UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE MEDIDAS RESUMO NO ENSINO MÉDIO

ROBERTO RANGEL ALVES

ORIENTADORA: PROFA. DRA. ROSA ELVIRA QUISPE CCOYLLO

Vitória - ES
2021

Roberto Rangel Alves

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE MEDIDAS RESUMO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Professora Doutora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Vitória - ES
2021

Roberto Rangel Alves

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE MEDIDAS RESUMO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Professora Doutora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.

Membros da Banca:

Profª. Drª. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo

(Orientadora – Universidade Federal Do Espírito Santo. UFES)

Prof. Dr. Fábio Corrêa de Castro.

(Examinador – Universidade Federal Do Espírito Santo. UFES)

Prof. Dr. Juan Elmer Villanueva Zevallos.

(Examinador- Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT)

Vitória - ES
2021

AGRADECIMENTOS

Uma “ode” a todos que contribuíram direta e indiretamente para que esse projeto fosse realizado. Confesso que foram dias e noites trabalhando com afinco e dedicação para a consolidação do mesmo, no entanto, sem o apoio, a parceria e a compreensão de determinadas pessoas, eu não teria me esmerado tanto na concretização desse ensaio. Portanto, reitero que esta dissertação é minha, mas o mérito é de vocês, leitores, colegas e familiares dos quais não poderei deixar de citá-los, mas o principal, é daquele que está acima dos céus, minha rocha eterna e meu alicerce nos momentos de alegria e de dor.

Senhor, meu Deus, estou me dando conta que estamos chegando ao fim. Fim de mais uma etapa, que, diga-se de passagem, foi de grande crescimento profissional e pessoal.

Agradeço de coração a minha família em especial a minha esposa Bruna e aos meus pais, que sempre acreditaram em mim, agradeço também, de forma especial, a todos os meus colegas de trabalho que conviveram comigo em minhas angústias e alegrias e aos meus alunos.

Não posso deixar de agradecer e falar da minha orientadora, professora Dr. Rosa, que pacientemente me atendeu e ajudou no desenvolvimento dessa dissertação.

Aos demais professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, em especial aos que atuam no PROFMAT: Dr. Florêncio, Dr. Valmecir, Dr. Domingos, Dr. Moacir, Dra. Magda, pelo conhecimento compartilhado.

Ao meu amigo Breno pelo tempo compartilhado a troca de ideias e aos meus alunos que foram de suma importância para construção desse trabalho.

Aos meus colegas e amigos do PROFMAT, pelos momentos de alegria, de apoio e incentivo, em especial aos meus amigos Andressa e Muriel.

Construímos muros demais e pontes de menos.

(Isaac Newton)

RESUMO

Este trabalho foi idealizado para minimizar a defasagem de aprendizagem dos alunos em Matemática. Este, de forma simples e objetiva, aborda um dos conteúdos da disciplina de Matemática do Ensino médio: Introdução à Estatística, conteúdo, muitas vezes, trabalhado nas escolas de forma precária, devido à falta de recursos didáticos e pedagógicos para auxiliarem o educador. Assim, este traz uma abordagem dinâmica por meio de atividades práticas para o aprofundamento de conceitos, como: moda, média, mediana, desvio padrão, bem como uma análise macro destes conteúdos em alguns livros didáticos. Para findar, uma pesquisa e um jogo são elencados com o intuito de potencializar o processo ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Estatística, Pesquisa de campo, Jogo, Ensino médio.

ABSTRACT

This work was designed to minimize the students learning gap in Mathematics. This, in a simple and objective way, addresses one of the contents of the subject of Mathematics in high school: Introduction to Statistics, content, often worked in schools in a precarious way, due to the lack of didactic and pedagogical resources to assist the educator. Thus, it brings a dynamic approach through practical activities to deepen concepts, such as: fashion, average, median, standard deviation, as well as a macro analysis of these contents in some textbooks. To conclude, a survey and a game are listed in order to enhance the teaching-learning process.

Keywords: Statistics, Field Research, Game, High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Justificativa

A defasagem de aprendizagem dos alunos em Matemática não é uma realidade que permeia unicamente as instituições de ensino brasileiras. Segundo a pesquisadora Sadovsky (SADOVSKY, 2007), o baixo desempenho dos alunos em matemática é uma realidade em muitos países, não só no Brasil. Um fator que pode estar contribuindo para esses penosos resultados, é o ensino tradicional de Matemática que acaba se resumindo em decorar fórmulas e repetir regras mecânicas oferecidas pelas escolas.

Na Matemática é preciso que haja absorção de conceitos básicos, sem a perda de generalizações, detalhando os tópicos mais importantes. Portanto, o processo de ensino-aprendizagem da Matemática deve ser gradual, para que o aluno, ao praticar, aprenda pouco a pouco, tendo uma melhor compreensão de cada tópico, ao invés de apenas memorizar fórmulas.

O aluno deve ser capaz de saber o que, como e para que ele está calculando. Essa capacidade não é de simples compreensão. Há uma necessidade de amadurecimento do estudante, de ele enxergar o que tem por trás das fórmulas e números, saber interpretá-las. Segundo Carzola (CAZORLA, MAGINA, *et al.*, 2017):

> Uma pesquisa científica requer a produção de um conhecimento novo, mas na escola também é realizada a replicação de uma pesquisa, a qual permite que os alunos compreendam um determinado fenômeno e suas variações. Para o psicólogo e pesquisador francês Vergnaud (1994), para que haja aprendizagem é preciso que a criança, por meio de suas ações, construa, mesmo que apenas em parte, esse conhecimento. Só dessa maneira ela se apropria dele.

Dessa forma, professores devem levar em consideração experiências anteriormente vivenciadas por seus estudantes, desde que tenham relação com o conteúdo ministrado. Segundo Paulo Freire (FREIRE, 1996), os alunos não são um depósito que devem ser preenchidos pelo professor, cada um, juntos, podem aprender e descobrir novas dimensões e possibilidades em sua realidade, pois o educador é somente o mediador no processo de ensino-aprendizagem, aprendendo junto com seu aluno.

No Ensino Fundamental, os conteúdos de Estatística, Probabilidade e Combinatória são apresentados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (BRASIL, 1997), no bloco denominado Tratamento da Informação. Segundo os PCN, a finalidade deste bloco é levar o aluno a: construir procedimentos para coletar, organizar e comunicar dados; utilizar tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente no cotidiano; calcular algumas medidas de tendência central; estabelecer relações entre acontecimentos; fazer previsões e observar a frequência com que ocorre um acontecimento.

Uma ideia de Estatística ou Tratamento de Informação já é elucidada nas últimas séries do Ensino Fundamental, por exemplo, é ensinado aos alunos como analisar um gráfico ou uma tabela e como analisar os cálculos das medidas de tendência central (média, moda e mediana). Com a nova BNCC[1] (BRASIL, 2018), os conceitos de Estatística devem ser apresentados desde as séries iniciais. Mas como isso será transmitido para crianças que acabaram de ser alfabetizadas? Como salienta Lopes (2008):

> Algumas dificuldades encontradas estão relacionadas com a falta de recursos didáticos e pedagógicos que auxiliem o educador na elaboração de estratégias metodológicas para trabalhar esses conteúdos em sala de aula e o despreparo dos professores para lidar com os conteúdos estatísticos, pois parte destes possui pouco ou nenhuma formação sobre os mesmos. (...) a formação dos professores, atualmente, não incorpora um trabalho sistemático sobre estocástica[2], dificultando a possibilidade destes profissionais desenvolverem um trabalho significativo com essa temática nas salas de aula da educação básica.

Cazorla (CAZORLA e SANTANA, 2009) afirma que os atuais professores que lecionam Matemática na Educação Básica (pedagogos e licenciados), quando estudaram Estatística e Probabilidades nos cursos de Licenciatura em Pedagogia

---

[1] Base Nacional Comum Curricular.
[2] Processos que não estão submetidos senão a leis do acaso.

(Magistério Superior) ou de Licenciatura em Matemática, não viram este conteúdo como objetos a serem ensinados. Somente após a implantação da Estatística no currículo de diversas universidades é que esses cursos começaram a realizar adequações, colocando disciplinas direcionadas para o desenvolvimento desta disciplina no Ensino Fundamental.

Motivações e Objetivos

Tratando-se de informação no mundo atual, é possível afirmar que este é o período mais medível da história, onde quase tudo pode ser transformado em números, daí a necessidade de se utilizar ferramentas estatísticas para a análise de dados. Isso é o que o aluno deve compreender desde o Ensino Fundamental.

> Por meio de sua curiosidade a criança é levada a questionar, investigar e descobrir coisas novas. Ela age de forma similar à investigação científica ao levantar questionamentos a partir de suas observações. Cabe a nós, professores da escola, aproveitar a curiosidade infantil como um primeiro elemento na condução de uma pesquisa estatística, a qual pode ajudar na compreensão de aspectos do mundo que a cerca. Aguçar a identificação das dúvidas tem, portanto, um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento estatístico das crianças. (CAZORLA, MAGINA, *et al.*, 2017, p. 20).

Para tornar o aprendizado da teoria estatística interessante e significativo ao aluno, o professor deve trazer exemplos que utilizam ferramentas estatísticas do seu cotidiano, como gráficos e/ou tabelas com informações sobre temas habituais, a saber: saúde ou educação; cálculos de renda média por domicílio do seu município, para saber se está acima ou abaixo da média; peso médio dos alunos da escola; etc. Essa pode ser uma forma de incentivar o aluno a interagir mais com as atividades propostas pelo(a) professor(a). Além disso, este pode tornar as aulas mais atrativas com atividades práticas, como uma pesquisa ou um jogo, temas que, de fato, serão abordados mais adiante.

Nesse trabalho será construído e estudado criteriosamente o conceito de medidas-resumo como meio de resolução de problemas do cotidiano. Após a definição formal de medidas-resumo, serão propostas atividades que permitirão ao aluno ter a percepção de todo o processo dedutivo que leva a aprender o conteúdo em questão, possibilitando a aplicação deste em outras situações.

Existem inúmeros trabalhos publicados na rede Profmat que abordam o ensino de Estatística como tema principal, mas são poucos os que apresentam propostas de atividades. Dentre esses destacam-se, por exemplo: o trabalho do Alan de Oliveira Novais, *Princípios Andragogicos e a Aprendizagem de Estatística no Ensino Fundamental*, da rede Profmat Ilhéus-BA, no qual é relatado como escolher e planejar uma atividade; a dissertação *Estatística: Uma abordagem diferenciada no ensino médio,* da Gilciane de Quevedo Flôres da rede Profmat Santa Maria- RS, onde é proposto a elaboração de um questionário como atividade de aprendizado; e o trabalho do Gilson Ferreira Meireles, *Um Conjunto de atividades para o ensino de Estatística para o ensino médio*, da rede Profmat Belém-PA, que apresenta um conjunto de atividades que objetivam facilitar o aprendizado do conteúdo de estatística, como lista de exercícios, criação de gráficos e tabelas, e cálculos das medidas-resumo.

A diferença dos trabalhos supracitados, neste trabalho serão propostas atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula sobre uma ótica diferente. Além disso, se irá aplicar e comparar práticas diferentes de ensino que tratam um mesmo assunto: a primeira, o ensino formal ou tradicional junto à resolução de uma sequência de exercícios; a segunda, o desenvolvimento de uma atividade lúdica em sala de aula, ou aplicação de um jogo; e a terceira, a realização de uma pesquisa por parte dos alunos, sendo assessorados pelo professor. No final são comparados os desempenhos das diferentes turmas, que receberam uma (única) dessas práticas de ensino, em uma avaliação sobre o tema abordado em comum.

Objetivo Geral

Essa pesquisa tem por objetivo desenvolver e aprofundar os conceitos de Estatística básica para melhorar o ensino-aprendizagem no Ensino Fundamental e Médio, assim como tornar as aulas sobre o assunto mais interessantes.

Objetivos Específicos

Contextualizar o conteúdo de Estatística básica por meio de exemplos e exercícios sobre Medidas de Posição, como: média e mediana; e Medidas de Dispersão, como: desvio padrão. Objetiva-se também, propor uma pesquisa estatística e apresentar aos alunos o jogo Max-Min.

Metodologia de desenvolvimento

Desta forma, busca-se mostrar neste trabalho, de maneira simples e objetiva, o estudo da Estatística básica, um dos conteúdos mais abordados nas aulas de Matemática do Ensino Médio, bem como as medidas-resumos, conceituando e exemplificando cada um dos itens. Dentre os conteúdos abarcados, destacam-se: Medidas de Posição com Tendência Central (média aritmética, média ponderada, mediana e moda) e Medidas de Dispersão (amplitude de um conjunto de dados, desvios médio e mediano, variância, desvio padrão, coeficiente de variação e erro padrão). No final é sugerida a aplicação de atividades para o aprofundamento de definições discutidas neste trabalho, com atividades práticas, como: o desenvolvimento de uma pesquisa semelhante à realizada pelo professor Daniel Ânderson Müller (MÜLLER e NUNES, 2016) em 2014 para alunos da 2ª série do Ensino Médio em uma escola do Rio Grande do Sul, e a dica de utilização de um jogo pedagógico em sala de aula.

Organização do Trabalho

É feita uma introdução sobre o ensino da Estatística no Ensino Fundamental e Médio, abordando a dificuldade encontrada pelo professor em lecionar para as séries iniciais, bem como uma pequena abordagem do que será tratado nos outros capítulos deste trabalho.

No capítulo 1 são apresentados alguns conceitos básicos da Estatística para familiarização dos termos mais usados nesse trabalho.

No capítulo 2 é apresentado os conceitos e exemplos de atividades sobre medidas de posição.

No capítulo 3 introduz-se o conceito de variabilidade, além de outras definições e exemplos de atividades sobre medidas de dispersão.

No capítulo 4 é discutido o conteúdo de Estatística nos livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio e a importância de se ter uma quantidade maior de exercícios.

Finalmente, no capítulo 5, são apresentadas propostas de atividades práticas para o cálculo das medidas-resumo.

CAPÍTULO 1

1. ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DE ESTATÍSTICA

Segundo Vieira (VIEIRA, 2015, p. 1), a **estatística** é a ciência que fornece os princípios e a metodologia para coleta, organização, apresentação, resumo, análise e interpretação de dados.

1.1. População e Amostra

Uma **população** é um conjunto de pessoas, itens ou eventos semelhantes sobre os quais se pretende estudar ou fazer inferências[3].

Nem sempre é possível ou conveniente examinar todos os membros de uma população inteira. Por exemplo, se quisermos saber quantos peixes existem no mar em determinado momento? É sabido que esse número é finito, mas é tão grande que pode ser considerado infinito ou não medível para qualquer finalidade prática. Logo, quem faz pesquisas sobre peixes marítimos, trabalha necessariamente com um conjunto de peixes, tomado a partir dessa população. Este subconjunto de população é chamado de amostra.

Uma **amostra** é um subconjunto de pessoas, itens ou eventos semelhantes de uma população maior, que é coletado e analisado para fazer um estudo ou inferência. Para termos uma boa representação da população, uma amostra deve ser coletada de forma aleatória e ser adequadamente grande.

1.2. Variáveis e Dados

Uma **variável** é uma condição ou característica dos elementos da população. A variável pode assumir valores diferentes[4] em diferentes elementos. Enquanto **dados** são os valores coletados da variável em estudo.

---

[3] Inferência Estatística é fazer afirmações sobre características de uma população, baseando-se em resultados de uma amostra.
[4] O mesmo nome de “variável” já desvenda seu significado.

Por exemplo, são consideradas variáveis: sexo, idade, peso, altura, e escolaridade das pessoas (população). Agora qualquer informação obtida sobre essas variáveis, são dados. Então, se são fornecidas informações de uma pessoa como: sexo feminino, 27 anos, 66kg, 1,73m e que é formada em direito, se terá dados sobre essa pessoa.

1.3. Tipos de Variáveis

As variáveis são classificadas em dois tipos: qualitativas ou categorizadas e quantitativas ou numéricas.

A variável é **qualitativa** ou categorizada quando se distribui em categorias, ou seja, em classes diferentes. A variável qualitativa é expressada por meio de palavras. Recebemos informação sobre uma variável qualitativa quando perguntamos, por exemplo: para que time de futebol você torce? Você está fazendo estágio?

A variável é **quantitativa** ou numérica quando resulta de um processo de contagem ou medição. A variável quantitativa é expressada por meio de números. Recebemos informação sobre uma variável quantitativa quando perguntamos, por exemplo: Quanto custou esse sorvete? Quantas páginas tem esse livro?

Há ainda subclassificação desses dois tipos de variáveis (VIEIRA, 2015), porém não serão abordadas nesse trabalho.

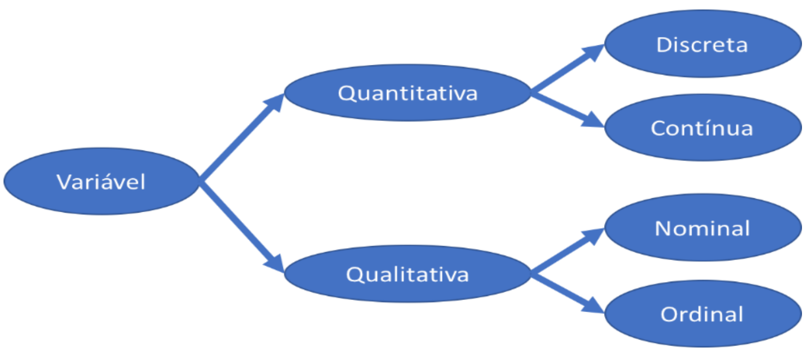


Figura 1 – Tipos de variáveis
Fonte: https://blog.fastformat.co/estatistica-basica-tipos-de-variaveis/

CAPÍTULO 2

2. MEDIDAS DE POSIÇÃO

2.1 Apresentação de Dados: Tabelas e Gráficos

Neste capítulo, a princípio, serão apresentados alguns exemplos de tabelas e gráficos, que são formas de apresentar dados. Isto servirá de base para a teoria que virá em seguida: medidas de Posição ou medidas de Tendência Central.

Um conjunto de dados pode ser resumido por tabelas de frequência e gráficos, fornecendo muito mais informações sobre o comportamento de uma variável do que os (próprios) dados, sem estarem agrupados. Veja o exemplo abaixo, onde foi realizada uma pesquisa com 120 funcionários para saber a quantidade de filhos de cada um.

Número de filhos dos funcionários da empresa X.	Frequência
0	30
1	50
2	20
3	15
4	5
Total	120

Tabela 1 – Frequência de número de filhos
Fonte: O autor (2020).

