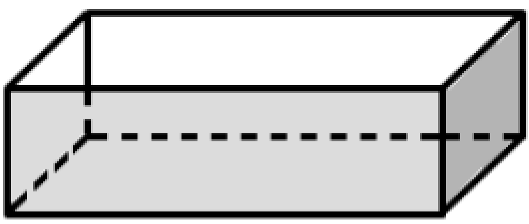
A) Quantos centímetros quadrados de material são necessários para que seja construída essa caixa?
B) Se tampássemos essa caixa, de modo que o tamanho da tampa seja exatamente a parte aberta, qual seria a quantidade de material, em centímetros quadrados, necessários para fazer a caixa com a tampa?

Possíveis resoluções

<u>Resolução 1</u>

Montando a caixa, temos a seguinte figura:

Figura 49 - Caixa retangular



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

A. Observando a caixa montada, verificamos que temos:

- duas regiões retangulares de $34\ cm$ por $8\ cm$: $A_1 = 34.8 = 272\ cm^2$;

- duas regiões retangulares de $14\ cm$ por $8\ cm$: $A_2 = 14.8 = 112\ cm^2$;

- uma região retangular de $34\ cm$ por $14\ cm$ (fundo da caixa): $A_3 = 34.14 = 476\ cm^2$.

Portanto, a quantidade de material necessária é:

$$2.A_1 + 2.A_2 + 1.A_3 = 2.272 + 2.112 + 1.476 = 544 + 224 + 476 = 1244\ cm^2$$

B. Como a tampa é do mesmo tamanho do fundo da caixa, pois é exatamente a parte aberta, calculamos sua área, $A_4 = A_3 = 34.14 = 476\ cm^2$.

Assim, vão ser gastos, $1244\ cm^2 + 476\ cm^2 = 1720\ cm^2$ de material.

<u>Resolução 2</u>

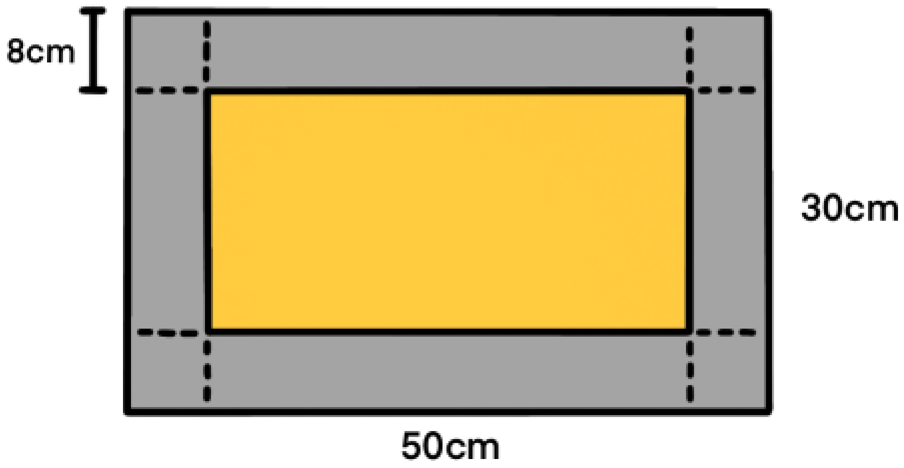
A. A região retangular de $50\ cm$ por $30\ cm$ tem área de $50.30 = 1500\ cm^2$.

Cada “canto” é um quadrado de $8\ cm$ de lado, portanto, com área de $8.8 = 64$ cm². Como são 4 “cantos”, temos $4.64 = 256\ cm^2$.

São necessários para fazer a caixa $1500 - 256 = 1244\ cm^2$ de material.

B. Como queremos tampar a caixa de forma que essa tampa seja exatamente o tamanho da parte aberta, devemos calcular a área em amarelo da figura.

Figura 50 - Cortes da folha



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Desse modo,

$$30 - 8 - 8 = 14\ cm$$

$$50 - 8 - 8 = 34\ cm$$

Logo, para calcular a área desse retângulo amarelo, fazemos:

$$14.34 = 476\ cm^2$$

Portanto, vamos precisar de $1244\ cm^2 + 476\ cm^2 = 1720\ cm^2$ de material.

