UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALFREDO FERNANDES DE BRITO NETO

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES: UMA ABORDAGEM CONSTRUTIVA

Boa Vista, RR

2021

ALFREDO FERNANDES DE BRITO NETO

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES: UMA ABORDAGEM CONSTRUTIVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Max Ferreira
Coorientador: Prof. Dr. Guilherme Zsigmond Machado

Boa Vista, RR

2021

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

B862s Brito Neto, Alfredo Fernandes de.
Sistemas lineares e matrizes: uma abordagem construtiva. / Alfredo Fernandes de Brito Neto. – Boa Vista, 2021.
94 f.

Orientador: Prof. Dr. Max Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Guilherme Zsigmond Machado.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1 – Sistemas lineares. 2 – Matrizes. 3 – Determinantes. 4 – Operações. I – Título. II – Ferreira, Max (orientador). III – Machado, Guilherme Zsigmond (coorientador).

CDU – 512.643

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária/Documentalista:
Shirdoill Batalha de Souza - CRB-11/573 - AM

ALFREDO FERNANDES DE BRITO NETO

SISTEMAS LINEARES E MATRIZES: UMA ABORDAGEM CONSTRUTIVA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 19 de março de 2021 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Prof. Dr. Max Ferreira
Orientador - UFRR

Prof. Dr. Alberto Martin Martinez
Castaneda

Profª. Drª. Kelly Karina Santos
UFRR

Boa Vista, RR
2021

Às pessoas que sempre estiveram certas ...
meus queridos e especiais avós (In memoriam).

AGRADECIMENTOS

À Deus o criador, pela razão maior que é a vida. Por ter permitido, em uma fase tão difícil da qual estamos passando (Pandemia COVID-19), concluir este trabalho.

À minha linda família, por nunca deixar de acreditar em mim ao longo de minha formação profissional, sempre me animando e incentivando nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, irmãos, avós, tios, sobrinhos, afilhado, primos e amigos que torceram e incentivaram de maneira direta e indireta.

Ao IFRR pela compreensão e apoio durante a realização do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Aos Professores Max Ferreira, Guilherme Zsigmond, Kelly Karina, Alberto Castañeda, Joselito de Oliveira, Lindeval Fernandes, Elzimar Rufino, Luciano Ferreira, Raimundo Pedro, Gilson de Souza e Silvestre pelas contribuições na minha formação, pois foi de grande valia.

Aos meus colegas de curso, pelas contribuições durante os estudos dedicados as disciplinas e exame de qualificação.

Aos componentes da banca professora Kelly Karina e Alberto Castañeda pela contribuição neste trabalho e em singular ao Professor Max Ferreira meu orientador pela paciência no processo de construção dos saberes necessários para que esse trabalho fosse realizado.

Ao PROFMAT e o Departamento de Matemática da UFRR que proporcionaram através do curso, desafios constantes que favoreceram maior desenvolvimento e crescimento na minha trajetória profissional.

RESUMO

Na presente dissertação apresentamos uma construção da ideia de sistemas lineares $AX = B$, com n equações e n incógnitas, a partir da equação $ax = b$ em $\mathbb{R}$ e uma construção das definições e operações com matrizes a partir da análise da solução do sistema linear $AX = B$. A ideia por detrás deste trabalho é oferecer uma abordagem a mais para o ensino de sistemas lineares e matrizes. Tal abordagem possui duas motivações para o aluno: a construção dos conceitos gerais a partir de conceitos elementares e a possibilidade de perceber e observar a riqueza algébrica na construção dos conceitos e operações com matrizes e sistemas lineares. A metodologia de trabalho constitui de pesquisa bibliográfica.

Palavras-chave: Sistemas lineares. Matrizes. Determinantes. Operações.

ABSTRACT

In this dissertation we introduce the idea of linear systems $AX = B$ with n equations end n variables from the equation $ax = b \in \mathbb{R}$ and a construction of the definitions, and operations with matrixes from the analysis of the resolution of the linear system $AX = B$. The idea behind this paper is to offer another approach to the teaching of linear systems and matrixes. Such approach has two advantages to students: the construction of general concepts from elementary concepts, and the possibility to observe and realize how important algebra is in the construction of concepts and mathematical operations with matrixes and linear systems. The methodology used in this paper is based on bibliographic research.

Key-words: Linear systems. Matrixes. Determinants. Mathematical Operations.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo (STRANG, 2010) os problemas centrais da Álgebra Linear são as equações $AX = B$ e $AX = \lambda X$. Na verdade o segundo pode ser reduzido ao primeiro pondo $BX = 0$, onde $B = A - \lambda IX$. O primeiro contato com a disciplina supracitada ocorre no ensino fundamental através da solução de sistemas com duas incógnitas e porteriormente no estudo das matrizes e sistemas lineares no ensino médio. Para isso, lança-se mão, anteriormente, do estudo de matrizes, em geral sem apresentar justificativa de como determinados conceitos surgem. Como exemplo podemos citar o conceito de determinante que aparece naturalmente na solução de sistema lineares. Usualmente são usados três processos de resolução: método da substituição, método da eliminação e método da comparação. Como mencionado, ensina-se primeiramente matrizes, determinantes, em seguida passa-se aos métodos de soluções de tais equações. Esta abordagem leva em consideração o aprendizado de matrizes como pré-requisito para o estudo da solução de sistemas lineares, dando a impressão de que o primeiro não surge a partir da necessidade de resolver o sistema. Tal abordagem não apresenta a riqueza algébrica construtiva que há na solução de um sistema linear$AX = B.$

A proposta deste trabalho é a construção de alguns dos conceitos, propriedades e proposições que envolvem os estudos de matrizes a partir do estudo da solução dos sistemas lineares. Mais precisamente partiremos da solução da equação $ax = b$ em $\mathbb{R}$. Posteriormente construiremos os conceitos olhando para os sistemas de duas ou mais variáveis.

O presente trabalho foi dividido em quatro capítulos, sendo que o primeiro abordará sistemas lineares $AX = B,$ o segundo a relação de sistemas lineares e tipos de matrizes, o terceiro operações com matrizes e suas propriedades e o quarto determinantes e suas propriedades.

No primeiro capítulo, o de maior relevância do nosso trabalho, apresentamos uma breve história dos sistemas lineares. Logo depois, um estudo sobre sistemas lineares $AX = B$ e sua resolução, não consideraremos o aprendizado de matrizes como pré requisito visto no ensino médio. Partiremos do estudo da solução de uma equação $ax = b$, e em seguida abordaremos as equação $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ até finalmente chegarmos ao estudo de sistemas de equações lineares no $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$. Uma vez obtida as resoluções de sistemas de equações lineares faremos uma abordagem de forma construtiva a ideia de matriz, multiplicação de matrizes, igualdade de matrizes, matriz inversa e determinante. Para finalizar, apresentaremos os sistemas lineares em forma de equações matriciais onde também definiremos os conceitos de sistemas lineares equivalentes e traremos uma fórmula de resolução de método de escalonamento para sistemas de equações lineares.

No segundo capítulo tem-se o estudo das matrizes onde são apresentadas os tipos de matrizes, suas definições e exemplificações, sempre, a partir da ideia de sistema linear.

No terceiro capítulo dedicamos as operações com matrizes dando ênfase ao conjunto das matrizes na qual existe uma estrutura em relação as operações de adicão e multiplicação por um número real. Além disso, mostramos as propriedades da matriz transposta com suas respectivas demonstrações.

Por último, o quarto capítulo, é dedicado ao estudo dos determinantes e suas propriedades, contendo além das definições de determinantes de ordem $n \geqslant 1$ e as demonstrações das propriedades dos determinantes, a regra de Sarrus, o teorema fundamental de Laplace e a matriz de Vandermonde.

1 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES $AX = B$

Neste capítulo apresentaremos um estudo sobre sistemas lineares $AX = B$ e sua resolução, não consideraremos o aprendizado de matrizes como pré requisito visto no ensino médio. Partiremos do estudo da solução de uma equação $ax = b$, e em seguida abordaremos a equação $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ até finalmente chegarmos ao estudo de sistemas de equações lineares no $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$. Além disso, construiremos uma exploração álgebrica das resoluções destes sistemas. Uma vez obtida as resoluções de sistemas de equações lineares faremos uma abordagem de forma construtiva a ideia de matriz, multiplicação de matrizes, igualdade de matrizes, matriz inversa, matriz adjunta e determinante. Para finalizar, apresentaremos os sistemas lineares em forma de equações matriciais onde também definiremos os conceitos de sistemas equivalentes, traremos uma fórmula de resolução de método de escalonamento para sistemas de equações lineares e também uma breve abordagem histórica.

1.1 UMA BREVE ABORDAGEM HISTÓRICA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Sobre sistema lineares entende-se “Do grego (sy significa ‘junto’ e sta, ‘permanecer’), sistema, em Matemática, é o conjunto de equações que devem ser resolvidas “juntas”, ou seja, os resultados devem satisfazê-las simultaneamente (DANTE, 2010, p.142)

Segundo (BOURBAKI, 1989) a Álgebra Linear é ao mesmo tempo um dos mais antigos e um dos mais novos ramos da matemática. Existem problemas que datam da antiguidade e que são resolvidos por uma única multiplicação, podendo ser visto na solução da equação $ax = b$, conhecendo-se a e b, excentuando-se o caso em que a é igual a zero.

Para (EVES, 2004) os problemas encontrados no papiro de Rhind exigiam apenas uma equação linear para a sua resolução.

Assim, para resolver o problema

$$x + \frac{x}{7} = 24.$$

Os egipícios estimavam um valor conveniente para x, por exemplo $x = 7$. Então, fazendo os cálculos, chegavam a $7 + \frac{7}{7} = 8$ e como 8 deve ser multiplicado por 3 para chegar a 24, o valor correto de x deveria ser $3 \times 7 = 21$. Esse método ficou conhecido na Europa como “Regra da Falsa Posição".

Antigamente os babilônios já conheciam a resolução de equações. (EVES, 2004) conta que problemas envolvendo as resoluções de equações foram encontrados em tabuletas de cerca de 1.600 anos a.C. De fato, era principalmente pela álgebra que os babilônios expressavam problemas geométricos.

Para as civilizações antigas, como Egito, Babilônia, China e Índia, embora haja dificuldade em se precisar as épocas, apresentaram documentos matemáticos importantes, e todos continham problemas que envolvam situações corriqueiras, do dia a dia, além de problemas algébricos, caracterizados por tratar de variáveis genericamente.

O livro chinês *Nove capítulos sobre a arte da Matemática*, de Chui-Chang Suan-Shu, por exemplo, contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, soluções de equações e propriedades dos triângulos. Essa obra data de aproximadamente 250 a.C. e já apresentava sistemas de equações lineares simultâneas.

1.2 EQUAÇÃO $ax = b$

Para quem nunca estudou sistemas lineares uma estratégia para entender as soluções dos mesmos é a partir da análise da equação

$$ax = b, \text{ com } a, b, x \in \mathbb{R}.$$

De fato, devido esta análise, pode-se perceber a necessidade da construção da matemática que está por trás da idéia de matriz, dando todo um sentido à abordagem da mesma. Como veremos futuramente, podemos pensar, por exemplo, no conceito de determinante que aparece naturalmente na solução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

Considere a equação $ax = b$. Vamos entender a solução da mesma.

Suponhamos que $ax = b = 0$. Se $a = 0$. Então $ax = 0x = 0 = b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. A equação é classificada como possível e indeterminada (EPI), pois a mesma possui infinitas soluções.

Por outro lado, se $a \neq 0$ então $ax = b \Rightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}b$. Portanto, a equação possui uma única solução. Assim classificamos como possível e determinada (EPD).

Em particular, se $b = 0$ temos

$$ax = b \Rightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}0 = 0$$

Neste caso particular como $b = 0$ dizemos que a equação é homogênea. Finalmente se $a = 0$ e $b \neq 0$ temos

$$ax = 0x = 0 = b,$$

mas como $b \neq 0$ temos um absurdo.

Portanto, a equação não possui solução. Desta forma a classificamos como equação impossível (EI). Observe que apenas com a análise acima, podemos lançar mão das possibilidades de soluções para sistemas lineares com mais de uma equação.

O que acontece com as soluções quando há duas incógnitas?

Sabemos que além da equação $ax = b$ um dos primeiros exercícios que um aluno do Ensino Médio enfrenta, em termos de Geometria Analítica é esboçar o traço de uma reta de equação $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ no plano. Isso equivale a achar números reais α_1 e α_2 que são solução da mesma.

Por outro lado, sabendo que em uma reta há infinitos pontos, como podemos determinar analiticamente tal afirmação?

Pensando nesta pergunta, abordaremos a solução de tal problema.

Primeiramente, podemos nos perguntar se é possível resolver a equação apenas usando a inversão de coeficientes, ou seja, resolver utilizando o artifício anterior usado na equação $ax = b.$

Encontrando a equação $a_1x_1 + a_2\alpha_2 = b$. Suponhamos que α_2 é um número real qualquer. Então

$$a_1x_1 + a_2\alpha_2 = b \Rightarrow a_1x_1 = -a_2\alpha_2 + b$$

Portanto, se $a_1 \neq 0$ segue que

$$a_1x_1 = -a_2\alpha_2 + b \Rightarrow x_1 = a_1^{-1}(-a_2\alpha_2) + a_1^{-1}b.$$

Logo, a equação possui infinitas soluções, uma vez que a escolha do número α_2 é livre e portanto a solução da mesma é classificada como possível e indeterminada (EPI).

Analogamente, dado qualquer $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ com $\alpha_2 \neq 0$ a equação possui infinitas soluções dadas por

$$x_2 = a_2^{-1}(-a_1\alpha_1) + a_2^{-1}b$$

Em particular, se a equação é homogênea ($b = 0$) temos

$$x_2 = a_2^{-1}(-a_1\alpha_1)$$

Finalmente, se $a_1 = a_2 = 0$ e $b \neq 0$ então temos o seguinte absurdo

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \Rightarrow 0x_1 + 0x_2 = 0 = b \neq 0$$

Logo, neste caso a equação não possui solução e, portanto, dizemos que a mesma é classificada como impossível (EI).

Observe que apenas com a análise acima, podemos lançar mão das possibilidades de soluções para sistemas lineares com mais de uma equação.

Equação linear

Definição 1.2.1. - *Dados os números reais* $a_1, ..., a_n,\ c\ (n \geqslant 1),$ *à equação*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$$

onde os x_i *são variáveis em* $\mathbb{R},$ *damos o nome de equação linear sobre* $\mathbb{R}$ *nas incógnitas* $x_1, ..., x_n.$

Uma solução dessa equação é uma seqüência de n *números reais (não necessariamente distintos entre si), indicada por* $(b_1, b_2, ..., b_n),$ *tal que*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = c$$

seja uma sentença verdadeira.

Exemplos

$1)$ Dada a equação: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$ a terna ordenada $(3, 1, 0)$ é uma solução dessa equação, pois $3 - 2 \cdot 1 - 0 = 1$ é verdadeira.

$2)$ Seja equação linear

$$0x + 0y + 0z = 0.$$

é fácil observar que qualquer tripla ordenada (b_1, b_2, b_3) é solução da equação.

$3)$ Dada a equação linear

$$0x + 0y + 0z + 0w = 5.$$

é fácil perceber que qualquer quádrupla ordenada(b_1, b_2, b_3, b_4) não satisfaz a equação, pois

$$0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4 = 5.$$

é sentença falsa quaisquer que sejam b_1, b_2, b_3 e $b_4 \in \mathbb{R}.$

1.3 GENERALIZANDO A EQUAÇÃO $ax = b$ PARA O $\mathbb{R}^2$

Qual a generalização natural para equação $ax = b$ tal que $a, b \neq 0$ com $a, b \in \mathbb{R}$? Podemos considerar o sistema formado pelas duas equações e queremos calcular simultaneamente a sua solução. $\begin{cases} ax + by = p & (I) \\ cx + dy = q & (II) \end{cases}$

Estas duas equações em conjunto formam um sistema de equações lineares com duas variáveis. O nosso objetivo é encontrar a solução do sistema. Como se trata de duas equações podemos com a mesma solução, determiná-la usando as propriedades dos números reais, ou seja, manipulando as equações e fazendo substituições, assim:

Sejam a, b, c e d números reais não nulos. Isolando y na segunda equação, temos:

$$dy = q - cx \quad (III)$$

$$y = \frac{q - cx}{d}$$

Substituindo na primeira equação, temos:

$$ax + b(\frac{q - cx}{d}) = p \Rightarrow adx + bq - bcx = pd \Rightarrow (ad - bc)x = pd - bq \Rightarrow x = \frac{pd - bq}{ad - bc} \quad (IV)$$

Para que exista um único valor de x que satisfaça essa igualdade é necessário que $(ad - bc) \neq 0$.