Podemos agora utilizar um gráfico para representar a mesma situação descrita acima: o gráfico de setores (ou gráfico de pizza). Pela imagem (Figura 2) representando os dados da Tabela 1, podemos perceber que as informações são expostas de forma mais clara, o que podendo facilitar a sua compreensão, pois quem tem a maior frequência (maior porcentagem) tem a maior fatia da pizza, visualizando melhor a situação.

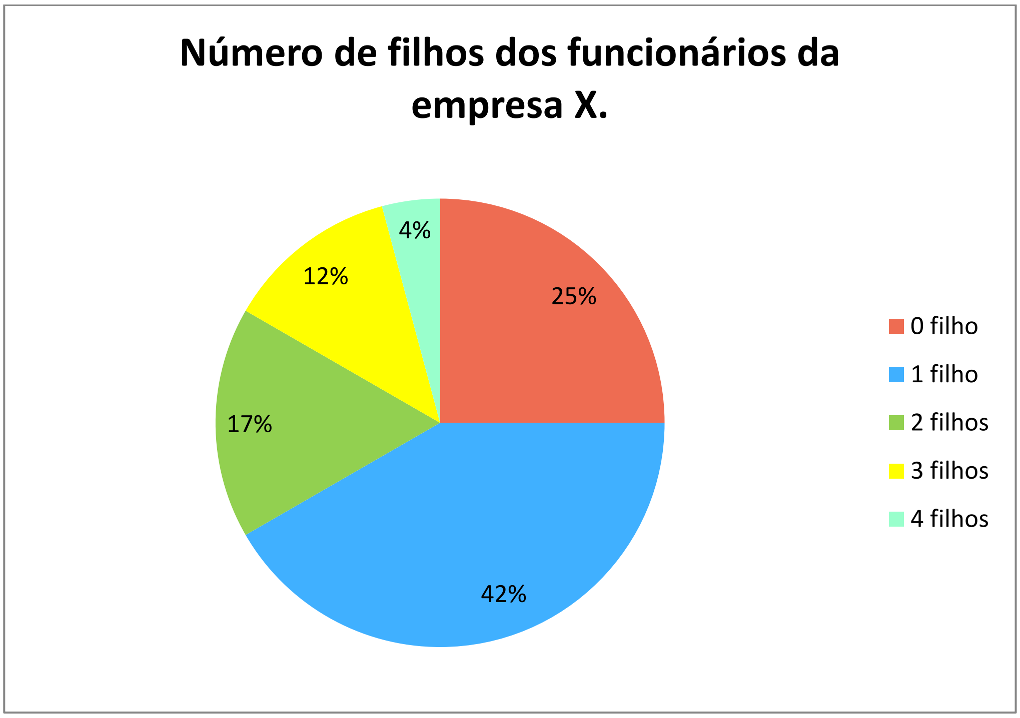


Figura 2 – Gráfico de Pizza
Fonte: O autor (2020).

Uma outra forma de apresentar esses mesmos dados é utilizando gráfico de barras[5].

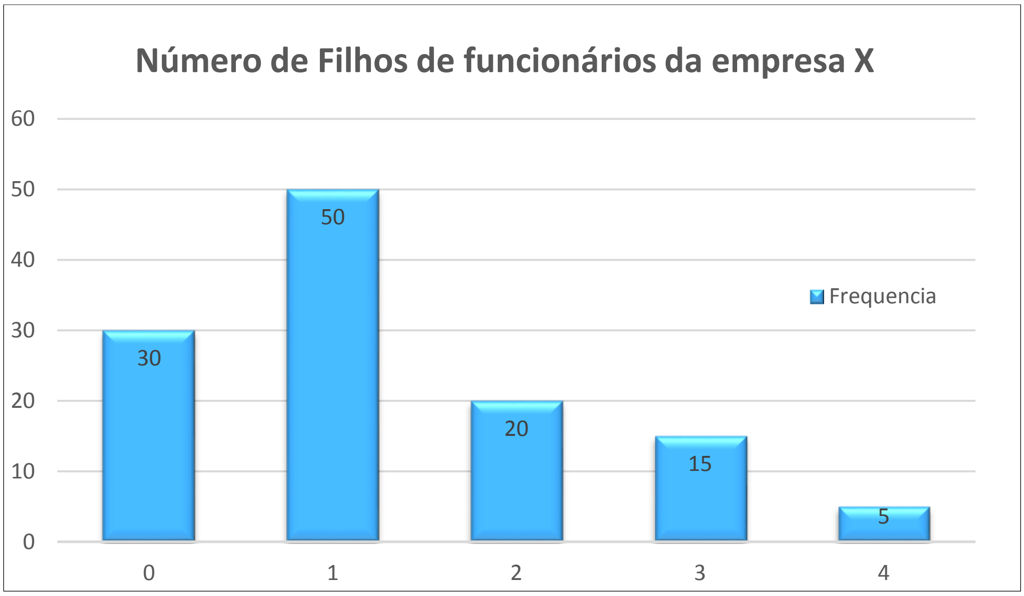


Figura 3 – Gráfico de Barras
Fonte: O autor (2021).

[5] O editor de planilhas Excel, da Microsoft, é uma ferramenta útil para fazer tabelas e gráficos.

Agora, tratando-se de um conjunto de dados, estes podem ser resumidos utilizando um ou alguns valores que irão representar a série toda de valores, salienta Bussab e Moretin (BUSSAB e MORETIN, 2017, p. 35).

> Muitas vezes, queremos resumir ainda mais estes dados, apresentando um ou alguns valores que sejam representativos da série toda. Quando usamos um só valor, obtemos uma redução drástica dos dados. Usualmente emprega-se uma das seguintes medidas de posição (ou localização) com tendência central: média, mediana ou moda.

2.2. Média aritmética

De acordo com Bussab e Moretin (BUSSAB e MORETIN, 2017, p. 35) a média aritmética é a soma das observações[6] dividida por sua quantidade.

Uma possível precursora da média aritmética é a *mid-range* (média de dois valores extremos), usada na astronomia árabe entre os séculos IX e XI, e também na metalurgia e na navegação. Entretanto há registros ainda mais antigos com possíveis cálculos usando média aritmética. De acordo com um texto de Waterfield, Robin (1995) referente ao século IV:

> Existem potenciais referências ainda mais antigas. Há registros de que por volta de 700 a.C., comerciantes e transportadores concordaram que o dano à carga e ao navio (sua contribuição em casos de danos no mar) deveria ser dividido igualmente entre eles. Isso deve ter sido calculado usando média, embora pareça não haver registros diretos do cálculo.

Segundo Eisenhart e Churchill (1971), no século XVI[7] ocorre o primeiro registro da ampliação da média aritmética de dois para n casos[8], para realização de estimativas. Daí em diante, a média, gradualmente se tornou um método comum para reduzir erros de medidas em várias áreas. Por exemplo, astrônomos que queriam saber o valor real de medições imprecisas, como a posição de um planeta

---

[6] As observações consideradas são quantitativas ou numéricas.
[7] Extraido de “The Development of the Concept of the Best Mean of a set of Measurements from Antiquity to the Present Day”.
[8] Aqui n representa um número natural finito.

ou o diâmetro da lua, utilizavam a média de vários valores medidos. Eles assumiram que o número de erro era relativamente pequeno em comparação ao total de valores medidos. Desta forma, o método de se tirar a média para reduzir os erros de observação foi, principalmente, desenvolvido na Astronomia.

A seguir será apresentada uma definição formal sobre média aritmética juntamente com a exemplificação e resolução de algumas situações-problemas, além da utilização e aplicação de dois teoremas, que englobarão a teoria.

Definição 1: Seja X uma variável aleatória com os seus n valores observados, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (distintos ou não). A **média aritmética** de X, denotada por $\bar{x}$, é definida como o quociente da divisão entre a soma dos n valores observados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e n. Pode ser escrita da forma seguinte:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Exemplo 1:

Contou-se o número de erros de impressão da primeira página de um jornal durante uma semana, obtendo os seguintes resultados:

0, 1, 2, 3, 0, 0, 1.

Determinar a média desses erros.

Solução:

Sendo sete, o número de valores de erros coletados (n = 7), respectivo a cada dia da semana, a média aritmética por definição é calculada da forma:

$$\bar{x} = \frac{0+1+2+3+0+0+1}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

Portanto, em média, houve um erro por dia na primeira página do jornal nesta semana.

Exemplo 2:

Suponha que parafusos a serem utilizados em tomadas elétricas são embalados em caixas rotuladas: “contém 100 unidades”. Em uma construção, 10 caixas de um lote tiveram o número de parafusos contados, fornecendo os valores: 98, 102, 100, 100, 99, 97, 96, 95, 99, 100. Para essas 10 caixas qual seria o número médio de parafusos?

Solução:

Calculando a média aritmética dos dez valores fornecidos:

$$\bar{x} = \frac{98+102+100+100+99+97+96+95+99+100}{10} = \frac{986}{10} = 98{,}6$$

Logo, em média há 98,6 parafusos por caixa, um número abaixo do especificado.

No Exemplo 2, podemos observar como o cálculo da média ajuda a ter uma percepção da diferença entre o número de parafusos rotulado e o número que em média cada caixa contém. Com isso, a empresa quando alertada, pode verificar o erro e solucionar o problema.

Exemplo 3:

Figura 4 – Número de casos da Covid- 19 na Itália
Fonte: JHU CSSE COVID-19 Data

O gráfico acima (Figura 4) representa o número de casos de Covid-19 na Itália, por dia, no período de março a inícios de maio de 2020.

Como pode ser observado no gráfico, a fase mais crítica da pandemia de Covid-19 na Itália foi no período entre março e abril de 2020. O ponto máximo do número de novos casos foi atingido em 21 de março, com 6557 novos casos. Devido às medidas de proteção, o distanciamento e isolamento social, acredita-se que o número de casos foi caindo em meados de abril. Utilize os dados da tabela abaixo para determinar a média de casos por dia no período de pico da doença.

Data	Número de casos	Data	Número de casos
16/mar	3233	30/mar	4050
17/mar	3526	31/mar	4053
18/mar	4207	01/abr	4782
19/mar	5322	02/abr	4668
20/mar	5986	03/abr	4585
21/mar	6557	04/abr	4805
22/mar	5560	05/abr	4316
23/mar	4789	06/abr	3599
24/mar	5249	07/abr	3039
25/mar	5210	08/abr	3836
26/mar	6153	09/abr	4204
27/mar	5959	10/abr	3951
28/mar	5974	11/abr	4694
29/mar	5217	12/abr	4092

Tabela 2 – Número de novos casos COVID-Itália
Fonte: O autor (2020).

Solução:

Como o período em questão é compreendido por 28 dias (n = 28) e a soma das observações resultam em 131616 novos casos, logo,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{131616}{28} \cong 4701$$

O que revela o quanto a Covid-19 afetou a Itália em média por dia, no período de pico: 4701 novos casos, aproximadamente.

De acordo com Morgado e Carvalho (MORGADO e CARVALHO, 2015, p. 175) temos o Teorema 1, que evidencia a média como uma **medida de tendência central**, isto é, a média é um valor que se encontra na parte central do conjunto de dados, quando ordenados. Portanto, existem valores maiores (ou iguais) e outros menores (ou iguais) que a média.

Teorema 1: Se a média aritmética dos valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ é igual a $\bar{x}$, então pelo menos um dos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é maior do que ou igual a $\bar{x}$.

Demonstração:

Com efeito, vamos supor[9] que cada um dos valores é menor que a média, isto é,

$$x_1 < \bar{x}, \quad x_2 < \bar{x}, \dots, \; x_n < \bar{x}$$

Logo ao somar os valores do lado esquerdo e do lado direito de cada uma das desigualdades, respectivamente, temos,

$$x_1 + \; x_2 + \cdots \; + x_n < n\,\bar{x}$$

E dividindo cada lado da desigualdade por *n*, valor positivo, resulta:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} < \bar{x}$$

Isto é, $\bar{x} < \; \bar{x}$, o que é um absurdo.

■

Além disso, devemos mencionar que entre os *n* valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ pelo menos uma das observações é menor do que ou igual à média aritmética. A sua demonstração é análoga à do Teorema 1.

9 Reductio ad absurdum ("redução ao absurdo" em latim), é um tipo de argumento lógico no qual alguém assume uma ou mais hipóteses e, a partir destas, derivasse em uma consequência absurda, o que leva a concluir que a suposição original estava errada.

Exemplo 4:

Mostre que em um grupo de 50 pessoas há sempre, pelo menos, 5 pessoas que nasceram no mesmo mês.

Solução:

Vamos supor que no grupo de 50 pessoas há x_1 pessoas que nasceram no mês de janeiro; x_2 pessoas no mês de fevereiro; e assim sucessivamente.

Mês	**N° de pessoas do grupo que nasceram no mês**
janeiro	x_1
fevereiro	x_2
março	x_3
....	....
dezembro	x_{12}
Total	50

Tabela 3 – Número de pessoas que nasceram no mesmo mês.
Fonte: O autor (2021).

Assim, seriam 12 (doze) o número de valores coletados, respectivo a cada mês do ano. A média aritmética desses valores, por definição, é calculada da forma:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{12}}{12} = \frac{50}{12}$$

Portanto a média do número de pessoas do grupo que nasceram no mesmo mês é de 50/12 $\cong$ 4,1. Agora, pelo Teorema 1, em algum mês do ano, o número de pessoas nascidas naquele mês (sendo um número inteiro) será maior ou igual a 4,1, ou seja, maior ou igual a 5.

Uma consequência imediata do Teorema 1, de acordo com Morgado e Carvalho (MORGADO e CARVALHO, 2015, p. 176), é o chamado *Princípio das gavetas de Dirichlet* [10] ou *Princípio da casa dos Pombos* [11], cujo enunciado segue a continuação.

Teorema 2: Seja n um número natural. Se $n+1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

Demonstração:

A princípio, vamos supor que há $n+1$ objetos e n gavetas. De forma análoga à resolução do exercício 4, vamos supor que são colocados x_1 objetos na primeira gaveta; x_2 objetos na segunda gaveta; e assim sucessivamente até a enésima gaveta, onde são colocados x_n objetos. Veja que a soma total do número de objetos é n+1, logo,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Portanto, a média aritmética do número de objetos por gaveta é $\frac{n+1}{n}$. Do Teorema 1, existe uma gaveta que tem um número de objetos (valor inteiro) maior ou igual a $1 + \frac{1}{n}$, que é maior do que 1. Logo, em alguma gaveta haverá um número de objetos maior do que 1.

Todavia, se temos m objetos ($m > n+1$) e p gavetas ($p \leq n$), então a média de objetos por gaveta será $\frac{m}{p}$, maior do que 1.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_p}{p} = \frac{m}{p} > \frac{n+1}{p} \geq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Portanto, do Teorema 1, existirá uma gaveta que receberá mais de um objeto.

$\blacksquare$

[10] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemão.

[11] Seja dada uma casa de pombos com n buracos e suponha que haja m pombos querendo ocupá-los. Se m > n, então algum buraco deverá ser ocupado por mais de um pombo.

Exemplo 5:

Cinco pontos são tomados sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é menor do que ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução:

Dado o quadrado de lado 2, vamos dividir este em quatro quadrados de lado 1, ligando os pontos médios dos lados opostos. Pensando nos pontos como objetos e os quadrados como gavetas, temos mais objetos que gavetas. Logo, em algum quadrado de lado 1 haverá dois ou mais pontos. A distância entre esses pontos é no máximo a diagonal desse quadrado, logo $\sqrt{2}$.

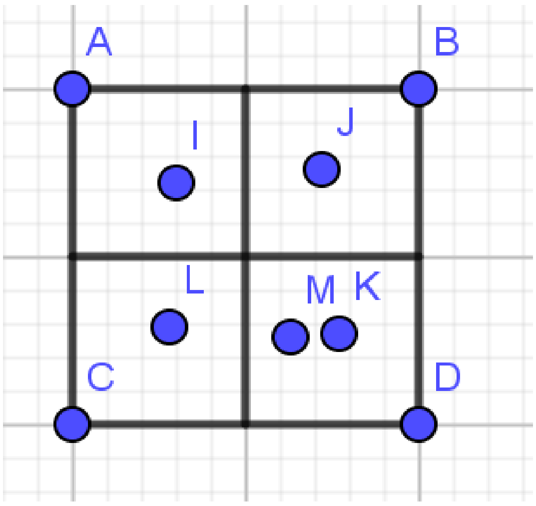


Figura 5 – Pontos sobre um quadrado de lado 2
Fonte: O autor (2020).

Para clarificar a demonstração do exemplo 5, visualize a seguinte situação: na figura acima I, J, L, M, K são os pontos e A, B, C, D são os vértices do quadrado. Observe que os pontos podem ficar sobre os vértices de um (ou mais) dos quatro quadrados.

2.3. Média aritmética ponderada

A média aritmética ponderada[12] é bastante similar à média aritmética simples, vista na seção anterior. A diferença, entretanto, é que na média aritmética simples todos os valores contribuem com peso igual, enquanto que no cálculo da média aritmética ponderada leva-se em consideração a contribuição (peso) de cada termo, uma vez que existem termos que contribuem mais que outros.

Uma ideia primitiva da média aritmética ponderada é a de uma média aritmética simples de uma lista finita de valores x_i ; $i = 1,2,\dots,n$, onde cada valor x_i se repete p_i vezes (frequência descrita por um número inteiro positivo),

$$\bar{x} = \frac{(x_1 + \cdots + x_1) + (x_2 + \cdots + x_2) + \cdots + (x_n + \cdots + x_n)}{p_1 + \cdots + p_n} = \frac{p_1\, x_1 + \cdots + p_n\, x_n}{p_1 + \cdots + p_n}$$

entretanto, a ideia atual é de que os pesos p_i sejam valores positivos, não necessariamente números inteiros.

A noção de média ponderada tem um importante papel na Estatística Descritiva, na análise de dados, ao tomar os pesos como valores repetidos (frequência) no conjunto de dados, agilizando o cálculo em relação à média aritmética simples. Ela também aparece de uma forma mais geral, em outras áreas de aplicação da Matemática. Por exemplo: na área de educação, para o cálculo de nota de alunos que tiveram avaliações com pesos diferentes; na área de marketing, para análise dos (números de) resultados de campanha para fazer projeções; e na área das finanças, para calcular o rendimento de uma carteira de investimentos, que têm valores ou pesos diferentes.

