UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
PPG EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MÁRCIO ANDRÉ SANTA BRÍGIDA LIMA

MODELAGEM MATEMÁTICA, GEOMETRIA FRACTAL E GEOGEBRA: PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA ENSINAR CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

CASTANHAL/PA
2021

MÁRCIO ANDRÉ SANTA BRÍGIDA LIMA

MODELAGEM MATEMÁTICA, GEOMETRIA FRACTAL E GEOGEBRA: PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA ENSINAR CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Pará para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Roberta Modesto Braga.

CASTANHAL/PA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L732m Lima, Márcio André Santa Brígida.
Modelagem Matemática, Geometria Fractal e Geogebra: Proposta de Atividades para Ensinar Conteúdos Matemáticos do Ensino Médio / Márcio André Santa Brígida Lima. — 2021.
72 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Roberta Modesto Braga
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Castanhal, 2021.

1. Modelagem Matemática, Geometria Fractal, Tecnologia, GeoGebra, Ensino. I. Título.

CDD 510

MÁRCIO ANDRÉ SANTA BRÍGIDA LIMA

MODELAGEM MATEMÁTICA, GEOMETRIA FRACTAL E GEOGEBRA: PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA ENSINAR CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Pará para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Orientadora: Profa. Dra. Roberta Modesto Braga

Data de aprovação: 26 / 03 / 2021

Banca examinadora:

____

Profa. Dra. Roberta Modesto Braga - Orientadora
Universidade Federal do Pará – Campus Castanhal

____

Profa. Dra. Kátia Liége Nunes Gonçalves – Examinadora Externa
Universidade Federal do Pará – Campus Castanhal

____

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida – Examinador Interno
Universidade Federa do Pará – Campus Castanhal

____

Prof. Dr. Valdelírio da Silva e Silva – Examinador Interno
Universidade Federa do Pará – Campus Castanhal

Aos meus pais que com seu exemplo e dedicação me ensinaram o valor da vida e para minha amada esposa por seu amor e apoio incondicional durante estes anos vividos.

Agradecimentos

Acima de tudo, a Deus pela vida, pelo conhecimento e sabedoria para o êxito nas disciplinas.

À minha família, em especial, à minha esposa Bárbara Matos Lima e meus filhos Márcio André Júnior e Marjori Brena, que apesar de minha ausência, deram-me apoio, demonstrando amor e compreensão em todos os momentos.

A Universidade Federal do Pará, Campus Castanhal, por ofertar o Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), possibilitando a oportunidade de ingresso em uma pós-graduação de qualidade.

À minha professora e orientadora Roberta Modesto Braga, pelo incentivo e dedicação nos momentos que eu mais precisei para a realização deste trabalho.

Aos professores Valdelírio Silva, Arthur Almeida e professora Kátia Liége pela disponibilidade e considerações sobre o trabalho.

Aos meus colegas de turma, pelos momentos de descontração, companheirismo e troca de conhecimento durante o tempo de curso.

E, a todos os professores do programa pelo conhecimento repassado e pela dedicação e compromisso com uma formação de qualidade.

“Posso ainda não ter chegado onde eu queria, mas estou mais perto que ontem”

Alexsandra Zulpo

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo elaborar e apresentar cinco atividades de Modelagem Matemática com problemáticas derivadas de fractais que foram investigadas com o uso do GeoGebra como propostas para ensinar conteúdos matemáticos do Ensino Médio. Foi utilizado nessas atividades o software GeoGebra para auxiliar na visualização, experimentação e se obteve modelos matemáticos observados na geometria dos fractais, nesse processo conceituou-se alguns conhecimentos matemáticos. Pretendeu-se, com isso, promover atividades experimentais com o apoio tecnológico, que desperte a curiosidade e a motivação dos estudantes para o ensino de matemática. A relevância desse trabalho vislumbrou-se por apresentar uma abordagem de conteúdos do Ensino Médio através da visualização, observação e reflexão de situações do mundo real. Constatou-se nas atividades propositivas que o ensino de alguns tópicos da matriz curricular de matemática do Ensino Médio (Triângulo equilátero, Sequências, Ponto médio, Potenciação, Área e Perímetro, entre outros) podem tornar-se mais atraentes quando se aplica uma sequência que usa a Modelagem Matemática, a Geometria Fractal e um software de geometria dinâmica, o GeoGebra, como suporte tecnológico.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Geometria Fractal, Tecnologia, GeoGebra. Ensino.

ABSTRACT

The present research aims to elaborate and present five Mathematical Modeling activities with problems derived from fractals that were investigated with the use of GeoGebra as proposals to teach high school mathematical content. In these activities, the GeoGebra software was used to assist in visualization, experimentation and mathematical models obtained in fractal geometry were obtained. In this process, some mathematical knowledge was conceptualized. With this, the intention was to promote experimental activities with technological support, which arouses the students' curiosity and motivation for teaching mathematics. The relevance of this work was glimpsed by presenting an approach to high school content through visualization, observation and reflection of real-world situations. It was found in the proposed activities that the teaching of some topics in the high school mathematics curriculum (Equilateral triangle, Sequences, Midpoint, Potentiation, Area and Perimeter, among others) can become more attractive when applying a sequence that uses Mathematical Modeling, Fractal Geometry and dynamic geometry software, GeoGebra, as technological support.

Keywords: Mathematical Modeling, Fractal Geometry, Technology, GeoGebra. Teaching.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O foco dessa pesquisa é propor o ensino de conteúdos matemáticos presentes no currículo do Ensino Médio, por meio da Modelagem Matemática como estratégia de ensino de matemática, da geometria fractal como fator inspirador e motivacional, bem como o uso de um software de geometria dinâmica, o GeoGebra.

Depois de uma revisão de literatura, observou-se o quão o desenvolvimento dessa área da Matemática pode fazer diferença para o conhecimento das ciências e para o ensino de matemática nas escolas de Ensino Médio. Neste sentido, a geometria fractal é estopim para problematização e motivação propícia à iniciação de conteúdos matemáticos, algébricos e geométricos, presentes no currículo do Ensino Médio como: Triângulo equilátero, Sequências, Ponto médio, Potenciação, Área e Perímetro, entre outros, dado sua maneira inovadora capaz de acordar a curiosidade e o espírito investigativo dos estudantes.

As aulas de matemática, em geral, utilizam excessivamente cálculos e algoritmos quando são abordados os conteúdos do currículo do Ensino Médio, trazendo com isso, dificuldade para o entendimento e aprendizado dos estudantes, visto que são abordados de forma a favorecer o estudo de conceitos e técnicas desvinculadas da realidade dos estudantes e de atividades práticas, sem uma visualização e experimentação.

Nesse contexto, surgiram algumas ideias relativas ao uso da Modelagem Matemática, aliada com a geometria fractal e o GeoGebra, em sala de aula, que foram ganhando forma para a seguinte proposta de ensino: Que possibilidades têm atividades de Modelagem Matemática contextualizadas na Geometria Fractal e vinculadas ao uso do GeoGebra para ensinar conteúdos matemáticos do Ensino Médio? No intuito de contemplar a questão levantada, a presente pesquisa tem como objetivo elaborar e apresentar cinco atividades de Modelagem Matemática com problemáticas derivadas de fractais a serem investigadas com o uso do GeoGebra como propostas para o ensino de conteúdos matemáticos do nível médio.

As atividades apresentadas nesse estudo foram pensadas do ponto de vista da Modelagem Matemática usando a geometria fractal, com uso de um instrumento tecnológico para o ensino de Matemática, as quais foram voltadas para o entendimento de alguns conceitos e propriedades de conteúdos matemáticos do Ensino Médio.

O texto relatório da pesquisa é apresentado em capítulos. O primeiro capítulo mostra a geometria fractal, trazendo suas exemplificações, sua relação com a geometria euclidiana e também como essa geometria vem sendo utilizada no Ensino Médio, dando um embasamento e contribuindo para o decorrer da pesquisa.

O segundo capítulo apresenta a Modelagem Matemática e sua aplicação no Ensino Médio, mostrando a modelagem como estratégia de ensino aliada ao uso de tecnologias digitais e como esta pode favorecer o processo de ensino de matemática.

O terceiro capítulo trata da geometria dinâmica, especialmente do software GeoGebra, e suas contribuições no ensino de matemática, mostrando como essa ferramenta tecnológica pode despertar a curiosidade e interesse dos estudantes.

O quarto capítulo apresenta os aspectos metodológicos com uma revisão de literatura, trazendo, no âmbito da aprendizagem, informações pertinentes sobre outras pesquisas. O quinto capítulo apresenta as cinco atividades, sendo duas com discussão de aplicação para que o professor leitor compreenda o encaminhamento e possa desenvolver as outras atividades de Modelagem Matemática em sala de aula. E por fim, aponta para o uso das atividades propostas pelos professores em suas aulas de matemática como proposta alternativa e complementar ao modo tradicional de ensino.

1. GEOMETRIA FRACTAL

Este capítulo apresenta uma abordagem matemática sobre a geometria fractal e foi construído de acordo com os autores Mandelbrot (1998), Barbosa (2005) e Peitgen (1992).

Será abordada a sua definição, classificação e exemplos, bem como outros aspectos dos fractais. Será mostrada também a relação entre a geometria fractal e geometria plana. Apresentar-se-á, ainda, a importância e aplicação da geometria fractal como uma proposta para o ensino de outros conteúdos matemáticos no Ensino Médio.

1.1 GEOMETRIA FRACTAL E EXEMPLIFICAÇÕES

Benoit Mandelbrot (1998) criou o termo fractal, para nomear um artefato da geometria que embora seja observado a qualquer distância, jamais perde a sua composição. O principal significado de fractal é a auto semelhança. Essa classificação feita por Mandelbrot (1998) de seus componentes de estudos, deve-se a dimensão fracionária que eles tinham. Essas dimensões em forma de fração seria uma forma de numerar as características desses objetos, pois de outra forma, continuariam inumeráveis.

Segundo Eves (2004), vários matemáticos, no decorrer da história, deram atenção ao estudo de figuras que a geometria euclidiana não conseguia definir, entre eles podemos citar: Waclaw Sierpinski, Georg Cantor, Helge Von Koch e Giuseppe Peano, entre outros. Essas figuras, durante muito tempo, foram chamadas de “monstros matemáticos”. Somente depois, com os trabalhos de Mandelbrot, o grande nome da Geometria Fractal, os monstros matemáticos foram chamados de Fractais Clássicos.

Para um objeto ser classificado como um fractal, o mesmo tem que possuir algumas características próprias de *semelhança, complexidade e dimensão*. Esses objetos fractais podem ser encontrados na natureza como os raios, um floco de neve, uma concha marinha entre outros. Mas também esses fractais podem ser construídos geometricamente ou aleatoriamente através de processos de repetição, como os fractais: a ilha de Koch, triângulo de Sierpinski, entre outros fractais clássicos. A seguir, far-se-á um resumo de cada uma dessas características dos fractais de acordo com Mandelbrot (1998).

Auto Semelhança: para uma figura ser auto semelhante, ela tem que ficar semelhante com a figura no seu estado normal quando diminuímos ou ampliamos algumas de suas partes.

Pode-se destacar dois tipos de auto semelhanças: a exata e a aproximada. Encontra-se a semelhança aproximada na natureza; isso porque não se consegue observar várias escalas de ampliação, como por exemplo no caso da couve-flor. Em vista disso, deve-se ter a atenção por essas partes terem estruturas parecidas, mas não são réplicas exatas. Já no caso da auto semelhança exata, esta não se pode encontrar na natureza e só existe seguindo padrões matemáticos.

Complexidade: pode-se entender a complexidade como sendo o processo pelo qual uma figura é construída, sendo sempre um procedimento recursivo, no qual cada etapa para sua criação obedece a um padrão que pode ser entendido como uma sub etapa da fase anterior. Mas para se construir um fractal definido matematicamente usa-se infinitos procedimentos, e com isso é gerada uma estrutura infinitamente complexa.

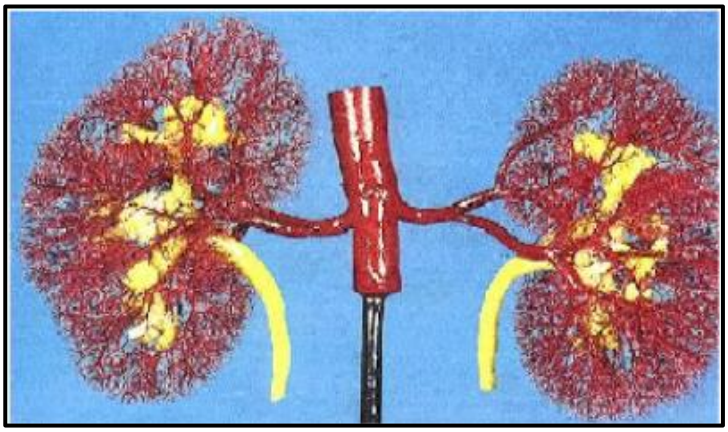
Dimensão Fractal: quando se pensa sobre dimensão, é importante lembrar-se de Euclides e destacar logo o comprimento, a largura e a altura de determinado objeto. Nota-se que a dimensão 0 é representada por um ponto, a dimensão 1 tem como representação uma reta, a dimensão 2 tem sua representação uma superfície e a dimensão 3 que é representada pelo espaço.

Essas dimensões euclidianas são representadas por números inteiros não negativos 0, 1, 2 e 3. Na dimensão de um fractal isso muda, pois os fractais podem ter como dimensão números inteiros não negativos e números fracionários como se pode observar nas figuras 1 e 2 abaixo.

Figura 1: Tempestade no Capitólio, com relâmpagos cuja dimensão fractal é 1,51.

Fonte:*https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000200005*

Figura 2: Sistema arterial dos rins com dimensão fractal 1,61



Fonte:*https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid =S1806-11172008000200005*

Conforme Mandelbrot (1998), é possível calcular a dimensão fractal de um objeto usando a fórmula de Hausdorff-Besicovitch que apresenta-se a seguir:

$$D=\frac{\log n}{\log \frac{1}{R}} \tag{1}$$

Onde:

D é a dimensão

n é o número de partes geradas

R é o fator de redução

Usa-se essa fórmula para e medição de objetos que tem auto semelhança exata ou aproximada.

1.1.1 EXEMPLOS DE FRACTAIS CLÁSSICOS

A seguir, serão apresentados alguns exemplos de fractais clássicos, cujas aproximações podem ser contruídas em papel ou por meio do geogebra.

1.1.2 ÁRVORE DE PITÁGORAS

A árvore de Pitágoras que também é conhecida como Hipertexto de Pitágoras, é um fractal construído tendo como base nosso conhecido triângulo retângulo com quadrados formados em cada um dos seus lados. Seu nome vem do conhecido Teorema de Pitágoras. Foi construída pela primeira vez pelo matemático alemão Albert Bosnam no ano de 1942. Sua construção é uma sequência de simples iterações e que forma um dos mais bonitos fractais da atualidade.

Esse fractal pode ser construído seguindo os seguintes passos apresentados a seguir:

1º passo: Construa um quadrado,

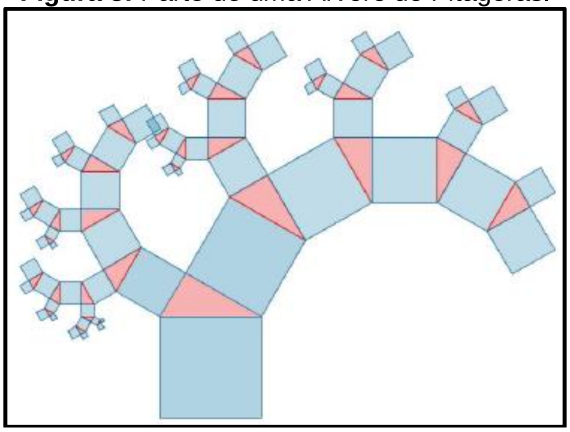
2º passo: Usando como base o lado de superior deste quadrado, construa um triângulo retângulo tendo como hipotenusa esse lado superior;

3º passo: Em seguida, nos dois catetos restantes do triângulo, construa dois novos quadrados cujos lados são exatamente os catetos;

4º passo: A partir daqui repita os 3 passos anteriores para os dois novos quadrados.

Esse fractal pode diferenciar seu formato de acordo com os ângulos agudos internos do triângulo retângulo que forma a árvore. Conforme ilustra as figuras 3 e 4 a seguir.

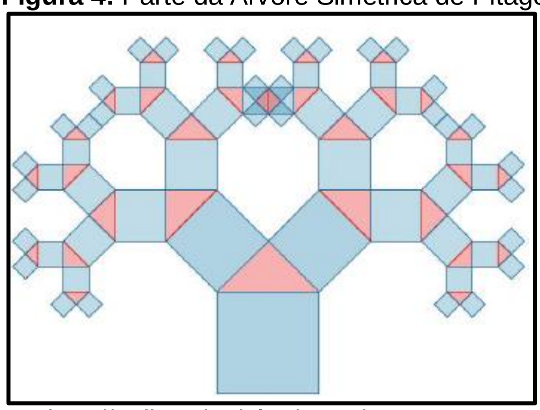
Figura 3: Parte de uma Árvore de Pitágoras.



Fonte: http://oaji.net/articles/2017/1602-1486725596.pdf

Na figura 4, a árvore de Pitágoras é chamada de Simétrica e toda ela é formada por triângulos isósceles.

Figura 4: Parte da Árvore Simétrica de Pitágoras



Fonte: http://oaji.net/articles/2017/1602-1486725596.pdf

Na Árvore de Pitágoras, é possível explorar vários tópicos de matemática como: o número de quadrados, o perímetro de cada triângulo, o perímetro de cada quadrado, a área de cada triângulo, a área de cada quadrado, o perímetro total e a área total entre outros.

1.1.2 FLOCO DE NEVE DE KOCH (TRIÂNGULO EQUILÁTERO)

O floco de neve de Koch foi criado pelo matemático sueco Helge Von Koch no ano de 1904, e também é chamado de Ilha de Koch. O processo de construção desse fractal inicia com um triângulo equilátero

O floco de neve de Koch pode ser construído seguindo os seguintes passos:

1º passo: Construa um triangulo equilátero,

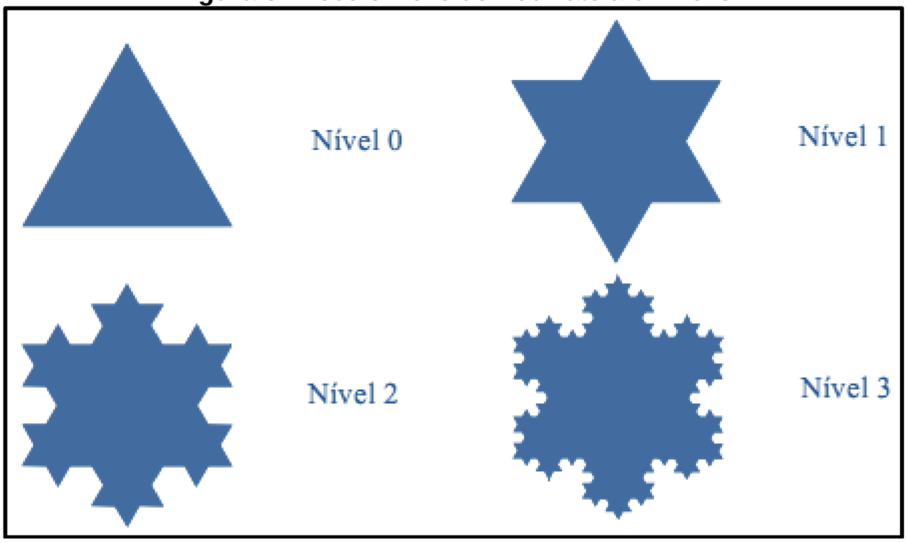
2º passo: Divida cada lado do triangulo equilátero em três partes iguais, construindo sobre cada segmento médio um novo triângulo equilátero, tal como podemos observar na figura 5;

3º passo: Repita o 2º passo em cada um dos 12 segmentos obtidos;

4º passo: Repita inicialmente o processo, obtendo a Ilha de Koch;

A figura 5 a seguir mostra as primeiras iterações do floco de neve de Koch.

Figura 5: Floco e Neve de Koch até a o nível 3



Fonte: Autoria própria usando o GeoGebra (2020)

Nesse fractal, pode-se explorar vários tópicos de matemática como: sequências, ponto médio, potenciação, área, perímetro entre outros.

1.1.3 VARIAÇÃO DO FLOCO DE NEVE DE KOCH (QUADRADO)

A variação do floco de neve de Koch, também foi proposta por Helge Von Koch no ano de 1904. Diferente do fractal original, essa variação do floco de neve inicia com quadrado.

