UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE CASTANHAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EDER ARAUJO DA SILVA

MÉTODOS ALTERNATIVOS DE CÁLCULOS NA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO: PARA ALÉM DOS ALGORITMOS USUAIS DA ARITMÉTICA

CASTANHAL
2021

EDER ARAUJO DA SILVA

MÉTODOS ALTERNATIVOS DE CÁLCULOS NA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO: PARA ALÉM DOS ALGORITMOS USUAIS DA ARITMÉTICA

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de pós-graduação em Matemática em Rede Nacional. Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Pará - Campus Castanhal.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Samuel Levi Freitas da Luz - Orientador
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida (Membro interno)
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Rozal (Membro interno)
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Manoel Silvino Batalha de Araújo (Membro externo)
Universidade Federal do Pará

CASTANHAL
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586m Silva, Eder Araujo da.
MÉTODOS ALTERNATIVOS DE CÁLCULOS NA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO: PARA ALÉM DOS ALGORITMOS USUAIS DA ARITMÉTICA / Eder Araujo da Silva. — 2021.
100 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Samuel Levi Freitas da Luz
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Castanhal, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Castanhal, 2021.

1. Métodos alternativos. 2. Multiplicação. 3. Divisão. 4. Dificuldades de aprendizagens. I. Título.

CDD 510

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao **Santo, bendito seja Ele**, que pela sua palavra tudo veio a existir e que permitiu que esse momento acontece, me livrando de todos os riscos das viagens constantes e cuidando de minha esposa nas ausências (e mesmo quando presente) durante sua gravidez e nascimento de nosso segundo filho.

À minha amada esposa, Maria Erilene da Silva Vieira Silva, pelo seu apoio, que foi indispensável para a chegada desse momento, pois mesmo enfrentado uma gravidez de risco e passando por situações difíceis, me deu forças para continuar nessa jornada.

Aos meus filhos, Danielly Vitória Vieira da Silva e Samuel Moshe Vieira da Silva, que me motivam a traçar metas e alcança os objetivos.

Aos meus pais, Rute Franco de Araujo e Eraclides Batista da Silva, pelo incentivo desde criança aos estudos, pelas palavras de estimulo e apoio em toda a jornada.

Aos amigos e companheiros de curso, onde formamos uma outra família com estímulos e apoios mútuos, não tinha como ser melhor.

A todos os professores do PROFMAT do Campus da UFPA de Castanhal, que contribuíram diretamente nessas vitórias – Disciplinas, viagens, ENA e Dissertação, representados pelo professor Dr. Arthur Almeida, que além de um professor exemplar foi um coordenador excepcional, orientando, aconselhando e procurando proporcionar um ambiente mais acolhedor possível.

Ao meu orientador, professor Dr. Samuel Levi, pela parceria, orientação e paciência, motivando nos momentos necessários.

Por fim, a todas as pessoas que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização desse sonho, como é o caso do Samuel, do guichê da Boa Esperança que muito apoiou nas diversas viagens durante os dois anos, à SEMED, e todas as pessoas envolvidas, de Parauapebas que permitiu a realização do curso durante vários dias letivos, aos familiares, amigos e colegas de trabalho das Escolas Carlos Henrique, Gonçalves Dias e Faruk, que me apoiaram e incentivaram nessa jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

EPÍGRAFE

"O supremo alicerce e pilar da sabedoria é a percepção de que há um primeiro Ser, sem princípio nem fim, que trouxe tudo à existência e continua a sustentá-la. Este Ser é D'us."

(Maimônides)

Resumo

Tendo em vista que, muitas vezes, quando o professor se depara com alunos nos anos finais do Ensino Fundamental ou no Ensino Médio com dificuldades em realizar as operações básicas, geralmente multiplicação e, mais gravemente, divisão, por motivos diversos, tende a repetir os conceitos e métodos usuais, sem uma reflexão se eles fazem ou não sentido aos alunos, dessa forma, pesquisa-se sobre o uso de métodos alternativos de cálculos na multiplicação e divisão, a fim de apresentar uma abordagem metodológica e prática como alternativa para os estudantes que não dominam os algoritmos usuais. Para tanto, é necessário traçar um perfil desses alunos com dificuldades e desenvolve uma proposta alternativa que vise reduzir ou eliminar tais dificuldades. Realiza-se, então, uma pesquisa bibliográfica sobre como é desenvolvido o ensino dessas operações e as possíveis causas das dificuldades, comparando com os resultados do questionário com indagações sobre a sua relação com a matemática e seu contexto social. De posse dos dados, é proporcionado aos alunos momentos que visem apresentar, desenvolver e aplicar os métodos alternativos para as operações de multiplicação e divisão e ao final, comparar os resultados obtidos dos testes aplicados antes e depois da intervenção. Diante disso, verifica-se que se obteve um avanço significativo em relação à multiplicação mas que o mesmo não ocorreu da forma esperado em relação à divisão e na resolução de problemas relacionados, possivelmente por fatores que não foram levadas em consideração na aplicação, o que impõe a constatação de que é possível amenizar, ou até mesmo eliminar, as dificuldades enfrentada pelos alunos em realizar as operações, principalmente a multiplicação, sem demandar um tempo demasiadamente longo e com estímulos adequados, a operação de divisão pode ser desmitificada como de difícil compreensão e passar a ser utilizada de forma natural no contexto escolar.

Palavras-chave: Métodos alternativos. Multiplicação. Divisão. Dificuldades de aprendizagens.

Abstract

Bearing in mind that, many times, when the teacher is faced with students in the final years of elementary school or high school with difficulties in performing basic operations, usually multiplication and, more seriously, division, for different reasons, tend to repeat the usual concepts and methods, without a reflection on whether they make sense to students or not, thus researching the use of alternative methods of calculations in multiplication and division, to present a methodological and practical approach as an alternative for students that don't master the usual algorithms. For that, it is necessary to draw a profile of these students with difficulties and develop an alternative proposal that aims to reduce or eliminate such difficulties. Then, bibliographic research is carried out on how the teaching of these operations is developed and the possible causes of the difficulties, comparing with the results of the questionnaire with inquiries about its relationship with mathematics and its social context. With the data in hand, students are provided with moments that aim to present, develop and apply alternative methods for multiplication and division operations and at the end, to compare the results obtained from the tests applied before and after the intervention. Given this, it appears that significant progress has been made about multiplication, but that the same has not occurred expectedly about the division and resolution of related problems, possibly due to factors that were not taken into account in the application, which imposes the realization that it is possible to alleviate, or even eliminate, the difficulties faced by students in carrying out operations, especially multiplication, without requiring too long a time and with adequate stimuli, the division operation can be demystified as difficult to understand and start to be used naturally in the school context.

Keywords: Alternative methods. Multiplication. Division. Learning Disabilities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Multiplicação. Andrini 1989. 29
Figura 2 – Divisão exata. Andrini, 1989. 30
Figura 3 – Divisão não-exata. Andrini, 1989. 30
Figura 4 – Ideias da Multiplicação. Andrini e Vasconcellos, 2015. 31
Figura 5 – Conceitos da multiplicação. Andrini e Vasconcelos, 2015. 31
Figura 6 – Algoritmo da multiplicação. Andrini e Vasconcellos, 2015. 32
Figura 7 – Divisão. Andrini e Vasconcellos, 2015. 32
Figura 8 – Execução do algoritmo usual da divisão. Andrini e Vasconcellos, 2015. ..33
Figura 9 – Divisão por subtrações sucessivas. Andrini e Vasconcellos, 2015. 34
Figura 10 – Multiplicação. Dante, 2018. 35
Figura 11 – Divisão, primeira ideia associada. Dante, 2018. 35
Figura 12 – Divisão, segunda ideia associada. Dante, 2018. 36
Figura 13 – Divisão: Algoritmo das estimativas, Dante. 36
Figura 14 – Explicações sobre a causa das Dificuldades de Aprendizagens. 40
Figura 15 – Valor numérico dos hieróglifos 45
Figura 16 – Comparação entre os algarismos e suas representações. 56
Figura 17 – Método chinês, disposição das linhas horizontais e verticais 57
Figura 18 – Método chinês, traço das diagonais que representam as ordens 57
Figura 19 – Método chinês, contagem dos pontos de interseção. 58
Figura 20 – Método chinês, organização das ordens dos algarismos e resultado. ...58
Figura 21 – Método das costuras, aplicação prática do método. 60
Figura 22 – Comparação entre a multiplicação árabe e chinesa. 67
Figura 23 - Comparação entre a divisão euclidiana e método da costura. 67
Figura 24 - Aplicação do questionário socioeconômico e teste de diagnóstico. 69
Figura 25 - Comparação entre os quatro métodos de multiplicação 69
Figura 26 - Aluno exercitando a divisão pelo método da costura 70
Figura 27 - Aplicação do teste final 71
Figura 28 – Multiplicação realizado pelo aluno KKPH da questão 01. 80
Figura 29 – Multiplicação realizado pelo aluno MJA da questão 01. 80
Figura 30 – Multiplicação realizada da questão 05 por quatro alunos. 81
Figura 31 – Resolução da questão 07 adotada pelo aluno MJA. 82

Figura 32 – Comparação das duas formas que foi realizado o produto 17x72. 83
Figura 33 - Resoluções dos problemas de multiplicação do aluno MSP 83

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Item 05: Você gosta de estudar Matemática? 72
Gráfico 2 – Item 07: Você costuma estudar Matemática fora da escola? 73
Gráfico 3 – Item 14: Como você se sente quando está diante de uma avaliação em Matemática? 74
Gráfico 4 – Item 19: Qual a escolaridade do seu responsável masculino? 76
Gráfico 5 – Item 22: Qual a escolaridade do seu responsável feminino? 76
Gráfico 6 – Item 23: Quando você estudou problemas envolvendo as quatro operações com números naturais a maioria das aulas começava: 77

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Duplicação de 1 e 46..50

Tabela 2 – “meios” de 23 e dobros de 46...52

Tabela 3 – Método da costura, múltiplos do fator 13. 59

Tabela 4 – Método egípcio, duplicações de 1 e o divisor 13. 62

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Habilidades e objetos de conhecimento do 1º ano 17
Quadro 2 – Habilidades e objetos de conhecimento do 2º ano. 18
Quadro 3 – Habilidades e objetos de conhecimento do 3º ano 18
Quadro 4 – Habilidades e objetos de conhecimento do 4º ano 20
Quadro 5 – Habilidades e objetos de conhecimento do 5º ano 21
Quadro 6 – Habilidades e objetos de conhecimento do 6º ano 22
Quadro 7 – Habilidades e objetos de conhecimento do 7º ano 23
Quadro 8 – Habilidades e objetos de conhecimento do 8º ano 25
Quadro 9 – Habilidades e objetos de conhecimento do 9º ano 25
Quadro 10 – Método árabe, produto dos algarismos 3 e 6.......................................53
Quadro 11 – Método árabe, produto dos algarismos 2 e 6.......................................53
Quadro 12 – Método árabe, produto dos algarismos 3 e 4......................................54
Quadro 13 – Método árabe, produto dos algarismos 2 e 4......................................54
Quadro 14 – Método árabe, organização dos algarismos em suas ordens. 54
Quadro 15 – Método árabe, resultado final. 55
Quadro 16 – Método das costuras, organização do dividendo em múltiplos de 13. .60
Quadro 18 – Método das subtrações sucessivas. 61
Quadro 19 – Método egípcio, decomposição do dividendo em termos constantes na tabela. 62

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO..12
1. ENSINAR E APRENDER ARITMÉTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL............15
1.1 ENSINO DA ARITMÉTICA DE ACORDO COM A MATRIZ CURRICULAR VIGENTE..16
1.2 O ENSINO DA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO 27
1.3 DIFICULDADE DE APRENDIZAGEM EM MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO........38
2. PROPOSTAS METODOLÓGICAS ALTERNATIVAS.................................44
2.1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA - ARITMÉTICA.......................................44
2.2. ALTERNATIVAS PARA A MULTIPLICAÇÃO...50
2.2.1. Método egípcio..50
2.2.2. Método russo..51
2.2.3. Método árabe..52
2.2.4. Método chinês...55
2.3. ALTERNATIVAS PARA A DIVISÃO..59
2.3.1. Método da costura 59
2.3.2. Método das subtrações sucessivas 60
2.3.3. Método egípcio...61
2.4 VALIDADE DOS MÉTODOS APRESENTADOS..63
2.4.1 Método egípcio – multiplicação e divisão 63
2.4.2 Método da multiplicação russa 65
2.4.3 Método da multiplicação árabe 66
2.4.4 Método da multiplicação chinesa 66
2.4.5 Divisão pelo método da costura 67
2.4.6 Divisão pelo método das subtrações sucessivas..............................67
3. APLICAÇÃO DAS PROPOSTAS METODOLÓGICAS ALTERNATIVAS 68
3.1. - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS...68

3.2. CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO 71

3.3 – RESULTADOS PRELIMINARES.. 79

3.4. RESULTADOS FINAIS 82

CONSIDERAÇÕES FINAIS 85

REFERÊNCIAS 88

INTRODUÇÃO

Atualmente há uma grande discussão sobre o ensino da matemática, com variadas linhas metodológicas de ensino na qual o objetivo principal é reduzir a distância entre o saber matemático e saber do aluno, dessa forma, para que o aprendizado seja bem sucedido, os professores devem fazer uso desses diversos métodos em suas aulas. Entretanto deve-se destacar que o uso dessas metodologias exige um planejamento estruturado e, ao mesmo tempo, flexível de forma que possa contemplar possíveis "desvios de rotas" mas que leve à construção do conhecimento matemático de modo eficaz e com significados aos alunos.

Os professores indicam acreditar nos benefícios didáticos que a utilização das diversas metodologias existentes pode proporcionar dentro do contexto educacional, cada qual mais adequado em cada situação encontrada, mas ainda existe muita resistência em utilizá-las em sala de aula. Segundo Albino (2015), mesmo que estejam motivados, não estão seguros diante de novas posturas a serem tomadas. Do ponto de vista do professor, o uso de métodos de ensino alternativos caracteriza a saída da sua "zona de conforto para uma zona de risco. Assim, muitos preferem continuar na zona de conforto por comodismo, medo, insegurança e falta de preparo" (ALBINO, 2015, p. 6). Aliado a isso, há situações onde o docente acaba adquirindo cargas horarias elevadas e, consequentemente, ocorrendo uma sobrecarga devido o cronograma a ser cumprido com os conteúdos programáticos a serem desenvolvidos em cada série juntamente com os seus planejamentos, não havendo, dessa forma, disposição (ou tempo hábil) para pesquisar novas metodologias e procedimentos sobre determinados conteúdos de modo a torná-los mais compreensíveis aos discentes, optando por seguir "roteiros" pré-determinados como, por exemplo, o livro didático ou planejamentos elaborados por Secretarias de Educação, sem uma reflexão/pesquisa didática dos procedimentos pedagógicos que podem ser adotados e quando é detectado uma dificuldade relativa as operações básicas, principalmente no diz respeito a multiplicação e divisão, há a tendência de repetir os algoritmos usuais, sem uma análise mais aprofundada se eles fazem sentido ou não aos alunos.

É necessário destacar que a situação apontada anteriormente não é uma generalização, mas casos que ainda ocorrem no ensino da matemática pois, muitos são os profissionais que buscam aperfeiçoar sua prática docente de modo a alcançar o objetivo de atingir o maior número alunos possíveis e fazem uso das diversas metodologias para tal. Nesse contexto, D'Ambrosio destaca a importância do professor no processo educativo, todavia, afirma que o que insiste em ter uma postura de mero "transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade" (D'AMBROSIO, 2012, p. 79-80) e que o seu papel é "de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e [...] de interagir com aluno na produção e crítica de novos conhecimentos" (D'AMBROSIO, 2012, p. 80).

Desse modo, a proposta desse trabalho é sugerir, ou mesmo ampliar, alternativas metodológicas práticas no que diz respeito a multiplicação e divisão, com embasamentos teóricos e experimentais pertinentes a sua eficácia, tendo sido desenvolvido com alunos do 9º ano da Escola Municipal de Ensino Fundamental Carlos Henrique em Parauapebas, que apresentaram baixo rendimento no segundo bimestre letivo de 2019, uma proposta metodológica através de questionários e intervenções com métodos alternativos, tendo em vista que cada saber matemático é como um "tijolo" em seu conhecimento geral e quando esses saberes básicos não são sólidos, ou até mesmo inexistentes, toda a estrutura está comprometida, sendo evidenciado essa dificuldade em avaliações externas como o SisPAE[1], que trabalha com 4 níveis de proficiência (Abaixo do Básico, Básico, Adequado e Avançado) em Língua Portuguesa e Matemática e foi aplicado em 2018 com alunos de 8º ano (que foram os alunos do 9º ano em 2019), apontando que a proficiência "Abaixo do Básico" no Estado do Pará é de 40,9%, no município de Parauapebas é de 28,7% e da Escola onde se dará a pesquisa de 28,8% e no que diz respeito ao "Básico", no município e de 38,7% e na Escola, 40,8%, podemos, então destacar que 69,6% dos alunos estão abaixo do denominado "Adequado" onde a descrição afirma que "Os alunos, neste nível, demonstram domínio pleno dos conhecimentos, habilidades e competências desejáveis para o ano escolar em que se encontram" (SisPAE, 2018).

Tendo presenciado constantemente a dificuldade dos estudantes no último ano do Ensino Fundamental, principalmente no que diz respeito as operações de multiplicação e, com maior gravidade, divisão, como também nos debates acadêmicos, profissionais e evidenciadas nos índices de desempenho nesta etapa de ensino, é possível constatar que nos anos anteriores e consequente nos

---

[1] Sistema Paraense de Avaliação Educacional, https://sispae.vunesp.com.br.

subsequentes, a dificuldade também seja constante. Dessa forma, o presente trabalho visa argumentar sobre o modo como ocorre o ensino dos conteúdos da aritmética, especialmente multiplicação e divisão, e propor alternativas metodológicas práticas a realização de tais cálculos, tendo em vista que os alunos deveriam, no último ano do Ensino Fundamental, ter pleno domínio dos algoritmos usuais que são trabalhados desde os anos iniciais. Para tal, temos como objetivo, apresentar uma abordagem metodológica e prática no que diz respeito ao ensino dessas operações nas series finais do Ensino Fundamental aos docentes, como alternativa para os estudantes que não dominam os algoritmos usuais, podendo possibilitar seus progressos nos conhecimentos matemáticos.

Nesse trabalho, abordamos uma pesquisa bibliográfica-experimental, onde foi realizado um estudo a respeito das possíveis causas das dificuldades dos alunos em relação as operações básicas, em especial, multiplicação e divisão, juntamente com os métodos aplicados para o seu ensino e em seguida, uma breve apresentação e histórico, se houver, dos métodos alternativos para essas operações com uma abordagem prática, sendo elas trabalhadas efetivamente com um grupo de alunos que apresentaram, através dos dados escolares, resultados avaliativos insatisfatório para o ano e série em curso. Foi realizada uma pesquisa, por meio do preenchimento de um questionário socioeconômico para traçar um perfil dos alunos com dificuldades, aplicação de um teste de diagnostico para a realização da aferição dos resultados prévios, e, por meio de encontros semanais, nas dependências da escola onde os alunos eram matriculados e no turno diferente a qual estudavam, apresentamos a proposta alternativa por meio de atividades teóricas e práticas, e ao final, um teste de verificação, com as mesmas questões do teste de diagnostico. De posse dos resultados, os dados foram tabulados de modo a facilitar a análise das informações com o intuito de constatar se os procedimentos aplicados alcançaram um efeito satisfatório e avaliar se processo adotado nesse trabalho permitiu a viabilidade de alcançar os objetivos propostos.

1. ENSINAR E APRENDER ARITMÉTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

A princípio, trataremos sobre a *aritmética* que etimologicamente, a palavra se originou a partir do grego arithmētikḗ, que pode ser traduzido como "ciência dos números", ou seja, é a área da Matemática que estuda as operações numéricas, os cálculos de adição, subtração, divisão, multiplicação, entre outros.

Dependendo da abordagem adotada no ensino da matemática no ensino fundamental, ela pode ser rotulada como 'nada fácil', pois boa parte dos alunos não consegue visualizar ou inseri-la em seu cotidiano. Até mesmo nas séries finais, a aritmética, mais precisamente as quatro operações (adição, multiplicação, subtração e divisão), precisam ser muito bem assimiladas, haja vista que alguns alunos trazem essa deficiência, de associar o conhecimento acadêmico às experiencias pessoais, desde seus primeiros contatos com a matemática.