Discussão com a turma

Durante este momento, vamos discutir as resoluções apresentadas pelos alunos, tentando buscar uma resolução que seja consenso de todos. Podemos discutir, também, questões como quais as condições para obter um paralelogramo.

Possíveis dúvidas e encaminhamentos

Em relação às dúvidas referentes à leitura e à interpretação de texto, procuramos resolver com toda a turma e, caso necessário, individualmente. Sobre Matemática, podem aparecer as seguintes dúvidas:

- Como a região é retangular, calculamos a área $base\ x\ altura$, sendo que, assim, a região retangular de $50\ cm$ por $30\ cm$ tem área de $50.30 = 1500\ cm^2$. São necessários para fazer a caixa $1500\ cm^2$ de material.
- Como a tampa é do mesmo tamanho da caixa, temos que a área da tampa é $50.30 = 1500\ cm^2$. Logo, para fazer a tampa e a caixa, serão necessários $1500 + 1500 = 3000\ cm^2$ de material.

Sobre as dúvidas que aparecerem com maior frequência e que são dúvidas de vários grupos, o ideal é fazer uma interrupção da atividade para esclarecê-las junto de toda a turma.

Possível encaminhamento

Observando a resolução a partir das possíveis dúvidas apresentadas, notamos que está equivocada. Ao perceber o equívoco, conduzimos os alunos a perceberem o erro da seguinte maneira:

- Leia novamente o enunciado.

- Explique o enunciado.

- O que você percebeu?

- Comparando a sua interpretação com a sua resolução, o que podemos notar?

Nesse momento, esperamos que o aluno perceba que a cartolina tem a medida 50 cm por 30 cm, mas a caixa é construída cortando-se os 4 “cantos” da cartolina com a medida de um quadrado de lado, medindo 8 cm, e, na resolução feita pelo aluno, não foram descontados os 4 “cantos”. Assim, pedimos para que ele refaça o item A.

No item B, tomaremos a mesma atitude de indagar aos alunos sobre o enunciado e sua compreensão, com o objetivo de que ele próprio perceba o equívoco na resolução.

Sistematização

Com essa tarefa, esperamos que os alunos possam calcular a quantidade necessária de material para se construir a caixa aberta e a caixa com sua tampa. Para isso, basta calcular a área da superfície da caixa e da tampa. Observando a resolução, notamos que as regiões retangulares são as faces do prisma, assim como a tampa e o fundo da caixa.

Para que os alunos percebam a relação entre a caixa e o cálculo da área da superfície de um prisma, pretendemos questioná-los para que relembrem alguns conceitos e concluam sobre essa relação, por exemplo:

- Olhando para a caixa fechada, temos a representação de um sólido geométrico. Como podemos classificar esse sólido?

Assim, esperamos que os alunos lembrem os conceitos já apresentados e respondam que é um poliedro. Caso não lembrem ou não saibam, comentaremos a definição de poliedro.

<u>Definição de Poliedro[21]:</u> cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas “faces” e a região do espaço limitado por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma outra única região poligonal. A intersecção de duas faces quaisquer é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

- Quais as características desse poliedro? Podemos classificá-lo como?

Nesse instante, se os alunos souberem e lembrarem o que são poliedros e em que grupos podem ser classificados, esperamos que respondam que a caixa

[21] Definição com base em: DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações**. 1ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2011.

representa um prisma de base retangular. Isso porque ele é um poliedro com faces retangulares e, como o retângulo é um caso particular de paralelogramo, as faces laterais são todas paralelogramos e possuem duas bases congruentes e paralelas.

Caso eles não lembrem ou não saibam, comentaremos que os poliedros podem ser classificados, entre outros, como *prismas* ou *pirâmides* e, em seguida, daremos a definição de prisma.

Prisma[22]: é um poliedro convexo que possui duas faces congruentes e paralelas, chamadas "bases", e cujas faces restantes, chamadas "faces laterais", são compostas por paralelogramos. Um prisma reto é aquele em que as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto, as faces laterais são formadas por retângulos. Um prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases. Um prisma regular é aquele cujas bases são polígonos regulares (obs.: alguns autores exigem que um prisma regular também seja reto). Portanto, as bases de um prisma definem o seu nome.

