



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Explorando a Matemática do Número $\Phi$ , o Número de Ouro

**Gilberto Vieira dos Santos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora  
**Profa. Dra. Carina Alves**

**2013**

111 Santos, Gilberto Vieira  
X111x Explorando a Matemática do Número  $\Phi$ , o Número de Ouro/  
Gilberto Vieira dos Santos- Rio Claro: [s.n.], 2013.  
71 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientadora: Carina Alves

1. Número Fi. 2. Número de Ouro. 3. Seção Áurea. 4. Sequência de Fibonacci. 5. Inteiros Quadráticos. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Gilberto Vieira dos Santos

EXPLORANDO A MATEMÁTICA DO NÚMERO  $\Phi$ , O NÚMERO DE OURO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Carina Alves  
Orientadora

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti  
Departamento de Matemática - UNESP - Rio Claro

Prof. Dr. Antonio Aparecido de Andrade  
Departamento de Matemática - UNESP - São José do Rio Preto

**Rio Claro, 15 de Agosto de 2013**

*Aos meus inesquecíveis professores de Matemática: Eusa Maria Alves Cardoso do  
cursos de Primeiro e Segundo Graus, e Geraldo Severo de Souza Ávila do Curso de  
Licenciatura em Matemática*

# Agradecimentos

Quando agradecemos a todos, podemos deixar de enfatizar aos que mais importa. Mas quando citamos, podemos esquecer de alguns. No entanto, a gratidão é sempre necessária.

Agradeço pois em especial a Deus, àquele que sempre está do nosso lado.

À minha mãe e ao meu falecido pai, que na humildade material souberam enriquecer-me com a retidão de caráter para viver com dignidade e honra. Aos meus irmãos, símbolos de que não existimos solitariamente e da necessidade de que vivamos em família.

Aos colegas de turma. Aos amigos, especialmente àqueles em quem me apoiei durante todo o curso: Maciel, João e Amauri. Sem eles, talvez caminharia, mas não teria certeza da chegada. Aos docentes, Professores da UNESP-Rio Claro, pela dedicação e incentivo, sem os quais nada nada existiria.

A todos os idealizadores, organizadores e coordenadores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que, com visão revolucionária, enxergaram que valorizar e preparar o professor é condição necessária para a melhoria do ensino da Matemática.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), que fomentou o programa PROFMAT com auxílio financeiro e custeio da pesquisa.

À professora Yara Brito Brasileiro, amiga, que fez as correções de Língua Portuguesa.

Especialmente à Orientadora, Professora Doutora Carina Alves, pela paciência e dedicação nas leituras, indicações de correções e direcionamento da pesquisa. E também aos meus estimáveis alunos do Ensino Fundamental que, embora inconscientes, são cúmplices de meu crescimento enquanto professor de matemática.

A todos esses e àqueles que, porventura, não tenha citado, minha eterna gratidão.

*A Geometria tem dois grandes tesouros. Um é o Teorema de Pitágoras.  
O outro, a divisão de uma linha nas razões extrema e média.  
O primeiro podemos comparar a uma medida de ouro.  
O segundo podemos chamar de uma jóia preciosa. Johannes Kepler (1571-1630)*

# Resumo

Nesta pesquisa, exploramos um número especial para aqueles que admiram a Matemática. Ele é chamado de *número de ouro*, *proporção áurea* ou *número  $\Phi$* . O primeiro registro escrito desse número na história da matemática aparece no livro *Os Elementos VI*, de Euclides (século VI a.C). Originalmente, o problema era dividir um segmento em *extrema e média* razão. Desde então, uma série de outros problemas e resultados com este número foram aparecendo. Demos atenção especial para a seqüência de Fibonacci, fascinante porque seus elementos são apenas números inteiros, mas produzem o número irracional  $\Phi$ . Mostramos que alguns resultados obtidos com  $\Phi$  são propriedades características de certos números do anel dos inteiros quadráticos  $\mathcal{O}(m)$ , conjunto ao qual ele pertence.

**Palavras-chave:** Número Fi, Número de Ouro, Seção Áurea, Sequência de Fibonacci, Inteiros Quadráticos.

# Abstract

This research we explored a special number for those who admire Mathematics. It is called the *gold number*, *golden ratio* or *number  $\Phi$* . The first record of its occurrence in the history of mathematics appears in the *Euclid's Elements - Book VI* . Originally, the problem was to divide a segment in *extreme* and *average* ratio. Since then, a lot of number of other problems and studies with this number were developed. We gave special attention to the Fibonacci sequence, fascinating because its elements are just integer numbers, but produce the irrational number  $\Phi$ . We demonstrate that many results obtained with  $\Phi$  are characteristic properties of some numbers of quadratic ring of integers  $\mathcal{O}(m)$ , set to which  $\Phi$  belongs.

**Keywords:** Fi Number, Golden Number, Golden Section, Fibonacci Sequence, Quadratic Integers.

# Lista de Figuras

1.1	Corte do segmento $\overline{AB}$ em extrema e média razão . . . . .	14
1.2	Razão áurea do segmento $AB$ . . . . .	14
1.3	Seção áurea de um segmento $\overline{AB}$ com régua e compasso . . . . .	17
1.4	Retângulo áureo . . . . .	19
1.5	Sucessão de retângulos áureos - <i>O Olho de Deus</i> . . . . .	19
1.6	Dobraduras para construir um retângulo áureo a partir de um quadrado qualquer . . . . .	20
1.7	Pentágono regular . . . . .	21
1.8	Polígonos que exibem triângulos de ouro . . . . .	22
1.9	Triângulos de ouro . . . . .	23
1.10	Triângulo retângulo de ouro . . . . .	24
1.11	Gráficos: seno, cosseno e tangente para ângulo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ . . . . .	25
1.12	Espiral logarítmica . . . . .	26
1.13	Construção da espiral logarítmica . . . . .	27
1.14	Uma espiral no retângulo áureo . . . . .	27
1.15	Uma espiral no triângulo áureo . . . . .	28
2.1	Leonardo de Pisa (1170-1250) - Fibonacci . . . . .	29
2.2	Crescimento do número de coelhos do problema de Fibonacci . . . . .	31
2.3	Justapondo retângulos com áreas iguais a produtos de termos consecuti- tivos da sequência de Fibonacci . . . . .	37
4.1	Atividade 1 - Encontrando o ponto da divisão áurea de um segmento $\overline{AB}$	56
4.2	Retângulo áureo a partir do segmento $\overline{AB}$ . . . . .	57
4.3	Retângulo áureo $\overline{AB}$ a partir de um quadrado . . . . .	58
4.4	Construção com o <i>Geogebra</i> : o número $\Phi$ no triângulo equilátero . . . . .	59
4.5	Construção com o programa <i>Régua e Compasso (C.a.R)</i> : o número $\Phi$ a partir de um quadrado e um triângulo equilátero . . . . .	60
5.1	Aplicação da $S$ sobre $\overline{HG}$ , com excedente $BEFG$ semelhante à $P$ . . . . .	67
5.2	Sequência de retângulos áureos . . . . .	69

# Lista de Tabelas

2.1	Problema dos coelhos de Fibonacci . . . . .	31
3.1	Alguns exemplos de unidades do anel $\mathcal{O}(m)$ . . . . .	42
3.2	Coefficientes dos termos das potências de $x$ . . . . .	45
3.3	Valores de $q_n$ e $p_n$ para $\alpha = 2 + \sqrt{3} \simeq 3,732050808$ . . . . .	47
3.4	Valores de $q_n$ e $p_n$ para $\alpha = 2 + \sqrt{5} \simeq 4,236067977$ . . . . .	47
3.5	Valores de $q_n$ e $p_n$ para $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618033989$ . . . . .	48
3.6	Valores de $q_n$ e $p_n$ para $\alpha = 3 - 2\sqrt{2} \simeq 0,171572875$ . . . . .	48
3.7	Normas das potências de $\Phi$ . . . . .	49
3.8	Sequência gerada por $\mu = 1 + \sqrt{2}$ na fórmula (3.12) . . . . .	52
3.9	Algumas das raízes positivas da equação $x^2 + nx - 1 = 0$ . . . . .	53

# Notação

$\mathbb{N}$  - Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{Z}$  - Conjunto dos Números Inteiros

$\mathbb{Q}$  - Conjunto dos Números Racionais

$\mathbb{R}$  - Conjunto dos Números Reais

$\Phi$  - número de ouro, com valor igual a  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$\overline{AB}$  - segmento de extremidades  $A$  e  $B$

$AB$  - medida do segmento  $\overline{AB}$

$(a_n)$  - sequência de termos  $a_n$

$\bar{x}$  - conjugado de  $x$

$\tau(\mu)$  - traço do elemento  $\mu$

$\mathcal{N}(\mu)$  - norma do elemento  $\mu$

$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$  - corpo quadrático

$\mathcal{O}(m)$  - anel de inteiros quadráticos

# Sumário

<b>1</b>	<b>O Número <math>\Phi</math>, número de ouro ou razão áurea</b>	<b>13</b>
1.1	Espirais . . . . .	26
<b>2</b>	<b>A sequência de Fibonacci e suas relações com o número <math>\Phi</math></b>	<b>29</b>
2.1	Leonardo de Pisa e a sequência de Fibonacci . . . . .	29
2.2	Recorrências . . . . .	32
2.3	Relações entre $\Phi$ e a sequência de Fibonacci . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Inteiros quadráticos e o número <math>\Phi</math></b>	<b>38</b>
<b>4</b>	<b>Propostas de abordagens na Educação Básica</b>	<b>55</b>
4.1	Atividade 1 - Encontrando o ponto da divisão áurea de um segmento $\overline{AB}$	55
4.2	Atividade 2 - O retângulo áureo . . . . .	57
4.2.1	Construindo o retângulo áureo a partir do ponto da divisão áurea de um segmento . . . . .	57
4.2.2	Construindo o retângulo áureo a partir de um quadrado . . . . .	57
4.3	Atividade 3 - Construindo o pentágono regular . . . . .	58
4.3.1	Desenvolvimento . . . . .	58
4.4	Sugestões de recursos computacionais . . . . .	59
4.4.1	Geogebra . . . . .	59
4.4.2	Régua e Compasso ( <i>C.a.R. - Compass and Ruller</i> ) . . . . .	60
4.4.3	Cabri-Géomètre . . . . .	60
4.4.4	Atividades <i>Online</i> . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>63</b>
	<b>Referências</b>	<b>65</b>

# Introdução

Desde os tempos de Euclides (Século III a.C.), passando pelos Pitagóricos até os dias atuais, muitos homens se entusiasmam com a Matemática e se dedicam ao seu estudo movidos pelo encantamento ou mistérios que alguns números têm. Por isso, produzem estudos tentando encontrar proporções, padrões numéricos ou regularidades em objetos, seres da natureza ou do universo. Muito daquilo que se produziu em Matemática ao longo da sua História se deu a partir dessa admiração que os números provocam nos homens.

Um problema que sempre dispendeu ocupação dos estudiosos em matemática, desde Euclides, é a questão da incomensurabilidade de um segmento, isto porque é possível construir dois segmentos cuja razão entre seus comprimentos não pode ser expressa por números inteiros. Para muitos homens, tal é o encantamento que alguns números provocam que propriedades de alguns deles são reproduzidas em manifestações de cultura - como na arte e na arquitetura - acreditando serem tais números algo como uma divindade, ente mágico ou coisa assim. Como exemplos de tais números podemos citar o número  $\pi$  (ou  $\pi$ ) que está associado à toda forma circular, o número de ouro  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , que é associado a vários resultados que modelam fenômenos da natureza e ainda o número  $e$ , chamado base do *logaritmo natural*.

Outros homens, ainda, não menos encantados que os primeiros, dedicam-se ao estudo dos números como entes puramente abstratos, em princípio, sem nenhum vínculo com o mundo real, mas apenas com o mundo da abstração, classificando-os em conjuntos, de acordo com características comuns, propondo axiomas, definindo operações, estudando propriedades operatórias, criando estruturas algébricas, pesquisando resultados que se generalizam em proposições e teoremas, ou mesmo exibindo resultados que, em princípio, não precisam ser associados ao mundo real, como foi o caso do número complexo  $i = \sqrt{-1}$ .

Por vezes, ao longo da História da Matemática, pode-se notar um distanciamento da matemática produzida pelos matemáticos mais puristas - aqueles a quem a matemática justifica-se em si mesma - em relação à matemática dos que se fascinam pela busca de padrões e regularidades numéricas presentes no mundo físico. Neste nosso estudo, queremos explicar tal distanciamento apresentando o número  $\Phi$ , que comumente é representado como uma proporção presente em diversas situações do mundo real, mas, em algumas vezes não se considera o fato de que, sendo este um elemento de um

---

conjunto, é carregado de propriedades ou proporciona resultados que são gerais de elementos de seu conjunto.

É notável a grandiosidade de resultados aos quais o número  $\Phi$  se associa. Um dos mais conhecidos é verificado na sequência de Fibonacci, cuja razão entre dois termos consecutivos é um número cada vez mais próximo de  $\Phi$  quanto maior for a ordem dos termos tomados. Outra associação é a história de que esse número foi estudado e utilizado em criações pelo artista renascentista Leonardo da Vinci (1452-1519), que o considerava a proporção divina, e por Roger Penrose (1931- ), físico-matemático inglês, professor emérito de matemática da Universidade de Oxford, em seus estudos de ladrilhamento do plano.

Embora não se possa omitir o caráter entusiástico, quase mágico, que o número  $\Phi$  possa causar a seus admiradores, por ser relacionado a fenômenos naturais, construções arquitetônicas ou obras de arte, muitas destas relações ou associações são passíveis de contestações, muitas vezes motivadas por fatores como imprecisões de medidas ou o simples encantamento por este número. Não obstante a isso, neste nosso estudo, não nos enredaremos pelo caminho de discutir ou contrapor tais associações, mesmo não ignorando que muitas dessas associações podem ter sido feitas mais pelo excesso de encantamento e menos pelo rigor matemático por parte daqueles que as fazem.

O número  $\Phi$ , aqui em nosso trabalho, será apresentado a partir do enfoque estritamente matemático, classificando-o como um número irracional e também como número inteiro quadrático do anel  $\mathcal{O}(5)$ . Nesse sentido, em nossa pesquisa, discorreremos brevemente sobre o anel dos inteiros quadráticos, com a finalidade de mostrar que alguns dos resultados aos quais  $\Phi$  se relaciona ou que produz, muitas vezes, não lhe são peculiares, mas características de demais elementos desse anel.

No decorrer de nosso trabalho, pesquisaremos e mostraremos, por meio da realização de um apanhado de exemplos geométricos e algébricos, porque o número  $\Phi$  é muito estudado por aqueles que se dispõem a desvendá-lo - admiradores, pesquisadores em matemática, místicos, artistas entre outros. E, ainda, apresentaremos e exploraremos alguns resultados gerais de números do conjunto ao qual  $\Phi$  pertence. Para finalizar, apresentaremos propostas de abordagens no Ensino Básico.

# 1 O Número $\Phi$ , número de ouro ou razão áurea

Neste capítulo apresentamos brevemente a história do Número  $\Phi$ , discorreremos sobre algumas de suas aplicações sugerindo referenciais para aprofundamento de estudos e apresentamos diversos exemplos aos quais este valor está associado. Usamos como referências [1], [3], [5], [6], [9], [10], [11], [12], [15] e [17].

Uma referência muito antiga ao número  $\Phi$  ou ao número de ouro aparece no livro *Os Elementos VI*, de Euclides. Em seu livro, Euclides trata do problema de cortar (ou seccionar) um segmento em extrema e média razão. Euclides, em [5], chama esse problema de Euclides de *Cortar a reta finita dada em extrema e média razão*, e assim o apresenta:

Seja a reta finita dada  $AB$ ; é preciso então, cortar a reta  $AB$  em extrema e média razão.

Fique descrito sobre a  $AB$  o quadrado  $BC$ , e fique aplicado à  $AC$  o paralelogramo  $CD$  igual a  $BC$ , excedente pela figura  $AD$  semelhante a  $BC$ . Mas o  $BC$  é um quadrado; portanto, também a  $AD$  é um quadrado. E, como o  $BC$  é igual a  $CD$ , fique subtraído o  $CE$  comum; portanto, o  $BF$  restante é igual à  $AD$  restante. Mas também é equiângulo com ela.

Portanto, os lados, à volta dos ângulos iguais, dos  $BF$ ,  $AD$  são inversamente proporcionais; portanto, como a  $FE$  está para  $ED$ , assim como a  $AE$  está para  $EB$ . Mas por um lado,  $FE$  é igual à  $AB$ , e, por outro lado, a  $ED$ , à  $AE$ . Portanto, como a  $BA$  está para  $AE$ , assim a  $AE$  para  $EB$ . Mas a  $AB$  é maior do que a  $AE$ ; portanto, também a  $AE$  é maior do que a  $EB$ . Portanto, a reta  $AB$  foi cortada em extrema e média razão no  $E$ , e o maior segmento dela é o  $AE$ ; o que era preciso fazer.

No Apêndice 1, faremos uma interpretação desse problema.

Em linguagem e notação atuais da matemática, o problema descrito por Euclides consiste na ideia de que dado um segmento de reta  $\overline{AB}$ , queremos encontrar um ponto  $C$  que o divida em duas partes (extrema e média). Isso se faz considerando que a

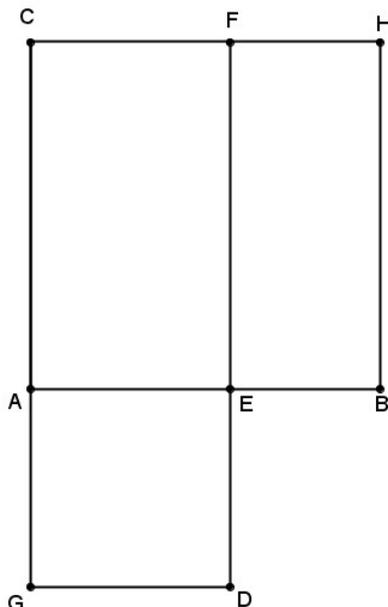


Figura 1.1: Corte do segmento  $\overline{AB}$  em extrema e média razão

razão da medida do segmento  $\overline{AB}$  para a medida do segmento  $\overline{AC}$  seja igual à razão da medida do segmento  $\overline{AC}$  para a medida do segmento  $\overline{CB}$ . Isto é, queremos  $C$  tal que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}. \quad (1.1)$$



Figura 1.2: Razão áurea do segmento  $AB$

Para determinarmos a razão em questão, consideremos a figura 1.2, admitindo  $AB = x$  e  $AC = y$ , teremos  $BC = x - y$ . Substituindo na equação (1.1), obtemos:

$$x^2 - xy - y^2 = 0. \quad (1.2)$$

Resolvendo a equação (1.2), colocando  $x$  em função de  $y$ , encontramos as raízes  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}y$  ou  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}y$ .