Definição 2: A **média aritmética ponderada** $\bar{x}$ dos números $x_1, x_2, \dots, x_n$, com os pesos $p_1, p_2, \dots, p_n$ tal que $p_i \geq 0$; $i = 1,2,\dots,n$ e $p_1 + p_2 + \cdots + p_n > 0$, é definida por:

$$\bar{x} = \frac{p_1\, x_1 + \cdots + p_n\, x_n}{p_1 + \cdots + p_n}$$

[12] Ponderar é sinônimo de pesar

Observação: Se consideramos $\lambda_i = \frac{p_i}{p_1+\cdots+p_n}$; para $i = 1,2, \ldots, n$, na equação:

$$\bar{x} = \frac{p_1\, x_1 + \cdots + p_n\, x_n}{p_1 + \cdots + p_n} = \frac{p_1}{p_1 + \cdots + p_n}\, x_1 + \cdots + \frac{p_n}{p_1 + \cdots + p_n}\, x_n$$

então, podemos expressar a média ponderada como, $\bar{x} = \lambda_1\, x_1 + \cdots + \lambda_n\, x_n$, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

Exemplo 6:

Em cada bimestre, uma faculdade exige a realização de quatro tipos de avaliação, calculando a nota bimestral pela média ponderada dessas avaliações. Se a tabela apresenta as notas obtidas por uma aluna nos quatro tipos de avaliações realizadas e os respectivos pesos dessas avaliações, sua nota bimestral foi aproximadamente igual a:

Avaliação	Nota	Peso
Prova escrita	6,00	4
Avaliação continuada	7,00	4
Seminário	8,00	2
Trabalho em grupo	9,00	2

Tabela 4 – Notas de uma aluna em determinada disciplina.
Fonte: O autor (2020).

a) 8,6.

b) 8,0.

c) 7,5.

d) 7,2.

e) 6,8.

Solução:

Como a média ponderada leva em consideração os pesos de cada observação, temos: 4 + 4 + 2 + 2 = 12. Em seguida, multiplica-se cada observação pelo peso correspondente, e soma-se todos os resultados, para logo dividir esta soma pelo total dos pesos:

$$\bar{x} = \frac{6.4+7.4+8.2+9.2}{12} = \frac{24+28+16+18}{12} = \frac{86}{12} \cong 7{,}17$$

Portanto, a resposta é a letra d, 7,2, cujo valor é o mais próximo do cálculo realizado.

Exemplo 7:

Uma empresa de marketing e opinião classifica os seus produtos como bom, se a nota média de três critérios for acima de 8. Os critérios são credibilidade, com peso 3; propaganda com peso 2; e preço com peso 1. Um produto obteve 7 em credibilidade, 8 em propaganda e 9 em preço. Determine a média desse produto e se ele é classificado como bom.

Solução:

Como os critérios tem pesos diferentes, calcula-se a média ponderada, levando em consideração os pesos, 3 + 2 + 1 = 6. Em seguida, multiplica-se cada nota pelo peso correspondente, logo, somando todos os resultados, e dividindo esta soma pelo total dos pesos, temos que:

$$\bar{x} = \frac{7.3+8.2+9.1}{6} = \frac{21+16+9}{6} = \frac{46}{6} \cong 7{,}7$$

Portanto, o produto não é bom, segundo o critério supracitado.

Exemplo 8:

Na empresa X foi contado o número de filhos dos 50 trabalhadores. Determinar a média aritmética do número de filhos por trabalhador?

Número de filhos	Frequência
0	10
1	15
2	12
3	9
4	4
Total	50

Tabela 5 – Quantidade de filhos por trabalhador na empresa X.
Fonte: O autor (2020).

Solução:

Os valores estão dispostos em uma tabela de frequência (Tabela 5), onde são considerados os dados respectivos aos 50 trabalhadores, logo n = 50. A média aritmética simples, por definição, é calculada como a divisão resultante da soma dos cinquenta valores por n=50. De forma análoga, podemos calcular a média aritmética ponderada, como a divisão resultante do produto das observações pelas suas respectivas frequências (pesos) por n. Assim:

$$\bar{x} = \frac{0.10+1.15+2.12+3.9+4.4}{50} = \frac{0+15+24+27+16}{50} = \frac{83}{50} = 1{,}66$$

Portanto, em média, os trabalhadores dessa empresa têm 1,66 filhos, aproximadamente. Ou, em média, os trabalhadores dessa empresa têm entre um e dois filhos.

2.4 Mediana

A ideia de mediana aparece no século XIII no Talmude [13] e mais tarde no livro *Certaine Errors in Navigation*[14], na seção sobre determinação da localização

[13] O Talmude (do hebraico, cujo significado é estudo) é uma coletânea de livros sagrados dos judeus, um registro das discussões rabínicas que pertencem à lei, ética, costumes e história do judaísmo.

[14] Livro de autoria de Edward Wright (1561-1615), matemático e cartógrafo inglês. Wright lançou neste livro, as bases para os fundamentos matemáticos da projeção de Mercator. Além disso,

com bússola. O livro foi escrito pelo matemático Edward Wright em 1599, que achou que o valor (mediana) era o mais provável de ser o correto em uma série de observações.

A mediana é uma medida comum das propriedades de conjuntos de dados em estatística e em teoria das probabilidades, com importância central na Estatística robusta[15]. A Estatística robusta é mais resistente, com ponto de ruptura de 50%, ou seja, metade das observações são menores que a mediana e a outra metade são maiores. A mediana não fornece resultados arbitrariamente grandes, desde que mais da metade dos dados não esteja contaminada[16].

Uma vez que os cálculos das medidas, em geral, são através de amostras, logo, as medidas de média aritmética e mediana são estimadoras. O desejado é que o estimador seja próximo do valor real, mas esses valores podem se distorcer por causa de um ou de alguns valores da amostra. A vantagem da mediana, em relação à média, é que a mediana pode representar melhor a um valor típico, pois não é tão distorcida por valores extremamente altos ou baixos.

Em estudos estatísticos, a média aritmética pode ser distorcida (como medida de tendência central) por um pequeno número de valores extremamente altos ou baixos (outliers[17]).

---

publicou diversas tabelas de cálculo, com as quais foi possível pela primeira vez construir e utilizar mapas com esta projeção.

[15] Aproximação alternativa aos métodos estatísticos clássicos, com o objetivo de produzir estimadores que não sejam afetados por variações pequenas.

[16] Erros de coleta de dados.

[17] Um outlier é uma observação que se diferencia tanto das demais observações que levanta suspeitas de que aquela observação foi gerada por um mecanismo distinto (Hawkins, 1980). Os outliers são dados que se distanciam radicalmente de todos os outros, são pontos fora da curva normal, valores que fogem da normalidade e que podem causar desequilíbrio nos dados coletados.

Figura 6 – Meme[18] sobre relação entre média, outliers e mediana.
Fonte: https://medium.com/pyladiesbh/estat%C3%ADstica-descritiva-1-ed523dffb99f Acessado em 02/01/2021.

entretanto, a mediana será sempre o valor central, como podemos observar na definição a seguir.

Definição 3: A **mediana** é a realização que ocupa a posição central de uma série de observações, quando estão ordenadas em ordem crescente.

Consideremos as observações ordenadas em ordem crescente. Vamos denotar $x_{(1)}$ a menor observação, $x_{(2)}$ a segunda menor, e assim por diante, obtendo-se a série,

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$$

Essas observações ordenadas são chamadas de *estatísticas de ordem*. Com essa notação das observações, a mediana da variável X, denotada por Md, é definida por:

$$\mathrm{Md} = \begin{cases} \mathrm{x}_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \text{ se n é impar} \\ \dfrac{\mathrm{x}_{\left(\frac{n}{2}\right)} + \mathrm{x}_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, \text{se n é par} \end{cases}$$

[18] Termo criado em 1976 por Richard Dawkins no seu *bestseller O Gene Egoísta*. O termo meme provém do grego *μιμέομαι* ("mimema") que tem a mesma raiz de mimese, que significa "imitação", derivado por aférese a partir de sua forma original em inglês *mimeme.* É considerado uma unidade de informação que se multiplica de cérebro em cérebro ou entre locais onde a informação é armazenada (como livros, internet, etc.).

Como foi dito anteriormente, a vantagem de calcular a mediana em relação à média aritmética é que a mediana não é influenciada por valores extremos das observações, como a média aritmética pode ser.

Exemplo 9:

Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas em suas respectivas raias obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

Figura 7 – Tempos alcançados em 100m livres
Fonte: O autor (2020).

A mediana dos tempos apresentados no quadro é?

Solução:

Colocando os tempos em ordem crescente temos a sequência:

$$20{,}5\ ;\ 20{,}6\ ;\ 20{,}6\ ;\ 20{,}8\ ;\ 20{,}9\ ;\ 20{,}9\ ;\ 20{,}9\ ;\ 20{,}96.$$

Sendo consideradas oito (8) raias então a mediana dos tempos dos atletas será:

$$Md = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{20{,}8 + 20{,}9}{2} = 20{,}85$$

Exemplo 10:

Nos quatro primeiros dias úteis de uma semana, o gerente de uma agência bancária atendeu 19, 15, 17 e 21 clientes. No quinto dia útil dessa semana esse gerente atendeu n clientes. Se a média do número diário de clientes atendidos por esse gerente nos cinco dias úteis dessa semana foi 19, a mediana foi:

a) 21

b) 19

c) 18

d) 20

e) 23

Solução:

Dos dados fornecidos, a média é $\bar{x} = 19$, logo temos a equação:

$$\frac{19 + 15 + 17 + 21 + \mathrm{n}}{5} = 19$$

Determinando o valor de n, resulta: $72 + \mathrm{n} = 95$ ou de forma equivalente, $\mathrm{n}=23$. A partir desse novo dado, as observações ordenadas formam a sequência:

$$15, 17, 19,\ 21,\ 23.$$

Portanto, a mediana será $Md = x_{(\frac{5+1}{2})} = x_{(3)} = 19$, sendo a resposta a letra b.

2.5 Moda

Se no cotidiano a palavra moda é utilizado para se referir ao comportamento habitual de uma determinada época, ou como significado de *muito usado*, em estatística, moda significa o valor mais frequente em um conjunto de dados.

Definição 4: A **moda** é definida como a realização mais frequente do conjunto de valores observados.

Quando dois valores ocorrem com a frequência máxima, cada um deles é uma moda, e o conjunto é chamado de bimodal. Se mais de dois valores ocorrem com a mesma frequência máxima, cada um deles é uma moda, e o conjunto é dito multimodal. Quando nenhum valor é repetido, então o conjunto não tem moda e é chamado de amodal.

Moda[19] é fundamentalmente útil, quando os valores ou as observações não são numéricos, casos em que a média e a mediana não podem ser definidas. Por exemplo, a moda do conjunto de pratos servidos em um restaurante em um

19 É a única medida de tendência central que pode ser usada para variáveis nominais.

determinado dia.

De acordo a Gonçalves (GONÇALVES, 1978), o termo moda foi utilizado pela primeira vez por Karl Pearson[20], em 1895, influenciado pela expressão "estar na moda", muito usado para objetos muito utilizados pela sociedade que deem a ideia de frequência.

Exemplo 11:

Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.

A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

Figura 8 – Numeração dos sapatos com defeitos
Fonte: http://portal.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2014

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas. A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor:

[20] Karl Pearson (Londres,1857-1936) foi um matemático e bioestatístico que contribuiu grandemente para o desenvolvimento da estatística como uma disciplina científica séria e independente. Foi o fundador do Departamento de Estatística Aplicada na University College London em 1911, sendo o primeiro departamento universitário dedicado à estatística em todo o mundo.

a) branca e os de número 38.

b) branca e os de número 37.

c) branca e os de número 36.

d) preta e os de número 38.

e) preta e os de número 37.

Solução:

Do enunciado, as cores dos sapatos são associadas aos valores “zeros” ou “uns”. Por definição, a média é a soma desses “zeros” (branco) ou “uns” (preto), dividido pelo número total de (pares) sapatos. De fato, é a soma total de “uns” dividido pelo número de sapatos, que deve em si resultar 0,45, que é a média de distribuição de “zeros” e “uns” fornecida. Isto significa que a cada 100 sapatos com defeito, 45 são da cor preta, e (portanto) 55 são da cor branca, ou seja, a mais incidente. A numeração que mais se repete com defeito é dada pela moda, logo os sapatos de numeração 38. Portanto a resposta correta é a letra (a).

Exemplo 12:

(ENEM 2010 - Questão 175 – Prova Rosa). O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols Marcados	Quantidade de jogos
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Tabela 6 – Gols marcados em determinada quantidade de jogos.
Fonte: O autor (2021).

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então,

a) X = Y < Z

b) Z < X = Y

c) Y < Z < X

d) Z < X < Y

e) Z < Y < X

Solução:

Do enunciado, as observações são o número de gols em cada partida. Da tabela, o time jogou um total de 20 partidas no último campeonato, logo temos 20 observações. De acordo aos dados, a média de gols por partida foi:

$$\bar{x} = \frac{0(5) + 1(3) + 2(4) + 3(3) + 4(2) + 5(2) + 7(1)}{20} = 2{,}25$$

Observe que para este exemplo, em particular, a média aritmética simples foi calculada como uma média aritmética ponderada, devido às observações repetidas.

Agora ordenando as observações (número de gols por jogo) de forma crescente:

0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7

há dois elementos que ocupam a posição central $x_{(10)} = 2$ e $x_{(11)} = 2$, daí a mediana das observações será,

$$Md = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

Por último, a observação ou número de gols que tem maior frequência é zero (0) gols, com cinco (5) partidas, daí a Moda do conjunto de observações é 0. Se X= $\bar{x} = 2{,}25$; Y = $Md = 2$ e Z = Moda= 0, então: Z < Y < X, daí a resposta correta é a letra (e).

CAPÍTULO 3

3. MEDIDAS DE DISPERSÃO

Não obstante as medidas de tendência central forneçam uma ideia do comportamento das variáveis, elas podem ainda esconder valiosas informações. Assim, essas medidas podem não ser suficientes para descrever ou discriminar diferentes conjuntos de dados.

Por exemplo, ao calcularmos a renda média da população de Colatina-ES, certamente os altos rendimentos de alguns residentes da cidade tenderiam a aumentar essa média, em razão à discrepância ser muito grande entre os valores, embora que, em sua maioria, muitos cidadãos recebam rendimentos abaixo ou muito abaixo dessa média. À vista disso, podemos estar esquecendo a variabilidade desses valores, e isto não é percebido calculando apenas a média ou a mediana, mas sim pelas medidas de dispersão.

Exemplificando: suponha que foram retiradas duas amostras de números aleatórios. Na primeira amostra, os dados observados foram os valores 20, 20 e 20; e na segunda, 0, 20 e 40. Apesar da média aritmética e mediana das duas amostras serem iguais a 20, fica claro para o aluno que as duas amostras são diferentes e que as medidas de posição não têm como quantificar essa diferença.

Segundo Bussab e Moretin (BUSSAB e MORETIN, 2017, p. 37),

> O resumo de um conjunto de dados por uma única medida representativa de posição central esconde toda a informação sobre a variabilidade do conjunto de observações.

Como podemos perceber, na segunda amostra há uma variação, enquanto na primeira, os valores são constantes. Quantificar a variação dos valores nos leva à teoria das medidas de dispersão.

Há situações em que as medidas de tendência central são calculadas através de uma amostra, pois o total de observações pode ser muito grande, o que muitas vezes impossibilitaria de se trabalhar com todo o conjunto de dados. Na teoria de amostragem, as observações são selecionadas a partir de um sorteio aleatório, logo essas medidas também podem variar dependendo da amostra selecionada, assim se tem a necessidade de quantificar essa variação, para que o erro obtido através do cálculo seja mínimo. Dessa forma, a amostra pode representar bem a população.

3.1. Amplitude

Considere um conjunto X de dados numéricos.

Definição 5: A **amplitude** de X é a distância do maior valor para o menor. A amplitude de X é denotado por Δ (delta).

Se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é um conjunto de n dados, e considerando $x_{(n)}$ o maior valor e $x_{(1)}$ o menor valor, desses dados, então:

$$\Delta = x_{(n)} - x_{(1)}$$

Se essa distância for pequena, indicará uma baixa variabilidade do conjunto de dados.

A amplitude só considera os dois valores extremos do conjunto de dados, por esse motivo, ainda se faz necessário a definição de medidas que utilizem todas as observações, tratando a ideia dos desvios médio, mediano e padrão.

3.2. Desvio Médio

Uma ideia inicial de definição seria considerar primeiramente o desvio de cada observação em relação à média. Caso a observação fosse menor que a média, o desvio seria negativo, e se fosse maior que a média, o desvio seria positivo. Entretanto, ao definir o desvio médio como a soma desses desvios com sinais diferentes, este resultaria sempre sendo igual a zero, em razão de que os desvios se compensariam, deste modo, ocultando o efeito da variabilidade. Um caminho alternativo é tomar a média dos valores absolutos desses desvios, o que denominaremos de desvio médio.

Definição 6: Dado o conjunto de valores $x_{1,}\, x_2\,, \ldots, x_n$, é definido o **desvio médio** desse conjunto como a média dos valores absolutos dos desvios $x_i - \bar{x}$; $i = 1,2, \ldots, n$. Seja DM a notação do desvio médio, dessa forma:

$$\mathrm{DM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \bar{x} \right|}{n}$$

Portanto, o desvio médio nada mais é que a média das distâncias de cada observação em relação à média.

Exemplo 13:

Em uma classe com 12 alunos de um curso de inglês, os alunos indicaram o número de outras línguas que tinham familiaridade, além do português e do inglês. Os resultados ordenados foram os seguintes: 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2 e 4. Determine o desvio médio desse conjunto de dados.

Solução:

Sem dificuldades calculamos a média dos dados: $\bar{x} = \frac{13}{12}$. Agora calculamos a diferença de cada observação em relação à média,

$$\left| x_i - \bar{x} \right| : \frac{13}{12}, \frac{13}{12}, \frac{13}{12}, \frac{13}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{11}{12}, \frac{11}{12}, \frac{35}{12}$$

A soma desses desvios resulta: $\frac{114}{12} = 9{,}5$, e, portanto, $\mathrm{DM} = \frac{9{,}5}{12} \approx 0{,}79$.

Conclui-se que o desvio médio é de, aproximadamente, 0,79. E que a variabilidade dos alunos saberem outra língua é menor do que uma língua, ou seja, os valores estão próximos da média aritmética.

3.3. Desvio Mediano

Assim como o desvio médio, o desvio mediano seria definido como a média dos desvios dos valores, só que agora em relação à mediana. A soma direta desses desvios seria próxima de zero, em razão disso será considerada também a forma alternativa: a soma dos valores absolutos dos desvios.

Definição 7: Dado o conjunto de valores $x_{1,}\, x_2 , \dots , x_n$, é definido o **desvio mediano** desse conjunto, como a média dos valores absolutos dos desvios $x_i - Md;\ i = 1,2, \dots , n$. Será denotado o desvio mediano por DMd, daí:

$$\mathrm{DMd} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - Md|}{n}$$

Portanto, o desvio mediano nada mais é que a média das distâncias de cada observação em relação à mediana.

Exemplo 14:

Considerando os dados do exemplo 11, vamos calcular o desvio mediano.