Essa variação do floco de neve de Koch pode ser construída seguindo os seguintes passos a seguir:

1º passo: Construa um quadrado;

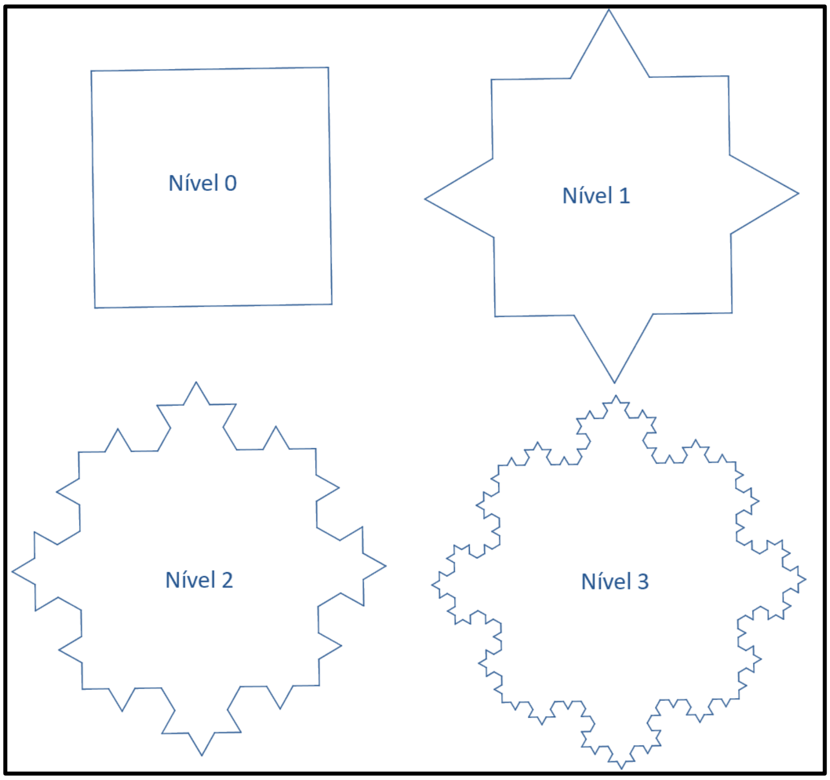
2º passo: Divida cada lado do quadrado em três partes iguais, construindo sobre cada segmento médio um triângulo equilátero, tal como podemos observar na figura 6;

3º passo: Repita o 2º passo em cada um dos 12 segmentos obtidos;

4º passo: Repita inicialmente o processo, obtendo a variação da Ilha de Koch;

A figura 6 a seguir mostra as primeiras iterações das variações do floco de neve de Koch iniciando por quadrado.

Figura 6: Variação do Floco de Neve de Koch até a o nível 3



Fonte: Autoria própria usando o GeoGebra (2020)

Nessa variação da Ilha de Koch, pode-se explorar vários tópicos de matemática como: sequências, ponto médio, potenciação, área, perímetro entre outros.

1.1.4 TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Segundo Eves (2004), Waclaw Sierpinski foi um matemático, que nasceu na Polônia e ficou conhecido por várias contribuições em diversas áreas como teoria de conjuntos, teoria dos números e topologia. Em seus estudos, criou um fractal geométrico que ficou conhecido como Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski ou Fractal de Sierpinski, que se obtém como limite de um processo iterativo.

Existem diferentes formas de construção deste fractal, uma delas será descrita passo a passo a seguir:

1º passo: Construa um triangulo equilátero,

2º passo: Construa 4 triângulos equiláteros unindo os pontos médios dos lados do triangulo equilátero inicial;

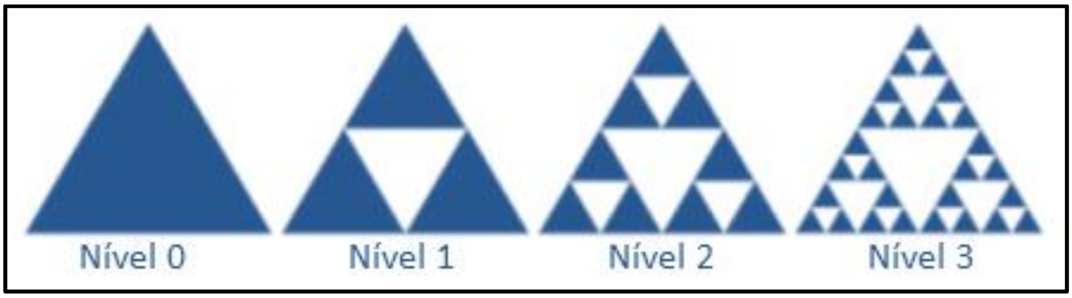
3º passo: Remova o triângulo equilátero central;

4º passo: Repita em cada um dos triângulos não removidos, o 2º e o 3º passo;

5º passo: Repita o 4º passo várias vezes;

A figura 7 a seguir mostra as primeiras iterações da criação do triângulo de Sierpinski iniciando por um triângulo equilátero.

Figura 7: Triângulo de Sierpinski até a o nível 3



Fonte: Autoria própria usando o GeoGebra (2020)

No triângulo de Sierpinski, pode-se explorar vários tópicos de matemática como: Triângulo equilátero, Sequências, Ponto médio, Potenciação, Área, Perímetro, entre outros.

1.1.5 TAPETE DE SIERPINSKI

Esse fractal também foi criado pelo matemático Waclaw Sierpinski, que o mesmo criador do Triângulo de Sierpinski. Para obter esse fractal pode-se usar o processo análogo ao que é usado para o triângulo.

Pode-se construir esse fractal seguindo o passo a passo descrito a seguir:

1º passo: Construa um quadrado de lado qualquer,

2º passo: Divida em três partes iguais cada lado do quadrado;

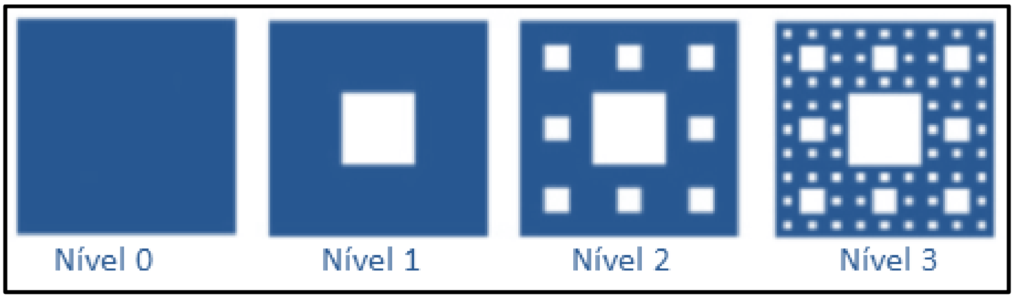
3º passo: Interligue com segmentos de reta os pontos formados por essas divisões, formando nove quadrados internos ao maior;

4º passo: Remova o quadrado central dos nove formados;

5º passo: Repita em cada quadrado gerado, os procedimentos a partir do segundo passo.

A figura 8 a seguir mostra as primeiras iterações da criação do triângulo de Sierpinski iniciando por um triângulo equilátero.

Figura 8: Tapete de Sierpinski até a o nível 3



Fonte: Autoria própria usando o GeoGebra (2020)

Com o fractal Tapete de Sierpinski é possível explorar alguns tópicos de matemática como: Frações, Sequências, Potenciação, Área, Perímetro, entre outros conteúdos do Ensino Médio.

1.2 GEOMETRIA FRACTAL E GEOMETRIA EUCLIDIANA

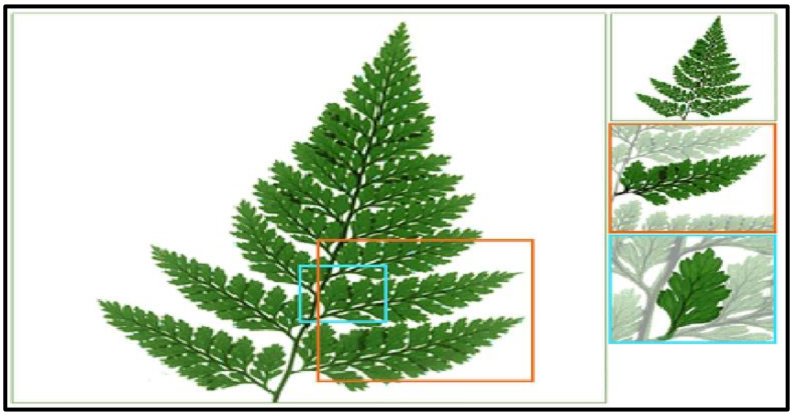
Desde a antiguidade, trabalhou-se por muito tempo a geometria de Euclides, Geometria Euclidiana, acreditando que ela descrevia todos os padrões matemáticos existentes na natureza. Porém, em alguns estudos, esta não era suficiente para descrever algumas formas irregulares que aparecem na natureza como: montanhas, raios, couve-flor, ramos de árvores, vasos sanguíneos. Com isso, somente essa geometria não contemplava o estudo dessas formas naturais, surgindo a necessidade de buscar outros estudos geométricos.

Segundo Mandelbrot (1977), ‘as nuvens não são esferas, montanhas não são cones, as costas não são círculos e casca não é suave, nem raio viaja em linha reta. Estas formas são mais complexas e não podem ser estudadas pela geometria plana'.

Com isso, em meados do século XIX surgiu a geometria fractal para estudar essas formas irregulares. Nessa geometria, a dimensão de um objeto tem relação com o seu formato e muitas vezes esse formato é o espaço que uma estrutura ocupa no espaço métrico que ela pertence. Diferente da geometria euclidiana que usa os conceitos de comprimento, largura e altura para definir a dimensão de objetos.

Observando a figura 9 abaixo, pode-se destacar uma estrutura presente na natureza que apresenta irregularidades na sua estrutura. Esses objetos irregulares eram considerados como verdadeiros monstros da matemática e que a geometria de Euclides não era capaz de estudá-los na íntegra.

Figura 9: Folha de Samambaia



Fonte: https://miro.medium.com/max/449/1*fjtZTuvOJuENWNuap0I7kQ.png

A geometria fractal foi proposta em 1975 por Bernoit Mandelbrot, que foi considerado um dos matemáticos mais importantes nesse estudo. Outros matemáticos como: George Cantor e Helge Von Koch também tiveram seu destaque com os fractais ao criarem alguns objetos fractais.

1.3 GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO

Conforme Brasil (2000) um dos principais objetivos quando se estuda geometria, é permitir aos discentes o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos com figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas. Com isso, a Matemática tem a função no ensino de fazer com que o estudante perceba e compreenda o mundo a sua volta.

A Geometria que é ensinada atualmente nas escolas, não deveria ser direcionada para a memorização e uso de regras, algoritmos e definições. Esta deveria ter como principal foco o desenvolvimento intelectual dos estudantes em toda sua essência.

A utilização da geometria fractal nas aulas de matemática auxilia na interação com outros campos do conhecimento, expõe que a geometria euclidiana apresenta algumas limitações e relaciona geometria, aritmética e álgebra em uma conexão bem interessante.

De acordo com Mendonça (2016), essa geometria leva os estudantes a despertarem uma afinidade entre o saber escolar e o saber do seu dia a dia, além de apresentar que a matemática é bem dinâmica e não uma ciência pronta e acabada.

Pode-se trabalhar a geometria fractal no Ensino Médio agregando a mesma com outras disciplinas como: Artes, Ciências, Geografia, Biologia, entre outras. De maneira que os temas das aulas conversem com outros temas de outras áreas do conhecimento.

Nesse sentido, Moreira (2017) destaca que a abordagem da geometria fractal pode servir de motivação no estudo de outros assuntos presentes no currículo escolar tais como: padrões geométricos e numéricos, sequências, contagem, perímetros, áreas, volumes, entre outros.

Ainda de acordo com Moreira (2013), o uso da geometria fractal no Ensino Médio vem apoiar a construção do conhecimento desses estudantes, pelo fato de relacionar a matemática com o que existe na natureza, de uma forma que os estudantes percebam que todo conhecimento matemático adquirido está relacionado com o mundo onde ele vive.

Quando se fala nessa geometria fractal, isso soa estranho para uma parte significativa dos professores de matemática, pelo fato de ser um conteúdo dificilmente presente no currículo das licenciaturas e nos livros que são usados nas escolas, e quando aparecem, são tratados de forma bem superficial e sem uma orientação de se explorar esse assunto.

Segundo Nascimento (2012), pode-se encontrar ainda nas escolas algumas dificuldades para o uso da geometria fractal no ensino de matemática, a maior delas são os professores que nunca ouviram dessa nova geometria em sua formação superior.

Assim, destaca-se a importância da criação de material didático para apoio dos professores quando levarem a beleza da geometria fractal para suas aulas de matemática, uma vez que ela vem sendo cobrada em algumas diretrizes curriculares e processos seletivos de várias universidades.

O capítulo seguinte, apresenta a Modelagem Matemática como uma estratégia diferenciada de ensino de matemática e aliada com tecnologia.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

Atualmente uma das dificuldades no ensino da matemática é a forma como o conteúdo é trabalhado, os assuntos são ministrados na sala de aula, na maioria das vezes para resolução de exercício e tratamento de algoritmos, com pouca conexão com problemas do mundo real.

Os estudantes argumentam que os conceitos trabalhados em sala têm pouca conexão e aplicação em sua vida diária, então como alternativa é possível vincular as aulas de matemática com situações do cotidiano. A busca por estratégias de ensino torna-se necessária. Neste sentido, há opções de estratégias de ensino que buscam resultados melhores no ensino de matemática, como: resolução de problemas, o uso da história da matemática, o uso de tecnologias digitais para o ensino de matemática, entre outras.

Dentre essas, a Modelagem Matemática vem desenvolvendo dentro da área de Educação Matemática, configurando uma estratégia de ensino que tem potencial de apresentar resultados positivos quando utilizada no ensino, e que somada a tecnologias digitais pode promover dinâmica ao processo de ensino. Entende-se que as tecnologias digitais são:

> constituídas de fatores sensíveis, que viabilizam aspectos abstratos. Isto quer dizer que as tecnologias digitais permitem, por meio de diferentes interfaces, agir sobre ambientes digitais e receber simultaneamente respostas derivadas dessas ações (MENEZES, ESPÍRITO SANTO e BRAGA, 2017, p. 13)

A esse aspecto associado ao ambiente de Modelagem Matemática no qual os estudantes são convidados a investigar, através da matemática, situações com referência à "realidade", permite aos estudantes explorar uma situação problemática, colocar hipóteses e encontrar as ferramentas ou teoremas apropriados que precisam usar para resolver situações que podem ser discutidas em ambientes digitais.

Esse ambiente permite ao professor considerar o ambiente físico e social para abordar situações problemáticas em contextos ligados aos estudantes, isto é, o professor terá opções para lhe ajudar a relacionar os conceitos matemáticos com o mundo real, de tal forma que os estudantes possam ver uma maior importância para os temas da matemática escolar. A Modelagem Matemática também contribui para que os estudantes percebam a matemática como uma disciplina que pode ser usada para entender e modificar a realidade, colocando situações problemáticas do mundo real, o mais próximo possível da sensibilidade dos estudantes (Castro e Castro, 1997; Ortiz, 2000). Por outro lado, a Modelagem Matemática tem um espaço de reflexão que mostra os processos de transmissão e construção do conhecimento matemático a partir da “colaboração e interação entre os estudantes, professor e objetos investigados” (BRAGA, 2009).

O professor poderá apresentar aos estudantes uma situação em que eles podem trabalhar com um fenômeno ou situação do cotidiano que lhes é familiar ou que seja motivacional para convidá-los a pensar matemática e que lhes permita colocar seus conhecimentos matemáticos no processo de modelagem.

Segundo Biembengut e Hein (2009) deve ser feita, inicialmente, uma breve exposição sobre o tema permitindo certa delimitação do estudante com uma área em questão. Este momento é importante. A forma como o professor demonstra seu conhecimento e interesse sobre o tema em questão pode contribuir, significativamente, para a motivação dos estudantes. Afinal, só aprende quem quer. E a arte de ensinar depende da conquista para o querer aprender. Em seguida, faz-se um levantamento de questões, procurando instigar os estudantes a participarem com sugestões.

Nota-se que é possível aliar a Modelagem Matemática com o modo tradicional de se ensinar matemática em prol de uma maneira motivadora e geradora de um ambiente favorável à aquisição de conhecimentos matemáticos. Fazendo com que o estudante participe do processo de ensino e deixe de ver a matemática como uma disciplina ‘difícil’ do currículo escolar.

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

A finalidade do Ensino Médio, segundo Brasil (2008), é permitir aos estudantes a ampliação da autonomia intelectual e do pensamento crítico, a apreensão dos embasamentos científico-tecnológicos dos métodos produtivos, para que possa relacionar a teoria com a prática.

Segundo Brasil (2000, p. 5), no Ensino Médio recomenda-se que seja dado um destaque para a formação geral dos estudantes, para a ampliação da capacidade de investigar, buscar dados, analisá-los e selecioná-los, a capacidade de instruir-se, inventar, formular, ao invés de simplesmente memorizar. Todos esses aspectos estão presentes nas fases de desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática.

Quando se trabalha com a Modelagem Matemática, é oferecido aos estudantes problemas concretos e instiga-se suas soluções, por meio de conhecimentos já adquiridos, na direção de aumentar o conhecimento e construir outros, estabelecendo afinidades entre o que o estudante já conhece e aqueles conhecimentos que ele precisa estudar e aprender.

Neste sentido, Biembengut (2014) destaca que a Modelagem Matemática tem seu diferencial por ser uma estratégia de ensino diferente da forma tradicional que é trabalhada nas escolas nas aulas de matemática. Com essa metodologia, os estudantes poderão ser sujeitos do processo de conhecimento, ao vivenciarem atividades diferenciadas e motivadoras.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E TECNOLOGIA

Para Bassanezi (2006), seja como tática de ensino ou processo de investigação científica, a modelagem é um método que abrange o conhecimento teórico e o prático, trazendo o entendimento da realidade colocada no processo investigativo através da interação do pesquisador, podendo ocorrer algumas transformações, como consequência de ações praticadas sobre ela.

Segundo Biembengut (2004), a modelagem pode ser definida com um conjunto de artifícios indispensáveis para se obter um padrão cuja metodologia pode ser empregada nas mais variadas área da ciência. Na conjuntura do ensino, Biembengut (2004) acrescenta e destaca que a modelagem e seus procedimentos são necessariamente os mesmos que encontramos nos passos da investigação científica, defendendo-os como procedimento de investigação no ensino. A finalidade é estimular e levar os estudantes a desenvolver a pesquisa e aprender matemática junto, podendo ser utilizada em todas as etapas escolares.

Nesse sentido, Biembengut (2013) delimita três fases que constituem o processo de Modelagem Matemática:

Quadro 1: Fases da modelagem

1ª FASE	PERCEPÇÃO E APREENSÃO	Nesta fase se reconhece e delimita o problema; e também ocorre a familiarização com o tópico a ser modelado, que mais na frente se tornará um referencial teórico.
2ª FASE	COMPREENSÃO E EXPLICITAÇÃO	Em seguida da inteiração com o tema, formulamos o problema, elaboram-se questões e apontam-se hipóteses; e depois concretizamos a formulação do modelo.
3ª FASE	SIGNIFICAÇÃO E EXPRESSÃO	A solução da situação problema é feita a partir do modelo e interpretação da solução encontrada. Versa na avaliação do modelo procurando conferir se o mesmo é ou não válido, assim como a expressão do processo e do resultado.

Fonte: Biembengut (2013)

Essas três etapas sugeridas por Biembengut permitem que os estudantes formulem um padrão matemático quando interagirem com situações problemas da sua realidade. O estudante busca entender a situação que o problema está inserido partindo do seu mundo real, realiza proposições, começa a desenvolver o padrão matemático para resolver a situação problema e fazer sua validação. Nesse cenário, o professor é mediador do conhecimento e o estudante o ator principal que executa todos os procedimentos. Quando se usa a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, o conhecimento matemático é aproximado com o dia a dia do estudante para sua compreensão, tendo em vista aprimorar o ensino.

Nos últimos anos, do mesmo modo como a modelagem teve seu destaque, a tecnologia, também se destacou quando o foco é a busca do conhecimento sobre um evento, uma vez que, com a mesma existem outras formas mais prazerosas para se aprender algo.