Substituindo cada valor de  $x$ , nós encontramos dois valores para a razão  $\frac{AB}{AC}$ . Ao primeiro chamaremos  $\Phi$  e ao segundo  $\varphi$ , de modo que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi,$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{x}{y} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

O valor positivo da razão  $\frac{AB}{AC}$  é chamado número de ouro, número áureo, razão áurea ou divina proporção. De acordo com Livio [9, p.16] atribui-se a esse número o nome da letra grega *Phi* ( $\Phi$ ), nome dado pelo matemático Mark Barr no início do século XX, motivado por ser a primeira letra do nome do escultor grego Fídias (490-430 a.C.), que fazia o uso frequente de *Phi* (ou  $\Phi$ ) em seus trabalhos. Desde então este nome  $\Phi$  é o mais comum encontrado na literatura matemática, embora também seja usado *Tau* ou  $\tau$ , outra letra grega. Ao longo de todos os nossos estudos, vamos nos referir ao número de ouro simplesmente como número  $\Phi$ .

Apresentaremos, a seguir, alguns dos resultados não só geométricos, mas também algébricos, baseados no número de ouro. Resultados estes que, ao longo da História, intrigaram ou causaram certo fascínio a matemáticos, artistas e a tantos outros seus admiradores.

Ambos os valores obtidos para a razão  $\frac{AB}{AC}$  são irracionais, e ainda tem-se  $\varphi = \bar{\Phi}$  e  $\Phi + \bar{\Phi} = 1$ , isto é,  $\Phi$  e seu conjugado têm soma constante igual a 1. Com ferramentas computacionais é possível calcular  $\Phi$  com um grandioso número de algarismos decimais. De acordo com [9], até onde se calculou, concluiu-se que  $\Phi$  e  $\bar{\Phi}$  têm os mesmos algarismos decimais :

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343656381177203091 \dots$$

$$\bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,6180339887498948482045868343656381177203091 \dots$$

Embora pareça surpreendente o fato de que  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e seu conjugado  $\bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  tenham as mesmas sequências de algarismos decimais, isso não é nenhum resultado particular do número  $\Phi$ . De fato, tomemos  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  tais que:

$$\alpha = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2} = 2,322875655532295 \dots$$

$$\bar{\alpha} = 1 - \frac{\sqrt{7}}{2} = -0,322875655532295 \dots$$

Há inúmeros problemas matemáticos em que aparecem o número  $\Phi$ . Alguns deles apresentamos a seguir em nossa pesquisa e outros poderemos encontrar em [3], [6], [14] e em diversas outras fontes. É possível ainda encontrar na literatura científica

diversos autores que sustentam a associação do número  $\Phi$  com fenômenos biológicos e aplicações do mesmo na arte, arquitetura e em proporções de medidas humanas e de outros seres. Dentre eles podemos citar [3], [9] e [14]. Visando discutir tais aplicações, em [10], Markowsky apresenta uma série de argumentos acerca das mesmas. Segundo ele, a respeito das publicações sobre o número  $\Phi$ :

"Geralmente, suas propriedades matemáticas são corretamente apresentadas, mas muito do que é apresentado sobre a razão áurea na arte, arquitetura, literatura e estética é falso ou seriamente enganoso. Infelizmente, afirmações sobre o número de ouro tornaram-se senso comum e são amplamente repetidas. Mesmo recentes livros didáticos do ensino médio trazem muitas informações falsas sobre o número de ouro.

Seria necessário um grandioso livro para documentar toda a desinformação sobre a proporção áurea, muitas das quais são simplesmente repetição dos mesmos erros por diferentes autores."

Nesse artigo Markowsky apresenta e discute equívocos trazidos na associação de  $\Phi$  à construção de monumentos históricos como a pirâmide de Queóps no Egito, o Partenon na Grécia e a sede da ONU nos Estados Unidos da América; na aplicação de  $\Phi$  na arte de Leonardo Da Vinci e de Virgílio (em a Eneida); na concepção de que o retângulo áureo é esteticamente mais agradável e de que o mesmo compõe as proporções do corpo humano.

Embora discutir profundamente as associações de  $\Phi$  com a arte, a arquitetura, a biologia ou outros campos de conhecimento possa trazer grande contribuição ao desenvolvimento da matemática do número de ouro e suas aplicações, aqui em nossos estudos não nos enredaremos por este caminho. O aprofundamento de argumentações nesse sentido pode ser encontrado em [6], [10], [11] entre outras referências. Em nossa pesquisa nos restringiremos à apresentação, na forma de exemplos, de alguns dos resultados com o número  $\Phi$ , que tem por objetivo investigar e explorar com rigor a matemática desse número.

**Exemplo 1.1.** Com régua e compasso é possível seccionar um segmento  $\overline{AB}$  por um ponto  $M$ , obtendo a razão áurea, como na figura 1.3. O procedimento é o seguinte:

- (i) Trace  $\overline{BC}$  perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$ , tal que o comprimento  $BC$  seja igual à metade do comprimento  $AB$ ;
- (ii) Ligue o ponto  $A$  ao ponto  $C$ , determinando o triângulo  $ABC$  retângulo em  $B$ .
- (iii) Com centro em  $C$ , trace a circunferência de raio  $BC$ , determinando o ponto  $N$  em  $\overline{AC}$ .
- (iv) Com centro em  $A$ , trace a circunferência de raio  $AN$ , determinando o ponto  $M$  em  $\overline{AB}$ .

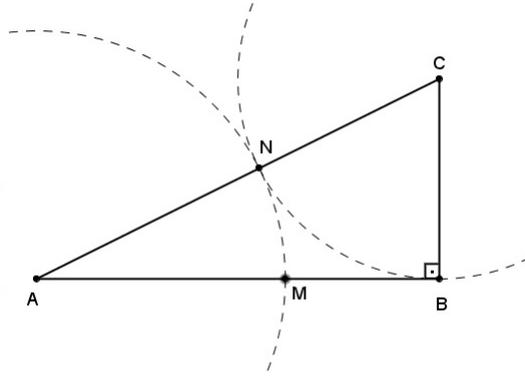


Figura 1.3: Seção áurea de um segmento  $\overline{AB}$  com régua e compasso

Dessa forma,  $M$  é o ponto que determina a seção áurea de  $\overline{AB}$ , ou seja,  $\frac{AB}{BM} = \Phi$ . Em seguida, provamos este fato.

Considerando a figura 1.3, temos  $AB = x$ ,  $AM = AN$  e  $BC = NC = \frac{x}{2}$ . Usando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AC^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow AC = \frac{x\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, temos as medidas  $AM$  e  $MB$ :

$$AM = AC - NC \Rightarrow AM = \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2} \Rightarrow AM = \frac{x}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$MB = AB - AM \Rightarrow MB = x - \left(\frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2}\right) \Rightarrow MB = \frac{x}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Portanto, calculando a razão  $\frac{AM}{MB}$ , concluímos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{\frac{x}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\frac{x}{2}(3 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi. \quad (1.3)$$

**Exemplo 1.2.** Podemos relacionar os valores  $\Phi$  e seu conjugado  $\overline{\Phi} = \text{varphi}$ , verificando que o inverso de um é igual ao oposto do outro, ou seja,

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = -\varphi \Rightarrow \frac{1}{\Phi} = -\varphi. \quad (1.4)$$

Voltando a equação (1.2) admitindo  $y = 1$ , podemos escrever  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  como raiz da equação quadrática

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0. \quad (1.5)$$

**Exemplo 1.3.** A partir da equação (1.5), podemos escrever  $\Phi^2 = \Phi + 1$ , o que significa que o quadrado de  $\Phi$  é igual a ele próprio mais uma unidade:

$$\Phi^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \quad (1.6)$$

Como  $\Phi^2 = \Phi + 1$ , obtemos  $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$  e, usando recursivamente este resultado, podemos escrever:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}} \quad (1.7)$$

**Exemplo 1.4.** Dividindo por  $\Phi$  ambos os membros da equação (1.5), concluímos que o número  $\Phi$  é igual a seu inverso somado com 1:

$$\Phi = \frac{\Phi + 1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{\Phi}. \quad (1.8)$$

Daí, usando o exemplo anterior, teremos:

$$\Phi = \Phi - 1 = \Phi^2 \quad (1.9)$$

Ou seja, o número  $\Phi$  é tal que o seu inverso é igual ao seu quadrado. Usando recursivamente o resultado  $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ , podemos escrever  $\Phi$  como a fração contínua:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Generalizaremos os resultados dos exemplos 1.3 e 1.4 nas proposições 3.5 e ?? do capítulo sobre inteiros quadráticos.

**Exemplo 1.5.** Consideremos o problema de construir um retângulo  $ABCD$  tal que retirando-lhe o quadrado  $AEFD$  reste o retângulo  $EBCF$  semelhante ao primeiro, como na figura 1.4. Mostraremos que, nesse caso, a razão do comprimento do retângulo  $ABCD$  para o comprimento do retângulo  $EBCF$  é  $\Phi$ .

Seja  $AB = x$  o comprimento do retângulo maior e  $BC = y$  o comprimento do retângulo menor, assim teremos  $EB = x - y$ . Logo, tem-se a mesma equação (1.2) do problema original de Euclides:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{EB} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x - y} \Rightarrow x^2 - xy - y^2 = 0. \quad (1.10)$$

Resolvendo essa equação para  $x$  e substituindo, temos, portanto,  $\frac{AB}{BC} = \Phi$ . Costuma-se chamar um retângulo em que a razão comprimento/largura é exatamente  $\Phi$  de *retângulo de ouro* ou *retângulo áureo*.

Considerando ainda a figura 1.4, retirando o maior quadrado do retângulo áureo  $EBCF$ , obteremos  $GHCF$  também áureo. Repetindo o processo infinitas vezes, obteremos retângulos áureos cada vez menores. Após alguns passos desse processo,

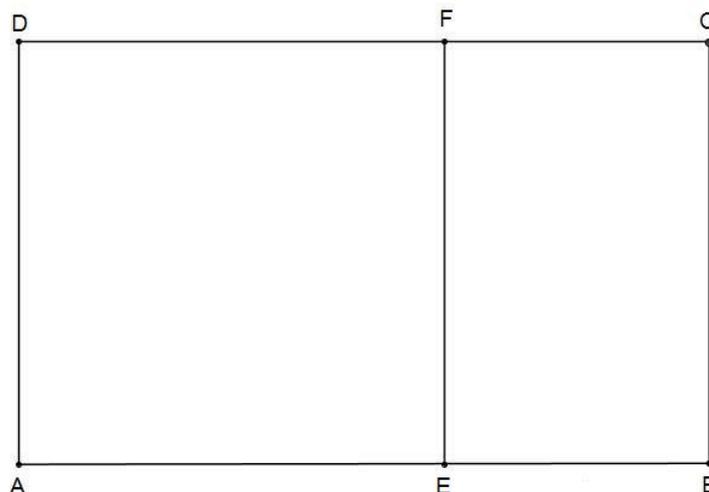


Figura 1.4: Retângulo áureo

produziremos a figura 1.5. Uma propriedade destacável dessa figura é que, escolhendo dois retângulos, um maior e outro imediatamente menor que ele, suas diagonais sempre irão se cruzar em um mesmo ponto (apresentamos a prova deste fato no Apêndice 5.2). Segundo [9], o matemático Clifford A. Pickover sugeriu chamar esse ponto de *O Olho de Deus*.

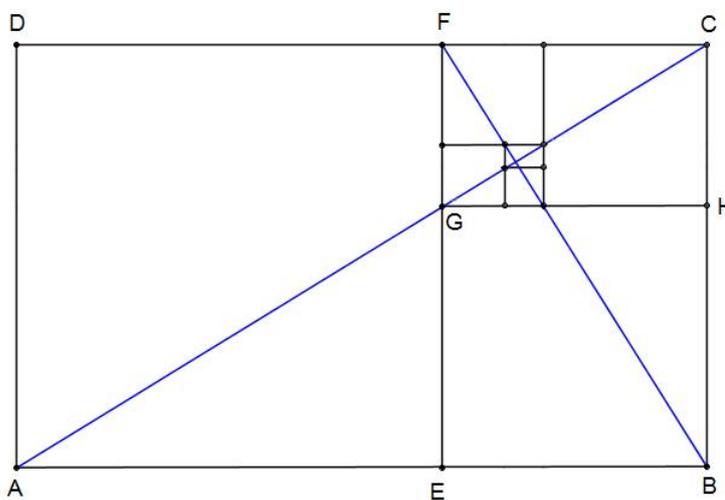


Figura 1.5: Sucessão de retângulos áureos - *O Olho de Deus*

**Exemplo 1.6.** A partir de um quadrado qualquer, usando dobraduras, é possível produzir um retângulo áureo. Isso é ilustrado na figura 1.6.

Descrevemos a construção na figura 1.6:

- (1) dobramos o quadrado  $ABCD$  ao meio, obtendo  $\overline{EF}$ ;
- (2) dobramos para obter a diagonal  $\overline{AF}$ ;

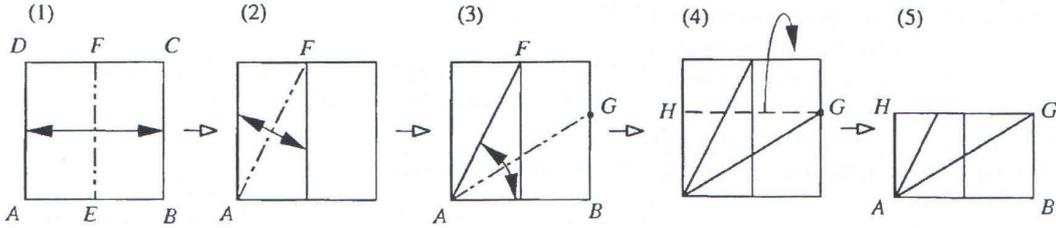


Figura 1.6: Dobraduras para construir um retângulo áureo a partir de um quadrado qualquer

(3) fazendo  $\overline{AB}$  coincidir com  $\overline{AF}$ , bissectamos o ângulo  $FAB$ , obtendo  $\overline{AG}$ ;

(4) dobramos para trás o retângulo  $HGCD$  obtendo o retângulo áureo  $ABGH$ .

Devemos provar que o retângulo resultante  $ABGH$  é áureo, o que equivale a provar que  $\frac{AB}{BG} = \Phi$ . Sejam  $x$  a medida do lado do quadrado  $ABCD$  e  $\theta$  a medida dos ângulos  $FAG = GAB$ , com  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Segue daí que:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{FE}{AE} = \frac{x}{\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{cos} 2\theta} = 2. \quad (1.11)$$

Substituindo as relações  $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta$  e  $\operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$  na equação (1.11), temos:

$$\frac{2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta}{\operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta} = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \theta - \operatorname{cos}^2 \theta = 0. \quad (1.12)$$

Dividindo a equação (1.12) por  $\operatorname{cos}^2 \theta$  obtemos a equação:

$$\operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{tg} \theta - 1 = 0. \quad (1.13)$$

Resolvendo (1.13), finalmente obtemos  $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ , e daí segue que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{BG}{AB} \Leftrightarrow \frac{AB}{BG} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}. \quad (1.14)$$

Racionalizando o denominador dessa última fração, obtemos  $\frac{AB}{BG} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , o que conclui a prova de que o retângulo  $ABGH$  é áureo.

**Exemplo 1.7.** Na construção das diagonais do pentágono regular, as diagonais se intersectam em um ponto que divide o comprimento de cada uma em extrema e média razão, ou também na proporção de ouro. Podemos mostrar isto da maneira que segue.

Um polígono regular possui lados congruentes e ângulos internos congruentes e, em consequência, tem também suas diagonais com mesmos comprimentos. Além disso, a soma de seus ângulos internos é igual a  $(n - 2)180^\circ$ , onde  $n$  é o número de lados. Consideremos o pentágono regular  $ABCDE$  da figura 1.7. A soma das medidas de

seus ângulos internos é igual a  $540^\circ$ , de modo que cada ângulo interno terá medida igual a  $108^\circ$ .

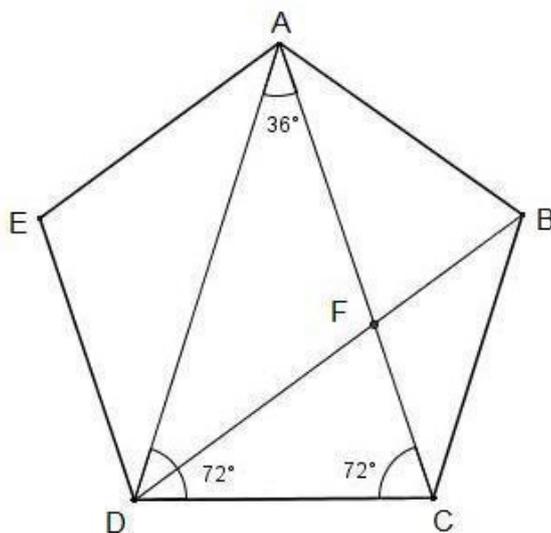


Figura 1.7: Pentágono regular

Tracemos duas das diagonais:  $AC$  e  $AD$ , obtendo  $\triangle AED$ ,  $\triangle ADC$  e  $\triangle ACB$ . Para os triângulos  $\triangle AED$  e  $\triangle ACB$ , temos  $AB = AE$ ,  $BC = ED$  e  $\angle ABC = \angle AED = 108^\circ$ , o que nos faz concluir que  $\triangle ABC$  e  $\triangle AED$  são triângulos congruentes pelo caso lado-ângulo-lado.

Logo, como  $AD = AC$ , concluímos que o triângulo  $\triangle ADC$  é isósceles, donde resulta que  $\angle DAC = 36^\circ$ . Seguimos traçando a diagonal  $BD$  encontrando  $AC$  em  $F$ , essa é ainda a bissetriz de  $\angle ADC$ . Resulta, então, que  $\triangle BCD$  é isósceles de base  $BD$ . Concluímos enfim que são semelhantes os triângulos  $\triangle ACD$  e  $\triangle DFC$  e, além disso, o triângulo  $\triangle AFD$  é isósceles de base  $AD$ .

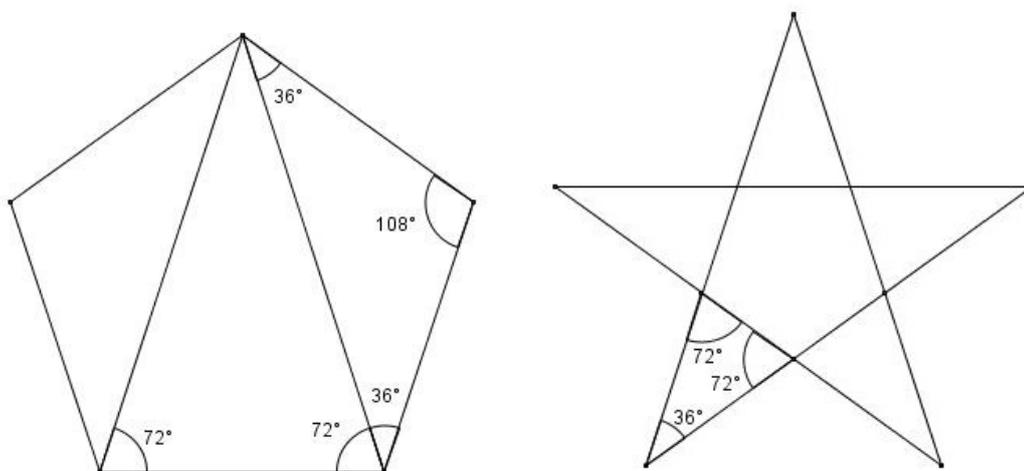
Tomando  $AC = x$  e  $DC = y$  teremos  $FC = x - y$ , isso nos permite escrever a seguinte relação:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{DC}{FC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x-y} \Rightarrow x^2 - xy - y^2 = 0. \quad (1.15)$$

Comparando as equações (1.15) e (1.2), concluímos que o ponto de intersecção das diagonais do pentágono regular divide cada uma delas em extrema e média razões, ou seja, na razão  $\frac{AC}{CD} = \Phi$ . Além disso, a razão entre a medida da diagonal e a medida do lado é também igual a  $\Phi$ .