Para Ponte (1992, p. 1), esta é geralmente considerada "uma disciplina extremamente difícil, que lida com objetos e teorias fortemente abstratas; para alguns evidencia o seu aspecto mecânico, inevitavelmente associado ao cálculo".

Ainda sobre esse dilema, Silveira (2002) explica que grande parcela de alunos, desde o nível fundamental até a graduação, tem muita dificuldade em aprender Matemática, muitas vezes por não conseguir entender o que o professor está falando, ou pelo fato de não conseguir interpretar uma situação problema. Ou ainda, a falta de domínio ou dificuldade em abstrair, acabando por gerar uma barreira na compreensão desta disciplina.

Dessa forma, essa seção será especificamente voltada a pesquisar alguns possíveis métodos para o ensino da matemática aos alunos do ensino fundamental levando em consideração suas dificuldades e mazelas que provavelmente já lhes acompanham por praticamente toda sua vida escolar. No entanto, o objetivo é analisar e evidenciar práticas e experiências que venham facilitar o ensino da aritmética no Ensino Fundamental.

1.1 ENSINO DA ARITMÉTICA DE ACORDO COM A MATRIZ CURRICULAR VIGENTE

Desde 2017, com a homologação das fases do Ensino Fundamental da Base Nacional Comum Curricular, criou-se certa mobilização das redes e sistemas de ensino em todo Brasil para a reelaboração de seus currículos e formar os professores para levar esses documentos para dentro dos espaços escolares, principalmente para as salas de aula. Nesse mesmo sentido em relação à disciplina de matemática a BNCC diz que:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (BRASIL, 2018 p. 266).

Conforme citação da BNCC, o letramento matemático vai muito além dos cálculos, é necessário levar o aluno a raciocinar, a argumentar e levantar situações que envolvam a matemática com o seu cotidiano. Neste contexto, destaca-se o ensino dos números decimais, sendo eles utilizados principalmente nas vivências monetárias.

No tange ao Ensino Fundamental nos anos iniciais, se espera que haja a capacidade, mesmo que mínima, dos alunos em resolver problemas tanto com números naturais como com números racionais na qual a representação decimal é finita, “envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados” (BRASIL, 2018 p. 268). Referente aos cálculos, a expectativa é que os alunos tenham a habilidade de desenvolver estratégias para se alcançar o resultado esperado “sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras” (BRASIL, 2018 p. 268).

Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, é imprescindível que haja a retomado dos estudos iniciado nos anos inicias, afim de aprofundar e aplicar os conhecimentos adquiridos e ampliar o domínio de assuntos referentes a aritmética, como por exemplo a porcentagem, que é abordada em todos os anos. Portanto, é de se esperar que esses alunos saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com o auxílio da relação desses números com determinados pontos da reta numerada.

Cabe ainda destacar que o desenvolvimento do pensamento numérico necessita de um arcabouço ainda maior do que é proposto pelos estudos da unidade Números, devendo-se ampliar e se aprofundar discutindo com as demais unidades temáticas, possibilitando aos alunos uma gama maior de ferramentas para a busca de soluções de possíveis problemas que possam se deparar. Sobre tal assunto a BNCC explica que,

> Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas. (BRASIL, 2018, p. 271).

Na Matemática aplicada no contexto escolar, podemos destacar que dentro do processo de aprendizagem "uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, [...] e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem" (BRASIL, 2018, p. 277).

Levando em consideração apenas a unidade temática "números" da BNCC, que tem o intuito de garantir o desenvolvimento das competências específicas, os componentes curriculares foram organizados em conjunto de habilidades. E para essas habilidades, o texto relaciona os diferentes objetos de conhecimento, considerando-os como conteúdo, conceitos e processos, que estão organizados em unidades temáticas. Segue abaixo esquema com algumas das informações a esse respeito.

Quadro 1 - Habilidades e objetos de conhecimento do 1º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
1º ano	
Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar).	Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.

Fonte: Modificado de Brasil (2018, p. 278 e 279).

O Quadro 1, que mostra as habilidades e objetos de conhecimento para o 1º ano do Ensino Fundamental, indica que nessa fase, é apresentado a criança, sem uma maior formalização, o que geralmente ocorre em seu cotidiano com situações básicas envolvendo adição e subtração, seja pela contagem de brinquedos ou até mesmo dinheiro, onde é instigado o uso de estratégias próprias para a solução de problemas.

Quadro 2 – Habilidades e objetos de conhecimento do 2º ano.

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
2º ano	
Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar).	Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até três ordens, com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, utilizando Estratégias pessoais.
Problemas envolvendo adição de parcelas iguais (multiplicação).	Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.
Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte.	Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.

Fonte: Modificado de Brasil (2018, p. 282 e 283).

No que se refere ao 2º ano, conforme o Quando 2, temos a ainda muito presente o estimulo ao uso de estratégias próprias nas soluções dos problemas sendo acrescido a multiplicação, que é apresentado na forma da adição e, de maneira bem sutil, a divisão.

Quadro 3 - Habilidades e objetos de conhecimento do 3º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
3º ano	
Construção de fatos fundamentais da adição, subtração e multiplicação Reta numérica	Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito; Estabelecer a relação entre números naturais e pontos da reta numérica para

	Utilizá-la na ordenação dos números naturais e também na construção de fatos da adição e da subtração, relacionando-os com deslocamentos para a direita ou para a esquerda.
Procedimentos de cálculo (mental e escrito) com números naturais: adição e subtração	Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito, inclusive os convencionais, para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração com números naturais.
Problemas envolvendo significados da adição e da subtração: juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades	Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo exato ou aproximado, incluindo cálculo mental.
Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida	Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros; Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.
Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte	Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.

Fonte: Modificado de Brasil (2018, p. 286 e 287).

O Quadro 3 evidencia que no 3º ano há a formalização dos números naturais e sua relação com a reta numerada levando à percepção de valores numéricos em diferentes em posições diferentes possibilitando outras formas de registros tanto para a adição quanto a subtração. Amplia-se a aplicabilidade da multiplicação e divisão estimulando o uso de estratégias próprias de solução.

Quadro 4 - Habilidades e objetos de conhecimento do 4º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
4º ano	
Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais	Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração, utilizando estratégias diversas, como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado; Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo; Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.
Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida	Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos; Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
Problemas de contagem	Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
Números racionais: frações unitárias mais usuais (1/2,1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100).	Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
Números racionais: representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro.	Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.

Fonte: Modificado de Brasil (2018, p. 290 e 291).

A partir do 4º ano, conforme o Quadro 4, é apresentado os algoritmos que podem ser usados nas operações básicas, mas ainda estimulando o uso de outras estratégias para encontrar as soluções. É nesse momento que são apresentados aos alunos os problemas de contagens, associadas a grupamentos, as frações unitárias, que podem ser facilmente comparadas a receitas domesticas, e a representação decimal por meio do sistema monetário brasileiro.

Quadro 5 - Habilidades e objetos de conhecimento do 5º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
5º ano	
Cálculo de porcentagens e representação Fracionária.	Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita	Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais	Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?"	Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Fonte: Modificado de Brasil (2018, p. 294 e 295).

No 5º ano, Quadro 5, há a introdução da porcentagem por meio da comparação com frações para encontrar as soluções de problemas relacionados a educação financeira. Há, também, o aumento da complexidade do uso das operações básicas, como o uso dos números racionais em sua representação decimal finita e introdução do princípio multiplicativo em problemas de contagem.

Quadro 6 - Habilidades e objetos de conhecimento do 6º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
6º ano	
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana	Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos.	Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par); Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000; Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes; Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica; resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora; Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por

	meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
Aproximação de números para múltiplos de potências de 10	Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.
Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: Modificado de Brasil (2018, p. 300 e 301).

Pelo que é apresentado pelo Quadro 6, o desenvolvimento das habilidades no 6º ano tem um importante papel no desenvolvimento do aluno pois, é nesse momento, geralmente, que há um professor exclusivo para o ensino da matemática e os conteúdos matemáticos passam a ser mais intensificados. Dessa forma, no que se refere a divisão, temos a formalização do algoritmo usual da divisão, a divisão euclidiana, sendo enfatizado a possibilidade de uso de outras estratégias de solução. Há a formalização das definições e operações de adição e subtração com frações, em relação à representação decimal dos números racionais, além das operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), há também o uso da potenciação. É apresentado as definições de números pares e ímpares tal como os números primos e os critérios de divisibilidade além da solução de situações problemas envolvendo porcentagem.

Quadro 7 - Habilidades e objetos de conhecimento do 7º ano

Objeto de conhecimento	**Habilidade**
7ºano	
Múltiplos e divisores de um número natural	Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração; Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos; Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos; Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas; Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador; Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a Pontos da reta numérica; Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias; Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Fonte: Modificado de Brasil (2018, p. 306 e 307).

O Quadro 7 mostra que são apresentados no 7º ano, de modo formal, os múltiplos e divisores dos números naturais podendo ser estendido para a solução de situações problemas que envolvem o mínimo múltiplo comum (mmc) e o máximo divisor comum (mdc) sem a utilização dos algoritmos, estimulando a autonomia criativa dos alunos. Há, também o acréscimo do conceito de número com a presença dos números inteiros e ampliação dos significados de frações, como a associação a razões, e comparação com representação decimal por meio da reta numérica. No que diz respeito a cálculos, em porcentagem é trabalhado o acréscimo e desconto e operações com números inteiros.

Quadro 8 - Habilidades e objetos de conhecimento do 8º ano

Objeto de conhecimento	Habilidade
8º ano	
Notação científica.	Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
Potenciação e radiciação.	Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
O princípio multiplicativo da contagem.	Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
Porcentagens.	Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
Dízimas periódicas: fração geratriz.	Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Fonte: Modificado de Brasil (2018, p. 312 e 313).

Pelo que podemos constatar no Quadro 8, no 8º ano são aprofundados os conceitos relacionados às operações com a inserção da potenciação, radiciação e a relação entre ambas, aplicação do princípio multiplicativo da contagem que, de certa forma, é base da análise combinatória, e das dízimas periódicas com a forma de obter a fração geratriz.

Quadro 9 - Habilidades e objetos de conhecimento do 9º ano

Objeto de conhecimento	Habilidade
9º ano	
Potências com expoentes negativos e fracionários	Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
Números reais: notação científica e problemas.	Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.
Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais,

	preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

Fonte: Modificado de Brasil (2018, p. 316 e 317).

Por fim, no 9º ano, como mostrado no Quadro 9, são apresentados aos alunos as potencias com expoentes negativos, introduzindo o conceito de número inverso a outro número, potencias com expoentes fracionários, que se relaciona diretamente à raiz-enésima, como também os números reais com ênfase na notação científica, e por fim, o cálculo de porcentagem de porcentagem, que gera grande dificuldades se não for compreendida e aplicada adequadamente.

Segundo Ginsburg, antes mesmo de iniciar sua "vida" escolar, as crianças já possuem uma compreensão numérica e que vai se aprimorando de acordo com o avanço tanto no contexto escolar quanto na sua vida social. Para ele (1997, p. 21), "o meio social rico em experiências matemáticas proporciona às crianças a compreensão de conceitos matemáticos importantes para o dia-a-dia". Dessa forma, tais experiências que elas trazem do seu contexto social muitas vezes não são valorizadas pela escola para a construção e compreensão da linguagem matemática ensinada nesta, daí a desconexão entre a matemática que os alunos vivenciam no cotidiano e a matemática escolar. Visando superar esse desafio, podemos observar que dentro dos objetos de conhecimentos, mostrado nas tabelas anteriores, há as habilidades que, inicialmente, tende a procurar dar sentido aos conhecimentos informais que as crianças possuem e fazer ligações com os padrões formais exigidos pelo "rigor matemático".

Muitas vezes, o que acaba sendo priorizado nas escolas, no que se refere às operações aritméticas, é o "domínio" dos procedimentos dessas operações do que a compreensão dos conceitos intrínsecos a elas, fazendo com que não haja significado algum aos alunos a linguagem matemática empregada, tornando-se uma emaranhado de símbolos e regras desconexas de sua realidade, não aproveitando o desenvolvimento natural dos alunos que, segundo Groen & Resnick (1977, apud Ginsburg, 1997, p. 22), "conforme o tempo passa, a abordagem das crianças ao cálculo evolui e amadurece. Eles se desenvolvem mais espontaneamente a abordagens eficientes para cálculos" que seriam justamente as que tem como base os saberem de seu contexto social.

1.2 O ENSINO DA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Situações matemáticas são vividas pelos seres humanos todos os dias em todos os lugares. Sabe-se que o contato com os números na vida de cada indivíduo começa desde muito cedo, sendo-nos encaminhados a ampliar o conhecimento para que seja desenvolvido nas atividades do cotidiano em diversas situações como: contagem, medição, cálculo, representação, organização, entre outros.

A sociedade depende do ensino da matemática em todos seus seguimentos, pois além de obrigatória ela é universal. Segundo os PCNs.

> A sobrevivência na sociedade depende cada vez mais de conhecimento, pois diante da complexidade da organização social, a falta de recursos para obter e interpretar informações impede a participação efetiva e a tomada de decisões em relação aos problemas sociais. Impede, ainda, o acesso ao conhecimento mais elaborado e dificulta o acesso às posições de trabalho (BRASIL, 1998, p.26).

Nesse contexto, deve haver liberdade aos alunos de encontrar seus níveis de conhecimentos e capacidades e explorar as possibilidades que lhes permitam atingir seus objetivos sejam por conta própria ou com pouca orientação, desse modo, Freudenthal (1991, p.60) afirma que "os primeiros conhecimentos e habilidades, quando adquiridos pela própria atividade, permanecem melhores e mais prontamente disponíveis do que quando impostos por outros", sendo também que quando a aprendizagem ocorre dessa forma, ela pode ser mais agradável e o ato de aprender passa a ter uma motivação, tendo em vista que essa atitude de "experimentar a matemática como uma atividade humana" é promovida. Seguindo essa premissa, o aluno passa de coadjuvante no processo educacional, de mero receptor de conteúdo, segundo a "concepção baldista"[2] (Machado, 1995 apud Câmara dos Santos, 2002 p. 11) a sujeito ativo em sua aprendizagem, utilizando sua experiencia de mundo dentro de seu contexto social e passa dar significado aos novos conceitos adquiridos, fugindo dos estereótipos dados à matemática de "matéria" complicada que somente poucos entendem.

Sabe-se que alguns educadores ainda trabalham as operações matemáticas, de forma mecanizada, na qual o educando é levado a utilizar o algoritmo da operação

---

[2] Termo referente à "concepção da cabeça vazia" constante no livro "Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente" do autor Nílson José Machado.

sem entender o processo de seu desenvolvimento. Ou seja, tais operações levam a buscar apenas o resultado da conta, descartando a atribuição do seu significado.

Há um grande número de registros reais na história da matemática, e esses registros podem servir como um ponto inicial a construção de novos conceitos matemáticos, no entanto, segundo Miguel (2005, p. 387), nos métodos tradicionais, quando novas operações ou conceitos são introduzidos, o ritual envolve propor conceitos, “que parece cair pronto do céu”, atributos e algoritmos relacionados a ele, para finalmente expor uma gama de questões para explicar as operações, fórmulas ou procedimentos matemáticos. Depois de ler e resolver alguns problemas, o aluno pode chegar à conclusão que não precisa mais analisar os enunciados em busca de soluções de forma mais lógica e especifica para ela, basta encontrar os números do texto e usar fórmulas ou processos algorítmicos e realizar as operações e pronto. Entretanto, “se mudarmos uma palavra ou aspecto mínimo do problema, as crianças já não conseguem resolvê-lo” (MIGUEL, 2005, p. 388).

Tal maneira de repassar conhecimento favorece a alienação ao educando, restringindo e negando a oportunidade do aprendizado através da criatividade de solucionar desafios do próprio indivíduo. Sabe-se que a aprendizagem das operações acontece de maneira contínua. É necessário que o educador se disponha a buscar caminhos e mecanismos confiáveis e viáveis para trabalhar com seus educandos em sala de aula. Portanto, é de fundamental importância que o professor conheça diversas possibilidades de trabalho para que se construa sua prática. Dessa forma, ensinar os métodos de realizar as operações é um processo, que sendo orientado de forma correta, evita a sensação de que matemática é incompreensível.

Constatar se o aluno está avançando em relação a tais conteúdos, para a maioria dos professores, é de fato identificar se o aluno sabe ou não resolver as atividades por ele proposto. Sem dúvida esse é um método mais que ultrapassado, pois sabe-se que são diversos os conceitos e procedimentos possíveis na efetiva aprendizagem das operações matemáticas.

Nesse sentido Smole e Diniz, (2007, p. 13), explica que “a compreensão matemática pode ser definida como a habilidade para representar uma ideia matemática de múltiplas maneiras e fazer conexões entre as diferentes representações dessa ideia”. Dessa forma, o educador não deve se limitar apenas em trabalhar o conceito formalizado e sim problematizar o conteúdo envolvendo métodos, construções históricas, experiências práticas e a própria vivencia do aluno, fazendo assim uma reaproximação do pensamento com a experiência.

De modo a termos uma real dimensão da forma como o livro didático apresenta as operações de multiplicação e divisão, faremos a análise de três deles, sendo o primeiro do autor Álvaro Andrini com edição de 1989, o segundo, também de Álvaro Andrini juntamente com Maria José Vasconcellos de 2015 e o terceiro do autor Luiz Roberto Dante com edição de 2018, sendo o primeiro livro destinado à 5ª série (do então chamado 1º grau) e os demais do 6º ano do ensino fundamental, na qual são de níveis equivalentes.

Ao analisarmos o livro do Andrini de 1989, podemos notar que não há uma preocupação direta em relacionar os conceitos a serem trabalhados com o contexto individual dos alunos, sem qualquer menção a situações que poderiam se encontrar. Podemos perceber que há apenas o desenvolvimento da teoria, conforme as imagens a seguir, e posteriormente a exercitação

Figura 1 – Multiplicação. Andrini 1989.

MULTIPLICAÇÃO

A **multiplicação** é uma adição de parcelas iguais.

Veja:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

Podemos representar a mesma igualdade por:

$$4 \times 3 = 12 \text{ ou } 4 . 3 = 12$$

Lê-se: *Quatro vezes três é igual a doze.*

Essa operação chama-se multiplicação e é indicada pelo sinal . ou ×.

Na multiplicação: $\boxed{4 \times 3 = 12}$

dizemos que:
- 4 e 3 são os **fatores**,
- 12 é o **produto**.

Fonte: (ANDRINI, 1989, p. 63).

Como podemos perceber pela Figura 1, o algoritmo usual da multiplicação não é apresentado no livro como também o algoritmo da divisão, Figura 2, quando está se desenvolvendo os conceitos da divisão exata.

Figura 2 – Divisão exata. Andrini, 1989.

DIVISÃO EXATA

Consideremos dois números naturais, dados numa certa ordem.

Por exemplo:

10 é o primeiro deles e 2 é o segundo.

Por meio deles determina-se um terceiro número natural que, multiplicado pelo segundo, dá como resultado o primeiro. Essa operação chama-se **divisão** e é indicada pelo sinal :

Assim:

$10 : 2 = \boxed{5}$ porque $\boxed{5} \times 2 = 10$

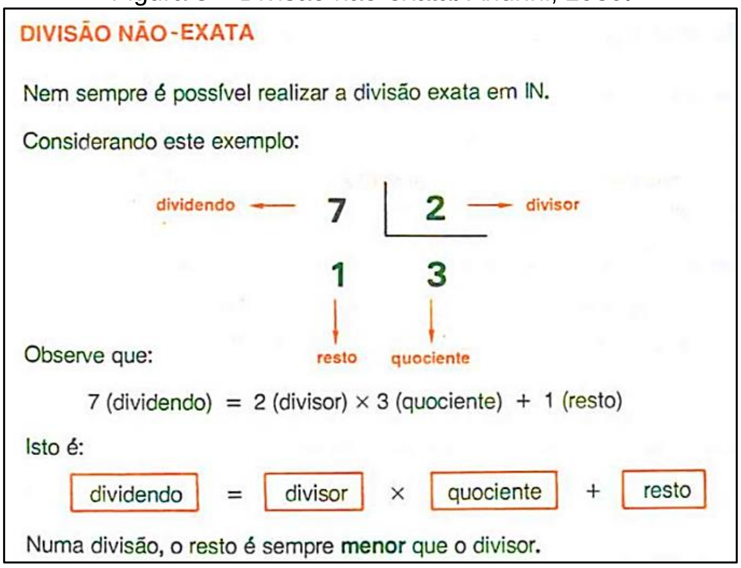
Na divisão: $\boxed{10 : 2 = 5}$

dizemos que:
- 10 é o **dividendo**,
- 2 é o **divisor**,
- 5 é o **quociente**.