Substituindo o valor de x de (IV) em (III), temos:

$$dy = q - \frac{cpd - cbq}{ad - bc} = \frac{adq - bcq - cpd + cbq}{ad - bc} = \frac{(aq - cp)d}{ad - bc}$$

dividindo a última equação por d, temos:

$$y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

Existindo um único valor de x, existirá um único valor de y, e a solução única do sistema é:

$$x = \frac{pd - bq}{ad - bc} \quad e \quad y = \frac{aq - cp}{ad - bc}.$$

Observe que

1. o número $ad - bc$ está associado aos números que aparecem na tabela: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

2. o número $pd - qb$ está associado aos números que aparecem na tabela: $\begin{bmatrix} p & b \\ q & d \end{bmatrix}$

3. o número $aq - pc$ está aos números que aparecem na tabela: $\begin{bmatrix} a & p \\ c & q \end{bmatrix}$

Podemos observar que os números podem ser obtidos nas tabelas através das mesmas sequências de operações. Podemos então, tornar tudo mais simples, definir os números obtidos nas tabelas (que chamaremos de matriz).

Assim, se $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $C_x = \begin{bmatrix} p & b \\ q & d \end{bmatrix}$, $C_y = \begin{bmatrix} a & p \\ c & q \end{bmatrix}$ e

$$det\, C = ad - bc$$

$$det\, C_x = pd - qb$$

$$det\, C_y = aq - pc$$

resulta

$$x = \frac{det\, C_x}{det\, C}$$

$$y = \frac{det\, C_y}{det\, C}$$

Este exemplo mostra o quão natural é a idéia de matriz e do determinante associado a matriz quadrada 2×2. No Ensino Médio, esta ideia é ensinada ao aluno através da Regra de Cramer, pelo seguinte processo:

1. Calcula-se o determinante $det\, C$ da matriz incompleta;
2. Se $det\, C \neq 0 \Rightarrow$ o sistema é possível e determinado;
3. Se $det\, C = 0 \Rightarrow$ o sistema é possível indeterminado ou impossível.

Para decidirmos se o sistema é indeterminado ou impossível, determina-se por exemplo, $det\, C_x$. Se $det\, C_x = 0$ (como $det\, C = 0$), o sistema será indeterminado e se $det\, C_x \neq 0$ (como $det\, C = 0$), o sistema será impossível.

De posse da ideia de matriz poderíamos pensar em outra estratégia para resolver o sistema

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

imitando a solução dada para a equação linear no caso em que os coeficientes são números reais não nulos. Mas aparecem alguns problemas em relação a equação com coeficiente e termo independente reais. Agora temos:
4 coeficientes reais: $a,\ b,\ c\ e\ d,$
2 incógnitas: $x\ e\ y,$
2 termos independentes: $p\ e\ q.$

O próprio sistema linear com coeficientes reais *ax = b* pode sugerir o seguinte formato

$$AX = B.$$

Como uma operação entre os coeficientes e as incógnitas de modo que, esta, produz termo independente. É claro que essa operação é compatível com o sistema linear.

Tomando $ax + by = p$ e $cx + dy = q$ os elementos que são correspondentes no sistema, isso obriga a definir primeiro uma igualdade entre matrizes colunas.

Duas *matrizes são iguais* quando são do mesmo tipo e todos os elementos são iguais nas suas respectivas posições. Assim,

$$\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by = p \\ cx+dy = q \end{cases}$$

Falta portanto, descrever $\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$ como AX.

Assim, de forma natural, para preservar a posição dos coeficientes, podemos considerar

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} e$$

$$B = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Isso nos dá a seguinte definição:

$$AX = B \sim \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \sim \begin{cases} ax+by = p \\ cx+dy = q \end{cases}$$

1.4 A IDEIA DE MATRIZ IDENTIDADE E MATRIZ INVERSA DE ORDEM 2

Definida a equação *AX = B* podemos tentar resolvê-la como fizemos anteriormente para o caso real. Primeiramente, devemos relembrar que, no caso real, dada a equação $ax = b$ com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$, aplicando o inverso multiplicativo pela esquerda resulta

$$ax = b \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}b \Rightarrow (a^{-1}a)x = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}b.$$

Agora poderíamos, imitando a solução em $\mathbb{R}$, resolver a equação AX = B como no caso real, desde que isso faça sentido. Teríamos

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Isso nos leva à necessidade de definir, a multiplicação entre matrizes quadradas e a inversa de uma matriz A. Para que isso faça sentido, algebricamente falando, precisamos de um elemento neutro, para a multiplicação de matrizes, que faça o papel de 1 na multiplicação em $\mathbb{R}$. Dito de outra forma devemos determinar $I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que

$$IX = X,$$

para todo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, ou ainda, devemos determinar *a, b, c e d* de modo que

$$\begin{cases} ax + by = x \\ cx + dy = y \end{cases}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R},$ ou seja, devemos resolver as equações

$$(a-1)x + by = 0 \text{ e } cx + (d-1)y = 0$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
Fazendo $y = 0$ e $x = 1$ temos $a - 1 = c = 0$. Fazendo $x = 0$ e $y = 1$ temos $b = d - 1 = 0$.
Portanto $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observe que $IX = X$ implica em $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, ou seja, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x + 0y \\ 0x + 1y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X.$

Agora precisamos de uma definição de multiplicação entre duas matrizes quadradas que seja compátivel com a multiplicação entre uma matriz quadrada e uma matriz coluna.

Se $N_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$ e $N_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$

Temos que $N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}$

calculando-se $MN_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, tem-se:

$$MN_1 = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \end{bmatrix}.$$

De maneira análoga, tem-se

$$MN_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{21} + a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Agora usando somente os elementos das matrizes coluna exposto anteriormente podemos definir a multiplicação de MN.

Portanto se $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad e \quad N = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

Definimos

$$MN = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Munidos da operação podemos calcular a inversa da matriz A. Suponha que $A^{-1} = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Resolvendo a equação

$$AA^{-1} = I$$

fica,

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} au + bw & av + bz \\ cu + dw & cv + dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Igualando os elementos das matrizes obtemos os sistemas lineares

$$\begin{cases} au + bw = 1 \\ cu + dw = 0 \end{cases} \quad (1)\ e \ \begin{cases} av + bz = 0 \\ cv + dz = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Associados ao sistema (1) temos os determinantes:

$$det\, A = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$det\, A_u = det \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = d$$

e

$$det\ A_w = det \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & o \end{bmatrix} = -c$$

Cuja solução é

$$u = \frac{det\ A_u}{det\ A} = \frac{d}{det\ A}$$

e

$$w = \frac{det\ A_w}{det\ A} = \frac{-c}{det\ A}$$

Associados ao sistema (2) temos os determinantes:

$$detA = det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$detA_v = det \begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{bmatrix} = -b$$

e

$$detA_z = det \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} = a$$

Cuja solução é

$$v = \frac{det\ A_v}{det\ A} = \frac{-b}{det\ A}$$

e

$$z = \frac{det\ A_z}{det\ A} = \frac{a}{det\ A}$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{det\ A} & \frac{-b}{det\ A} \\ \frac{-c}{det\ A} & \frac{a}{det\ A} \end{bmatrix} = \frac{1}{det\ A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Portanto provamos o seguinte teorema.

Teorema 1.4.1. *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e somente se, $ad - bc \neq 0$*, caso em que a inversa é dada pela fórmula*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

1.5 SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR DE DUAS EQUAÇÕES COM DUAS INCÓGNITAS POR INVERSÃO MATRICIAL

Seja o sistema linear $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, com incógnitas x e y.

Substituindo o sistema linear pela equação matricial única

$$\begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

que podemos reescrever como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Supondo que a matriz 2 x 2 seja invertível (isto é, que $ad - bc \neq 0$), então podemos multiplicar à esquerda ambos lados pela inversa e reescrever a equação como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Aplicando o *teorema* 1.4.1

Podemos reescrever essa equação $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

da qual obtemos

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc} \text{ e } y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

1.6 GENERALIZANDO A EQUAÇÃO LINEAR PARA O $\mathbb{R}^3$

Qual a generalização natural para equação $ax = b$ tal que $a, b \neq 0$ com $a, b \in \mathbb{R}$? Podemos pensar no seguinte sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_3 \end{cases}$$

Qual é a solução do sistema?

Podemos manipular o sistema da seguinte forma:

Multiplicamos a primeira equação por a_{21} e segunda equação por a_{11} com a_{21} e a_{11} não nulos,

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y + a_{13}a_{21}z = k_1a_{21} \ (1) \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y + a_{11}a_{23}z = k_2a_{11} \ (2) \end{cases}$$

Fazendo (2) - (1) membro a membro, obtemos:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})z = k_2a_{11} - k_1a_{21}$$

Multiplicando a primeira equação por a_{31} e terceira equação por $a_{11},$ sendo a_{31} e a_{11} não nulos,

$$\begin{cases} a_{31}a_{11}x + a_{31}a_{12}y + a_{31}a_{13}z = k_1a_{31} \ (3) \\ a_{11}a_{31}x + a_{11}a_{32}y + a_{11}a_{33}z = k_3a_{11} \ (4) \end{cases}$$

Fazendo (4) - (3), obtemos:

$$(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})z = k_3a_{11} - k_1a_{31}$$

Formando o sistema com as variáveis y e z,

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})z = k_2a_{11} - k_1a_{21} \ (5) \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})z = k_3a_{11} - k_1a_{31} \ (6) \end{cases}$$

Agora multiplicando a equação (5) por $(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \neq 0$ e a equação (6) por $(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \neq 0$, segue que

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})y + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})z = (k_2a_{11} - k_1a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) \ (7) \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})y + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})z = (k_3a_{11} - k_1a_{31})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \ (8) \end{cases}$$

Fazendo (7) - (8), obtemos:

$[(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})]y =$ $(k_2a_{11} - k_1a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (k_3a_{11} - k_1a_{31})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}).$

Dividindo ambos lados da igualdade por

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$

não nulo, temos:

$$y = \frac{(k_2a_{11} - k_1a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (k_3a_{11} - k_1a_{31})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})}{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})}$$

Assim,

$$y = \frac{a_{11}a_{11}a_{33}k_2 - a_{11}a_{31}a_{13}k_2 - a_{11}a_{21}a_{33}k_1 + \cancel{a_{13}a_{21}a_{31}k_1} - a_{11}a_{11}a_{23}k_3 + a_{11}a_{23}a_{31}k_1 + a_{11}a_{13}a_{21}k_3 - \cancel{a_{13}a_{21}a_{31}k_1}}{a_{11}a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{11}a_{33} + \cancel{a_{21}a_{12}a_{13}a_{31}} - a_{11}a_{11}a_{23}a_{32} + a_{11}a_{23}a_{31}a_{12} + a_{21}a_{13}a_{11}a_{32} - \cancel{a_{21}a_{12}a_{31}a_{13}}}$$

Colocando a_{11} em evidência no numerador e denominador, temos:

$$y = \frac{a_{11} \cdot (a_{11}a_{33}k_2 - a_{31}a_{13}k_2 - a_{21}a_{33}k_1 - a_{11}a_{23}k_3 + a_{23}a_{31}k_1 + a_{13}a_{21}k_3)}{a_{11} \cdot (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12} + a_{21}a_{13}a_{32})}$$

sendo $a_{11} \neq 0$. Logo,

$$y = \frac{a_{11}a_{33}k_2 - a_{31}a_{13}k_2 - a_{21}a_{33}k_1 - a_{11}a_{23}k_3 + a_{23}a_{31}k_1 + a_{13}a_{21}k_3}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12} + a_{21}a_{13}a_{32}}.$$

Organizando o numerador e denominador, temos:

$$y = \frac{a_{11}k_2a_{33} + k_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}k_3 - a_{13}k_2a_{31} - a_{11}a_{23}k_3 - k_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

Retormando o sistema nas variáveis y e z, e procedendo de forma análoga

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})z = k_2a_{11} - k_1a_{21} \ (5) \\ (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})z = k_3a_{11} - k_1a_{31} \ (6) \end{cases}$$

multiplicamos a equação (5) por $(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) \neq 0$ e a equação (6) por $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0$

Fica

$$\begin{cases} (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y + (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})z = (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(k_2a_{11} - k_1a_{21}) \ (9) \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})z = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(k_3a_{11} - k_1a_{31}) \ (10) \end{cases}$$

Fazendo (9) - (10), obtemos:

$[(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})]z$ = $(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(k_2a_{11} - k_1a_{21}) - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(k_3a_{11} - k_1a_{31})$

Dividindo ambos os membros da igualdade por

$$(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}),$$

não nulo, segue que

$$z = \frac{(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(k_2a_{11} - k_1a_{21}) - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(k_3a_{11} - k_1a_{31})}{(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})}$$

Assim,

$$z = \frac{a_{11}a_{32}k_2a_{11} - a_{11}a_{32}k_1a_{21} - a_{31}a_{12}k_2a_{11} + \cancel{a_{31}a_{12}k_1a_{21}} - a_{11}a_{22}k_3a_{11} + a_{11}a_{22}k_1a_{31} + a_{12}a_{21}k_3a_{11} - \cancel{a_{12}a_{21}k_1a_{31}}}{a_{11}a_{32}a_{11}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{13}a_{21} - a_{31}a_{12}a_{11}a_{23} + \cancel{a_{31}a_{12}a_{13}a_{21}} - a_{11}a_{22}a_{11}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{13}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{11}a_{33} - \cancel{a_{12}a_{21}a_{13}a_{31}}}$$

Colocando $-a_{11}$ em evidência no numerador e denominador, temos:

$$z = \frac{-a_{11}(-a_{32}k_2a_{11} + a_{32}k_1a_{21} + a_{31}a_{12}k_2 + a_{22}k_3a_{11} - a_{22}k_1a_{31} - a_{12}a_{21}k_3)}{-a_{11}(-a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33})},$$

sendo $a_{11} \neq 0$

Logo,

$$z = \frac{-a_{32}k_2a_{11} + a_{32}k_1a_{21} + a_{31}a_{12}k_2 + a_{22}k_3a_{11} - a_{22}k_1a_{31} - a_{12}a_{21}k_3}{-a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{13}a_{21} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}}.$$

Organizando o numerador e denominador, temos:

$$z = \frac{a_{11}a_{22}k_3 + a_{12}k_2a_{31} + k_1a_{21}a_{32} - k_1a_{22}a_{31} - a_{11}k_2a_{32} - a_{12}a_{21}k_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

De maneira análoga, se eliminarmos a variável z da primeira e terceira equação do sistema e formar um sistema nas vaiáveis x e y. Fazendo as operações adequadas, obtemos a seguinte equação na variável x:

$[a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}]x = k_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}k_3 + a_{13}k_2a_{32} - a_{13}a_{22}k_3 - k_1a_{23}a_{32} - a_{12}k_2a_{33}$

Daí, resulta:

$$x = \frac{k_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}k_3 + a_{13}k_2a_{32} - a_{13}a_{22}k_3 - k_1a_{23}a_{32} - a_{12}k_2a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

Para que existam os únicos valores de $x,\ y\ e\ z$ é necessário que $(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33})$ seja não nulo.

Observe que:

1. O número $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ está associado aos números da tabela

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2. O número $k_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}k_3 + a_{13}k_2a_{32} - a_{13}a_{22}k_3 - k_1a_{23}a_{32} - a_{12}k_2a_{33}$ está associado aos números da tabela.

$$\begin{bmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3. O número $a_{11}k_2a_{33} + k_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}k_3 - a_{13}k_2a_{31} - a_{11}a_{23}k_3 - k_1a_{21}a_{33}$ está associado aos números da tabela.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

4. O número $a_{11}a_{22}k_3 + a_{12}k_2a_{31} + k_1a_{21}a_{32} - k_1a_{22}a_{31} - a_{11}k_2a_{32} - a_{12}a_{21}k_3$ está associado aos números da tabela.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que os números podem ser obtidos nas tabelas de uma forma prática, fazendo o seguinte:

Repetimos as duas primeiras filas verticais à direita da terceira e efetuamos as seis multiplicações feitas nas diagonais dos números;

Os produtos obtidos nas direções das diagonais nas quais chamaremos de diagonal principal e diagonal secundária terão sinais positivos (diagonal principal) e negativos (diagonal secundária) e em seguida soma os resultados obtidos.