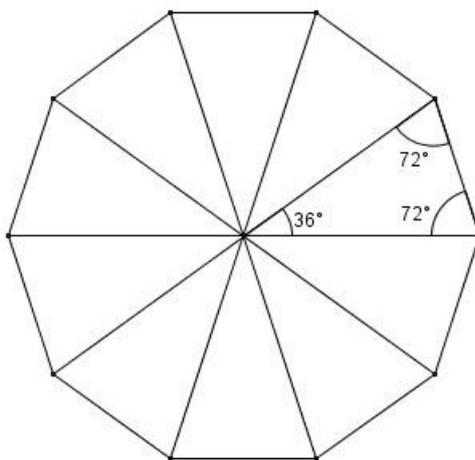
**Exemplo 1.8.** Ao traçarmos todas as diagonais de um pentágono regular, a figura obtida tem um formato estrelado conhecido como *pentagrama*. Ao fazermos isso, e também quando traçamos as diagonais de um decágono regular, ficam determinados vários triângulos isósceles de dois tipos: o primeiro com ângulos de  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  que

chamaremos de *triângulo acutângulo de ouro*, e o segundo com ângulos isósceles  $108^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $36^\circ$  que chamaremos de *triângulo obtusângulo de ouro*. Isso é ilustrado a figura 1.8.



(a) Pentágono

(b) Pentagrama



(c) Decágono

Figura 1.8: Polígonos que exibem triângulos de ouro

No *triângulo acutângulo de ouro* da figura 1.9, a bissetriz do ângulo de  $72^\circ$  o divide em outro triângulo acutângulo semelhante ao original e um *triângulo obtusângulo de ouro*. De modo análogo, ainda nesta mesma figura, para o *triângulo obtusângulo de ouro*, quando seccionamos o ângulo obtuso obtendo um de  $72^\circ$  e outro de  $36^\circ$  aparecem dois triângulos, um obtusângulo semelhante ao original e outro *acutângulo de ouro*.

Tanto o triângulo acutângulo como o triângulo obtusângulo da figura 1.9 recebem a denominação *de ouro* porque, em cada um deles, a razão da medida do maior lado para a medida do menor lado é o número  $\Phi$ . Provemos isso.

De fato, considerando a figura 1.9, no retângulo acutângulo temos  $AB = BD =$

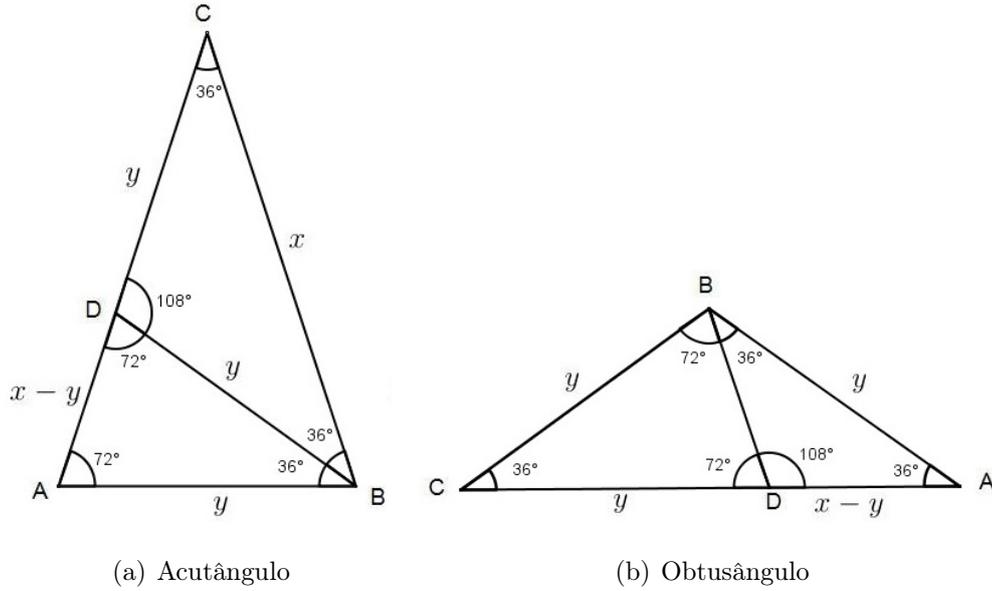


Figura 1.9: Triângulos de ouro

$CD = y$ ,  $BC = x$  e  $AD = x - y$  enquanto no retângulo obtusângulo temos  $AB = BC = CD = y$ ,  $AC = x$  e  $AD = BD = x - y$ . Para cada um deles podemos estabelecer a semelhança  $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ . Logo, temos:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{y}{x-y} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 - xy - y^2 = 0. \quad (1.16)$$

Novamente obtivemos a equação (1.2), o que nos leva a concluir que a razão da medida do lado maior para a medida do lado menor no triângulo de ouro é, de fato,  $\frac{AC}{AB} = \Phi$ .

O exemplo seguinte é uma adaptação do que se encontra em [1].

**Exemplo 1.9.** Considere um triângulo retângulo de hipotenusa e catetos com medidas respectivamente iguais a  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Em seguida, sobre a hipotenusa e catetos construimos os retângulos áureos de alturas respectivamente iguais a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , como na figura 1.10. Então, é verdadeira a seguinte afirmação: a área do retângulo construído sobre a hipotenusa  $a$  é igual à soma das áreas dos retângulos construídos sobre os catetos  $b$  e  $c$ .

De fato, como o triângulo  $ABC$  é retângulo, então vale o Teorema de Pitágoras. Assim temos:

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (1.17)$$

Como os retângulos construídos sobre os lados do triângulo são áureos, significa que, para cada um deles, a medida do comprimento dividida pela medida da largura é

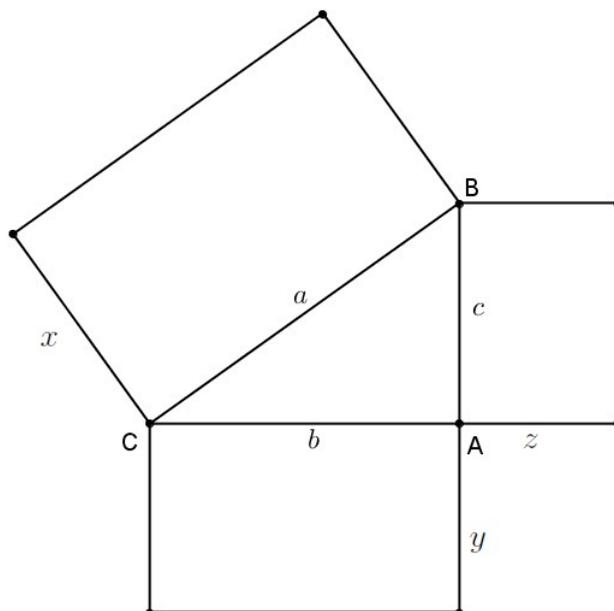


Figura 1.10: Triângulo retângulo de ouro

igual a  $\Phi$ , isto é:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \Phi \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\Phi} = x, \\ \frac{b}{\Phi} = y, \\ \frac{c}{\Phi} = z. \end{cases} \quad (1.18)$$

Reescrevemos a equação (1.17), obtendo:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a \cdot \frac{a}{\Phi} = b \cdot \frac{b}{\Phi} + c \cdot \frac{c}{\Phi}. \quad (1.19)$$

Finalmente, substituindo os resultados de (1.18) em (1.19), obtemos:

$$ax = by + cz. \quad (1.20)$$

Portanto, a área do retângulo áureo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos retângulos áureos construídos sobre os catetos.

**Exemplo 1.10.** Consideremos as funções seno, cosseno e tangente definidas no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

As funções seno e tangente têm o mesmo valor na origem  $x = 0$ . A equação  $\sin x = \cos x$  tem como solução  $x = \frac{\pi}{4}$ , isto é, quando  $\operatorname{tg} x = 1$ . Queremos resolver a equação  $\cos x = \operatorname{tg} x$  e, para isso, usamos a identidade  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , obtendo:

$$\cos x = \operatorname{tg} x \Rightarrow \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x = \sin x \Rightarrow 1 - \sin^2 x = \sin x. \quad (1.21)$$

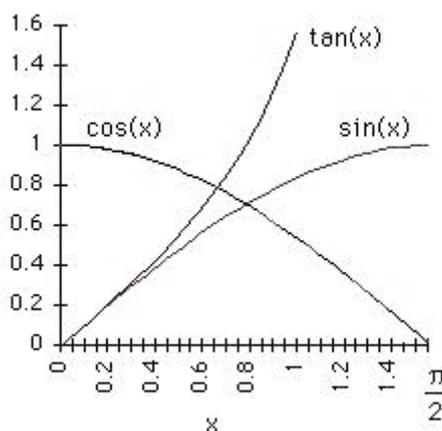


Figura 1.11: Gráficos: seno, cosseno e tangente para ângulo de 0 a  $\frac{\pi}{2}$

Chegamos, então, à equação:

$$\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0. \quad (1.22)$$

Resolvendo essa equação para  $\text{sen } x$  tem-se dois valores possíveis:

$$\text{sen } x = -\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = -\Phi \text{ ou } \text{sen } x = -\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -\bar{\Phi} = \Phi - 1.$$

O primeiro desses valores é negativo e, portanto,  $x$  não pertence ao intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Já o segundo valor nos mostra que  $x$  é o valor cujo seno é  $\Phi - 1$ , ou seja  $x = 0,66623943\dots$  radianos ou  $x = 38,1727076\dots$  graus.

A seguir, apresentamos duas propriedades relacionadas ao número de ouro.

**Propriedade 1.1.** Considere os inteiros consecutivos  $n, n + 1, n + 2$ . Então é sempre verdade que  $\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^{n+2}$ .

*Demonstração.* De fato, da equação (1.5) temos  $\Phi^2 = 1 + \Phi$ , logo:

$$\Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^n \underbrace{(1 + \Phi)}_{\Phi^2} = \Phi^{n+2}.$$

□

**Propriedade 1.2.** A soma de todas as potências de  $\Phi$  com expoentes inteiros negativos é igual a  $\Phi$ . Isto é,  $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-n} = \Phi$ .

*Demonstração.* Seja  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-n} = \Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \dots$ . Multiplicando por  $\Phi$ , obtemos:

$$\begin{aligned} S\Phi &= 1 + \underbrace{\Phi^{-1} + \Phi^{-2} + \Phi^{-3} + \dots}_S \\ S\Phi &= 1 + S. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Resolvendo a equação (1.23) para  $S$  e, a partir da equação (1.5), escrevendo  $\Phi^2 - \Phi = 1$ , temos que:

$$S = \frac{1}{\Phi - 1} = \frac{\Phi^2 - \Phi}{\Phi - 1} = \frac{\Phi(\Phi - 1)}{\Phi - 1} = \Phi.$$

Portanto,  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-n} = \Phi$ .  $\square$

Para finalizar este capítulo de nossa pesquisa, apresentamos, a seguir, a *espiral logarítmica*, que se assemelha com uma espiral construída a partir da figura 1.5.

## 1.1 Espirais

Uma espiral no plano é a uma curva descrita por um ponto  $P$  que descreve dois movimentos em relação a um ponto fixo  $Q$ , isto é,  $P$  gira ao redor de  $Q$  ao mesmo tempo que se aproxima (ou se afasta) do mesmo.

**Definição 1.1.** A *espiral logarítmica* é a curva (figura 1.12) cuja equação polar é

$$r = ae^{b\theta}, \quad (1.24)$$

onde  $r$  é a distância do ponto até a origem  $O$ , também chamada de raio ( $\vec{r} = \vec{OP}$ );  $\theta$  é o ângulo que  $\vec{OP}$  faz com o eixo  $x$ ;  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias.

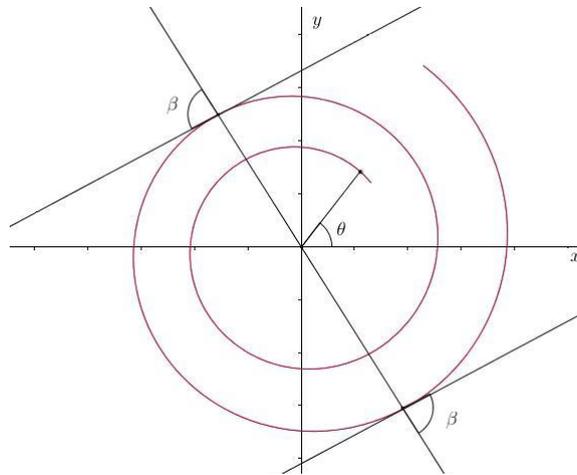


Figura 1.12: Espiral logarítmica

Uma propriedade interessante da espiral logarítmica é o fato de que qualquer reta que passe pela origem formará com as retas tangentes a ela nos pontos de interseção, um ângulo de medida constante. A partir desta propriedade, podemos construir uma espiral logarítmica tomando várias retas concorrentes em um único ponto (origem), escolhe-se um raio inicial e, em sua extremidade, traça-se o segmento perpendicular até que este atinja a próxima reta, em seguida, partindo do ponto de interseção traça-se o novo segmento também perpendicular até que este atinja a próxima reta e repete-se

o procedimento indefinidamente. A medida que o número de retas tender a infinito, a sequência de segmento perpendiculares tenderá à espiral logarítmica, como sugere a figura 1.13, extraída de [15].



Figura 1.13: Construção da espiral logarítmica

Tomando-se um retângulo áureo como a figura 1.5, é possível obter uma curva que se assemelha à uma espiral logarítmica. Para isso, em cada quadrado traçamos um quarto de circunferência de raio igual à medida do lado do quadrado e o centro é um dos vértices do quadrado correspondente, como sugere a figura 1.14. Nesse caso, o centro da espiral é o ponto de encontro das diagonais - *O Olho de Deus* ( figura 1.5) - e a espiral obtida será chamada *espiral áurea*.

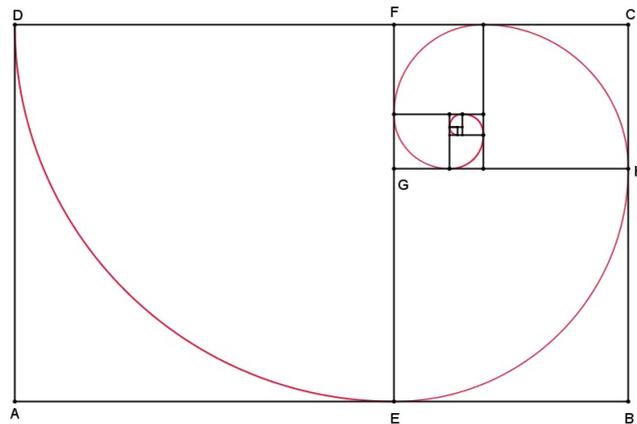


Figura 1.14: Uma espiral no retângulo áureo

De modo análogo, também podemos construir curva semelhante à espiral logarítmica nos triângulos áureos acutângulo e obtusângulo. A figura 1.15 mostra uma espiral no triângulo áureo acutângulo.

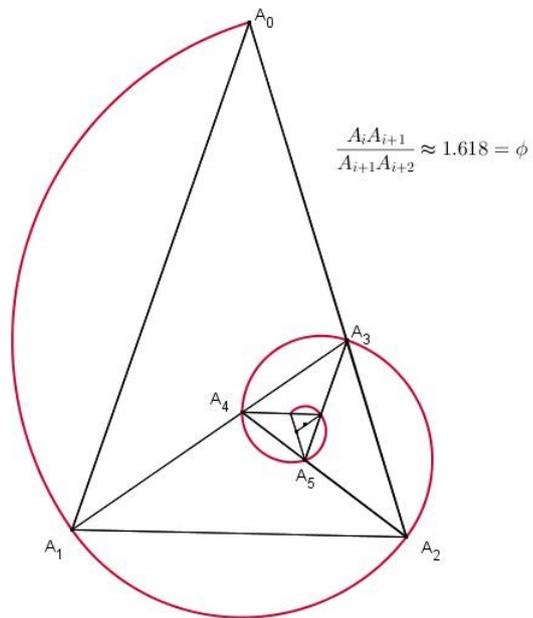


Figura 1.15: Uma espiral no triângulo áureo

## 2 A sequência de Fibonacci e suas relações com o número $\Phi$

Neste capítulo, fazemos um breve histórico de Fibonacci, apresentamos a sequência de Fibonacci, definimos sequência de recorrência linear homogênea de segunda ordem e estudamos alguns resultados ou exemplos que relacionam a sequência de Fibonacci com o número  $\Phi$ .

As referências para os nossos estudos neste capítulo são [3], [7], [8], [9], [12], [14], [15] e [17].

### 2.1 Leonardo de Pisa e a sequência de Fibonacci



Figura 2.1: Leonardo de Pisa (1170-1250) - Fibonacci

Leonardo de Pisa (1170-1250) foi um matemático italiano, nascido na cidade de Pisa. Viveu um tempo com seu pai, Bonaccio, um funcionário do comércio e alfândega na cidade de Bugia, norte da África, onde atualmente é a Argélia. Segundo [9]:

O apelido Fibonacci (do latim *filius Bonacci*, filho da família Bonacci, ou "filho da boa natureza") foi provavelmente introduzido pelo historiador de matemática Guillaume Libri numa nota de rodapé em seu livro *Histoire des Sciences Mathématique en Italie* (História das ciências matemáticas na

Itália, de 1838, embora alguns pesquisadores atribuam o primeiro uso do nome Fibonacci a matemáticos italianos do século XVIII.

Fibonacci foi educado entre os muçulmanos do Norte da África, onde conheceu o sistema indo-arábico de escrita dos números. Retornando à Itália, em 1202, publicou sua obra intitulada *Liber Abacci*, que trazia grande parte de todo o conhecimento da teoria de números e da álgebra até sua época [9]. Essa obra foi a precursora da introdução do sistema de numeração indo-arábico na Europa e pelo posterior desenvolvimento da álgebra e da aritmética no mundo ocidental, sendo assim, uma grande influência para o desenvolvimento da Matemática no Ocidente [7, p.27].