Solução:

Assim, a mediana $Md = \frac{1+1}{2} = 1$, e tomando os desvios, temos:

$$|x_i - Md| : 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 3.$$

Portanto, $\mathrm{DMd} = \frac{9}{12} = 0{,}75$. E a variabilidade dos alunos saberem outra língua é menor que uma língua, ou seja, os valores estão próximos da mediana.

3.4. Variância[21]

Definição 8: Se $x_1, x_2 , \dots , x_n$, são os n valores (distintos ou não) da variável X, a **variância** de X, denotada por S^2, é definida como a soma dos quadrados dos

[21] O termo foi introduzido pelo matemático inglês Ronald Fisher (criou os fundamentos para a moderna ciência estatística) num ensaio de 1918 intitulado de *The Correlation Between Relatives on the Supposition of Mendelian Inheritance*. O conceito de variância é análogo ao conceito de momento de inércia em mecânica clássica.

desvios de cada observação em relação à média, dividida por $n-1$.[22]

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Se os desvios em relação à média são pequenos, podemos concluir que as observações estão aglomeradas em torno da média e a variabilidade dos dados é, portanto, pequena. Se os desvios são grandes, os dados estão muito dispersos, logo, a variabilidade dos dados é grande. A variância é uma medida de variabilidade que capta essas duas situações.

Segue abaixo uma fórmula alternativa para variância dada por Magalhães e Lima (MAGALHÃES e LIMA, 2002, p. 104). Sua demonstração é desenvolvida a seguir:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\bar{\mathrm{x}}^2}{n-1}$$

Demonstração:

Da definição de variância e por propriedades de produto notável, temos:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2} - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2}{n-1}$$

Da definição de média, temos que $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$, então:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2\bar{x}n\bar{x} + n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{n-1}$$

[22] Veja que aqui é usado o divisor n – 1, em lugar de n. Esse divisor, n – 1, representa os graus de liberdade associados à variância amostral. Como os desvios sempre somam zero, daí se são especificados os valores de n – 1 desvios, então pode ser calculado o valor do desvio que não foi especificado. Os graus de liberdade representam o número de desvios que podem ter qualquer valor, isto é, estão “livres” para variar.

Portanto:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\overline{\mathrm{x}}^2}{n-1}$$

■

Exemplo 15:

Considerando os dados do Exemplo 2, onde foi calculado o número médio de parafusos por caixa em 10 lotes: 98,6, aproximadamente. Calcular a variância desses parafusos por caixa.

Solução:

Primeiramente, calculando a soma dos quadrados dos dados:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 98^2 + 102^2 + 100^2 + 100^2 + 99^2 + 97^2 + 96^2 + 95^2 + 99^2 + 100^2 = 97.260$$

E utilizando a fórmula alternativa:

$$S^2 = \frac{97260 - 10.98{,}6^2}{9}$$

Concluímos que a variância dos parafusos por caixa é $S^2 \cong 4{,}49$, aproximadamente.

3.5. Desvio Padrão[23]

O desvio padrão é uma medida de dispersão dos dados observados em torno da média. Se o desvio padrão for baixo, os dados estarão perto da média, ou seja, o conjunto de dados estará variando pouco e dizemos que esse conjunto é mais

---

[23] O desvio padrão é uma grandeza que remete ao século XIX, no contexto do desenvolvimento da estatística no Reino Unido. Enquanto o conceito de *medida de dispersão* foi criado por Abraham de Moivre e usado em seu livro *The Doctrine of Chances* em 1718, o termo *desvio padrão* foi pontualmente usado pela primeira vez por Karl Pearson em 1894, em substituição a termos anteriores como erro médio, utilizado por Carl Friedrich Gauss.

homogêneo. Se esse desvio for alto, o conjunto de dados estará variando muito em torno da média, sendo assim, dizemos que o conjunto é heterogêneo.

Definição 9: O **desvio padrão** de dados observados, denotado por S, é a raiz quadrada[24] da variância desses dados.

O desvio padrão é a principal medida de variabilidade e é muito usada porque mede de maneira eficaz a dispersão dos dados. Por exemplo, é usado: para criar intervalos em torno da média; verificar se a amostra retirada realmente representa a população; se o estimador para a média, calculado através da amostra, possui um erro mínimo; ou seja, o desvio padrão é usado em várias situações.

Exemplo 16:

É fornecida a duração, em minutos, das chamadas telefônicas feitas em três consultórios médicos. Calcular a média, a variância e o desvio padrão para cada consultório.

Consultório A	Consultório B	Consultório C
4	9	9
6	1	1
4	5	1
6	5	2
5	1	8
5	9	9

Tabela 7 – Duração de chamadas telefónicas.
Fonte: Do Livro Estatística Básica (VIEIRA, 2015).

Solução:

Feitos os cálculos com os dados fornecidos, se chega aos resultados seguintes:

[24] É importante salientar que o cálculo da variância envolve quadrados de desvios, então a unidade de medida da variância é igual ao quadrado da medida das observações, logo para obter uma medida de variabilidade na mesma unidade de medida dos dados, extrai-se a raiz quadrada da variância.

	Consultório A	Consultório B	Consultório C
Média	5	5	5
Variância	0,8	12,8	16,4
Desvio Padrão	0,89	3,58	4,05

Tabela 8 – Média, variância e desvio padrão dos consultórios.
Fonte: Do Livro Estatística Básica (VIEIRA, 2015).

Em média, a duração em minutos das chamadas telefônicas feitas nos três consultórios médicos foi a mesma: 5 minutos. No entanto, a duração das chamadas variou muito entre os consultórios. Por exemplo, compare o desvio padrão do consultório A de 0,89 minutos com o desvio padrão do consultório C de 4,05 minutos.

Exemplo 17:

Considerando o Exemplo 15, determine o desvio padrão da variável.

Solução:

Por definição**,** $S \cong \sqrt{4{,}49} \cong 2{,}12$.

3.6. Coeficiente de variação

Os estudos estatísticos estão relacionados às situações que envolvem estratégias e planejamentos, coleta e organização de dados, análise e interpretação clara e objetiva dos dados observados. Para comparação de dois ou mais conjuntos, a estatística utiliza o desvio padrão, desde que esses dados estejam na mesma unidade de medida. Caso sejam medidos em grandezas diferentes (unidades de medida diferentes), a comparação é feita utilizando o coeficiente de variação[25].

Suponha que foi realizado um levantamento por amostragem em dois setores de uma fábrica, onde no primeiro, a média salarial foi de R$ 1.000,00 e no segundo setor, a média salarial foi de R$ 10.000,00. Nos dois setores foi quantificada a

[25] O coeficiente de variação também é conhecido como desvio padrão relativo (DPR).

variabilidade através do desvio padrão, onde constatou-se que em ambos, o desvio padrão era igual a R$200,00.

Apesar de 200 ser o mesmo valor nos dois setores, ele trará uma representatividade completamente diferente para ambos. No primeiro, R$200,00 de desvio padrão corresponde a 20% do salário médio, e no segundo, corresponde a 2% do salário médio. Logo, apesar de ter o mesmo valor absoluto, a variabilidade foi mais afetada no primeiro setor. A medida que quantifica o quanto foi afetado a média pela variabilidade é o coeficiente de variação.

O coeficiente de variação é usado para analisar a dispersão em termos relativos a seu valor médio, quando duas ou mais séries de valores apresentam unidades de medida diferentes. Dessa forma, podemos dizer que o coeficiente de variação é uma forma de expressar a variabilidade dos dados, excluindo a influência da ordem de grandeza da variável.

Definição 10: O **coeficiente de variação**, denotado por CV, é definido pelo quociente entre o desvio padrão e a média, multiplicado por 100.

$$CV = \frac{S}{\bar{x}}.100$$

O coeficiente de variação é expressado em porcentagem. De fato, como o coeficiente de variação analisa a dispersão em termos relativos, ou seja, é uma proporção do desvio padrão em relação à média, logo para termos uma melhor interpretação, podemos escrever esses valores em porcentagem, multiplicando por 100.

Quanto menor for o valor do coeficiente de variação, mais homogêneos serão os dados, ou seja, menor será a dispersão em torno da média.

Segundo Fonseca e Martins (FONSECA e MARTINS, 2011, p. 148), podemos classificar a dispersão dos dados a partir do valor do coeficiente de variação CV. Desse modo, se o CV,

- For menor ou igual a 15%, então há **baixa dispersão**: dados homogêneos.

- For entre 15 e 30%, então há **média dispersão**.
- For maior que 30%, então há **alta dispersão**: dados heterogêneos.

Exemplo 18:

Em um grupo de moradores de determinada região foram analisadas a idade (em anos) e a altura (em metros) das pessoas. Deseja-se comparar a dispersão em termos relativos em torno da média dos dois conjuntos de dados, a fim de verificar qual deles é mais homogêneo. Na coleta dos dados verificou-se que:

Idade média das pessoas: $\bar{x} = 41{,}6 \text{ e } S = 0{,}82$

Altura média das pessoas: $\bar{x} = 1{,}67 \text{ e } S = 0{,}2$

Qual conjunto de dados apresenta menor dispersão relativa em torno da média?

Solução:

O primeiro fato a se observar é que os dados analisados possuem unidades de medida diferentes. Dessa forma, somente o desvio padrão não é suficiente para comparar os dois conjuntos. Nesse caso, é preciso calcular o coeficiente de variação para fazer a comparação da variação em torno da média dos dados.

Assim, teremos primeiramente o cálculo do coeficiente de variação da idade.

$$CV = \frac{S}{\bar{x}}.100 \;\Rightarrow\; CV = \frac{0{,}82}{41{,}6}.100 = 0{,}0197.100 = 1{,}97\,\%$$

E o cálculo do coeficiente de variação da altura:

$$CV = \frac{S}{\bar{x}}.100 \;\Rightarrow\; CV = \frac{0{,}2}{1{,}67}.100 = 0{,}119.100 = 11{,}9\,\%$$

Interpretação dos dados*:* como o coeficiente de variação da idade foi menor que o coeficiente de variação da altura, podemos afirmar que os dados relativos à idade são mais homogêneos que os relativos à altura.

3.7. Erro Padrão

Quando calculamos a média aritmética através de uma amostra, esta representa uma estimativa da média populacional, porém, a média (amostral) pode sofrer variações dependendo da amostra coletada. Desse modo é definido um instrumento que meça a variação de uma média amostral em relação à média da população.

Definição 11: O **erro padrão**, denotado por EP, é o quociente do desvio padrão pela raiz quadrada do tamanho da amostra (n).

$$EP = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

O erro padrão é uma medida de dispersão que ajuda a verificar a confiabilidade da média amostral calculada. Para a média amostral ser uma boa estimativa da média verdadeira (populacional), o erro padrão deverá ser baixo ou próximo de zero.

É muito frequente a confusão entre os conceitos de erro padrão e desvio padrão. Apesar de ambos tratarem sobre a variação da média, são conceitos bem diferentes entre si. O desvio padrão, como vimos, trata-se de um índice de dispersão da amostra em relação à média, enquanto o erro padrão é uma medida que ajuda a avaliar a confiabilidade da média calculada.

Exemplo 19:

Numa população, obteve-se desvio padrão de 2,64, com uma amostra aleatória de 60 elementos. Qual é o provável erro padrão?

Solução:

Por definição, $EP = \frac{2{,}64}{\sqrt{60}} = 0{,}3408$. Isso indica que a média (populacional) pode variar 0,3408 para mais ou para menos.

CAPÍTULO 4

4. ESTATÍSTICA NO LIVRO DIDÁTICO

Com o passar dos anos, tornou-se notório o crescimento do uso da estatística no cotidiano. A informação quantitativa está em todos os lugares, e vem apontando para a necessidade da construção de competências mínimas na formação de uma cultura estatística (GAL, 2002). Com isso, as avaliações de matemática nos vestibulares, Enem[26] e concursos, começaram a valorizar mais esses conteúdos, tornando-se um dos principais conteúdos de matemática nessas avaliações. Exemplificando, o Enem 2002 teve 63 questões no total, sendo 3 delas questões de estatística sobre interpretação de gráficos, enquanto, a partir de 2009, o Enem passou a ter 180 questões no total, sendo 45 de matemática e desse quantitativo, 7 questões eram de estatística, envolvendo medidas de posição e dispersão, probabilidade e interpretação de gráficos. Ainda no Enem 2017, 9 questões de estatística foram cobradas na avaliação; e em 2019, o seu número subiu para 11.

Ano	Total de Questões	Questões de Matemática	Questões de Estatística
2002	63	5	3
2009	180	45	7
2017	180	45	9
2019	180	45	11

Tabela 9 – Número de questões de Matemática e Estatística do ENEM.
Fonte: portal.inep.gov.br

> No último ICOTS (Intenational Conference on Teaching Statistics), realizado recentemente em Kyoto, Japão, ficou claro o papel da Estatística no tratamento dos dados gerados nas diversas áreas do conhecimento. Foi dada ênfase na relevância da Educação Estatística para a interpretação e a apropriação do conhecimento estatístico pelos espaços formais de ensino e pelos cidadãos em todo o mundo. Após a Segunda Guerra Mundial, quando considerou a Educação Estatística uma área promissora na qual poderia contribuir na solução de problemas

---

[26] O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) foi instituído no Brasil em 1998, com o objetivo de avaliar o desempenho escolar dos estudantes ao término da Educação Básica.

> econômicos e sociais de países afetados pela guerra ou em desenvolvimento. Em 1949 a ONU aprovou uma resolução, solicitando à UNESCO e ao ISI, medidas adequadas para promover a melhoria na educação em estatísticas em escala internacional. (VIALI e ODY, 2020).

Com esse protagonismo, a Estatística ganhou uma atenção maior nas aulas de Matemática. Dessa forma iremos analisar uma das ferramentas utilizadas nas aulas: o livro didático, focando o quanto e como este aborda o conteúdo de Estatística.

4.1. Evoluções dos livros

Em geral, os livros de matemática não acompanham a Base Nacional Comum Curricular - BNCC [27], pois uma grande parcela de conteúdo de uma série frequentemente está contemplada no livro didático de outra série, desse modo trazendo dificuldade para o professor usar o livro didático, quando este aborda o conteúdo em questão.

Os conteúdos de tabelas e gráficos são abordados desde o Ensino Fundamental, logo todos os livros deveriam conter uma secção sobre Tratamento da Informação, mas isso não acontece. Os livros do Ensino Fundamental[28], em geral, trazem pouquíssimas questões sobre o assunto.

> Considerando o importante papel que os livros didáticos assumem na educação brasileira, esse estudo aponta-nos que o trabalho com tratamento da informação, realizado pelos livros didáticos, encontra-se distante de possibilitar aos alunos a construção de procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados. O tratamento da informação, na maioria das coleções analisadas, não é explorado no decorrer de todos os livros didáticos, aparecendo apenas no capítulo de estatística e probabilidade (LEMOS, 2006).

---

[27] A BNCC é uma política educacional que define os direitos de aprendizagens de todos os alunos do Brasil.

[28] Desde 2008, no Brasil, o Ensino fundamental é dividido em dois grupos: anos iniciais ou ensino fundamental I (1º ao 5º ano ou série), e anos finais ou ensino fundamental II (6º ao 9º ano). Com duração total de 9 anos e carga-horária mínima de 800 horas anuais. Ele é a etapa seguinte à educação infantil, e envolve o desenvolvimento de crianças e pré-adolescentes.

Os conteúdos de tabelas e gráficos, medidas de posição e medidas de dispersão são abordados nos livros da 3ª série do Ensino Médio[29], mas a maioria dos livros trazem pouquíssimos exercícios, dificultando o trabalho com os estudantes. Neste trabalho, foram analisadas quatro coleções de livros.

O livro *Coleção Novo olhar Matemática* de Joamir Souza, para a 3ª série do Ensino Médio, contém um capítulo sobre Estatística. Neste, tem uma introdução com tipos de variáveis, tendo apenas dois exercícios. Em seguida é abordado os conteúdos de tabela, gráficos, medidas de posição (média aritmética, moda e mediana), medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão), com apenas seis exercícios.

Figura 9 – Livro 1
Fonte: enjoei.com.br/p/livro-um-novo-olhar-da-matemática. Acessado em 01/09/2020.

O livro *Matemática Paiva* do Manuel Paiva, para a 3ª série, aborda os conteúdos de tabelas e gráficos, com dois exercícios; medidas de posição (média aritmética, média ponderada, mediana e moda), com nove exercícios; medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão), com três exercícios; e mais dez exercícios de revisão do capitulo. Como pôde ser observado, o livro do Paiva contém um número maior de exercícios em relação ao livro do Joamir Souza, mas as medidas de dispersão ainda têm uma abordagem pequena ou insuficiente.

[29] O Ensino Médio é o último dos três níveis da Educação Básica Brasileira. Essa etapa dura três anos e o seu objetivo é aprofundar o conhecimento adquirido no Ensino Fundamental II, além de preparar o estudante tanto para o mercado de trabalho como para o Ensino Superior.

Figura 10 – Livro 2
Fonte: maisliivros.blogspot.com/2018/05/matematica-paiva. Acessado em 01/09/2020

O livro *Matemática Contexto e Aplicações* do Luiz Roberto Dante, para a 3ª série, aborda conceitos básicos de população e amostra, com dois exercícios; um contexto histórico com o início da estatística, distribuição de tabelas de frequência, com um exercício; gráficos, com sete exercícios; medidas de posição (média aritmética, média ponderada, mediana e moda), com dez exercícios; medidas de dispersão (variância e desvio padrão), somente com exemplos. Assim como o livro do Manuel Paiva, o livro do Dante aborda pouco as medidas de dispersão, não contendo exercícios. Dando mais ênfase para tabelas e gráficos.

Figura 11 – Livro 3
Fonte: professordematematica2017.blogspot.com/2017/05/matematica-contexto-e-aplicacoes . Acessado em 01/09/2020

O livro *Matemática ciência e aplicações* do Gelson Iezzi, para a 1ª série, aborda conceitos básicos, variáveis, tabelas e gráficos, com alguns exercícios; e o livro da 3ª série com as medidas de posição (média aritmética, mediana e moda), medidas de dispersão (amplitude, variância, desvio médio e desvio padrão), medidas-resumo em dados agrupados em tabelas, com poucos exercícios. O livro do Iezzi foi o escolhido pelos professores para trabalhar nas escolas estaduais de Colatina. Entre os livros citados é o que aborda uma quantidade maior de conteúdo do Ensino Médio segundo a BNCC**,** e é o único que aborda na 1ª série o assunto de Estatística, mas não possui uma quantidade grande de exercícios.