Fonte: (ANDRINI, 1989, p. 66).

Somente quando é conceituado a divisão não-exata, que o autor apresenta o algoritmo usual da divisão, evidenciado pela Figura 3, mas novamente sem relacionar a possíveis aspectos cotidiano dos alunos. Não apresenta nenhuma outra forma alternativa de efetuar a multiplicação ou divisão além das formas usuais.

Figura 3 – Divisão não-exata. Andrini, 1989.



Fonte: (ANDRINI, 1989, p. 70).

Na versão de 2015, conforme a Figura 4, podemos notar uma grande diferença na abordagem inicial do assunto, onde é apresentado uma situação problema e uma forma de solução e há uma preocupação em fazer a transição da simbologia do operador da multiplicação do “x” para o ponto.

Figura 4 – Ideias da Multiplicação. Andrini e Vasconcellos, 2015.

A turma do 6º ano de certa escola mandou confeccionar camisetas e pretende, com a venda delas, conseguir dinheiro para uma excursão.

Foram vendidas 78 camisetas por R$ 22,00 cada uma. Quanto foi arrecadado?

Acompanhe:

- Temos 78 camisetas vendidas por R$ 12,00 cada:

$$\underbrace{22 + 22 + 22 + 22 + 22 + \ldots + 22}_{\text{78 parcelas iguais a 22}}$$

Para simplificar o registro dessa operação, fazemos:

$\boxed{78 \times 22 \quad 1716}$

Portanto, foram arrecadados R$ 1.716,00.

Existem dois sinais que indicam multiplicação: × ou ·.

$\boxed{78 \times 22 = 78 \cdot 22 = 1716}$

Usaremos com mais frequência o ponto, para evitar que o sinal da multiplicação seja confundido com a letra **x**.

Fonte: (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2015, p. 49).

Após o possível entendimento do que seja o procedimento de multiplicação, é apresentado uma conceituação, Figura 5, com a formalização do procedimento e nomenclaturas dos elementos da multiplicação de modo mais formal e logo em seguida, na Figura 6, é revisitado o algoritmo usual da multiplicação.

Figura 5 – Conceitos da multiplicação. Andrini e Vasconcelos, 2015.

Multiplicação

Usamos a **multiplicação** para registrar uma adição de parcelas iguais.

$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3}_{\text{4 parcelas iguais a 3}} = 4 \cdot 3 = 12$ $\qquad$ $\underbrace{4 + 4 + 4}_{\text{3 parcelas iguais a 4}} = 3 \cdot 4 = 12$

Os números multiplicados são chamados **fatores** e o resultado é o **produto**.

$\underset{\text{fator}}{5} \times \underset{\text{fator}}{2} = \underset{\text{produto}}{10}$ ou $5 \cdot 2 = 10$

Fonte: (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2015, p. 49).

Figura 6 – Algoritmo da multiplicação. Andrini e Vasconcellos, 2015.

Nos algoritmos, usa-se o sinal × para indicar multiplicação.
Veja como foi feito o cálculo a seguir:

$$\begin{array}{r} 2\,2 \\ \times\ 7\,8 \\ \hline 1\,7\,6 \\ 1\,5\,4\,0 \\ \hline 1\,7\,1\,6 \end{array}$$

1 7 6 → 8 vezes 22 unidades = 8 unidades × 22 unidades = 176 unidades
1 5 4 0 → 70 vezes 22 unidades = 7 dezenas × 22 unidades = 1 540 unidades
1 7 1 6 → 176 + 1 540 = 1 716

Fonte: (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2015, p. 50).

Ao abordar a divisão, como mostrado pela Figura 7, os autores partiram de uma situação problema e com base nele, fizeram uso algoritmos usual, destacando cada elemento da divisão

Figura 7 – Divisão. Andrini e Vasconcellos, 2015.

Usamos a divisão para repartir uma quantidade em partes iguais ou descobrir quantas vezes uma quantidade cabe em outra.

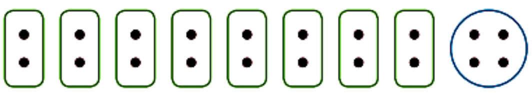
Considere a situação:

Distribuir igualmente 20 bombons entre 8 crianças. Quantos bombons recebe cada uma? Sobram bombons? Quantos?

Para obter a resposta, efetua-se uma divisão.

dividendo → 20 | 8 ← divisor
resto → 4   2 ← quociente

Cada criança recebe 2 bombons. Sobram 4.
20 : 8 tem quociente 2 e resto 4



20 = 8 + 8 + 4 = 2 × 8 + 4

- Com 20 unidades podemos formar 2 grupos de 8 e sobram 4 unidades;

ou ainda

- 8 unidades cabem 2 vezes em 20 e sobram 4 unidades.

Fonte: (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2015, p. 54).

Após a apresentação do algoritmo da divisão e dos elementos da divisão, os autores apresentam um “tutorial” de como executar o procedimento procurando dialogar com os alunos na realização de cada etapa da divisão, conforme podemos observar na Figura 8.

Figura 8 – Execução do algoritmo usual da divisão. Andrini e Vasconcellos, 2015.

Lembra-se dos *kits* dos alunos do 6º ano?

Com a venda deles, os alunos arrecadaram R$ 1.965,00. Quantos *kits* foram vendidos, se cada um custava R$ 15,00?

A **divisão** permite descobrir essa quantidade.

1965 : 15 = ?

Como fazer essa divisão?

```
1 9 6 5 |15
```

- Não dá para dividir 1 por 15.
  Mas 1 unidade de milhar = 10 centenas e, como já temos 9 centenas no número 1 965, ficamos com 10 centenas + 9 centenas = 19 centenas.

```
  1 9 6 5 |15
- 1 5      1
  0 4
```

- Dividimos 19 centenas por 15. Dá 1 e restam 4 centenas.

```
  1 9 6 5 |15
- 1 5      1
  0 4 6
```

4 centenas = 40 dezenas

- 40 dezenas + 6 dezenas = 46 dezenas

```
  1 9 6 5 |15
- 1 5      13
  0 4 6
-   4 5
    0 1
```

- Dividimos agora 46 dezenas por 15. Dá 3 e resta 1 dezena.

```
  1 9 6 5 |15
- 1 5      13
  0 4 6
-   4 5
    0 1 5
```

- 1 dezena = 10 unidades
  10 unidades + 5 unidades = 15 unidades

```
  1 9 6 5 |15
- 1 5      131
  0 4 6
-   4 5
    0 1 5
-     1 5
        0
```

- Finalmente dividimos 15 unidades por 15.
  Dá 1 e resta zero.
  Esta é uma divisão exata, pois o resto é zero.

Portanto, os alunos do 6º ano venderam 131 *kits*.

Fonte: (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2015, p. 56).

Ao final das devidas intervenções relacionadas a divisão, o autor inseriu um subtópico, como podemos verificar na Figura 9, como uma forma alternativa de realizar a divisão, sendo a divisão por meio das subtrações sucessivas, que é uma das propostas desse trabalho, juntamente com o método de estimativas.

Figura 9 – Divisão por subtrações sucessivas. Andrini e Vasconcellos, 2015.

Divisão por subtrações sucessivas

Há um outro modo de registrar essa divisão que acabamos de mostrar na página 56.
Para saber quantos *kits* foram vendidos, você também poderia raciocinar assim:

- Vendendo 100 *kits*, os alunos arrecadariam $15 \cdot 100 = 1\,500$ reais:

$$\begin{array}{r|l} 1965 & 15 \\ \cline{2-2} -1500 & 100 \\ \cline{1-1} 465 & \end{array}$$

$1965 - 1\,500 = 465$ (Ficam faltando 465 reais para completar o valor arrecadado.)

- Por aproximação, podemos colocar mais 30 *kits*, pois $30 \cdot 15 = 450$.

$$\begin{array}{r|l} 465 & 15 \\ \cline{2-2} -450 & 30 \\ \cline{1-1} 15 & \end{array}$$

- Como $465 - 450 = 15$, sobram 15 reais, que correspondem a mais 1 *kit*.

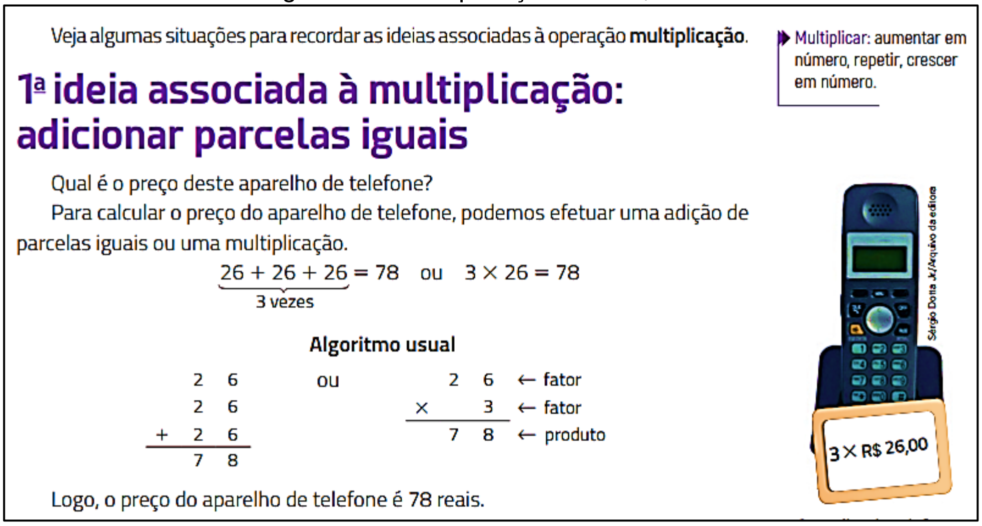
$$\begin{array}{r|l} 15 & 15 \\ \cline{2-2} -15 & 1 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

- Finalmente, $100 + 30 + 1 = 131$.

Fonte: (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2015, p. 58).

Em relação ao livro do autor Dante de 2018, há a apresentação de situações problemas pertinentes a cada ideia associada a multiplicação, sendo que são abordadas quatro ideias: adicionar parcelas iguais, disposição ou representação retangular, contar possibilidades e proporcionalidade, e para cada uma, é exibido uma situação problema pertinente de modo a ilustrar o raciocínio a ser desenvolvido em cada caso. Na primeira situação, conforme Figura 10, incialmente a solução é dada de acordo com a ideia a ela associada e posteriormente é exposto o algoritmo usual da multiplicação e seus elementos.

Figura 10 – Multiplicação. Dante, 2018.



Veja algumas situações para recordar as ideias associadas à operação **multiplicação**.

Multiplicar: aumentar em número, repetir, crescer em número.

1ª ideia associada à multiplicação: adicionar parcelas iguais

Qual é o preço deste aparelho de telefone?

Para calcular o preço do aparelho de telefone, podemos efetuar uma adição de parcelas iguais ou uma multiplicação.

$$\underbrace{26 + 26 + 26}_{3\text{ vezes}} = 78 \quad \text{ou} \quad 3 \times 26 = 78$$

Algoritmo usual

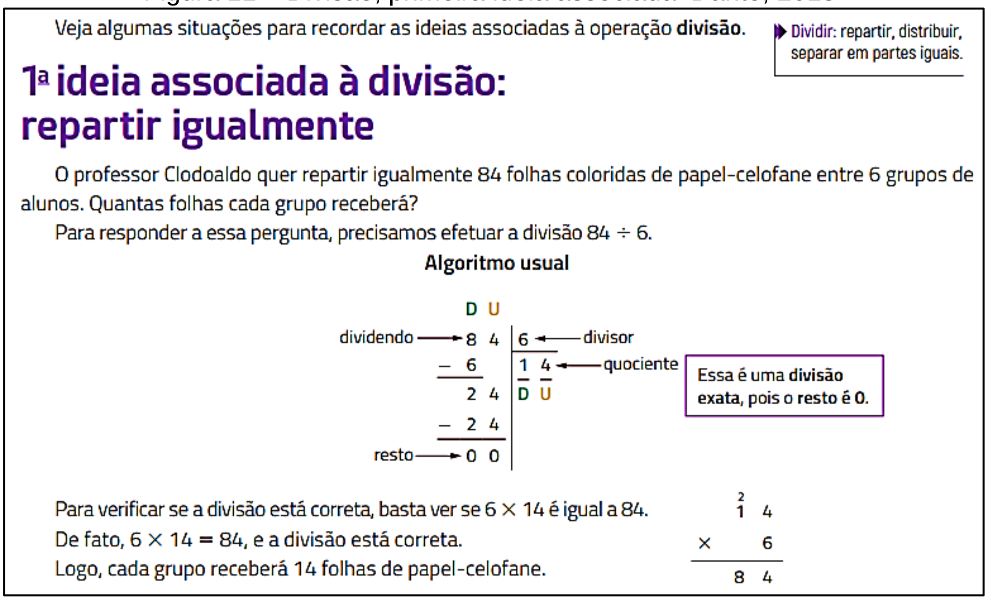
$$\begin{array}{rr} & 2\ 6 \\ & 2\ 6 \\ + & 2\ 6 \\ \hline & 7\ 8 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{rrl} & 2\ 6 & \leftarrow \text{fator} \\ \times & 3 & \leftarrow \text{fator} \\ \hline & 7\ 8 & \leftarrow \text{produto} \end{array}$$

Logo, o preço do aparelho de telefone é 78 reais.

Fonte: (DANTE, 2018, p. 43).

Em relação à divisão, o autor destacas a duas ideias associadas a ela e, assim como na multiplicação, inicia cada abordagem por meio de um problema que é resolvido pelo algoritmo usual da divisão especificado cada um de seus elementos e realizando a verificação do resultado por meio da multiplicação, Figura 11.

Figura 11 – Divisão, primeira ideia associada. Dante, 2018.



Veja algumas situações para recordar as ideias associadas à operação **divisão**.

Dividir: repartir, distribuir, separar em partes iguais.

1ª ideia associada à divisão: repartir igualmente

O professor Clodoaldo quer repartir igualmente 84 folhas coloridas de papel-celofane entre 6 grupos de alunos. Quantas folhas cada grupo receberá?

Para responder a essa pergunta, precisamos efetuar a divisão 84 ÷ 6.

Algoritmo usual

Para verificar se a divisão está correta, basta ver se 6 × 14 é igual a 84.

De fato, 6 × 14 = 84, e a divisão está correta.

Logo, cada grupo receberá 14 folhas de papel-celofane.

$$\begin{array}{rr} & \overset{2}{1}\ 4 \\ \times & 6 \\ \hline & 8\ 4 \end{array}$$

Fonte: (DANTE, 2018, p. 47).

Na abordagem da segunda ideia associada a divisão, como podemos notar na Figura 12, o autor enfatiza o desenvolvimento do algoritmo usual argumentando cada passo do procedimento e do resultado final.

Figura 12 – Divisão, segunda ideia associada. Dante, 2018.

2ª ideia associada à divisão: "medida" ou quantas vezes uma quantidade cabe em outra

Em uma granja, os ovos são colocados em caixas com 1 dúzia. Quantas caixas são necessárias para embalar 195 ovos?

Sabemos que 1 dúzia corresponde a 12 unidades. Então, queremos saber **quantos grupos** de 12 ovos **cabem** em 195 ovos, ou seja, devemos efetuar a divisão 195 ÷ 12.

Caixa de ovos.

Algoritmo usual

```
C D U
1 9 5 | 1 2
      |------
      | 0 _ _
      | C D U
```

Como não podemos dividir 1 centena por 12, trocamos 1 centena por 10 dezenas, e, com as 9 dezenas que já tínhamos, passamos a ter 19 dezenas.

```
  C D U
  1 9 5 | 1 2
– 1 2   |------
    7   | 0 1 _
        | C D U
```

Dividimos 19 dezenas por 12, resultando em 1 dezena e restando 7 dezenas.

```
  C D U
  1 9 5 | 1 2
– 1 2   |------
    7 5 | 0 1 _
        | C D U
```

Trocamos 7 dezenas por 70 unidades. Com as 5 unidades que já tínhamos, passamos a ter 75 unidades para dividir em 12 partes iguais.

```
               C D U
dividendo ———→ 1 9 5 | 1 2 ←——— divisor
             – 1 2   |------
                 7 5 | 0 1 6 ←——— quociente
               – 7 2 | C D U
resto ———————→   0 3 |
```

Dividimos 75 unidades por 12. Dá 6 unidades e restam 3 unidades.

Logo, 195 ÷ 12 = 16 e resto 3.

Fonte: (DANTE, 2018, p. 47).

Assim como no livro de Andrini e Vasconcellos, há uma alternativa ao algoritmo usual da divisão sendo que o indicado é o algoritmo das estimativas que, de certa forma, é bem semelhante ao das subtrações sucessivas, sendo explicado o seu procedimento na Figura 13.

Figura 13 – Divisão: Algoritmo das estimativas, Dante.

Outro algoritmo da divisão: algoritmo das estimativas

O algoritmo das estimativas consiste em descobrir quantas vezes o divisor cabe no dividendo **fazendo estimativas**. Acompanhe a situação a seguir.

Lauro trabalha em uma floricultura e está preparando uma encomenda. Para organizar 532 flores em arranjos com 14 flores em cada um deles, quantos arranjos Lauro vai fazer?

Para responder a essa pergunta, é preciso efetuar a divisão 532 ÷ 14. Pelo algoritmo das estimativas, devemos descobrir quantas vezes o 14 "cabe" em 532, fazendo estimativas.

```
  5 3 2 | 1 4
– 2 8 0 | 2 0
  2 5 2 | 1 0
– 1 4 0 |   5
  1 1 2 | + 3
–   7 0 | 3 8
  0 4 2 |
–   4 2 |
    0 0 |
```

- Estimamos 20 vezes e fazemos 20 × 14 = 280 e 532 – 280 = 252.
- Quantas vezes o 14 "cabe" nos 252 que sobraram? Estimamos 10 vezes e fazemos 10 × 14 = 140 e 252 – 140 = 112.
- Quantas vezes o 14 "cabe" em 112? Estimamos 5 vezes e fazemos 5 × 14 = 70 e 112 – 70 = 42.
- Quantas vezes o 14 "cabe" em 42? Cabe 3 vezes e resta 0.
- Somamos 20 + 10 + 5 + 3 = 38. Logo, 14 cabe 38 vezes em 532 e o resto é 0.

43. Exemplo de estimativas:

```
  3 3 7 |  5
– 2 5 0 | 50
  0 8 7 | 10
  – 5 0 |  6
    3 7 | + 1
  – 3 0 | 67
    0 7 |
    – 5 |
      2 |
```

Logo, Lauro vai fazer 38 arranjos com 14 flores em cada um e não sobrará nenhuma flor.

Atenção: As estimativas podem ser outras, mas o resultado final é sempre o mesmo.

Fonte: (DANTE, 2018, p. 48).

Com a análise, de modo superficial, dos livros apresentados, podemos notar a evolução da linguagem adotada nos livros didáticos, de onde havia o predomínio de uma abordagem basicamente tecnicista, onde o aluno deve absorver passivamente o que o professor transmite[3] para uma mais dialógica procurando, sempre que possível, dar significados concretos aos alunos naquilo que se procura transmitir, mas quando se refere as operações de multiplicação e divisão, no ano/série em questão, não são apresentados mais possibilidades de resolução, sendo sempre o algoritmo usual na multiplicação e na divisão, onde nesse, há apenas uma única alternativa além da oferecida.

Apresentamos, então, alguns métodos de possível utilização na multiplicação e divisão com técnicas diferenciadas do convencional, visando indicar algumas ideias de como podemos facilitar o desenvolvimento e o aprendizado do aluno por meio de formas alternativas para realizar esses cálculos. A seguir serão apontados os métodos que serão detalhados no decorrer dessa obra, a começar pelos métodos da multiplicação e em seguida a divisão.

1.2.1 Métodos do Ensino da Multiplicação.

Método Egípcio: O sistema de numeração egípcio é baseado no princípio aditivo e a forma de realizar a multiplicação, e também a divisão, se baseia em duplicações sucessivas. Enfatizamos a importância da adição nesse processo e as potências de base 2, pois qualquer número pode ser formado a partir da adição de tais potências.

Método Russo: Atribuído a camponeses da Rússia, essa forma de multiplicação é semelhante com o método egípcio no qual, quando se era necessário realizar uma multiplicação, dobrava-se o valor de um dos fatores e o outro era reduzido a metade, processo esse que se repetia até atingir o ponto desejado para encontrar o resultado.