Na obra *Liber Abacci*, encontra-se o mais famoso dos problemas propostos e resolvidos por ele. Originalmente escrito em latim, é chamado *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur*. Conforme encontramos em [9, p.116], esse problema é conhecido como problema dos coelhos de Fibonacci sendo apresentado no capítulo XII do *Liber Abaci*:

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

A solução apresentada por Fibonacci é a seguinte: no começo (mês um) há apenas um casal não fértil. No mês dois há ainda um casal (agora fértil); no mês três há um casal mais o novo casal de filhotes, totalizando 2 casais. No mês quatro há o casal inicial, mais o casal nascido no mês anterior e mais um novo casal, completando três casais. E assim em diante, conforme a tabela 2.1 e figura 2.2:

Notadamente obtém-se que o número de casais em cada mês é igual ao número de casais do mês anterior acrescido dos casais nascidos no mês em questão. Portanto, ao fim de um ano (12 meses) haverá 144 casais.

A figura 2.2 ilustra o crescimento do número de coelhos do problema.

A sequência de valores de cada mês 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,  $\dots$  é amplamente conhecida como a Sequência de Fibonacci. Chamamos de  $F_n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , o seu termo geral. Existem muitos problemas ou situações em que tal sequência aparece. Mostramos um deles nos exemplo a seguir.

**Exemplo 2.1.** Para subir uma escada, uma criança pode subir um degrau de cada vez ou, no máximo, dois degraus por vez. Seja  $C_n$  o número de maneiras que a criança pode subir uma escada de  $n$  degraus. Queremos determinar o valor de  $C_n$ . Se  $n = 1$ , só existe uma maneira da criança subir, ou seja,  $C_1 = 1$ . Se  $n = 2$ , a criança poderá subir um por vez ou os dois de uma vez, resultando  $C_2 = 2$ . Se  $n = 3$ , as maneiras de subir serão:  $1 + 1 + 1$ ,  $1 + 2$  ou  $2 + 1$ , isto é,  $C_3 = 3$ . Se  $n = 4$  temos  $1 + 1 + 1 + 1$ ;  $1 + 1 + 2$ ;  $1 + 2 + 1$  e  $2 + 1 + 1$ ;  $2 + 2$ , ou seja,  $C_4 = 5$ . Se  $n = 5$  temos  $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ;  $1 + 1 + 1 + 2$ ;

Mês	Número de casais do mês anterior	Número de casais recém-nascidos	Total de casais no cercado
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Tabela 2.1: Problema dos coelhos de Fibonacci

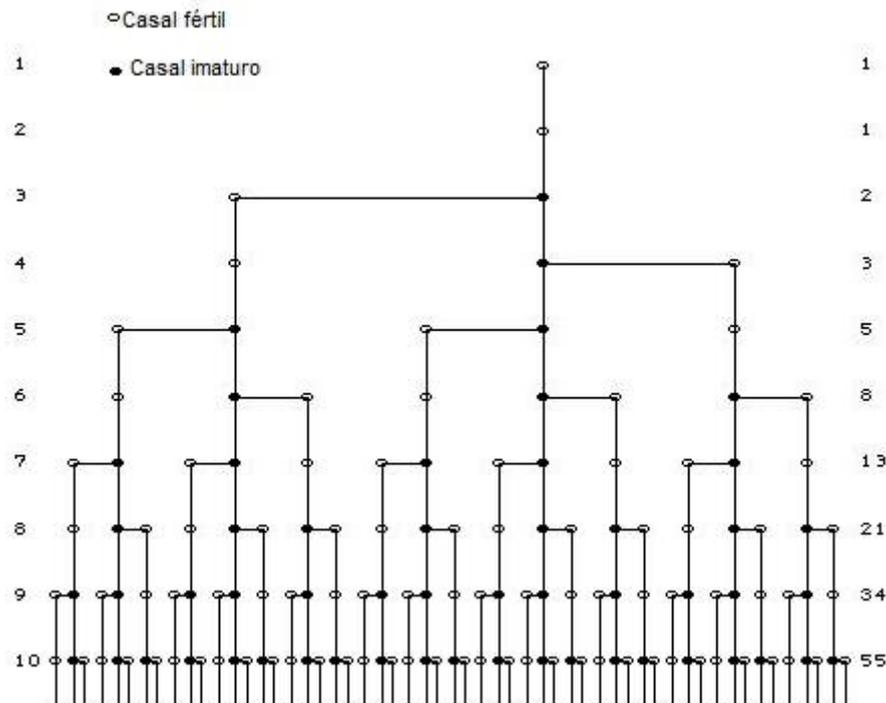


Figura 2.2: Crescimento do número de coelhos do problema de Fibonacci

$1+1+2+1$ ;  $1+2+1+1$ ;  $2+1+1+1$ ;  $1+2+2$ ;  $2+1+2$  e  $2+2+1$ ; totalizando  $C_5 = 8$ . Se  $n = 6$  temos  $1+1+1+1+1+1$ ;  $1+1+1+1+2$ ;  $1+1+1+2+1$ ;  $1+1+2+1+1$ ;  $1+2+1+1+1$ ;  $2+1+1+1+1$ ;  $1+1+2+2$ ;  $1+2+1+2$ ;  $1+2+2+1$ ;  $2+2+1+1$ ;  $2+1+1+2$  e  $2+2+2$ ; totalizando  $C_6 = 13$ . E assim em diante, de modo que a sequência de resultados é  $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ , ou seja, temos a sequência Fibonacci para  $F_1 = 1$  e  $F_2 = 2$ .

Voltando à sequência de Fibonacci para o número de coelhos, temos que, definidos o primeiro termo  $F_1 = 1$  e  $F_2 = 1$ , cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois imediatamente anteriores. Isto é, partir do terceiro termo, cada termo é uma função dos dois termos anteriores. Essa caracterização para sequência é o que apresentaremos em seguida como recorrência.

## 2.2 Recorrências

Uma sequência de números reais é uma  $n$ -upla  $(x_1, a_2, x_3, x_4, x_5, \dots)$ , em que a cada valor  $i \in \mathbb{N}$  associamos o termo  $a_i$ . Uma sequência é dita *sequência de recorrência* (ou simplesmente *recorrência*) quando cada termo é definido como função de termos anteriores. Assim, se  $(x_n)$  é um sequência de recorrência tal que  $a_n = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$ , para que ela fique bem definida é necessário que conheçamos os  $n - 1$  termos iniciais e, ainda nesse caso, se  $(x_n)$  é uma função de  $k$  termos anteriores, então nós a chamamos *recorrência de ordem  $k$* .

**Definição 2.1.** *Uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, é uma equação do tipo*

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0,$$

com  $q \neq 0$ . A cada recorrência deste tipo associamos a equação

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{2.1}$$

Essa equação é chamada equação característica da recorrência e, em particular, se  $q \neq 0$  significa que zero não é uma raiz dessa equação.

A sequência de Fibonacci  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$  é tal que cada termo, a partir do terceiro, é uma função dos dois termos imediatamente anteriores, isto é,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \tag{2.2}$$

com  $n \geq 1$ . Sendo assim, ela é uma *recorrência de segunda ordem*.

**Teorema 2.1.** *Se  $r_1$  e  $r_2$  são raízes da equação característica  $r^2 + pr + q = 0$ , então  $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$  é solução da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$  para quaisquer valores reais das constantes  $A$  e  $B$ .*

*Demonstração.* Basta substituímos  $x_n = Ar_1^n + Br_2^n$  na recorrência e, após realizar algumas manipulações algébricas, o resultado é concluído:

$$(Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2}) + p(Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}) + q(Ar_1^n + Br_2^n) =$$

$$\begin{aligned}
&= Ar_1^2 r_1^n + Br_2^2 r_2^n + pAr_1 r_1^n + pBr_2 r_2^n + qAr_1^n + qBr_2^n = \\
&= \underbrace{(r_1^2 + pr_1 + qr_1)}_0 Ar_1^n + \underbrace{(r_2^2 + pr_2 + qr_2)}_0 Br_2^n = 0.
\end{aligned}$$

□

A equação característica correspondente à recorrência (2.2) é  $r^2 = r + 1$  e suas raízes são

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Desse modo, a solução geral da recorrência é:

$$F_n = A \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (2.3)$$

### 2.3 Relações entre $\Phi$ e a sequência de Fibonacci

Uma relação entre  $\Phi$  e a sequência de Fibonacci pode ser obtida determinando os valores de  $A$  e de  $B$  a partir da equação (2.3). Faremos isso tomando  $F_0 = F_1 = 1$ , o que nos leva ao sistema de equações:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ A \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + B \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, temos  $A = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}}$  e  $B = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$ , o que nos conduz à solução geral:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

Se tomássemos o primeiro termo da sequência de Fibonacci como  $F_1 = 1$ , ao invés de  $F_0 = 1$ , como fizemos anteriormente, teríamos  $F_1 = F_2 = 1$  e teríamos:

$$\begin{cases} A \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + B \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1, \\ A \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + B \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1. \end{cases}$$

Nesse caso, os valores das constantes são  $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$  e  $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ , resultando na solução geral

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (2.4)$$

Segundo Mario Livio [p.128], a equação (2.4), aparentemente, já era conhecida por Leonard Euler (1707-1783) e também pelo matemático francês Abraham de Moivre

(1667-1754). No entanto, foi redescoberta pelo matemático Francês Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856), ficando, assim, conhecida como *fórmula de Binet* para a sequência de Fibonacci.

Na equação (2.4), aparecem o *número de ouro*  $\Phi$  e seu simétrico inverso  $-\Phi^{-1}$ , de modo que ela pode ser reescrita assim:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}. \quad (2.5)$$

Notemos que se  $n$  for ímpar teremos  $F_n = \frac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$ , e se  $n$  for par teremos  $F_n = \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$ .

Finalmente, podemos concluir, ainda da equação (2.5), que há uma evidente relação entre o número de ouro  $\Phi$  e a sequência de Fibonacci. Exploraremos essa relação nos exemplos e proposições a seguir

**Exemplo 2.2.** Multiplicando sucessivamente a equação (1.5) por  $\Phi$  e usando recursivamente o valor  $\Phi^2 = \Phi + 1$ , obtemos as potências de  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= \Phi + 1 \\ \Phi^3 &= 2\Phi + 1 \\ \Phi^4 &= 3\Phi + 2 \\ \Phi^5 &= 5\Phi + 3 \\ \Phi^6 &= 8\Phi + 5 \\ \Phi^7 &= 13\Phi + 8 \\ \Phi^8 &= 21\Phi + 13 \end{aligned}$$

Observemos que cada potência é um múltiplo de  $\Phi$  mais um número natural. No segundo membro de cada equação, de cima para baixo, podemos notar que os coeficientes de  $\Phi$  formam a sequência 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,  $\dots$  enquanto os coeficientes independentes de  $\Phi$ , também de cima para baixo, formam a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,  $\dots$ . A proposição seguinte generaliza estes resultados.

**Proposição 2.1.** *Seja  $F_n$  o  $n$ -ésimo termo da Sequência de Fibonacci, então, para todo natural  $n \geq 2$ , tem-se:*

$$\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}. \quad (2.6)$$

*Demonstração.* Faremos por indução sobre  $n$ . Da equação (1.5) sabemos que  $\Phi^2 = \Phi + 1$ , ou seja, a proposição é válida para  $n = 2$ . Admitamos, então, por hipótese de indução, que é válida para  $n$ , isto é,  $\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}$ . Vamos provar que é válida para  $n + 1$ .

Multiplicando ambos os membros de  $\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}$  por  $\Phi$ , obtemos:

$$\Phi^{n+1} = F_n \Phi^2 + \Phi F_{n-1}. \quad (2.7)$$

Em seguida, substituímos  $\Phi^2 = \Phi + 1$  e usamos o fato de que, para a sequência de Fibonacci, vale  $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}\Phi^{n+1} &= F_n(\Phi + 1) + \Phi F_{n-1} \\ &= F_n\Phi + F_n + \Phi F_{n-1} \\ &= \Phi \underbrace{(F_n + F_{n-1})}_{F_{n+1}} + F_n \\ &= \Phi F_{n+1} + F_n.\end{aligned}$$

Logo, a proposição é verdadeira para  $n + 1$ . Portanto, é válida para todo  $n \geq 2$ .  $\square$

A proposição 2.2 traz outro resultado que associa o número  $\Phi$  à sequência de Fibonacci.

**Proposição 2.2.** *Sejam  $F_n$  e  $F_{n+1}$  termos consecutivos da sequência de Fibonacci, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi. \quad (2.8)$$

*Demonstração.* Tomemos  $\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$ , então podemos escrever  $F_n$  e  $F_{n+1}$ , respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}F_n &= \frac{\Phi^n - F_{n-1}}{\Phi} = \frac{1}{\Phi}(\Phi^n - F_{n-1}), \\ F_{n+1} &= \frac{\Phi^{n+1} - F_n}{\Phi} = \frac{1}{\Phi}(\Phi^{n+1} - F_n).\end{aligned}$$

Fazemos o quociente e, em seguida, multiplicamos o numerador e o denominador da expressão obtida por  $\frac{1}{\Phi^n}$ :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\Phi^{n+1} - F_n}{\Phi^n - F_{n-1}} = \frac{\frac{\Phi^{n+1} - F_n}{\Phi^n}}{\frac{\Phi^n - F_{n-1}}{\Phi^n}} = \frac{\Phi - \frac{F_n}{\Phi^n}}{1 - \frac{F_{n-1}}{\Phi^n}}.$$

Nesse último resultado observemos que  $\Phi^n$  cresce indefinidamente quando  $n$  tende a infinito, já que  $\Phi > 1$ . Assim, ambas as razões  $\frac{F_n}{\Phi^n}$  e  $\frac{F_{n-1}}{\Phi^n}$  convergem para zero. Portanto, resta concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi. \quad (2.9)$$

$\square$

**Proposição 2.3.** *Sejam  $F_n$  e  $F_{n+1}$  dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci e  $k$  um número real não nulo. Então, tem-se:*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kF_{n+1}}{kF_n} = \Phi$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1} + k}{F_n + k} = \Phi$$

*Demonstração.* O primeiro resultado é imediato pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kF_{n+1}}{kF_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi.$$

Para provar a segunda parte, tomemos  $\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$ , de modo que  $\Phi^{n+1} = F_{n+1}\Phi + F_n$ . Isso nos permite escrever:

$$F_{n+1} + k = \frac{\Phi^{n+1} - F_n}{\Phi} + k,$$

$$F_n + k = \frac{\Phi^n - F_{n-1}}{\Phi} + k.$$

Fazendo o quociente  $\frac{F_{n+1} + k}{F_n + k}$  e dividindo o numerador e o denominador por  $\Phi^n$ , teremos:

$$\frac{F_{n+1} + k}{F_n + k} = \frac{\Phi^{n+1} - F_n + k\Phi}{\Phi^n - F_{n-1} + k\Phi} = \frac{\Phi - \frac{F_n}{\Phi^n} - \frac{k}{\Phi^{n-1}}}{1 - \frac{F_{n-1}}{\Phi^n} - \frac{k}{\Phi^{n-1}}}. \quad (2.10)$$

Portanto, concluímos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1} + k}{F_n + k} = \Phi$ . □

É possível estabelecer muitas relações entre os termos da sequência de Fibonacci. No exemplo a seguir, apresentamos uma delas e outras podemos encontrar em [3].

**Exemplo 2.3.** A soma de um número ímpar de produtos de dois termos consecutivos da Sequência de Fibonacci é sempre igual ao quadrado do maior número do último produto somado, isto é, sendo  $F_n$  o termo de ordem  $n$ , com  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  tem-se:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + F_{2k-1} \cdot F_{2k} = F_{2k}^2, \quad (2.11)$$

onde  $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

Para provar esse resultado, faremos indução sobre  $k$ . Começamos notando que se  $k = 1$ , a relação é verdadeira pois  $F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 = 1^2 = F_2^2$ . Suponhamos, por hipótese de indução, que a relação seja verdadeira para  $k > 1$  e provemos que ela é ainda verdadeira para  $k + 1$ . Fazemos isso partindo do primeiro membro da relação (2.11) e acrescentamos os próximos produtos, lembrando que devemos ter um quantidade par de parcelas. Segue daí que:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \cdots + F_{2k-1} \cdot F_{2k}}_{F_{2k}^2} + F_{2k} \cdot F_{2k+1} + F_{2k+1} \cdot F_{2k+2} = \\ & = F_{2k}^2 + F_{2k} \cdot F_{2k+1} + F_{2k+1} \cdot F_{2k+2} = \\ & = F_{2k}^2 + F_{2k+1}(F_{2k} + F_{2k+2}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Agora, usando a relação  $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$  e fatoração, temos:

$$\begin{aligned}
 F_{2k}^2 + F_{2k+1}(F_{2k} + F_{2k+2}) &= F_{2k}^2 + F_{2k+1}(F_{2k} + F_{2k} + F_{2k+1}) \\
 &= F_{2k}^2 + 2F_{2k}F_{2k+1} + F_{2k+1}^2 \\
 &= (F_{2k} + F_{2k+1})^2 \\
 &= F_{2k+2}^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Portanto, sendo válida para  $k$  a relação é também válida para  $k+1$ , donde se conclui que é válida para qualquer  $k \geq 1$ .

A propriedade mostrada no exemplo anterior pode ser visualizada geometricamente. Para isso tomaremos o produto de cada dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci como a área um retângulo e justapomos todos os retângulos de modo a obter a figura 2.3.

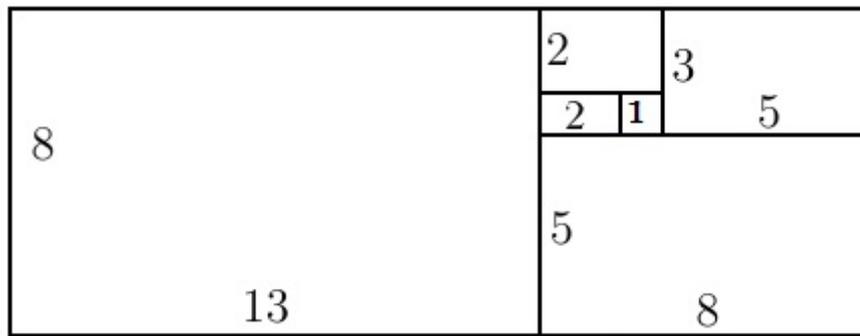


Figura 2.3: Justapondo retângulos com áreas iguais a produtos de termos consecutivos da sequência de Fibonacci

É interessante notar que, se a figura formada pelos retângulos é um quadrado de lado  $F_n$  e acrescentamos outro retângulo de lados  $F_n$  e  $F_{n+1}$ , obtemos um retângulo de lados  $F_n$  e  $F_n + F_{n+1}$ , ou seja, partimos do quadrado de área  $F_n^2$  e chegamos ao retângulo de área  $F_n(F_n + F_{n+1})$ , como ilustramos a seguir:

$$\underbrace{F_n^2}_{\text{quadrado}} \longrightarrow \underbrace{F_n^2}_{\text{quadrado}} + \underbrace{F_n F_{n+1}}_{\text{retângulo}} = \underbrace{F_n(F_n + F_{n+1})}_{\text{retângulo}}$$

Por fim, analisando a razão comprimento/largura do retângulo da figura 2.3, quando  $n$  cresce indefinidamente, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n + F_{n+1}}{F_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \Phi = \Phi^2.
 \tag{2.14}$$

### 3 Inteiros quadráticos e o número $\Phi$

Neste capítulo, propomos estudos mais sofisticados de  $\Phi$ . Isso se dá a partir de um pequeno estudo dos inteiros quadráticos, apresentando definições, resultados e teoremas a respeito dos mesmos. Aprofundando nos estudos, mostramos que o número  $\Phi$  é um inteiro quadrático e algumas de suas propriedades ou resultados não lhe são peculiares, mas características ou propriedades gerais de certos números do anel dos inteiros quadráticos. Os referenciais para estes estudos são [2], [4] e [13].