- Sendo a caixa fechada, então, um prisma, como calculamos a área total dele?

Esperamos que os alunos, olhando novamente para a resolução, respondam que calcularam a área de cada face do prisma e depois as somam.

- Então, o que representam os retângulos menores da caixa em relação ao prisma? E os dois retângulos maiores?

Espera-se que os alunos associem os retângulos menores às faces laterais do prisma; e os dois retângulos maiores às bases do prisma.

Podemos dizer: "se vocês calcularam a área de cada retângulo menor e, depois, a área de cada retângulo maior e somaram, sendo esses retângulos, respectivamente, as faces laterais e as bases do prisma, vocês calcularam a área das faces laterais e somaram com a área de cada base. Então, concluímos que a área total da caixa (prisma) é a soma das áreas das faces laterais com as áreas das duas bases".

- Portanto, como podemos escrever uma regra geral que nos permite calcular a área da superfície de um prisma qualquer?

[22] Definição com base em: DANTE, Luiz Roberto. Matemática Contexto e Aplicações. 1ª ed. São Paulo: Editora Ática, 2011.

Aqui, esperamos que os alunos ajudem o professor a escrever no quadro uma regra geral (fórmula) para o cálculo da área da superfície de qualquer prisma.

Área da superfície de um prisma: $área\ total = área\ lateral + área\ das\ bases$
Em que:
Área total: é a área da superfície total.
Área lateral: é a área da superfície lateral.
Área da base: é a área das superfícies das bases.

Atividade 3

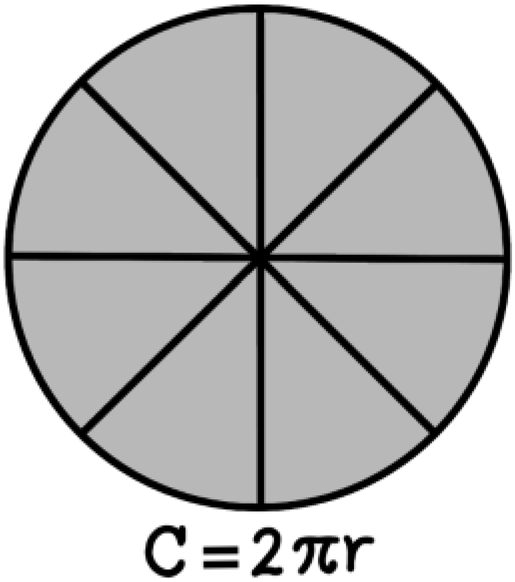
Objetivo específico

O objetivo da atividade é que os alunos consigam determinar a área de um círculo.

Problema

Dona Marta, após muitos anos sem estudar Matemática, decidiu retornar, começando por Geometria, em especial pelo assunto “área de figuras planas”. Dona Marta estava muito curiosa para saber calcular a área de círculos e as informações que tinha eram que o perímetro (comprimento) do círculo era determinado por C=$.2.\pi.r$, em que r é o raio do círculo, que representa metade do diâmetro. Ajude Dona Marta a recordar como podemos calcular a área desse círculo por meio de outra figura plana. Inicialmente, ela dividiu o círculo em 8 partes iguais. Agora, com o conhecimento que você obteve dos problemas anteriores, ajude-a em sua curiosidade.

Figura 51 - Cortes do círculo

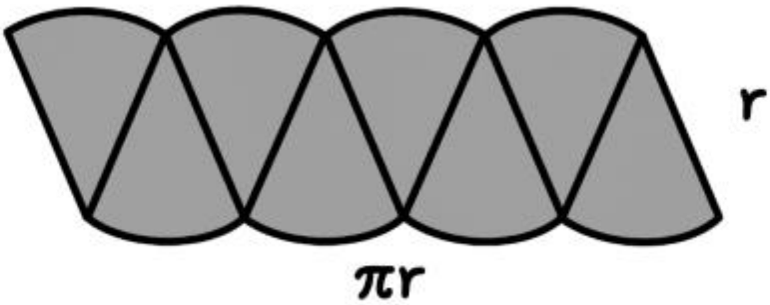


Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Possível resolução

Aqui, esperamos que os alunos, por meio de intervenções nossas, possam observar que podemos formar uma das figuras trabalhadas nos problemas anteriores, que seria o *paralelogramo*. Logo, a área seria dada pelo produto entre $(\pi.r).r$.