Podemos então, definir os números obtidos nas tabelas (que chamaremos de matrizes).

Assim se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $A_x = \begin{bmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $A_y = \begin{bmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{bmatrix}$, $A_z = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{bmatrix}$ e

$$det\,A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

$$det\,A_x = k_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}k_3 + a_{13}k_2a_{32} - a_{13}a_{22}k_3 - k_1a_{23}a_{32} - a_{12}k_2a_{33},$$

$$det\,A_y = a_{11}k_2a_{33} + k_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}k_3 - a_{13}k_2a_{31} - a_{11}a_{23}k_3 - k_1a_{21}a_{33} \quad e$$

$$det\,A_z = a_{11}a_{22}k_3 + a_{12}k_2a_{31} + k_1a_{21}a_{32} - k_1a_{22}a_{31} - a_{11}k_2a_{32} - a_{12}a_{21}k_3$$

Resulta:

$$x = \frac{det\,A_x}{det\,A}, \quad y = \frac{det\,A_y}{det\,A} \quad e \quad z = \frac{det\,A_z}{det\,A}.$$

Este exemplo mostra o quão natural é a ideia de matriz e do determinante associado à matriz quadrada.

Passamos então para o estudo da resolução do sistema em $\mathbb{R}^3$ usando a ideia de matriz.

De posse desta ideia poderíamos pensar em uma outra estratégia para resolver o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_2 \end{cases}$$

Imitando a solução dada no caso em que os coeficientes são números reais não nulos. Mas, surgem alguns problemas em relação à equação com coeficiente e termo independente reais. Agora temos:

coeficientes reais: a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23},a_{31}, a_{32} e a_{33},

incógnitas: x, y e z,

termos independentes: k_1, k_2 e k_3.

O próprio sistema linear com coeficientes reais $ax = b$ sugere:

$$AX = B.$$

Como uma operação entre os coeficientes e as incógnitas de modo que, esta, produz termo independente. É claro que essa operação é compatível com o sistema linear. Isso obriga a definir primeiro uma igualdade entre matrizes colunas.

$$\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Falta agora escrever $\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{bmatrix}$ como AX. Assim, de forma natural, para preservar a posição dos coeficientes, podemos considerar

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} e$$

$$B = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}.$$

Isso nos dá a seguinte definição:

$$AX = B \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_3 \end{cases}$$

Equivalentemente ao caso de duas dimensões também temos a importância da ideia de matriz identidade e matriz inversa de ordem 3, pois elas serão necessárias para resolução.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

O que nos leva à necessidade de definir, a multiplicação entre matrizes quadradas e a inversa de uma matriz A. Para que isso faça sentido, algebricamente falando, precisamos de um elemento neutro que faça o papel de 1 na multiplicação em $\mathbb{R}$.

Dito de outra forma, devemos determinar $I = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

tal que

$$IX = X,$$

para todo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, ou ainda, devemos determinar a, b, c, d, e, f, g, h e i de modo que

$$\begin{cases} ax + by + cz = x \\ dx + ey + fz = y \\ gx + hy + iz = z \end{cases}$$

para todo x, y e $z \in \mathbb{R}$, ou seja, devemos resolver as equações

$$(a-1)x + by + cz = 0,\ dx + (e-1)y + fz = 0 \ e \ gx + hy + (i-1)z = 0$$

para todo x, y e $z \in \mathbb{R}$.

Fazendo $y = z = 0$ e $x = 1$ temos $a - 1 = d = g = 0$. Fazendo $x = z = 0$ e $y = 1$ temos $b = e - 1 = h = 0$. Fazendo $x = y = 0$ e $z = 1$ temos $c = f = i - 1 = 0$.

Portanto $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observe que $IX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x + 0y + 0z \\ 0x + 1y + 0z \\ 0x + 0y + 1z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X.$

Agora precisamos de uma definição de multiplicação entre duas matrizes quadradas que seja compátivel com a multiplicação entre uma matriz quadrada e uma matriz coluna.

Portanto, se $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$

Definimos

$$MP = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} m_{11}p_{11} + m_{12}p_{21} + m_{13}p_{31} & m_{11}p_{12} + m_{12}p_{22} + m_{13}p_{32} & m_{11}p_{13} + m_{12}p_{23} + m_{13}p_{33} \\ m_{21}p_{11} + m_{22}p_{21} + m_{23}p_{31} & m_{21}p_{12} + m_{22}p_{22} + m_{23}p_{32} & m_{21}p_{13} + m_{22}p_{23} + m_{23}p_{33} \\ m_{31}p_{11} + m_{32}p_{21} + m_{33}p_{31} & m_{31}p_{12} + m_{32}p_{22} + m_{33}p_{32} & m_{31}p_{13} + m_{32}p_{23} + m_{33}p_{33} \end{bmatrix},$$

ou seja, procedemos de forma análoga três vezes, uma para cada coluna da matriz à direita. Munidos da operação podemos calcular a inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} u & v & x \\ y & z & w \\ k & l & m \end{bmatrix}$$

de

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a equação em AA^{-1} dada por

$$AA^{-1} = I$$

Assim,

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v & x \\ y & z & w \\ k & l & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} au + by + ck & av + bz + cl & ax + bw + cm \\ du + ey + fk & dv + ez + fl & dx + ew + fm \\ gu + hy + ik & gv + hz + il & gx + hw + im \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Igualando os elementos das matrizes obtemos os sistemas lineares

$$\begin{cases} au + by + ck = 1 \\ du + ey + fk = 0 \\ gu + hy + ik = 0 \end{cases} (1), \quad \begin{cases} av + bz + cl = 0 \\ dv + ez + fl = 1 \\ gv + hz + il = 0 \end{cases} (2) \ e \ \begin{cases} ax + bw + cm = 0 \\ dx + ew + fm = 0 \\ gx + hw + im = 1 \end{cases} (3)$$

Associados ao sistema (1) temos os determinantes:

$$det\,D = det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb$$

$$det\,D_u = det\begin{bmatrix} 1 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix} = ei - fh,$$

$$det\,D_y = det\begin{bmatrix} a & 1 & c \\ d & 0 & f \\ g & 0 & i \end{bmatrix} = fg - di,$$

$$det\,D_k = det\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 0 \\ g & h & 0 \end{bmatrix} = dh - ge$$

cuja solução é

$$u = \frac{det\,D_u}{det\,D} = \frac{ei - fh}{ae - fh + dhc + gfb - ceg - fha - idb},$$

$$y = \frac{det\,D_y}{det\,D} = \frac{fg - di}{aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb}$$

e

$$x = \frac{det\,D_k}{det\,D} = \frac{dh - ge}{aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb}.$$

Associados ao sistema (2) temos os determinantes:

$$det\,D = det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb$$

$$det\,D_v = det\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 1 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix} = ch - bi,$$

$$det\,D_z = det\begin{bmatrix} a & 0 & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & i \end{bmatrix} = ai - cg,$$

$$det\,D_l = det\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 1 \\ g & h & 0 \end{bmatrix} = bg - ah$$

cuja solução é

$$v = \frac{det\, D_v}{det\, D} = \frac{ch - bi}{aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb},$$

$$z = \frac{det\, D_z}{det\, D} = \frac{ai - cg}{aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb}$$

e

$$l = \frac{det\, D_l}{det\, D} = \frac{bg - ah}{aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb}.$$

Associados ao sistema (3) temos os determinantes:

$$det\, D = det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb$$

$$det\, D_x = det \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 1 & h & i \end{bmatrix} = bf - ce,$$

$$det\, D_w = det \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ d & 0 & f \\ g & 1 & i \end{bmatrix} = cd - af,$$

$$det\, D_m = det \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & 1 \end{bmatrix} = ae - bd$$

cuja solução é

$$x = \frac{det\, D_x}{det\, D} = \frac{bf - ce}{aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb},$$

$$w = \frac{det\, D_w}{det\, D} = \frac{cd - af}{aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb}$$

e

$$m = \frac{det\, D_m}{det\, D} = \frac{ae - bd}{aei + dhc + gfb - ceg - fha - idb}$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{det\, D_u}{det\, D} & \frac{det\, D_v}{det\, D} & \frac{\det\, D_x}{det\, D} \\ \\ \frac{det\, D_y}{det\, D} & \frac{det\, D_z}{det\, D} & \frac{det\, D_w}{det\, D} \\ \\ \frac{det\, D_k}{det\, D} & \frac{det\, D_l}{det\, D} & \frac{det\, D_m}{det\, D} \end{bmatrix} = \frac{1}{detD} \cdot \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

1.7 GENERALIZANDO A EQUAÇÃO LINEAR PARA O $\mathbb{R}^n$

Apresentaremos aqui uma percepção diferente sobre a solução de uma sistema linear com n equações e n incógnitas muitas vezes não ensinado no ensino médio, onde lá os alunos tem como pré-requsito o ensino de matrizes e determinantes. Aqui trataremos de fazer um resgate da aplicação do método da substituição visto pelos alunos no ensino fundamental.

Seja um sistema generalizado com n incógnitas e n equações da seguinte maneira:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

É possível aplicar o método da substituição no mesmo ?

Para um melhor entendimento faremos operações matemáticas envolvendo os coeficientes e os termos independentes do sistema com 2 equações e 2 incógnitas, em seguida para o sistema com 3 equações e 3 incógnitas até chegar ao sistema com n equações e n incógnitas. Essas operações originarão novos coeficientes e termos independentes na qual teremos outros sistemas equivalente aos originais.

Assim, definimos o sistema 2×2 :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \text{(I)} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando x em (I), temos

$x = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}y$, com $a_{11} \neq 0$

Substituindo o valor de x em (II) e colocando o coeficiente de y em evidência, temos:

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2 \Rightarrow a_{21}(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y) + a_{22}y = b_2 \Rightarrow a_{21} \cdot \frac{b_1}{a_{11}} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}}y + a_{22}y = b_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}})y = b_2 - a_{21} \cdot \frac{b_1}{a_{11}}$$

Reorganizando o sistema, temos:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ (a_{22} - a_{21} \cdot \dfrac{a_{12}}{a_{11}})y = b_2 - a_{21} \cdot \dfrac{b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

Note que para determinar estes novos coeficientes, basta considerar os coeficientes do sistema original, sem precisar aplicar o método da substituição.

Agora vamos ver um exemplo, onde dado um sistema e estabelecendo estas relações entre os coeficientes e termos independentes do sistema original é possível resolver o novo sistema equivalente.

Seja o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Suprimindo as incógnita do sistema, temos:

$\begin{matrix} 2 & 3 & 14 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}$ onde $\begin{matrix} a_{11} = 2, & a_{12} = 3 & e & b_1 = 14 \\ a_{21} = 1, & a_{22} = -1 & e & b_2 = 2 \end{matrix}$

Determinando o novo coeficiente e o novo termo independente da segunda equação, temos:

$(a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}}) = (-1 - 1 \cdot \frac{3}{2}) = \frac{-5}{2}$ e $(b_2 - a_{21} \cdot \frac{b_1}{a_{11}}) = (2 - 1 \cdot \frac{14}{2}) = -5$

Reorganizando o novo sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ \frac{-5}{2}y = -5 \end{cases}$

temos $y = 2$ e $2x = 14 - 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 4$. Logo $x = 4$ e $y = 2$ é solução do sistema.

Agora, partiremos para o sistema 3×3 :

Dado o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Vamos encontrar o novo sistema usando o método da substituição de maneira análoga ao que foi feito no sistema anterior 2×2.

Isolando x na primeira equação, tem-se $x = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y - \frac{a_{13}}{a_{11}}z$, com $a_{11} \neq 0$.

Substituindo o valor de x na segunda equação

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2,$$

temos:

$$a_{21}(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y - \frac{a_{13}}{a_{11}}z) + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$(a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}})y + (a_{23} - a_{21} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}})z = b_2 - a_{21} \cdot \frac{b_1}{a_{11}}$$

Agora, substituindo o valor de x na terceira equação

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$a_{31}(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y - \frac{a_{13}}{a_{11}}z) + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

e colocando y e z em evidência, segue que:

$$(a_{32} - a_{31} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}})y + (a_{33} - a_{31} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}})z = b_3 - a_{31} \cdot \frac{b_1}{a_{11}}$$

Reorganizando o sistema 3×3, fica:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ (a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}})y + (a_{23} - a_{21} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}})z = b_2 - a_{21} \cdot \frac{b_1}{a_{11}} \\ (a_{32} - a_{31} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}})y + (a_{33} - a_{31} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}})z = b_3 - a_{31} \cdot \frac{b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

Tomando $(a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}}) = a'_{22}$, $(a_{23} - a_{21} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}}) = a'_{23}$, $(a_{32} - a_{31} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}}) = a_{32}$, $(a_{33} - a_{31} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}}) = a'_{33}$, $(b_2 - a_{21} \cdot \frac{b_1}{a_{11}}) = b'_2$ e $(b_3 - a_{31} \cdot \frac{b_1}{a_{11}}) = b'_3$ e reorganizando, fica:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \qquad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ \qquad a'_{32}y + a'_{33}z = b'_3 \end{cases}$$

Formando um sistema com a segunda e terceira equações

$$\begin{cases} a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ a'_{32}y + a'_{33}z = b'_3 \end{cases}$$

Aplicando o processo do método da substituição visto no início desta seção, temos:

$$\begin{cases} a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ (a'_{33} - a'_{32} \cdot \frac{a'_{23}}{a'_{22}})z = b'_3 - a'_{32} \cdot \frac{b'_2}{a'_{22}} \end{cases} \quad \text{com } a'_{22} \neq 0$$

Depois de todas as relações obtidas dos coeficientes e termos independentes. Tomando $(a'_{33} - a'_{32} \cdot \frac{a'_{23}}{a'_{22}}) = a'_{31}$, podemos reestruturar o sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ \qquad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ \qquad\qquad a'_{31}z = b'_3 - a'_{32} \cdot \frac{b'_2}{a'_{22}} \end{cases}$$

No processo de resolução do sistema são mantidos os coeficientes e o termo independente da primeira equação, no entanto, os coeficientes e termos independentes das demais equações são recalculados através de operações matemáticas. Vale destacar que esse processo descreve um sistema escalonado. Perceba que as operações feitas com os coeficientes das incógnitas e termos independentes seguiram uma padronização regular na qual é possível trabalhar a resolução dos sistemas de equações lineares. Para (PANTOJA LIGIA F. L. CAMPOS, 2013) podemos sempre redefinir os cálculos destes coeficientes e termos independentes da seguinte forma:

$a'_{ij} = (a_{ij} - a_{ik} \cdot \frac{a_{kj}}{a_{kk}}$, com $a_{kk} \neq 0)$, onde: (k = inferência; $k < i \leqslant n$) e $b'_i = (b_i - a_{ik} \cdot \frac{b_k}{a_{kk}}) \longrightarrow$ temos independentes.

Com esta percepção, depois de definido o novo sistema escalonado, cuja solução é a mesma do sistema original, podemos encontar a sua solução, se possível, resolvendo-se o sistema por substituição. Partindo da última equação, obtemos x_n; em seguida, substituindo esse valor na equação anterior, obtemos x_{n-1}. Repetindo-se esse procedimento vamos obter $x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$.

Exemplo 1.7.1. *Considere o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Identificando os coeficientes e os termos independentes.