**Definição 3.1.** Dado  $m \in \mathbb{Z}$ , com  $m \neq 1$ , dizemos que  $m$  é livre de quadrados quando o único quadrado que o divide é 1. Isto é,  $x^2$  divide  $m$  se, e somente se,  $x^2 = 1$ .

**Exemplo 3.1.**  $m = 6$  é livre de quadrados pois o único quadrado que divide 6 é 1.

**Exemplo 3.2.**  $m = 8$  não é livre de quadrados já que o quadrado  $4 = 2^2$  divide 8.

**Exemplo 3.3.**  $m = -1$  é livre de quadrados.

**Exemplo 3.4.**  $m \in \mathbb{Z}$ , com  $m \neq \pm 1$  é livre de quadrados se, e somente se,  $-m$  é livre de quadrados. De fato,  $x^2 = 1 \Rightarrow x^2 \mid m \Rightarrow x^2 \mid (-m)$ .

**Exemplo 3.5.** Se  $p$  é um número primo, então  $p$  é livre de quadrados. De fato, suponhamos que  $x^2 \mid p$ , então  $x \mid p$ . Logo,  $x = \pm 1$  ou  $x = \pm p$ .

1. Se  $x = \pm 1$ , então  $x^2 = 1$ . Portanto,  $p$  é livre de quadrados.
2. Se  $x = \pm p$ , então  $p^2 \mid p$ . Logo, existe  $y \in \mathbb{Z}$  tal que  $p^2 y = p$ , donde resulta que  $py = 1$ , ou seja  $y$  é o inverso de  $p$ . Contradição! Assim, o único quadrado que divide  $p$  é 1.

**Exemplo 3.6.** Se  $m$  é um inteiro livre de quadrados, então  $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$ . De fato, suponhamos por absurdo que  $\sqrt{m} \in \mathbb{Q}$ , logo,  $\sqrt{m} = \frac{p}{q}$ , com  $p, q \in \mathbb{Z}$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ . Seja  $m = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k$  a fatoração de  $m$  em primos. Então  $m q^2 = p^2 \Rightarrow \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k q^2 = p^2$ . Assim, existe  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  de modo que  $\alpha_i \mid p^2 \Rightarrow \alpha_i \mid p$ , e daí segue que  $p = \alpha_i r$  para algum  $r \in \mathbb{Z}$ . Logo, voltando ao resultado anterior, temos:

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k q^2 = \alpha_i^2 r^2 \Rightarrow s q^2 = \alpha_i r^2,$$

onde  $s = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_k$ . Dessa última igualdade resulta que  $\alpha_i \mid q^2$ , já que  $\alpha_i$  não é fator de  $s$ , e daí concluímos que  $\alpha_i \mid q$ . Assim  $\alpha_i \mid q$  e  $\alpha_i \mid p$ , o que é absurdo pois  $\text{mdc}(p, q) = 1$ . Portanto,  $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q}$ .

O conjunto  $\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ , com  $a, b$  números racionais e  $m$  um número inteiro livre de quadrados, é um corpo chamado *corpo quadrático* gerado por  $\sqrt{m}$ . Notemos que  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ , assim definido, é um subcorpo do corpo dos números complexos de modo que cada elemento  $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  se escreve de maneira única como  $\mu = a + b\sqrt{m}$ . Ainda, em particular  $\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m}, a, b \in \mathbb{Z}\}$  é um subanel de  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ .

**Definição 3.2.** *Dado um elemento  $\mu = a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ , então, definimos:*

1. O conjugado de  $\mu = a + b\sqrt{m}$  é  $\bar{\mu} = a - b\sqrt{m}$ ;
2. O traço de  $\mu = a + b\sqrt{m}$  é  $\mathcal{T}(\mu) = \mu + \bar{\mu} = 2a$ ;
3. A norma de  $\mu$  é  $\mathcal{N}(\mu) = \mu\bar{\mu} = a^2 - b^2m$ .

**Proposição 3.1.** *Sejam  $\lambda$  e  $\mu$  elementos de  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ , então:*

1.  $\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}$ ;
2.  $\overline{\lambda\mu} = \bar{\lambda}\bar{\mu}$ ;
3.  $\bar{\lambda} = \lambda$  se, e somente se,  $\lambda \in \mathbb{Q}$ ;
4.  $\mathcal{T}(\lambda + \mu) = \mathcal{T}(\lambda) + \mathcal{T}(\mu)$ ;
5.  $\mathcal{N}(\lambda\mu) = \mathcal{N}(\lambda)\mathcal{N}(\mu)$ ;
6.  $\mathcal{N}(\lambda) = 0$  se, e somente se,  $\lambda = 0$ ;
7. Se  $\lambda \neq 0$ , então  $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}((\mathcal{N}(\lambda)))^{-1}$ .

*Demonstração.* Sejam  $\lambda = a + b\sqrt{m}$  e  $\mu = c + d\sqrt{m}$  elementos de  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ .

1.  $\bar{\lambda} + \bar{\mu} = a - b\sqrt{m} + c - d\sqrt{m} = a + c - (b + d)\sqrt{m} = \overline{\lambda + \mu}$ ;
2.  $\bar{\lambda}\bar{\mu} = (a - b\sqrt{m})(c - d\sqrt{m}) = ac + bdm - (ad + bc)\sqrt{m} = \overline{\lambda\mu}$ ;
3.  $\bar{\lambda} = \lambda \Leftrightarrow a + b\sqrt{m} = a - b\sqrt{m} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \lambda = a \in \mathbb{Q}$ ;
4.  $\mathcal{T}(\lambda + \mu) = (\lambda + \mu) + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) = \lambda + \mu + \bar{\lambda} + \bar{\mu} = \lambda + \bar{\lambda} + \mu + \bar{\mu} = \mathcal{T}(\lambda) + \mathcal{T}(\mu)$ ;
5.  $\mathcal{N}(\lambda\mu) = \lambda\mu\bar{\lambda}\bar{\mu} = \lambda\bar{\lambda}\mu\bar{\mu} = \mathcal{N}(\lambda)\mathcal{N}(\mu)$ ;
6.  $\mathcal{N}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda\bar{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$  ou  $\bar{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ;

7. Se  $\lambda \neq 0$ , pelo item anterior  $\mathcal{N}(\lambda) \neq 0$ . Temos que

$$\mathcal{N}(\lambda) = \lambda\bar{\lambda} \Rightarrow \lambda^{-1}\mathcal{T}(\lambda) = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda^{-1} = \bar{\lambda}((\mathcal{N}(\lambda))^{-1})$$

□

**Proposição 3.2.** *Seja  $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  tal que  $\mu = a + b\sqrt{m}$ , então  $\mu$  é raiz do polinômio mônico  $f_\mu(X) = X^2 - \mathcal{T}(\mu)X + \mathcal{N}(\mu)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mu = a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ , então  $\mathcal{T}(\mu) = 2a$  e  $\mathcal{N}(\mu) = a^2 - mb^2$ . Logo:

$$\begin{aligned} f_\mu(\mu) &= \mu^2 - \mathcal{T}(\mu)\mu + \mathcal{N}(\mu) \\ &= a^2 + 2ab\sqrt{m} + b^2m - 2a(a + b\sqrt{m}) + a^2 - b^2m \\ &= 2a^2 + 2ab\sqrt{m} - 2a^2 - 2ab\sqrt{m} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,  $\mu$  é raiz de  $f_\mu(\mu)$ . □

**Definição 3.3.** *Um elemento  $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$  chama-se inteiro quadrático se seu traço  $\mathcal{T}(\mu)$  e sua norma  $\mathcal{N}(\mu)$  são números inteiros. Ao conjunto de todos os inteiros quadráticos de  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$  chamamos de anel dos inteiros quadráticos, denotado por  $\mathcal{O}(m)$ .*

O teorema seguinte caracteriza o anel de inteiros de um corpo quadrático  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ , com  $m$  um inteiro livre de quadrados.

**Teorema 3.1.** *Se  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$  é um corpo quadrático com  $m$  livre de quadrados, então  $\mathcal{O}(m)$  é dado por:*

$$(i) \mathcal{O}(m) = \mathbb{Z}[\sqrt{m}], \text{ se } m \equiv 2 \pmod{4} \text{ ou } m \equiv 3 \pmod{4}; e,$$

$$(ii) \mathcal{O}(m) = \mathbb{Z}\left[\frac{1 + \sqrt{m}}{2}\right], \text{ se } m \equiv 1 \pmod{4}.$$

*Demonstração.* A prova se encontra em [13, p.67]. □

**Exemplo 3.7.** Seja  $\alpha = 1 + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ , temos  $\mathcal{T}(\alpha) = 2$  e  $\mathcal{N}(\alpha) = -2$ . Logo  $\alpha$  é inteiro quadrático e, como  $3 \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $\mathcal{O}(3) = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ .

**Exemplo 3.8.** Seja  $\alpha = \frac{1 - \sqrt{11}}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{11})$ , temos  $\mathcal{T}(\alpha) = 1 \in \mathbb{Z}$  e  $\mathcal{N}(\alpha) = -\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$ . Assim, concluímos que  $\alpha$  não é inteiro quadrático. Além disso,  $\mathcal{O}(11) = \mathbb{Z}[\sqrt{11}]$  pois  $11 \equiv 3 \pmod{4}$ .

**Exemplo 3.9.** O número de ouro  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  é um inteiro quadrático pois  $\mathcal{T}(\Phi) = 1 \in \mathbb{Z}$  e  $\mathcal{N}(\alpha) = -1 \in \mathbb{Z}$ . Além disso,  $\mathcal{O}(5) = \mathbb{Z}\left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$ .

**Exemplo 3.10.** Seja o inteiro quadrático  $\mu = a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ , com  $a$  não inteiro. Sendo  $\mu$  um inteiro quadrático,  $\mathcal{T}(\mu) = 2a \in \mathbb{Z}$ , o que significa que os valores de  $a$  são da forma  $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \dots, \pm\frac{2k+1}{2}$  com  $k \in \mathbb{N}$ . Devemos ter ainda  $\mathcal{N}(\mu) = \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 - b^2m \in \mathbb{Z}$ , e como  $a = \frac{2k+1}{2}$  não é inteiro significa que  $a^2 = \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2$  também não é. Logo, concluímos daí que  $b^2m$  não é inteiro. Como  $m$  é inteiro, então  $b^2$  não é inteiro implica que  $b$  também não é inteiro. Portanto, para que  $\mu = a + b\sqrt{m}$ , com  $a \notin \mathbb{Z}$ , seja inteiro quadrático devemos ter também  $b \notin \mathbb{Z}$ .

**Definição 3.4.** Um inteiro quadrático  $\mu \in \mathcal{O}(m)$  será chamado unidade de  $\mathcal{O}(m)$  se  $\mu^{-1} \in \mathcal{O}(m)$ . Além disso, se  $\mathcal{N}(\mu) = 1$  dizemos que  $\mu$  é unidade própria de  $\mathcal{O}(m)$  e, se  $\mathcal{N}(\mu) = -1$  dizemos que  $\mu$  é unidade imprópria.

**Proposição 3.3.** Um inteiro quadrático  $\mu$  é uma unidade de  $\mathcal{O}(m)$  se, e somente se,  $\mathcal{N}(\mu) = \pm 1$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Provemos a primeira parte: se  $\mu$  é uma unidade imprópria de  $\mathcal{O}(m)$ , então existe  $\nu = \mu^{-1} \in \mathcal{O}(m)$  tal que:

$$\mu\nu = 1 \Rightarrow \mathcal{N}(\mu\nu) = \mathcal{N}(\mu\mu^{-1}) = \mathcal{N}(\mu)\mathcal{N}(\mu^{-1}) = \mathcal{N}(1) = 1.$$

Como  $\mu$  e  $\nu = \mu^{-1}$  são inteiros quadráticos, segue que  $\mathcal{N}(\mu)$  e  $\mathcal{N}(\mu^{-1})$  são inteiros. Portanto,  $\mathcal{N}(\mu) = \pm 1$  pois o produto de dois inteiros só é 1 se ambos forem iguais a 1 ou  $-1$ .

( $\Leftarrow$ ) Para provar a segunda parte, sejam  $\mu = a + b\sqrt{m} \in \mathcal{O}(m)$  tal que  $\mathcal{N}(\mu) = \pm 1$ . Daí, decorre que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mu) = a^2 + b^2m = \pm 1 &\Rightarrow (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m}) = \pm 1 \\ &\Rightarrow (a - b\sqrt{m}) = \pm \frac{1}{a + b\sqrt{m}} \\ &\Rightarrow \bar{\mu} = \pm \frac{1}{\mu} = \pm \mu^{-1}. \end{aligned}$$

Logo, como  $\bar{\mu} \in \mathcal{O}(m)$  resulta que  $\mu^{-1} \in \mathcal{O}(m)$ . Portanto  $\mu$  é unidade.  $\square$

De um modo geral, para encontrarmos as unidades de  $\mathcal{O}(m)$  devemos ter que  $\mu = a + b\sqrt{m} \in \mathcal{O}(m)$ , de modo que  $\mathcal{N}(\mu^{-1}) = a^2 - b^2m = \pm 1$ . Isso é equivalente a resolver a equação diofantina  $X - mY = \pm 1$ , onde  $X = a^2$  e  $Y = b^2$ , que tem solução inteira pois  $\text{mdc}(1, m) = 1$  divide  $m$ . No entanto, resolver essa equação, o que não é nosso intuito, exige um pouco mais de esforço pois  $X$  e  $Y$  além de serem inteiros, devem ser quadrados.

Retomando nosso problema original de encontrar as unidades de  $\mathcal{O}(m)$ , tomamos  $\mu^{-1} = c + d\sqrt{m}$  e calculamos  $c$  e  $d$  em função de  $a$  e  $b$ . Assim, temos:

$$\mu\mu^{-1} = ac + bdm + (ad + bc)\sqrt{m} = 1 \Rightarrow \begin{cases} ac + bdm = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos:

$$c = -\frac{a}{b^2m - a^2} = \frac{a}{\mathcal{N}(\mu)}$$

$$d = -\frac{b}{b^2m - a^2} = -\frac{b}{\mathcal{N}(\mu)}$$

**Exemplo 3.11.** A tabela 3.1 mostra exemplos de unidades de  $\mathcal{O}(m)$  para diferentes valores de  $m$ :

Unidade Imprópria	Unidade Própria
$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$	$\frac{11 + 3\sqrt{13}}{2}$
$1 + \sqrt{2}$	$3 - 2\sqrt{2}$
$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Tabela 3.1: Alguns exemplos de unidades do anel  $\mathcal{O}(m)$

Observemos na última linha da tabela 3.1 que  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  é uma unidade imprópria de  $\mathcal{O}(5)$  já que  $\mathcal{N}(\Phi) = -1$ , enquanto seu quadrado  $\Phi^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$  é unidade própria pois  $\mathcal{N}(\Phi^2) = 1$ .

**Proposição 3.4.** *Dados  $a, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , então  $4a + 1$  é quadrado se, e somente se,  $a = n^2 + n$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) De fato,  $4a + 1$  é ímpar e, sendo um quadrado, sua raiz quadrada é também ímpar. Logo, 2 divide  $\sqrt{4a + 1} - 1$ . Seja  $n = \frac{\sqrt{4a + 1} - 1}{2}$ , logo:

$$n = \frac{\sqrt{4a + 1} - 1}{2} \Rightarrow 2n + 1 = \sqrt{4a + 1} \Rightarrow (2n + 1)^2 = 4a + 1 \Rightarrow a = n^2 + n,$$

e isso conclui a prova da primeira parte.

( $\Leftarrow$ ) Se  $a = n^2 + n$ , então  $4a + 1 = 4(n^2 + n) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$ .  $\square$

**Proposição 3.5.** *Dados  $a, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , com  $a \neq n^2 + n$ , seja  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\mu = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}}$$

*Então  $\mu$  é um inteiro quadrático.*

*Demonstração.* Se  $\mu = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}}}$ , então podemos escrever  $\mu = \sqrt{a + \mu}$  e daí segue:

$$\mu = \sqrt{a + \mu} \Rightarrow \mu^2 - \mu - a = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}. \quad (3.1)$$

Se  $a \neq n^2 + n$ , pela proposição 3 temos que  $4a + 1$  não é quadrado. Suponhamos que  $q_i^2$ , para  $i \in \mathbb{N}$ , seja divisor inteiro de  $4a + 1$ , e seja  $q^2$  o maior desses fatores. Então, eliminamos  $q^2$  da raiz, resultando que  $\frac{4k+1}{q^2}$  é livre de quadrados.

Finalmente, tomando  $\mu = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$  e  $\bar{\mu} = \frac{1 - \sqrt{4a+1}}{2}$ , calculamos  $\mathcal{T}(\mu)$  e  $\mathcal{N}(\mu)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mu) &= \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2} + \frac{1 - \sqrt{4a+1}}{2} = 1 \in \mathbb{Z}, \\ \mathcal{N}(\mu) &= \left( \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{4a+1}}{2} \right) = a \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Portanto,  $\mu = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$  é um inteiro quadrático. □

**Proposição 3.6.** *Dado  $a \in \mathbb{N} - \{0\}$ , seja  $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$  tal que*

$$\mu = a + \frac{a}{a + \frac{a}{a + \frac{a}{a + \frac{a}{a + \dots}}}}, \quad (3.2)$$

*isto é,  $\mu$  se escreve como uma fração contínua, então  $\mu$  é um inteiro quadrático de  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .*

*Demonstração.* Se  $\mu$  tem a forma dada em (3.2), então podemos escrevê-lo como  $\mu = a + \frac{a}{\mu}$ . Segue que:

$$\mu = a + \frac{a}{\mu} \Rightarrow \mu^2 - \mu a - a = 0 \Rightarrow \mu = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, tomando  $\mu = \frac{a + a\sqrt{5}}{2}$ , temos  $\bar{\mu} = \frac{a - a\sqrt{5}}{2}$  e calculando o traço e a norma de  $\mu$  temos que eles são inteiros pois:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mu) &= \frac{a + a\sqrt{5}}{2} + \frac{a - a\sqrt{5}}{2} = 2a \in \mathbb{Z}. \\ \mathcal{N}(\mu) &= \left( \frac{a + a\sqrt{5}}{2} \right) \left( \frac{a - a\sqrt{5}}{2} \right) = -a^2 \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Portanto,  $\mu$  é um inteiro quadrático de  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ . □

Notemos que, nas proposições 3.5 e 3.6 tomando-se  $a = 1$  obteremos  $\mu = \Phi$ . Isso significa que, em ambos os casos,  $\Phi$  é o inteiro quadrático para o menor valor de  $a$ .