---

[3] MENEZES, Ebenezer Takuno de. Verbete pedagogia tecnicista. Dicionário Interativo da Educação Brasileira - EducaBrasil. São Paulo: Midiamix Editora, 2001. Disponível em <https://www.educabrasil.com.br/pedagogia-tecnicista/>. Acesso em: 18 jan 2021.

Método Árabe: A multiplicação árabe, ou método da Gelosia, possivelmente de origem indiana, amplamente utilizada pelos árabes e repassados para os europeus orientais com efetiva utilização nos séculos XV e XVI, onde basicamente construímos uma tabela onde o número de colunas e de linhas são de acordo com o número de algarismos dos fatores e em cada retângulo se traça uma linha diagonal, onde realizamos a multiplicação de algarismo por algarismo.

Método Chinês: Esse método é atribuído aos chineses na qual utilizavam varetas de bambu dispostas tanto na vertical quanto na horizontal com “pontos” de interseção entre ambas, sendo que as varetas foram substituídas por linhas “desenhadas”, mas que obedecem a morfologia e procedimentos metodológicos adotados com as varetas.

1.2.2 Métodos do ensino da divisão.

Método da Costura: Esse método consiste em construir uma tabela com os múltiplos do divisor e, de acordo com os resultados, reorganizar os algarismos do dividendo de modo a haver somente esses múltiplos que, comparado com a tabela, são os algarismos do quociente.

Método das subtrações sucessivas: Como o próprio "nome" indica, este método envolve subtrair o divisor do dividendo, então subtrair o divisor do resultado da subtração e, em seguida, repetir o processo até que a subtração não seja mais possível e o resultado da divisão será número de vezes que o processo foi executado.

Algoritmo Egípcio: O método utiliza a mesma tabela gerada pelo método da multiplicação, porém com uma abordagem distinta, onde é realizada as duplicações do divisor, diferentemente da multiplicação onde pode ser realizado com qualquer um dos fatores.

1.3 DIFICULDADE DE APRENDIZAGEM EM MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

A dificuldade na aprendizagem relacionada à matemática não é um assunto novo, ela vem sendo julgada como uma disciplina de difícil compreensão por vários alunos há muito tempo. Existem vários fatores que levam o indivíduo ter dificuldades com a matemática mesmo sendo um mecanismo que ele usa todos os dias em sua vida, como até o simples fato de ver a hora em seu relógio.

As Dificuldades de Aprendizagens (DAs) podem ser originária de diversos fatores desde condições hereditárias como interações com o ambiente, conforme afirmam Coll; Marchesi; Palacios, 2004, p. 54, descrevendo um pequeno resumo das causas das Dificuldades de Aprendizagens que costumam ser atribuídas a:

> a) condições intrínsecas da pessoa que apresenta as DAs (por exemplo, a herança, a disfunção cerebral mínima, ou os atrasos maturativos);
> b) circunstâncias ambientais nas quais se dá o desenvolvimento e/ou aprendizagem (como, por exemplo, ambientes familiares e educativos pobres, projetos instrucionais inadequados, etc.);
> c) uma combinação das anteriores em que as condições pessoais são influenciadas – de forma positiva ou negativa, conforme os casos – pelas circunstâncias ambientais.

Segundo os autores, é possível estabelecer as diferentes formas de apresentar as Dificuldades de Aprendizagens, apontado que relação entre o indivíduo com o ambiente é um fator crucial pois “conforme se acentuem mais ou menos as variáveis pessoais ou as ambientais na origem da dificuldade”, dessa forma, as dificuldades de aprendizagens “é o resultado da influência recíproca entre a pessoa e o ambiente” (p. 54) e a Figura 14 destaca algumas teorias que explicam as Dificuldades de Aprendizagens por meio dos “atrasos maturativos”[4].

[4] Segundo COLL; MARCHESI; PALACIOS, p. 55, “atrasos maturativos” [...] são usados mais comumente a partir de posições cognitivas e do processamento da informação, e referem-se sobretudo a alterações psicológicas e/ou neurológicas que dificultam a atividade mental normal.

Figura 14 – Explicações sobre a causa das Dificuldades de Aprendizagens.

PESSOA

TEORIAS NEUROLÓGICAS
- Herança
- Dano cerebral
- Disfunção cerebral mínima

TEORIAS SOBRE DÉFICITS DE PROCESSOS PSICO(NEURO)LÓGICOS SUBJACENTES
- Perceptivos
- Linguísticos

TEORIAS SOBRE ATRASOS MATURATIVOS
- Neurológicos:
  - Do hemisfério direito
  - Do hemisfério esquerdo
- Psicológicos:
  - Da atenção
  - No processamento ativo e espontâneo da informação

TEORIAS INTEGRADORAS
- Baseadas em processos psicológicos subjacentes
- Baseadas no processamento da informação

TEORIAS CENTRADAS NO AMBIENTE SOCIAL E EDUCATIVO
- No ambiente sociológico
- No ambiente educativo (familiar e/ou escolar)

TEORIAS CENTRADAS NA PROJEÇÃO DA TAREFA

AMBIENTE

Fonte: (COLL; MARCHESI e PALACIOS, 2004, p.54).

Dentro do contexto relacionado ao ensino da matemática, Toledo e Toledo (1997) afirmam que existem diversas razões desse insucesso, como exemplo, “métodos de ensino inadequado; falta de relação estreita entre a matemática que se aprende nas escolas e as necessidades cotidianas; ou defasagem da escola quanto aos recursos tecnológicos mais recentes” (p. 10).

Do ponto de vista dos autores, os aspectos causadores dessas dificuldades acabam dificultando para o educador o alcance das metas esperadas em suas aulas. Desse modo é necessário dar oportunidade ao professor para que ele possa descobrir os motivos de não alcançar, em suas aulas, os objetivos por ele traçado. Muitas vezes, esses objetivos não são conquistados pelo fator de não saberem quais aspectos ocasionam nesse insucesso. Uma forma possível de tentar reduzir essas dificuldades, no que se refere ao ensino das operações, é o fato que se deve trabalha-las de forma que envolva situações problemas onde tal situação tenha relação direta com o cotidiano do educando, ao invés de apresentar uma longa lista de exercícios, fazendo com que não haja uma identificação por parte dos alunos em relação ao assunto exposto. No entanto trabalhar as operações vai bem mais além.

Nesse sentido, Sá enfatiza o aspecto investigativo, que faz parte da essência do homem e de sua importância na formação do aluno, tanto na sua trajetória acadêmica quanto em suas vivencias pessoais, onde afirma que:

> Enquanto esse espírito investigador [...] permanecer se desenvolvendo nas fases posteriores, conduzira o aluno a um amadurecimento científico e matemático que o tornará mais autônomo e consciente da sua capacidade de apostar na curiosidade e na possibilidade de buscar o conhecimento através da investigação (2009, p. 19).

No que tange diretamente as operações abordadas (multiplicação e divisão), segundo Toledo e Toledo (1997, p.120), ‘‘a multiplicação é vista sob o seu aspecto de adição de parcelas iguais’’ e, a partir desse ponto de vista, é isso que buscamos em um primeiro momento, embora seja bem sabido que essa não é a única habilidade na qual o professor possa se apegar para transmitir o conceitos de multiplicação mas deve encontrar novos modos, pois a forma como a multiplicação será apresenta aos alunos pode trazer mudanças fundamentais em suas vidas.

> Ao decidir qual forma de escrita irá usar, o professor deve ter muito claro o modo como vai trabalhar as tabuadas- ou *fatos fundamentais* - da multiplicação. Muitas vezes, apresenta-se ao aluno uma das formas da escrita multiplicativa e, ao introduzir-se a tabuada, utiliza-se de outra forma, o torna ainda mais tortuoso o estudo ‘‘dessas terríveis tabelas’’. (TOLEDO E TOLEDO, 1997, p. 122).

Ao decidir que forma de escrita usar, o professor deve ser muito claro sobre como funciona a tabuada (ou fatos básicos). Normalmente, uma forma de escrita de multiplicação será apresentada aos alunos, quando a tabuada for introduzida, ela será usada de outra forma, o que tornará o estudo "dessas tabelas terríveis" mais tortuoso.

É de grande importância salientar que embora o aluno decore a tabuada, não se pode permitir que esses educandos fiquem entrelaçado a memorização ou listas de atividades, pois esses fatores podem ocasionar a eles nem saberem os fatos fundamentais da multiplicação por estarem habituados a tantas listas que só se servirão para memorizar e decorar sem dá oportunidade de novos horizontes ao aluno. Nesse contexto, a forma como a multiplicação é desenvolvida pelo professor se torna um fator determinante.

No que tange à divisão, quando se trata de entender o contexto que leve a execução da operação, temos um agravante que são as ideias relacionadas a ela que são a ideia de repartir igualmente e a ideia de medida (quantas vezes cabe), sendo que a primeira é mais enfatizada durante o desenvolvimento do conteúdo e isso se reflete na forma como o aluno age quando se depara com a divisão como exposto por Toledo e Toledo (1997) que, quando duas situações são propostas aos alunos onde o procedimento de solução é o mesmo porém cada uma relacionada com as ideias se divisão, “os alunos não conseguem acreditar que situações resolvidas por ações tão diferentes podem ser solucionadas da mesma maneira” (p. 146).

Outra dificuldade apontada pelos autores quando se trata da divisão, está relacionada com a “dificuldade dar significado à representação simbólica” (p. 150), assim, é necessário que os alunos compreendam a função da representação da escrita como elemento de comunicação. Portanto, quando os alunos criam seus próprios métodos de comunicação de descobertas, os professores podem continuar a propor métodos formais como um método de comunicação geral.

Em relação ao tópico de Dificuldades de Aprendizagem, um tema que não pode ser deixado de lado é a discalculia que, segundo de Vieira (2004, p.111, apud BERNARDI; STOBAUS, 2011, p. 50), “significa, etimologicamente, alteração da capacidade de cálculo e, em um sentido mais amplo, as alterações observáveis no manejo dos números: cálculo mental, leitura dos números e escrita dos números.” É importante ressaltar que essa condição pode estar presente em alunos que possuem grandes capacidades em determinadas áreas do conhecimento, mas têm certas deficiências na execução de uma ou mais operações matemáticas, entretanto, se a discalculia não for detectada previamente, ela causará grande prejuízo ao aprendizado do aluno.

Bernardi; Stobaus (2011), aponta que no estudo de Kosc (1974), foi proposto seis tipos de dificuldades relacionados à discalculia, podendo também se expressar em diferentes combinações e se relaciona a outras dificuldades de aprendizagem, como crianças com dislexia ou déficit de atenção e hiperatividade. Esses subtipos são divididos em:

> – discalculia verbal: dificuldades em nomear quantidades matemáticas, os números, os termos e os símbolos;
> – discalculia practognóstica: dificuldades para enumerar, comparar,

> manipular objetos reais ou em imagens;
> – discalculia léxica: dificuldades na leitura de símbolos matemáticos;
> – discalculia gráfica: dificuldades na escrita de símbolos matemáticos;
> – discalculia ideognóstica: dificuldades em fazer operações mentais e na compreensão de conceitos matemáticos; e
> – discalculia operacional: dificuldade na execução de operações e cálculos numéricos (BERNARDI; STOBAUS, 2011, p. 49).

Devemos ter em mente, quanto professores da educação básica, que as barreiras que proporcionam, ou até mesmo agravam, as dificuldades de aprendizagem devem ser contornadas por meio de estratégia que visam aproximar do aluno, e de sua vivencia de mundo, aos saberem matemáticos apresentados a eles, nesse sentido, o texto do PDE (Plano de Desenvolvimento da Educação), se referindo a estratégia de ensino baseada na resolução de problemas mas que pode facilmente ser destacada para outra estratégias e metodologias de ensino, afirma que:

> A reflexão sobre as estratégias de ensino deve considerar a resolução de problemas como eixo norteador da atividade matemática. A resolução de problemas possibilita o desenvolvimento de capacidades, tais como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos, além de estimular formas de raciocínio como intuição, dedução e estimativa. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (BRASIL, 2011, p. 196)

2. PROPOSTAS METODOLÓGICAS ALTERNATIVAS

Nesse capítulo, vamos tratar a respeito da história da matemática dando ênfase à aritmética e logo em seguida, uma explanação sobre os métodos, tanto de multiplicação quanto de divisão, mostrando como são executados e o contexto histórico, se houver, de cada método.

2.1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA - ARITMÉTICA

A história da matemática está interligada a história da humanidade e definir quando e como surgiu a matemática é algo mais complexo que se imagina, pois dependendo do aspecto matemático em questão, podemos estabelecer "inícios" diferentes, "como usualmente se considera como a matemática mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número" (EVES, 2011, p. 25), podemos supor que o conceitos de *número* e o processo de *contar* surgiu com o homem primitivo remontando a mais de 50.000 anos, logo, podemos concluir que o senso numérico antecedeu a escrita numérica, que por sua vez, antecede a escrita da linguagem. Tendo em vista que, com o desenvolvimento gradual das sociedades, surgiu a necessidade de registrar "empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. (...) ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira (...)." (EVES, 2011, p. 26). A partir desse momento, pode ter surgido a verbalização de sons para representar essas contagens.

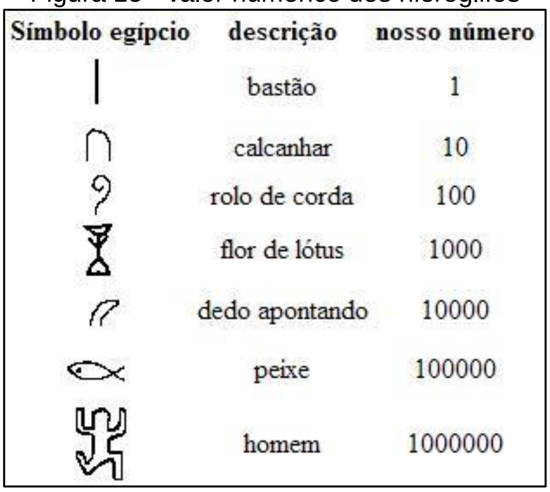
Com a necessidade de realizar contagens mais extensas, houve, então, a sistematização dessas contagens surgindo as bases numéricas, sendo a mais comum a 10, provavelmente devido o número de dedos nas mãos, porém foi utilizado outros números como base, a saber, o 2, sendo um exemplo os nativos de Queensland, 3 e 4 por tribos primitivas, também 5, *sistema quinário*, 12, provavelmente foi utilizado no período pré-histórico e resquícios nos dias de hoje ainda são utilizados como a 12 polegada equivale a "1 pé", horas de um relógio e meses do ano. Há ainda o sistema vigesimal, de base 20, usado pelos celtas e o sistema sexagesimal, onde a base é 60, utilizado pelos babilônios e, atualmente, utilizado para "medir" o tempo e ângulos.

A partir de aproximadamente 4.000 anos antes da Era Comum, apareceram, coincidentemente, a escrita, a roda e o uso dos metais. Desde então, passamos a conhecer o que foi feito por nossos antepassados do estágio chamado potâmico, “a parte mais antiga do período histórico” (BOYER, 1974, p. 7) pois as civilizações dessa época se desenvolveram às margens de rios: Egito, no Rio Nilo, a Mesopotâmia, entre os Rios Tigre e Eufrates, a China, no Rio Yang-Tsé e a Índia, no Rio Indo.

No que tange ao Egito, grandes feitos matemáticos na engenharia, permitiu a construção de obras também grandiosas como as pirâmides, em Gizé, perto da cidade do Cairo, e como foram construídas até hoje é um mistério, como é o caso da pirâmide de Quéops, para abrigar o corpo do faraó Khufu, com “mais de 2 milhões de blocos de pedra com, em média, 2,5 toneladas de peso cada uma, ajustados entre si muito cuidadosamente” (EVES, 2011, p. 67). A Grande Pirâmide é a única das sete maravilhas do mundo antigo que se preservou até hoje.

A interpretação dos hieróglifos (escrita utilizada pelos egípcios) se deve, de certa a forma, a Napoleão Bonaparte que, em 1799, trouxe do Egito para a França uma relíquia chamada Pedra de Roseta, onde existiam inscrições em três línguas: Grego, Demótico e Hieróglifos. A partir daí, Jean François Champolion (1790-1832) na França e Thomas Young, na Inglaterra, conseguiram traduzir os hieróglifos, (BOYER, 1974, p. 8; EVES, 2011, p. 70, 71), assim, a numeração egípcia pode ser conhecida. Os egípcios usavam um sistema de numeração de base 10 e os símbolos usados eram os seguintes:

Figura 15 - valor numérico dos hieróglifos



Símbolo egípcio	descrição	nosso número
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo apontando	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

Fonte: (MIRANDA, c2019).

Dentre as várias descobertas, dentro da aritmética, podemos salientar o uso de frações, predominantemente as unitárias podendo ser observadas no Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes (o escriba que transcreveu o papiro) que continha 84 problemas de matemática, é considerado como:

> Uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos. (EVES, 2011, p. 70)

As frações unitárias possuíam tabelas para decomposição de frações do tipo $\frac{2}{n}$, com n ímpar, variando de 5 a 101, em soma de frações unitárias, apenas a fração $\frac{2}{3}$, não se sabe ao certo, não era decomposta como as outras e, de acordo com a tabela, os matemáticos concluíram que eles usavam a seguinte fórmula: $\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$ ou $\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q\frac{p+q}{2}}$, mas a fração $\frac{2}{15}$ é a única exceção a esta fórmula (BOYER, 1974). A operação fundamental dos egípcios era a adição, sendo a multiplicação e a divisão efetuadas pelo processo chamado de "duplação", a ser detalhadas mais à frente.

A Mesopotâmia (Entre rios), era a região situada entre os rios Tigre e Eufrates, e as civilizações mesopotâmicas, durante o período de 2.000 AEC desenvolveram uma escrita que, antes mesmo dos hieróglifos, que possivelmente pode ter sido derivado dela, era feita em umas tabletas de barro, onde eram aquecidas ao sol ou no forno e as marcações eram feitas com um estilete em forma de cunha (prisma triangular) daí a escrita se chamar cuneiforme (em forma de cunha). Foram encontradas, só em Nipur, 50.000 destas tabletas, e graças a Grotefend, no início do século XIX, que fez sua tradução, passamos a saber mais sobre a matemática mesopotâmica. (BOYER, 1974 e EVES, 2011).

Eles usavam um sistema sexagesimal, e o uso da base 60 tornava mais simples as frações, por ter 60, ao invés de dez, divisores próprios, adotou-se o sistema posicional e em algumas representações eles deixavam um espaço em branco entre os números para indicar ausência de algarismo naquela ordem, o que seria um passo para a criação do zero. Como a base era sexagesimal, eles precisavam de até dois dígitos para representar cada ordem na numeração, pois os "dígitos" iam de 0 até 59.

Um número, portanto, era assim representado: 21,35;31,27,50, significando 21.60 + 35 + $31.60^{-1}+27.60^{-2}+50.60^{-3}$, onde o ponto e vírgula separa a parte inteira da parte fracionária e a vírgula separa as ordens. Como podemos verificar, os mesopotâmicos usavam a notação posicional para escrever as frações como é usado hoje. A tableta 7299 (elas foram todas numeradas) contém a extração da raiz quadrada de 2 com três casas decimais: 1;24,51,10 valendo 1,414222 no nosso sistema, com uma aproximação de 0,000008 do número verdadeiro. Era usado um algoritmo para a extração da raiz quadrada que foi atribuído a matemáticos muito mais tarde. O processo era o seguinte: seja $x = a$, a raiz desejada e a_1 uma primeira aproximação desta raiz. Fazendo $b_1 = \frac{a}{a_1}$. Se a_1 for grande b_1 será pequeno e vice-versa. Então façamos $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Outra vez, fazendo $b_2 = \frac{a}{a_2}$. Usando o mesmo raciocínio, se $a2$ é grande b_2 é pequeno e vice-versa. Tira-se a média aritmética entre a_2 e b_2 e assim dá-se prosseguimento ao processo. Na tableta, para a extração da raiz quadrada de 2, eles usaram para a_1 o valor 1,5 (BOYER, 1974).