$a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 1$ ***e*** $b_1 = 6$

$a_{21} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = -1$ ***e*** $b_2 = 0$

$a_{31} = 2$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = 2$ ***e*** $b_3 = 6$

O novo sistema tem o seguinte formato:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ (a_{22} - a_{21} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}})y + (a_{23} - a_{21} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}})z = b_2 - a_{21} \cdot \frac{b_1}{a_{11}} \\ (a_{32} - a_{31} \cdot \frac{a_{12}}{a_{11}})y + (a_{33} - a_{31} \cdot \frac{a_{13}}{a_{11}})z = b_3 - a_{31} \cdot \frac{b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

Substituindo os valores dos coeficientes e dos termos independentes ficaremos

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ (1 - 1 \cdot \frac{1}{1})y + (-1 - 1 \cdot \frac{1}{1})z = 0 - 1 \cdot \frac{6}{1} \\ (-1 - 2 \cdot \frac{1}{1})y + (2 - 2 \cdot \frac{1}{1})z = 6 - 2 \cdot \frac{6}{1} \end{cases}$$

daí segue

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \qquad -2z = -6 \\ \qquad -3y = -6 \end{cases}$$

Assim, conhecendo os valores de $y = 2$ e $z = 3$, basta substituir na primeira equação do sistema para encontrar o valor de $x = 1$. Logo a solução do sistema é $S = \{(1,2,3)\}$

Exemplo 1.7.2. *seja o sistema linear 3×3*

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x+3y+2z=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ (-1-2\cdot\frac{1}{1})y+(1-2\cdot\frac{1}{1})z=4-2\cdot\frac{6}{1} \\ (3-3\cdot\frac{1}{1})y+(2-3\cdot\frac{1}{1})z=16-3\cdot\frac{6}{1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad -3y-z=-8 \\ \qquad\quad -z=-2 \end{cases}.$$

Daí, segue que $z = 2$, $-3y = -8+2 \Rightarrow y = 2$ e $x = 6-2-2 = 2$. Logo, $x = y = z = 2$ e portanto a solução do sistema é $S = \{(2,2,2)\}$.

Exemplo 1.7.3. *Dado o sistema linear* $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 3x+y-4z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$. *Vamos encontrar a sua solução. Assim,*

$$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 3x+y-4z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ (1-3\cdot\frac{1}{2})y+(-4-3\cdot\frac{1}{2})z=0-3\cdot\frac{4}{2} \\ (-1-1\cdot\frac{1}{2})y+(1-1\cdot\frac{1}{2})z=1-1\cdot\frac{4}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ -\frac{1}{2}y-\frac{11}{2}=-\frac{12}{2} \\ -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}z=-\frac{2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ \quad -y-11z=-12 \\ \quad -3y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ \quad -y-11z=-12 \\ (1-(-3)\cdot\frac{(-11)}{(-1)})z=-2-(-3)\cdot\frac{(-12)}{(-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ \quad -y-11z=-12 \\ \quad 34z=34 \end{cases}.$$

Assim, $z = 1$, substituindo em $-y-11z = -12 \Rightarrow -y = -12+11 = -1 \Rightarrow y = 1$. Agora substituindo o valor de y e z na equação $2x+y+z = 4$, temos $2x = 4-1-1 = 2$, daí segue que $x = 1$ e portanto o conjunto solução do sistema dado é $S = \{(1,1,1)\}$.

Exemplo 1.7.4. *Resolva o seguinte sistema de equações lineares:*

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + z + w = 2 \\ x + y + 2z + w = 3 \\ x + y + z + 2w = 4 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + z + w = 2 \\ x + y + 2z + w = 3 \\ x + y + z + 2w = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ (2 - 1 \cdot \frac{1}{2})y + (1 - 1 \cdot \frac{1}{2})z + (1 - 1 \cdot \frac{1}{2})w = 2 - 1 \cdot \frac{1}{2} \\ (1 - 1 \cdot \frac{1}{2})y + (2 - 1 \cdot \frac{1}{2})z + (1 - 1 \cdot \frac{1}{2})w = 3 - 1 \cdot \frac{1}{2} \\ (1 - 1 \cdot \frac{1}{2})y + (1 - 1 \cdot \frac{1}{2})z + (2 - 1 \cdot \frac{1}{2})w = 4 - 1 \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}w = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}w = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}w = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ 3y + z + w = 3 \\ y + 3z + w = 5 \\ y + z + 3w = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ 3y + z + w = 3 \\ (3 - 1 \cdot \frac{1}{3})z + (1 - 1 \cdot \frac{1}{3})w = 5 - 1 \cdot \frac{3}{3} \\ (1 - 1 \cdot \frac{1}{3})z + (3 - 1 \cdot \frac{1}{3})w = 7 - 1 \cdot \frac{3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ 3y + z + w = 3 \\ \frac{8}{3}z + \frac{2}{3}w = \frac{12}{3} \\ \frac{2}{3}z + \frac{8}{3}w = \frac{18}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ 3y + z + w = 3 \\ 8z + 2w = 12 \\ 2z + 8w = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ 3y + z + w = 3 \\ 8z + 2w = 12 \\ (8 - 2 \cdot \frac{2}{8})w = 18 - 2 \cdot \frac{12}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ \quad 3y + z + w = 3 \\ \qquad 8z + 2w = 12 \\ \qquad\quad 60w = 120 \end{cases}$$

Assim, $w = 2$; $8z = 12 - 4 \Rightarrow z = 1$; $3y = 3 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow y = 0$ *e* $2x = 1 - 0 - 1 - 2 \Rightarrow x = -1$. *Logo o conjunto solução do sistema dado é* $S = \{(-1, 0, 1, 2)\}$.

1.8 SISTEMAS LINEARES EQUIVALENTES

Definição 1.8.1. *Dois sistemas lineares* S_1 *e* S_2 *são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. Neste caso, escrevemos* $S_1 \sim S_2$.

Exemplo 1.8.1. *Considere os sistemas* $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ *e* $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Resolvendo os dois sistemas encontraremos o conjunto solução $S = \{(2, 3)\}$. *Como os sistemas apresentam o mesmo conjunto solução, pela definição* 1.8.1, *concluímos que são equivalentes.*

Exemplo 1.8.2. *Os sistemas* $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -x + 2y + 3z = 12 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$ *e* $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y + 4z = 18 \\ -2z = -6 \end{cases}$ *são equivalentes, pois apresentam o mesmo conjunto solução, a saber* $S = \{(1, 2, 3)\}$.

Denotando os sistemas seguintes por S_1 e S_2, temos as seguintes propriedades:

P_1: Trocando de posição as equações de um sistema, obtemos outro sistema equivalente.

Exemplo 1.8.3. $S_1 = \begin{cases} x + y + z = 3 \ \ (I) \\ 2x + 3y + z = 5 \ \ (II) \\ 3x + y + 2z = 5 \ \ (III) \end{cases}$ *e* $S_2 = \begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \ \ (II) \\ 3x + y + 2z = 5 \ \ (III) \\ x + y + z = 3 \ \ (I) \end{cases}$.

Logo S_1 *e* S_2 *são equivalentes, pois* $(x, y, z) = (0, 1, 2)$ *é solução em ambos sistemas.*

P_2: Multiplicando uma ou mais equação de um sistema por um número $k \in \mathbb{R}^*$, obtemos um sistema equivalente ao anterior.

Exemplo 1.8.4. $S_1 = \begin{cases} 3x + y = 4 \ \ (I) \\ x - y = 0 \ \ (II) \end{cases}$

Multiplicando a equação (II) por 2, temos: $S_2 = \begin{cases} 3x + y = 4 \ \ (II) \\ 2x - 2y = 0 \ \ (I) \end{cases}$.

Logo, S_1 e S_2, são equivalentes, pois $(x, y) = (1, 1)$ é solução em ambos sistemas.

P_3: Adicionando a uma das equações de um sistema o produto de outra equação deste mesmo sistema por um número $K \in \mathbb{R}^*$, obtemos um sistema equivalente ao anterior.

Exemplo 1.8.5. *Dado* $S_1 = \begin{cases} -x + y = -2 \ \ (I) \\ 2x - y = 8 \ \ (II) \end{cases}$

Multiplicando a equação (I) por 2 e somando este resultado membro a membro com a equação (II), encontramos $y = 4$. Colocando esta sentença no lugar da equação II, obtemos

$$S_2 = \begin{cases} -x + y = -2 \ \ (I) \\ \qquad\ y = 4 \ \ (II) \end{cases}$$

Note que S_1 e S_2, são equivalentes, pois $(x, y) = (6, 4)$ é solução em ambos sistemas.

Agora, observe os sistemas abaixo

$$S_1 = \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ \qquad\quad y = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{cases} -4x + 5y = -4 \\ \quad 3x - 3y = 6 \end{cases}$$

Esses dois sistemas tem a mesma solução, logo são equivalentes. Na sua opinão qual seria o mais simples de resolver?

Observe que o sistema S_1 forma um tipo de “escada", pois o número de variável diminuiu da primeira equação para segunda.

Pela diminuição da quantidade de variáveis em S_1 temos o valor de y. Agora, substituindo o valor de y na primeira equação encontraremos o valor de x, logo $S = \{(x, y) = (6, 4)\}$ será a solução do sistema. Esta solução é possível porque a segunda equação apresentou uma única variável e a primeira duas variáveis.

Por outo lado na segunda equação de S_2, y não está isolada, assim teríamos que fazer algumas operações elementares para torná-la igual a S_1.

Portanto, S_1 se torna mais simples de resolver.

Um sistema linear do tipo de S_1 é chamado de escalonado.

“Um sistema escalonado (isto é, um cuja matriz é escalonada) pode ser facilmente resolvido de baixo para cima, obtendo-se primeiro o valor da última incógnita, substuindo-a por esse valor na equação anterior, e assim por diante".(LIMA PAULO CEZAR PINTO CARVALHO, 2006, pag.118).

Exemplo 1.8.6. *As matrizes abaixo são escalonadas:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{e} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.8.7. *Sejam os seguintes sistemas*

$$S_1 = \begin{cases} x + 3y + 5z = 9 \\ 2y + 4z = 6 \\ 3z = 3 \end{cases}, \quad S_2 = \begin{cases} 2x + 4y + 6z = 12 \\ z = 1 \end{cases} \quad \textit{e} \quad S_3 = \begin{cases} x + 3y + 5z = 9 \\ y + 4z = 5 \\ 0x + 0y + 0z = 3 \end{cases},$$

As matrizes dos sistemas S_1, S_2 são A e A' e a matriz aumentada do sistema S_3 é M todas do *exemplo* $1.8.6$ em S_1 temos $z = 1$. Substituindo na segunda equação segue que $y = 1$ e em seguida substituindo os valores de $z = y = 1$ na primeira equação temos $x = 1$. Portanto $S = \{(x, y, z) = (1, 1, 1)\}$ é solução de S_1. Com relação ao sistema S_2 segue que $z = 1$. Substituindo na segunda equação temos $2x + 4y = 6.$ Logo, as soluções de S_2 são os pontos $(3 - 2y, y, 1)$ em $\mathbb{R}^3$, onde $y \in \mathbb{R}$ (infinitas soluções). Já no terceiro S_3 não existem números x, y e z que satisfaçam esta equação $0x + 0y + 0z = 3$. Portanto, não admite solução (impossível).

Exemplo 1.8.8. *Seja o sistema escalonado*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{24}x_4 = b_4 \end{cases}$$

De posse da última equação podemos encontrar o valor de x_4. Substituindo o valor de x_4 na penúltima equação encontraremos o valor de x_3 e assim por diante, segue que

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{34}x_4}{a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4)}{a_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4)}{a_{11}}$$

Generalizando para o caso de mais incógnitas, temos a seguinte fórmula:

$$x_i = \frac{b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}},$$

com $a_{ii} \neq 0$ *e* $i = 1, 2, ..., n.$

2 RELAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E TIPOS DE MATRIZES

Neste capítulo vamos apresentar os tipos de matrizes e defini-las através da relação existente entre os sistemas lineares e as matrizes. Vimos no primeiro capítulo que todo sistema linear pode ser representado na forma matricial $AX = B$, neste sentido os tipos de matrizes que queremos definir será a matriz A descrita no sistema da forma $AX = B$.

2.1 MATRIZ

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_{11} \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_{21} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_{m1} \end{cases}$$

conforme mencionado no capitulo 1, podemos representar o sistema na forma abaixo.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

A tabela representada de m linhas e n colunas por $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ formada pelos números reais a_{ij} com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ é o que chamaremos de **matriz**.

Esta matriz pode ser representada de forma simplificada por $[a_{ij}]_{m \times n}$. Diremos que esta matriz tem ordem m por n ($m \times n$)

Um elemento qualquer dessa matriz é representado pelo símbolo a_{ij} no qual o índice i refere-se à linha e o índice j refere-se a coluna em que se encontra tal elemento.

Assim:

a_{11} (Lê-se: a um um) é um elemento da primeira linha e primeira coluna;

a_{32} (Lê-se: a três dois) é um elemento da terceira linha e segunda coluna;

a_{mn} (Lê-se: a eme ene) é um elemento da m-ésima linha e n-ésima coluna.

Vamos convercionar que as linhas são numeradas de cima para baixo, e colunas, da esquerda para direita.

Exemplo 2.1.1. *Um certo aluno resolve fazer um cronograma de estudo para se preparar para o vestibular local e o Enem de acordo com a tabela abaixo.*

Tabela 1 – Cronograma de estudo

	seg	ter	qua	qui	sex	sáb	dom
Matemática	2	0	1	1	1	1	0
Português	2	2	1	2	1	1	0
Geografia	1	1	1	1	1	0	1
História	1	1	1	1	1	0	1
Física	0	1	1	2	1	1	0
Química	0	2	2	1	1	1	1
Biologia	1	1	1	0	1	0	1
Espanhol	1	0	0	0	1	0	1

A seguinte tabela retangular de oito filas horizontais e sete filas verticais pode descrever o número de horas que o estudante gastou estudando as oito disciplinas numa certa semana.

Suprimindo os títulos, ficamos com o seguinte agrupamento retangular de números com oito filas horizontais e sete filas verticais, que pode ser representado pela matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.1.2. $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 & \pi \\ \frac{3}{2} & \sqrt{10} & 6 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ *é uma matriz* 3×4.

Representamos usualmente uma matriz colocando seus elementos (números reais) entre parentêses ou entre colchetes.

2.2 MATRIZ LINHA

Considere o sistema abaixo:

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + ... + a_n.x_n = b_1 \sim \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \end{bmatrix}$$

toda matriz do tipo $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{bmatrix}$ é denominada de **matriz linha**.

Exemplo 2.2.1.

$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ *é uma matriz de 1 linha e 3 colunas.*

2.3 MATRIZ COLUNA

Dado o sistema linear$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 = b_2 \\ \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 = b_m \end{cases} \sim \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Toda matriz do tipo $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ é denominada **matriz coluna**.

Exemplo 2.3.1.

$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ *é uma matriz que possui* 4 *linhas e* 1 *coluna.*

2.4 MATRIZ QUADRADA

Seja o sistema linear com n equações e n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Toda matriz do tipo $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, cujo número de linhas é igual ao número de colunas é dita **matriz quadrada**.

Exemplo 2.4.1.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ -0,5 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.4.2.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.4.3.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Em uma matriz quadradada de ordem n, os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, formam a diagonal principal da matriz (são os elementos a_{ij}, com $i = j$).

Seja A uma matriz quadrada, então o **traço de** A, denotado por $tr(A)$, é definido pela soma dos elementos que pertencem a diagonal principal de A. Assim,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Exemplo 2.4.4.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, *então* $tr(A) = a_{11} + a_{22}$,

Exemplo 2.4.5.

Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, *então* $tr(B) = 1 + (-3) = -2$

A outra diagonal da matriz quadrada, são os elementos a_{ij}, tais que $i + j = n + 1$ formam à diagonal secundária.

Exemplo 2.4.6.

A matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, *é quadrada de ordem 3. Sua diagonal principal é* $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}$ *e sua diagonal secundária é* $\{a_{13}, a_{22}, a_{31}\}$.

Observação:

Se $i < j$, dizemos que a_{ij} está acima da diagonal principal.

Se $i > j$, dizemos que a_{ij} está abaixo da diagonal principal.

Se $i = j$, dizemos que a_{ij} está na diagonal principal.

2.5 MATRIZ TRIANGULAR

Para a matriz triangular dividiremos em dois casos:

• Primeiro caso:

Considere o sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1(n-1)}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ 0 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2(n-1)}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ 0 & + & 0 & + & \dots & + & a_{3(n-1)}x_{n-1} & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Toda matriz da forma quadrada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$ é dita **matriz triangular superior**.

Exemplo 2.5.1.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.5.2.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

- Segundo caso:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & 0 & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Toda matriz da forma quadrada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ é dita **matriz triangular inferior**.

Exemplo 2.5.3.