**Proposição 3.7.** *Sejam  $\alpha = a + b\sqrt{m} > 1$  e seu conjugado  $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{m}$  as raízes de um polinômio mônico de segundo grau na variável  $x$ . Então, considerando  $k = b^2m - a^2$ , temos:*

(i) As potências  $x^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , são dadas por:

$$x^n = q_n x + p_n, \quad (3.3)$$

onde  $q_n$  é dado pela equação de recorrência

$$q_n = 2aq_{n-1} + kq_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad (3.4)$$

sendo  $q_0 = 0$  e  $q_1 = 1$  os valores iniciais, e

$$p_n = kq_{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (3.5)$$

(ii) Para  $n \geq 2$ , os limites das razões  $\frac{q_{n+1}}{q_n}$  e  $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ , quando  $n$  tende a infinito, são ambos iguais a  $\alpha$ .

*Demonstração.* Mostremos a primeira parte escrevendo o polinômio mônico de segundo grau:

$$(x - (a + b\sqrt{m})) \cdot (x - (a - b\sqrt{m})) = x^2 - 2ax + a^2 - b^2m. \quad (3.6)$$

As raízes são obtidas resolvendo-se a equação  $x^2 - 2ax + a^2 - b^2m = 0$ . Como nos interessam as potências  $x^n$ ,  $n \geq 2$ , fazemos :

$$x^2 = 2ax + k, \quad (3.7)$$

onde  $k = b^2m - a^2$ . A seguir, multiplicando (3.7) repetidas vezes por  $x$ , temos os coeficientes de  $x$  e os termos independentes de  $x$  que aparecem nas suas potências:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2ax + k \\ &= (2a \cdot 1 + 0)x + k \cdot 1 \\ &= q_2x + kq_1 \\ &= q_2x + p_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 \cdot x \\ &= (q_2x + p_2)x \\ &= q_2x^2 + p_2x \\ &= q_2(2ax + k)x + p_2x \\ &= (2aq_2 + p_2)x + kq_2 \\ &= q_3x + p_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^4 &= x_3 \cdot x \\
&= (q_3x + p_3)x \\
&= q_3x^2 + p_3x \\
&= q_3(2ax + k) + p_3x \\
&= (2aq_3 + p_3)x + kq_3 \\
&= q_4x + p_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^5 &= x_4 \cdot x \\
&= (q_4x + p_4)x \\
&= q_4x^2 + p_4x \\
&= q_4(2ax + k) + p_4x \\
&= (2aq_4 + p_4)x + kq_4 \\
&= q_5x + p_5
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

E assim por diante, de modo que  $q_n = 2aq_{n-1} + p_{n-1}$  e  $p_n = kq_{n-1}$ , com  $n \geq 2$ . A tabela 3.2 apresenta alguns dos valores  $q_n$  e  $p_n$ .

Expoente de $\alpha$	Coefficiente de $x$	Coefficiente Independente
2	$2a$	$k$
3	$4a^2 + k$	$2ak$
4	$8a^3 + 4ak$	$4a^2k + k^2$
5	$16a^4 + 12a^2k + k^2$	$8a^3k + 4ak^3$
6	$32a^5 + 32a^3k + 6ak^2$	$16a^4k + 12a^2k^2 + k^4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$q_n$	$p_n$

Tabela 3.2: Coeficientes dos termos das potências de  $x$

Vamos provar por indução sobre  $n$  que a recorrência (3.4) é, de fato, verdadeira para todo  $n \geq 2$ . De fato, a tabela 3.2 nos permite verificar que ela é válida para  $n = 2$ . Suponhamos, por hipótese de indução que seja válida para  $n$  qualquer e provemos a

validade para  $n + 1$ . De fato, temos:

$$\begin{aligned}
 x^{n+1} &= x^n \cdot x \\
 &= (q_n x + kq_{n-1})x \\
 &= q_n x^2 + kq_{n-1}x \\
 &= q_n(2ax + k) + kq_{n-1}x \\
 &= (2aq_n + kq_{n-1})x + kq_n \\
 &= q_{n+1}x + p_{n+1}
 \end{aligned}$$

Logo, a recorrência (3.4) é verdadeira para  $n + 1$  e, portanto, é verdadeira para todo  $n \geq 2$ .

A recorrência  $q_n = 2aq_{n-1} + kq_{n-2}$  tem a seguinte equação característica:  $r^2 = 2ar + k$ , cujas raízes são  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  e a solução geral é dada por:

$$q_n = A(a + b\sqrt{m})^n + B(a - b\sqrt{m})^n.$$

Os valores  $A$  e  $B$  são constantes a serem determinadas com as condições iniciais  $q_0 = 0$  e  $q_1 = 1$ , obtendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\alpha + B\bar{\alpha} = 1 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos os valores de  $A = \frac{1}{2b\sqrt{m}}$  e de  $B = -\frac{1}{2b\sqrt{m}}$ . Portanto, as soluções gerais para  $q_n$  e  $p_n$  são:

$$\begin{aligned}
 q_n &= \frac{1}{2b\sqrt{m}}\alpha^n - \frac{1}{2b\sqrt{m}}\bar{\alpha}^{-n} = \frac{1}{2b\sqrt{m}}(\alpha^n - \bar{\alpha}^{-n}) \\
 p_n &= k \left( \frac{1}{2b\sqrt{m}}\alpha^{n-1} - \frac{1}{2b\sqrt{m}}\bar{\alpha}^{-n+1} \right) = \frac{k}{2b\sqrt{m}}(\alpha^{n-1} - \bar{\alpha}^{-n+1})
 \end{aligned}$$

Antes de concluirmos a segunda parte da demonstração, nas tabelas 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6, calculamos alguns valores de  $q_n$  e  $p_n$  para valores de  $\alpha$  dados, aproveitando ainda para analisar numericamente as razões  $\frac{q_{n+1}}{q_n}$  e  $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ .

Notemos que no caso da tabela 3.5, os valores  $q_n$  são a sequência de Fibonacci para  $F_1 = 1$  e os valores  $p_n$  são a sequência de Fibonacci para  $F_1 = 0$ .

Notadamente, os valores das tabelas 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 nos sugerem que tanto  $\frac{q_{n+1}}{q_n}$  como  $\frac{p_{n+1}}{p_n}$  tendem a um certo valor constante a partir de um certo  $n$ . Observemos na tabela 3.5 que esses limites são ambos iguais a  $\Phi$ , como ficou demonstrado na proposição 2.2, e na tabela 3.6 tomamos  $\alpha < 1$ , o que mostra que o limite não é igual a  $\alpha$ .

$n$	$q_n$	$p_n$	$\frac{q_{n+1}}{q_n}$	$\frac{p_{n+1}}{p_n}$
2	4	-1	3,75	4
3	15	-4	3,73333333333333	3,75
4	56	-15	3,73214285714286	3,73333333333333
5	209	-56	3,73205741626794	3,73214285714286
6	780	-209	3,73205128205128	3,73205741626794
7	2911	-780	3,73205084163518	3,73205128205128
8	10864	-2911	3,73205081001473	3,73205084163518
9	40545	-10864	3,73205080774448	3,73205081001473
10	151316	-40545	3,73205080758148	3,73205080774448
11	564719	-151316	3,73205080756978	3,73205080758148
12	2107560	-564719	3,73205080756894	3,73205080756978
13	7865521	-2107560	3,73205080756888	3,73205080756894

Tabela 3.3: Valores de  $q_n$  e  $p_n$  para  $\alpha = 2 + \sqrt{3} \simeq 3,732050808$ 

$n$	$q_n$	$p_n$	$\frac{q_{n+1}}{q_n}$	$\frac{p_{n+1}}{p_n}$
2	4	1	4,25	4
3	17	4	4,23529411764706	4,25
4	72	17	4,23611111111111	4,23529411764706
5	305	72	4,23606557377049	4,23611111111111
6	1292	305	4,23606811145511	4,23606557377049
7	5473	1292	4,23606797003472	4,23606811145511
8	23184	5473	4,2360679779158	4,23606797003472
9	98209	23184	4,23606797747661	4,2360679779158
10	416020	98209	4,23606797750108	4,23606797747661
11	1762289	416020	4,23606797749972	4,23606797750108
12	7465176	1762289	4,23606797749979	4,23606797749972
13	31622993	7465176	4,23606797749979	4,23606797749979

Tabela 3.4: Valores de  $q_n$  e  $p_n$  para  $\alpha = 2 + \sqrt{5} \simeq 4,236067977$ 

Para provar o caso geral dos limites com  $\alpha > 1$ , tomemos  $\alpha^n = \alpha q_n + p_n$ , então podemos escrever  $q_n$  e  $q_{n-1}$  da seguinte forma:

$$q_n = \frac{\alpha^n - p_n}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\alpha^n - p_n) \quad (3.8)$$

$$q_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - p_{n+1}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\alpha^{n+1} - p_{n+1}) \quad (3.9)$$

Fazemos o quociente e, em seguida, multiplicamos o numerador e o denominador

$n$	$q_n$	$p_n$	$\frac{q_{n+1}}{q_n}$	$\frac{p_{n+1}}{p_n}$
2	1	1	2	1
3	2	1	1,5	2
4	3	2	1,66666666666667	1,5
5	5	3	1,6	1,66666666666667
6	8	5	1,625	1,6
7	13	8	1,61538461538462	1,625
8	21	13	1,61904761904762	1,61538461538462
9	34	21	1,61764705882353	1,61904761904762
10	55	34	1,61818181818182	1,61764705882353
11	89	55	1,61797752808989	1,61818181818182
12	144	89	1,61805555555556	1,61797752808989
13	233	144	1,61802575107296	1,61805555555556

Tabela 3.5: Valores de  $q_n$  e  $p_n$  para  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,618033989$

$n$	$q_n$	$p_n$	$\frac{q_{n+1}}{q_n}$	$\frac{p_{n+1}}{p_n}$
2	6	-1	5,83333333333333	6
2	35	-6	5,82857142857143	5,83333333333333
2	204	-35	5,82843137254902	5,82857142857143
2	1189	-204	5,82842724978974	5,82843137254902
2	6930	-1189	5,82842712842713	5,82842724978974
2	40391	-6930	5,82842712485455	5,82842712842713
2	235416	-40391	5,82842712474938	5,82842712485455
2	1372105	-235416	5,82842712474628	5,82842712474938
2	7997214	-1372105	5,82842712474619	5,82842712474628
2	46611179	-7997214	5,82842712474619	5,82842712474619
2	271669860	-46611179	5,82842712474619	5,82842712474619
2	1583407981	-271669860	5,82842712474619	5,82842712474619
2	9228778026	-1583407981	5,82842712474619	5,82842712474619

Tabela 3.6: Valores de  $q_n$  e  $p_n$  para  $\alpha = 3 - 2\sqrt{2} \simeq 0,171572875$

da expressão obtida por  $\frac{1}{\alpha^n}$ :

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{\alpha^{n+1} - p_{n+1}}{\alpha^n - p_n} = \frac{\alpha^{n+1} - p_{n+1}}{\alpha^n} = \frac{\alpha - \frac{p_{n+1}}{\alpha^n}}{1 - \frac{p_n}{\alpha^n}}$$

Como  $\alpha^n$  cresce indefinidamente quando  $n$  tende a infinito, pois  $\alpha > 1$ , temos que

$\frac{p_{n+1}}{\alpha^n}$  e  $\frac{p_n}{\alpha^n}$  tendem a zero. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = \alpha. \quad (3.10)$$

Como  $p_n = kq_{n-1}$ , segue que  $\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{kq_n}{kq_{n-1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}}$  e, de (3.10), resulta que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \alpha. \quad (3.11)$$

□

Como visto anteriormente, o número  $\Phi$  é uma unidade imprópria de  $\mathcal{O}(5)$ , já que  $\mathcal{N}(\Phi) = -1$ . Na tabela 3.7 exibimos potências  $\Phi^n$ , para valores inteiros de  $n$ , que também são unidades de  $\mathcal{O}(5)$ .

$n$	$\Phi^n$	$\mathcal{N}(\Phi^n)$
-4	$\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$	1
-3	$-2 + \sqrt{5}$	-1
-2	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$	1
-1	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	-1
0	1	1
1	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	-1
2	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$	1
3	$2 + \sqrt{5}$	-1
4	$\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$	1

Tabela 3.7: Normas das potências de  $\Phi$

Os valores da tabela 3.7 nos sugerem que as potências de  $\Phi$  tem norma igual a  $\pm 1$ . A proposição seguinte generaliza este resultado.

**Proposição 3.8.** *Um inteiro quadrático  $\mu = a + b\sqrt{m}$ , com  $a$  e  $b$  reais, sendo  $b \neq 0$ , é uma unidade de  $\mathcal{O}(m)$  se, e somente se,  $\mu^n$  também é uma unidade de  $\mathcal{O}(m)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração.* Da proposição 3.3 concluímos que  $\mu$  é unidade de  $\mathcal{O}(m)$  se, e somente se,  $\mathcal{N}(\mu) = \pm 1$ . Logo, como a função norma é multiplicativa, isto é,  $\mathcal{N}(\mu_1\mu_2) = \mathcal{N}(\mu_1)\mathcal{N}(\mu_2)$ , temos que:

$$\mathcal{N}(\mu) = \pm 1 \Leftrightarrow \mathcal{N}(\mu^n) = \mathcal{N}(\mu\mu \cdots \mu) = \mathcal{N}(\mu)\mathcal{N}(\mu) \cdots \mathcal{N}(\mu) = \pm 1.$$

Portanto,  $\mu^n$  é unidade de  $\mathcal{O}(m)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . □

A proposição 3.9 é uma generalização da fórmula de Binet dada pela equação (2.5), na qual substitui-se  $\Phi$  por outro inteiro quadrático  $\mu = a + b\sqrt{m}$ , com norma também igual a  $-1$ .

**Proposição 3.9.** *Seja  $\mu = a + b\sqrt{m} > 1$  uma unidade imprópria de  $\mathcal{O}(m)$ , com  $a$  e  $b$  inteiros, então:*

1.  $A_n$  dado por:

$$A_n = \frac{\mu^n - (-1)^n \mu^{-n}}{\sqrt{m}} \quad (3.12)$$

tem valor inteiro para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

2. A sequência  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \mu.$$

*Demonstração.* Sendo  $\mu$  uma unidade imprópria de  $\mathcal{O}(m)$ , isto significa que:

$$\mathcal{N}(\mu) = -1 \Rightarrow (a + b\sqrt{m})(a - b\sqrt{m}) = -1 \Rightarrow (a + b\sqrt{m})^n (a - b\sqrt{m})^n = (-1)^n \quad (3.13)$$

Usando o resultado (3.13), reescrevemos  $A_n$ :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(a + b\sqrt{m})^n - (a + b\sqrt{m})^n (a - b\sqrt{m})^n (a + b\sqrt{m})^{-n}}{\sqrt{m}} \\ A_n &= \frac{(a + b\sqrt{m})^n - (a - b\sqrt{m})^n}{\sqrt{m}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

As expansões binomiais do tipo  $(x + y)^n$  e  $(x - y)^n$ , para  $x = a$  e  $y = b\sqrt{m}$ , são dadas respectivamente por:

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} (b\sqrt{m})^i \quad (3.15)$$

e

$$(x - y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} (-y)^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} (-y)^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a^{n-i} (b\sqrt{m})^i. \quad (3.16)$$

Usando (3.15) e (3.16), voltamos na equação (3.14), obtendo:

$$A_n = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} (b\sqrt{m})^i - \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} a^{n-i} (b\sqrt{m})^i}{\sqrt{m}}. \quad (3.17)$$

Desenvolvendo o segundo membro da equação (3.17), restarão somente os termos com binomiais  $\binom{n}{i}$  para  $i$  ímpar. Logo, obtemos

$$A_n \sqrt{m} = 2 \binom{n}{1} a^{n-1} b \sqrt{m} + 2 \binom{n}{3} a^{n-3} (b\sqrt{m})^3 + \cdots + 2 \binom{n}{j} a^{n-j} (b\sqrt{m})^j, \quad (3.18)$$

onde  $j = n$ , se  $n$  é ímpar, ou  $j = n - 1$ , se  $n$  é par.

Dividindo a equação (3.18) por  $\sqrt{m}$ , obtemos:

$$A_n = 2 \binom{n}{1} a^{n-1} b + 2 \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 (\sqrt{m})^2 + \cdots + 2 \binom{n}{j} a^{n-j} b^j (\sqrt{m})^{j-1} \quad (3.19)$$

Portanto, como todas as potências de  $\sqrt{m}$  que aparecem na equação (3.19) têm valores inteiros e, além disso,  $a$  e  $b$  são inteiros, concluímos  $A_n \in \mathbb{Z}$ .

Para provar a segunda parte, comecemos dividindo os termos da razão  $\frac{A_{n+1}}{A_n}$  por  $\mu^n$ :

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\mu^{n+1} - (-1)^{n+1} \mu^{-(n+1)}}{\mu^n - (-1)^n \mu^{-n}} = \frac{\mu - \frac{(-1)^{n+1}}{\mu^{2n+1}}}{1 - \frac{(-1)^n}{\mu^{2n}}}. \quad (3.20)$$

Se fizermos  $n$  crescer indefinidamente em (3.20) resultará que as razões  $\frac{(-1)^{n+1}}{\mu^{2n+1}}$  e  $\frac{(-1)^n}{\mu^{2n}}$  tenderão a zero, uma vez que  $\mu > 1$ . Portanto, concluímos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\mu}{1} = \mu.$$

□

O exemplo seguinte permite-nos verificar a veracidade da proposição 3.9.

**Exemplo 3.12.** Seja a unidade imprópria  $\mu = 1 + \sqrt{2} \in \mathcal{O}(2)$ . A sequência  $(A_n)$  correspondente é gerada pela equação:

$$A_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (-1)^n (1 + \sqrt{2})^{-n}}{\sqrt{2}},$$

sendo seus valores e a razão  $\frac{A_{n+1}}{A_n}$  mostrados na tabela 3.8.

A sequência obtida é dada pela equação de recorrência  $A_{n+1} = A_{n-1} + 2A_n$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 + \sqrt{2} = 2,4142135623730 \cdots$$

$n$	$A_n$	$\frac{A_{n+1}}{A_n}$
1	2	
2	4	2
3	10	2,5
4	24	2,4
5	58	2,4166666666666666
6	140	2,4137931034482
7	338	2,4142857142857
8	816	2,4142011834319
9	1970	2,4142156862745
10	4756	2,4142131979695
11	11482	2,4142136248948
12	27720	2,4142135516460
13	66922	2,4142135642135

Tabela 3.8: Sequência gerada por  $\mu = 1 + \sqrt{2}$  na fórmula (3.12)

É interessante notar, que se tomarmos  $\mu$  como unidade própria, ao invés de imprópria, o resultado da proposição 3.9 deixa de ser verdadeiro pois, embora  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n}$  seja também igual a  $\mu$ , a sequência obtida não possui apenas números inteiros. O exemplo 3.13 ilustra isso.