Para Lévy (1993), as tecnologias digitais criam qualidades para mudanças significativas ao ensino. Papert (1985) também entende que o uso de computadores atrelados a metodologia de projetos acrescenta qualidade ao processo de ensino e aprendizagem, estimulando interesse e motivação dos participantes do projeto. Baseado no que pontuam Lévy (1993) e Papert (1985) entende-se que em atividades de Modelagem Matemática pode-se usar tecnologias digitais como ferramentas que podem auxiliar os estudantes na investigação de problemáticas apresentadas.

Ainda no contexto da Modelagem Matemática, Blum e Niss (1991) asseguram que as tecnologias, empregadas nas atividades de modelagem, assim como promovem a resolução de problema, são imprescindíveis para comprovar e validar o padrão matemático. Borba e Penteado (2001), nesse sentido, ponderam que a informática torna mais fácil as observações de padrões, permite o aparecimento de suposições e podem induzir a novos conhecimentos. Afirmam que os computadores organizam o pensamento de outra forma e colaboram para transformar a metodologia do ensino clássico.

Nesse cenário, Araújo (2002) corrobora com os autores supracitados, entendendo que o intercâmbio entre os estudantes e as tecnologias permite outros caminhos para a pesquisa, de tal modo como a relação entre a modelagem e a tecnologia permite a resolução de problemas em que o estudante participa efetivamente do processo no qual foi inserido.

Deste modo, acredita-se que, ao colocar uma sugestão de atividades de Modelagem Matemática na busca e constituição de conhecimentos matemáticos, se institui entre as pessoas envolvidas uma nova construção de conhecimentos e considerações prévias. Em outras palavras, à medida que caminha em busca do conhecimento matemático no sentido da compreensão do fenômeno estudado, estudante e professor dão outro significado e reconstroem diferentes conceitos, proporcionando um aumento na qualidade da aprendizagem e construção de novas considerações matemáticas.

Nesse sentido, a aplicação da tecnologia digital surge como um instrumento que tem o foco de auxiliar os sujeitos no processo de criação, averiguação e validade dos prováveis modelos construídos, assim como provocar a ampliação dos instrumentos matemáticos necessários para o maior entendimento da situação investigada.

No próximo capítulo, será apresentada a geometria dinâmica, como ambientes virtuais que dinamizam o ensino de conteúdos matemáticos em sala de aula.

3. GEOMETRIA DINÂMICA

Neste capítulo, será exposto o conceito sobre Geometria Dinâmica, destacando o software GeoGebra. No decorrer do texto, é tratado o papel da geometria dinâmica no ensino de matemática, sendo feita uma breve apresentação do GeoGebra e suas contribuições nas aulas de matemática.

3.1 GEOMETRIA DINÂMICA E O ENSINO DE MATEMÁTICA

De acordo com Silva e Penteado (2013), pode-se determinar um ambiente de geometria dinâmica como sendo um software cuja especialidade fundamental é a opção de ‘arrastar’ os artefatos geométricos com o cursor do mouse, ao mesmo tempo em que vai atualizando suas medidas. No panorama da educação, vários estudos têm destacado o potencial didático desses softwares nos diversos níveis de ensino.

Para Laborde (2008), os softwares de geometria dinâmica podem ser considerados como ambientes mediadores entre o ensino da matemática e os estudantes. No caso específico da geometria, garante que o aprendizado desse tópico está diretamente ligado com os modos de expressão do texto, aspectos externos e instrumentos instituídos para fazer geometria, como os clássicos: régua e compasso e ainda as diversas soluções presentes nos software computacionais. O autor reitera que o aprendizado em geometria precisa ser mediado por aspectos externos e instrumentos que estabeleçam a ligação da geometria e o estudante. Nessa direção, pondera que a geometria dinâmica poderia exercer uma função “mediadora” entre a aprendizagem dos conteúdos matemáticos e os estudantes.

Atualmente pode-se encontrar vários softwares de geometria dinâmica para uso em sala de aula, que vão além do trabalho geométrico. No meio deles, o GeoGebra tem recebido destaque em estudos no campo acadêmico e em tarefas do dia-a-dia nas escolas. Esse software foi desenvolvido no ano de 2001 pelo pesquisador Markus Hohenwarter. O GeoGebra é um software gratuito e é programado na linguagem Java, o que lhe permite rodar em várias plataformas operacionais. Seu principal atributo, que causou uma novidade nessa área, é que o usuário pode ter na mesma tela a geometria, a álgebra e o cálculo. Cada objeto visualizado na tela desse software possui uma correspondência geométrica e uma algébrica. Por exemplo, uma parábola pode sofrer modificações arrastando-se seu vértice pela tela do software ou, então, quando é modificada sua lei de formação.

Desde a versão do GeoGebra 5.0 pode-se trabalhar ao mesmo tempo com gráficos, tabelas e estatística, admitindo a criação de planilhas dinâmicas e utilização de objetos para o diagnóstico de dados. Ainda nas versões mais recentes, existe a opção de calcular probabilidades, equações, inequações implícitas, além do estudo da geometria espacial. Tem ainda um modelo que roda em dispositivos móveis.

Todo tipo de software de geometria dinâmica tem como principal característica a função de arraste. Essa função leva os estudantes a explorarem problemas e a construírem hipóteses do objeto matemático em estudo. Hollebrands, Laborde e Sträber (2008) garantem que o modo *arrastar* tem três maneiras que podem ser usados na construção de atividades de ensino de matemática:

Arrastar sem um objetivo específico: Faz menção ao modo aleatório de arraste, no qual o estudante procura regularidades atraentes, acontecendo no andamento da exploração das atividades desenvolvidas.

Arrastar para testar hipóteses: Esse tipo parte da ideia que os estudantes já tenham um entendimento sobre o conteúdo que está sendo trabalhado e faça o uso do arraste pra testar sua construção.

Lugar geométrico pelo arrastar: Este último faz referência ao arraste de maneira que preserve uma determinada característica do objeto em estudo e visualize os pontos que formam o seu lugar geométrico.

A observação dos diferentes padrões citados pelos autores é trabalhada pelos estudantes e dependem de certa forma, do jeito como o professor está administrando o trabalho no software. Em algumas situações, é importante que o estudante arraste os componentes do objeto geométrico aleatoriamente, tentando entender o trabalho que foi proposto ou até mesmo organizar algumas hipóteses. Em diferentes casos, já tendo conhecimento da característica em questão, o estudante pode procurar explicá-la empregando, para isso, o comando *arrastar*, para avaliar suas suposições ou ainda descobrir características do que foi criado a partir de diferentes dados.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), pelo fato de trazerem o modo *arrastar*, os software de geometria dinâmica são bem favoráveis na criação de trabalhos de investigação no ambiente escolar, tendo uma semelhança com o procedimento que o matemático usa para produzir conhecimento que, segundo os autores, destaca várias técnicas como procurar padrões, testar, refletir, provar, justificar e generalizar. Além da metodologia de reformulação e contestação de uma hipótese.

Desse modo, segundo Brocado (2001), pode-se mostrar aos estudantes que a matemática é uma atividade dos seres humanos, imperfeita e que apresenta falhas.

Para Skovsmose (2008), esse enfoque coloca os estudantes nos denominados cenários investigativos. Fazer um trabalho num cenário investigativo requer dos docentes e dos estudantes um juízo de investigação, buscando conhecimentos que são desconhecidos. Nessa pesquisa, todas as atividades de ensino apresentam particularidades que permitem uma investigação.

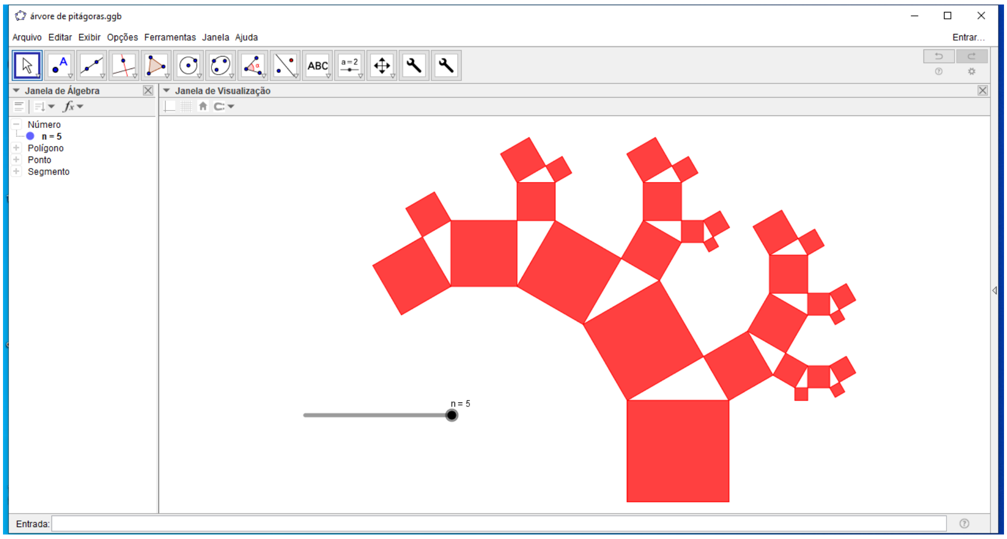
Entretanto, determinados cuidados precisam ser adotados em relação ao emprego desses softwares por professores. Em um cenário no qual, muito cedo, os estudantes entram em contato com essas tecnologias computacionais, não é um trabalho fácil para o professor sem uma formação adequada, proporcionar um método que atenda essa questão. Por outro lado, o uso de forma planejada e correta, proporciona diferentes possibilidades em sala de aula que podem colaborar para o ensino de matemática, levando os estudantes a adquirirem conhecimentos matemáticos de forma prazerosa e motivadora.

3.2. GEOGEBRA EM SALA DE AULA

De acordo com alguns autores, os softwares de geometria dinâmica foram desenvolvidos para adicionar quando se estuda as propriedades das figuras geométricas principalmente na geometria plana, tendo como foco principal a condução do usuário a um entendimento geométrico do processo de construção.

Ele tem duas janelas de trabalho, a janela algébrica e a janela geométrica. Pode-se destacar a janela geométrica sendo aquela em que o usuário faz as construções dos objetos.

Figura 10: Tela do GeoGebra



Fonte: Imagem de produção do Autor (2020)

Nessa direção Hohenwarter (2007), idealizador do software, afirma que a qualidade com mais destaque do GeoGebra é a forma de observação dupla dos objetos, ou seja, que a cada fórmula na janela de Álgebra corresponde a um objeto na janela geométrica e vice-versa. Software computacionais de geometria dinâmica como o GeoGebra, tem um destaque importante quando se fala no entendimento dos conceitos e relações algébricas e geométricas.

Segundo Steinmacher (2011), um software educacional não possui apenas a função de facilitar o processo de aprendizagem, mas sua finalidade maior está em auxiliar a aumentar habilidades e estabelecer processos de conceituação para que a pessoa possa participar da sociedade do conhecimento. O autor continua afirmando que o software GeoGebra possui ferramentas de geometria dinâmica para construção de pontos, retas, segmentos e diversas figuras plana e espacial. Ainda oferece apoio a equações e coordenadas que podem ser inseridas diretamente na plataforma do software.

Ademais Steinmacher (2011) assinala que no meio das aplicações didáticas formidáveis do GeoGebra, uma de grande importância é o aspecto geométrico e algébrico de um mesmo elemento interagindo entre si. Tais qualidades, fazem do GeoGebra um software premiado mundialmente com o Prêmio Internacional de Software Livre, na categoria de Educação.

Na seção a seguir serão descritos os aspectos metodológicos utilizados na pesquisa.

4. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para elaborar e apresentar atividades de Modelagem Matemática contextualizadas na Geometria Fractal, primeiramente foi feita uma revisão de literatura com o objetivo de mostrar o que ainda não foi feito com relação à aprendizagem de alguns conteúdos do Ensino Médio por meio da Modelagem Matemática e geometria fractal com o auxílio do GeoGebra, ou seja, justificar cientificamente a pesquisa. Para isso, foram identificados trabalhos que apresentam itens relacionados com aprendizagem através da Modelagem Matemática e geometria fractal. A revisão objetivou também à identificação dos tipos de tecnologias computacionais que são utilizados nesses trabalhos, e quais desses têm apresentado estudos teóricos e experimentais para demonstrar a validação da proposta de aprendizagem.

A revisão apresentada nessa pesquisa foi conduzida de acordo com um planejamento (ou protocolo) previamente definido. Esse planejamento foi o ponto de partida para a revisão, cujos pontos principais são a definição de uma ou mais questões de pesquisa e dos métodos que serão empregados para conduzir a revisão, incluindo seleção de fontes para buscas e estratégias de busca.

> As revisões são necessárias para pesquisadores iniciantes em uma determinada área do conhecimento. Esses estudos podem conter, análises destinadas a comparar pesquisas sobre temas semelhantes ou relacionados; apontar a evolução das teorias, dos aportes teórico metodológicos e sua compreensão em diferentes contextos, indicar as tendências e procedimentos metodológicos utilizadas na área, apontar tendências das abordagens das práticas educativas. (Vosgerau e Romanowski ,2014, p.168)

A revisão foi conduzida por um período apropriado. As obras foram pré-selecionadas a partir da busca no banco de teses e dissertações de várias universidades e na Capes, digitando a *string* **“***modelagem matemática e geometria fractal***”** e **“***ensino com modelagem matemática e geometria fractal***”**, a pesquisa considerou o período de 2015 a 2020 e usou o filtro metadados[1].

Os seguintes critérios de inclusão foram definidos para atender a pesquisa:

(a) Trabalhos publicados e disponíveis integralmente em bases de dados científicas ou em versões impressas.

---

[1] Ferramentas avançadas de filtração de conteúdo e propriedades de metadados.

(b) Trabalhos recentes (publicados a partir de 2015) que já possuam aprovação pela comunidade científica.

(c) Trabalhos que abordarem o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos utilizando a Modelagem Matemática ou a geometria fractal.

Ao todo, com a exclusão de trabalhos repetidos e trabalhos que, pelos seus resumos, não satisfizeram o contexto da pesquisa, foram pré-selecionados 17 abordagens. Após a leitura completa de todas as obras, apenas 12 trabalhos atenderam os itens de inclusão e foram escolhidos para comporem a síntese da pesquisa. O quadro 3 exibe todas as obras retornadas e selecionadas após a realização das buscas e do processo de seleção.

Quadro 2: Trabalhos selecionados

ID	Autor (ano)	Nome do trabalho	Critérios de inclusão	Resumo dos Trabalhos
1	**LUZ (2016)**	A GEOMETRIA FRACTAL COMO FATOR MINIMIZADOR DAS DIFICULDADES REFERENTES A CONCEITOS GEOMÉTRICOS	(a) (b) (c)	Aplica duas atividades, a construção, com o uso de régua e compasso, do fractal clássico triângulo de Sierpinski, e a construção do cartão fractal Degraus Centrais, de modo a trabalhar conceitos geométricos de forma contextualizada e diversificada. Foi experimentado em sala e teve um resultado satisfatório.
2	**MENDONÇA (2016)**	APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO	(a) (b) (c)	Elabora e aplica quatro oficinas, totalizando doze atividades, nas quais os estudantes, divididos em grupos, poderão utilizar habilidades geométricas (principalmente), algébricas, aritméticas e trigonométricas, para compreensão das propriedades da geometria fractal.
3	**OLIVEIRA (2016)**	ENSAIOS FRACTAIS À LUZ DO ENSINO MÉDIO	(a) (b) (c)	Descreve o histórico, as aplicações dos fractais em outras ciências e oportunidades de abordagem desse tema em contextos de sala de aula (com o registro dos resultados), incluindo atividades com construção de fractais no computador. Foi aplicado em sala e teve resultado satisfatório.

4	**ERTHAL (2016)**	EXPLORANDO CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA COM A GEOMETRIA FRACTAL	(a) (b) (c)	Utiliza a manipulação de material concreto, aplicativos para Geometria Fractal e o software GeoGebra, de forma a facilitar a visualização, a experimentação e a construção de conjecturas e obtenção de imagens mentais que fixem conceitos geométricos e matemáticos na mente de nossos educandos.
5	**MOREIRA (2017)**	GEOMETRIA FRACTAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA	(a) (b) (c)	Apresenta uma seleção de conteúdos matemáticos que naturalmente podem ser trabalhados a partir dos fractais. Propõe atividades que possuem fractais e podem ser aplicadas em diversos níveis da educação básica também são apresentadas.
6	**COELHO (2015)**	GEOMETRIA FRACTAL: UM OLHAR SOBRE A NECESSIDADE DE INCLUSÃO NA ESTRUTURA CURRICULAR DO ENSINO MÉDIO	(a) (b) (c)	Aborda a necessidade de apresentar reflexões e justificativas sobre as possibilidades da inclusão do ensino de Geometria Fractal no Ensino Médio, pois textos e situações problema envolvendo a Geometria Fractal começam a aparecer no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares.
7	**FILHO (2015)**	GEOMETRIA FRACTAL: DA NATUREZA PARA A SALA DE AULA	(a) (b) (c)	Faz o estudo da geometria fractal, enfatizando suas principais características compreendidas com base nos sistemas naturais que as motivam. Apresenta alguns nomes que contribuíram para o surgimento e desenvolvimento dos fractais matemáticos, enfatizando os exemplos de fractais naturais e a contribuição do pioneiro Benoit B. Mandelbrot.
8	**MOURA (2016)**	INTRODUÇÃO Á GEOMETRIA FRACTAL	(a) (b) (c)	Faz uma introdução ao estudo da geometria fractal, com suas principais características e propriedades. Não propõe atividades voltadas para o ensino de matemática.

9	**SWIDERSKI (2015)**	O ESTUDO DE ALGUNS ASPECTOS DA GEOMETRIA FRACTAL	(a) (b) (c)	Apresenta uma abordagem sobre os fractais desde o estudo das primeiras figuras fractais, o emprego da terminologia fractal até a atualidade, exaltando suas propriedades, características e aplicações. Tem o foco na elaboração de um material de apoio aos docentes do Ensino Médio.
10	**NETO (2015)**	TÓPICOS DA GEOMETRIA FRACTAL E APLICAÇÕES	(a) (b) (c)	Oferece a apresentação de aplicações de conceitos dos fractais em áreas como: análise de imagens geradas por satélite, arquitetura, biologia, economia, geologia, medicina e tecnologia. E faz, ainda, uma análise do que a geometria fractal representa para o desenvolvimento humano nas suas diversas iterações com o mundo.
11	**DAGA (2017)**	UMA ANÁLISE DA GEOMETRIA FRACTAL	(a) (b) (c)	Realiza uma revisão bibliográfica sobre a Geometria Fractal. Mostrando a sua origem, as suas principais características, como são construídos, se podemos encontrá-los na natureza e suas aplicações. Afirma que na educação básica a Geometria Fractal pode ser trabalhada de forma interdisciplinar com outras disciplinas.
12	**JESUS (2017)**	UMA INTRODUÇÃO A GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NO ENSINO MÉDIO: A GEOMETRIA DOS FRACTAIS	(a) (b) (c)	Aplica uma sequência didática em sala de aula, propor uma ferramenta metodológica para que seja introduzida a Geometria Não Euclidiana na Educação Básica no estado da Bahia, com o enfoque na Geometria dos Fractais

Fonte: Autoria própria (2020)

A partir da leitura e síntese dos trabalhos selecionados, observou-se que os trabalhos que abordam a geometria fractal, alguns procuram expor apenas sua definição, característica e aplicação, enquanto outros usam a beleza e a característica desses fractais para criarem atividades a partir deles voltadas para o ensino de outros conteúdos matemáticos de forma a facilitar o entendimento.

Embora houvesse em diversos trabalhos a preocupação com o passo a passo da construção das atividades, as sínteses indicam que apenas três trabalhos (id 6, 8 e 11) realizam outro tipo de estudo dos fractais e não apresentaram nenhuma atividade para aplicação em sala. Os demais que somam 9 trabalhos (id 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10 e 12) utilizam a geometria fractal para propor atividades voltadas para o ensino de outros conteúdos matemáticos, e desses apenas 2 trabalhos (id 9 e 10) apresentaram somente a proposta e não aplicaram em sala de aula com os estudantes para comprovar sua efetividade.

Em relação ao uso dos softwares, observa-se que das propostas, apenas três trabalhos (id 3, 4 e 12) usam algum tipo de software e apenas um trabalho (id 4) usar o GeoGebra como recurso didático.

Após a realização da revisão, pode-se afirmar que o uso da geometria fractal para o ensino de conteúdos de matemática do Ensino Médio, como uma forma de abordagem no ensino de matemática, vem sendo um tópico de pesquisa que chama a atenção de vários pesquisadores, com vários trabalhos científicos publicados.