Figura 52 - Paralelogramo feito com cortes



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Discussão com a turma

Durante este momento, discutiremos as resoluções apresentadas pelos alunos, buscando uma resolução que seja consenso de todos. Podemos discutir, também, questões como círculo e circunferência, diâmetro, raio e perímetro.

Possíveis dúvidas e encaminhamentos

Em relação às dúvidas referentes à leitura e à interpretação do texto, procuramos resolver com toda a turma e, caso necessário, individualmente. Sobre a Matemática, podem aparecer dúvidas:

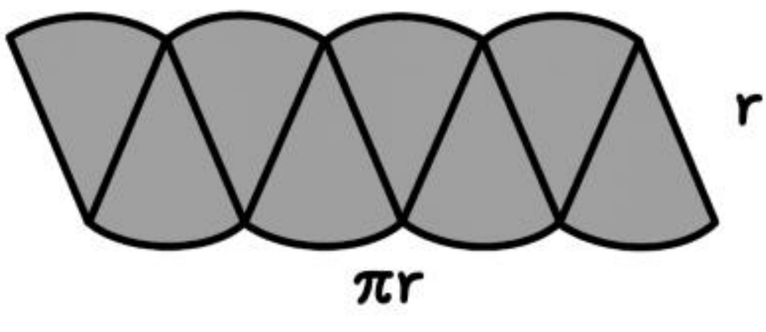
- Quanto à obtenção de uma estratégia de resolução: seguindo a metodologia de ensino através da resolução de problemas, devemos nos portar como mediadores, guiando os alunos com perguntas e dicas, deixando-os com o tempo necessário para pensarem e continuarem suas resoluções.
- O que é o comprimento, o raio de um círculo, qual a diferença entre circunferência e círculo.

Sobre as dúvidas que aparecerem com maior frequência e que são dúvidas de vários grupos, o ideal é fazer uma interrupção da atividade para esclarecê-las junto de toda a turma.

Sistematização

Após o tempo necessário para os alunos realizarem a tarefa, utilizaremos um dos encaminhamentos dados por eles. O esperado é a formação de um paralelogramo, de forma que podemos formalizar a área de um círculo da seguinte maneira:

Figura 53 - Paralelogramo feito com os cortes



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Note que a figura formada se assemelha a um *paralelogramo*, em que a altura é dada pelo raio da circunferência *r* e a base é metade do comprimento da circunferência, ou seja, $2\pi r/2 = \pi r$.

Logo, aplicaremos o produto entre a base do paralelogramo e a altura, sendo assim, obteremos a fórmula da área do círculo como sendo $\pi . r^2$.

Atividade 4

Objetivo específico

Fazer com que os alunos consigam determinar a área da superfície de um cilindro reto.

Problema

(Unesp-2005-adaptada) Considere um cilindro circular reto de altura *x* cm e raio da base igual a *y* cm. Usando a aproximação π=3, determine *x* e *y* no caso em que a área da superfície lateral do cilindro é 450 cm² e a altura tem 10 cm a mais que o raio. Depois, calcule a área total da superfície desse cilindro.

Resolução

Como hipótese, sabemos que *x* = *y + 10.*

A área lateral igual a 450 cm² é encontrada, depois de planificado o cilindro, calculando a área do retângulo que tem base medindo *2πr (*comprimento da circunferência) e altura *x,* logo:

$$A = 2\pi r . h \Rightarrow 450 = 2\pi y . x \Rightarrow 450 = 2.3. y(y + 10) \Rightarrow 75 = y^2 + 10y \Rightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Rightarrow y = 5cm \ e \ x = 15cm.$$

Para calcularmos a área total, basta somarmos à área lateral duas vezes a área da base. Agora, sabemos quanto vale o raio:

$$Área\ total = Área\ lateral + 2. Área\ da\ base \Rightarrow Área\ total = 450 + 2. \pi . 5^2 \Rightarrow Área\ total = 450 + 150 \Rightarrow Área\ total = 600cm^2.$$

Discussão com a turma

Durante este momento, discutiremos com os alunos as resoluções expostas, observando possíveis erros de resolução e, também, diferentes ideias encontradas pelos alunos. Buscaremos um consenso para a parte da formalização.