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.5.4.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Definição 2.5.1. *Uma matriz triangular é aquela em que os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos*

2.6 MATRIZ DIAGONAL

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_1 \\ 0 & + & a_{22}x_2 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_2 \\ 0 & + & 0 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & 0 & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \sim$$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Toda matriz quadrada da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ é dita **matriz diagonal**.

Exemplo 2.6.1.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.6.2.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.6.3.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$ *note que uma matriz é diagonal se e somente se é triangular superior e triangular inferior.*

2.7 MATRIZ IDENTIDADE

Dado o sistema linear a seguir,

$$\begin{cases} x_1 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_1 \\ 0 & + & x_2 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_2 \\ 0 & + & 0 & + & x_3 & + & \dots & + & 0 & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & x_n & = & b_n \end{cases} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Toda matriz quadrada do tipo $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$ onde todos elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero é chamada de

matriz identidade.

Exemplo 2.7.1.

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.7.2.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.7.3.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.7.4.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8 MATRIZ NULA

Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, esta matriz é nula se, e somente se, todos os seus elementos são iguais a zero ($a_{ij} = 0$). Denotaremos a matriz nula por $O_{m\times n,}$ e a matriz nula de ordem n por O_n.

Exemplo 2.8.1.

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.8.2.

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.8.3.

$$O_{4\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.8.4.

$$O_{4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 OPERAÇÕES COM MATRIZES E SUAS PROPRIEDADES

Neste capítulo as construções das definições são baseadas em (BOLDRINI, 1980), (DANTE, 2010), (ANTON HOWARD. RORRES, 2012), (PAIVA, 2009), (LIMA PAULO CEZAR PINTO CARVALHO, 2006), (STEINBRUCH ALFREDO, 1987) e (IEZZI, 2016).

As condições necessárias para que seja possível efetuar adição e subtração de matrizes são que elas devem ser de mesma ordem, ou seja, do mesmo tipo $m \times n$. Se essa condição não for satisfeita, a soma e diferença não estará definida.

As condições necessárias pera efetuar a multiplicação entre duas matrizes é que o número de coluna(s) da primeira matriz deve ser igual ao número de linha(s) da segunda matriz. Se essa condição não for satisfeita, o produto não estará definido.

As condições necessárias para que seja possível elevar uma matriz ao quadrado é que esta matriz seja quadrada.

3.1 ADIÇÃO DE MATRIZES

Sejam os sistemas abaixo equivalentes

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \text{ e } \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = & \vdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + ... + c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

Se somamos, membro a membro, as equações delas, obteremos:

$$\begin{cases} (a_{11} + c_{11})x_1 + (a_{12} + c_{12})x_2 + ... + (a_{1n} + c_{1n})x_n & = & k_1 \\ (a_{21} + c_{21})x_1 + (a_{22} + c_{22})x_2 + ... + (a_{2n} + c_{2n})x_n & = & k_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = & \vdots \\ (a_{m1} + c_{m1})x_1 + (a_{m2} + c_{m2})x_2 + ... + (a_{mn} + c_{mn})x_n = k_m \end{cases} \text{, onde } k_i = b_i + d_i$$

Podemos escrever o sistema acima numa forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} + c_{11} & a_{12} + c_{12} & ... & a_{1n} + c_{1n} \\ a_{21} + c_{21} & a_{22} + c_{22} & ... & a_{2n} + c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + c_{m1} & a_{m2} + c_{m2} & ... & a_{mn} + c_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$$

a matriz $\begin{bmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} & \dots & a_{1n}+c_{1n} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22} & \dots & a_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+c_{m1} & a_{m2}+c_{m2} & \dots & a_{mn}+c_{mn} \end{bmatrix}$ assim obtida denomina-se soma da

matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$.

Assim, dadas duas matrizes de mesma ordem, $A = [a_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$, denomina-se soma de A com C como sendo a matriz $A + C = [a_{ij} + c_{ij}]$ obtida adicionando-se os elementos correspondentes de A e C.

Exemplo 3.1.1.

Sejam as matrizes A e B de mesma ordem 3 x 2:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 7 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinaremos uma matriz $C = A + B$ talque $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 7 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 9 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz C assim obtida denomina-se soma da matriz A com a matriz B.

Exemplo 3.1.2.

As tabelas abaixo mostra as quantidades vendidas das motos X e Y em novembro e dezembro nas filiais M e N de uma concessionária.

Tabela 2 – Filial M

	X	Y
novembro	12	8
dezembro	20	16

Tabela 3 – Filial N

	X	Y
novembro	16	10
dezembro	10	4

Em novembro e dezembro qual é o total de vendas das motos X e Y dessa concessionária unindo as suas filiais?

Para responder esta pergunta, basta suprimimos os dados das tabelas e representarmos por matrizes. Assim, estamos diante de uma situação de adição de matrizes.

$$\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 10 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+16 & 8+10 \\ 20+10 & 16+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 18 \\ 30 & 20 \end{bmatrix}$$

Portanto, dessa concessionária foram vendidas: em novembro 28 *motos* X *e* 18 *motos* Y *em dezembro* 30 *motos* X *e* 20 *motos* Y.

Matriz oposta de uma matriz A

O conceito de oposto nas definições matemáticas está relacionado ao número que somado a outro resulta no elemento nulo (zero).

Definição 3.1.1. *A matriz oposta de* A, *que denotaremos por* $-A$, *é a matriz da mesma ordem de* A *tal que* $A + (-A)$ *é a matriz nula.*

Exemplo 3.1.3.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$, *então a matriz oposta de* A *é*

$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \cdots - a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \cdots - a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \cdots - a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} \cdots - a_{nn} \end{bmatrix}$, *pois*

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \cdots - a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \cdots - a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \cdots - a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} \cdots - a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.1.4.

Seja $B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, *então a matriz oposta de* B *é* $-B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, *pois*
$B + (-B) = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Propriedades da adição:

A adição de matrizes é definida para matrizes de mesmo tipo $m \times n$. Assim, uma matriz 2×3 só pode ser adicionada a outra matriz 2×3. Se uma matriz A é do tipo 2×3 e uma matriz B é do tipo 3×3, então não existe(não é definida) a soma $A + B$.

A adição de matrizes é uma operação que goza das seguintes propriedades:

1. **Comutativa:** $M + N = N + M$.
2. **Associativa:** $M + (N + P) = (M + N) + P$.
3. **Elemento neutro:** Existe uma matriz O (Matriz nula) de ordem $m \times n$ tal que $M + O = M$ (onde M tem ordem $m \times n$).
4. **Elemento simétrico:** Para toda matriz M de ordem $m \times n$, existe a matriz $-M$ de ordem $m \times n$, tal que $M + (-M) = O$.

Demonstração:

1. Se M e N são matrizes de mesma ordem, por definição,
$[m+n]_{ij} = \overbrace{m_{ij}}^{\in \mathbb{R}} + \overbrace{n_{ij}}^{\in \mathbb{R}} = n_{ij} + m_{ij} \overset{def.}{=} [n+m]_{ij}$. Então, $M + N = N + M$.
2. Se M, N e P são matrizes de mesma ordem, por definição
$[m + (n + p)]_{ij} = [m_{ij}] + [n + p]_{ij} = \overbrace{m_{ij}}^{\in \mathbb{R}} + \overbrace{[n_{ij}}^{\in \mathbb{R}} + \overbrace{p_{ij}]}^{\in \mathbb{R}} =$
$= \overbrace{[m+n]_{ij}}^{\in \mathbb{R}} + \overbrace{[p_{ij}]}^{\in \mathbb{R}} \overset{def.}{=} [(m+n)+p]_{ij}$. Então $M + (N + P) = (M + N) + P$.
3. De fato, $[m_{ij} + 0]_{ij} = [m]_{ij} + [0] \overset{def.}{=} \overbrace{m_{ij}}^{\in \mathbb{R}} + 0 = \overbrace{m_{ij}}^{\in \mathbb{R}}$. Então $M + O = A$.
4. De fato, $[(m + (-m))]_{ij} = [m_{ij}] + [-m_{ij}] \overset{def.}{=} \overbrace{m_{ij}}^{\in \mathbb{R}} - \overbrace{m_{ij}}^{\in \mathbb{R}} = 0$. Então $M + (-M) = O$.

3.1.1 Subtração de Matrizes

Definição 3.1.2. *Dadas duas matrizes, A e B de mesma ordem, denomina-se diferença entre A e B (denotando-se $A - B$), a soma de matriz A com a matriz oposta de B. Simbolicamente:*

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo 3.1.5.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 9 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 9 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 14 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3.2 MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

Multiplicando-se todos os membros das equações de um sistema linear por um número real $k \neq 0,$ o novo sistema obtido, será equivalente. Assim, seja o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{ccccccccc} ka_{11}x_1 & + & ka_{12}x_2 & + & ... & + & ka_{1n}x_n & = & kb_1 \\ ka_{21}x_1 & + & ka_{22}x_2 & + & ... & + & ka_{2n}x_n & = & kb_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ ka_{m1}x_1 & + & ka_{m2}x_2 & + & ... & + & ka_{mn}x_n & = & kb_m \end{array}\right.$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} & kb_1 \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} & kb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} & kb_m \end{bmatrix}$$

representa uma multiplicação de um número real por uma matriz.

Exemplo 3.2.1.

Se $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, *então* $-\frac{1}{3}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$

Propriedades:

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, a matriz nula denotada por $O = [0]_{m\times n}$ e números reais α e α_1, temos:

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
2. $(\alpha + \alpha_1)A = \alpha A + \alpha_1 A$.
3. $0 \cdot A = O$, isto é, se multiplicamos o número zero por qualquer matriz A, teremos a matriz nula.
4. $\alpha(\alpha_1 A) = (\alpha\alpha_1)A$.
5. $1 \cdot A = A$.

De fato, para mostrarmos, usaremos as propriedades de números reias.

1. Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, então $\alpha(A + B) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} =$ $= [\alpha(a_{ij} + b_{ij})]_{m\times n} = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}] = [\alpha a_{ij}]_{m\times n} + [\alpha b_{ij}] = \alpha[a_{ij}]_{m\times n} + \alpha[b_{ij}]_{m\times n} =$ $= \alpha A + \alpha B$. Logo, $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
2. Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, então $(\alpha + \alpha_1)A = (\alpha + \alpha_1)[a_{ij}]_{m\times n} = [(\alpha + \alpha_1)a_{ij}]_{m\times n} =$ $= [\alpha a_{ij} + \alpha_1 a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n} + [\alpha_1 a_{ij}]_{m\times n} = \alpha[a_{ij}]_{m\times n} + \alpha_1[a_{ij}]_{m\times n} = \alpha A + \alpha_1 A$. Logo, $(\alpha + \alpha_1)A = \alpha A + \alpha_1 A$.
3. Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $O = [o]_{m\times n}$, então $0 \cdot A = 0 \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [0 \cdot a_{ij}]_{m\times n} = [0]_{m\times n} = O$. Logo, $0 \cdot A = O$.
4. Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, então $\alpha(\alpha_1 A) = \alpha[\alpha_1 a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha(\alpha_1 a_{ij})]_{m\times n} = [(\alpha\alpha_1)a_{ij}]_{m\times n} =$ $= (\alpha\alpha_1)[a_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\alpha_1)A$. Logo, $\alpha(\alpha_1 A) = (\alpha\alpha_1)A$.
5. Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, então $1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [1 \cdot a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = A$. Logo, $1 \cdot A = A$.

3.3 MATRIZ TRANSPOSTA

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = b_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = b_{21} \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = b_{m1} \end{cases}$$

Podemos escrever o sistema numa forma matrical:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$$

Uma outra matriz que podemos associar ao sistema é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

que chamaremos *matriz ampliada* do sistema. Cada linha desta matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente no sistema.

Se considerarmos as linhas da matriz ampliada como coluna de uma nova matriz, temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

esta nova matriz é dita **matriz transposta** da matriz ampliada.

Exemplo 3.3.1.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ *a matriz transposta de* A *é* $A^t = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$

Exemplo 3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{bmatrix}$ vamos determinar a matriz transposta de A e B denotadas por A^t e B^t. Temos então, $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$. Note que $a_{12} = a_{21}$ e $B^t = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{bmatrix}$. Note que os elementos $b_{12} = b_{21}$; $b_{13} = b_{31}$; $b_{23} = b_{32}$, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i, j, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Conhecendo estes exemplos, vejamos a definição para matriz simétrica.

Definição 3.3.1. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n, tal que $A^t = A$. Dizemos que a matriz A é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Em uma matriz simétrica, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Se P e Q são matrizes simétricas de ordem n, então $P+Q$ é simétrica de ordem n.

Matriz antissimétrica

Definição 3.3.2. *Uma matriz A quadrada n, é dita Antissimétrica se $A^t = -A$, ou seja, A é antissimétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.*

Exemplo 3.3.3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\dfrac{1}{3} \\ -1 & 0 & 3 \\ \dfrac{1}{3} & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -a & b & c \\ a & 0 & d & -e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

Note que uma matriz antissimétrica tem, impreterivelmente todos os elementos pertencentes à diagonal principal igual a zero, pois $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0 \;\forall\; i \in \{1, \ldots, n\}$.

Em uma matriz antissimétrica, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

3.4 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Na seção adição de matrizes vimos que esta operação só é possível com os termos correspondentes e que, para isso, a mesma deveria ser de mesma ordem. Poderíamos nos indagar porque na multiplicação de duas matrizes isso não acontece?

Apresentaremos a relação de reconhecimento dessa operação, na condição como é definida.

Sobre a multiplicação de matrizes em Álgebra Linear podemos afirmar que:

> Em Álgebra Linear, as matrizes surgem principalmente associadas a transformações lineares e o produto de duas matrizes é naturalmente definido como matriz associada à composta de duas transformações lineares. Num estudo elementar, em nível do Ensino médio, convém motivar a multiplicações de matrizes mediante exemplos mais simples, (LIMA PAULO CEZAR PINTO CARVALHO, 2006, pag.131).

Suponhamos que a seguinte tabela forneça as quantidades das vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos 1 e 2.

	A	B	C
alimento 1	2	0	1
alimento 2	2	2	1

Se ingerirmos 3 unidades do alimento 1 e 3 do alimento 2, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina? Podemos representar o consumo dos alimentos 1 e 2 nesta ordem pela matriz consumo, daí

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$$

A operação que vai nos fornecer a quantidade ingerida de cada vitamina é o produto. Assim,

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Denotaremos a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$ por A e a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ por B.

Para determinar, por exemplo, o elemento que ocupa a primeira linha e primeira coluna da matriz AB, temos que multiplicar as entradas correspondente e somar esses produtos.

A entrada na linha 1 e coluna 1 de AB é calculada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 9$$

Para as demais entradas faremos

$$3 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6$$

$$3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6$$

Daí,

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Isto é, serão ingeridos 9 unidades de vitaminas A, 6 de B e 6 de C.

Em relação aos dados anteriores podemos pensar no seguinte problema:

Se o custo dos alimentos ricos em vitaminas depender somente do seu conteúdo vitamínico e soubermos que os preços por unidade de vitamina A, B e C são, respectivamente, $0,5$, $0,6$ e $0,7$ em reais, quanto pagaríamos pela porção de alimentos indicada anteriormente?

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,6 \\ 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 + 3,6 + 4,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,3 \end{bmatrix},$$

ou seja pagaríamos $R\$ \ 12,30$.

Diante do que foi exposto até aqui podemos esboçar uma definião de multiplicação de matrizes A e B.

Definição 3.4.1. *Dadas duas matrizes,* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *e* $B = [b_{jk}]_{n \times p}$. *A matriz produto* AB *é a matriz* $C = [a_{ik}]_{m \times p}$ *tal que*

$$C_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \ldots + a_{in}b_{nk} \text{ ou}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \text{ para todo } 1 \leqslant i \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant k \leqslant p.$$

Observações:

1. A definição garante a existência do produto AB unicamente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, pois A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$. Além disso, a nova matriz $C = AB$ terá o número de linhas de A e o número de colunas de B, pois C é do tipo $m \times p$.