Em presença do que foi exposto, foi reforçada a ideia de que a geometria fractal se tornou um caminho possível para a aprendizagem de outros assuntos de matemática em sala de aula atualmente, assim como os outros métodos para a aprendizagem de matemática, também constitui um tópico bastante explorado. Observa-se também que a maioria das atividades apresentadas nas obras selecionadas apresenta uma aplicação em sala de aula e usam material concreto.

Dessa, foram elaboradas cinco atividades agregando a Modelagem Matemática e geometria fractal tendo como auxílio o GeoGebra, visto que a união de Modelagem Matemática, com os fractais e o uso do GeoGebra em aplicações práticas em sala de aula de Ensino Médio ainda são incipientes. Desse modo, as atividades foram planejadas com a intenção de trabalhar com conteúdos do currículo de matemática na perspectiva da modelagem como estratégia de ensino (Bassanezi, 2015).

5. PROPOSTA DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo será apresentado como resultado da pesquisa as propostas de atividades, mostrando qual o tempo destinado para aplicação de cada atividade e as fichas de trabalho que serão usadas durante a sua realização visando, com isso, o ensino de conteúdos matemáticos do nível médio. Foram construídas cinco atividades, na primeira atividade será usado o fractal chamado de árvore de Pitágoras, na segunda atividade o fractal escolhido foi o floco de neve de Koch iniciando do triângulo equilátero, a terceira atividade vai ser feita com uma variação do floco de neve de Koch iniciando com um quadrado, para a quarta atividade trabalhar-se-á com o fractal conhecido como tapete de Sierpinski e na última atividade o fractal utilizado será o triângulo de Sierpinski.

Para cada atividade procurou-se trabalhar com a Modelagem Matemática em contato com um software de geometria dinâmica, GeoGebra, observando todos os conteúdos matemáticos do Ensino Médio que cada uma poderia mobilizar.

No Quadro 3, é apresentado um resumo da proposta das atividades para serem aplicadas com os estudantes do Ensino Médio em sala de aula com os conteúdos que podem ser trabalhados no decorrer de cada atividade e a quantidade de aulas[2] necessárias para cada uma delas.

Quadro 3: Resumo das atividades

ATIVIDADES	FRACTAL UTILIZADO	CONTEÚDO ABORDADO	Nº DE AULAS
1	Arvore de Pitágoras	Quadrado, Triangulo Retângulo, PG	3
2	Floco de neve de Koch (Triângulo Equilátero)	Segmento Semelhante, Polígono, Triângulo Equilátero	3
3	Floco de neve de Koch (Quadrado)	Quadrado, Segmento Semelhante, Polígono, Triângulo Equilátero.	3
4	Tapete de Sierpinski	Quadrado, Segmento Semelhante, Polígono, Área, PG	3
5	Triângulo de Sierpinski	Segmento Semelhante, Triângulo Equilátero, Área, PG.	3

Fonte: Autoria própria (2020)

[2] Essa quantidade de aulas pode aumentar se o professor optar por incluir a construção dos fractais.

No momento da aplicação em sala das atividades, a sugestão é que a turma seja organizada em grupos com 3 estudantes no máximo, cada grupo com acesso ao software GeoGebra.

As atividades propostas nesse trabalho foram pensadas para serem aplicadas no Ensino Médio e na série em que os conteúdos por elas abordados façam parte da matriz curricular. Espera-se que esses estudantes tenham alguns conhecimentos que ajudarão no desenvolvimento das atividades como: conhecimentos sobre as operações básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, raízes e frações. Isso porque são conteúdos estudados em anos anteriores pelo qual o estudante já passou, além de conhecimento básico de informática.

Todas as cinco atividades já estarão prontas e salvas nos dispositivos, os estudantes somente irão manipular cada uma delas e completar os quadros referentes a elas. E a critério do professor, pode-se incluir a construção dos fractais também.

A seguir, serão apresentadas as cinco atividades, mostrando em cada uma delas os conteúdos matemáticos do Ensino Médio que elas podem mobilizar. A atividade 1 e atividade 2 apresenta discussão do seu desenvolvimento como forma de integrar o professor-leitor na proposta e permitir que este ganhe habilidade para desenvolver as demais (atividade 3, 4 e 5) em sala de aula.

ATIVIDADE 1

Título: ÁRVORE DE PITÁGORAS

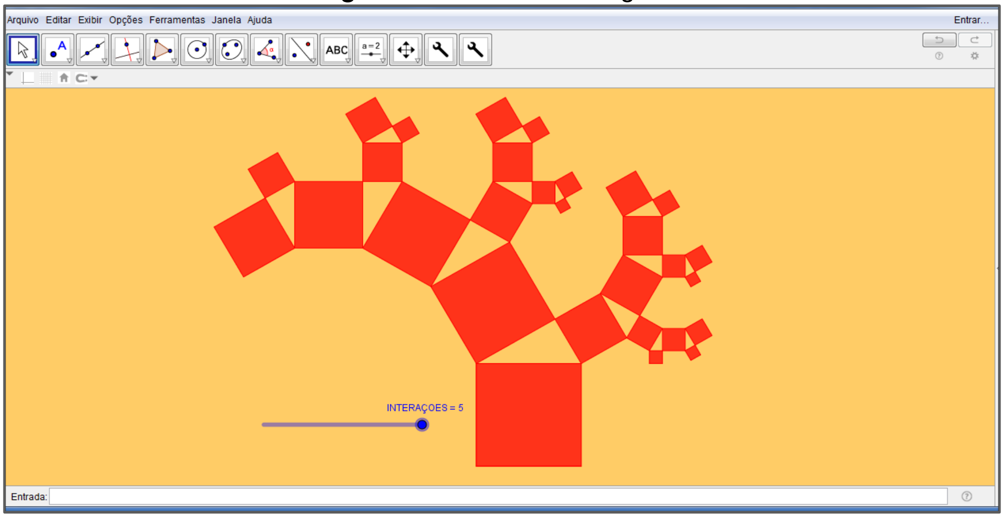
Assuntos Abordados: Quadrado, Triângulo Retângulo, PG.

Material: Laboratório de Informática, Software GeoGebra, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software GeoGebra.

Figura 11: Árvore de Pitágoras



Fonte: Autoria própria (2020)

2. Considere o quadrado inicial como base, deixe o valor do controle deslizante do GeoGebra de acordo com os valores indicados no quadro abaixo e para cada valor complete as colunas.

Quadro 4: Atividade Árvore de Pitágoras

Nível n	N° DE QUADRADOS	N° DE QUADRADOS ACUMULADOS	N° DE TRIÂNGULOS	N° DE TRIÂNGULOS ACUMULADOS
1	$2 = 2^1$	$2 = 2^2 - 2$	$1 = 2^0$	$1 = 2^1 - 1$
2	$4 = 2^2$	$6 = 2^3 - 2$	$2 = 2^1$	$3 = 2^2 - 1$
3	$8 = 2^3$	$14 = 2^4 - 2$	$4 = 2^2$	$7 = 2^3 - 1$
4	$16 = 2^4$	$30 = 2^5 - 2$	$8 = 2^3$	$15 = 2^4 - 1$
5	$32 = 2^5$	$62 = 2^6 - 2$	$16 = 2^4$	$35 = 2^5 - 1$

Fonte: Autoria própria (2020)

3. Observe o quadro e responda às perguntas abaixo.

A. Quais as figuras que aparecem nesse fractal? Quais suas características?

   Quadrado e triângulo retângulo.

   O quadrado tem quatro lados iguais e quatro ângulos retos (90°).

   O triangulo retângulo tem três lados, três ângulos e um desses ângulos mede 90°.

B. O que você observou ao preencher o quadro com relação ao número de quadrados e triângulos?

   Em cada interação o número de quadrados é o dobro do número de triângulos.

C. Escreva a sequência formada com o número de quadrados de cada nível.

A sequência formada é (2, 4, 8,16, 32,...)

PG de razão q=2 e primeiro termo a_1=2. De onde podemos observar que o número de quadrados em um determinado nível de interação é dado pelo termo geral dessa progressão.

D. Qual a expressão que calcula o número de quadrados em qualquer nível?

$\mathbf{2.2^{n-1} = 2^n}$ (termo geral da PG)

E. Qual a expressão que calcula o número total de quadrados em qualquer nível?

$\frac{\mathbf{2(2^n-1)}}{\mathbf{2-1}} = \mathbf{2^{n+1} - 2}$ (soma dos termos da PG)

Os itens D e E são conduzidas em sala de aula a partir do entendimento do quadro 4, de forma que o estudante ao manipular o fractal no GeoGebra e entender cada nível completado no referido quadro, consiga expressar matematicamente para além dos níveis demonstrados em sequência. O mesmo deve ocorrer nos itens G e H.

F. Escreva a sequência formada com o número de triângulos de cada nível.

A sequência formada é (1, 2, 4, 8,16,...)

PG de razão q=2 e primeiro termo a_1 = 1. De onde podemos observar que o número de triângulos em um determinado nível de interação é dado pelo termo geral dessa progressão.

G. Qual a expressão que calcula o número de triângulos em qualquer nível?

$\mathbf{1.2^{n-1}}$ (Termo geral da PG)

H. Qual a expressão que calcula o número total de triângulos em qualquer nível?

$\frac{\mathbf{1.(2^n-1)}}{\mathbf{2-1}} = \mathbf{2^n - 1}$ (Soma dos termos da PG)

Nesta atividade espera-se que, a partir do uso da Modelagem Matemática, geometria fractal e GeoGebra, os estudantes consolidem conceitos sobre quadrados, triângulos, classificação de triângulos, Progressão Geométrica e façam uso da álgebra nas generalizações. Na realização da atividade, depois que os estudantes preencherem o quadro e apresentarem suas respostas e observações na ficha de atividades, deverá ser feita a socialização com a turma das características de cada figura que aparece na Árvore de Pitágoras, das sequências que aparecem com o número de cada figura em cada nível e do total de figuras geradas. Após a socialização, caso haja dificuldades por parte dos estudantes em concluir suas respostas, o professor juntamente com os estudantes seguirá então com a formalização de cada tópico matemático que aparece na atividade.

Os conteúdos a serem abordados e o grau de instrução que serão mobilizados ficam à disposição do docente e de seu planejamento em sala de aula, pois esta dinâmica e expectativa dessas escolhas também são promovidas por esta atividade.

ATIVIDADE 2

Título: FLOCO DE NEVE DE KOCH (TRIÂNGULO EQUILÁTERO)

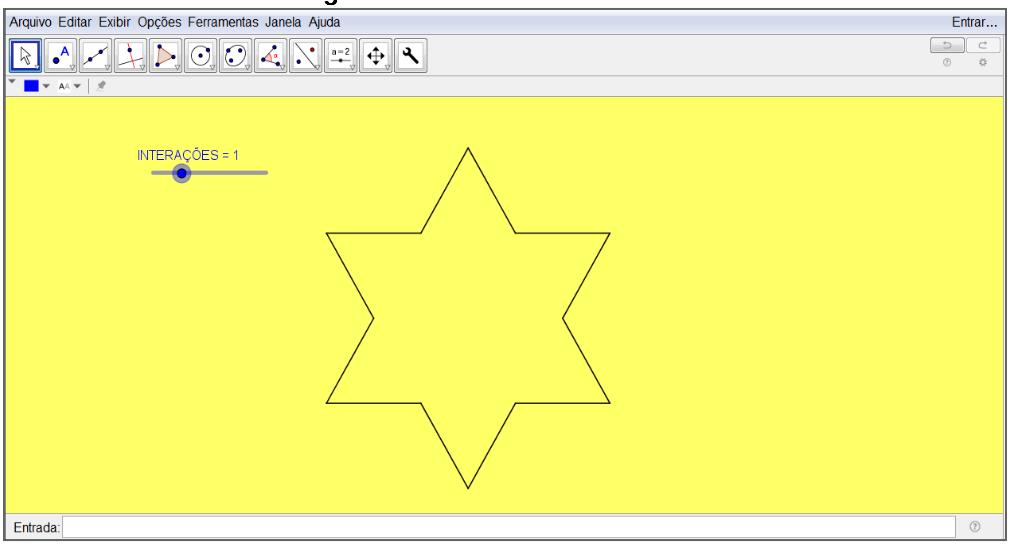
Assuntos Abordados: Triângulo Equilátero, Perímetro, Segmentos, PG.

Material: Laboratório de Informática, Software GeoGebra, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software GeoGebra.

Figura 12: Floco de Neve de Koch



Fonte: Autoria própria (2020)

2. Deixe o valor do controle deslizante do GeoGebra de acordo com os valores indicados no quadro abaixo e para cada valor complete as colunas (considere o lado do triangulo equilátero inicial igual a l).

Quadro 5: Atividade Floco de Neve de Koch

NÍVEL n	N° DE LADOS	COMPRIMENTO DE CADA LADO	PERÍMETRO
1	$\mathbf{3}$	$\boldsymbol{l}$	$\mathbf{3}.\boldsymbol{l}$
2	$\mathbf{12 = 3.4}$	$\frac{l}{3} = \frac{l}{3^1}$	$\frac{12l}{3} = 4.\frac{l}{3^0} = 4l$
3	$\mathbf{48 = 3.4^2}$	$\frac{l}{9} = \frac{l}{3^2}$	$\frac{48l}{9} = 4^2.\frac{l}{3^1}$
4	$\mathbf{192 = 3.4^3}$	$\frac{l}{27} = \frac{l}{3^3}$	$\frac{192l}{27} = 4^3.\frac{l}{3^2}$
5	$\mathbf{768 = 3.4^4}$	$\frac{l}{81} = \frac{l}{3^4}$	$\frac{768l}{81} = 4^4.\frac{l}{3^3}$

Fonte: Autoria própria (2020)

3. Observe o quadro e responda às perguntas abaixo.

A. Com qual figura teve origem o fractal? Quais as características dessa figura?

O fractal tem origem de um Triângulo Equilátero. Esse triângulo possui os três lados com a mesma medida e três ângulos de 60°

B. No nível 2, quantos segmentos passou a ter cada um dos seus lados?

Quatro segmentos

C. O que você observou ao preencher o quadro?

Cada lado da figura da origem a outros 4 lados em cada interação do fractal.

D. Escreve a sequência formada com o número de lados em cada nível.

A sequência formada é (3, 12, 48, 192, 168,...)

PG de razão q=4 e primeiro termo a_1 = 3. De onde podemos observar que o número de lados em um determinado nível é dado pelo termo geral dessa progressão geométrica crescente.

E. Qual a expressão que calcula o número de lados em qualquer nível?

$\mathbf{3.4^{n-1}}$ (Termo geral da PG)

F. Escreve a sequência formada com o comprimento do lado encontrado em cada nível.

A sequência formada é $(l, \frac{l}{3}, \frac{l}{9}, \frac{l}{27}, \frac{l}{81}, ...)$

PG de razão q=$\frac{1}{3}$ e primeiro termo a_1 = l. De onde podemos observar que o perímetro em um determinado nível é dado pelo termo geral dessa progressão decrescente.

G. Qual a expressão que calcula o comprimento do lado da figura em qualquer nível?

$\boldsymbol{l}.(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}})^{\boldsymbol{n-1}} = \frac{\boldsymbol{l}}{\mathbf{3}^{\boldsymbol{n-1}}}$ (Termo geral da PG)

H. Qual a expressão que calcula o perímetro da figura em qualquer nível?

$(\mathbf{3}.\mathbf{4}^{\boldsymbol{n-1}}).\frac{\boldsymbol{l}}{(\mathbf{3}^{\boldsymbol{n-1}})} = \mathbf{3}\boldsymbol{l}.(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}})^{\boldsymbol{n-1}}$ (Termo geral da PG forma pelos perímetros)

Nesta atividade, espera-se que, a partir do uso da Modelagem Matemática, geometria fractal e GeoGebra, os estudantes consolidem conhecimentos acerca dos triângulos equiláteros, segmentos de reta, perímetro, potenciação, números racionais para representar os comprimentos dos segmentos em cada nível, Progressão Geométrica e usarem seus conhecimentos algébricos para escreverem os modelos.

Na realização da atividade, depois que os estudantes preencherem o quadro e apresentarem suas respostas e observações na ficha de atividades, deverá ser feito a socialização com a turma das respostas que foram obtidas. Após a socialização, em cima das dificuldades apresentadas pelos estudantes em concluir suas respostas, o professor juntamente com os estudantes seguirá então com a formalização de cada conteúdo matemático mobilizado na atividade. Fica a critério do professor escolher o grau de dificuldade e a escolha dos assuntos que serão abordados.

O desenvolvimento das últimas atividades 3, 4 e 5, têm suas conduções análogas as atividades 1 e 2. Nessas atividades, já com a experiência da atividade anterior com GeoGebra, espera-se que os estudantes interessados e motivados em manipular o software e que além de preencher o quadro da atividade, possam testar outros valores que não estavam previstos para verificar suas observações.

ATIVIDADE 3

Título: FLOCO DE NEVE DE KOCH (QUADRADO)

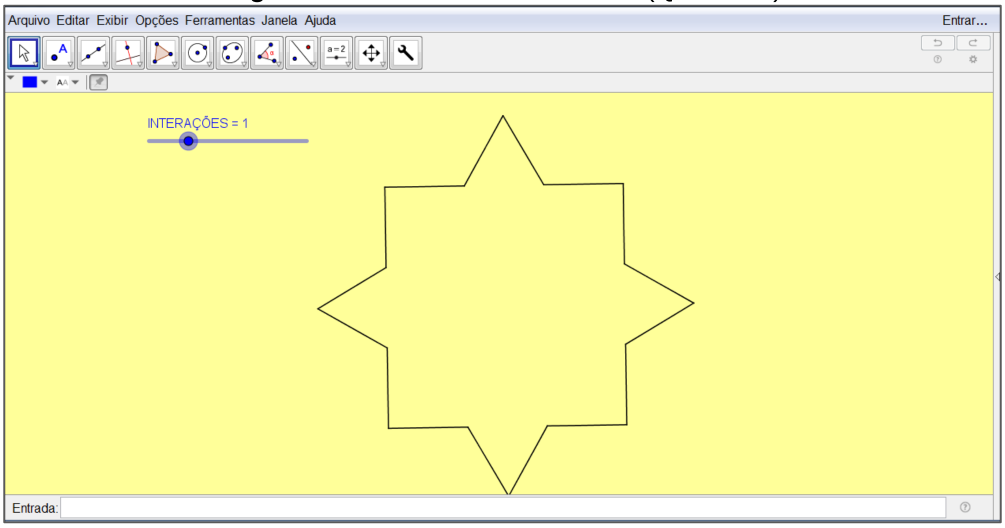
Assuntos Abordados: Quadrado, Segmento Semelhante, Polígono, Triângulo Equilátero

Material: Laboratório de Informática, Software GeoGebra, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software GeoGebra.

Figura 13: Floco de Neve de Koch (Quadrado)



Fonte: Do Autor, 2020

2. Deixe o valor do controle deslizante do GeoGebra de acordo com os valores indicados no quadro abaixo e para cada valor complete as colunas (considere o lado do quadrado inicial igual a L).

Quadro 6: Atividade Floco de Neve de Koch (Quadrado)

ITERAÇÕES	N° DE LADOS	COMPRIMENTO DE CADA LADO	PERÍMETRO	ÁREA
1				
2				
3				
4				
5				

Fonte: Autoria própria (2020)

3. Observe o quadro e responda as perguntas abaixo.

A. Com qual figura teve origem o fractal?
B. O que você observou ao preencher o quadro?
C. Qual é número de lados depois de n iterações?
D. Qual é o comprimento de cada lado depois de n iterações?
E. Qual é o perímetro depois de n iterações?
F. Qual é a área depois de n iterações?

ATIVIDADE 4

Título: TAPETE DE SIERPINSKI

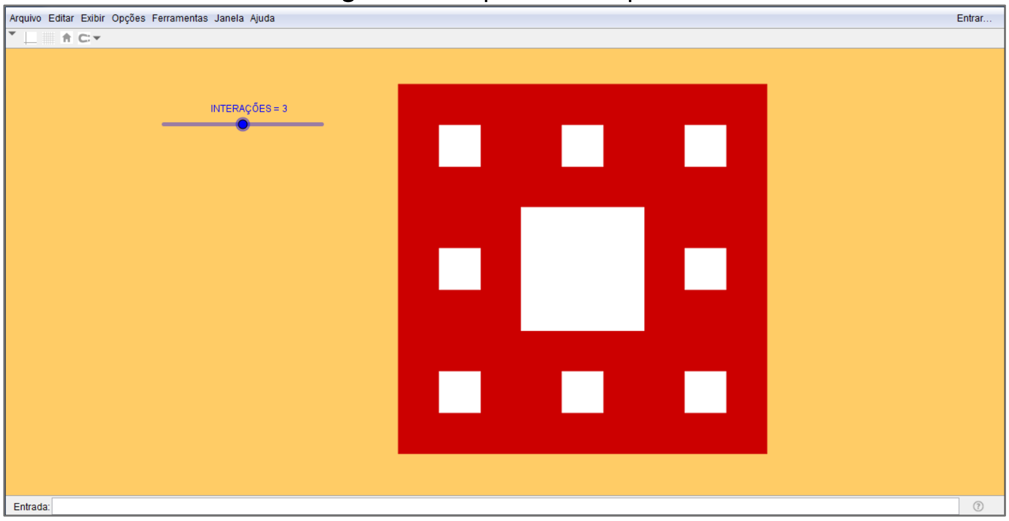
Assuntos Abordados: Quadrado, Segmento Semelhante, Polígono, Área, PG.