Figura 12 – Livro 4
Fonte: maisliivros.blogspot.com/2018/07/matematica-ciencia-e-aplicacoes-manual
. Acessado em 01/09/2020

Segundo sinalizam os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN[30]), os estudos de Estatística e Probabilidade nas escolas devem ser trabalhados desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, quando a criança está aprendendo a ler, até o Ensino Médio, sempre aprofundando as noções matemáticas envolvidas em cada etapa da formação. Desde o ensino fundamental o aluno deve ser incentivado a ter noções elementares de Estatística: construir e ler tabelas, gráficos de barras e colunas, coletar e organizar dados através de pequenas pesquisas.

Quanto a esta discussão, os PCN do Ensino Fundamental propõem os seguintes blocos de conteúdos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento de Informação.

[30] Os Parâmetros Curriculares Nacionais, mais conhecidos como PCN, é uma coleção de documentos que compõem a grade curricular de uma instituição educativa. Esse material é elaborado a fim de servir como ponto de partida para o trabalho docente, norteando as atividades realizadas em sala de aula.

Fundamentado na minha experiência como docente na rede estadual de ensino ao longo de 16 anos e à minha formação em Estatística, acredito na proposta de que todos os livros didáticos, desde o Ensino Fundamental, devem contemplar interpretação de tabelas e gráficos, e cálculo de média aritmética. Na 1ª série, o ideal seria ensinar a construir tabelas e gráficos com exercícios utilizando ferramentas computacionais, como Excel. Na 2ª série, os livros deveriam abordar as medidas de posição (média aritmética, média ponderada, mediana e moda), pois segundo a BNCC, esse conteúdo deveria ser contemplado nessa série, porém, como constatado, nenhum dos livros anteriormente citados aborda estatística na 2ª série. Na 3ª série deveriam ser revisadas as medidas de posição, abordando as medidas de dispersão (desvio médio, amplitude, variância e desvio padrão), com uma quantidade relevante de exercícios.

Agora o Currículo Base da Rede Estadual do Espírito Santo, seguindo a BNCC, define que o conteúdo de Estatística (medidas de posição, medidas de dispersão e probabilidade) deve de ser contemplado no primeiro trimestre da 3ª série, ou seja, um terço do ano letivo deveria ser destinado a abordar este assunto em sala de aula, portanto, sendo de suma importância a contemplação do conteúdo de estatística nos livros didáticos.

CAPÍTULO 5

5. PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Neste capítulo iremos propor duas linhas de atividades alternativas para abordar o conteúdo de estatística em sala de aula: uma sendo um trabalho prático de pesquisa estatística; e outra sendo uma atividade lúdica que vise tornar mais prazerosa e significativa a discussão dos conceitos de Estatística básica.

Essas duas atividades foram desenvolvidas em 2019, com três turmas diferentes de alunos da 3ª série do Ensino Médio da Escola Estadual Honório Fraga, em Colatina, ES. Assim seria possível comparar resultados da aplicação dessas duas linhas de abordagens, com um terceiro tratamento mais tradicional do conteúdo em sala de aula: uma aula expositiva e de resolução de exercícios, aplicado a uma quarta turma, também da 3ª série da mesma escola.

Fazer do livro didático a única ferramenta a ser utilizada nas aulas de Matemática, não é o indicado como salienta Landim (LANDIM, 2020):

> Existem diversos entraves para a melhoria do ensino nas escolas de Educação Básica, dentre os quais destacam-se a má formação dos professores e a qualidade do livro didático adotado. Cabe ressaltar a interdependência destes dois aspectos quando "o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência do professor para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe" (Lima, 2001 Exame). Isso acontece especialmente devido à posição de destaque que se encontra o livro didático na cultura educacional brasileira como observa Machado (1996, p31), "(...) o livro adotado pelo professor - consumível ou não - praticamente determina o conteúdo a ser ensinado. O professor abdica do privilégio de projetar os caminhos a serem trilhados, em consonância com as circunstâncias - experiências, interesses, perspectivas - de seus alunos, passando a conformar-se, mais ou menos acriticamente, como encadeamento de temas propostos pelo autor".

A resolução de problemas é uma maneira interessante de abordar um determinado assunto. Nesse sentido, salienta Dante (DANTE, 2000):

> Aprender a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática. Certamente outros objetivos da matemática devem ser procurados, mesmo para atingir o objetivo da competência em resolução de problemas. Desenvolver conceitos matemáticos, princípios e algoritmos através de um conhecimento significativo e habilidoso é importante. Mas o significado principal de aprender tais conteúdos matemáticos é ser capaz de usá-los nas construções das soluções das situações-problema.

É importante mencionar que a resolução de exercícios foi tratada nas três linhas de abordagens do conteúdo, isto é, nas quatro turmas.

Pela experiência que adquiri nesses 16 anos em sala de aula, considero que a aprendizagem ocorre quando há um embasamento empírico aliado a um trabalho prático, desenvolvendo conceitos, definições e teorias. Nesta proposta, tal embasamento será desenvolvido por meio de uma pesquisa, e de um jogo, além da resolução de problemas; de forma que o aluno possa criar suas estratégias e métodos para tentar resolver determinada situação. Para reforçar esse pensamento, salientam Pozo e Echeverría (ECHEVARRIA e POZO, 1998, p. 9) que:

> A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes.

De acordo com Moura (MOURA, 1992, p. 47):

> Ao optar pelo jogo como estratégia de ensino, o professor o faz com uma intenção: propiciar a aprendizagem. E ao fazer isto tem como propósito o ensino de um conteúdo ou de uma habilidade. Dessa forma, o jogo escolhido deverá permitir o cumprimento deste objetivo. O jogo para ensinar Matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar perfeitamente localizado no processo que leva do conhecimento primeiro ao conhecimento elaborado.

Reflexões acerca do processo ensino-aprendizagem são válidas e devem ser aprofundadas, pois, não apenas os jogos, mas quaisquer outras atividades aplicadas no contexto educacional devem estar embasadas teoricamente e apresentar objetivos e metodologias claras.

5.1. Pesquisa Estatística

Essa atividade pode ser desenvolvida com alunos das segunda e terceira séries do Ensino Médio. A atividade em si é completa no sentido de trazer todas as fases do método de pesquisa estatístico, desde o planejamento até a conclusão.

No planejamento, o aluno deve pensar no instrumento de coleta (questionário) e elaborá-lo com a supervisão do professor, também deverá definir o tamanho da amostra e o tempo gasto para realizar a pesquisa.

Depois da coleta de dados o aluno deverá resumir as informações, usando tabelas e/ou gráficos.

Para cada variável quantitativa, deverá se calcular a média, mediana, moda, desvio padrão, coeficiente de variação e erro padrão. No fim, analisar os dados através das medidas calculadas.

Com essa atividade o aluno poderá vivenciar na prática a finalidade de calcular as medidas resumo aprendido por ele em sala de aula, compará-las, criar intervalos de confiança para a média e devolver os conceitos na prática.

Desenvolvimento

A pesquisa Estatística foi realizada com duas turmas das 3ª séries do Ensino Médio Integrado de Informática da Escola Estadual Honório Fraga. As turmas foram divididas em grupos e cada grupo com um tema específico, sendo os temas: *a influência das redes sociais no comportamento de adolescentes; a internet como ferramenta de estudo; as consequências de uma Fake News*[31]*; Cyber Bulling; e o*

[31] O termo *fake news* (notícia falsa em português) se tornou popular em todo o mundo no século XXI, mas segundo o dicionário Merriam-Webster, essa expressão é usada desde fins do século XIX. É usado para informações falsas que são publicadas, principalmente, em redes sociais.

desenvolvimento da informática na sociedade. Cada grupo elaborou um questionário com o auxílio do professor, e decidiram o número de entrevistados (tamanho amostral). A pesquisa seria realizada retirando uma amostra da população de Colatina. As seis principais regiões (bairros) deveriam estar na amostra (Maria das Graças, Centro, São Silvano, Moacir Brotas, Vila Lenira, Honório Fraga).

Após a coleta de dados, foi realizada uma revisão para evitar possíveis erros. Em seguida, cada variável (pergunta) foi resumida através de uma tabela ou gráfico.

Segue como exemplo o questionário elaborado/usado por um dos grupos.

A internet como ferramenta de estudo

1. Você possui acesso à internet?

   ( ) Somente na escola ( ) Somente em casa

   ( ) Na escola e em casa ( ) Não possuo

2. Você usa a internet para estudar ?

   ( ) Sim ( ) Não

3. Em média quantas horas por dia você usa a internet para o estudo?

   ( ) 0 ( )1 ( ) 2 ( ) 3 ou mais

4. Você usa redes sociais como grupos de whatsApp para estudo?

   ( ) Sim ( ) Não

5. Você usa em primeiro lugar a internet para :

   ( ) Interagir nas redes sociais ( ) Jogar Games

   ( ) Estudar ( ) Ver vídeos

Figura 13 – Questionário 1
Fonte: O autor (2020).

Esse grupo selecionou uma amostra de 50 indivíduos, onde o público alvo eram estudantes do Ensino Médio. Segue, como exemplo, os dados obtidos pelo mesmo grupo.

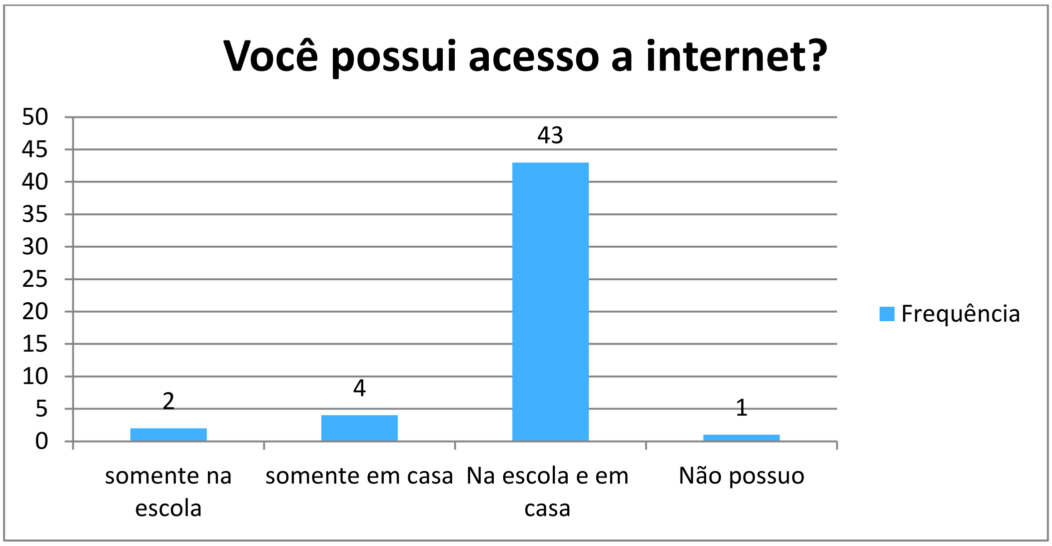


Figura 14 – Gráfico 1
Fonte: O autor (2020)

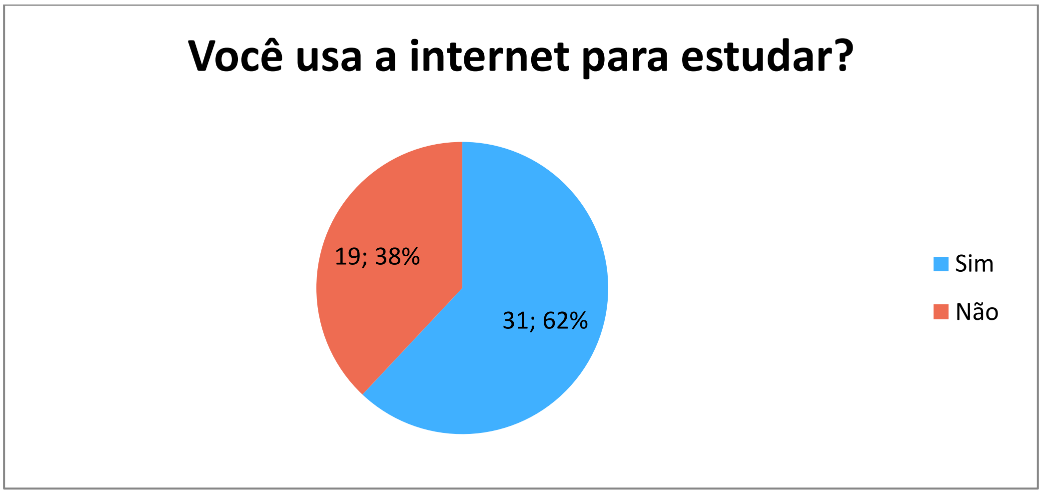


Figura 15 – Gráfico 2
Fonte: O autor (2020)

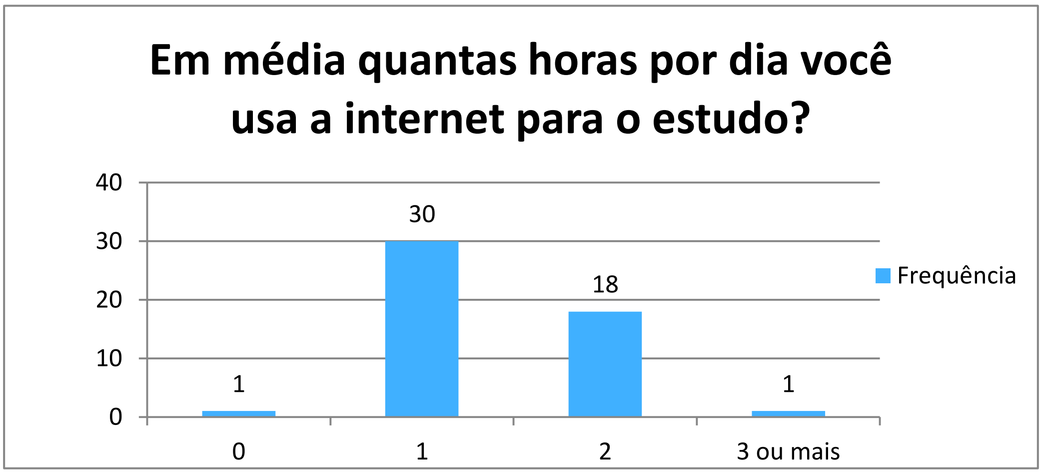


Figura 16 – Gráfico 3
Fonte: O autor (2020).

Figura 17 – Gráfico 4
Fonte: O autor (2020).

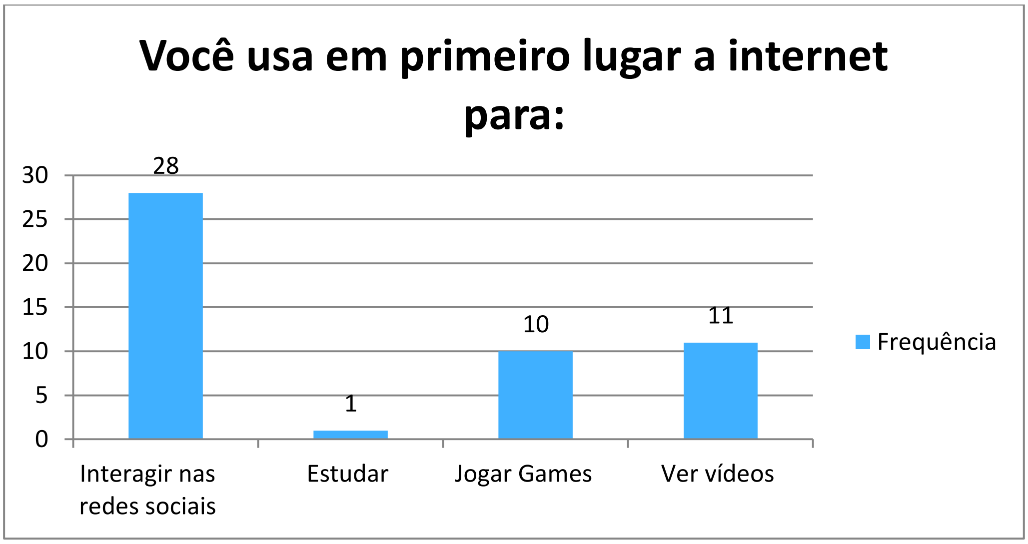


Figura 18 – Gráfico 5
Fonte: O autor (2020).

Para todas as variáveis quantitativas foram realizados os cálculos da média, mediana, moda, variância, desvio padrão, coeficiente de variação e erro padrão, obtendo assim as conclusões.

Esse grupo em questão fez os cálculos para a única pergunta quantitativa, *"em média, quantas horas por dia você usa a internet para o estudo?".* Vale ressaltar que os grupos foram orientados a ter, pelo menos, uma pergunta cuja variável fosse quantitativa.

Moda = 1 hora de estudo por dia

Mediana = 1 hora de estudo por dia

Média = 1,38 horas

Desvio padrão é de aproximadamente 0,57

CV é de aproximadamente 41%

Erro padrão é de aproximadamente 0,08

Figura 19 – Cálculos 1
Fonte: O autor (2020).

O grupo chegou à conclusão que em sua grande maioria, os estudantes fazem o uso da internet para o estudo, usando, em média, em torno de uma hora por dia para esse fim.

Segue também como exemplo, o questionário elaborado/usado por um outro grupo, porém do ano letivo 2020.

Questionário sobre as consequências de uma Fake News:

1. Você acredita que as Fake News são prejudiciais para a sociedade?

( ) Sim ( ) Não

2. Você compartilha informação sem verificar a veracidade da fonte?

( ) Sim ( ) Não

3. Em quantos grupos de WhatsApp que você participa os participantes postam noticias sobre política?

   ( ) 1 grupo ( ) 2 grupos ( ) 3 grupos ( ) 4 ou mais ( ) nenhum grupo.

4. Você acredita que as Fake News mudam cenários políticos?

( ) Muito ( ) Pouco ( ) Não Muda

5. Você acredita que as Fake News atrapalharam os agentes da saúde no combate a pandemia do corona vírus, disseminando noticias falsas sobre o vírus?

( ) Sim ( ) Não

Figura 20 – Questionário 2
Fonte: O autor (2020).

Esse grupo selecionou uma amostra de 60 indivíduos, onde o público alvo foi constituído por jovens e adultos. Vale ressaltar que o grupo garantiu o sigilo dos entrevistados. Seguem os dados obtidos pelo grupo.

Figura 21 – Gráfico 6
Fonte: O autor (2020).