Possíveis dúvidas e encaminhamentos

Listamos, a seguir, dúvidas que podem surgir e possíveis encaminhamentos que se pode dar a elas:

- O que é um cilindro? – É um corpo roliço, de diâmetro igual em todo o seu comprimento[23]. Ex.: lata de óleo, lata de chocolate em pó etc.
- O que é diâmetro? – É uma linha reta que passa pelo centro de um círculo, terminando de ambos os lados na circunferência ou na periferia, e que assim o divide em duas partes iguais[24].
- Qual valor de *y* devemos usar? Como a resolução se encaminhou para uma resolução em que aparece uma equação de grau dois, devemos analisar qual valor encontrado pode atender à situação-problema. Logo, se estamos trabalhando com medidas, tomaremos como solução valores positivos encontrados.

Sobre as dúvidas que aparecerem com maior frequência e que são dúvidas de vários grupos, o ideal é fazer uma interrupção da atividade para esclarecê-las com toda a turma.

Sistematização

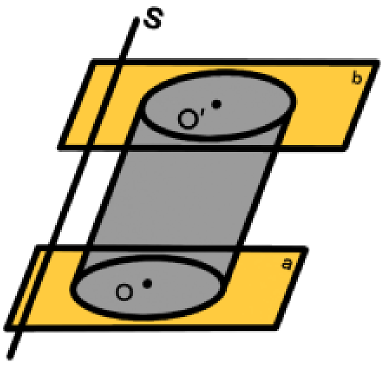
Cilindro circular

Parte-se da constatação de que α e β são dois planos paralelos distintos, há uma reta *s* secante a esses planos e um círculo C de centro O contido em α. Consideremos, aqui, todos os segmentos de reta, paralelos a *s*, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao círculo C e o outro extremo pertencente a β.

[23] Acepção disponível em: http://michaelis.uol.com.br/busca?r=0&f=0&t=0&palavra=cilindro. Acesso em: nov. 2020.

[24] Acepção disponível em: http://michaelis.uol.com.br/busca?id=7XGl#:~:text=1%20Geom%20Linha%20reta%20que,3%20Geom%20Eixo%20da%20esfera. Acesso em: nov. 2020.

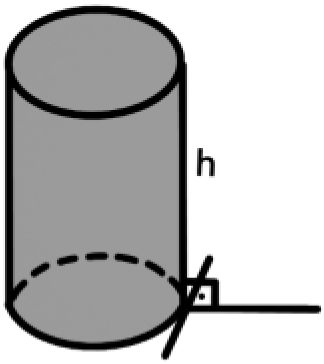
Figura 54 - Cilindro circular



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado de cilindro circular, limitado de bases C e C’, ou, simplesmente, cilindro circular. No cilindro circular reto, a geratriz forma um ângulo de 90º com o plano da base. Nesse cilindro, a medida *h* de uma geratriz é a altura do cilindro.

Figura 55 - Cilindro reto

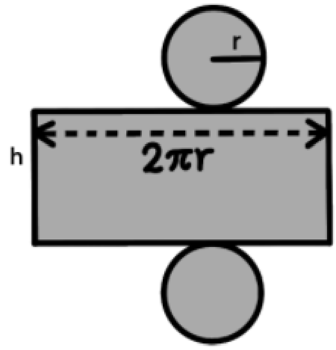


Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Planificação de um cilindro circular reto

A planificação de um cilindro circular reto é composta por um retângulo de comprimento $2\pi r$ e altura h (que determina a superfície lateral) e por dois círculos de raio r (que determinam a base).