2. Um elemento c_{ik} da matriz AB deve ser obtido da seguinte forma:

   (I) pega-se a linha i da matriz A:

   $$\boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{13} \quad \ldots \quad a_{in}} \ (n \text{ elementos})$$

   (II) pega-se a coluna k da matriz B:

$$\boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}} \text{ (n elementos)}$$

(III) situa-se a linha i da matriz A na posição vertical ao lado da coluna k de B:

$$\boxed{\begin{matrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{in} \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{matrix}}$$

(IV) Efetuam-se os n prudutos dos elementos que ficam lado a lado em (III):

$$\boxed{\begin{matrix} a_{i1} \cdot b_{1k} \\ a_{i2} \cdot b_{2k} \\ a_{13} \cdot b_{3k} \\ \vdots \\ a_{in} \cdot b_{nk} \end{matrix}}$$

(V) adicionam-se esses n produtos, obtendo $c_{ik.}$

Propriedades: Multiplicação de matrizes.

A multiplicação de matrizes satisfazem as seguintes propriedades desde que sejam possíveis, assim:

1. $(MN)P = M(NP)$ (Associativa).

2. $P(M + N) = PM + PN$ (Distributiva à esquerda em relação a adição).

3. $(M + N)P = MP + NP$ (Distributiva à direita em relação a adição).

4. $(\alpha M)N = M(\alpha N) = \alpha(MN),$ para todo α real.

5. $MI = IM = M$ (Existência do elemento identidade).

De fato,

1. Sejam as matrizes $M = [m_{ij}]_{m\times n}$, $N = [n_{jk}]_{n\times p}$ e $P = [p_{kl}]_{p\times r}$.

Fazendo $Q = MN = [q_{ik}]_{m\times p}$, $R = (MN)P = [r_{il}]_{m\times r}$ e $S = (NP) = [s_{jl}]_{n\times r}$, temos:

$$\begin{aligned} r_{il} &= \sum_{k=1}^{p}(q_{ik}\cdot p_{kl}) = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot n_{jk})\cdot p_{kl} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot n_{jk}\cdot p_{kl}) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot(\sum_{k=1}^{p}(n_{jk}\cdot p_{kl}) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot s_{jl} \end{aligned}$$

então, $(MN)P = M(NP)$.

2. Dadas as matrizes $M = [m_{ij}]_{m\times n}$, $N = [n_{ij}]_{m\times n}$, e $P = [p_{ki}]_{p\times m}$.

   Fazendo $Q = P(M+N) = [q_{ik}]_{p\times m}$, temos

$$\begin{aligned} q_{ik} &= \sum_{i=1}^{n} p_{ki}\cdot(m_{ij}+n_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}(p_{ki}\cdot m_{ij} + p_{ki}\cdot n_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_{ki}\cdot m_{ij} + \sum_{i=1}^{n} p_{ki}\cdot n_{ij} \end{aligned}$$

   então $P(M+N) = PM + PN$.

3. Dadas as matrizes $M = [m_{ij}]_{m\times n}$, $N = [n_{ij}]_{m\times n}$, e $P = [p_{jk}]_{n\times p}$.

   Fazendo $Q = (M+N)P = [q_{ik}]_{m\times p}$, temos

$$\begin{aligned} q_{ik} &= \sum_{j=1}^{n}(m_{ij}+n_{ij})\cdot p_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(m_{ij}\cdot p_{jk} + n_{ij}\cdot p_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot p_{jk} + \sum_{j=1}^{n} n_{ij}\cdot p_{jk} \end{aligned}$$

   então, $(M+N)P = MP + NP$.

4. Sejam α qualquer número e as matrizes $M = [m_{ij}]_{m\times n}$ e $N = [n_{jk}]_{n\times p}$.

   Fazendo $P = \alpha M = [p_{ij}]_{m\times n}$, $Q = \alpha N = [q_{jk}]_{n\times p}$ e $R = MN = [r_{ik}]_{m\times p}$, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\cdot n_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(\alpha\cdot m_{ij})\cdot n_{jk} = \alpha\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot n_{jk}$$
$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot q_{jk} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot(\alpha\cdot n_{jk}) = \alpha\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\cdot n_{jk}$$

   então, $(\alpha M)N = M(\alpha N) = \alpha(MN)$.

5. Sejam $M = [m_{ij}]_{m\times n}$, I_n a matriz identidade de ordem n e I_m a matriz identidade de ordem m.

   Fazendo $MI_n = N = [n_{ij}]_{m\times n}$, temos:

   $n_{ij} = m_{i1}\cdot 0 + m_{i2}\cdot 0 + m_{i3}\cdot 0 + \ldots + m_{ij}\cdot 1 + \ldots + m_{in}\cdot 0 = m_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n.$

   Fazendo $I_m A = P = [p_{ij}]_{m\times n}$, temos:

   $p_{ij} = 0\cdot m_{i1} + 0\cdot m_{i2} + 0\cdot m_{i3} + \ldots + 1\cdot m_{ij} + \ldots + 0\cdot m_{in} = m_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leqslant n.$ Então, $MI_n = I_m M = M.$

Observe que:

1. A multiplicação de matriz **não é comutativa**, ou seja, as matrizes MN e NM não são obrigatoriamente iguais. Há, portanto, matrizes M e N tais que $MN \neq NM$.

   Exemplo 3.4.1.

   Sejam as matrizes $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Fazendo $MN = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   $NM = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Portanto, $MN \neq NM$.

   No entanto, tomando $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   Fazendo:

   $MP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

   $PM = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

   Portanto, $MP = PM$

2. Na multiplicação de matrizes, não vale a **lei do anulamento do produto**, isto é, o produto de duas matrizes pode ser uma matriz nula, mesmo que ambas sejam matrizes não nulas. Há, portanto, matrizes M e N tais que $M \neq O$, $N \neq O$ e $MN = O$.

Exemplo 3.4.2.

Sejam as matrizes $M = \begin{bmatrix} m & m \\ m & m \end{bmatrix}$ *e* $N = \begin{bmatrix} m & m \\ -m & -m \end{bmatrix}$*, com* $m \neq 0$*, temos:*

$$MN = \begin{bmatrix} m & m \\ m & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & m \\ -m & -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 - m^2 & m^2 - m^2 \\ m^2 - m^2 & m^2 - m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $MN = O$ *com* $M, N \neq O$.

3. Na multiplicação de matrizes, não vale a lei do **cancelamento**, isto é, na igualdade $MN = MP$, não se pode cancelar M e finalizar que $N = P$. Há, portanto, matrizes M, N e P tais que $MN = MP$ e $N \neq P$.

Exemplo 3.4.3.

Sejam as matrizes $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$*,* $N = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$*, temos:*

$$\begin{aligned} MN &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+8+0 & 8+8+0 & 12-8+0 \\ 4+4+0 & 8+4+0 & 12-4+0 \\ -4+16+0 & -8+16+0 & -12-16+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 16 & 4 \\ 8 & 12 & 8 \\ 12 & 8 & -28 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MP &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+8+0 & 8+8+0 & 12-8+0 \\ 4+4+0 & 8+4+0 & 12-4+0 \\ -4+16+0 & -8+16+0 & -12-16+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 16 & 4 \\ 8 & 12 & 8 \\ 12 & 8 & -28 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, $MN = MP$*, ainda que* $N \neq P$.

Observação:

Se $M_{m \times n}$ tem uma linha nula, então $(MN)_{m \times p}$ também tem uma linha nula, para qualquer matriz $N_{n \times p}$.

Definido o produto de matrizes, podemos definir a potência da maneira comum, isto é, dados uma matriz quadrada $M = [m_{ij}]_{n\times n}$ e $p \in \mathbb{N}$, com $p \geqslant 2$.

$$M^0 = I, \text{ sendo } M \neq O,\ M^1 = M \text{ e } M^p = \underbrace{M \cdot M \cdot M \cdot M \cdot \ldots \cdot M}_{p\ fatores}.$$

Propriedades da matriz transposta:

A matriz transposta goza das seguintes propriedades:

1. $(M^t)^t = M$ (A transposta de uma matriz transposta é a matriz original).
2. $(M + N)^t = M^t + N^t$ (A transposta da soma de duas matrizes é igual a soma das transpostas de cada uma das matrizes).
3. $(\alpha M)^t = \alpha \cdot M^t$ (A transposta do produto de uma escalar α por uma matriz é igual ao produto desse escalar pela transposta da matriz).
4. $(MN)^t = N^t \cdot M^t$ (A transposta do produto de duas matrizes é igual ao produto das transpostas de cada uma das matrizes, em ordem inversa).

De fato,

1. Seja $M = [m_{ij}]_{m\times n}$. Então $M^t = [m_{ji}]_{n\times m}$, logo $(M^t)^t = ([m_{ji}]_{n\times m})^t = [m_{ij}]_{m\times n}$. Portanto, $(M^t)^t = M$.
2. Dadas as matrizes $M = [m_{ij}]_{m\times n}$ e $N = [n_{ij}]_{m\times n}$. Então $(M + N)^t =$ $= [m_{ji} + n_{ji}]_{n\times m} = [m_{ji}]_{n\times m} + [n_{ji}]_{n\times m} = M^t + N^t$. Portanto, $(M+N)^t = M^t + N^t$.
3. Dada a matriz $M = [m_{ij}]_{m\times n}$ e uma escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, $(\alpha M)^t = [\alpha m_{ji}]_{n\times m} =$ $= \alpha[m_{ji}]_{n\times m} = \alpha M^t$. Portanto, $(\alpha M)^t = \alpha \cdot M^t$.
4. Dadas as matrizes $M = [m_{ij}]_{m\times n}$, $N = [n_{jk}]_{n\times p}$. Então, $(MN) = P = [p_{ik}]_{m\times p}$, com $p_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij} \cdot n_{jk}$, para todo $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant p$, e $N^t \cdot M^t = [q_{ki}]_{p\times m}$, com $q_{ki} = \sum\limits_{j=1}^{n} n_{jk} \cdot m_{ji}$, para todo $1 \leqslant i \leqslant p$ e $1 \leqslant j \leqslant m$. Como $(MN)^t = [r_{ij}]_{p\times m}$ onde, para todo $1 \leqslant i \leqslant p$ e $1 \leqslant j \leqslant m$,

   $$r_{ij} = p_{ki},$$

   segue que

   $r_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} n'_{kj} \cdot m'_{ji} = \sum\limits_{j=1}^{n} n_{jk} \cdot m_{ji} = q_{ki}$, para todo $1 \leqslant i \leqslant p$ e $1 \leqslant j \leqslant m$. Portanto, $(MN)^t = N^t \cdot M^t$.

3.5 OUTROS TIPOS DE MATRIZES

Matriz nilpotente

Definição 3.5.1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n e O a matriz nula de mesma ordem, dizemos que A é nilpotente, se existir um certo $n \geqslant 1$ ($n \in \mathbb{N}$) tal que $A^n = 0$.*

Exemplo 3.5.1. *A matriz dada por $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz nilpotente, pois $A^2 =$*

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

Matriz idempotente

Definição 3.5.2. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n, dizemos que a matriz A é idempotente se, e somente se, $A \cdot A = A$, ou seja, é a matriz que ao ser multiplica por si mesma, resulta em si mesma.*

Exemplo 3.5.2. *A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ é idempotente, pois*

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ -2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) & -2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2 & -1 + 2 \\ 2 - 4 & -2 + 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

Matriz ortogonal

Definição 3.5.3. *Uma matriz quadrada é dita ortogonal, quando sua matriz inversa é igual a sua transposta, isto é,*

$$A^{-1} = A^t$$

multiplicando $A^{-1} = A^t$ por A à esquerda de cada membro, temos:

$$AA^{-1} = AA^t \Rightarrow AA^t = I_n$$

Logo $AA^t = I_n$ é a condição necessária para a matriz A ser ortogonal.

Exemplo 3.5.3.

A matriz $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{-\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ *é ortogonal, pois*

$$
\begin{aligned}
M \cdot M^t &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{-\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-\sqrt{15}}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} \cdot (\frac{-\sqrt{15}}{4}) + \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{4} \\ \frac{-\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{-\sqrt{15}}{4} \cdot (\frac{-\sqrt{15}}{4}) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{16} + \frac{15}{16} & \frac{-\sqrt{15}}{16} + \frac{\sqrt{15}}{16} \\ \frac{-\sqrt{15}}{16} + \frac{\sqrt{15}}{16} & \frac{15}{16} + \frac{1}{16} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{16}{16} & \frac{0}{16} \\ \frac{0}{16} & \frac{16}{16} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4 DETERMINANTES E SUAS PROPRIEDADES

Neste capítulo apresentaremos o estudo sobre determinantes e suas propriedades baseado em (COELHO FLAVIO ULHOA. LORENÇO, 2010), (IEZZI GELSON, 1983), (BOLDRINI, 1980), (MACHADO, 1986), (HEFEZ ABRAMO. FERNANDEZ, 2012), (DANTE, 2010) e (CALLIOLI CARLOS A. DOMINGOS, 1993).

No capítulo 1 seções 1.4 e 1.8 fizemos um estudo na resolução de sistemas de 2 equações com 2 incógnitas e de sistemas de 3 equações com 3 incógnitas onde aparecem a idéia de matriz e do determinante associado a matriz quadrada 2×2 e 3×3. Diante disto, percebemos que toda matriz quadrada tem, associado a ela, um número chamado determinante, sendo obtido por meio de operações que envolvam todos os elementos da matriz. Vale ressaltar que não há determinante de matriz que não seja quadrada.

4.1 DETERMINANTE DE MATRIZ QUADRADA DE ORDEM 1

Sejam um sistema linear do tipo $a_{11}x = b_1$. Passando para forma matricial $AX = B$, temos $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} b_{11} \end{bmatrix}$.

A solução da equação $a_{11}x = b_1$ ficará definida se o valor de $a_{11} \neq 0$. Assim $x = \frac{b_1}{a_{11}}$.

Perceba que só fica determinado a solução do sistema linear através do determinante da matriz A, isto é, o elemento a_{11}. Logo, o determinante de uma matriz de ordem 1 é o único elemento desta matriz.

Seja a matriz A de ordem 1, indicamos por $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$. Por definição, o determinante de A é o número a_{11}. Indicamos assim $detA = a_{11}$.

4.2 DETERMINANTE DE MATRIZ QUADRADA DE ORDEM 2

Para definirmos o determinante da matriz quadrada de ordem 2 usaremos abordagem feita na seção 1.3 no capítulo 1 onde consideramos a solução do sistema $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$ em que

$$x = \frac{pd - bq}{ad - bc} \quad e \quad y = \frac{aq - cp}{ad - bc}.$$

Os valores de x e y estarão bem definidos se $ad - bc$ for diferente de zero.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem $2,$ o determinante da matriz A será dado por $detA = ad - bc.$

4.3 DETERMINANTE DE MATRIZ QUADRADA DE ORDEM 3

Considerando o sistema da seção 1.7 no capítulo 1

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = k_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = k_3 \end{cases}.$$

Conhecido o valor de

$$y = \frac{a_{11}k_2a_{33} + k_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}k_3 - a_{13}k_2a_{31} - a_{11}a_{23}k_3 - k_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}},$$

$$z = \frac{a_{11}a_{22}k_3 + a_{12}k_2a_{31} + k_1a_{21}a_{32} - k_1a_{22}a_{31} - a_{11}k_2a_{32} - a_{12}a_{21}k_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

e

$$x = \frac{k_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}k_3 + a_{13}k_2a_{32} - a_{13}a_{22}k_3 - k_1a_{23}a_{32} - a_{12}k_2a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$$

A solução do sistema linear será bem definida dependendo do valor de

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Defeni-se o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ por

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Para calcularmos o determinante de uma matriz quadrada de ordem $3,$ podemos utilizar de maneira prática, o seguinte dispositivo:

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$detA = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Podemos memorizar esta definição da seguinte maneira:

- Repetimos as duas primeiras colunas da matriz à direita da terceira e efetuamos as seis multiplicações;
- Os produtos obtidos na direção da diagonal principal permanecem com o mesmo sinal;
- Os produtos obtidos na direção da diagonal secundária mudam de sinal;
- O determinante é a soma dos valores assim obtidos.

Este dispositivo prático é conhecido como *regra de Sarrus* para o cáculo de determinate de ordem 3.

Exemplo 4.3.1.
Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. *Determine o determinante de A.*

$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ - & - & - & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} detA &= -1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 5 \\ &= -5 + 4 - 3 = -4 \end{aligned}$$

4.4 MENOR COMPLEMENTAR E COMPLEMENTO ALGÉBRICO

Definição 4.4.1. *Consideremos uma matriz quadrada A de ordem $n \geqslant 2$ da forma*

$$A_{nn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Chamaremos menor complementar de A relativo ao elemento a_{ij}, denotado por D_{ij}, como sendo o determinante da matriz quadrada obtida de A pela retirada da linha

i e da coluna j. O menor complementar D_{ij} é um número obtido como:

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n-1} & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \dots & a_{i+1\,n-1} & a_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & a_{n-1\,j-1} & a_{n-1\,j+1} & \dots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo 4.4.1.

Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, *calculemos* D_{12}, D_{22} *e* D_{32}.

$D_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$, $D_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$ *e* $D_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$

Exemplo 4.4.2.

Seja $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$, *calculemos* D_{12} *e* D_{21}.

$D_{12} = \begin{vmatrix} -7 \end{vmatrix} = -7$ *e* $D_{21} = \begin{vmatrix} -3 \end{vmatrix} = -3.$

Definição 4.4.2. *Consideremos uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem $n \geqslant 2$; seja a_{ij} um elemento de A. Chamaremos complemento algébrico do elemento a_{ij} (ou cofator de a_{ij} da matriz A), e indicamos por A_{ij}, como sendo o número $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, em que D_{ij} é o menor complementar do elemento a_{ij} na matriz A.*

Exemplo 4.4.3.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, *calcularemos* A_{12}, A_{21} *e* A_{33}.

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & ,4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 24$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -14$ *e*

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11.$

4.5 MATRIZ DOS COFATORES

Definição 4.5.1. *A matriz dos cofatores da matriz quadrada de A de ordem n, indicamos por $cof(A)$, é a matriz obtida pela substituição de cada elemento a_{ij} de A pelo seu respectivo cofator A_{ij}.*

Exemplo 4.5.1.
Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\left|2\right| = 2$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\left|-3\right| = 3$, $A_{21} = (-1)^{2+1}\left|4\right| = -4$ *e* $A_{22} = (-1)^{2+2}\left|-1\right| = -1$

a matriz dos cofatores de A é:

$$cof(A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.5.2.

Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Calculando

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5;\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 10;\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2;\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4;\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1;\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6;\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

então a matriz dos cofatores de A é:

$$cof(A) = \begin{bmatrix} -5 & 10 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

4.6 DETERMINANTE DE MATRIZ DE ORDEM $n \times n$

Já vimos até aqui uma regra (definição) para calcular determinantes de matriz quadrada de orden $n \leqslant 3$. Vamos agora, com ajuda do conceito do cofator (complemento algébrico) dar a definição de determinante, válida para qualquer matriz de ordem n. Assim, segundo esta definição, utilizando os determinantes de primeira ordem podemos calcular os de segunda ordem, utilizando os de segunda ordem calcularmos os de terceira ordem e assim por diante. Significa, portanto, uma definição por recorrência: para calcular um determinante de ordem n recorremos aos de ordem $n-1$.

A toda matriz quadrada A associamos um número chamado determinante de A, indicamos por $det\,A$, da seguinte forma:

$1ž$ Se $A = [a_{11}]$, então $det\,A = a_{11}$.

$2ž$ Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $n \geqslant 2$, então,

$$det\,A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}$$

onde A_{1j}, com $j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, representa o produto de $(-1)^{1+j}$ pelo determinante da matriz obtida eliminando em A a linha 1 e coluna j.

Também poderíamos calcular o determinante da seguinte regra:

$$det\,A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + \cdots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot A_{i1}$$

Portanto, para calcularmos um determinate de ordem $n \geqslant 2$, não precisamos necessariamente dos elementos da primeira linha (ou da primeira coluna) e seus cofatores, qualquer outra linha (ou coluna) com seus cofatores permitem seu cálculo.

Exemplo 4.6.1.

Calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, *aplicando a definição por recorrência.*

Temos $det\,A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. *Então,*

$$\begin{aligned} det\,A &= 9 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 9 \cdot 1 \cdot 40 + 7 \cdot (-1) \cdot 18 + 5 \cdot 1 \cdot (-5) \\ &= 360 - 126 - 25 = 209 \end{aligned}$$

Exemplo 4.6.2.

Calcular o determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

temos

$$\begin{aligned} detA &= \sum_{i=1}^{3} a_{i1} \cdot A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot 1 \cdot (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21} \cdot (-1) \cdot (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31} \cdot 1 \cdot (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{13} \cdot a_{22} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

4.7 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAPLACE

Na definição por recorrência do determinante de uma matriz A de ordem n na seção anterior estabeleceu-se que $det\,A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}$ em que o determinante está desenvolvido segundo os elemento da primeira linha. Verifica-se, entretanto, que o determinante pode ser desenvolvido segundo os elementos de qualquer linha (ou coluna). Assim,

1. Se escolhermos a linha i da matriz A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então

$$detA = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

2. Se escolhermos a coluna j da matriz A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então

$$detA = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz A ordem $n \geqslant 2$ é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Exemplo 4.7.1.

Calcular o determinante de $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 8 & 10 & 6 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vamos desenvolver $\det A$ *inicialmente pela primeira coluna, que possui quatro zeros:*

$$\begin{aligned} det\,A &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41} + a_{51} \cdot A_{51} \\ &= 5 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} \\ &= 5 \cdot A_{11} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 8 & 10 & 6 \\ 3 & 7 & 0 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot 1 \cdot (a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43}) \\ &= 5 \cdot 1 \cdot (10 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43}) \\ &= 5 \cdot 1 \cdot 10 \cdot A_{13} = 50 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & -6 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 50 \cdot (a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}) \\
&= 50 \cdot (5 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33}) = 50 \cdot 5 \cdot A_{13} \\
&= 250 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 250 \cdot (-16 + 36) = 250 \cdot 20 = 5000
\end{aligned}$$

4.8 PROPRIEDADES BÁSICAS DO DETERMINANTE

A definição de determinante e o teorema de Laplace permitem-nos o cálculo de qualquer determinante, porém seu desenvolvimento as vezes pode ser muito trabalhoso dependendo da matriz considerada. Com o próposito de procurar diminuir este trabalho enunciaremos propriedades básicas do determinante.

Chamaremos de fila(s) a(s) linha(s) ou coluna(s). Vejamos:

1. Propriedade: determinante da matriz transposta

   Se A é a matriz de ordem n e A^t sua transposta, então $det\, A = det\, A^t$.

   Demonstração

   Usando o princípio da indução finita, temos

   (a) para $n = 1$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow detA = a_{11}$ e $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow detA = a_{11}$. Assim, segue que $detA = a_{11} = detA^t$.

   Acabamos de verificar, a validade da propriedade para $n = 1$.

   (b) suponha que, para matriz de ordem $(n-1)$ a propriedade seja válida. Vamos provar que ela também será válida para matriz de ordem n. Temos

   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } A^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

   onde $a_{ij} = b_{ji}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

   $det\, A = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + \dots + a_{2n} \cdot A_{2n}$ (segunda linha)

   $det\, A^t = b_{12} \cdot A'_{12} + b_{22} \cdot A'_{22} + b_{32} \cdot A'_{32} + \dots + b_{n2} \cdot A'_{n2}$ (segunda coluna).

   Mas, por definição de matriz transposta , segue que

   $a_{21} = b_{12}$, $a_{22} = b_{22}$, $a_{23} = b_{32}$, $\dots$, $a_{2n} = b_{n2}$ e pela hipótese de indução, temos

   $A_{21} = A'_{12}$, $A_{22} = A'_{22}$, $A_{23} = A'_{32}$, $\dots$, $A_{2n} = A'_{n2}$.

   Logo $det\, A = det\, A^t$.

   Portanto, a propriedade é valida para matrizes de ordem n, para todo $n \geqslant 1$.

2. Propriedade: Fila de zeros

   Se todos os elementos de uma fila de um matriz A de ordem n foram iguais a zero, seu determinante será nulo, ou seja $det\, A = 0$

   Demonstração

   Suponhamos que a i-*ésima linha* de A tenha todos elementos iguais a zero, isto é

   $$a_{i1} = a_{i2} = a_{i3} = \ldots = a_{in} = 0.$$

   Calculando o determinante por esta fila, temos

   $$det\, A = 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + 0 \cdot A_{i3} + \ldots + 0 \cdot A_{in} = 0.$$

   Supondo que a j-*ésima coluna* de A tenha todos elementos iguais a zero, a demonstração seria análoga.

   Exemplo 4.8.1.

   Se $A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt[3]{6} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$, *então* $det\, A = 0.$

   Exemplo 4.8.2.

   Se $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -5 \\ -6 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *então* $det\, A = 0.$

3. Propriedade: Troca de filas paralelas

   Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) de uma matriz quadrada A, de ordem $n \geqslant 2$ obteremos uma nova matriz A' na qual seu determinante é o oposto do determinante da matriz anterior.

   Assim, tem-se $det\, A = -det\, A'$

   Demonstração

   Usando o princípio de indução finita.

   i) Para $n = 2$, temos:

   Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow det\, A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

   Trocando de posições as colunas, obtemos

$A' = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow det\,A = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -det\,A.$

Trocando de posições as linhas, obtemos:

$A' = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow detA = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -detA.$

Acabamos de verificar, assim, a validade da propriedade para $n = 2.$

ii) Agora, supondo que a propriedade seja válida para matrizes de ordem $(n-1),$ devemos mostrar que ela é válida para matrizes de ordem $n.$

Tomemos a coluna $j,$ admitindo que ela não seja nenhuma das duas que tenham sido trocadas de lugar. Calculando o $det\,A$ e $det\,A'$ por esta coluna, temos:

$$det\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \text{ e } detA' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A'_{ij}$$

Como cada cofator A'_{ij} é obtido de A_{ij} trocando de posição duas colunas e, por hipótese de indução, $D'_{ij} = -D'_{ij},$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\},$ segue que $A'_{ij} = -A_{ij},$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e portanto, $det\,A' = -det\,A.$

Se trocássemos de posição duas linhas, a demonstração seria análoga.

Exemplo 4.8.3.

$A = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -5 \\ 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -7 & -8 & -5 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

A matriz B foi obtida a partir de A, trocando a primeira e a segunda linhas.

$det\,A = 84 - 64 + 25 - 40 + 28 - 120 = -87.$

$det\,B = 120 + 40 - 28 + 64 - 25 - 84 = 87.$

4. Propriedade: filas (linhas ou colunas) paralelas iguais.

Se uma matriz A de ordem $n \geqslant 2$ tem os elementos correspondentes iguais em duas filas paralelas, seu determinante é igual a zero, ou seja, $det\,A = 0.$

Demonstração

Suponhamos que as linhas de índices i e k sejam formados por elementos respectivamente iguais, isto é, $a_{ij} = a_{kj},$ para todo $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$

De acordo com a propriedade 3, se trocarmos de posição estas duas linhas, obteremos uma nova matriz A' tal que $-det\,A = det\,A'$ (I).

Por outro lado, A = A' já que as filas paralelas trocadas são iguais.

Logo $det\, A = det\, A'$ (II)

De (I) e (II) concluímos que

$$det\, A = -det\, A \Rightarrow 2det\, A = 0 \Rightarrow det\, A = 0.$$

Analogamente se demonstra para o caso de duas colunas iguais.

Exemplo 4.8.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -6 & 2 & 6 & 2 \\ -3 & 5 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ *(2ª e 4ª colunas iguais).*

5. Propriedade: multiplicação de uma fila (linha ou coluna) por uma constante.

   Se multiplicamos uma fila qualquer da matriz A quadrada de ordem n por um número k, o determinate da nova matriz A' obtida será o produto de k pelo determinante de $A,$ isto é, $det\, A' = k \cdot det\, A$

   Demonstração

   Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e $A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

   percebemos que os cofatores dos elementos da i-*ésima linha* de A são os mesmos que os da i-*ésima linha* de A'.

   Calculando $det\, A$ e $det\, A'$ pela i-*ésima linha* temos

   $det\, A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}$ (I)

   $det\, A = k \cdot a_{i1} A \cdot_{i1} + k \cdot a_{i2} \cdot A_{i2} + k \cdot a_{i3} \cdot A_{i3} + \cdots + k \cdot a_{in} \cdot A_{in}$ (II)

   de (I) e (II) concluímos que $det\, A' = k \cdot det\, A$

   A demonstração seria análoga se tomássemos uma coluna de $A.$

   Exemplo 4.8.5.

$$\begin{vmatrix} 28 & -7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Exemplo 4.8.6.

Se $A = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 10 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 10 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, *então* $det\ A = 2 \cdot det\ B$ *ou* $det\ B = \dfrac{1}{2} \cdot det\ A.$

Exemplo 4.8.7.

$$k \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & -2k & 4k \\ 0 & -4 & -5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4k \\ 0 & -4 & -5k \\ 3 & 4 & 5k \end{vmatrix}, \text{ onde } k \in \mathbb{R}.$$

6. Propriedade: Teorema de Cauchy

A soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer de uma matriz A, ordenadamente, pelos cofatores dos elementos de uma fila paralela, é igual a zero.

Demonstração

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{t1} & a_{t2} & a_{t3} & \dots & a_{tn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{u1} & a_{u2} & a_{u3} & \dots & a_{un} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Substituindo em A a t-*ésima linha* pela u-*ésima*, obtemos a matriz

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{u1} & a_{u2} & a_{u3} & \cdots & a_{un} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{u1} & a_{u2} & a_{u3} & \cdots & a_{un} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \to linha\quad t \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Pela propriedade P_4 temos $det\ A' = 0.$

Calculando $det\ A'$ pela t-*ésima linha*,

$$det\, A' = a_{u1}A_{t1} + a_{u2}A_{t2} + a_{u3}A_{t3} + \ldots + a_{un}A_{tn} = 0.$$

Note que os cofatores dos elementos da t-*ésima linha* de $A,$ são os mesmos que os da t-*ésima linha* de A'.

A demonstração é análoga se tomarmos em A duas colunas.

Exemplo 4.8.8.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

Primeira linha de A*:* $a_{11} = 1,\ a_{12} = 3$ *e* $a_{13} = 4.$

Terceira linha de A*:* $a_{31} = 7,\ a_{32} = 6$ *e* $a_{33} = 5.$

Cofatores : $A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3, A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 11\ e\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9$

$a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot A_{33} = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot (-9) = 3 + 33 - 36 = 0.$

7. Propriedade: Adição de determinantes (ou decomposição de uma linha ou coluna)

   Se cada elemento de uma linha ou coluna de uma matriz é a soma de duas parcelas, então o determinante dessa matriz é a soma de dois outros, em cada um dos quais aquela linha ou coluna tem seus elementos substituídos por uma das parcelas.

   Seja A uma matriz de ordem n, onde os elementos da j-*ésima coluna* são tais que:

   $\begin{matrix} a_{1j} = b_{1j} + c_{1j} \\ a_{2j} = b_{2j} + c_{2j} \\ a_{3j} = b_{3j} + c_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} = b_{nj} + c_{nj} \end{matrix}$ isto é $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & (b_{1j} + c_{1j}) & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & (b_{2j} + c_{2j}) & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & (b_{3j} + c_{3j}) & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & (b_{nj} + c_{nj}) & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$

   então, teremos

$$det\, A = det\, A' + det\, A''$$

   onde A' é a matriz que se obtém de $A,$ substituindo-se os elementos a_{ij} da j-*ésima coluna*, pelos elementos b_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ e A'' é a matriz que se obtem de A, substituindo-se os elementos a_{ij} da j-*ésima coluna* pelos elementos c_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n)$. isto é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & (b_{1j}+c_{1j}) & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & (b_{2j}+c_{2j}) & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & (b_{3j}+c_{3j}) & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & (b_{nj}+c_{nj}) & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & c_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demonstração

Note que os cofatores dos elementos da j-*ésima coluna* de A são os mesmos que os da j-*ésima coluna* de A' e A''.

Calculando o determinante de A, pela j-*ésima coluna*, temos

$$\begin{aligned} det\,A &= (b_{1j}+c_{1j})A_{1j} + (b_{2j}+c_{2j})A_{2j} + (b_{3j}+c_{3j})A_{3j} + \ldots + (b_{nj}+c_{nj})A_{nj}. \\ det\,A &= \underbrace{(b_{1j}A_{1j} + b_{2j}A_{2j} + b_{3j}A_{3j} + \ldots b_{nj}A_{nj})}_{detA'} + \underbrace{(c_{1j}A_{ij} + c_{2j}A_{2j} + c_{3j}A_{3j} + \cdots + c_{nj}A_{nj})}_{detA''}. \\ det\,A &= det\,A' + det\,A''. \end{aligned}$$

Exemplo 4.8.9.