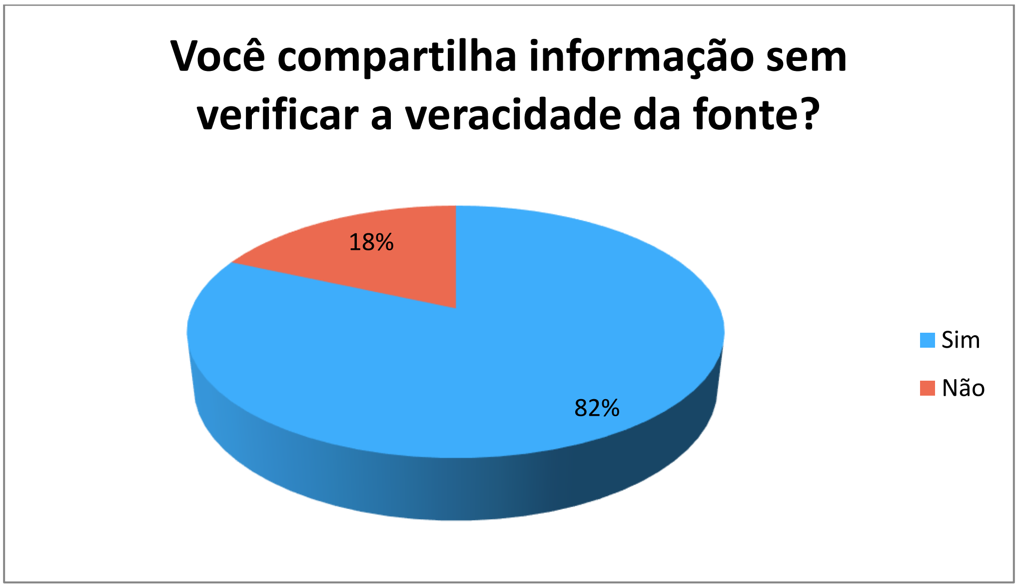


Figura 22 – Gráfico 7
Fonte: O autor (2020).

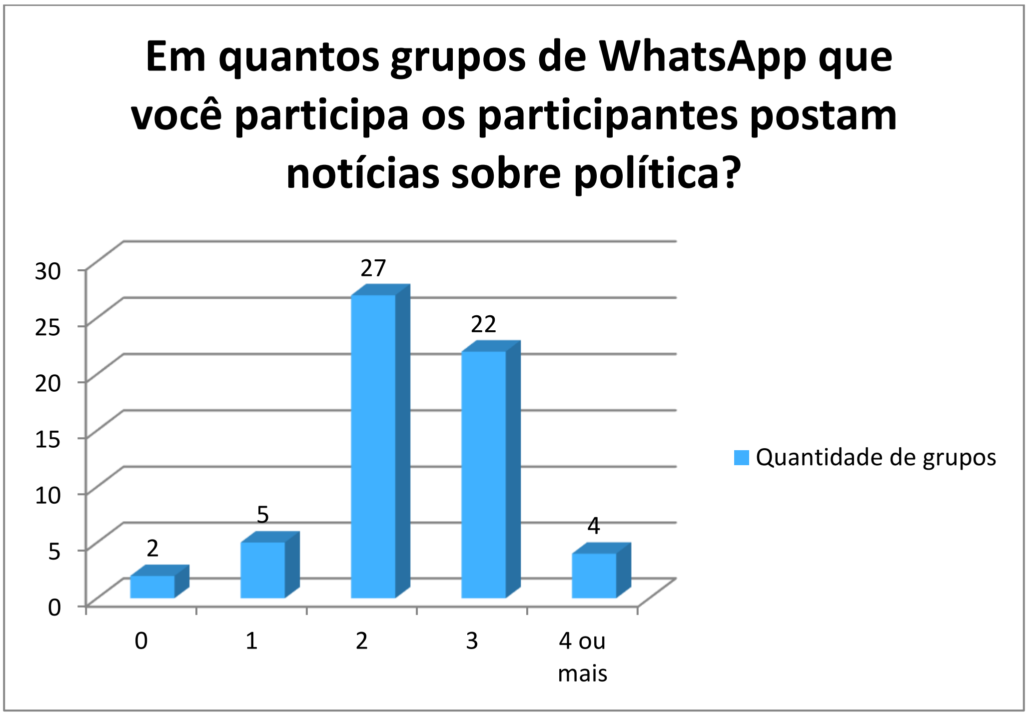


Figura 23 – Gráfico 8
Fonte: O autor (2020).

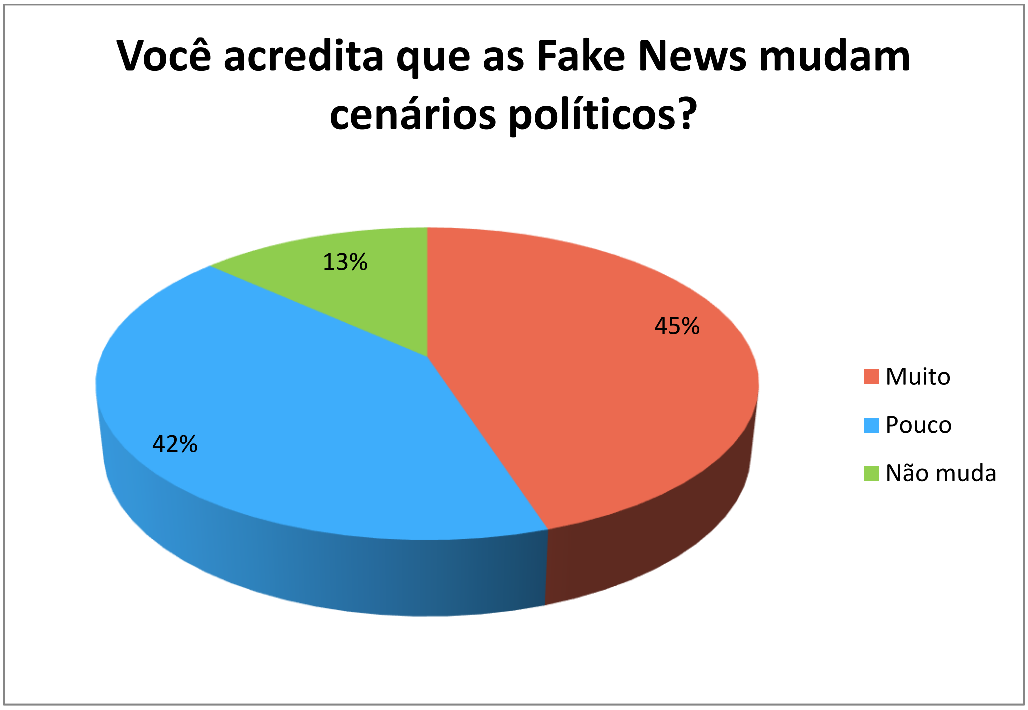


Figura 24 – Gráfico 9
Fonte: O autor (2020).

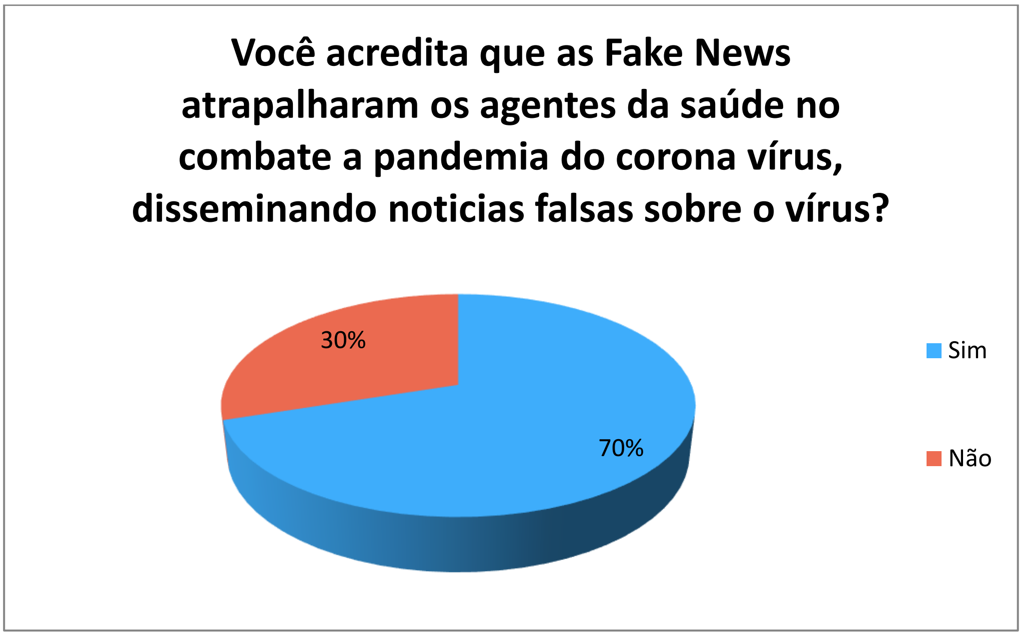


Figura 25 – Gráfico 10
Fonte: O autor (2020).

Esse grupo em questão fez os cálculos para a única pergunta quantitativa, *"Em quantos grupos de WhatsApp que você participa os participantes postam notícias sobre política?".* Aqui é importante ressaltar que esse grupo fez os cálculos usando a planilha de Excel, um auxílio essencial para este tipo de trabalho.

Xi	Fi	x*fi	x*fi*x	Média=141/60	
0	2	0	0		
1	5	5	5		
2	27	54	108		
3	22	66	198	**Média = 2,35**	
4	4	16	64		2,35
Total	**60**	**141**	**375**		

Figura 26 – Cálculos 2
Fonte: O autor (2020).

Cabe aqui mencionar que nos cálculos apresentados pelo segundo grupo, o professor evidenciou um possível erro de informação para a média, pois o grupo considerou 4 ou mais grupos no questionário, enquanto na tabela somente fez o registro de 4 grupos, logo valores maiores do que 4 não seriam considerados. Com isso, informações seriam perdidas. Nesse momento houve muita discussão sobre o assunto o que foi muito proveitoso para a aula. Por fim eles concluíram que nesse caso, a mediana, como forma de medida, era melhor que a média, mas como tinham valores próximos não haveria tanta perda.

	Fórmulas	
Desvio Padrão = 0,8601	Variância	0,739830508
	Desvio padrão	0,860134006
Mediana = 2	CV	36,60144707
	Erro	0,111042823
Moda = 2		
CV = 36,6 %		
Erro padrão = 0,11		

Figura 27 – Cálculos 3
Fonte: O autor (2020).

Dos dados levantados, esse grupo chegou à conclusão que apesar da grande maioria achar que as Fake News são prejudiciais à sociedade, mesmo assim a maioria desses entrevistados contribui com isso ao compartilhar informação sem saber sobre sua veracidade. Apesar da maioria (87%) achar que as Fake News mudam cenários políticos, eles participam de pelo menos 2 a 3 grupos de WhatsApp que compartilham informação sobre política. E ainda, 70% dos entrevistados acreditam que as Fake News atrapalharam o combate do Corona vírus.

Com esse trabalho, além de praticar os cálculos das medidas-resumo e a construção de tabelas e gráficos, os alunos tiveram uma melhor compreensão das formulas e cálculos para tirar as conclusões lógicas.

Como o trabalho teve várias etapas, foi necessário a disponibilização de cinco (5) aulas para a atividade, o que é uma quantidade grande, visto que o conteúdo de Matemática referente à 3ª série é extenso e mais sendo para as turmas do Curso de informática, que possuem três aulas da matéria por semana, enquanto as de ensino regular tem quatro. Contudo, uma condição favorável para o desenvolvimento da atividade com essas turmas foi o número de alunos: menos de 30. Isso permitiu dar maior atenção aos estudantes, além de fazer uso do laboratório de informática da escola, que possui 25 computadores, sem criar maiores complicações nesse espaço, situação diferente se fosse trabalhada a atividade em turmas da escola que alcançam a ter 44 alunos, onde a qualidade de aula ficaria visivelmente prejudicada.

5.2. O Jogo “Max_Min - Estatístico”

O jogo **Max_Min - Estatístico** é um jogo de treinamento que pode ser utilizado para fortalecer os conceitos de média, mediana, moda, desvio padrão e desvio médio da Estatística Descritiva. O jogo utiliza, simultaneamente, em cada rodada uma medida de posição e uma medida de dispersão. Assim, em cada rodada o jogador deve estabelecer uma estratégia que combine essas duas medidas.

O jogo pode ser disputado por dois ou mais jogadores. O jogo se completa com a realização de seis rodadas. As medidas de posição e de dispersão utilizadas em cada rodada são obtidas por meio de sorteio de fichas apropriadas. Assim, cada ficha contempla uma medida de posição e uma de dispersão.

Material

- ✓ Cinco dados honestos, com faces numeradas de 1 a 6.
- ✓ Seis fichas para indicar as medidas de posição e dispersão:
    - Média x Desvio Padrão
    - Média x Desvio Médio
    - Mediana x Desvio Padrão
    - Mediana x Desvio Médio
    - Moda x Desvio Padrão
    - Moda x Desvio Médio
- ✓ A utilização de calculadora, porém seu uso é opcional.
- ✓ Um copo de plástico para o lançamento dos dados.

- ✓ Uma folha de papel para anotar as pontuações de cada rodada.

Regras

No início de cada rodada é sorteada uma das seis fichas. Desse modo, a ficha define quais medidas serão utilizadas naquela rodada.

Cada jogador poderá efetuar até um lançamento em cada rodada. O lançamento é sempre realizado com os cinco dados. Vale a face de cima dos dados. Após a finalização da sua jogada, o jogador anota em uma folha de papel os valores das faces obtidas nos cinco dados e os valores que obteve para as correspondentes medidas de posição e de dispersão.

Ao final de cada rodada, o jogador que obteve a maior medida de posição marca dois pontos; o que obteve a segunda maior medida de posição marca 1 ponto. O que obteve a menor medida de dispersão marca 3 pontos; o que obteve a segunda menor medida de dispersão marca 2 pontos; e o que obteve a terceira menor medida de dispersão marca 1 ponto. Quando ocorrer empate, cada jogador recebe a pontuação correspondente. Caso o jogador calcule de maneira errada uma das medidas, então não marcará pontos naquela rodada.

Após a realização das seis rodadas, cada jogador soma seus pontos. Vence aquele que obtiver a maior pontuação.

Desenvolvimento

O jogo “Max Min” foi realizado na turma M01 da 3ª série do ensino médio da Escola Estadual Honório Fraga, em abril de 2019. A turma possuía 24 alunos, logo foi dividida em 6 grupos de 4 alunos para realizar o jogo. A atividade abordando o jogo foi desenvolvida em 4 aulas de 55 minutos cada uma, e ao final os alunos relataram o quanto foi prazerosa e diferenciada essa atividade.

Um fator que contribuiu positivamente na realização da atividade, foi o reduzido número de alunos dessa turma: apenas 24. Essa quantidade é considerada pequena em comparação às turmas de 2ª série da escola, que alcançam a ter até 44 alunos por sala. Isso permitiu que o professor conseguisse dar uma melhor atenção a cada grupo, o que não ocorreria em uma sala com 44 estudantes. A grande dificuldade foi o tempo curto de cada aula: 55 minutos. O jogo foi aplicado ao longo de uma semana e, com isso, os alunos que faltaram a algumas das aulas durante a semana, acabaram prejudicando a atividade dos grupos respectivos.

Sequencia didática

1ª Aula: Explicando o Jogo Max_Min – Estatístico

Na primeira aula foi feito um breve relato sobre o jogo Max_Min – Estatístico (tempo de aula: 45 minutos, aproximadamente).

- Rever os conceitos e conteúdos de média, mediana, moda, desvio médio e desvio padrão.
- Descrever as regras do jogo Max_Min – Estatístico.
- Confecção das 6 fichas do jogo.

2ª Aula: Divisão dos grupos e primeira e segunda rodada de jogos.

Na segunda aula a turma foi dividida em 6 grupos com 4 participantes cada, de forma que cada grupo tivesse pelo menos um aluno da turma com mais facilidade no conteúdo. (tempo de aula: 10 minutos, aproximadamente).

1ª rodada (tempo: 25 minutos, aproximadamente).

- Na primeira rodada, cada grupo sorteou a ficha para começar o jogo e cada jogador lançou os cinco dados anotando os valores.
- Cada jogador calculou a medida de posição e de dispersão.
- Os outros competidores corrigiram os cálculos de seus colegas, se houvesse algum tipo de erro. Esse cálculo era revisto por todos os membros do grupo. Nessa etapa, vale ressaltar, houve o auxílio do professor.
- Os competidores anotaram a pontuação de cada um na rodada.

2ª rodada (tempo: 20 minutos, aproximadamente).

- Na segunda rodada, sorteou-se a segunda ficha e cada jogador lançou os dados novamente anotando os valores.

- Cada jogador calculou a medida de posição e de dispersão.
- Os outros competidores corrigiram os cálculos de seus colegas. Se houvesse algum tipo de erro, esse cálculo era revisto por todos os componentes do grupo. Aqui cabe mencionar que esse processo, da segunda rodada, foi mais rápido que da primeira.

3ª Aula: Terceira a quinta rodada de jogos.

Agora cada rodada teve uma duração de aproximadamente 15 minutos, totalizando 45 minutos no total. Foi interessante observar que à medida que as rodadas foram passando, o número de erros nos cálculos foi diminuindo entre os alunos.