Figura 56 - Planificação do cilindro



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

A área lateral de um cilindro reto é a área do retângulo, que determina a superfície lateral, isto é:

$$Área\ lateral = 2\pi rh.$$

A área total de um cilindro reto é a soma da área lateral com as áreas das bases, ou seja:

$$Área\ total = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow Area\ total = 2\pi r(h + r).$$

Assim, podemos retomar a atividade para que os alunos comparem os resultados encontrados com a formalização.

Atividade 5

Objetivo específico

Pretendemos que os alunos consigam determinar a área da superfície de um cone reto.

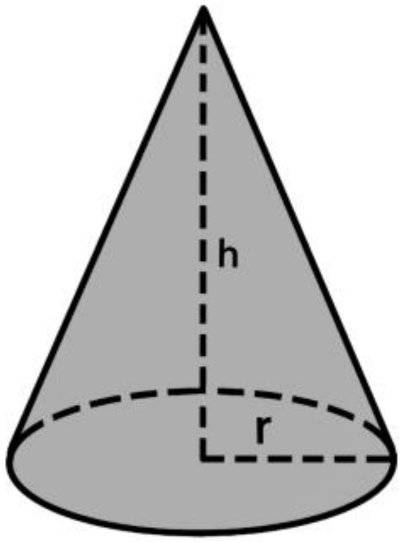
Problema

Qual a quantidade de cartolina necessária para confeccionar uma miniatura de chapéu de festa de aniversário, que tem um formato de cone reto, com 12 cm de altura e raio da base medindo 5 cm? (Considere π=3,14).

Resolução

Temos a seguinte situação:

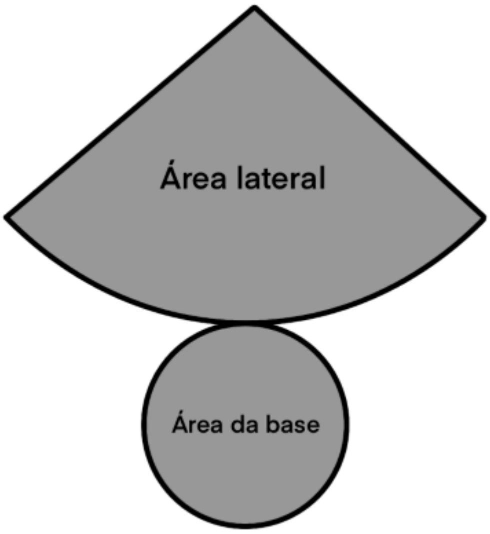
Figura 57 - Cone reto



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Em que h = 12 e r = 5. Para resolver o problema, devemos encontrar a área lateral da superfície do cone. Planificando o cone, teremos:

Figura 58 - Planificação do cone



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Para a área lateral, observamos parte de uma circunferência de raio *g*. Para determinarmos o valor de *g,* observamos, pela Figura 1, que podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow g^2 = 144 + 25 \Rightarrow g^2 = 169 \Rightarrow g = \pm 13$$

Por se tratar de uma medida, consideramos o valor de *g* = 13.

Assim, a área delimitada por esse setor pode ser encontrada por meio de uma regra de três simples:

$2\pi g$ _______ $\pi . g^2$

$2\pi r$ _______ A_l

$\Longrightarrow$ O comprimento do arco da circunferência está para a sua área assim como o comprimento do arco do setor está para a área do setor.

$$2\pi g . A_l = 2\pi r . \pi g^2 \Rightarrow 2.3{,}14.13.\ A_l = 2.3{,}14.5.3{,}14.13^2 \Rightarrow A_l = \frac{16662{,}724}{81{,}64} \Rightarrow A_l = 204{,}1\ \mathrm{cm}^2$$

Consequentemente, temos que a quantidade de cartolina necessária para confeccionar essa miniatura de chapéu de festa é 204,1 cm².

Discussão com a turma

Neste momento, discutiremos com os alunos as resoluções expostas, observando possíveis erros de resolução e, também, diferentes ideias encontradas pelos alunos. É interessante que haja consenso para a parte da formalização.