Material: Laboratório de Informática, Software GeoGebra, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software GeoGebra.

Figura 14: Tapete de Sierpinski



Fonte: Do Autor, 2020

2. Deixe o valor do controle deslizante do GeoGebra de acordo com os valores indicados no quadro abaixo e para cada valor complete as colunas (considere o lado do quadrado inicial igual a L).

Quadro 7: Atividade Tapete de Sierpinski

INTERAÇOES	N° DE BURACOS	PERIMETRO DO NOVO BURACO	AREA DO NOVO BURACO	AREA TOTAL DOS BURACOS
1				
2				
3				
4				
5				

Fonte: Autoria própria (2020)

3. Observe o quadro e responda às perguntas abaixo.

A. Com qual figura teve origem o fractal?
B. O que você observou ao preencher o quadro com relação ao número de “buracos”?
C. Qual é número de buracos após n iterações?
D. Qual é o perímetro do novo buraco após n iterações?
E. Qual é área do novo buraco após n iterações?
F. Qual é a área total dos buracos após n iterações?

ATIVIDADE 5

Título: TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

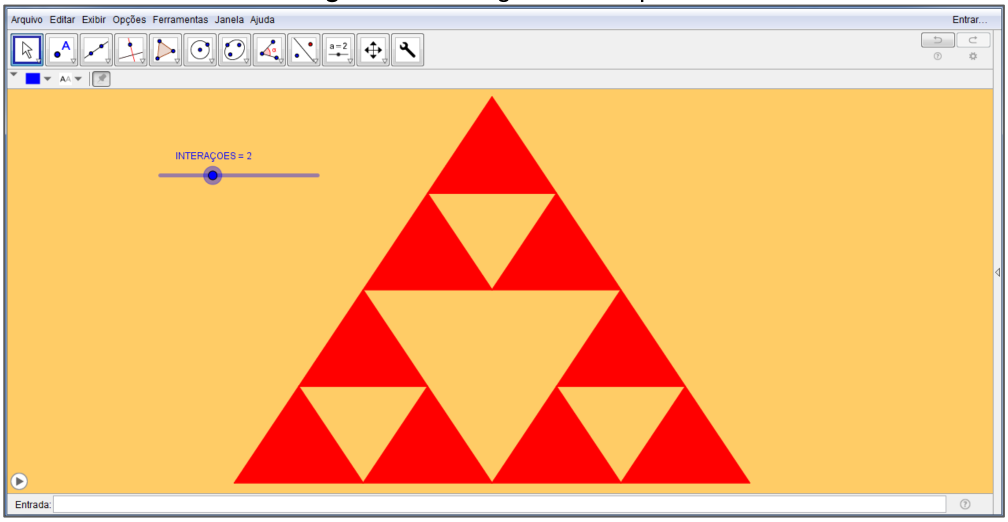
Assuntos Abordados: Segmento Semelhante, Triângulo Equilátero, Área, PG.

Material: Laboratório de Informática, Software GeoGebra, Ficha de Atividade, Lápis ou caneta.

Procedimento:

1. Abrir o software GeoGebra.

Figura 15: Triângulo de Sierpinski



Fonte: Do Autor, 2020

2. Deixe o valor do controle deslizante do GeoGebra de acordo com os valores indicados no quadro abaixo e para cada valor complete as colunas (considere o lado do triangulo equilátero inicial igual a L).

Quadro 8: Atividade Triângulo de Sierpinski

INTERAÇOES	N° DE BURACOS	PERIMETRO DO NOVO BURACO	AREA DO NOVO BURACO	AREA TOTAL DOS BURACOS
1				
2				
3				
4				
5				

Fonte: Autoria própria (2020)

3. Observe o quadro e responda as perguntas abaixo.

A. Com qual figura teve origem o fractal?
B. O que você observou ao preencher o quadro com relação ao número de "buracos"?
C. Qual é número de buracos após n iterações?
D. Qual é o perímetro do novo buraco após n iterações?
E. Qual é área do novo buraco após n iterações?
F. Qual é a área total dos buracos após n iterações?

6. CONSIDERAÇÕES

A motivação para essa pesquisa levou em consideração todas as dificuldades enfrentadas para se ensinar alguns conteúdos matemáticos do Ensino Médio ao longo desses anos como docente da rede pública estadual. E para contornar essas dificuldades que passa também por falta de material diferenciado para um ensino mais prazeroso, foi proposto esse trabalho com uma proposta para o ensino de alguns tópicos da matriz curricular de matemática do Ensino Médio, norteado pela seguinte questão de pesquisa: Que possibilidades têm atividades de Modelagem Matemática contextualizadas na Geometria Fractal e vinculadas ao uso do GeoGebra apresentam para ensinar conteúdos matemáticos do Ensino Médio?

Dessa forma, olhando para os objetivos da pesquisa, pode-se constatar na aplicação das cinco atividades que o ensino de alguns tópicos da matriz curricular de Matemática do nível médio (Triângulo equilátero, Sequências, Ponto médio, Potenciação, Área e Perímetro, entre outros) tornar-se-á mais atraente quando se aplica uma sequência que usa a Modelagem Matemática, a geometria fractal e um software de geometria dinâmica, o GeoGebra, como suporte tecnológico.

A Modelagem Matemática, a Geometria Fractal e o GeoGebra abrem caminhos no que diz respeito ao ensino de Matemática em sala de aula. A abordagem por meio da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e o mundo fascinante da Geometria Fractal se enquadram como um acréscimo para buscar nos estudantes o empenho no estudo da Matemática em sala de aula.

Barbosa (2005) destaca que quando se estuda Geometria Fractal, o estudante é levado à concepção de conteúdos matemáticos estudados em sala de aula, assim como, abrir seus olhos para a beleza da natureza e da Matemática. Subsídios que auxiliam bastante o estudante a construir de forma mais eficaz os conceitos menos interessantes, para alguns, da matemática, que estão presentes em diversos livros didáticos usados nas escolas.

Erthal (2016) afirma que o GeoGebra é uma fantástica ferramenta tecnológica quando se quer construir conhecimentos ligados a conteúdos matemáticos, transformando-se em um valioso instrumento para o professor que busca a promoção de um ensino mais significativo.

O uso de atividades que abranjam a Modelagem Matemática, a geometria fractal e o GeoGebra, permitem ao docente alavancar as competências de averiguação matemática do estudante, abordando conceitos matemático de um formato de menor à maior complexidade, dependendo do seu nível de instrução e conhecimento.

Essas atividades que foram propostas, na realidade da sala de aula, tem a finalidade de proporcionar a ampliação das tomadas de decisões, dos valores e das aptidões dos estudantes, ao mesmo tempo em que pode despertar sua curiosidade e o anseio de estudar, de observar e de averiguar; estimulando o uso do conhecimento matemático na forma de entender o mundo real, conhecendo modelos e métodos que estão envolvidos conceitos matemáticos; auxilia na concepção dos conceitos de área, perímetro, volume, entre outros.

Ademais, deseja-se que essa sequência de atividades aqui sugerida venha colaborar e aprimorar em todos os aspectos as técnicas de ensino de professores do Ensino Médio que usem essa sequência de ensino em suas aulas de matemática. Com isso, espera-se que outros estudos venham aperfeiçoar essas atividades e possam contemplar os outros tópicos matemáticos de outros anos que não foram abordados nesse estudo.

7. REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos.** Rio Claro: UNESP, 2002. Tese de Doutorado.

BARBOSA, J.C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Rio Claro: UNESP; Brasil; 2001.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula**. 3ª ed.. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BASSANEZI, R.C. **Modelagem matemática: teoria e prática.** São Paulo: Contexto, 2015.

BASSANEZZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** 3ª. ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática & Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática.** 2. ed. Blumenau: Edifurb, 2004.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Resolução de Problemas, Projetos e Etnomatemática: Pontos Confluentes**. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.7, n.2, p. 197-219, 2014.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem no Ensino Fundamental.** 2013. (no prelo pela Editora da FURB)

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5ª ed. São Paulo: contexto, 2009.

BLUM, W.; NISS, M. **Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects** – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. Educational Studies in Mathematics, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, feb. 1991.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo horizonte: Autêntica, 2001.

________. **Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC /SEF, 2000.

________. **Orientações curriculares para o ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2008, v.2.

_______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

BRAGA, Roberta Modesto. **Modelagem matemática e tratamento do erro no processo de ensino-aprendizagem das equações diferenciais ordinárias.** 2009. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Belém/PA.

BROCARDO, J. **As investigações na sala de aula de matemática**: um projeto curricular no 8º ano. 2001. 621 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001.

CASTRO, E. & CASTRO, E. **Representaciones y modelización**. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria . Barcelona, España : Horsori;1997.

COELHO, J. B. **Geometria Fractal: Um olhar sobre a necessidade de inclusão na estrutura curricular do ensino médio.** 2015. 80 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015.

DAGA, M. S. **Uma análise da geometria fractal.** 2017. 17 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade de Brasília, Fortaleza, 2017.

ERTHAL, W. J. **Explorando conteúdos matemáticos da educação básica com a geometria fractal**. 2016. 105 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - Profmat) - Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2016.

EVES, H. (2004). **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

FILHO, J. R. F. **Geometria fractal: da natureza para a sala de aula**. 2015. 80 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015.

HOHENWARTER, M. **Geogebra**: dynamic mathematics for schools. Salzburgo: GeoGebra, 2007. Versão 4.2.

HOLLEBRANDS, K.; LABORDE, C.; STRÄBER, R. Technology and the learning of geometry at the secondary level. In: BLUME, Glendon; HEID, Mary Kathleen (Eds.). **Research on technology, and the teaching and learning of mathematics**. Charlotte: Information Age Publishing, 2008. v. 1.

JESUS, J. P. Uma introdução d**a geometria não euclidiana no ensino médio: A geometria dos fractais.** 2017. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2017.

LABORDE, C.; LABORDE, J. M. The development of a dynamical geometry environment: Cabri-Géomètre. In: BLUME, Glendon; HEID, Mary Kathleen (Eds.). **Research on technology, and the teaching and learning of mathematics**. Charlotte: Information Age Publishing, 2008. v. 2.

LÉVY, P. **As tecnologias da Inteligência**: O futuro do pensamento na era da informática. Rio de janeiro: Editora 34, 1993. Trad. Carlos Irineu da Costa.

LUZ, E.V. **A Geometria Fractal como fator minimizador das dificuldades referentes a conceitos geométricos**. 2016. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2016.

MANDELBROT, B. **Objectos fractais**. Tradução Carlos Fiolhais e José Luís Malaquias Lima. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1998. 296 p.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W. H Freeman and Company, 1977.

MENDONÇA, F. A. C. **Aplicações da geometria fractal: uma proposta didática para o Ensino Médio**. 2016. 158 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016.

MOREIRA, V. S. S. S. **Geometria fractal na educação básica**. 2017. 78 f. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

MOURA, D. V. **Introdução à geometria fractal.** 2016. 42 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2016.

NASCIMENTO, M. et al. **Uma proposta didática para o ensino de Geometria Fractal em sala de aula da Educação Básica**. VIDYA, v.32, n2, p113-132, Santa Maria, 2012.

NETO, A. F. L. **Tópicos da geometria fractal e Aplicações.** 2015. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015.

OLIVEIRA, G. J. C. **Ensaios fractais à luz do ensino médio**. 2016. 145 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016.

ORTIZ, J. **Modelización y Calculadora Gráfica en Formación Inicial de Profesores de Matemáticas.** Granada, España: Universidad de Granada; 2000.

PAPERT, S. **Logo**: computadores e Educação. São Paulo: Editora Brasiliense, 1985.

PEITGEN, H. O. et al. **Fractals for the classroom: Strategic activities**. New York: Springer Verlag, 1992. v. 2, 187 p.

PONTE, J. P ; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

MENEZES, Rhômulo Oliveira; ESPÍRITO SANTO, Adilson Oliveira do; BRAGA, Roberta Modesto. **Tecnologias Digitais no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática**. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.

SILVA, G. H. G ; PENTEADO, M. G. **Geometria dinâmica na sala de aula: o desenvolvimento do futuro professor de matemática diante da imprevisibilidade.** Ciência & Educação, Bauru, v. 19, n. 2, p. 279-292, 2013.

SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. In: SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Campinas: Papirus, 2008. p. 15-39.

STEINMACHER, I. F; SCALIANTE, I. W; LUZ, J. A; CAIRES, V. **Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática: Avaliação de Usabilidade e de Aprendizado.** Cascavel, PR, 2011. II ENINED - Encontro Nacional de Informática e Educação ISSN 2175-5876.

SWIDERSKI, S. A. **O estudo de alguns aspectos da geometria fractal.** 2015. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2015.

VOSGERAU, D. S. R; ROMANOWSKI, J. P. **Estudos de revisão: implicações conceituais e metodológicas**. Revista Diálogo Educacional, v. 14, n. 41, 2014.

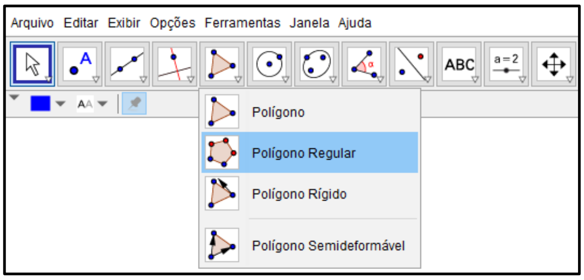
8. APÊNDICE

ÁRVORE DE PITÁGORAS

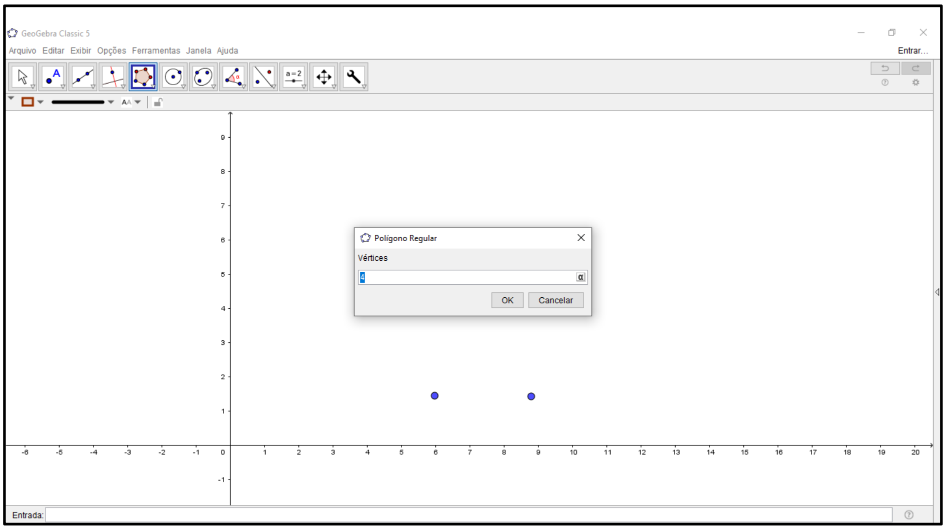
Esse fractal pode ser construído no GeoGebra seguindo os seguintes passos que apresentamos a seguir:

1 º PASSO: Construir um quadrado de lado qualquer.

Selecione a seta no canto inferior direito da ferramenta polígono e escolha polígono regular.

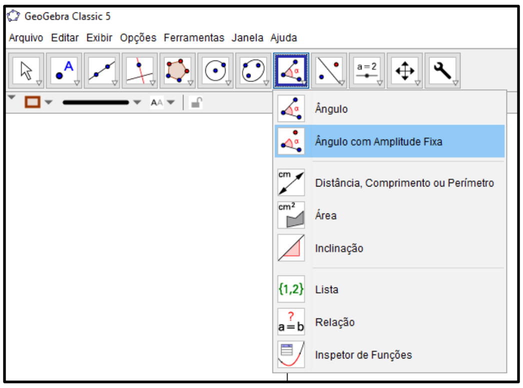


Em seguida marque dois pontos na tela e, na janela de polígono regular e na janela de vértices, digite 4.

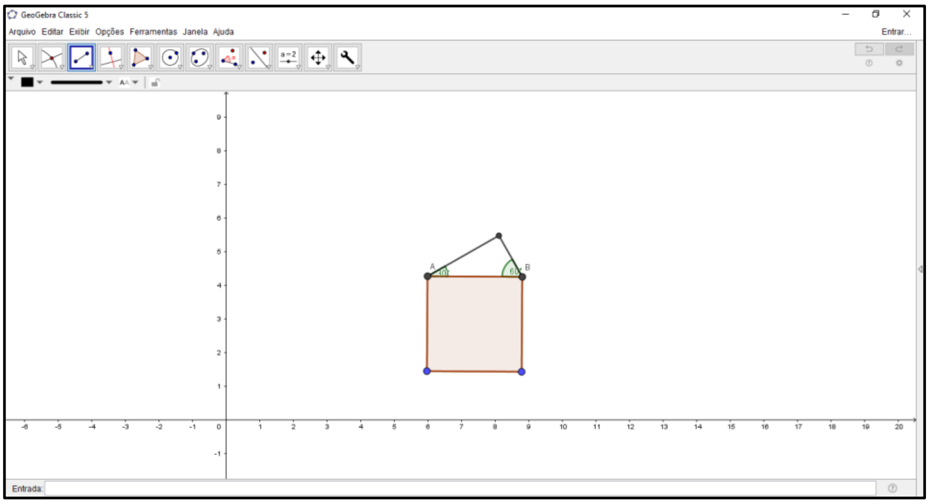


2º PASSO: Construir um triângulo retângulo

Selecione a ferramenta Ângulo e depois Ângulo com amplitude fixa que pode ser acessada pela seta no canto inferior.

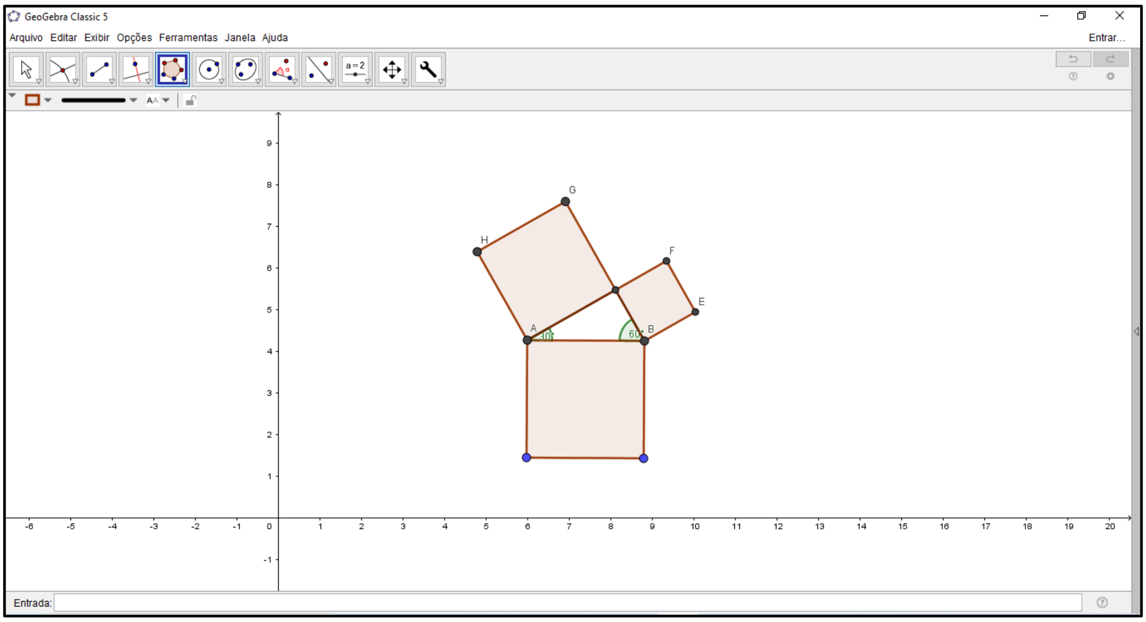


Selecione o ponto A em seguida no ponto B, e na janela trocar o ângulo para 60º no sentido horário, depois clique primeiro no ponto B e depois no ponto A e mude o ângulo para 30 º e selecione a opção anti-horária, unir os pontos com segmentos de retas. Onde os segmentos se encontrarem marcar um ponto de intersecção, em seguida desenhar um polígono passando pelo ponto A, ponto B e ponto de intersecção, formando assim um triângulo retângulo. Sempre ocultando os segmentos e os pontos que não fazem parte do fractal.