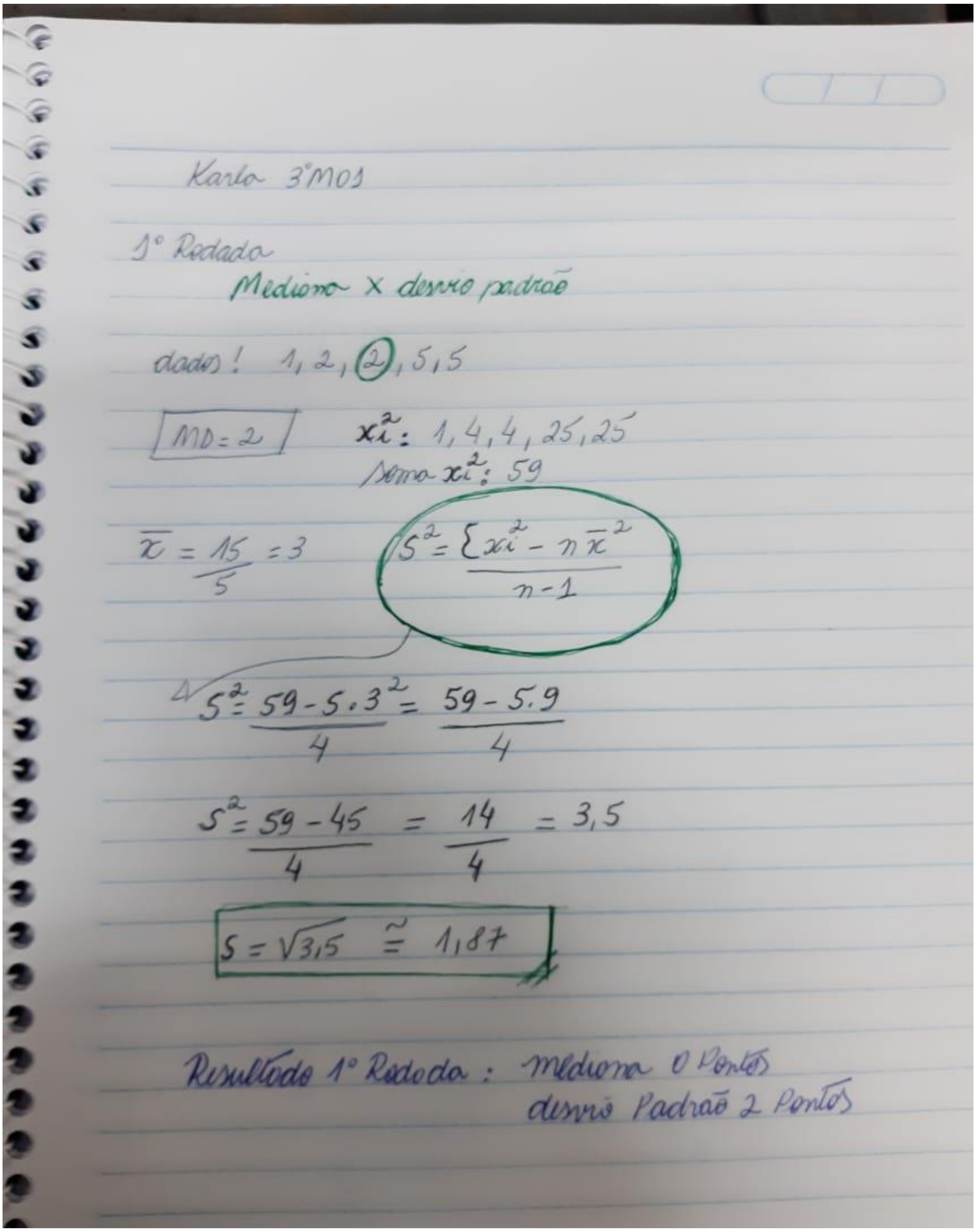
4ª Aula: Sexta rodada de jogos e considerações finais sobre o jogo.

O tempo para a realização da última rodada foi de aproximadamente 15 minutos. No final, os alunos computaram a pontuação de cada um e compararam com os outros grupos.

Considerações finais sobre o jogo (tempo: 30 minutos, aproximadamente).

- Uma roda de conversa para avaliação do jogo.
- Elencar aspectos positivos e negativos da atividade para o processo ensino-aprendizagem. Por exemplo, uma melhor compreensão dos conteúdos durante as rodadas do jogo, como percebido pelo professor.
- Elencar aspectos positivos e negativos da atividade para o processo de integração e de participação dos alunos em sala de aula. Por exemplo, realização dos cálculos como trabalho em grupo.

A seguir temos as imagens do caderno de uma aluna, como exemplo das rodadas do jogo.



Karla 3°M01

1° Rodada

Mediana X desvio padrão

dados! 1, 2, 2, 5, 5

$\boxed{MD = 2}$ x_i^2: 1, 4, 4, 25, 25

soma x_i^2: 59

$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3$

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

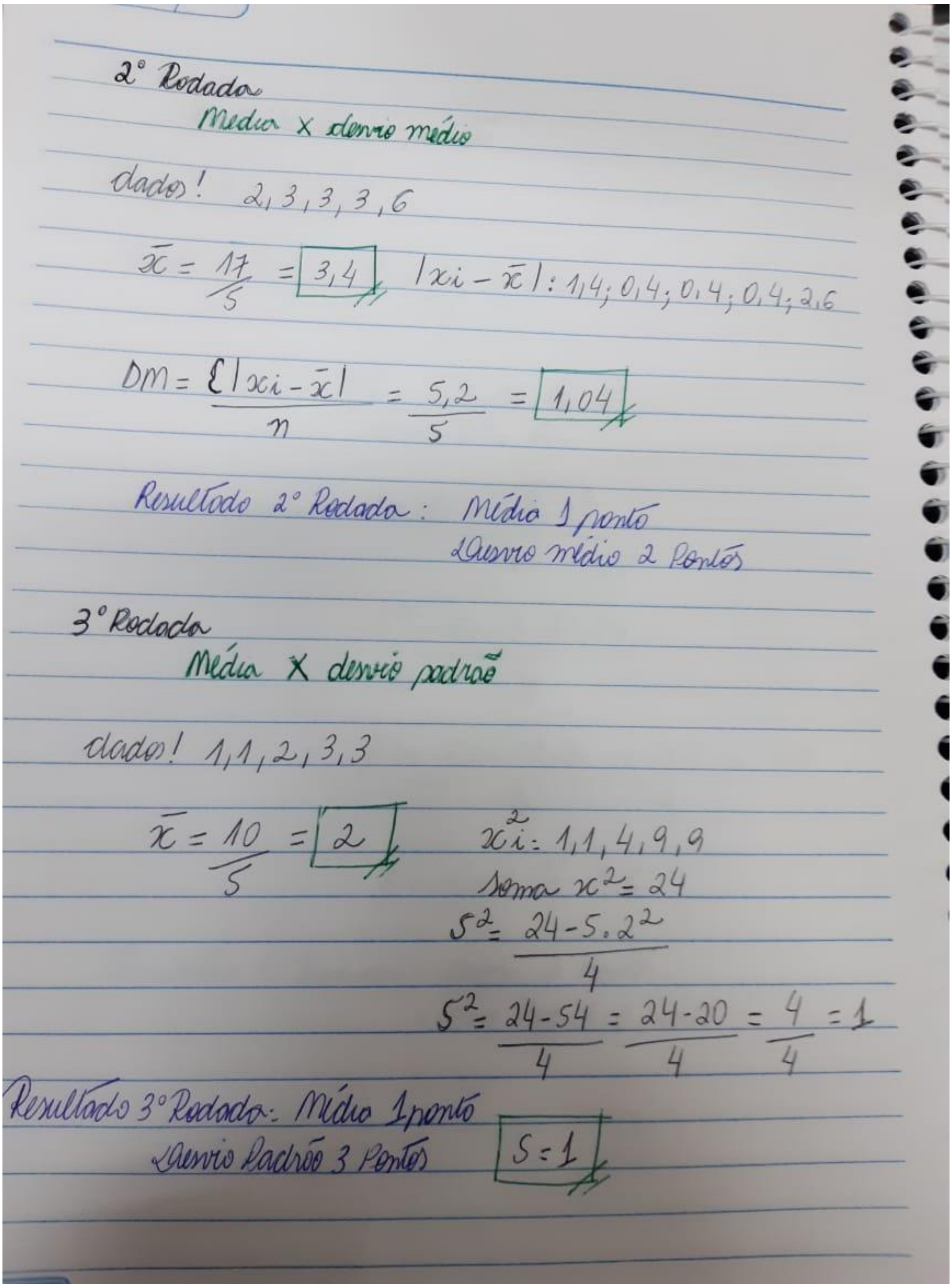
$$S^2 = \frac{59 - 5 \cdot 3^2}{4} = \frac{59 - 5 \cdot 9}{4}$$

$$S^2 = \frac{59 - 45}{4} = \frac{14}{4} = 3{,}5$$

$$\boxed{S = \sqrt{3{,}5} \cong 1{,}87}$$

Resultado 1° Rodada: mediana 0 Pontos
desvio Padrão 2 Pontos

Figura 28 – Caderno 1
Fonte: O autor (2020).



2° Rodada

Média x desvio médio

dados! 2, 3, 3, 3, 6

$\bar{x} = \frac{17}{5} = \boxed{3,4}$ $|x_i - \bar{x}|$: 1,4; 0,4; 0,4; 0,4; 2,6

$DM = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{5,2}{5} = \boxed{1,04}$

Resultado 2° Rodada: Média 1 ponto

Desvio médio 2 Pontos

3° Rodada

Média X desvio padrão

dados! 1, 1, 2, 3, 3

$\bar{x} = \frac{10}{5} = \boxed{2}$ x_i^2: 1, 1, 4, 9, 9

soma $x^2 = 24$

$s^2 = \frac{24 - 5 . 2^2}{4}$

$s^2 = \frac{24-54}{4} = \frac{24-20}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Resultado 3° Rodada: Média 1 ponto

Desvio Padrão 3 Pontos $\boxed{S = 1}$

Figura 29 – Caderno 2
Fonte: O autor (2020).

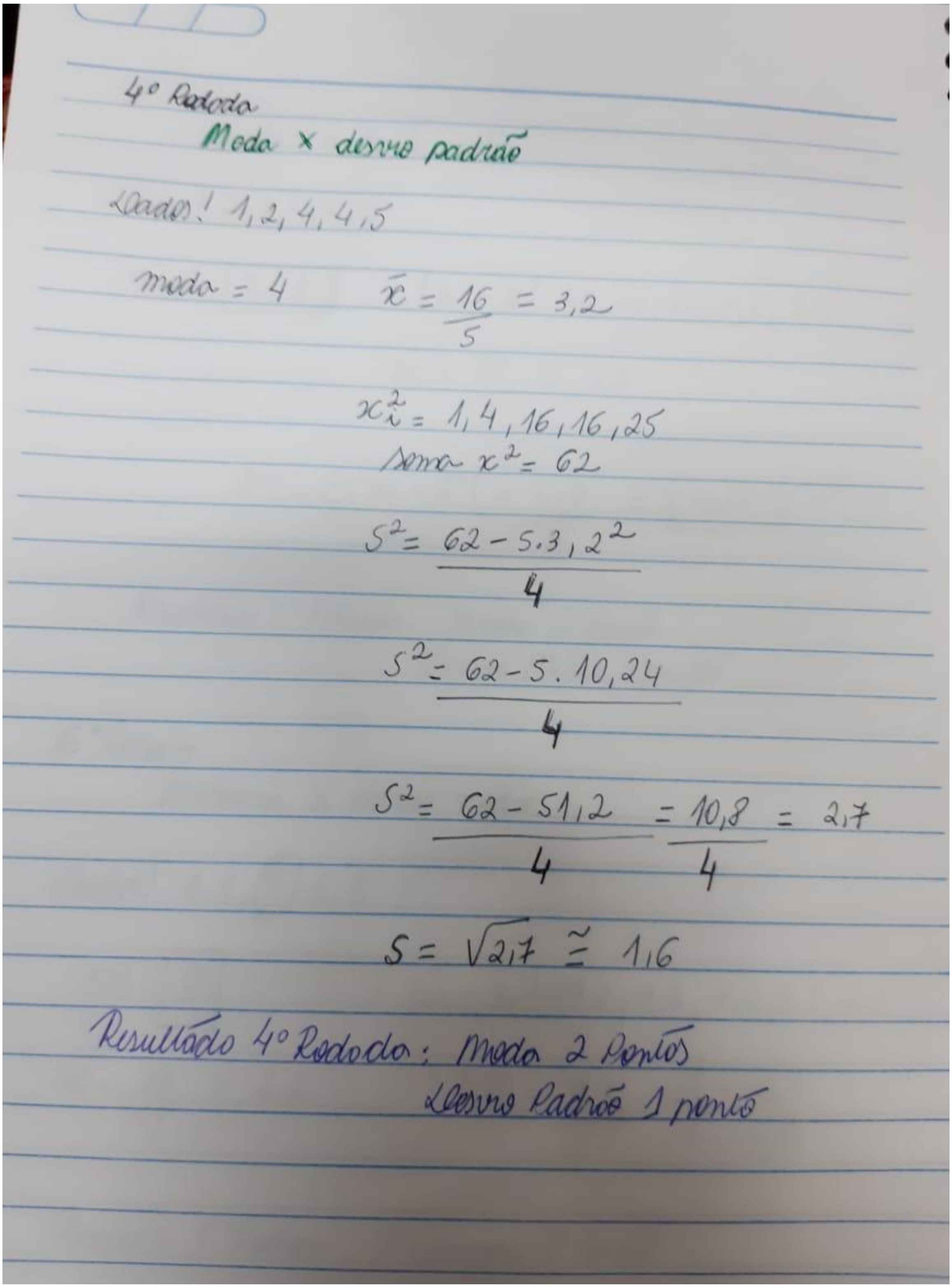
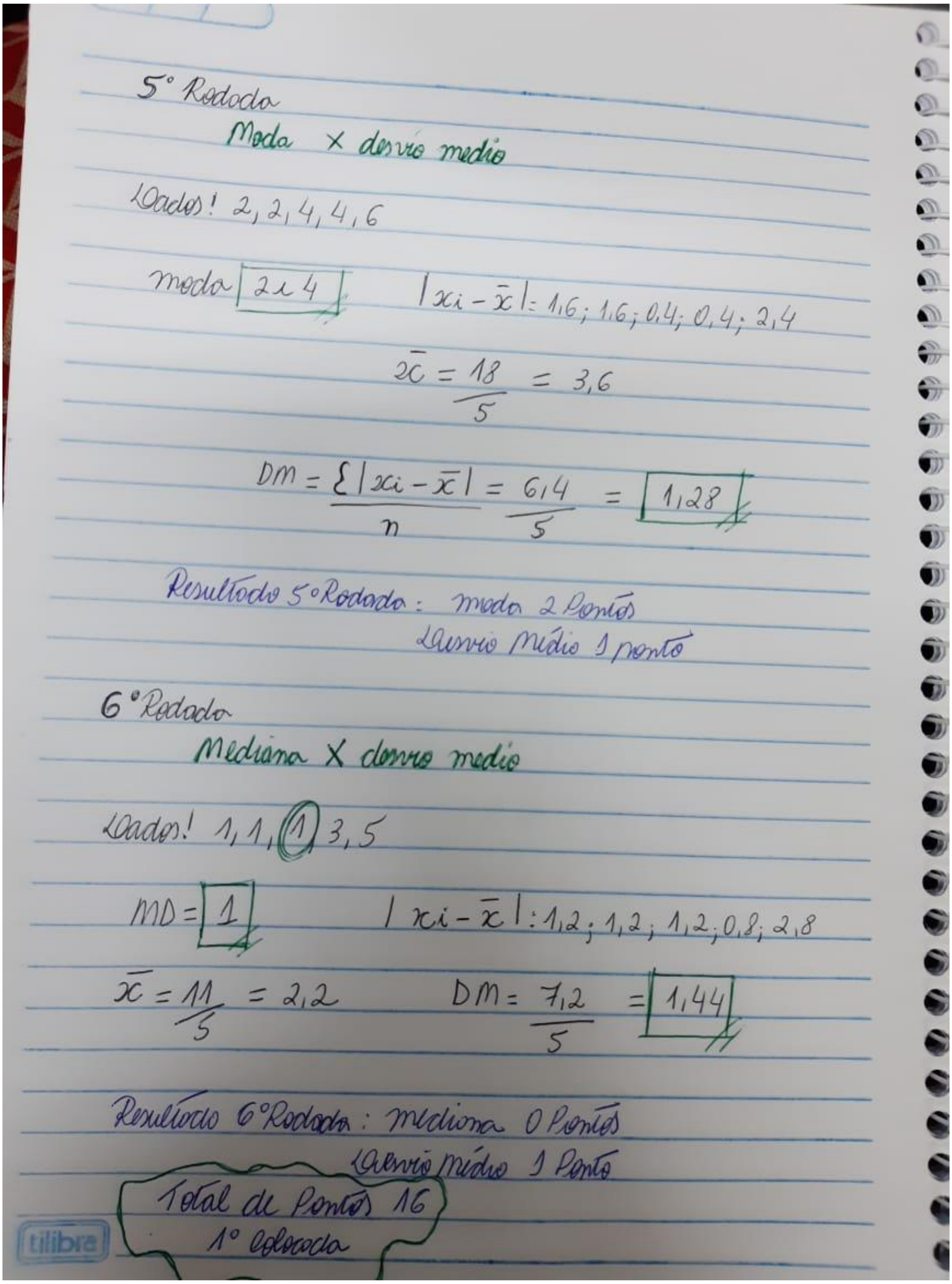


Figura 30 – Caderno 3
Fonte: O autor (2020).



5° Rodada

Moda $\times$ desvio medio

Dados: 2, 2, 4, 4, 6

moda $\boxed{2 \text{ e } 4}$ $\quad |x_i - \bar{x}| = 1{,}6;\ 1{,}6;\ 0{,}4;\ 0{,}4;\ 2{,}4$

$$\bar{x} = \frac{18}{5} = 3{,}6$$

$$DM = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{6{,}4}{5} = \boxed{1{,}28}$$

Resultado 5° Rodada: moda 2 Pontos
desvio Médio 1 ponto

6° Rodada

Mediana X desvio medio

Dados: 1, 1, 1, 3, 5

$MD = \boxed{1}$ $\quad |x_i - \bar{x}| : 1{,}2;\ 1{,}2;\ 1{,}2;\ 0{,}8;\ 2{,}8$

$\bar{x} = \frac{11}{5} = 2{,}2$ $\quad DM = \frac{7{,}2}{5} = \boxed{1{,}44}$

Resultado 6° Rodada: mediana 0 Pontos
desvio médio 1 Ponto

Total de Pontos 16
1° colocada

Figura 31 – Caderno 4
Fonte: O autor (2020).

Nas considerações finais da roda de conversa os alunos relataram que durante o jogo puderam rever os conteúdos aprendidos nas aulas anteriores e tiveram uma melhor compreensão, alguns alunos chegaram a admitir que só foram aprender a calcular as medidas durante o jogo.

Os alunos ficaram satisfeitos com a aplicação do jogo, manifestando o desejo de jogar mais em outras aulas. Entretanto, fica difícil incluir de forma regular atividades do tipo no planejamento do ano letivo, devido ao tempo que demandam este tipo de atividades em sala de aula e por termos um currículo muito extenso (da BNCC) a cumprir, além de sermos cobrados por isso em avaliações externas.

Os alunos ficaram satisfeitos com a aplicação do jogo, manifestando o desejo de jogar mais em outras aulas. Entretanto, fica difícil incluir de forma regular atividades do tipo no planejamento do ano letivo, devido ao tempo que demandam este tipo de atividades em sala de aula e por termos um currículo muito extenso (da BNCC) a cumprir, além de sermos cobrados por isso em avaliações externas.

Abaixo, segue a matriz de referência do ensino médio, essa matriz é base para avaliações trimestrais externas chamadas PAEBES TRI[32], assim poderemos perceber a extensão do currículo que é cobrado.

[32] Programa de Avaliação (Trimestral) da Educação Básica do Espírito Santo (PAEBES-TRI).