Para os gregos, a aritmética basicamente se dividia em dois segmentos, uma com estudos de relações abstratas e outra voltada para a prática, ou seja, os cálculos numéricos e “essa distinção atravessou a Idade Média chegando até por volta do final do século XV, quando surgiram textos que tratavam as facetas teórica e prática da abordagem dos números sob a designação única de *aritmética*” (EVES, 2011, p. 98). Dentro dessa visão, um importante movimento para o desenvolvimento da teoria dos números foi a escola pitagórica, criada dor Pitágoras de Samos, onde a premissa principal era que todas as coisas adivinham dos números (naturais) e suas estruturas numéricas, era uma espécie de sociedade de secreta e que toda descoberta tinha caráter coletivo, mas eram atribuídos ao mestre. Mesmo sendo exímios matemáticos que valorizavam o racionalismo, possuíam concepções místicas em suas doutrinas. Dessa forma, muitas foram as descobertas como também muitas foram perdidas pois não havia os registros, como os *números amigáveis* onde “dois números se dizem amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro” (EVES, 2011, p. 98), os *números perfeitos*, na qual o número é igual à soma de seus divisores próprios, *números deficientes*, onde a soma de sues divisores é menos que o seu valor, *números abundantes*, em que seu valor é menor que a soma de seus divisões, um exemplo da aplicação “religiosa” desses conceitos temos que:

> Deus criou o mundo em seis dias, um número perfeito pois 1 + 2 + 3 = 6. Por outro lado, conforme observou Alcuíno (735-804), toda a raça humana descende das oito almas da arca de Noé, sendo essa criação imperfeita porque 8 é deficiente, já que 1 + 2 + 4 < 8 (EVES, 2011, p. 99).

Provavelmente o que contribuiu para as ideias de Pitágoras, tanto no campo da matemática, quanto da filosofia quanto da religião, se deram pela viajem ao Egito e Mesopotâmia, e possivelmente à Índia, diferindo da forma de abordar a matemática, enquanto que no "Egito e Mesopotâmia os elementos da aritmética e geometria eram essencialmente exercícios de aplicação de processos numéricos a problemas específicos, fossem eles referentes a cerveja ou pirâmide ou herança de terras" (BOYER, 1974, p. 36), para eles (pitagóricos), estava mais relacionado com o amor à sabedoria do que aplicação em problemas práticos do cotidiano. A exemplo disso, temos o teorema de Pitágoras que, provavelmente está ligado aos babilônios, foi sugerido tal nome como justificativa de "que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele, mas não há meios de se verificar essa conjectura" (BOYER, 1974, p. 37).

Um dos grandes marcos da matemática são *Os Elementos* de Euclides que, segundo Boyer, "são frequentemente considerados sinônimos" (1974, p. 74), onde há livros dedicados à aritmética, sendo que no Livro VII há o início do processo "conhecido como *algoritmo euclidiano*, para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois inteiros são primos entre si [...] estabelecem-se ainda nesse livro muitas propriedades numéricas básicas" (EVES, 2011, p. 173) e no Livro IX é encontrado vários teoremas formidáveis como:

> A Proposição IX 14 é equivalente ao importante *teorema fundamental da aritmética* — a saber, que *todo inteiro maior que 1 pode se expressar como produto de primos de uma e, salvo quanto à ordem dos fatores, uma só maneira* [...] A prova de Euclides da proposição IX 20 (*o número de números primos é infinito*) é considerada universalmente pelos matemáticos como um modelo de elegância matemática. ela emprega o método indireto, ou *reductio ad absurdum*[5] (EVES, 2011, p. 174).

No que se refere a matemática oriental, podemos destacar a matemática chinesa que "após o declínio da matemática grega clássica, [...] tornou-se uma das mais criativas do mundo. [...] Produzindo resultados que a Europa só iria redescobrir

[5] Do latim, "redução ao absurdo".

muito mais tarde, durante ou após o Renascimento” (EVES, 2011, p. 246), sendo pioneiros em realizações como: a criação de um sistema de numeração decimal posicional; compreender os números negativos; encontrar valores precisos do “pi” (π); apresentou o triangulo de Pascal; desenvolveu a regra de três entre muitas outras contribuições. Na Índia, os hindus tiveram um importante papel no diz respeito ao sistema de numeração posicional adotada atualmente que possui por base o dez, no que se refere aos cálculos, a “adição e a multiplicação eram efetuadas [...] de modo muito semelhante ao que usamos hoje, só que parecem [...] trabalhar da esquerda para a direita, usando pequenas lousas com tinta removível branca ou uma tábua coberta de areia ou farinha” (BOYER, 1974, p. 158), e esse desenvolvimento foi crucial para a matemática como conhecemos hoje que, segundo Eves:

> O desenvolvimento de algoritmos para nossas operações aritméticas elementares começou na Índia, talvez por volta do século X ou XI; esses algoritmos foram adotados pelos árabes e mais tarde transportados para a Europa Ocidental, onde se modificaram até chegar à sua forma atual. esse trabalho recebeu atenção considerável dos autores de aritméticas do século XV (2011, p.254).

Durante o Renascimento, muitos livros sobre aritmética foram impressos e que, basicamente, se dividiam em dois tipos, os escritos em latim por intelectuais, geralmente ligados à igreja e os escritos na linguagem local por professores práticos que tinham o intuito de preparar jovens para exercer atividades comerciais. O livro impresso mais antigo, de 1478, e de autor anônimo e a *Aritmética de Treviso*, onde o seu teor trata de “uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, a efetuar cálculos com eles e que contém aplicações envolvendo sociedades e escambo” (EVES, 2011, p. 299). Vale destacar que em 1491 foi publicada em Florença, um livro de aritmética que obteve grande importância cujo autor foi Filippo Calandri, mas o seu destaque é o fato de ser o primeiro impresso a conter um exemplo do processo de divisão moderno e a ilustrar os problemas. Durante os séculos seguintes, processos de cálculos aritméticos foram aprimorados, outros descobertos até chegar à forma como conhecemos hoje e que tem um papel fundamental na sociedade, se fazendo presente em nosso cotidiano e um dos assuntos matemáticos de grande importância no currículo escolar.

2.2. ALTERNATIVAS PARA A MULTIPLICAÇÃO

Vejamos quatros métodos alternativos à realização da multiplicação, dentro de seus respectivos contextos históricos, se houver, e para facilitar a comparação do modo operante de cada métodos, foi escolhido, arbitrariamente, os fatores 23 e 46 para a realização dos cálculos.

2.2.1. Método egípcio

Como o sistema de numeração é baseado no princípio aditivo, a forma de realizar a multiplicação, e também a divisão, "eram em geral efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências de 2." (EVES, 2011, p. 72).

Tomemos por exemplo a multiplicação de modo a achar o produto 23 por 46. Como 23 = 16 + 4 + 2 + 1, somamos os múltiplos correspondentes a 46. Podemos verificar esse procedimento na Tabela 1.

Tabela 1 - Duplicação de 1 e 46.

1	46
2	92
4	184
8	368
16	736
23	1058

Fonte: Próprio autor.

Somando os múltiplos destacados de 46, encontramos o valor de 1.058. Podemos perceber que esse método consiste em relacionar o número 1 a um dos fatores, no exemplo o 46, da multiplicação, a partir daí, cada linha tem como resultado o dobro do valor da linha anterior, esse procedimento é realizado até o momento onde o valor oriundo do número 1 ultrapasse a metade do outro fator, nesse caso o 23, e verificamos em quais linhas a soma representa esse valor e somamos os valores correspondentes, encontrando assim, o produto (46 + 92 + 184 + 736 = 1.058).

Esse procedimento possibilitou aos egípcios a não necessidade de memorizar as tábuas de multiplicação e se adequar à utilização do ábaco (EVES, 2011, p. 73).

Uma aplicação desse método se encontra no problema 79 do papiro de Rhind[6] que trata de uma progressão geométrica e que possui a seguinte citação:

> “sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas de trigo, 16807 hecates”. É presumível que o escriba estava tratando de um problema, talvez bem conhecido, em que cada uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas de trigo, cada uma delas teria produzido sete medidas de grãos. (BOYER, 1974, p. 12).

O autor presume que a provável resposta do problema não seria a prática que seria a “medida de grãos poupados”, mas sim a não-prática, que é a soma de todos itens abordados.

2.2.2. Método russo

O método Russo é semelhante ao método egípcio pois trabalha com a duplicação de um dos fatores, tendo o diferencial de reduzir à metade o outro fator, dessa forma, trabalha-se com “dobro” e “metade”. Esse procedimento é atribuído a camponeses russos, mas sem comprovação bibliográfica, sendo encontrado na internet vários tutoriais como o do site “Só matemática”[7].

O procedimento consiste em organizar os fatores em duas colunas onde o primeiro fator é sempre reduzido à metade e quando o quociente é ímpar, reduzimos à metade o número par imediatamente anterior até restar na última linha o número 1, enquanto que o fator da segunda coluna sempre tem o valor dobrado e o produto é a soma dos números da segunda coluna onde o número correspondente da primeira coluna é ímpar, como podemos perceber na Tabela 2. Tomando novamente a multiplicação de 23 por 46, temos:

---

[6] O papiro Rhind ou Ahmes, é um papiro datado em cerce de 1650 AEC com cerca de 30 cm de largura por 5 m de comprimento que trata da aplicação de conceitos matemáticos.

[7] O método de multiplicação russa. Só Matemática (s.d.)., Disponível em: https://www.somatematica.com.br/curiosidades/c59.php. Acesso em: 20 nov. 2019.

Tabela 2 - “meios” de 23 e dobros de 46

23	46
11	92
5	184
2	368
1	736
	1058

Fonte: Próprio autor.

Somando os números da segunda coluna das linhas destacadas, temos 46 + 92 + 184 + 736 = 1058, assim, o produto de 23 por 46 é 1058.

2.2.3. Método árabe

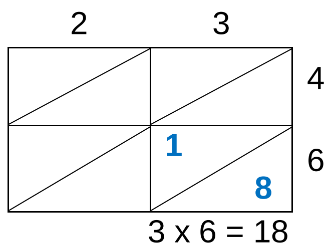
Esse foi um dos métodos mais populares nos séculos XV e XVI para realizar a multiplicação, era favorito pelos Árabes e foi repassado aos europeus ocidentais. Esse procedimento também é chamado de gelosia “(em francês “jalousie” que significa “rótula”)” (EVES, 2011, p. 323), pois o modelo de grade lembra uma janela, sendo assim, também chamado de método da “grade” e é um processo bastante antigo, onde provavelmente tenha surgido na Índia “pois aparece num comentário sobre o *Lilāvatie* em outros trabalhos hindus. Da Índia sua trajetória seguiu por trabalhos chineses, árabes e persas” (EVES, 2011, p. 323).

Para aplicar esse método, construímos uma tabela onde o número de colunas e de linhas são de acordo com o número de algarismos dos fatores e, em cada retângulo, se traça uma linha diagonal, onde realizamos a multiplicação de algarismo por algarismo e o resultado é escrito em cada “cédula” onde se coloca na parte superior o algarismo das “dezenas” e na inferior os das “unidades”, no final do processo, somamos diagonais, obtendo assim, o produto.

Vejamos de modo prático, a multiplicação 23 por 46 no método em questão.

Multiplicando o algarismo 3 (da segunda coluna) pelo algarismo 6 (da segunda linha), colocamos o algarismo das dezenas (1) na parte superior a linha diagonal e o algarismo das unidades (8) na parte inferior da linha diagonal, destacado no Quadro 10.

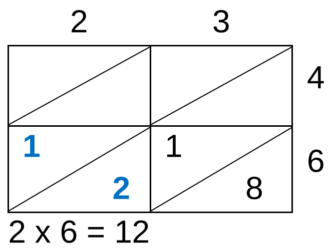
Quadro 10 – Método árabe, produto dos algarismos 3 e 6



Fonte: Próprio autor.

Repetimos o processo com os algarismos 2 e 6 (primeira coluna e segunda linha), Quadro 11, tendo como resultado 1 “dezena” (ficando parte superior da cédula) e 2 “unidades” (ficando na parte inferir da cédula).

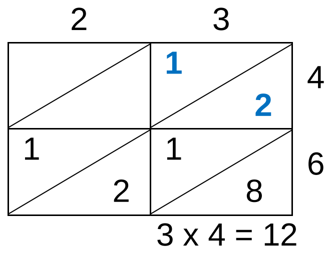
Quadro 11 – Método árabe, produto dos algarismos 2 e 6



Fonte: Próprio autor.

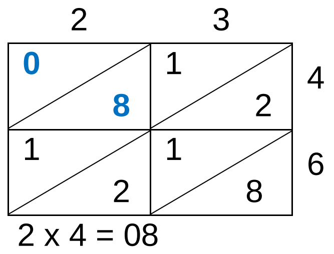
Realizando o mesmo procedimento com os algarismos da primeira linha com o da segunda coluna e os algarismos da primeira linha e primeira coluna, tendo o Quadro 12 e o Quadro 13 com os resultados:

Quadro 12 – Método árabe, produto dos algarismos 3 e 4.



Fonte: Próprio autor.

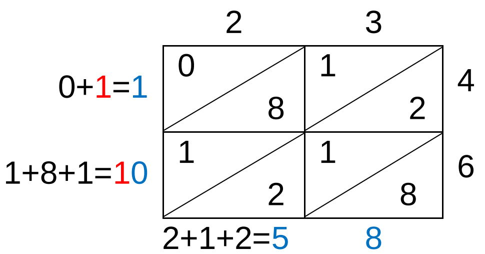
Quadro 13 – Método árabe, produto dos algarismos 2 e 4.



Fonte: Próprio autor.

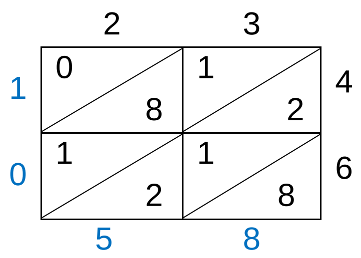
Ao final do processo, adicionamos os algarismos que estão na mesma diagonal, começando da direita para a esquerda, conforme o Quadro 14, e quando a soma possuir dezenas, esse algarismo é adicionado aos números da diagonal a esquerda, obtendo, assim, o resultado da multiplicação evidenciado pelo Quadro 15.

Quadro 14 – Método árabe, organização dos algarismos em suas ordens.



Fonte: Próprio autor.

Quadro 15 – Método árabe, resultado final.



Fonte: Próprio autor.

Portanto, o produto entre 23 e 46 é 1058.

2.2.4. Método chinês

A China é uma das antigas civilizações humanas, mas sabemos muito pouco sobre sua matemática antiga devido os poucos registros e a imprecisão dos registros históricos onde Boyer (1974, p. 143) afirma que “datar os documentos matemáticos da China não é nada fácil, as estimativas quanto ao Chou Pei Suang Ching, [...] considerado o mais antigo dos clássicos matemáticos diferem, por quase mil anos”.

O método chinês, aqui apresentado, atribuído aos chineses, que basicamente consistia na utilização de varetas de bambu, sendo agora, representado por linhas horizontais e verticais, onde a quantidade total de linhas representa a soma dos algarismos dos fatores. Um ponto a ser destacado, é o fato de não ter sido encontrado uma referência em obras acadêmicas que afirme a autoria desse método aos chineses, pelo contrário, há fontes, não acadêmicas, onde ele é apresentado como “método maia ou japonês”[8]. O que podemos afirmas sobre a matemática chinesa é que a característica do sistema numérico é o sistema decimal, posicional e com representação para o zero.

De acordo com Dauben (2007, p. 194) uma característica bem peculiar na matemática chinesa, era o uso do “tabuleiro de contagem”, que por meio de barras de contagem que eram dispostas nessa superfície, realizava-se os cálculos aritméticos com grande precisão de forma rápida e fácil, sendo utilizada para realizar

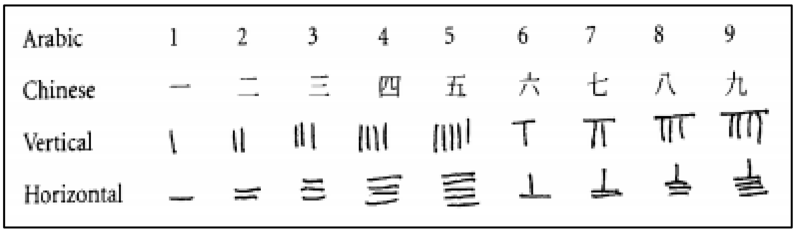
[8] Fonte: LLORENTE, 2017.

multiplicações e divisões e também no cálculo de raízes quadradas e cúbicas. No que se refere as barras empregas nos cálculos, Boyer (1974, p. 145) afirma que:

> Barras verdadeiras, de bambu, marfim ou ferro, eram carregadas em uma sacola pelos administradores e usadas para cálculos. As barras de contagem eram manipuladas com tal destreza que um escritor do século onze descreveu-as como “voando tão depressa que o olhar não podia acompanhar o movimento.

Na realização dos cálculos, os algarismos dos números eram representados por essas barras, que poderiam estar dispostas na “forma vertical” ou na “forma horizontal” (DAUBEN, 2007, p. 195, tradução nossa), conforme Figura 16, obedecendo alguns critérios de organização.

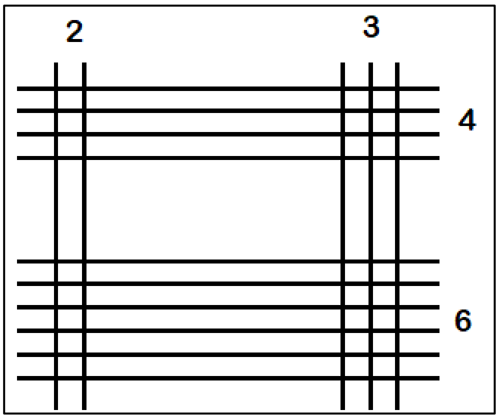
Figura 16 – Comparação entre os algarismos e suas representações.



Fonte: Dauben, 2007, p. 195.

A aplicação do método chinês ocorre do seguinte modo: inicialmente, representamos um dos fatores com as linhas posicionadas na vertical, nesse exemplo usamos o fator 23, dando um espaço entre as linhas que representam as unidades e dezenas. De modo semelhante, alocamos as linhas que representam o outro fator, nesse caso o 46, na horizontal de modo a haver interseções entre as linhas, conforme a Figura 17.

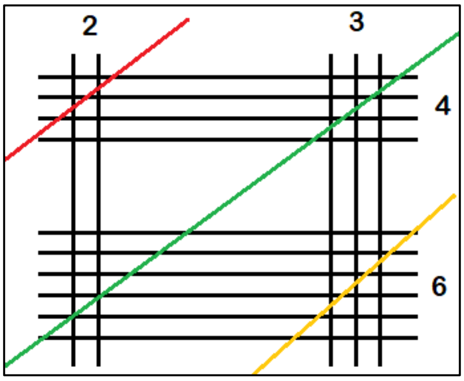
Figura 17 – Método chinês, disposição das linhas horizontais e verticais



Fonte: Próprio autor.

Nas interseções das linhas que representam os algarismos dos fatores, traçamos linhas diagonais, conforme a Figura 18, da direita para a esquerda, sendo que a primeira linha diagonal (amarela) representa as unidades, a segunda (verde) corresponde as dezenas, a vermelha representa as centenas e, se os fatores possuírem mais algarismos, continuamos com esse procedimento em todas as interseções.

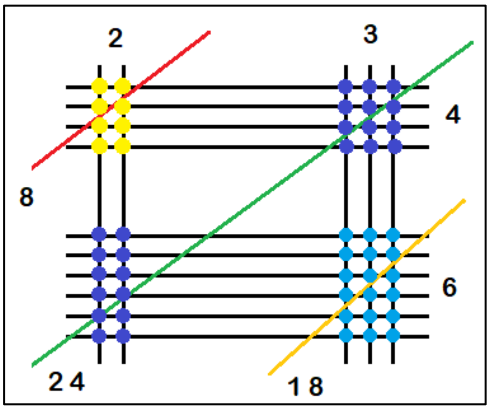
Figura 18 – Método chinês, traço das diagonais que representam as ordens



Fonte: Próprio autor.

Seguindo as linhas diagonais, "contamos" a quantidade de interseções entre as linhas que representam os algarismos dos fatores (para facilitar a análise, na Figura 19 atribuímos pontos coloridos entre as interseções). Quando a diagonal intercepta mais de um "encontro" entre as linhas, somamos todos os pontos que se relacionam com essa diagonal, como é o caso da linha verde.

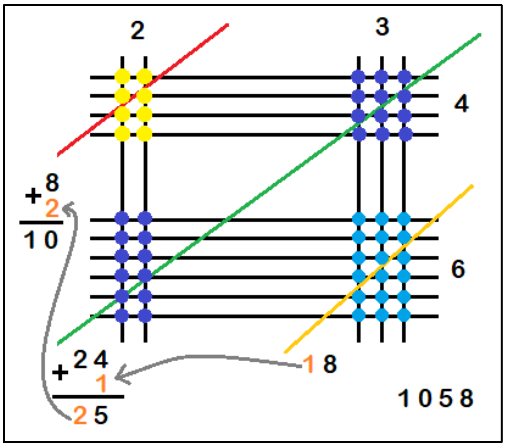
Figura 19 – Método chinês, contagem dos pontos de interseção.