**Exemplo 3.13.** Tomamos a unidade própria  $\mu = 2 + \sqrt{3}$  e, usando a fórmula (3.12), concluímos também que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \mu$ , mas os valores  $(A_i)$  são:  $\frac{4\sqrt{3}}{3}, 8, \frac{52\sqrt{3}}{3}, 112, \frac{724\sqrt{3}}{3}, \frac{2702\sqrt{3}}{3}, \dots$

Outro resultado observado é que, se tomarmos  $\mu = \Phi$  aplicado na fórmula (3.12), obtemos a sequência de Fibonacci. Isto é, o número de ouro  $\Phi$  é tal que torna a proposição 3 ainda verdadeira, mesmo não cumprindo a hipótese de  $a$  e  $b$  inteiros.

**Exemplo 3.14.** Investigaremos neste exemplo o problema de encontrar o número real positivo que aumentado de  $n$  unidades é igual ao seu recíproco,  $n \in \mathbb{N}$ . Temos:

$$x + n = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + nx - 1 = 0 \quad (3.21)$$

Resolvendo, temos  $x$  e o recíproco  $\frac{1}{x}$ :

$$x = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}.$$

A tabela 3.9 mostra algumas das soluções da equação (3.21) incluindo o caso trivial  $n = 0$ . O número de ouro  $\Phi$  é o primeiro valor quando desconsideramos a solução para o caso trivial ( $n = 0$ ).

$n$	Número	Recíproco
0	1	1
1	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 0,61803\dots$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1,61803\dots = \Phi$
2	$-1 + \sqrt{2} \simeq 0,41421\dots$	$1 + \sqrt{2} \simeq 0,41421\dots$
3	$\frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \simeq 0,30278\dots$	$\frac{3 + \sqrt{13}}{2} \simeq 0,30278\dots$
4	$-2 + \sqrt{5} \simeq 0,23607\dots$	$2 + \sqrt{5} \simeq 0,23607\dots$
5	$\frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \simeq 0,61803\dots$	$\frac{5 + \sqrt{29}}{2} \simeq 0,61803\dots$

Tabela 3.9: Algumas das raízes positivas da equação  $x^2 + nx - 1 = 0$

Examinando a norma e o traço de  $\mu = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ , temos:

$$\mathcal{N}(\mu) = \left( \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} \right) \cdot \left( \frac{-n - \sqrt{n^2 + 4}}{2} \right) = \frac{-4}{4} = -1 \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathcal{T}(\mu) = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} + \frac{-n - \sqrt{n^2 + 4}}{2} = \frac{-2n}{2} = -n \in \mathbb{Z}.$$

Provamos no apêndice 3 que  $n^2 + 4$  não é quadrado e, além disso, a norma e o traço de  $\mu$  são inteiros. Logo, concluímos que todo número que, se aumentado de  $n$  unidades, torna-se igual ao seu recíproco, é um inteiro quadrático. Ademais, se  $n^2 + 4$  é livre de quadrados, então  $\mu \in \mathcal{O}(n^2 + 4)$  e é uma unidade imprópria. Cabe observar que se  $n^2 + 4$  tiver algum quadrado em sua fatoração, nós o eliminamos da raiz fazendo  $n^2 + 4 = p^2q$ , onde  $p^2$  contém todos os fatores quadrados de  $n^2 + 4$ . Dessa forma, obtemos:

$$\mu = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} = \frac{-n + p\sqrt{q}}{2}.$$

A norma e o traço ficam:

$$\mathcal{N}(\mu) = \frac{-n + p\sqrt{q}}{2} \cdot \frac{-n - p\sqrt{q}}{2} = \frac{n^2 - p^2q}{4} = \frac{n^2 - (n^2 + 4)}{4} = -1$$

$$\mathcal{T}(\mu) = \frac{-n + p\sqrt{q}}{2} + \frac{-n - p\sqrt{q}}{2} = -1.$$

Portanto, nesse caso  $\mu$  é inteiro quadrático de  $\mathcal{O}(q)$ , sendo também uma unidade imprópria.

Para o caso de número real negativo que se aumentado de  $n$  unidades torna-se igual ao seu recíproco, obtemos  $\mu = \frac{-n - \sqrt{n^2 + 4}}{2}$ . Daí, resulta que  $\mathcal{N}(\mu) = -1$  e  $\mathcal{T}(\mu) = -n$ , o que nos leva a concluir que a solução negativa da equação (3.21) é

também um inteiro quadrático, unidade imprópria de  $\mathcal{O}(n^2 + 4)$ , para  $n^2 + 4$  livre de quadrados.

## 4 Propostas de abordagens na Educação Básica

O número de ouro, pela diversidade de propriedades e problemas nos quais aparece, além das aplicações em um grande número de situações, é um rico tema para exploração no Ensino de Matemática. Assim, permite ao professor apresentar e desenvolver assuntos como medidas, incomensurabilidade, números irracionais, proporcionalidade, semelhança de figuras, estudo de formas de cobrir o plano, aplicação da matemática em situações reais, entre outras inúmeras possibilidades de exploração e descoberta de matemática. Dentro dessa perspectiva, neste capítulo apresentamos algumas propostas de atividades e recursos para explorar e permitir o ensino de Matemática em turmas de Educação Básica. Saliente-se que são apenas sugestões iniciais e que cabe ao professor de Matemática fazer as devidas adaptações, suprimindo ou acrescentando atividades ou itens que considere necessários para o nível de ensino ao qual se destinem.

### 4.1 Atividade 1 - Encontrando o ponto da divisão áurea de um segmento $\overline{AB}$

O objetivo desta atividade é determinar o ponto  $P$  que divide um segmento de reta qualquer de modo que a razão da medida da maior parte para a medida da menor parte seja  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Materiais necessários: lápis, papel, régua e compasso. Desenvolvimento: Construir um segmento  $\overline{AB}$  de medida qualquer. Com régua e compasso, encontrar o ponto  $C$  que o divide na razão áurea. Os passos são os descritos no exemplo 1.1.

- Trace o segmento  $\overline{AB}$  e determine  $M$  seu ponto médio (figura 4.1);
- Trace  $\overline{BC}$  perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$ , tal que o comprimento  $BC = BM$  (figura 4.1);
- Ligue o ponto  $A$  ao ponto  $C$ , determinando o triângulo  $ABC$  retângulo em  $B$ . Com centro em  $C$ , trace a circunferência de raio  $BC$ , determinando o ponto

$N$  em  $\overline{AC}$ . Em seguida, com centro em  $A$ , trace a circunferência de raio  $AN$ , determinando o ponto  $P$  em  $\overline{AB}$  (figura 4.1).

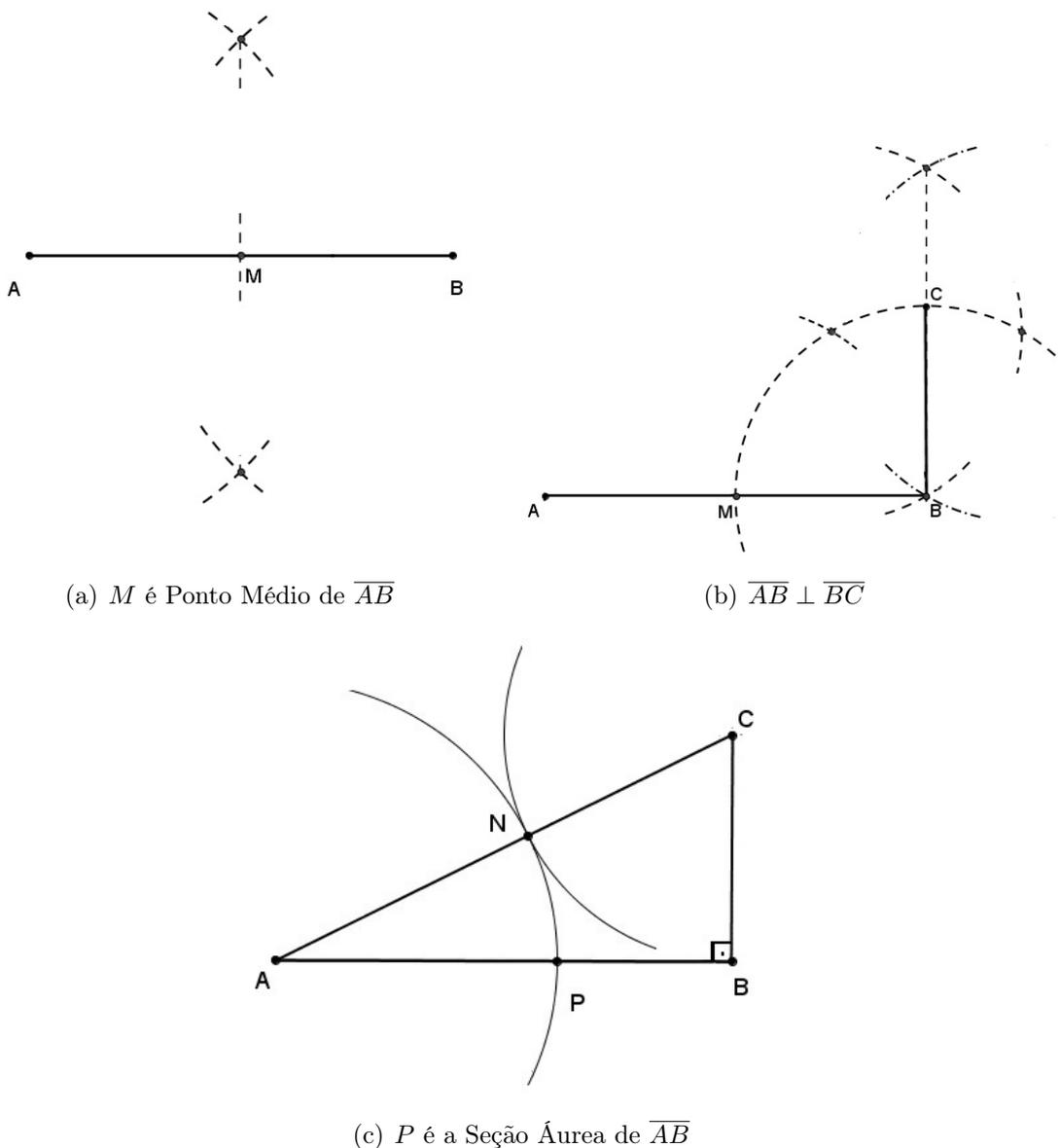


Figura 4.1: Atividade 1 - Encontrando o ponto da divisão áurea de um segmento  $\overline{AB}$

É extremamente importante mostrar porque o ponto  $P$  é o ponto que faz a seção áurea, conforme fizemos no exemplo 1.1. Para tal fim, é necessário que se utilize de conhecimentos de resolução de equações de segundo grau, identificação de figuras semelhantes e uso do Teorema de Pitágoras. A forma com que isto deve acontecer caberá ao professor decidir, podendo se dar individualmente com discussões no final, em grupos de alunos com ou sem intervenção, exposições no quadro do professor ou de um aluno com intervenções dos demais. Tudo depende do nível de ensino ao qual a atividade se aplica.

## 4.2 Atividade 2 - O retângulo áureo

O objetivo desta atividade é apresentar o retângulo áureo. Os materiais necessários são também lápis, papel, régua e compasso. Sugerimos duas etapas - a primeira a partir do resultado da Atividade 1 e a segunda a partir de um quadrado de lado qualquer.

### 4.2.1 Construindo o retângulo áureo a partir do ponto da divisão áurea de um segmento

Para esta tarefa, basta repetir a figura 4.1 e, em seguida, construir o retângulo de comprimento  $AB$  e largura  $AP$ , obtendo a figura 4.2

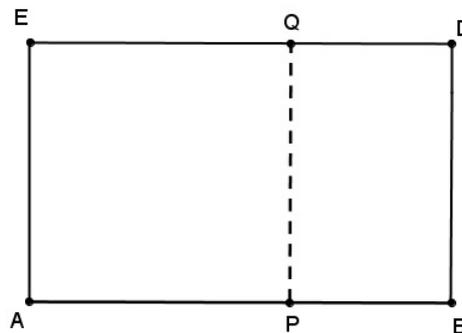


Figura 4.2: Retângulo áureo a partir do segmento  $\overline{AB}$

### 4.2.2 Construindo o retângulo áureo a partir de um quadrado

Os materiais necessários são lápis, papel, régua e compasso. Para iniciar o professor pede que os alunos desenhem um quadrado  $ABCD$  cujo lado tenha medida  $l = 8\text{cm}$  (ou outra). Também, se considerar conveniente, o professor pode iniciar a atividade distribuindo o quadrado inicial pronto. As etapas que sucedem são:

- Determine os ponto médio  $M$  de  $\overline{AB}$ .
- Trace  $\overline{MC}$ . Prolongue os segmentos  $AB$  e  $CD$ .
- Com centro em  $M$  e raio  $MC$ , trace o arco  $CD$  tal que  $D$  pertence à reta  $AB$ .
- Pelo ponto  $E$  trace a perpendicular  $EF$  onde  $F$  pertence à reta  $CD$ .
- Fica então determinado o retângulo áureo  $AEFD$  (figura 4.3).



Numa próxima etapa da atividade, o professor deve propor que repitam o procedimento escolhendo livremente a medida inicial do raio. Ao final, caberá a apresentação e discussão coletiva das conclusões. Além disso, cabe ainda ao professor fazer intervenções apresentando justificativas ou demonstrações dos resultados verificados.

## 4.4 Sugestões de recursos computacionais

Uma vez que o número de ouro  $\Phi$  é associado a uma série de situações no contexto da Geometria, o uso de recursos computacionais pode trazer grandes contribuições para o seu estudo. Existe uma série de *softwares* de geometria dinâmica que permitem explorar propriedades de figuras geométricas e relações dessas com o número  $\Phi$ . Nessa perspectiva, sugerimos a seguir alguns deles.

### 4.4.1 Geogebra

É um *software* de uso razoavelmente fácil. Ele consiste numa série de ferramentas que permitem trabalhar com os elementos e conceitos da geometria euclidiana e analítica, polígonos, cônicas, medidas de comprimento, área, ângulo entre outros recursos. Com este software é possível observar de modo dinâmico diferentes variações de uma figura - medidas de comprimento e de ângulo, coordenadas, rotações, simetrias, translações etc.

A figura 4.4 é um exemplo de tela do programa Geogebra. Ela mostra um triângulo equilátero inscrito numa circunferência, sendo  $A$  e  $B$  pontos médios dos lados. Nesta construção a razão  $\frac{AB}{BC}$  é igual ao número de ouro.

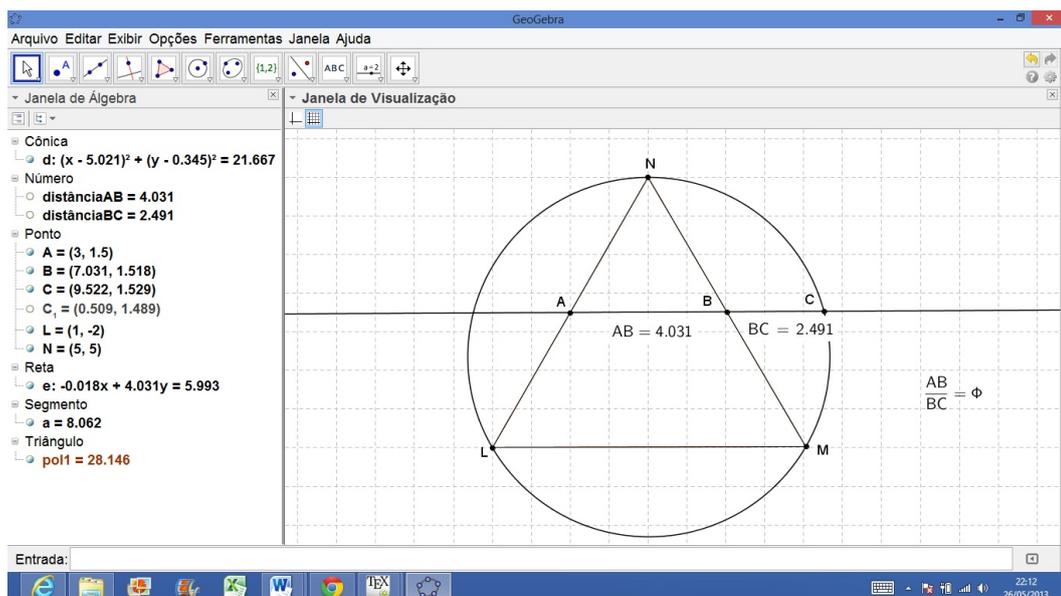


Figura 4.4: Construção com o *Geogebra*: o número  $\Phi$  no triângulo equilátero

No *site* <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/handle/mec/3538>, consultado em 22/05/2013, encontramos a afirmação de que é permitido copiar, distribuir e utilizar o Geogebra para fins não comerciais, sendo possível adquiri-lo através do *site* <http://www.geogebra.org/download/install.htm>. Também é disponibilizado pelo *Instituto Geogebra* do Rio de Janeiro, com sede no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, através do *site* [http://www.geogebra.org/pt\\_BR/](http://www.geogebra.org/pt_BR/), consultado em 22/05/2013.

#### 4.4.2 Régua e Compasso (*C.a.R. - Compass and Ruller*)

Também é um *software* de uso fácil em atividades de ensino, com recursos semelhantes aos do Geogebra. Segundo o *site* <http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/> (acessado em 23/05/2013) é um programa livre para ser usado e distribuído, além de ser *excelente laboratório de aprendizagem da geometria*. Pode-se obtê-lo a partir desse mesmo *site*.

Para exemplificar o uso do *software Régua e Compasso* apresentamos uma tela do mesmo na figura 4.5 onde se vê o quadrado  $OPQB$  de lado igual ao lado do triângulo equilátero  $AOB$ . Na figura, a razão  $\frac{AB}{BC}$  é igual ao número de de ouro  $\Phi$ .