PAEBES TRIMESTRAL PROGRAMA DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO ESPÍRITO SANTO

MATRIZ DE REFERÊNCIA

MATEMÁTICA | ENSINO MÉDIO

Descritores		1º Ano			2º Ano			3º Ano		
		Trimestres			Trimestres			Trimestres		
		1ºTri	2ºTri	3ºTri	1ºTri	2ºTri	3ºTri	1ºTri	2ºTri	3ºTri
I.NÚMEROS E OPERAÇÕES										
D01	Corresponder, no contexto social, diferentes representações dos números e operações.	X								
D02	Corresponder números reais a pontos da reta numérica.	X								
D03	Utilizar a relação que descreve o número de elementos da reunião de conjuntos na resolução de problemas.	X								
D04	Utilizar conhecimentos aritméticos na resolução de problemas.	X								X
D05	Utilizar proporcionalidade entre grandezas interdependentes na resolução de problemas.	X								X
D06	Utilizar métodos de contagem na resolução de problemas.						X			
D07	Executar operações entre matrizes.						X			
II. ÁLGEBRA E FUNÇÕES										
D08	Reconhecer a representação algébrica de uma função a partir de uma situação descrita textualmente.	X								
D09	Utilizar propriedades de progressões aritméticas na resolução de problemas.	X								
D10	Utilizar propriedades de progressões geométricas na resolução de problemas.				X					
D11	Utilizar equação polinomial de 1º grau na resolução de problemas.	X								
D12	Determinar a solução de um sistema de equações lineares.		X				X			
D13	Utilizar sistema de equações polinomiais de 1º grau na resolução de problemas.		X				X			X
D14	Utilizar porcentagem na resolução de problemas.			X	X					
D15	Utilizar juros simples na resolução de problemas.			X	X					
D16	Utilizar juros compostos na resolução de problemas.					X				
D17	Corresponder pontos do plano cartesiano a pares ordenados.		X							
D18	Identificar gráficos que podem representar funções.		X							
D19	Identificar o domínio e o conjunto imagem de uma função.		X							
D20	Identificar zeros, regiões de crescimento e de decrescimento ou máximos e mínimos de uma função a partir de seu gráfico.		X							
D21	Corresponder uma função polinomial do 1º grau a seu gráfico.		X							
D22	Utilizar equação polinomial de 2º grau na resolução de problemas.		X							
D23	Corresponder uma função polinomial de 2º grau a seu gráfico.			X						
D24	Utilizar as coordenadas do vértice de uma função polinomial de 2º grau na resolução de problemas de máximo ou mínimo.			X						

Figura 32 – PAEBES Tri 1
Fonte: O autor (2021)

D25 Corresponder uma função exponencial a seu gráfico.			X					
D26 Determinar o conjunto solução de uma equação exponencial.			X					
D27 Utilizar função exponencial na resolução de problemas.			X					
D28 Corresponder uma função trigonométrica a seu gráfico.							X	
D29 Determinar o conjunto solução de uma equação trigonométrica.								X
III.GEOMETRIA, GRANDEZAS E MEDIDAS								
D30 Utilizar propriedades das medidas de ângulos de figuras planas na resolução de problemas.		X						
D31 Utilizar semelhança entre polígonos na resolução de problemas.		X						
D32 Reconhecer polígonos por meio de suas propriedades.		X						
D33 Reconhecer a representação algébrica ou gráfica de uma circunferência.								X
D34 Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.								X
D35 Determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano.								X
D36 Utilizar o cálculo da medida do perímetro de figuras planas na resolução de problemas.		X						
D37 Utilizar o cálculo da medida da área de figuras planas na resolução de problemas.		X				X		
D38 Utilizar relações métricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.		X		X				
D39 Utilizar razões trigonométricas em um triângulo retângulo na resolução de problemas.				X			X	
D40 Utilizar a lei dos senos ou a lei dos cossenos na resolução de problemas.				X				
D41 Corresponder figuras tridimensionais às suas planificações ou vistas.				X			X	
D42 Utilizar o cálculo da medida de área da superfície dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas.							X	
D43 Utilizar o cálculo da medida de volume dos principais sólidos geométricos na resolução de problemas.				X	X		X	
D44 Utilizar o Teorema de Euler para determinar o número de faces, de vértices ou de arestas de poliedros convexos.							X	
IV. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE								
D45 Utilizar dados apresentados em tabelas ou gráficos na resolução de problemas.		X	X			X		
D46 Utilizar medidas de tendência central na resolução de problemas.			X			X		X
D47 Utilizar medidas de dispersão na resolução de problemas.						X		
D48 Utilizar noções de probabilidade na resolução de problemas.						X		X

*As habilidades previstas nesta Matriz de Referência referentes ao primeiro trimestre serão avaliadas a partir de 2019.

Figura 33 – PAEBES Tri 2
Fonte: O autor (2021)

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como enfatizado no decorrer do trabalho e constatado por avaliações de desempenho de estudantes em Matemática como o PISA 2018[33], uma grande maioria dos alunos tem muita dificuldade em aprender conteúdo dessa disciplina, não sendo diferente na aprendizagem do conteúdo de Estatística, que no Ensino Básico é matéria das disciplinas de Matemática. Com isso, é proposto nesse trabalho atividades a ser desenvolvidas em sala de aula pelo professor e com participação ativa dos alunos.

Nos primeiros capítulos desse trabalho foi apresentado uma parte teórica com exemplos, para fundamentar os temas que seriam abordados durante a atividade. Tudo isso com o intuito de que o aluno alcance um melhor entendimento da Estatística Básica de forma significativa e contextualizada.

As atividades apresentadas visaram em específico, concretizar o entendimento do aluno das medidas de posição e dispersão.

O jogo Max-Min, que foi realizado em uma turma de 3ª série do Ensino Médio da Escola Estadual Honório Fraga em Colatina, representou momentos de aprendizagem e também de integração e descontração entre pares, além de oportunizar aos alunos de revisar alguns conceitos de Estatística já vistos.

A pesquisa Estatística, realizada com duas turmas da 3ª série do Ensino Médio Integrado de Informática da Escola Estadual Honório Fraga em Colatina, teve aprovação dos alunos, os quais puderam ver na prática os conceitos que foram trabalhados em sala.

Com isso, os alunos puderam concretizar, em diversas atividades, as medidas de posição e utilizá-las para criar intervalos entendendo melhor a questão da variabilidade nas variáveis e amostras.

---

[33] O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), apontou que o Brasil tem baixa proficiência em leitura, matemática e ciências, se comparado com outros 78 países que participaram da avaliação. A edição 2018, divulgada mundialmente em 03/12/2019, revela que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania.

No final de abril de 2019, as quatro turmas da 3ª série do matutino da Escola Honório Fraga, consideradas para a aplicação de diferentes linhas de aprendizagem de um mesmo assunto, realizaram um mesmo teste sobre medidas-resumo: as duas turmas da 3ª série do Ensino Médio Integrado de Informática, que realizaram a pesquisa; a 3ª série M01 que realizou o jogo Max Min; e a 3ª série M02 que só participou de atividades tradicionais em sala de aula como apresentação de conteúdo básico do currículo sobre a matéria e resolução de exercícios.

É importante mencionar que a maioria dos alunos das quatro (4) turmas já haviam trabalhado comigo em séries anteriores, logo já vinha acompanhando o desempenho deles por um período maior que o compreendido na aplicação das atividades.

As duas turmas do Curso de informática, que realizaram a pesquisa estatística, possuíam juntas 51 alunos. Desses, nove (9) alunos ficaram abaixo dos 60% de aproveitamento no teste, o que representa aproximadamente 18% do total de alunos.

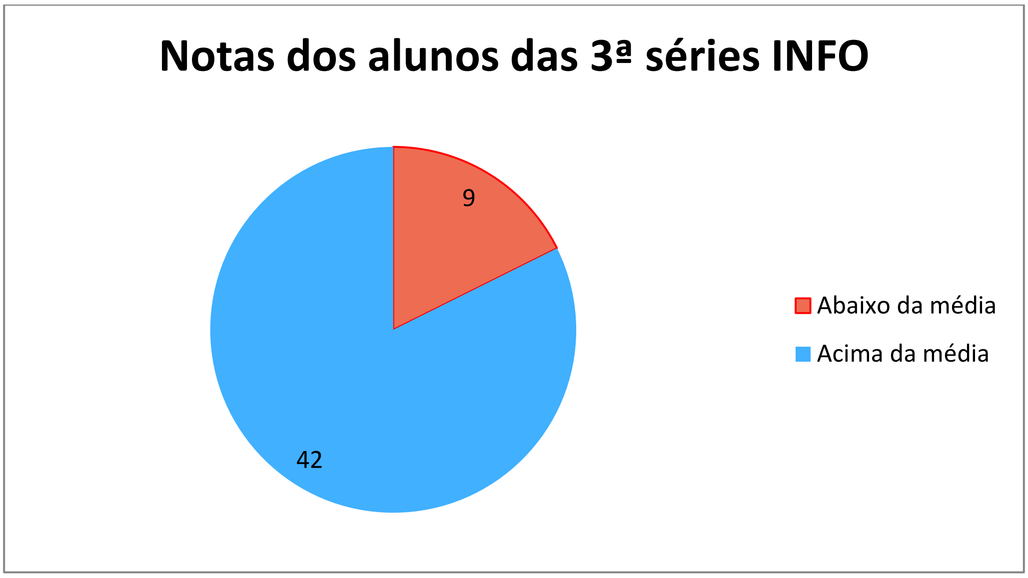


Figura 34 – Nota 1
Fonte: O autor (2020).

Na turma M01, que realizou o jogo Max_Min, dos 24 alunos, 10 alunos ficaram abaixo dos 60% de aproveitamento, o que representa 42% do total de alunos. Essa turma apresentou um número maior de alunos com dificuldade em Matemática.

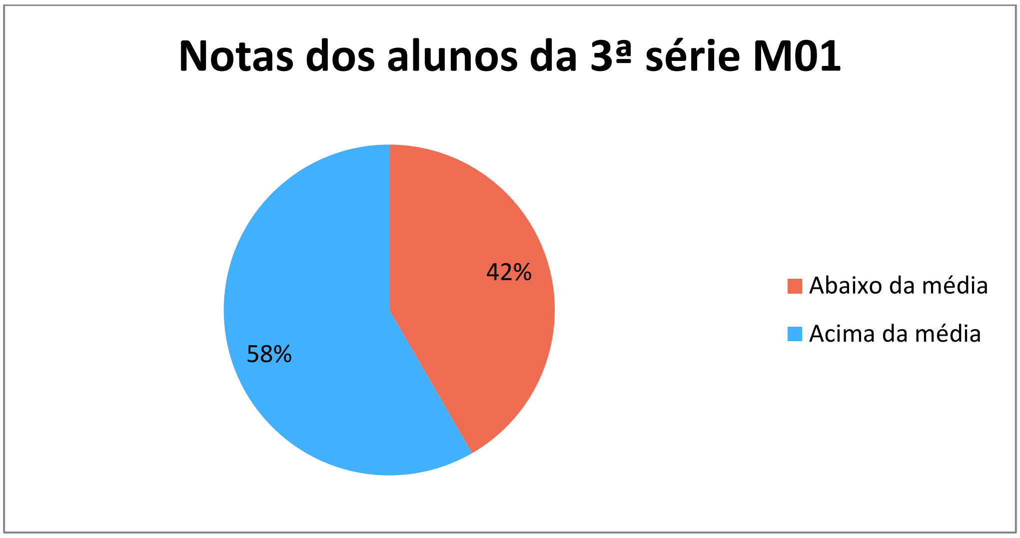


Figura 35 – Nota 2
Fonte: O autor (2020).

Na turma M02, que participou de aulas tradicionais e resolução de lista de exercícios, dos 27 alunos que realizaram o teste, 15 ficaram abaixo dos 60% de aproveitamento, o que representa aproximadamente 56% do total de alunos.

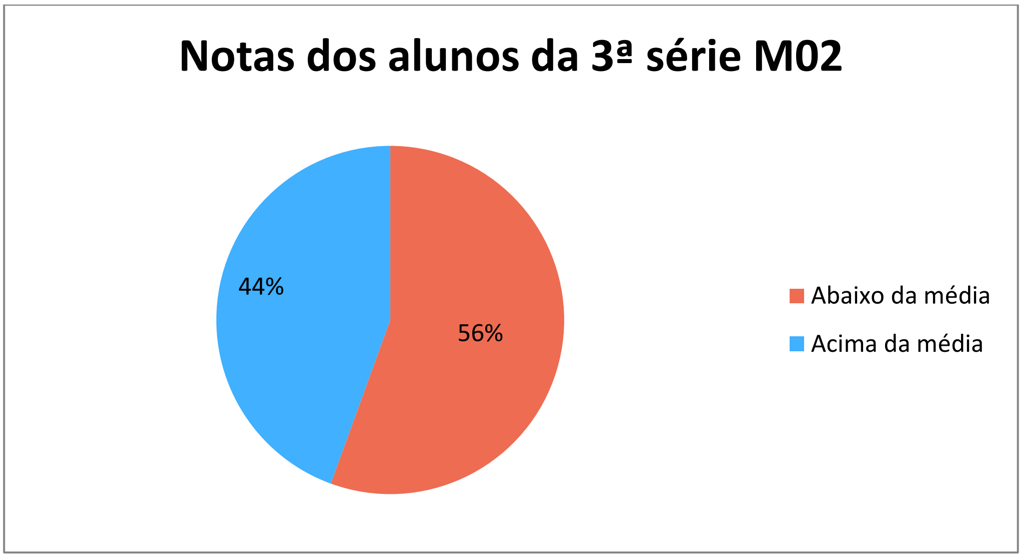


Figura 36 – Nota 3
Fonte: O autor (2020).

Dos dados apresentados, podemos observar um maior e melhor aproveitamento dos alunos que realizaram as duas atividades propostas.

Pode-se notar um avanço nas turmas que tiveram a oportunidade de praticar em sala de aula as atividades propostas, e acredita-se que também contribuíram de alguma forma com o bom desempenho dos alunos, acima da média da região, nos percentuais de acertos em simulados internos e em provas externas como o PAEBES.

Utilizamos o PAEBES como exemplo, pois é a principal avaliação externa das escolas estaduais do Espirito Santo. Ele avalia os alunos do 9 º ano do Ensino Fundamental e 3 ª série do Ensino Médio.

Anos	**ES**	**S.R.E Colatina**	**Escola Honório Fraga**
2019	290,5	299,5	311,9
2018	288,9	295,4	317,7
2017	289,5	296,1	310,2

Tabela 10 – Dados de Proficiência em matemática da 3ª série no PAEBES[34].
Fonte: O autor (2020).

Da tabela acima, é observável que os alunos da Escola Estadual Honório Fraga, nos últimos três anos têm tido um aproveitamento melhor em Matemática em relação à Superintendência Regional de Colatina, que por sua vez tem uma proficiência melhor do que o resto do estado.

Por fim, esse trabalho visa incentivar práticas de ensino que estimulem a participação ativa e efetiva dos estudantes no processo ensino-aprendizagem como condição fundamental para a construção de conhecimento em sala de aula. Além disso tornar a aprendizagem significativa e prazerosa, pois como professores, é um dos nossos principais desafios

[34] Esses dados podem ser acessados no site http://www.paebes.caedufjf.net/resultado-por-escola-redes-estadual-e-municipal/.

7. REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):** Matemática. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental - MEC/SEF, 1997. 142 p. Disponivel em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):** Ensino Médio. Brasília: Ministério de Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica-MEC/Semtec, v. 3, 2000. Disponivel em: <http://portal.mec.gov.br/conaes-comissao-nacional-de-avaliacao-da-educacao-superior/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica-MEC/SEB, v. 2, 2006.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasil: Ministério de Educação-MEC, 2018. Disponivel em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192>.

BRUNEHILDE, C.; CORDEIRO, N. J.; OLIVEIRA, F. R. **Jogando com Probabilidade de Estatística**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

BUSSAB, W. D. O.; MORETIN, P. A. **Estatística Básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

CAZORLA, I. et al. **Estatística para anos iniciais do Ensino Fundamental**. 9. ed. Brasília: SBEM, 2017.

CAZORLA, I. M.; SANTANA, E. D. S. **"Tratamento da Informação" para o Ensino Fundamental e Médio**. 2. ed. Brasil: Literarum, Via, 2009.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 2000.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, v. 1, 2005.

DANTE, L. R. **Matemática:** vol. único, livro do professor. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005.

ECHEVARRIA, M. D. P. P.; POZO, J. I. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ESPÍRITO SANTO. **Currículo Básico Escola Estadual:** Ensino médio: Ciências da Natureza. Vitória: Secretaria de Educação-SEDU, 2009.

FONSECA, J. S. D.; MARTINS, G. D. A. **Curso de Estatística**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GAL, I. Adult's Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsabilities. **International Statistical Review**, 70, n. 1, 2002. 1-25.

GONÇALVES, F. A. **Estatística Descrítiva**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1978.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar:** conjuntos e funções. 7. ed. São Paulo: Atual, v. 3, 1996.

LANDIM, F. **Livro Aberto de Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

LEMOS, M. P. F. O estudo do tratamento de Informação nos Livros Didáticos das Séries Iniciais do Ensino Fundamental. **Ciência e Educação**, 12, n. 2, 2006. 171-184.

LOPES, C. A. E. O Ensino da Estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Caderno CEDES**, Campinas, 12, n. 2, jan-abril 2008. 57-73. Disponivel em: <http://www.cedes.unicamp.br>.

LOPES, J. M. O Uso do jogo Max-Min Estatístico em sala de aula. **Revista de Educação Matemática-Redumate**, CD México, p. 1-13, 2015. Disponivel em: <http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/146/102>.

MACHADO, J. N. Sobre Livros Didáticos. **Em Aberto**, Brasília, n. 69, p. 30-38, jan./mar. 1996. Disponivel em: <http://rbepold.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/2064/2033#:~:text=A%20proposi%C3%A7%C3%A3o%20categ%C3%B3rica%20'Todos%20os,m%C3%A1%20qualidade%22%20%C3%A9%20inteiramente%20inaceit%C3%A1vel.&text=Alguns%20livros%20de%20indiscut%C3%ADvel%20qu>.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. D. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 4. ed. São Paulo: USP, 2002.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: Coleção PROFMAT- SBM, 2015.

MOURA, M. O. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. São Paulo: FDE, 1992. Disponivel em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf>.

MÜLLER , D.; NUNES, L. Ensino de Esatística no ensino médio noturno pela prática de uma pesquisa de campo. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 1245-1263, 2016. Disponivel em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/viewFile/31482/21942>.

PLACKET, R. L. Studies in the History of Probability and Statistics: VII The Principle of the Arithmetic Mean, p. 130-135.

SADOVSKY, P. Falta fundamentação didática no ensino da matemática. **Nova Escola**, São Paulo, 2007.

TRIOLA, M. F. **Introdução à Estatística**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

VIALI, L.; ODY, M. C. A produção brasileira em Educação Estatística avaliada pela análise das teses. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, 22, n. 1, 2020. 068-094.

VIEIRA, S. **Estatística Básica**. São Paulo: Cengage Learning, 2015.