Fonte: Próprio autor.

O procedimento final é organizar os valores encontrados com a soma dos pontos de interseção entre as linhas, de modo a identificar o algarismo das unidades, dezenas, centenas e assim por diante. No exemplo em questão, podemos notar pela Figura 20, na diagonal das unidades foram identificados 18 pontos (interseções).

Figura 20 – Método chinês, organização das ordens dos algarismos e resultado.



Fonte: Próprio autor.

Como a diagonal em amarelo representa as unidades, o algarismo “1”, que representa uma dezena, é adiciona à soma dos pontos da diagonal das dezenas (verde) e o algarismo “2”, equivalente a duas centenas, é adicionado a quantidade de centenas da diagonal vermelha, passando a ter 10 centenas, 5 dezenas e 8 unidades, logo, o produto de 23 por 46 é 1058.

2.3. ALTERNATIVAS PARA A DIVISÃO

Sendo essa operação a gerar as maiores dificuldades por partes dos estudantes a respeito das operações básicas, essa seção visa propor alternativas para essa operação, sendo, a seguir, alguns métodos, que assim como na multiplicação russa, não foi localizada referência bibliográfica para os dois primeiros método, mas possuem diversas páginas da internet em diferentes formatos que abordam tais propostas.

2.3.1. Método da costura

Esse método consiste em construir uma tabela com os múltiplos do divisor e, de acordo com os resultados, reorganizar os algarismos do dividendo de modo a haver somente esses múltiplos que, comparado com a tabela, são os algarismos do quociente.

De modo prático, vejamos a aplicação desse método na divisão de 36.946 por 13. Inicialmente, construímos uma tabela com os múltiplos do divisor, neste caso 13, conforme a Tabela 3.

Tabela 3 – Método da costura, múltiplos do fator 13.

13 x 0	0
13 x 1	13
13 x 2	26
13 x 3	39
13 x 4	52
13 x 5	65
13 x 6	78
13 x 7	91
13 x 8	104
13 x 9	117

Fonte: Próprio autor.

Agora, para ilustrar o procedimento prático mostrado na Figura 21, organizamos o Quadro 16 para tal que, a partir da esquerda para a direita, manipulamos os algarismos do dividendo de forma a encontrar os múltiplos encontrados na tabela anterior.

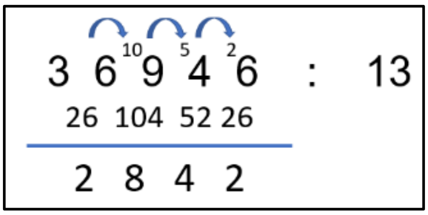
Quadro 16 – Método das costuras, organização do dividendo em múltiplos de 13.

36946
(26+10)946
26 10946
26 (104+5)46
26 104 546
26 104+ (52+26)
26 104 52 26

Fonte: Próprio autor.

Dividindo 26 104 52 26 por 13, temos:

Figura 21 – Método das costuras, aplicação prática do método.



Fonte: Próprio autor.

Logo, o resultado da divisão de 36.946 por 13 é 2.842.

2.3.2. Método das subtrações sucessivas

Como o próprio “nome” afirma, esse método consiste em subtrair o divisor do dividendo, do resultado dessa subtração, subtraímos novamente o divisor e repetimos esse procedimento até não ser mais possível realizar a subtração e o resultado da divisão é o número de vezes em que o procedimento foi realizado.

Vejamos como realizar a divisão 138 por 23 através desse método.

Quadro 17 – Método das subtrações sucessivas.

138 - 23 = 115
115 - 23 = 92
92 - 23 = 69
69 - 23 = 46
46 - 23 = 23
23 - 23 = 0

Fonte: Próprio autor.

Podemos perceber, pelo Quadro 18, que o procedimento de subtração ocorreu 6 vezes, logo a divisão de 138 por 23 tem como quociente 6. O método de subtrações sucessivas é bastante eficiente quando trabalhado com divisões que possuem quocientes de valores naturais pequenos, mas, por ser um procedimento exaustivo, se torna bastante trabalhoso quando o quociente apresenta valores elevados, como a divisão do método anterior, onde seria necessário realizar esse procedimento 2846 vezes, entretanto, esse esforço pode ser reduzido se aplicado juntamente com estimativas conforme a Figura 9, proposta por Andrini e Vasconcellos.

2.3.3. Método egípcio

A forma de realizar a divisão pelo método egípcio, utiliza a mesma tabela gerada pelo método da multiplicação, porém com uma abordagem diferenciada, na qual é realizada as duplicações do divisor, diferentemente da multiplicação onde pode ser realizado com qualquer um dos fatores. De modo prático, no método de divisão egípcio, estabelecemos duas colunas, na primeira o número 1 e na segunda, o número referente ao divisor, posteriormente realizamos a duplicação das linhas de forma que na coluna onde se encontra o divisor, a última das duplicações seja a metade (ou um “pouco” a mais) do dividendo, após isso, na coluna do divisor, realizamos a adição das linhas onde a soma seja o dividendo e adicionando os valores correspondes na primeira coluna, encontramos o quociente da divisão em questão.

Tomando novamente a divisão de 36.946 por 13 para figurar o método egípcio de divisão, ilustrado pela Tabela 4, inicialmente montamos a tabela relacionando o número 1 como o divisor 13 e realizamos as duplicações.

Tabela 4 – Método egípcio, duplicações de 1 e o divisor 13.

1	13
2	26
4	52
8	104
16	208
32	416
64	832
128	1664
256	3328
512	6656
1024	13312
2048	26624

Fonte: Próprio autor.

Como o dividendo 36.946 pode escrito do seguinte modo: 26.624 + 6.656 + 3.328 + 208 + 104 + 26, segundo o Quadro 19, o quociente tem como resultado, a soma dos valores correspondes aos termos da soma anterior, assim, a divisão 36.945 por 13 tem quociente igual a 2.842 (2048 + 512 + 256 + 16 + 8 +2)

Quadro 18 – Método egípcio, decomposição do dividendo em termos constantes na tabela.

36.946 = 26.624 + 10.322
36.946 = 26.624 + 6.656 + 3.666
36.946 = 26.624 + 6.656 + 3.328 + 338
36.946 = 26.624 + 6.656 + 3.328 + 208 + 130
36.946 = 26.624 + 6.656 + 3.328 + 208 + 104 + 26

Fonte: Próprio autor.

2.4 VALIDADE DOS MÉTODOS APRESENTADOS

Abordaremos nos tópicos seguintes, a validade matemática dos métodos utilizados nesse trabalho, com suas possíveis demonstrações ou argumentações.

2.4.1 Método egípcio – multiplicação e divisão

Inicialmente, devemos provar que todo número natural pode ser escrito, de forma única, como a soma de potencias de base 2 distintas, dessa forma, tomemos o número a e vamos determinar sua expansão binária. Dessa forma, dividindo o número a por 2, temos o quociente q_0, dividindo esse quociente por 2, encontramos o quociente q_1, seguido pelo quociente q_2 da divisão de q_1 por 2, seguido pelo quociente q_3 da divisão de q_2 por 2 e assim por diante.

Na divisão euclidiana, temos que, se a for ímpar, então $r_0 = 1$ ou $r_0 = 0$ se a for par; se q_0 for ímpar, logo $r_1 = 1$ ou caso q_0 seja par, então $r_1 = 0$; de modo análogo, $r_2 = 1$ se q_1 for ímpar ou , $r_2 = 0$ se q_1 for par. De modo geral, $r_{i+1} = 1$ se q_i for ímpar e $r_{i+1} = 0$ se q_i for par. Seguimos o processo até encontrarmos $q_{n-1} = 1$, quando temos $r_n = 1$. Portanto

$$a = r_0 . 2^0 + r_1 . 2^1 + r_2 . 2^2 + \cdots + r_n . 2^n .$$

Podemos perceber que, ao decompor um número natural em potencias de base 2, os coeficientes possíveis desses bases são apenas o número um ou o número zero, devido o divisor ser 2, logo os possíveis restos são um ou zero. Como $r_i = 0$ ou $r_i = 1 \ \forall \ i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, temos que a pode ser escrita como soma de potencias de base 2. ■

Tomemos por exemplo $a = 341$, logo, seguindo o processo descrito acima, temos:

$$341 : 2;\ q_0 = 170; r_0 = 1$$

$$170 : 2;\ q_1 = 85; r_1 = 0$$

$$85 : 2;\ q_2 = 42; r_2 = 1$$

$$42 : 2;\ q_3 = 21; r_3 = 0$$

$$21 : 2;\ q_4 = 10; r_4 = 1$$

$$10{:}\,2;\ q_5 = 5; r_5 = 0$$
$$5{:}\,2;\ q_6 = 2; r_6 = 1$$
$$2{:}\,2;\ q_7 = 1; r_3 = 0$$
$$1{:}\,2;\ q_8 = 0; r_8 = 1$$

Logo,

$$a = 1.2^0 + 0.2^1 + 1.2^2 + 0.2^3 + 1.2^4 + 0.2^5 + 1.2^6 + 0.2^7 + 1.2^8$$
$$a = 1 + 4 + 16 + 64 + 256$$

Com a expansão binária, é possível o desenvolvimento do algoritmo usado pelos antigos egípcios na multiplicação de dois números, fazendo uso de multiplicações e divisões por 2 além ainda de adições. A vantagem desse método é que só precisamos entender a tabuada de 2.

De modo geral, ao multiplicar a por b, podemos escrever a como potências de 2 e r_i sendo zero ou um, assim:

$$a.b = (r_0.2^0 + r_1.2^1 + r_2.2^2 + \cdots + r_n.2^n).b$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, temos:

$$a.b = r_0.2^0.b + r_1.2^1.b + r_2.2^2.b + \cdots + r_n.2^n.b$$

No exemplo para o procedimento de multiplicação, usamos os fatores 23 e 46, realizando a expansão binaria de 23, temos 23 = 1 + 2 + 4 + 16, logo:

$$23\,.\,46 = (1.2^0 + 1.2^1 + 1.2^2 + 0.2^3 + 1.2^4).46$$
$$23\,.\,46 = (1 + 2 + 4 + 16).46$$
$$23\,.\,46 = 1.46 + 2.46 + 4.46 + 16.46$$
$$23\,.\,46 = 46 + 92 + 184 + 736$$
$$23\,.\,46 = 1\,058$$

No caso da divisão pelo método egípcio e sabendo que pela divisão euclidiana dos números naturais, o dividendo é o produto do divisor pelo quociente[9] $(D = d.q)$, de certa forma, o cálculo inverso ao da multiplicação, já que são operações inversas, assim:

---

[9] Consideramos a divisão exata entre dois números naturais.

$$d.q = D$$
$$d.q = r_0.2^0.d + r_1.2^1.d + r_2.2^2.d + \cdots + r_n.2^n.d$$
$$d.q = (r_0.2^0 + r_1.2^1 + r_2.2^2 + \cdots + r_n.2^n).d$$

Dividindo ambos os membros pelo divisor, temos:

$$\frac{d.q}{d} = \frac{(r_0.2^0 + r_1.2^1 + r_2.2^2 + \cdots + r_n.2^n).d}{d}$$
$$q = r_0.2^0 + r_1.2^1 + r_2.2^2 + \cdots + r_n.2^n$$

O exemplo utilizado para exemplificar o método egípcio da divisão, que se tratava da divisão de 36.946 por 13

$$13.d = 36\,946$$
$$13.d = 26 + 104 + 208 + 3\,328 + 6\,656 + 26\,624$$
$$13.d = 2.13 + 8.13 + 16.13 + 256.13 + 512.13 + 2\,048.13$$
$$\frac{13.d}{13} = \frac{(2 + 8 + 16 + 256 + 512 + 2\,048).13}{13}$$
$$d = 2 + 8 + 16 + 256 + 512 + 2\,048$$
$$d = 2 + 8 + 16 + 256 + 512 + 2\,048$$
$$d = 2\,842$$

2.4.2 Método da multiplicação russa

Dado o produto de a por b, tomando por base a expansão binaria demostrada no item anterior, escrevemos dos dois fatores em duas colunas, uma ao lado da outra e na coluna da esquerda, colocamos em cada linha os números $a, q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$, onde $q_{n-1} = 1$, e, na coluna da direita, em cada linhas, os números $b, 2b, 4b, \dots, 2^n b$, temos:

$$\begin{array}{cc} a & b \\ q_0 & 2b \\ q_1 & 4b \\ \dots & \dots \\ q_{n-1} & 2^n b \end{array}$$

Sabendo que a paridade da linha $i - 1$ determinar se o resto r_i ou é 1 ou é zero e como $a = r_0 . 2^0 + r_1 . 2^1 + r_2 . 2^2 + \cdots + r_n . 2^n$, então, quando somamos os números da coluna da direita correspondentes aos números ímpares da coluna da esquerda, onde $r_i = 1$, obtemos o produto $a.b$.

2.4.3 Método da multiplicação árabe

Fazendo uso do exemplo utilizado nesse trabalho, que é o produto de 23 por 46, podemos notar que a multiplicação se dar por meio de algarismo por algarismo de cada fator e, ao final, soma-se os valores absolutos de cada diagonal, a partir da direita, que representam as ordens numéricas, dessa forma, fazendo a decomposição dos fatores, temos:

$$(20 + 3).(40 + 6)$$

Assim, as multiplicações realizadas nas cédulas, podem ser representadas da seguinte forma:

$$20.40 = 800$$

$$20.6 = 120$$

$$3.40 = 120$$

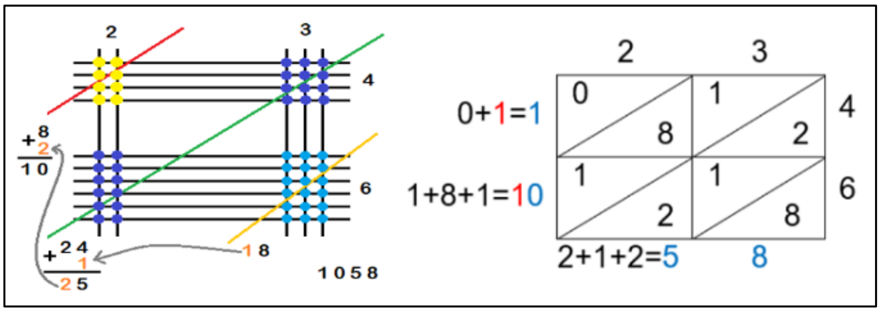
$$3.6 = 18$$

Logo, temos que $23 \,.\, 46 = 1\ 058$.

2.4.4 Método da multiplicação chinesa

Apesar de visualmente parecerem diferentes, como podemos notar na Figura 22, a forma operacional dos métodos é bem semelhante, sendo que na forma chinesa, seguindo as diagonais, que também representam as ordens numéricas, nas intercessões das linhas, que indicam os algarismos, ao invés de contar os “pontos”, podemos efetuar o produto dos algarismos já que os “pontos” estão em uma disposição retangular.

Figura 22 – Comparação entre a multiplicação árabe e chinesa.

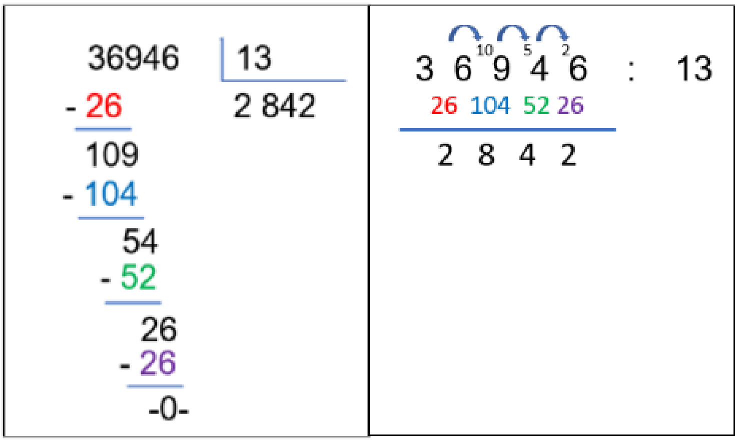


Fonte: Próprio autor.

2.4.5 Divisão pelo método da costura

Conforme o comparativo com o algoritmo usual da divisão, como mostrado na Figura 23, o método da costura incialmente organiza os algarismos do dividendo de modo a ter somente múltiplos, destacados com cores diferenciadas na figura, do divisor na segunda linha e logo em seguida efetua a divisão desses múltiplos, enquanto que no algoritmo usual, eles vão surgindo no decorrer do processo de divisão e são subtraídos dos grupamentos de algarismos do dividendo.

Figura 23 - Comparação entre a divisão euclidiana e método da costura.



Fonte: Próprio autor.

2.4.6 Divisão pelo método das subtrações sucessivas

Esse método de divisão pode ser entendido como a aplicação, de modo exaustivo, da ideia de divisão de “quantas vezes uma quantidade cabe na outra” (DANTE, 2018, p. 47) e o resultado, quociente, da divisão é justamente o número de vezes que o divisor foi subtraído.

3. APLICAÇÃO DAS PROPOSTAS METODOLÓGICAS ALTERNATIVAS

Nesse capítulo, abordaremos o processo de desenvolvimento da proposta metodológica, desde os procedimentos adotados, passando pelos resultados obtidos e a análise dos mesmos, tendo em vista a verificação se a proposta aqui apresentada possibilitou um melhor aproveitamento por parte dos alunos em relação realização dos cálculos de multiplicação e divisão. Para preservar os alunos que contribuíram na pesquisa, quando necessário distinguir uma determina atividade ou fala de determinado aluno, será usada as letras iniciais de seus nomes.

3.1. - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inicialmente, foram convidados a participar do projeto 20 alunos que afirmaram ter dificuldades em efetuar cálculos envolvendo multiplicação ou divisão, havendo, então, encontros semanais em horários extraclasse para a realização da proposta com os métodos alternativos.

No primeiro encontro, realizado dia 06 de novembro de 2019 e registrado conforme Figura 24, foi solicitado o preenchimento de um questionário socioeconômico, que tinha por objetivo traçar o perfil social dos alunos envolvidos na pesquisa, e logo em seguida, um teste de diagnóstico dividido em três eixos: questões diretas de multiplicação com seis itens e fatores variando de um a quatro algarismos; questões diretas de divisão, também com seis itens onde o dividendo variava de dois a cinco algarismos e o divisor de uma a três algarismos, e problemas envolvendo multiplicações e/ou divisão, sendo as três primeiras questões de multiplicação (questões 3, 4 e 5), outras três de divisão (questões 6, 7 e 8) e a última questão envolvendo tanto a multiplicação quanto a divisão.

Figura 24 - Aplicação do questionário socioeconômico e teste de diagnóstico.

Fonte: Próprio autor.

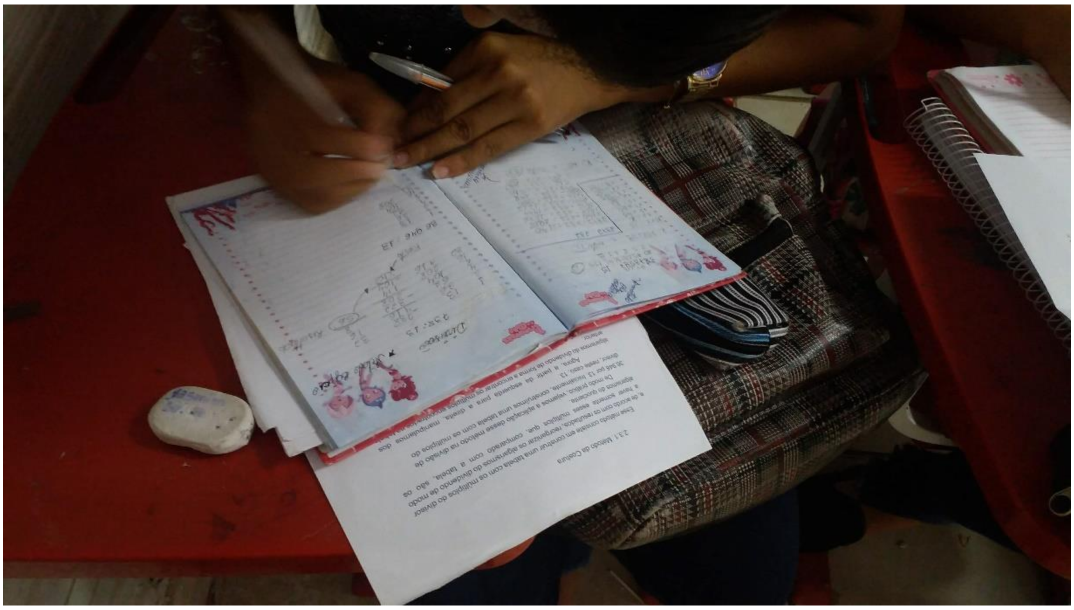
No segundo momento, foram apresentados aos alunos os **métodos egípcio e russo** de multiplicação, inicialmente expostos no quadro e reforçados com uma lista de exercícios, onde era solicitado o uso de cada métodos para a execução das tarefas, e para serem praticados em suas casas. No terceiro encontro, foi a presentado o **método árabe (ou gelosia) e o chinês**, e como no encontro anterior, sendo exposto e exercitado havendo tarefas a serem executadas em suas residências.