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

então $det\,A = 4,\ det\,B = 39$ *e* $det\,C = 43 = det\,A + det\,B$

Exemplo 4.8.10.

se $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} -1 & -3+(-1) \\ -2 & 0+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

então $det\,A = -6,\ det\,B = 3$ *e* $det\,C = -3 = detA + detB.$

Combinação linear de filas paralelas

Dada $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ondem n e tomemos p colunas (quaisquer) de índices $s_1, s_2, s_3, \dots, s_p$. Multipliquemos, respectivamente, estas p colunas pelos números $c_1, c_2, c_3, \dots, c_p$ e construamos as somas:

$$\begin{cases} \alpha_1 = c_1 \cdot a_{1s_1} + c_2 \cdot a_{1s_2} + \cdots + c_p \cdot a_{1s_p} \\ \alpha_2 = c_1 \cdot a_{2s_1} + c_2 \cdot a_{2s_2} + \cdots + c_p \cdot a_{2s_p} \\ \alpha_3 = c_1 \cdot a_{3s_1} + c_2 \cdot a_{3s_2} + \cdots + c_p \cdot a_{3s_p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n = c_1 \cdot a_{ns_1} + c_2 \cdot a_{ns_2} + \cdots + c_p \cdot a_{ns_p} \end{cases}$$

Diremos que o conjunto $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n\}$ é uma combinação linear das p colunas.

Se substituirmos a coluna de índices q, diferente das p colunas consideradas, pelos numéros:

$$a_{1_q} + \alpha_1,\ a_{2_q} + \alpha_2,\ \dots,\ a_{n_q} + \alpha_n$$

diremos que se adicionou à coluna de índices q, uma combinação linear das outras colunas.

Exemplo 4.8.11.

Vamos construir uma combinação linear da primeira e segunda colunas da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

usando os multiplicadores 3 *e* 5 *respectivamente:* $\begin{array}{c} 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21 \\ 3 \cdot 5 + 5 \cdot 8 = 55 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 28 \end{array}$

Vamos somar esta combinação linear à terceira coluna, obteremos a matriz

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 27 \\ 5 & 8 & 57 \\ 1 & 5 & 33 \end{bmatrix}$$

De forma análoga, definimos combinação linear de p *linhas e adição dessa combinação linear a uma outra linha diferente das consideradas.*

8. Propriedade: Teorema da combinação linear

   Se uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n tem uma linha (ou coluna) que é combinação linear de outras linhas (ou colunas), então seu determinante é nulo, ou seja, $det\, A = 0$.

Demonstração

Suponhamos que a q-*ésima coluna* seja combinação linear de p outras colunas, de índices $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_p$.

Desenvolvendo o determinante de A pela q-*ésima coluna*, temos

$$\begin{aligned}
det\, A &= \sum_{i=1}^{n} a_{iq} \cdot A_{iq} = \sum_{i=1}^{n} \; [c_1 \cdot a_{is_1} + c_2 \cdot a_{is_2} + \ldots + c_p \cdot a_{is_p}] \cdot A_{iq} \overset{p_7}{=} \\
&= c_1 \sum_{i=1}^{n} a_{is_1} \cdot A_{iq} + c_2 \sum_{i=1}^{n} a_{is_2} \cdot A_{iq} + \ldots + c_p \sum_{i=1}^{n} a_{is_p} \cdot A_{iq} \overset{p_6}{=} \\
&= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_p \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.8.12.

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 21 & 24 \end{vmatrix} = 0, \text{ pois } (3 \cdot L_1 + 2 \cdot L_2 = L_3).$$

9. Propriedade: Teorema de Jacobi

   O determinante de uma matriz quadrada não se altera se substuirmos uma de suas filas (linhas ou colunas) pela soma dela com um múltiplo da outra.

   Adicionando a uma fila de uma matriz A, de ordem n uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante não nula, obteremos uma nova matriz A', tal que $det\, A' = det\, A$.

   Demonstração

   Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3p} & \ldots & a_{3j} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   Adicionamos à j-*ésima coluna* à p-*ésima* multiplicada pela constante k, com $k \neq 0$, obtemos a matriz

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & \ldots & (a_{1j} + k \cdot a_{1p}) & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & \ldots & (a_{2j} + k \cdot a_{2p}) & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3p} & \ldots & (a_{3j} + k \cdot a_{3p}) & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} & \ldots & (a_{nj} + k \cdot a_{np}) & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

De acordo com P_7, segue que

$$\begin{aligned}
det\,A' &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1j} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & \dots & a_{2j} & \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3p} & \dots & a_{3j} & \dots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots & \dots & \cdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & \dots & a_{nj} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & k \cdot a_{1p} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & \dots & k \cdot a_{2p} & \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3p} & \dots & k \cdot a_{3p} & \dots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots & \dots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & \dots & k \cdot a_{np} & \dots a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1j} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & \dots & a_{2j} & \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3p} & \dots & a_{3j} & \dots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots & \dots & \cdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & \dots & a_{nj} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}}_{det\,A} \underbrace{+ k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1p} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & \dots & a_{2p} & \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3p} & \dots & a_{3p} & \dots a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots & \dots & \cdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & \dots & a_{np} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}}_{0\ por\ P_4} \\
&= det\,A + 0 = det\,A.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.8.13.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,A = -1$$

Multiplicando a primeira linha por 2 *e somando os resultados à segunda linha, obtemos:* $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow detB = -1,$ *ou seja,* $det\,A = det\,B.$

10. Propriedade: filas (linhas ou colunas) paralelas proporcionais

    Se uma matriz A quadrada de ordem $n \geqslant 2$ possui duas filas paralelas constituídas por elementos respectivamente proporcionais, seu determinante será nulo, isto é, $detA = 0.$

    Demonstração

    Suponhamos que as colunas de índíces j e q de A sejam constituídas por elementos proporcionais, ou seja,

$$a_{ij} = k \cdot a_{iq} \quad \forall\ i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Então

$$\begin{aligned} det\, A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & k\cdot a_{1q} & \ldots & a_{1q} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & k\cdot a_{2q} & \ldots & a_{2q} & \ldots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & k\cdot a_{nq} & \ldots & a_{nq} & \ldots & n_{1q} \end{vmatrix} \overset{p_5}{=} \\ &= k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1q} & \ldots & a_{1q} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2q} & \ldots & a_{2q} & \ldots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nq} & \ldots & a_{nq} & \ldots & n_{1q} \end{vmatrix} \overset{p_4}{=} 0. \end{aligned}$$

A demonstração seria análoga se tivéssemos duas linhas proporcionais.

Exemplo 4.8.14.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k\cdot a & k\cdot b & k\cdot c \end{bmatrix}$$

Calcule o determinante da matriz A.

Veja que a terceira linha da matriz A *é múltipla da primeira linha. Calcularemos o seu determinante.*

$$\begin{aligned} det\, A &= aekc + dkbc + kafb - ceka - fkba - kcdb \\ &= k(aec + dbc + afb - cea - fba - cdb) = 0. \end{aligned}$$

11. Propriedade: multiplicação de uma matriz quadrada por uma constante

Se uma matriz quadrada A de ordem n é multiplicada por um número real $k \neq 0,$ o seu determinante fica multiplicado por k^n, isto é

$$det\,(kA) = k^n \cdot det\, A$$

De fato, se $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ são as linhas ou colunas da matriz quadrada $A,$ tem-se:

$$\begin{aligned} det\,(k\cdot A) &= det\,(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n) \\ &= k^n \cdot det\,(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ &= k^n \cdot det\, A. \end{aligned}$$

Esta propriedade é decorrente da aplicação sucessiva da propriedade 5.

Exemplo 4.8.15.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow det\, A = -15 - 8 = -23,$$
$$3A = \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,(3A) = -135 - 72 = -207 = 3^2 \cdot (-23).$$

Logo $det\,(3A) = 3^2 \cdot det\, A.$

Exemplo 4.8.16.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow det\, B = 6 + 12 + 1 - 4 + 2 + 9 = 26,$$
$$5B = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 10 \\ 15 & 10 & -5 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,(5B) = 750 + 1500 + 125 - 500 + 250 + 1125 = 3250 =$$
$= 5^3 \cdot 26.$ *Logo* $det\,(5B) = 5^3 \cdot det\, B.$

12. Propriedade: Matriz triangular

    O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos que pertecem a diagonal principal.

    Demonstração:

    Seja a matriz triangular na qual $a_{ij} = 0,$ para $i > j$ (o caso $a_{ij} = 0$ para $i < j$ é análogo).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

    Aplicando sucessivamente o teorema de Laplace, através da primeira coluna, é consequente que

$$det\, A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Exemplo 4.8.17.

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) \cdot (-3) = -6.$$

Exemplo 4.8.18.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-6) = -72.$$

13. Propriedade: Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, e AB a matriz produto, então

$$det\,(A \cdot B) = (det\,A) \cdot (det\,B).$$

Exemplo 4.8.19.

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ *temos* $A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -11 & 11 \end{bmatrix}$, $det\,(A \cdot B) = 77 + 99 = 176$, $detA = -1 + 9 = 8$ *e* $detB = 10 + 12 = 22$. *Daí, segue que* $(det\,A) \cdot (det\,B) = 8 \cdot 22 = 176 = det\,(A \cdot B)$.

Consequência:

Decorre do teorema que $det\,(A^{-1}) = \dfrac{1}{det\,A}$.

De fato, se existe A^{-1}, então

$A \cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow det\,(A \cdot A^{-1}) = det\,I_n \Rightarrow det\,(A) \cdot det\,(A^{-1}) = 1 \Rightarrow det\,A \neq 0$ e $det\,(A^{-1}) = \dfrac{1}{det\,A}$.

4.9 MATRIZ DE VANDERMONDE

Definição 4.9.1. *Denominamos matriz de Vendermond, toda matriz de ordem* $n \geqslant 2$,

do tipo. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^3 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-2} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$.

Isto é, as colunas da matriz são formadas por potência de mesma base, com expoente inteiro, variando desde 0 *até* $n - 1$ *(os elementos de cada coluna formam uma progressão geométrica cujo primeiro termo é* 1*).*

Os elementos da segunda linha são chamados elementos característicos da matriz.

Indiquemos o determinante de uma matriz de Vandermonde por

$$V(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

O determinate $V(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é igual ao produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos característicos, com a condição de que, nas diferenças, o minuendo tenha índices maior que o subtraendo. Isto é

$$V(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (a_2-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}) = \prod_{i>j}(a_i-a_j)$$

com $i, j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$.

Exemplo 4.9.1.

Calcular o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 11 \\ 25 & 49 & 121 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 11 \\ 25 & 49 & 121 \end{vmatrix} = (7-5)\cdot(11-5)\cdot(11-7) = 2\cdot 6\cdot 4 = 48.$$

Exemplo 4.9.2.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 4 & 9 & 25 & 49 \\ 8 & 27 & -125 & 343 \end{vmatrix} &= (3-2)\cdot(-5-2)\cdot(7-2)\cdot(-5-3)\cdot(7-3)\cdot(7+5) \\ &= 1\cdot(-7)\cdot 5\cdot(-8)\cdot 4\cdot 12 = 13440. \end{aligned}$$

4.10 MATRIZES, SISTEMAS E DETERMINANTES

Qualquer sistema linear $n \times n$ pode ser escrito como um produto de matrizes.

Dado um sistema linear de n equações e n incógnitas,

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Lembrando a definição de produto de matrizes, notemos que o sistema S pode ser escrito da forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Denotando o determinante por $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ e $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, temos

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22}x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}x_2 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= x_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x_2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{zero} + \cdots + x_n \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1n} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{zero} \\
&= x_1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{D}
\end{aligned}$$

sendo $D \neq 0,$ de $D = x_1 \cdot D$ vem que $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$.

Analogamente podemos provar que $x_2 = \dfrac{D_2}{D}, ..., x_n = \dfrac{D_n}{D}$. Portanto, S tem uma única solução. A solução é $\{x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, ..., x_n = \dfrac{D_n}{D}\}$. Desde que $D \neq 0$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na construção desse trabalho, fizemos um estudo sobre sistemas lineares, matrizes e determinantes com um olhar diferente do que é visto no ensimo médio, onde lá leva em consideração o aprendizado das matrizes e determinantes como pré requisito para o estudo da solução de sistema lineares. Ressaltamos que o estudo dos mesmos constituem uma caso particular de iniciação à Álgebra Linear. Ao fazermos as demonstrações algébricas na resolução de sistemas lineares, nos deparamos a ligação existente entre as matrizes e o cálculo de determinantes. Procuramos trazer a teoria apresentadada de forma rigorosa, porém em liguagem compreensiva, clara e concisa.

No desenvolvimento desta dissertação procuramos seguir uma ordem lógica das definições, operações e propriedades de matrizes e determinantes condizentes com o ensino básico, além das operaçoes na resolução de sistemas lineares.

O resultado desse trabalho nos proporcionou algumas abordagens construtivas sobre o estudo de matrizes e determinante, a partir da resolução de sistemas lineares. Além de apresentar o estudo de matrizes e determinantes, conhecendo suas definições, exemplificações, operações, propriedades e demonstrações.

A expectativa da presente dissertação é mostrar uma abordagem construtiva do ensino de sistemas lineares e matrizes. Dividido em dois aspectos: construção dos conceitos de matrizes, tipos de matrizes e operações de matrizes a partir da solução do sistema linear, mostrando para o aluno que esses conceitos surgem naturamente, e por outro lado, a análise da solução do sistema linear se dar de forma construtiva a partir da solução da equação simples $ax = b$ em $\mathbb{R}$, sendo possível entender o conceito geral a apartir da solução da mesma.

REFERÊNCIAS

ANTON HOWARD. RORRES, C. ***Álgebra linear com aplicações***. 10.ed. ed. Dados eletrônicos: Porto Alegre, [Recurso eletrônico], 2012. v. 1. 784 p.

BOLDRINI, J. L. e. a. ***Álgebra Linear***. 2ª ed. ed. São Paulo: Harper and Row do Brasil, 1980. 372 p.

BOURBAKI, N. ***Elements of the history of mathematics***. 2. ed. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1989. 301 p.

CALLIOLI CARLOS A. DOMINGOS, H. H. C. R. C. F. ***Algebra linear e aplicações***. 6ª. ed. São Paulo: Editora Atual, 1993. 351 p.

COELHO FLAVIO ULHOA. LORENÇO, M. L. ***Um Curso de Álgebra Linear***. 2- ed. rev. e ampl., 2. ed. São Paulo: Editora da universidade de São Paulo, 2010. 272 p.

DANTE, L. R. ***Matemática: contexto e aplicações***. 2. ed. São Paulo: Ática, 2010. v. 2. 384 p.

EVES, H. ***Introdução à História da Matemática***. Campinas - SP: Editora da UNICAMP, 2004. 848 p.

HEFEZ ABRAMO. FERNANDEZ, C. d. S. ***Introdução à álgebra linear***. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 299 p.

IEZZI, G. a. ***Matemática: ciência e aplicações: ensino médio***. 9. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2016. v. 2. 288 p.

IEZZI GELSON, H. S. ***Fundamentos de matemática elementar: Sequências, matrizes, determinates e sistemas***. São Paulo: Atual, 1983. v. 4. 228 p.

LIMA PAULO CEZAR PINTO CARVALHO, E. W. A. C. M. E. L. ***A Matemática do Ensino Médio: Coleção do Professor de Matemática***. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 3. 249 p.

MACHADO, A. S. ***Matmética temas e metas***. São Paulo: Editora Atual, 1986. v. 3. 229 p.

PAIVA, M. ***Matemática Paiva***. 2. ed. São Paulo: Editora Ática, 2009. v. 2. 576 p.

PANTOJA LIGIA F. L. CAMPOS, N. F. S. C. S. R. R. C. **O Ensino de Sistemas Lineares através da conversão de registors de representações semióticas**. Canoas - RS, p. 5 – 12, 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1380/527>. Acesso em: 25 de junho de 2020.

STEINBRUCH ALFREDO, W. P. ***Álgebra linear***. 2ª. ed. São Paulo: Pearson Maron Books, 1987. 510 p.

STRANG, G. ***Álgebra Linear e suas aplicações***. 1ª. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2010. 456 p.