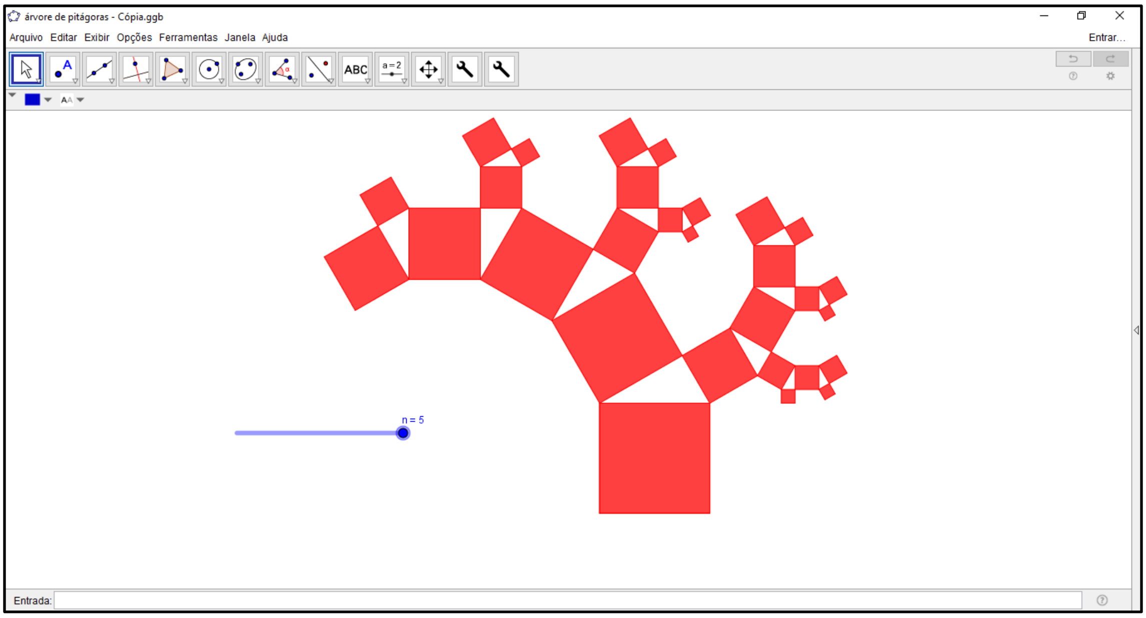
3 º PASSO: Construir dois quadrados nos catetos do triângulo.

Construa um quadrado em cada um dos catetos do triângulo conforme o primeiro passo. Após isso, alterar a cor de cada polígono, basta clicar com o botão direito em cima de um dos polígonos e ir a propriedades.



4º PASSO: Continuar a criação dos quadrados e triângulos

Repita os passos anteriores para cada quadrado formado quantas vezes forem necessárias ou também podemos criar uma ferramenta para fazer esse processo mais rapidamente. E por fim inserir um controle deslizante e esconder os rótulos dos objetos.



Baixar a atividade em:

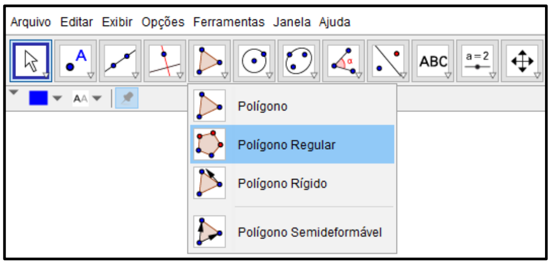
https://drive.google.com/file/d/1799ZH_Y_QdSbWfT4_PvUFIBqzHBYqGyB/view?usp=sharing

FLOCO DE NEVE DE KOCH

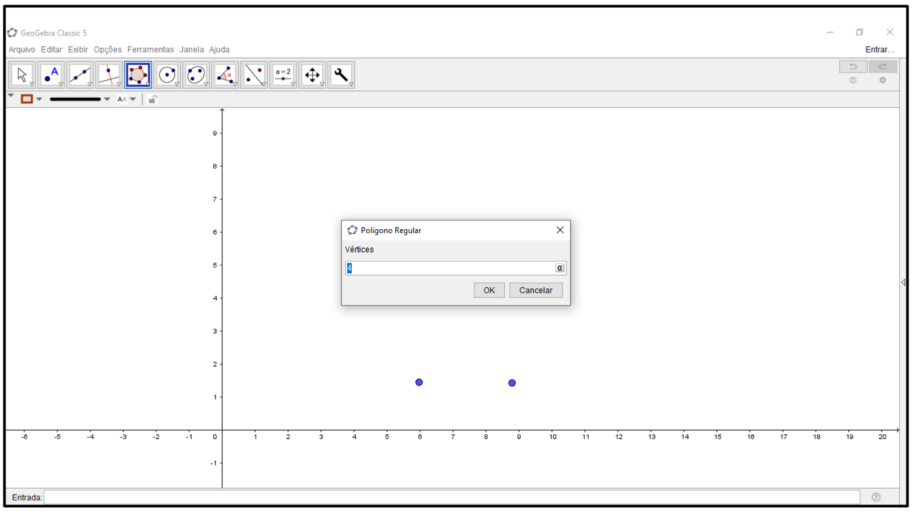
O floco de neve de Koch pode ser construído no GeoGebra seguindo os seguintes passos que apresentamos a seguir

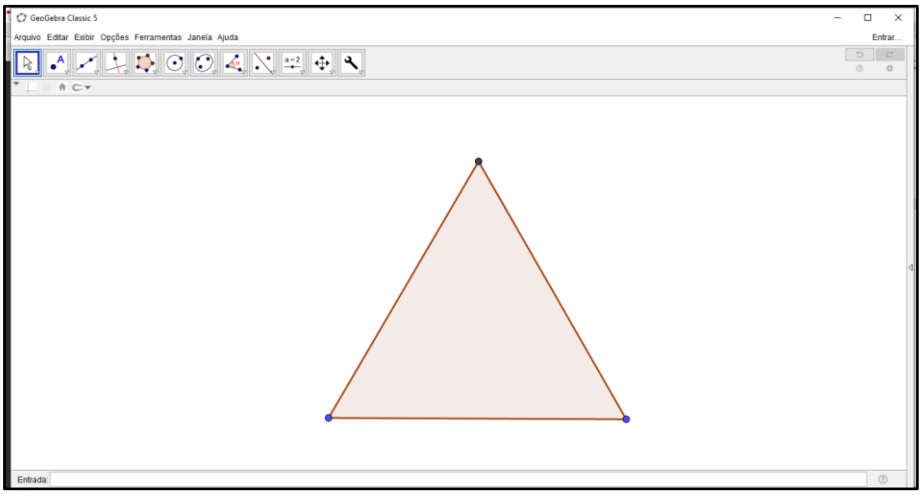
1 º PASSO: Construir um triângulo equilátero de lado qualquer.

Selecione a seta no canto inferior direito da ferramenta polígono e escolha polígono regular.



Em seguida marque dois pontos na tela e, na janela de polígono regular em vértices, digite 3.

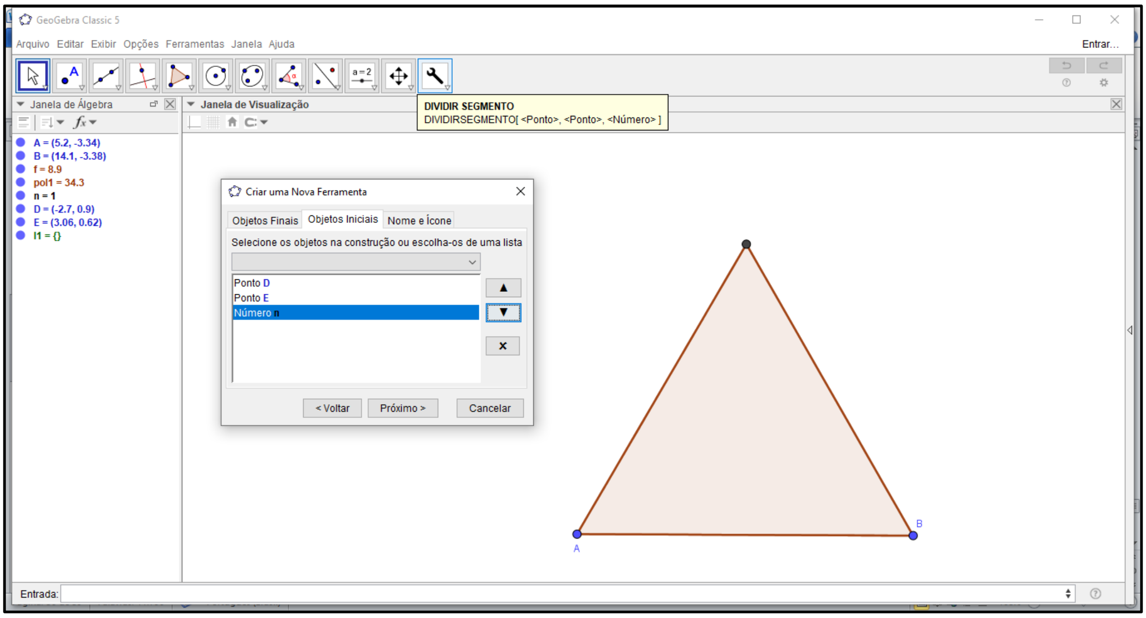


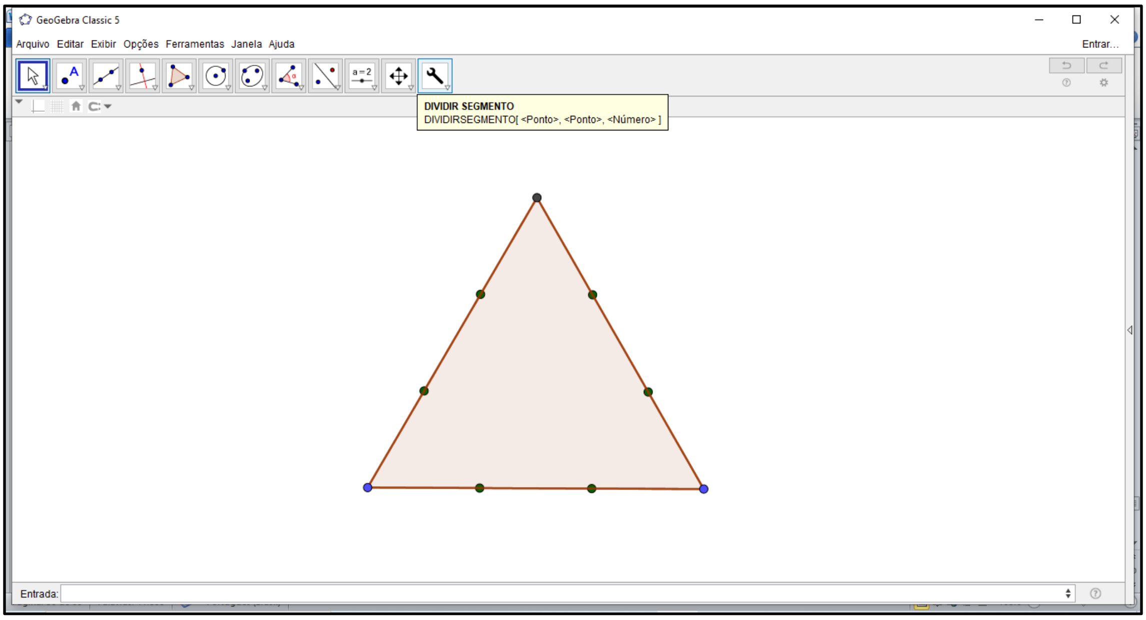


2º PASSO: Dividir cada lado do triangulo em três segmentos iguais.

Para facilitar a construção, vamos criar uma ferramenta que divide segmentos em parte iguais.

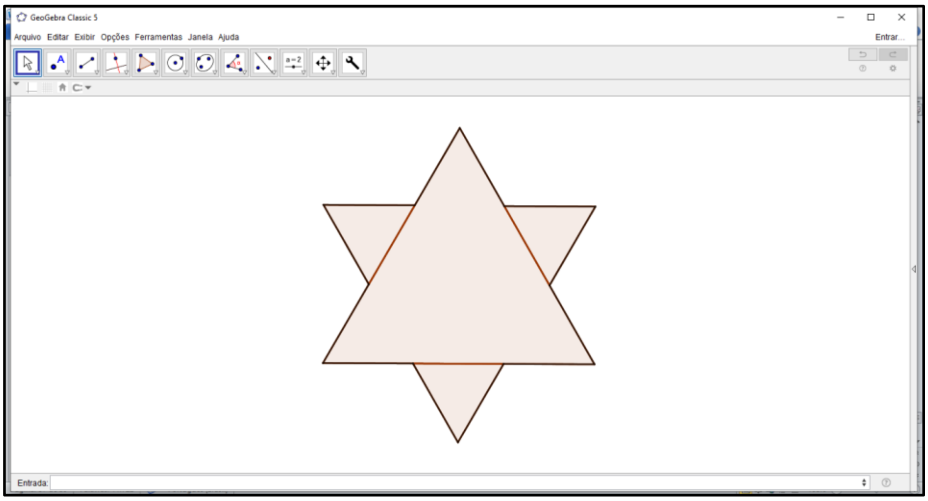
- ✓ Criamos um controle deslizante
- ✓ Em seguida dois pontos qualquer
- ✓ Na janela de entrada criamos uma sequência
- ✓ Criamos a ferramenta no menu do GeoGebra
- ✓ Dividimos os lados do triângulo em três segmentos proporcionais





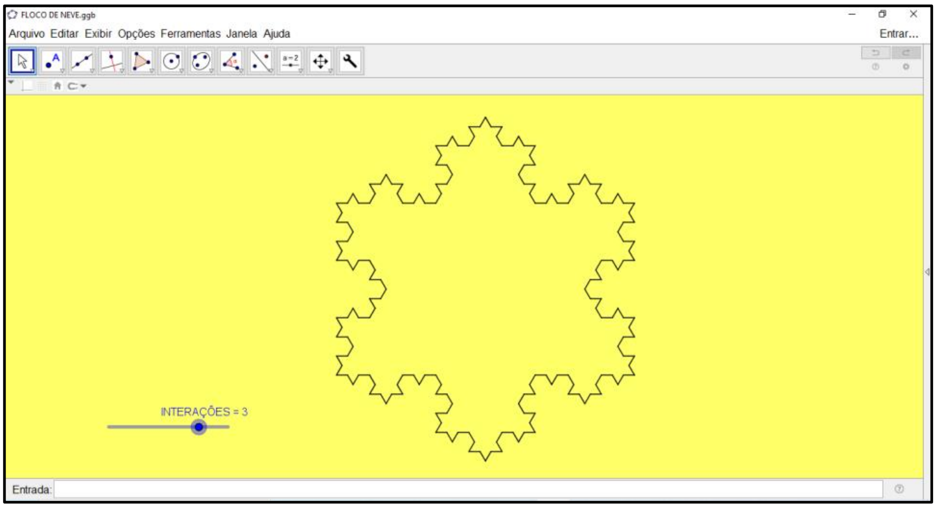
3º PASSO: Formar triângulos equiláteros com o segmento médio dos lados.

Usando o primeiro passo, construa triângulos equiláteros usando com base o segmento médio dos lados, depois apague esse segmento médio, de modo que os novos triângulos equiláteros fiquem sem a base.



4º PASSO: Continuar a divisão dos lados dos triângulos em partes iguais

Repita as etapas anteriores para cada lado dos novos triângulos formados quantas vezes forem necessárias ou criar outra ferramenta que realize esse processo de forma mais rápida. E por fim inserir um controle deslizante, mudar a corda da janela e da figura e esconder os rótulos dos objetos.



Baixar a atividade em:

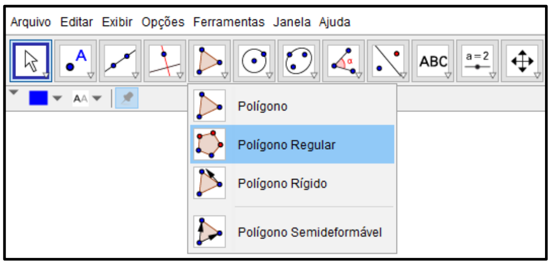
https://drive.google.com/file/d/1pN6RxNpF3O3YHbCe110MkeFhSviXB9F0/view?usp=sharing

FLOCO DE NEVE DE KOCH (QUADRADO)

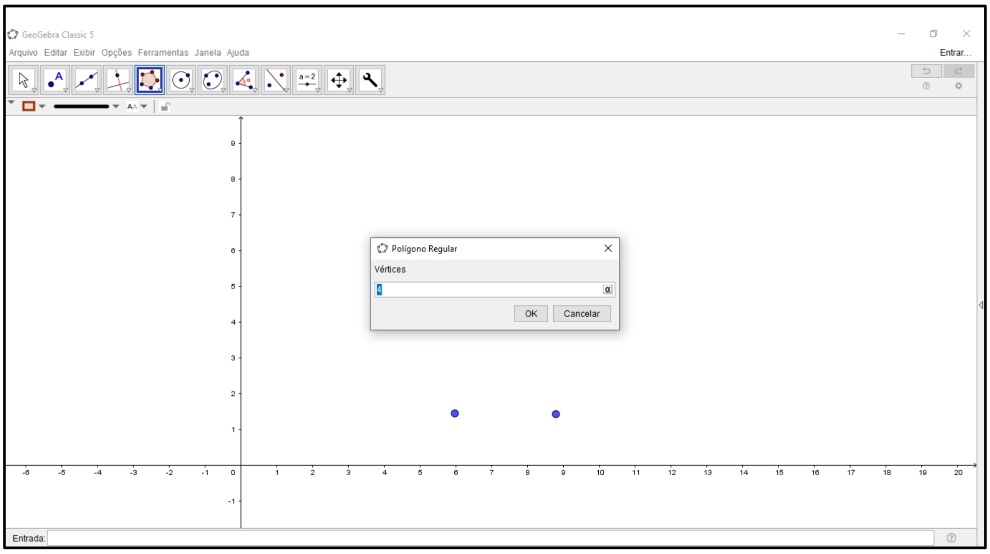
Essa variação do floco de neve de Koch pode ser construída no GeoGebra de maneira parecida com fractal anterior:

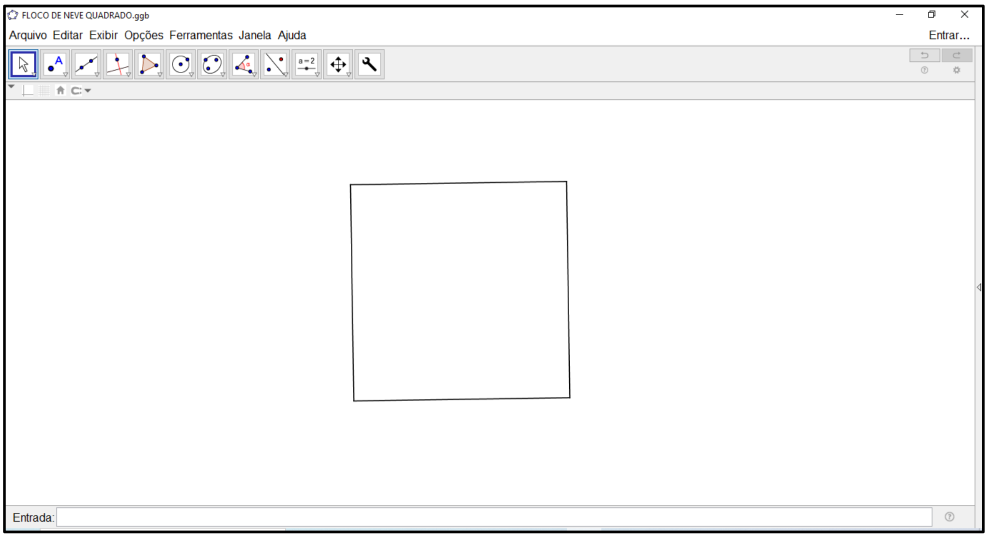
1 º PASSO: Construir um quadrado de lado qualquer.