Figura 25 - Comparação entre os quatro métodos de multiplicação

Fonte: Próprio autor.

No quarto dia, foi reservado um momento para discussões sobre as dificuldades enfrentadas para uso desses métodos na qual é possível notar a comparação entre ele na Figura 25, onde alguns alunos relataram ter mais afinidades com determinado métodos do que os usuais e um aluno, em especial, declarou que ainda preferia a forma “tradicional”. Logo em seguida, foram apresentados aos métodos de divisão, sendo o **método da Costura**, que a princípio gerou dúvidas durante a exposição do procedimento e que foi mais compreendida com a exercitação e na Figura 26 é possível notar um aluno o praticando, e o **método das subtrações sucessivas**, procedimento esse, que foi bem recebido pelos alunos, pois teriam apenas que realizar subtrações sucessivas, mas foi enfatizado que esse procedimento pode ser quase inviável, se os valores do divisor e do dividendo forem bastante discrepantes, pois se torna bastante exaustivo esse processo, salvo no caso do uso de estratégias de soluções como a subtração de múltiplos do divisor ao invés dele uma única vez por operação, e como nos demais dias, foi entregue uma lista de exercícios a ser desenvolvida pelos mesmos durante a semana. No quinto dia, foi debatido a soluções das questões propostas e das dificuldades encontradas para tal e trabalhamos o **método egípcio** para a divisão, método esse, que o aluno M.J.A. afirmou que foi o que mais gostou pois “ia poder fazer divisões usando somas”, já que o processo é o mesmo da multiplicação com uma análise diferenciada, logo, um método que é valido tanto para a multiplicação quanto para a divisão.

Figura 26 - Aluno exercitando a divisão pelo método da costura



Fonte: Próprio autor.

No sexto, e último dia, foi aplicado um teste de verificação, a notar a Figura 27, que constava as questões do teste de diagnostico, aplicado no início da intervenção metodológica, de modo a fazermos o comparativo entre os resultados e constatar ser houve, ou não, avanço no que diz respeito a efetuação de cálculos de multiplicação e divisão.

Figura 27 - Aplicação do teste final

Fonte: Próprio autor.

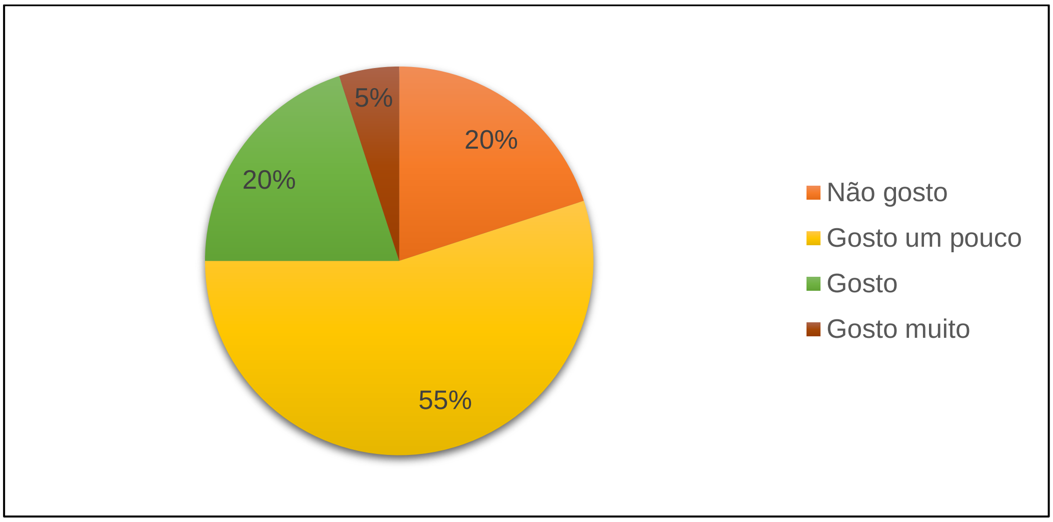
3.2. CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO

O questionário socioeconômico aplicado no início das aulas e sem a identificação dos alunos, de modo a poderem se expressar de forma mais verídica possível sem se preocupar com possíveis exposições, consistia em 25 (vinte e cinco) questões que, basicamente, buscavam traçar um perfil dos mesmos a respeito de como se identificavam com a matemática e, precisamente, em relação as operações básicas, afim de perceber como a multiplicação e divisão eram encaradas pelos alunos, contexto familiar e sua relação com o ambiente educacional e, por fim, como eles se "sentiam" em relação à multiplicação e à divisão.

Pela lei de diretrizes e bases da educação (LDB) em seu Artigo 32º, que estabelece o ingresso no ensino fundamental aos 6 anos de idade, o que leva a idade ideal no 9º ano ser de 14 anos, a amostragem revelou que esse fato ocorreu com 4 alunos mas considerando que aplicação da proposta metodológica ocorreu no final do ano letivo, provavelmente a maioria dos 11 alunos, se não todos, que estavam com 15 anos completos no ano corrente de 2019, também se enquadravam na idade correta, houve um aluno com 16 anos e 3 com 17. Outras informações iniciais que podemos destacar são que, no que se refere ao gênero, 60% dos participantes eram do sexo feminino, todos alunos haviam estudado no ano anterior na rede municipal de ensino na qual apenas 2 alunos eram repetentes na série em questão, sendo declarado por um deles, que uma das disciplinas que levou ao fato foi a disciplina de matemática.

A partir do item cinco do questionário, podemos começar a traçar um perfil dos alunos que participaram da pesquisa, onde, quando questionados se gostavam de estudar matemática, Gráfico 1, 20% afirmaram não gostar de estudar, empatado com os que afirmaram que gostavam, e a maioria, 55%, de “gostar um pouco” o que nos leva a creditar que esses alunos encontram-se desmotivados com os estudos acadêmicos podendo se encaixar nos fatores geradores das dificuldades de aprendizagem apresentadas no capítulos 1.

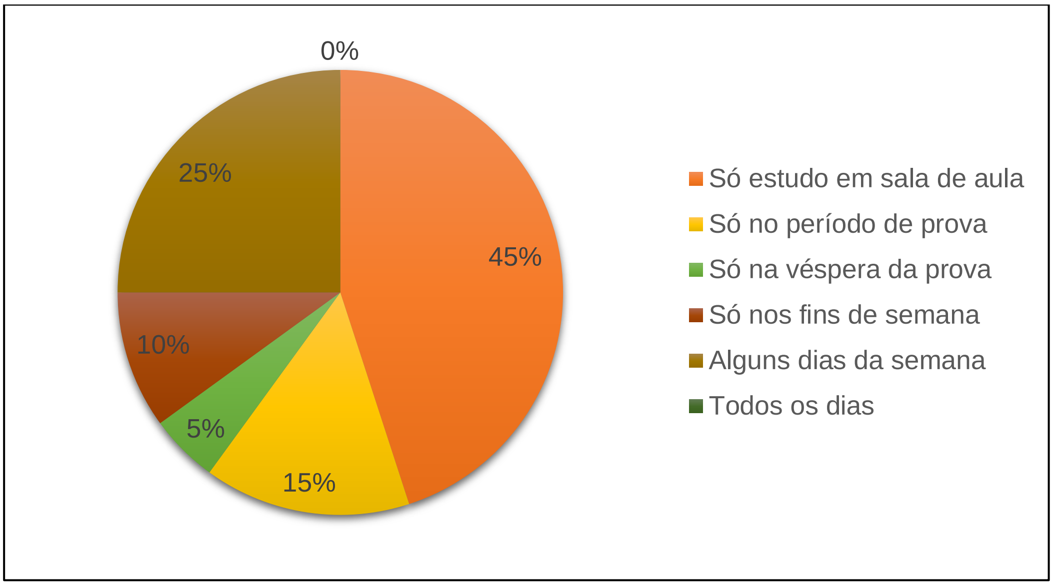
Gráfico 1 – Item 05: Você gosta de estudar Matemática?



Fonte: Próprio autor.

Em paralelo ao fato de a maioria dos alunos não gostar de estudar matemática, a grande maioria, cerca de 85%, desses alunos afirmaram que ninguém os ajudam nas tarefas de casa e que em 10% é a mãe que auxilia na execução dessas tarefas, quando indagados se há o costume de estudar matemática fora da escola, apenas 25% afirmaram separar alguns momentos da semana para estudar enquanto que 45% se contentam com o que transmitido em sala de aula e nenhum alunos assinalou a opção na qual afirma que estudas matemáticas todos os dias, conforme apresentado no Gráfico 2.

Gráfico 2 – Item 07: Você costuma estudar Matemática fora da escola?



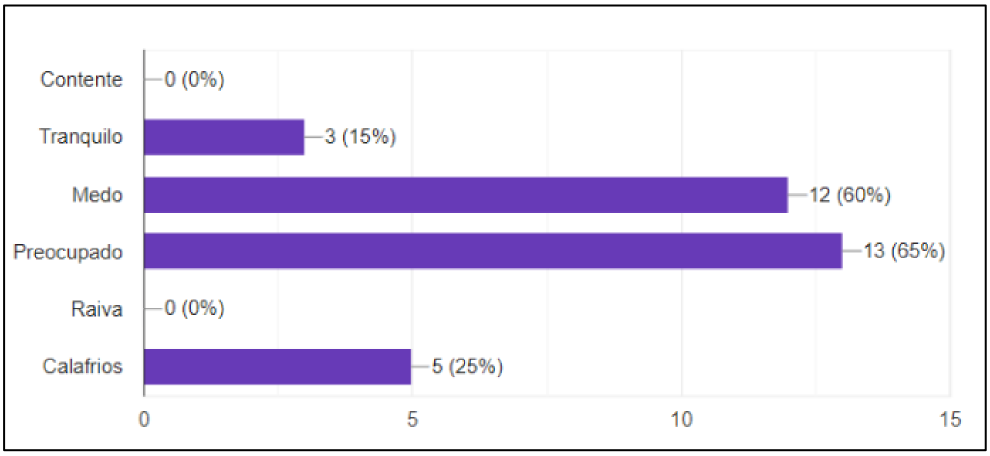
Fonte: Próprio autor.

Um dado um tanto quanto curioso, é o fato que 75% dos alunos afirmaram que suas notas em matemática estão na média, mas quando o questionamento foi sobre a dificuldade em "aprender matemática", 45% afirmaram ter muita dificuldade, enquanto que o restante afirmou ter pouca dificuldade e nenhum respondeu não ter. Quando o questionamento foi sobre quais das operações básicas possuíam ter maior dificuldade, 85% dos alunos marcaram a alternativa referente à divisão, fato esse presenciado constantemente dentro da pratica docente onde somos indagados de como realizar a operação de divisão, e 10% afirmaram ser a multiplicação a operação que apresenta maior dificuldade, mas tendo em vista que no processo de divisão euclidiana a multiplicação tem um papel fundamental nesse procedimento e muitas vezes é estimulado a "criação" da tabua do divisor para auxiliar a divisão, apenas um aluno afirmou ter domínio da tabuada, sendo que 85% responderam dominar um pouco.

Conforme analisado no Capitulo 1, sabemos da importância da atenção voltada para os assuntos abordados, independente da disciplina em questão, para uma melhor compreensão e consequentemente aprendizagem dos alunos, mas na questão 13, onde era indagado se ele se distraiam durante as aulas de matemática, apenas 10% afirmaram prestar atenção, enquanto que outros 10% não conseguiam prestar atenção, uma possível justificativa para essa dificuldade é que o aluno possa apresentar déficits cognitivos, como discalculia, que é uma deficiência de aprendizagem especifica da matemática (enfatizamos que essa é uma possibilidade e não uma afirmação e que não é o foco dessa pesquisa o seu diagnóstico, muito menos as abordagens especificas para tal, não impedindo uma posterior pesquisa mais aprofundada com resultados concretos e propostas metodológicas que visem identificar e procurar amenizar essas dificuldades), e 80% dos participantes afirmaram que na maioria das vezes se distraiam durante as aulas de matemática.

Outro fator que contribui com o rendimento dos alunos é o estado psicológico, seja nos momentos em sala de aula, ao se depararem com um novo assunto ou seja em avaliações, como foi questionado, com os resultados apresentados no Gráfico 3.

Gráfico 3 – Item 14: Como você se sente quando está diante de uma avaliação em Matemática?



Fonte: Próprio autor.

Do total de alunos que participaram da pesquisa, apenas três afirmaram ficar tranquilos quando se deparavam com uma avaliação de matemática, sentimento esse não compartilhado com os demais colegas que apresentaram algum tipo de abalo emocional, e, de acordo com uma pesquisa realizada em 2014 pela Comunidade Internacional de Cooperação na Educação Mind Group, apontou que o mal desenvolvimento das habilidades socioemocionais leva um mal desempenho escolar, sendo que a pesquisa desenvolvida com mais 3000 alunos mostrou que “que quanto maiores os níveis de ‘ansiedade (em relação a avaliações)’ e de ‘uso de estratégias para resolver problemas’, piores foram os desempenhos em Matemática”[10].

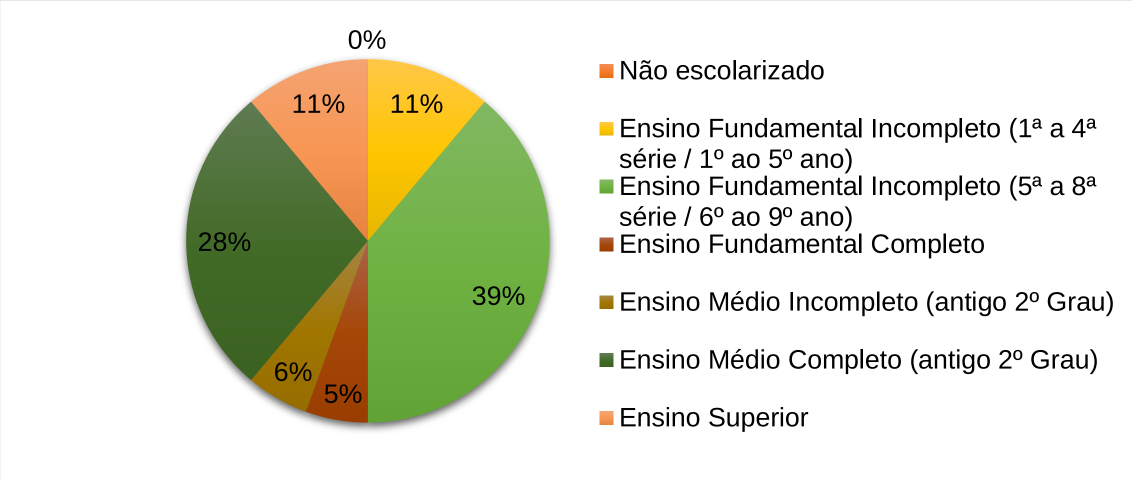
[10] Fonte: (PESQUISA..., 2014).

No que tange a respeito do contexto familiar, podemos concluir que, em torno de, 74% dos alunos tem como responsável masculino o pai e como responsável feminino a mãe, cerca de 95%, no que se refere à profissão dos responsáveis, responderam a esse item, 19 alunos e podemos concluir que, no que acena ao responsável masculino, um informou ser diarista, dois aposentados e três não souberam informar, sendo assim, pelo menos 13 apresentam ter profissões e emprego formal, no âmbito feminino, apenas oito "possuem profissões", enquanto que as demais foram declaradas como doméstica (foi empregado esse termo de forma generalizada, de modo a contemplar afirmações afins).

No Item escolaridade, apenas dois responsáveis masculinos, Gráfico 4, e uma feminina, Gráfico 5, possui o nível superior, 27,8% dos masculinos e 38,9% das femininas tem o ensino médio completo e o restante (61,1% masculino e 55,5% feminino) tem escolaridade entre "ensino fundamental incompleto" e "ensino médio incompleto", essas informações são um tanto quando preocupantes pois, de acordo com uma pesquisa realizada pelo Instituto Glia em Neurociência, através do Projeto Atenção Brasil em 2010, mostrou que o nível de instrução dos pais tem grande relação com o desempenho escolar dos filhos, onde os estudos mostraram que "filhos de pais analfabetos ou que não terminaram o ensino fundamental têm uma chance até 480% maior de ter baixo desempenho escolar"[11] se comparado com alunos que tem pais com o nível superior completo. Para o neurologista coautor da pesquisa, "A cultura é um fator fundamental para a saúde mental e a cultura e a educação estão intimamente ligadas. Pessoas com problemas culturais [...] tendem a ter uma família que reflete essas mesmas características"[12]. Logo, o baixo nível de instruções dos responsáveis pode atuar como um agravante para as dificuldades desses alunos.

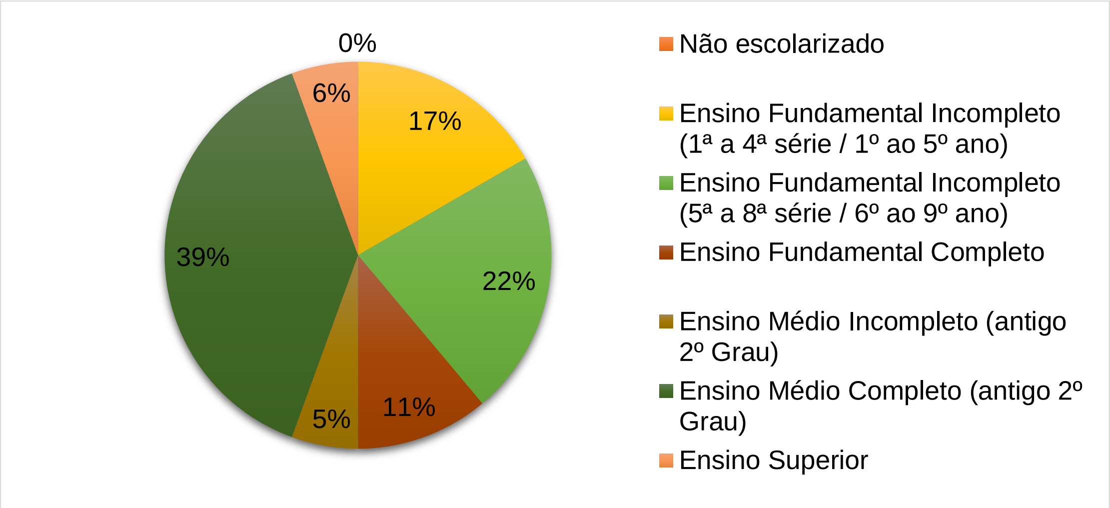
[11] GOULART, 2010.
[12] Ibidem.

Gráfico 4 – Item 19: Qual a escolaridade do seu responsável masculino?



Fonte: Próprio autor.

Gráfico 5 – Item 22: Qual a escolaridade do seu responsável feminino?



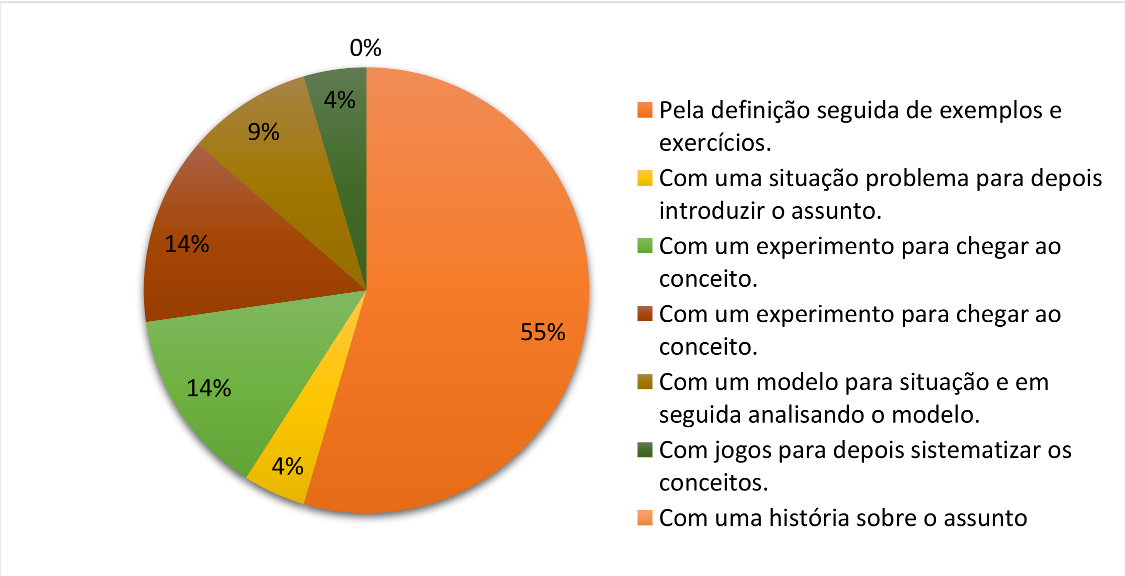
Fonte: Próprio autor.