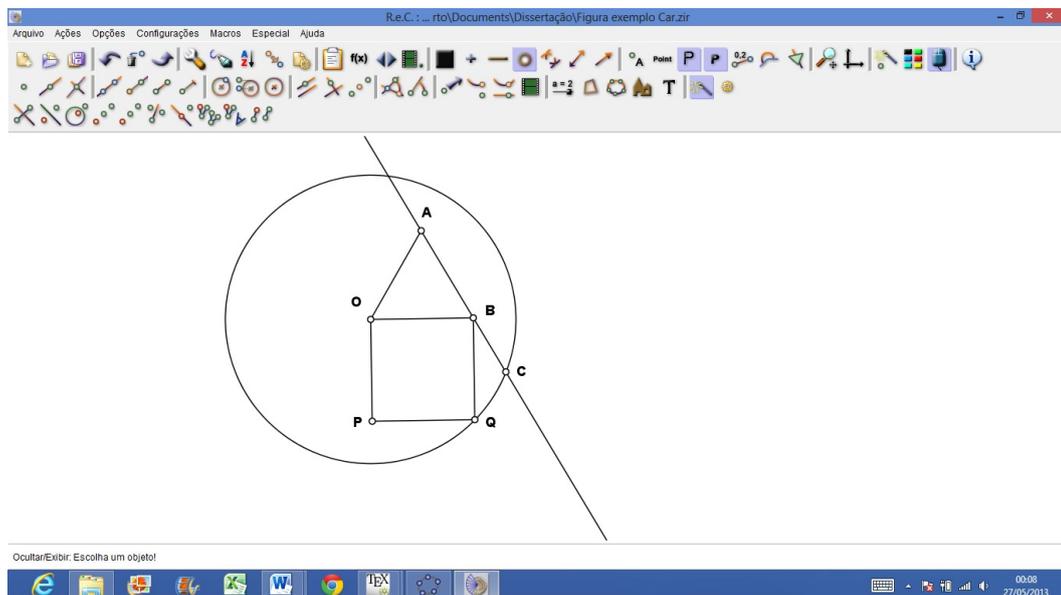


Figura 4.5: Construção com o programa *Régua e Compasso (C.a.R.)*: o número  $\Phi$  a partir de um quadrado e um triângulo equilátero

#### 4.4.3 Cabri-Géomètre

É um *software* que possibilita trabalhar com todas as figuras possíveis de se desenhar com régua e compasso, além de permitir medições de distâncias e ângulos. Uma vez desenhada uma figura, pode-se efetuar sobre ela todas as transformações que

mantêm suas propriedades iniciais - ampliações e reduções (homotetias), translações, rotações e simetrias - sendo ainda possível acompanhar passo a passo cada etapa da construção. Assim, este software é uma rica ferramenta para a construção, a exploração e a comprovação de propriedades dos objetos geométricos bem como das relações entre diferentes objetos.

Ele pode ser usado tanto por alunos da Educação Básica como por universitários, sendo ainda um recurso aos professores no preparo de atividades para suas aulas. Há também as versões Cabri-Géomètre II e Cabri-Géomètre II Plus e ainda Cabri-3D. Todas as versões deste *software* são marcas registradas da *Université Joseph Fourier (UJF)*, de Grenoble - França. No *site* <http://www.cabri.com.br> encontram-se mais detalhes sobre o Cabri, incluindo versão demonstrativa para experimentação, trabalhos publicados a respeito deste recurso, sugestões de atividades para o professor, eventos e novidades sobre o Cabri e também orientações sobre a sua aquisição.

#### 4.4.4 Atividades *Online*

Com a finalidade de contribuir para o ensino da matemática, a Universidade Federal Fluminense (UFF) disponibiliza através de seu *site* <http://www.uff.br/cdme/> uma lista de conteúdos digitais denominados *Conteúdos Digitais para o Ensino Aprendizagem da Matemática e Estatística*. Esses são organizados em três grupos: *Softwares Educacionais*, *Experimentos Educacionais* e *Atividades de Áudio*. Trata-se de um riquíssimo material para ser utilizado pelo professor e pelos alunos nas aulas de Matemática do Ensino Médio. O uso pode ser diretamente pela *Internet* ou ainda é possível copiar e instalar.

No grupo *Softwares Educacionais*, um dos conteúdos é específico para estudos com o número de ouro - disponível no endereço eletrônico <http://www.uff.br/cdme/rza/rza.html/rza-br.html>. Esse conteúdo proporciona estudos de forma dinâmica sobre razão áurea e suas propriedades geométricas e algébricas; permite visualizar algumas obras de arte e verificar a razão áurea em cada uma; discute e ajuda a refletir sobre a presença do número de ouro em seres da natureza; possibilita estudar a sequência de Fibonacci e sua relação com o número de ouro; e, ainda, permite compreender e refletir sobre associações equivocadas ao número  $\Phi$ . Tais conteúdos são organizados em sete módulos:

- I - O Número de Ouro em Desenhos e Pinturas: Verdade ou Mentira?
- II - O Número de Ouro em Conchas de Náutilos: Verdade ou Mentira?
- III - As Verdadeiras Proporções do Homem Vitruviano
- IV - Projeções em Perspectiva e A Razão Áurea
- V - Algumas Propriedades Matemáticas do Número de Ouro
- VI - O Número de Ouro e A Sequência de Fibonacci

VII - Não Se Deixe Enganar: Mais Equívocos sobre O Número de Ouro

## 5 Conclusões

A Matemática possui uma história registrada que ultrapassa milhares de anos de existência. Em diferentes épocas, foram inumeráveis os seus estudos e as contribuições destes para o desenvolvimento do conhecimento humano; muitos deles revolucionaram o modo de vida da humanidade. Como exemplos, temos o Cálculo, que se tornou ferramenta indispensável na modelagem de problemas do mundo físico e, por sua vez, do desenvolvimento da tecnologia no mundo moderno, e também a Geometria Euclidiana que, embora não tenha sido sempre suficiente, foi sempre necessária como modelo para organizar e explicar nosso mundo.

Muitos temas da Matemática surgiram como teorias simplesmente desconexas de aplicações, o que confirma que a Matemática possibilita ao cérebro humano infindáveis abstrações, fato que a torna ciência única. Neste contexto, em nossa pesquisa, pôde-se concluir que poucos são os temas em Matemática que, na atualidade, tornaram-se tão polêmicos e amplamente divulgados como o tema objeto de nosso trabalho - o número de ouro. O que se notou no desenvolvimento do trabalho é que são muitíssimos os materiais divulgados e as informações a respeito deste número, entre eles o seu aparecimento num problema aparentemente simples de seccionar um segmento, a associação a diversas medidas em figuras geométricas, a relação ou presença desse no crescimento e desenvolvimento de seres ou estruturas vivas, o uso em construções arquitetônicas ou em pinturas ou obras de artistas como Leonardo da Vinci, entre outros, além de associações com padrões de beleza estética humana.

Diante disso, assumindo que, enquanto ciência, a Matemática não é isenta de enganos, faz-se necessário olhar para os estudos do número de ouro e suas propriedades com bastante rigor, pois, como constatamos, muitos dos resultados com o número de ouro podem ser meramente especulações motivadas pelo simples encantamento com algumas de suas propriedades não necessariamente falsas. De fato, o que se verificou é que muitas de suas propriedades, bem como suas associações a algumas formas geométricas, podem ser rigorosamente demonstradas como aqui o fizemos, e ainda a sua associação à sequência de Fibonacci é, conforme mostramos ao longo de nosso trabalho, bastante intrigante, mesmo para quem conhece pouco da Matemática. Além disso, o que não podemos nunca é deixar de considerar que, sendo o número de ouro um elemento de um conjunto que caracterizamos como Inteiros Quadráticos, compartilha propriedades

ou proporciona resultados que não lhe são peculiares, mas características de demais elementos de tal conjunto.

Por fim, entre os inúmeros resultados verdadeiros e uma série de associações não rigorosamente comprovadas do número de ouro, verificou-se ser esse uma intercorrência positiva para a Matemática, sob dois aspectos: do desenvolvimento científico e do ensino-aprendizagem. Isto porque pode tornar-se um tema a ser amplamente explorado em seu ensino na Educação Básica, uma vez que não se coloca apenas no contexto da Matemática de alta complexidade, produz resultados que despertam a curiosidade, sendo amplamente associado a situações do mundo real - o que permite pesquisas investigativas - e, além disso, pode motivar a aprendizagem dos educandos.

# Referências

- [1] CÁLCULO: Ano 1 - Edição 12, pp. 58-59, São Paulo, Editora Segmento, 2012.
- [2] DOMINGUES, H.H.; Iezzi, G.: *Álgebra Moderna*. São Paulo, Atual, 2011.
- [3] DUNLAP, R. A.: *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, New Jersey, World Scientific, 2003.
- [4] ENGLER, A. J. ; Brumatti, P. : *Inteiros Quadráticos e o Grupo de Classes, XXIII.*; Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, IMPA, 2001.
- [5] EUCLIDES: *Os Elementos/Euclides*. Tradução de Irineu Bicudo, São Paulo, Editora da UNESP, 2009.
- [6] HERZ-FISCHLER, R.: *A Mathematical History of the Golden Number*. New York, Dover publications, Inc., 1998.
- [7] HEFEZ, A.: *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro, SBM, 2011.
- [8] LIMA, E. & Outros; *A matemática do Ensino Médio*. Volume 2, Rio de Janeiro, SBM, 1998.
- [9] LIVIO, M.: *Razão Áurea - A História do Número  $\Phi$ , um Número Surpreendente*. Tradução de Matsuama, S., 6ª Edição, Rio de Janeiro, Editora Record, 2011.
- [10] MARKOWSKY, G.; *Misconceptions About The Golden Ratio*. College Mathematics Journal, vol. 23, n. 1, pp. 2-19, 1992. Disponível em <http://www.umcs.maine.edu/markov/GoldenRatio.pdf>.
- [11] OLARIU, A.: *Golden Section and The Art of Painting*. Cornell University Library, 1999. Disponível em <http://arxiv.org/abs/physics/9908036/>
- [12] ROQUE, T.: *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro, Zahar, 2012.
- [13] STEWART, I.; TALL, D.: *Algebraic Number Theory*. New York, Chapman & Hall, 1987.

- 
- [14] WALSER, H.: *The Golden Section*. Washington, Mathematical Association of America, 2001.
- [15] WEISSTEIN, E. W.: *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. Second Edition, Chapman & Hall /CRC, 2002. Disponível em <http://books.google.com.br/>
- [16] <http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-br.html>. Último acesso em 22/mar/2013.
- [17] <http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicSpiral.html>. Último acesso em 24/jan/2013.

# Apêndice 1

A fim de compreender o problema de *cortar a reta finita dada em extrema e média razão*, que apresentamos no capítulo 1, interpretamos algumas das asserções de Euclides da seguinte maneira:

1. *reta finita* significa segmento de reta;
2. um retângulo (ou paralelogramo) é nomeado pela sua diagonal;
3. ao referir-se a uma figura, Euclides a concebe como sua área. Por exemplo, quando ele diz *paralelogramo  $CD$*  ele se refere à área do retângulo de diagonal  $\overline{CD}$ , ou ainda, quando diz  *$BC$  é igual a  $CD$*  ele está se referindo à igualdade das áreas dos retângulos de diagonais  $\overline{BC}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente.
4. de acordo com [12], o conceito de *aplicar uma figura de área  $S$  sobre um segmento  $\overline{AB}$* , para Euclides, significa construir um paralelogramo cuja base seja  $\overline{AB}$  e cuja área seja  $S$ . E ainda, *aplicar uma figura de área  $S$  sobre um segmento  $\overline{AB}$ , excedente por uma figura semelhante a um paralelogramo dado* significa construir um paralelogramo de área  $S$  em cuja base o segmento  $\overline{AB}$  esteja contido e tal que essa base seja aumentada até se obter um paralelogramo semelhante ao que foi dado. A figura 5.1 foi adaptada da da proposição 29 do livro VI de Euclides conforme encontramos em [5]; ela mostra a situação em que se aplica a figura  $S$  sobre  $\overline{HG}$ , obtendo-se o paralelogramo  $AEFH$ , com excedente dado pelo paralelogramo  $BEFG$  semelhante ao paralelogramo  $P$ .

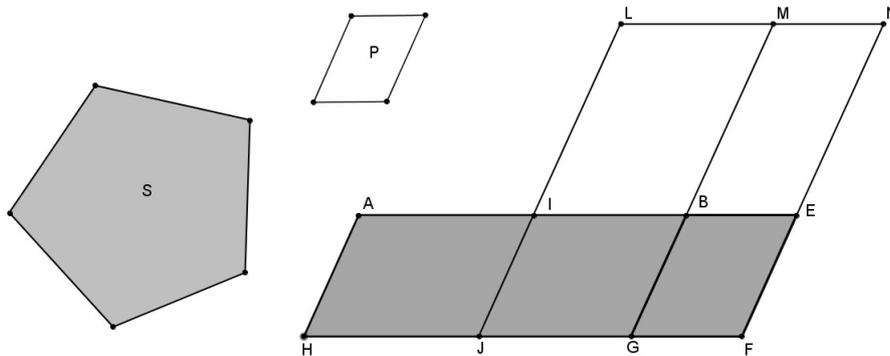


Figura 5.1: Aplicação da  $S$  sobre  $\overline{HG}$ , com excedente  $BEFG$  semelhante à  $P$

Com o intuito de provar que o ponto  $E$  da figura 1.1 divide  $\overline{AB}$  em extrema e média razão, isto é, na razão  $\frac{AE}{EB} = \Phi$ , façamos  $AB = x$  e  $AE = y$ . O ponto  $E$  é tomado tal que o retângulo  $GDFC$  tenha área igual à do quadrado  $ABHC$ . Logo, como o retângulo  $AEFC$  é uma parte comum a ambos, resulta que as áreas  $GDEA$  e  $EBHF$  são iguais. Segue daí que:

$$y^2 = x(x - y). \quad (5.1)$$

Em seguida, considerando que  $x$  e  $y$  têm valores estritamente positivos, resolvemos essa última equação para  $x$ , obtendo:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}y. \quad (5.2)$$

Portanto, a razão  $\frac{AE}{EB}$  fica:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

## Apêndice 2

Para provar que as diagonais de dois retângulos áureos consecutivos da figura 1.5 cruzam-se sempre em um mesmo ponto, consideremos três de seus retângulos áureos consecutivos  $A_0A_1A_2B_0$ ,  $A_1A_2A_3B_1$  e  $A_2A_3A_4B_2$  de modo a obter a figura 5.2. Seja o sistema cartesiano de coordenadas  $OXY$  com centro em  $A_0 = (0, 0)$  de modo que o eixo  $OX$  contenha o lado  $\overline{A_0A_1}$  e seja ainda a medida  $A_0B_0 = k$ . Logo, as coordenadas dos pontos  $A_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , são:

$$A_1 = (\Phi k, 0),$$

$$A_2 = (k\Phi, k),$$

$$A_3 = (k, k),$$

$$A_4 = (k, k\Phi - k).$$

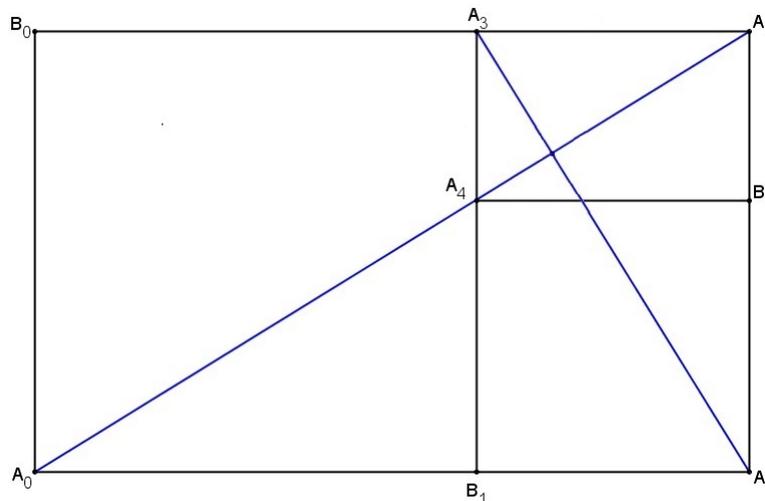


Figura 5.2: Sequência de retângulos áureos

Vamos mostrar que as retas  $\overleftrightarrow{A_0A_2}$ ,  $\overleftrightarrow{A_1A_3}$  e  $\overleftrightarrow{A_2A_4}$  são tais que

$$\overleftrightarrow{A_0A_2} \cap \overleftrightarrow{A_1A_3} = \overleftrightarrow{A_2A_4} \cap \overleftrightarrow{A_1A_3}.$$

Os coeficientes angulares das retas  $\overleftrightarrow{A_0A_2}$ ,  $\overleftrightarrow{A_1A_3}$  e  $\overleftrightarrow{A_2A_4}$  são, respectivamente,  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$  dados por:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{k}{k\Phi} = \frac{1}{\Phi}. \\
m_2 &= \frac{k}{k - k\Phi} = \frac{1}{1 - \Phi}. \\
m_3 &= \frac{k\Phi - k - k}{k - k\Phi} = \frac{\Phi - 2}{1 - \Phi}.
\end{aligned}$$

Utilizando o resultado  $\Phi^2 - \Phi = 1$ , obtido a partir da equação (1.5), temos:

$$\frac{\Phi - 2}{1 - \Phi} = \frac{\Phi - 2}{\Phi^2 - \Phi - \Phi} = \frac{\Phi - 2}{\Phi(\Phi - 2)} = \frac{1}{\Phi}.$$

Logo, as retas  $\overleftrightarrow{A_0A_2}$  e  $\overleftrightarrow{A_2A_4}$  são coincidentes já que têm mesmas inclinações em relação ao eixo  $OX$  e  $A_2$  é ponto comum a ambas. Isso nos leva a concluir, portanto, que  $\overleftrightarrow{A_0A_2} \cap \overleftrightarrow{A_1A_3} = \overleftrightarrow{A_2A_4} \cap \overleftrightarrow{A_1A_3} = P$ , onde  $P$  é o ponto obtido a partir das equações de retas  $\overleftrightarrow{A_0A_2}$  e  $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ , respectivamente, dadas por:

$$y - 0 = m_1(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{\Phi}x, \quad (5.3)$$

$$y - 0 = m_2(x - k\Phi) \Rightarrow y = \frac{1}{1 - \Phi}x - \frac{k\Phi}{1 - \Phi}. \quad (5.4)$$

Resulta, finalmente, que  $P = \left( \frac{k\Phi^2}{2\Phi - 1}, \frac{k\Phi}{2\Phi - 1} \right)$ .

## Apêndice 3

Vamos mostrar que, dado  $n \in \mathbb{N}$ , se  $n \neq 0$  então  $n^2 + 4$  não é quadrado. Suponhamos por absurdo que  $n^2 + 4$  não seja quadrado. Logo, existe  $m \in \mathbb{N}$ , com  $m > n$ , tal que  $m^2 = n^2 + 4$ . Daí, segue que:

$$m^2 = n^2 + 4 \Rightarrow m^2 - n^2 = 4 \Rightarrow (m + n)(m - n) = 4.$$

Como  $m$  e  $n$  são inteiros positivos, há três casos a considerar:

- (i)  $m + n = 1$  e  $m - n = 4$ ;
- (ii)  $m + n = 4$  e  $m - n = 1$ ; e,
- (iii)  $m + n = m - n = 2$ .

De (i) resulta que  $m = \frac{5}{2}$  e  $n = -\frac{3}{2}$ , de (ii) resulta que  $m = \frac{5}{2}$  e  $\frac{3}{2}$  e de (iii) resulta que  $m = 2$  e  $n = 0$ . Em todos os casos chegamos a contradições. Portanto,  $n^2 + 4$  é livre de quadrados.