Selecione a seta no canto inferior direito da ferramenta polígono e escolha polígono regular.



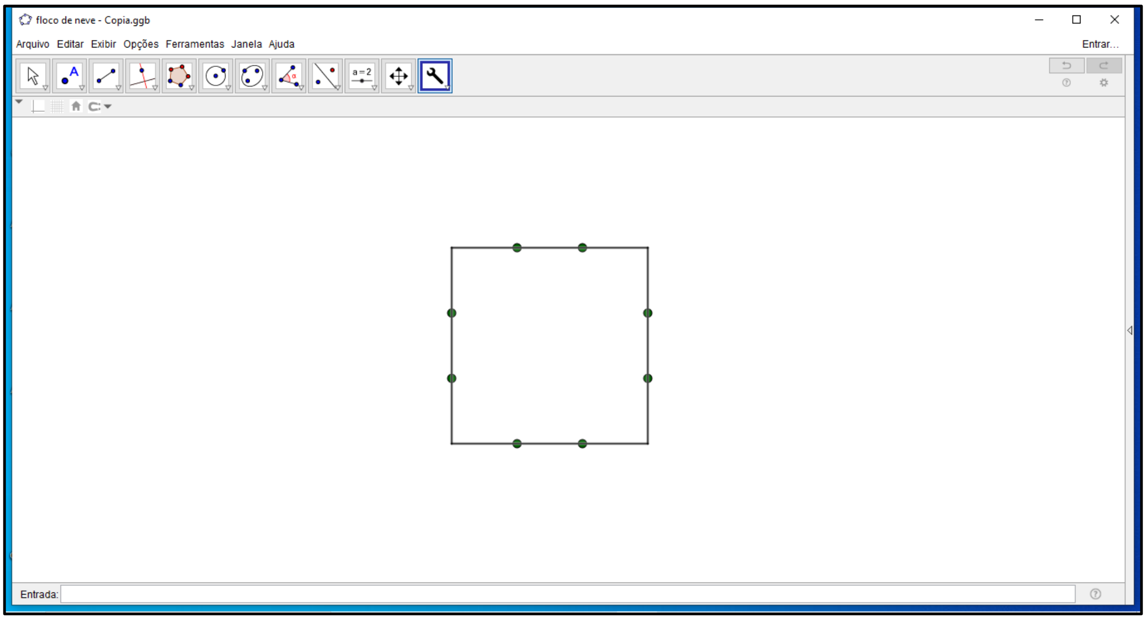
Em seguida marque dois pontos na tela e, na janela de polígono regular em vértices, digite 4.





2º PASSO: Dividir cada lado do quadrado em três segmentos iguais.

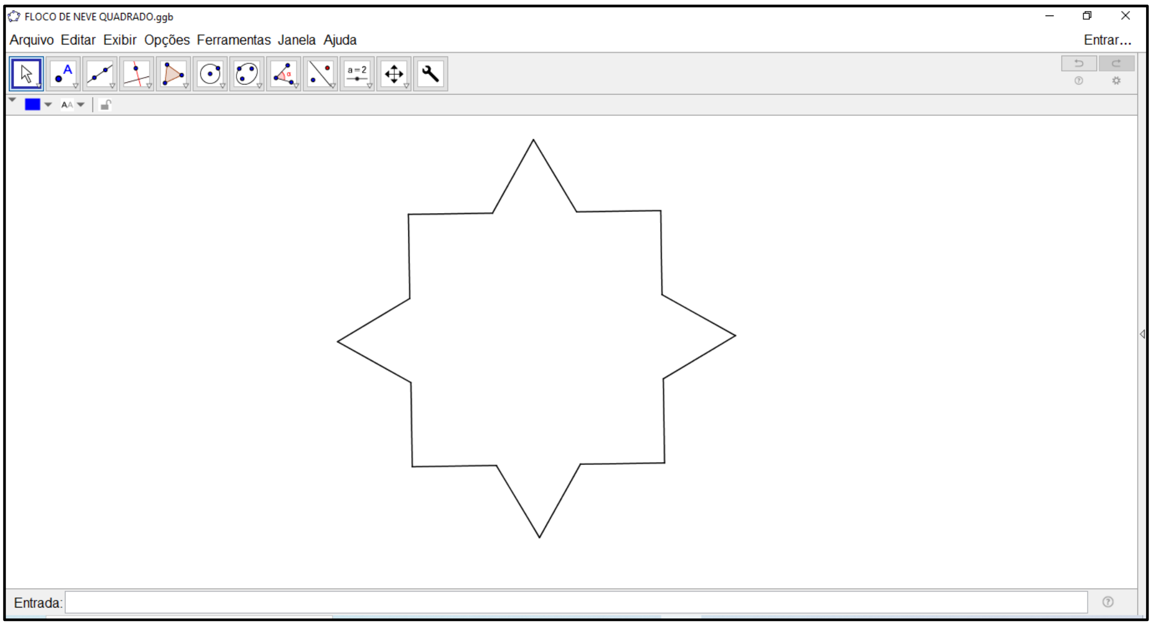
Para facilitar a construção, vamos criar a mesma ferramenta que divide segmentos em parte iguais que usamos na construção do fractal anterior.



3º PASSO: Formar triângulos equiláteros com o segmento médio dos lados.

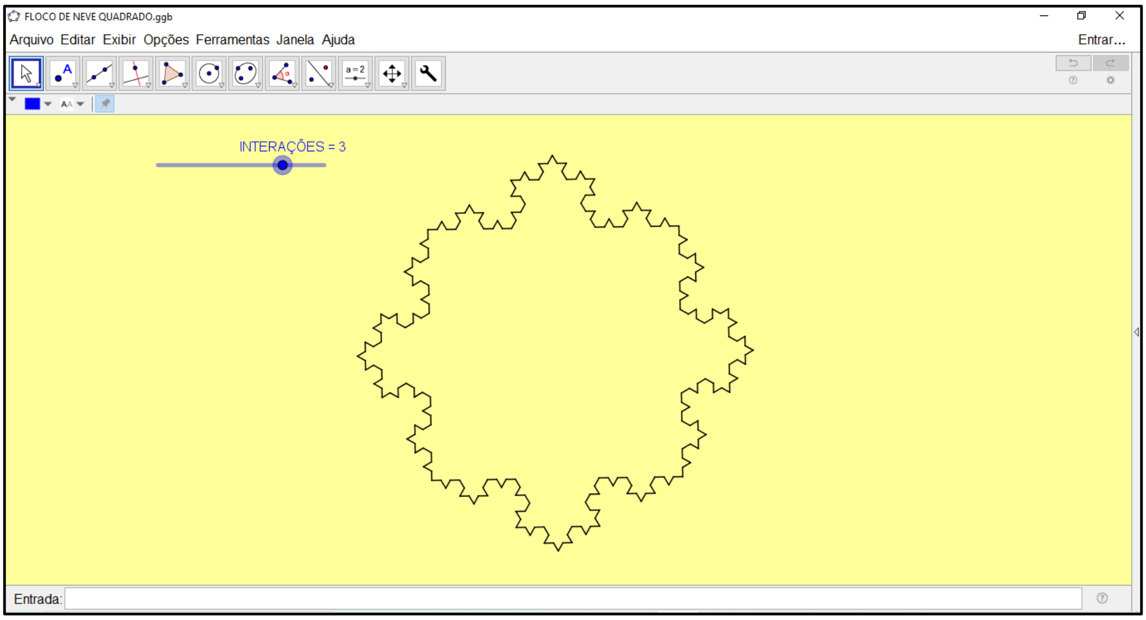
Use o primeiro passo, construa triângulos equiláteros usando com base o segmento médio dos lados, depois apague esse segmento médio, de modo que

os novos triângulos equiláteros fiquem sem a base.



4º PASSO: Continuar a divisão dos lados dos triângulos em partes iguais

Repita as etapas anteriores para cada lado dos novos triângulos formados quantas vezes forem necessárias ou criar uma nova ferramenta que faça esse processo mais rápido. E por fim inserir um controle deslizante, mudar a corda da janela e da figura e esconder os rótulos dos objetos.



Baixar a atividade em:

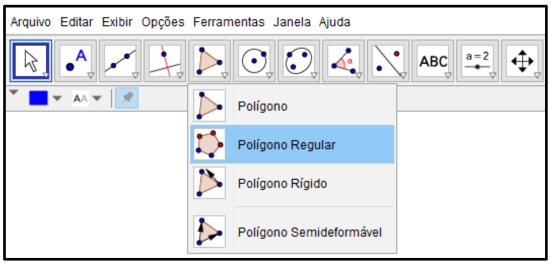
https://drive.google.com/file/d/1sh5fPK9SIspdzfRgVPGia5UoxTM-OW_R/view?usp=sharing

TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

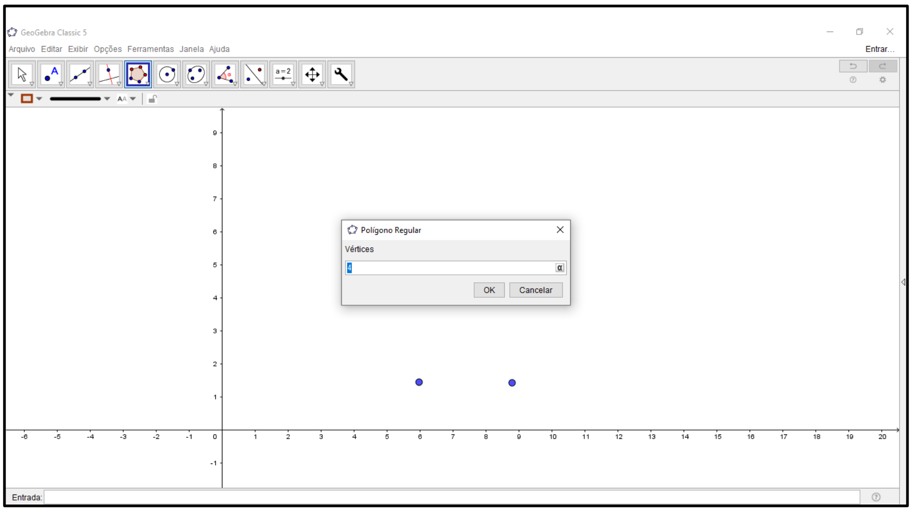
Vamos fazer a construção de um triângulo de Sierpinski.

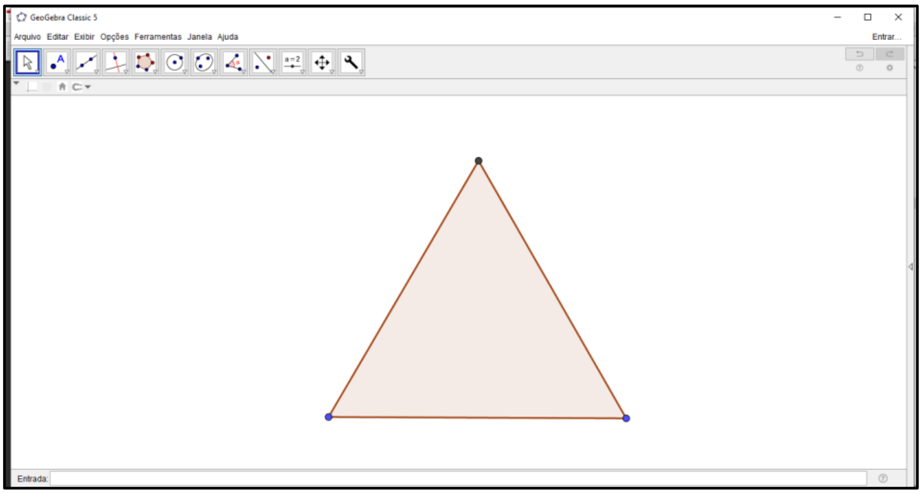
1 º PASSO: Construir um triangulo equilátero de lado qualquer.

Selecione a seta no canto inferior direito da ferramenta polígono e escolha polígono regular.



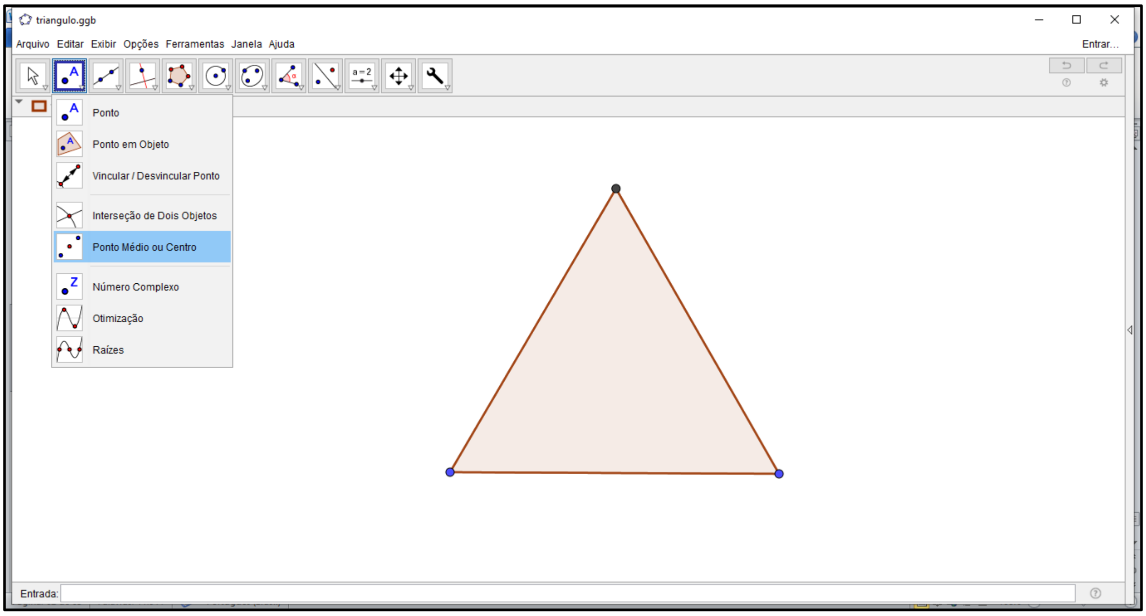
Em seguida marque dois pontos na tela e, na janela de polígono regular em vértices, digite 3.

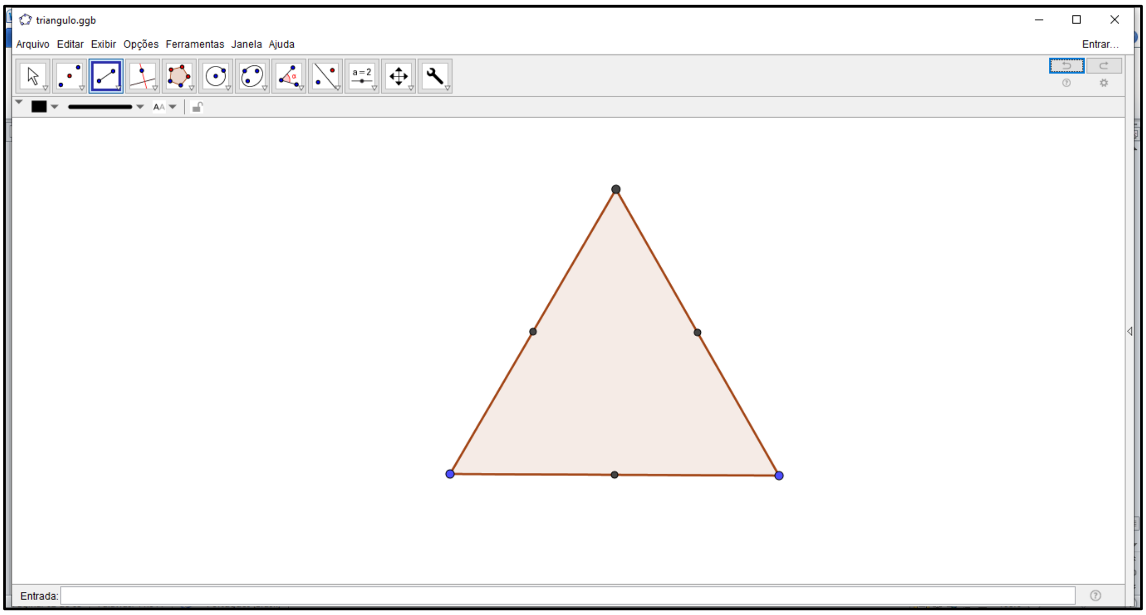




2º PASSO: Determinar os pontos médios dos lados.

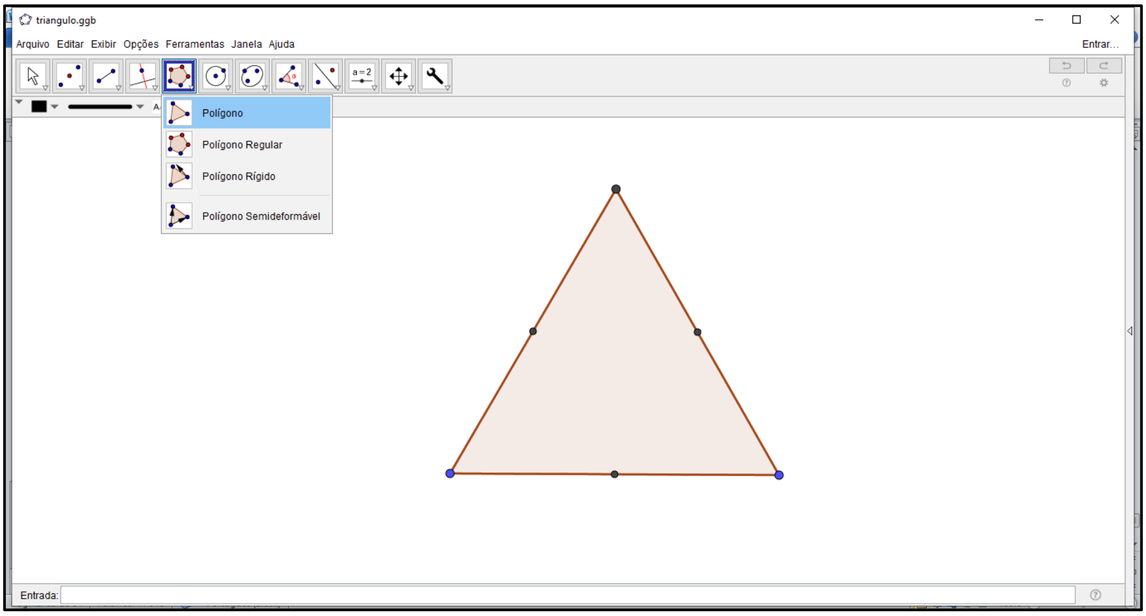
Clique no canto inferior direito da ferramenta ponto e selecione a opção ponto médio, agora clique em dois vértices de cada vez.

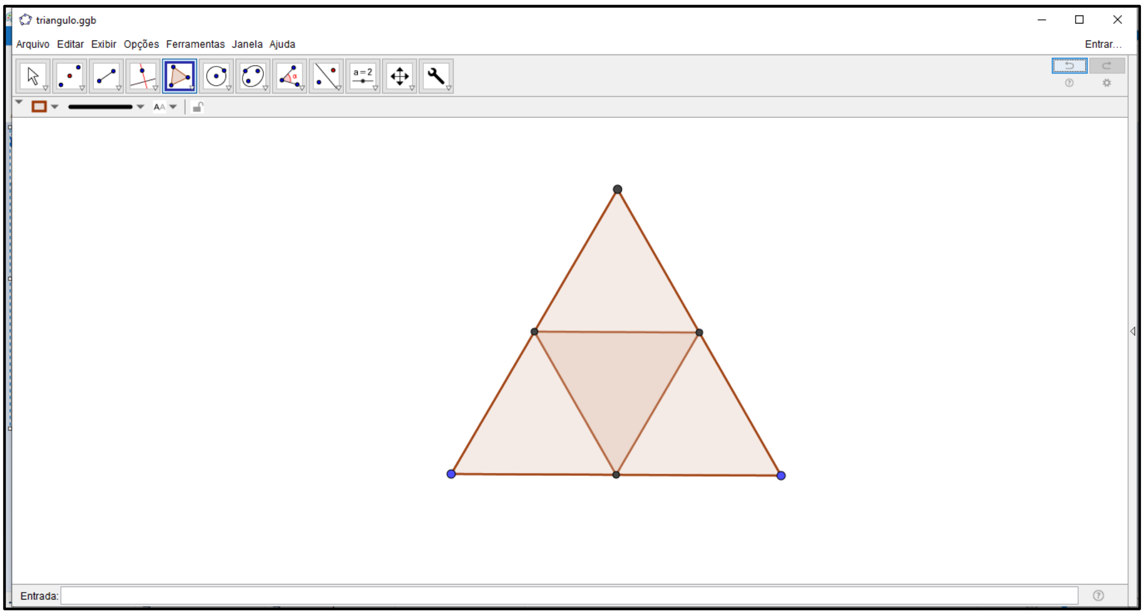




3º PASSO: Criar triângulo equilátero com os pontos médios.