Possíveis dúvidas e encaminhamentos

Listamos, a seguir, dúvidas que podem surgir e seus possíveis encaminhamentos:

- O que é um cone?[25] – É um sólido, de base circular ou elíptica, que diminui uniformemente seu diâmetro, terminado em ponta.
- Como planificar um cone? – Podemos mostrar um cone confeccionado com cartolina para que os alunos tenham ideia de como é a sua planificação.

[25] Acepção encontrada em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/cone. Acesso em: nov. 2020.

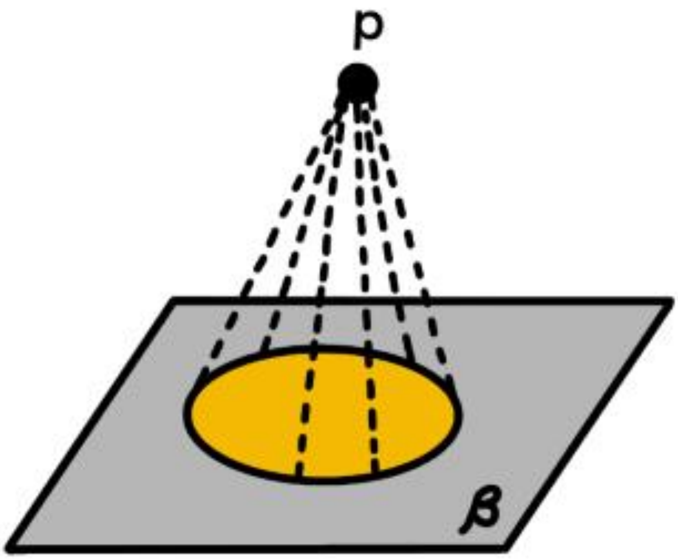
Sobre as dúvidas que aparecerem com maior frequência e que são dúvidas de vários grupos ou de diferentes alunos, o ideal é fazer uma interrupção da atividade para esclarecê-las junto de toda a turma.

Sistematização

Cone

Ao estudarmos Geometria, deparamo-nos com várias situações geométricas. Alguns sólidos possuem origens e fundamentos em sua formação, um deles é o cone, figura presente no cotidiano. Tem-se um círculo de centro O e raio R, no plano B, e um ponto P fora do plano. O cone será formado por segmentos de reta unindo o ponto P aos pontos do círculo (de centro O).

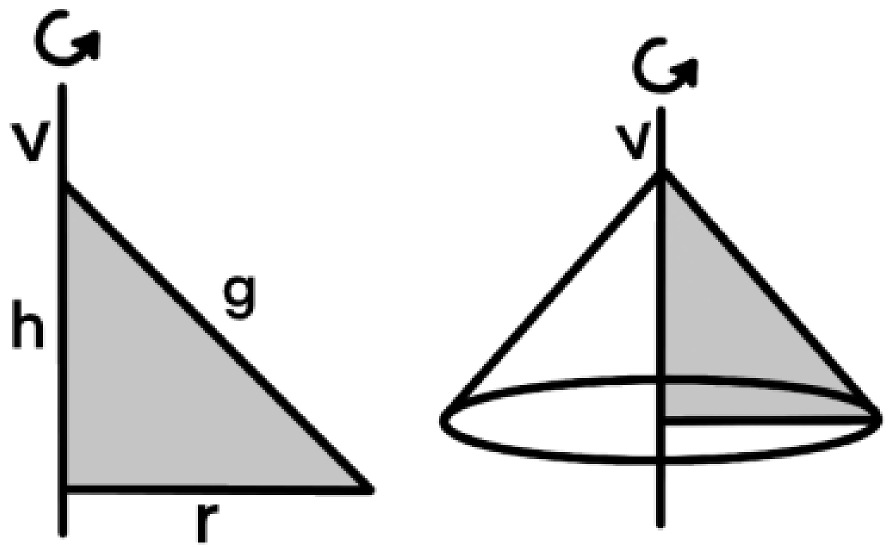
Figura 59 - Cone circular



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

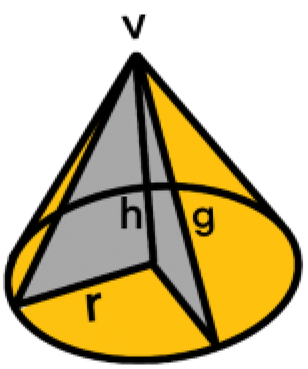
Outra forma de construir o cone é por meio da revolução do triângulo retângulo sobre um eixo vertical:

Figura 60 - Cone de revolução



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

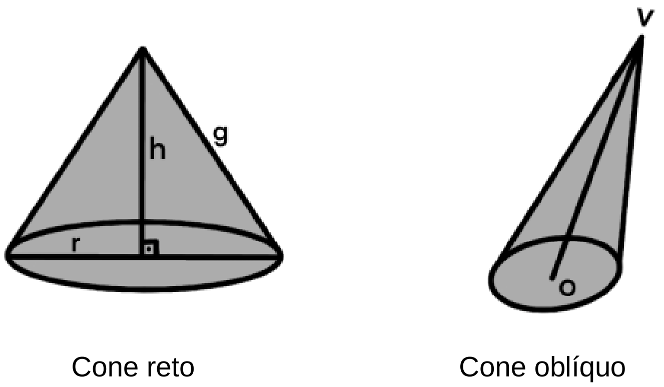
Figura 61 - Elementos do cone



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

- *g: geratriz do cone*
- *h: altura do cone*
- *r: raio da base*
- *v: vértice*

Figura 62 - Classificação do cone



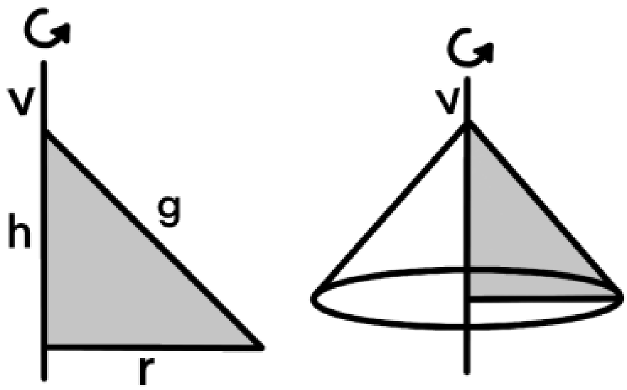
Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

No cone reto, podemos aplicar a relação de Pitágoras para o cálculo da geratriz (g), do raio da base (r) e da altura (h), pois vimos que o cone pode ser formado por meio da revolução do triângulo retângulo. Comparando os elementos do cone aos do triângulo retângulo, temos:

- *Geratriz no cone, hipotenusa no triângulo.*
- *Altura no cone, cateto no triângulo.*
- *Raio da base no cone, cateto no triângulo*.

Uma importante relação no cone é dada por: $r^2 + h^2 = g^2$. Observe a figura:

Figura 63 - Relação no cone

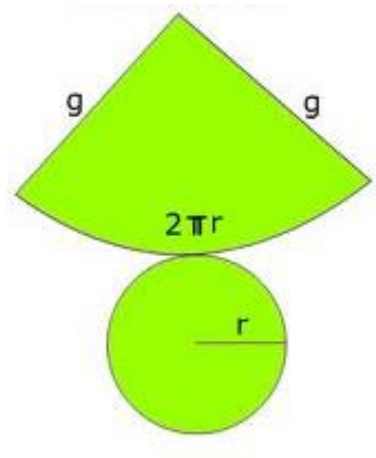


Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

Planificação de um cone reto

A planificação da superfície de um cone reto é composta por um círculo de raio *r* (que determina a base) e um setor circular (que determina a superfície lateral), cujo arco tem comprimento *2πr* e o raio é a geratriz *g* do cone.

Figura 64 - Cone planificado



Fonte: compilação pelo próprio autor (2020)

A área lateral de um cone reto é calculada por meio da seguinte regra de três:

Comprimento do arco do setor	Área
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	Área lateral

Logo, $\text{Área lateral} = \pi rg$.

A área total de um cone reto, então, é a soma da área lateral com a área da base, isto é:

$$A_t = A_l + A_b \Rightarrow A_t = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow A_t = \pi r(g + r)$$