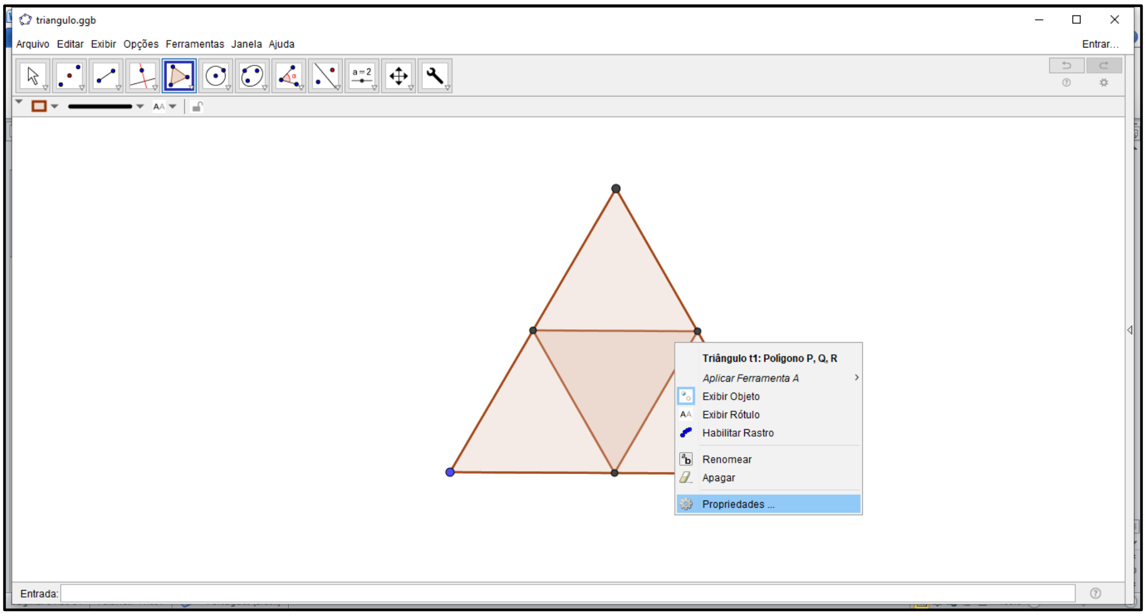
Clique na ferramenta polígono, fazer um triângulo equilátero usando os pontos médios dos lados do triângulo.

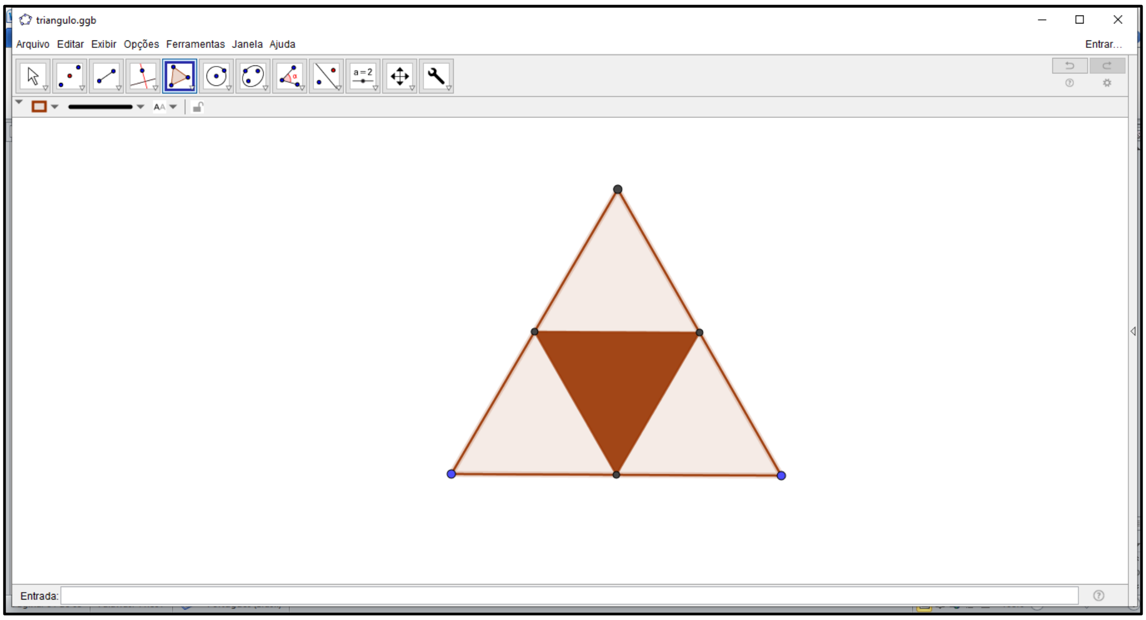




4º PASSO: Mudar a cor do triângulo do centro.

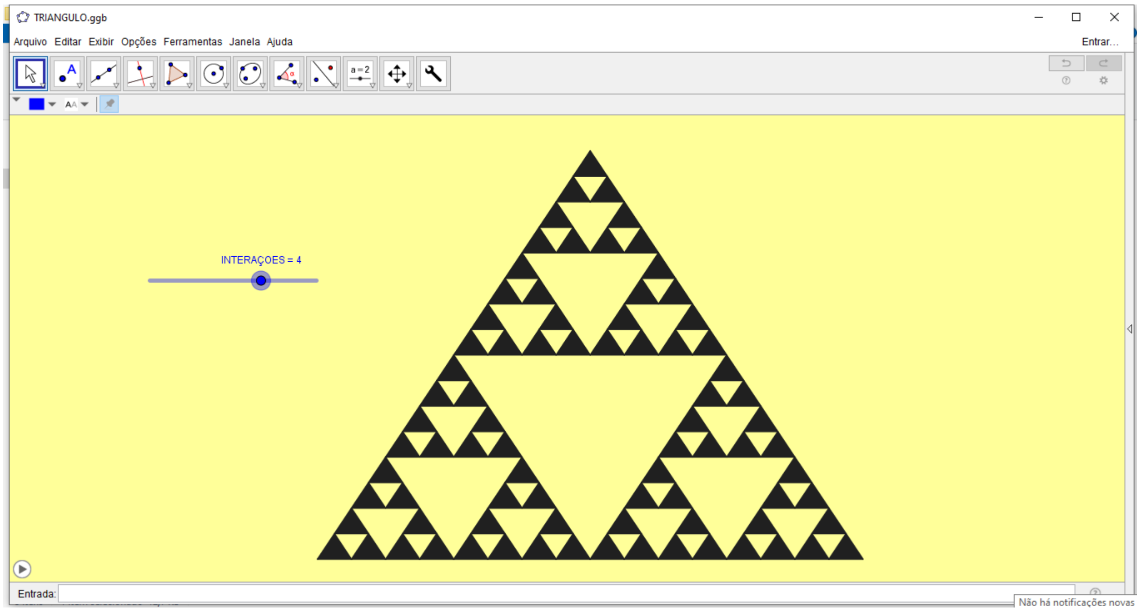
Selecione o triângulo central, agora vá a propriedades. Escolha a opção cor e escolha uma e clique em fechar.





5º PASSO: Continuar a construção dos triângulos centrais.

Repita o passo anterior para cada novo triângulo formado quantas vezes forem necessárias ou criar uma nova ferramenta que faça esse processo mais rápido. E por fim inserir um controle deslizante, mudar a corda da janela e da figura e esconder os rótulos e legendas dos objetos.



Baixar a atividade em:

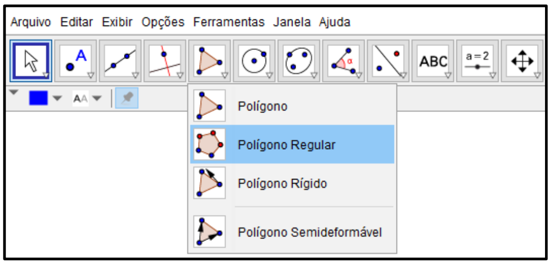
https://drive.google.com/file/d/1XWda-an998qzqZ9tu3IYexbGYBRIP04F/view?usp=sharing

TAPETE DE SIERPINSKI

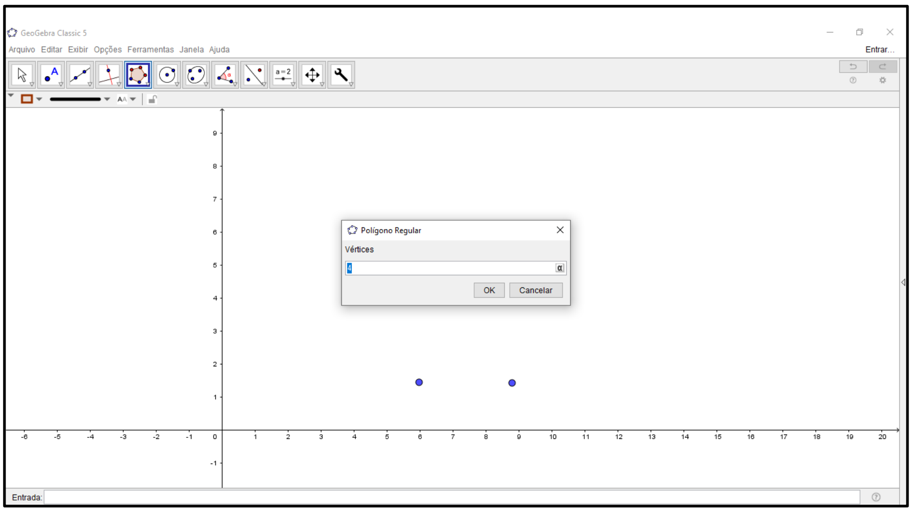
Podemos construir esse fractal no GeoGebra de maneira análoga ao triangulo de Sierpinski, só que agora a figura inicial será um quadrado:

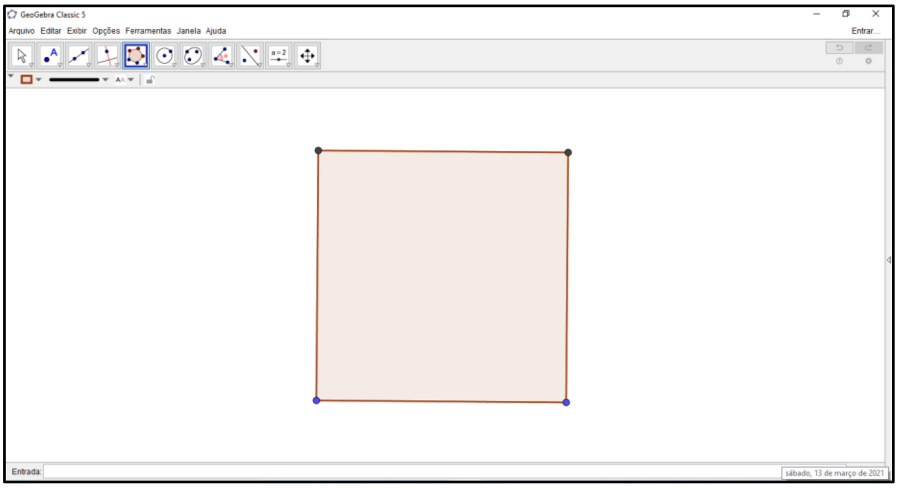
1 º PASSO: Construir um quadrado de lado qualquer.

Selecione a seta no canto inferior direito da ferramenta polígono e escolha polígono regular.



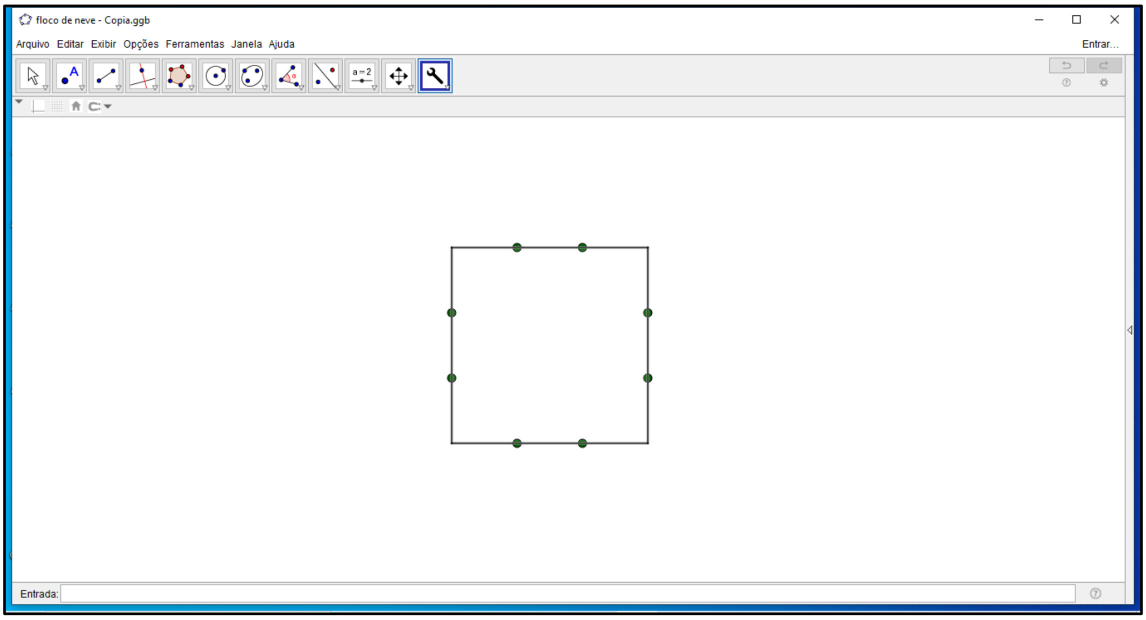
Em seguida marque dois pontos na tela e, na janela de polígono regular em vértices, digite 4.





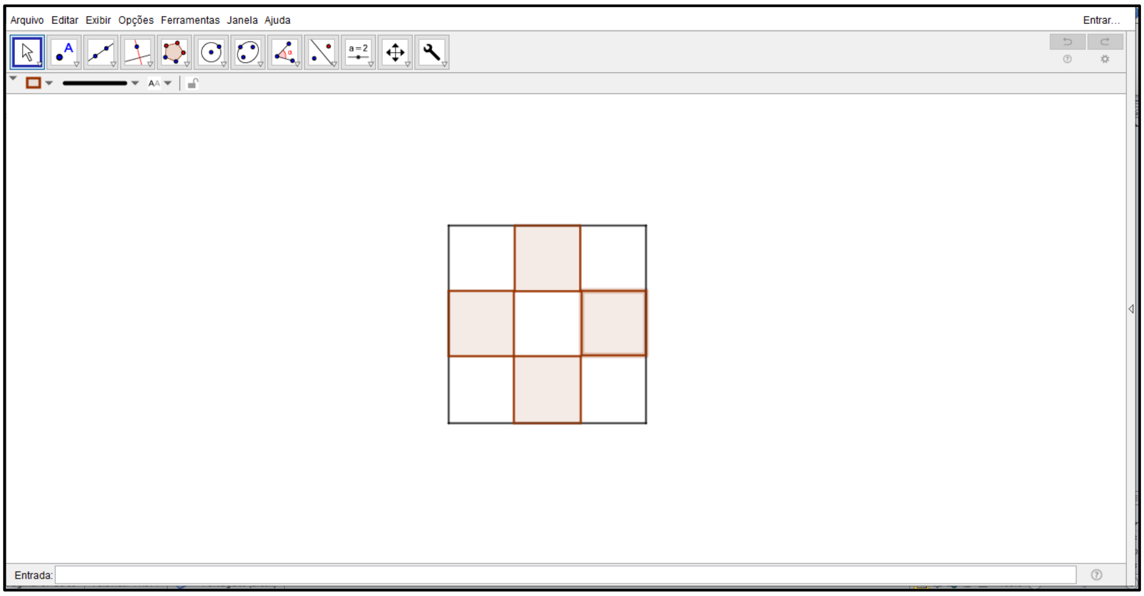
2º PASSO: Dividir cada lado do quadrado em três segmentos iguais.

Para facilitar a construção, vamos criar a mesma ferramenta que divide segmentos em parte iguais que usamos na construção do fractal curva de Koch.



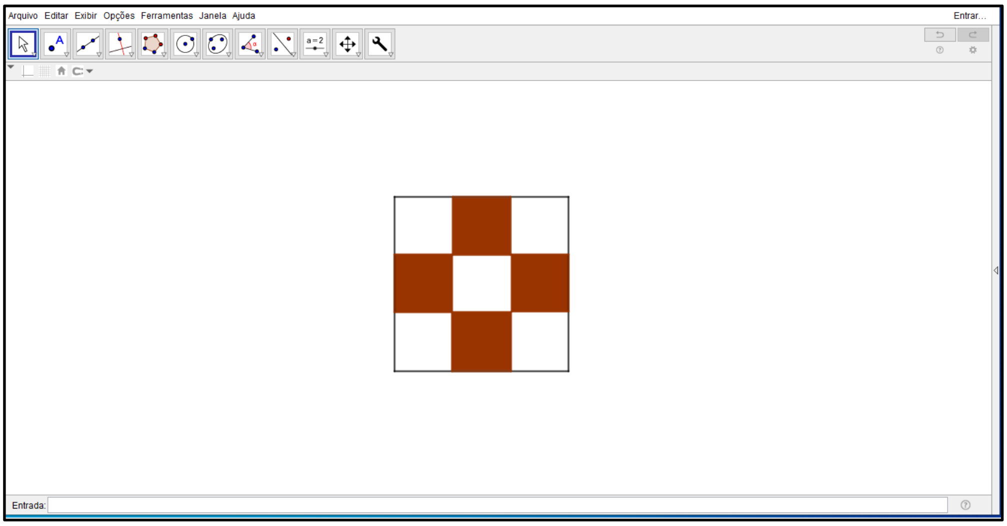
3º PASSO: Formar quadrados com o segmento médio dos lados.

Use o primeiro passo, construa quadrados usando com base o segmento médio dos lados. Esconder objetos e legendas desnecessários.



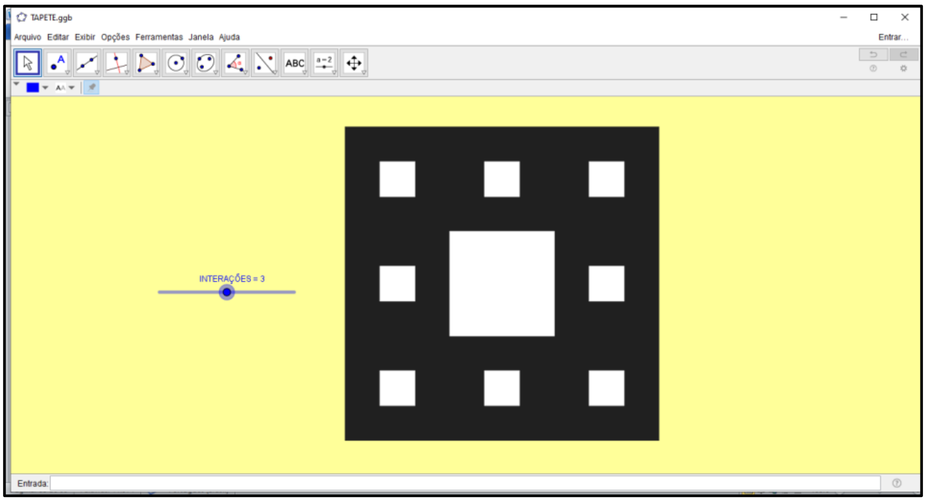
4º PASSO: Mudar a cor dos quadrados criados com os segmentos médios.

Selecione cada um dos quadrados, agora vá a propriedades. Escolha a opção cor e escolha uma e clique em fechar.



5º PASSO: Continuar a construção dos quadrados com os segmentos centrais.

Repita o passo anterior para cada novo quadrado menor formado, menos no quadrado do centro, quantas vezes forem necessárias ou criar uma nova ferramenta que faça esse processo mais rápido. E por fim inserir um controle deslizante, mudar a cor da janela e da figura a seu gosto, esconder os rótulos e legendas dos objetos.



Baixar a atividade em:

https://drive.google.com/file/d/16wc5dBYZGPYv6NlQ7Hv7vmL_VEwcpWjc/view?usp=sharing