Quando questionados diretamente como foi trabalhado os conteúdos relacionados às operações básicas, o Gráfico 6 mostra que 63,2% afirmaram que o conteúdo foi iniciado com a definição seguido de exemplos e exercícios e 15,8% afirmaram que houve um experimento para chegar ao conceito desejado. Tomando por base a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel[13], onde a aprendizagem ocorre quando a organização e interação do meio material nas estruturas cognitivas,

[13] MOREIRA, Marcos Antônio. Teorias de Aprendizagem. São Paulo: EPU, 1999.

constituindo um fator determinante nesse processo é tudo aquilo que o aluno já conhece, chamado de ponto de ancoragem, na qual, novas informações provocam "modificações relevantes nos atributos da estrutura cognitiva pela influência do novo material" (MOREIRA, 1999, p. 152), assim, podemos associar a menor porcentagem, de certa forma, à concepção de *aprendizagem significativa*, e a maior porcentagem ao que é chamado de *aprendizagem mecânica*, onde a nova informação possui pouca ou nenhuma interação "com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva" (idem, p. 154), dessa forma, a aprendizagem é arbitraria sem haver uma interação com os conhecimentos pré existente na estrutura cognitiva dos alunos, mas isso não indica dizer que essa aprendizagem é irrelevante, pelo contrário, ela é bastante importante quando há o contato com informações novas de algo que não faz parte de seu conhecimento. Uma sugestão feita por Ausubel, é a utilização de *organizadores prévios*, que possuem o intuito de servirem de "ancoras" que tendam possibilitar uma aprendizagem processual dos conceitos a serem desenvolvidos, ou seja, são apresentações prévias ao assunto considerado, na qual o objetivo "é servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que deve saber, a fim de que o material possa ser aprendido de forma significativa" (idem, p. 155).

Gráfico 6 – Item 23: Quando você estudou problemas envolvendo as quatro operações com números naturais a maioria das aulas começava:



Fonte: Próprio autor.

Quanto à forma de como era trabalhado a resolução de problemas (e que possivelmente deve ter sido interpretado como resolução de exercício), 21,1% afirmaram que o professor apresentava uma lista de exercícios, enquanto que 73,7% informaram que essa tarefa era realizada com o auxílio do livro didático, algo que é bastante positivo, pois torna o acesso as informações sobre os conteúdos a serem trabalhados muito mais fácil e que esses livros são pensados e desenvolvidos para estimular o raciocínio logico dedutivo pelos alunos, como vimos no subtópico ***o ensino da multiplicação e divisão*** onde realizamos uma análise de livros adotados atualmente, e enfatiza bastante a resolução de problemas, que consiste em um fator fundamental na vida de todas as pessoas.

Por fim, foi solicitado aos alunos que relatassem suas experiências com as operações de multiplicação e divisão, responderam a esse item 18 alunos e podemos destacar alguns pontos: apenas dois alunos relataram ter poucas dificuldades em relação às operações, no que se refere à matemática como um todo, três informaram ter dificuldades, destacando a fala de uma aluna[14] que informou ter dificuldade em aprender, "minha experiência é que eu não sou muito boa em matemática tenho muita dificuldade de aprender tento aprender presto a atenção *'mais'* não consigo me lidar com a matemática '*mais'* espero aprender pois não sou boa em cálculos", e de outro que, aparentemente, tem dificuldade em externalizar suas dúvidas, "Tenho muita dificuldade de aprender pois muitas vezes não entendo nada que o professor está explicando e muitas vezes tenho vergonha de perguntar ou de falar que não entendi"; os que afirmaram ter dificuldades nas duas operações foram cinco alunos e os que disseram que sua dificuldade maior é divisão foram oito e podemos destacar algumas respostas onde asseguram que "No início dos estudos eu achava bem fácil, e era minha matéria favorita, *'mais'* com o passar dos anos, foi dificultando mais, por que começou a envolver letras nas contas, por isso agora eu não gosto muito de matemática. Em multiplicação eu não tenho dificuldade. Em divisão eu tenho dificuldade" ou "quando vejo uma questão de multiplicação até que eu consigo responder sem uma dificuldade '*mais'* quando é uma questão de divisão já pulo pra outra questão pois já sei que não vou conseguir fazer", mas o que chamou a atenção é a vontade demonstrada por alguns alunos em reverter essa situação, de procurar sanar essa dificuldade ("eu tenho um pouco de dificuldade em divisão mais que em

[14] Supomos ser uma aluna pela forma como o texto foi redigido.

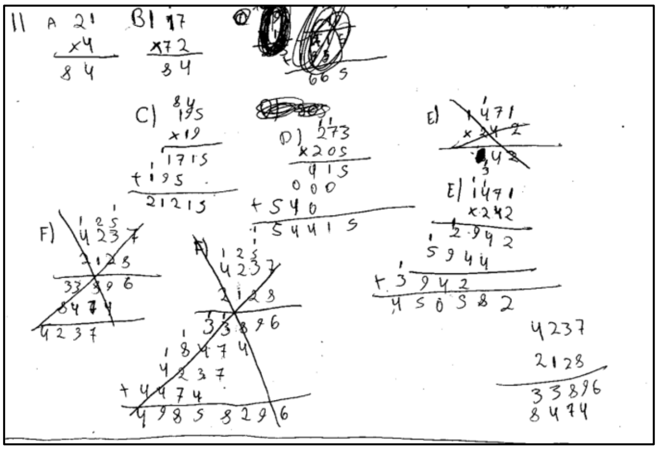
multiplicação '*mais'* pretendo melhorar em divisão", "Matemática eu gosto mas não sei muito sobre multiplicação e divisão quero aprender"), tendo em vista de a definição e apresentação dos algoritmos para essas operações são trabalhas nas series iniciais e dificilmente abordadas com a mesma disponibilidade de tempo em sala de aulas nas séries finais, sendo essas dificuldades agravadas devido a necessidades delas para a compreensão de assuntos mais complexos.

3.3 – RESULTADOS PRELIMINARES

Nessa análise do teste inicial, separamos em três eixos, antes mencionado, de modo a podermos procurar entender de maneira mais objetiva possível as dificuldades dos alunos participantes da pesquisa. No que diz respeito à multiplicação, da amostragem dos 20 alunos, apenas dois alunos demonstraram domínio do algoritmo usual da multiplicação onde na qual acertaram todas as questões, assim, os demais apresentaram dificuldades ou erros nos procedimentos, como abordaremos agora.

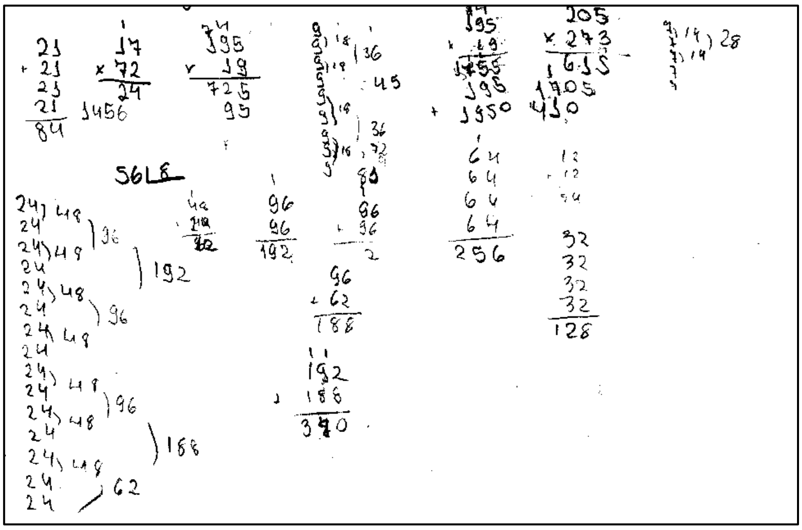
Dentro das dificuldades relacionadas ao domínio do algoritmo, alguns alunos buscaram outras estratégias para a solução das contas, sendo que três alunos fizeram uso de traços para auxiliar em seus cálculos, em especial, a aluna GS fez uso desse procedimento em todos os cálculos, mas devido a maior complexidade envolvida para números com maior quantidade de ordens, não resolveu os dois últimos itens, três alunos construíram tabuadas e um deles, o aluno JACF, apresentou também dificuldades em construí-las. Relacionado a dificuldade enfrentada quando aos fatores possuírem pelo menos duas ordens, foram constatados três alunos, e de ordens superiores a três apenas dois alunos, quantidade essa, que demonstram não ter domínio do algoritmo usual, na qual, um não desenvolveu, constatado pela Figura 28 do aluno KKPH, e outro organizou as multiplicações parciais não obedecendo estratégia de iniciar a "colocação" dos algarismos dos produtos a partir da ordem das unidades dos algarismos do multiplicador, alinhado todos os resultados à direita, Figura 29, conforme organizado pelo aluno MJA.

Figura 28 – Multiplicação realizado pelo aluno KKPH da questão 01.



Fonte: Próprio autor.

Figura 29 – Multiplicação realizado pelo aluno MJA da questão 01.



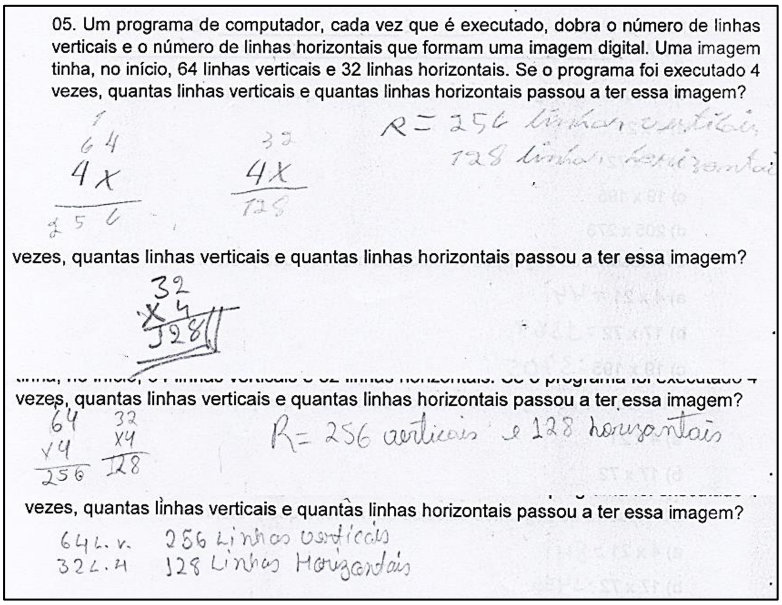
Fonte: Próprio autor.

Em relação aos erros identificados, três alunos o apresentaram ao realizar as somas dos produtos parciais, após as realizar corretamente, mas o que foi mais recorrente, cometido por quase metade da amostra, foi a “transposição” dos algarismos para a ordem subsequente resultante dos grupamentos de dez após as somas, geralmente suprimidos, sendo que essa é uma das bases de nosso sistema de numeração, que é o grupamento em base 10, juntamente com o valor posicional.

Os resultados referentes a divisão foram mais alarmantes pois nenhum aluno conseguiu resolver as questões propostas, sendo que: 5 responderam apenas os itens “a” e “b”, onde o divisor tinha apenas um algarismo e um aluno encontrou o resultado através da multiplicação, o aluno NS; três alunos responderam somente o item “a”, um também fez uso da multiplicação para tal; um aluno tratou a divisão como subtração, aluno KRBG; dois alunos não conseguiram efetuar os cálculos quando o divisor possuía mais de dois algarismos; dois desconsideram o “zero” no quociente, e o mais preocupante, é que quase metade da amostra, nove alunos, não desenvolveu nenhum item. E nos leva a supor que o aprendizado relacionado ao *algoritmo fácil* da divisão não foi plenamente compreendido pelo grupo em questão.

Em relação aos problemas, onde era necessário realizar a interpretação do enunciado, nenhum aluno conseguiu desenvolver todos, sendo que 5 alunos conseguiram resolver ao menos um dos três problemas envolvendo diretamente a multiplicação e 13 apresentaram dificuldades na interpretação das questões como é o caso da questão 05 onde, na solução, devia-se “dobrar os valores quatro vezes”, mas 7 alunos multiplicarão por 4, conforme Figura 30.

Figura 30 – Multiplicação realizada da questão 05 por quatro alunos.


05. Um programa de computador, cada vez que é executado, dobra o número de linhas verticais e o número de linhas horizontais que formam uma imagem digital. Uma imagem tinha, no início, 64 linhas verticais e 32 linhas horizontais. Se o programa foi executado 4 vezes, quantas linhas verticais e quantas linhas horizontais passou a ter essa imagem?

64 4x 256 32 4X 128 R = 256 linhas verticais 128 linhas horizontais

vezes, quantas linhas verticais e quantas linhas horizontais passou a ter essa imagem?

32 x4 128

vezes, quantas linhas verticais e quantas linhas horizontais passou a ter essa imagem?

64 x4 256 32 x4 128 R= 256 verticais e 128 horizontais

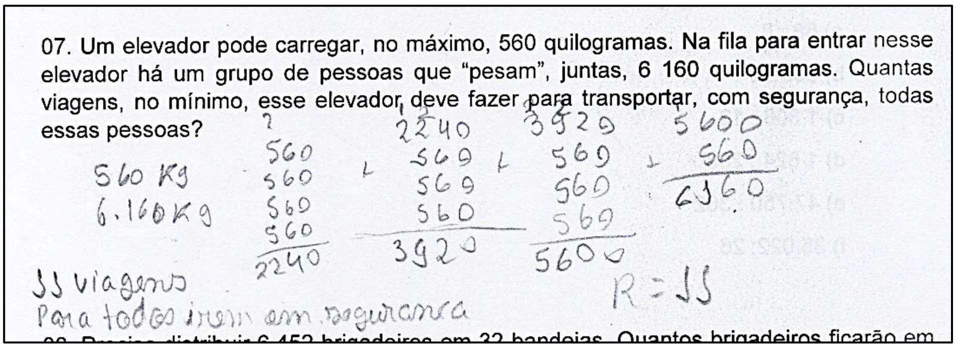
vezes, quantas linhas verticais e quantas linhas horizontais passou a ter essa imagem?

64 L.V. 32 L.H 256 Linhas verticais 128 Linhas Horizontais

Fonte: Próprio autor.

Nos problemas de divisão, assim como nos itens de “contas” diretas, apenas 3 alunos resolveram uma das questões, por meio da multiplicação e um pela adição, Figura 31, conforme o aluno MJA, no tocante, 5 não atingiram ao objetivo esperado nas soluções dos problemas de divisão. Por fim, enfatizamos que nenhum aluno chegou a desenvolver a questão 09, que envolvia a aplicação tanto da multiplicação quanto da divisão e 5 não desenvolveram nenhum problema.

Figura 31 – Resolução da questão 07 adotada pelo aluno MJA.


07. Um elevador pode carregar, no máximo, 560 quilogramas. Na fila para entrar nesse elevador há um grupo de pessoas que "pesam", juntas, 6 160 quilogramas. Quantas viagens, no mínimo, esse elevador deve fazer para transportar, com segurança, todas essas pessoas?

560 Kg
6.160Kg

560
560
560
560
2240

2240
560
560
560
3920

3920
560
560
560
5600

5600
560
6160

11 viagens
Para todos irem em segurança

R = 11

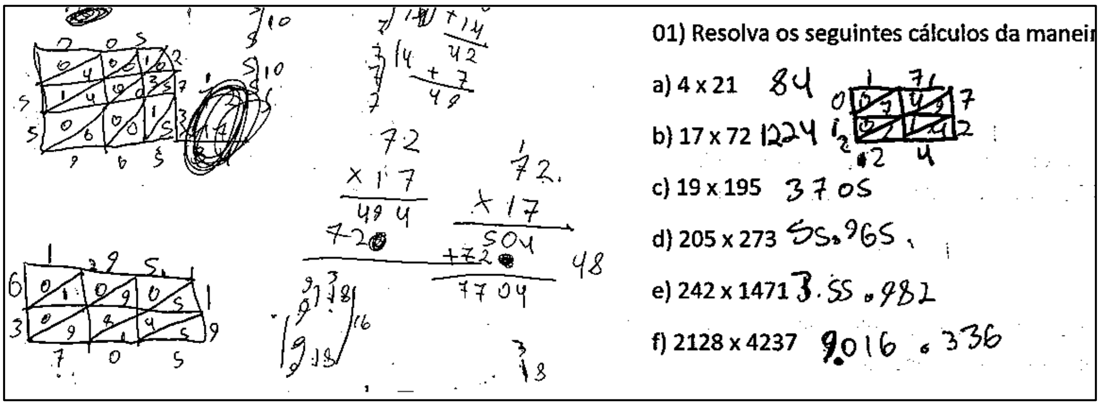
Fonte: Próprio autor.

3.4. RESULTADOS FINAIS

O teste aplicado ao final das exposições dos métodos alternativos foi o mesmo teste de diagnóstico de modo a ser possível aferir se realmente houve avanço, no que diz respeito à execução das operações de multiplicação e divisão, ou se a proposta se mostrou indiferente aos resultados prévios.

O último encontro, realizado no 11 de dezembro de 2019, contou com a participação de 14 (quatorze) alunos, a ser justificada posteriormente a possível razão da diferença em relação ao público inicial, onde o único objetivo do encontro era a realização, novamente, do teste. Analisando as respostas dos alunos referentes à multiplicação com itens diretos, 9 resolveram todos os itens propostos, sendo que 7 fizeram uso do método árabe, 4 exclusivamente, e os demais também utilizaram o método chinês e o algoritmo usual e 2 alunos usaram apenas o algoritmo usual. Um fato interessante que ocorreu nas resoluções, foi que o aluno KKPH que resolveu todos os itens pelo método árabe, e que o mesmo não conseguiu desenvolver os mesmos itens pelo método usual, conforme é possível comparar com a Figura 28, e resolveu também um item pelo algoritmo usual sendo que o mesmo não obteve o resultado correto, conforme Figura 32**.** Os demais 5 alunos acertaram alguns dos itens sendo que 4 usaram o algoritmo usual e 1, o método árabe. Entretanto, nenhum aluno errou todos ou deixou sem resolver todos os itens.

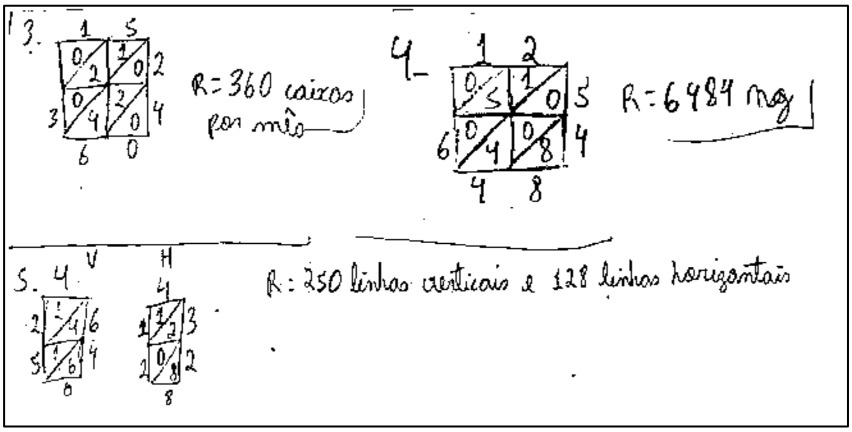
Figura 32 – Comparação das duas formas que foi realizado o produto 17x72.



Fonte: Próprio autor.

Em relação aos itens da divisão da questão 2, 4 alunos acertaram todos itens, mas pelo algoritmo usual, e de modo oposto à multiplicação, 7 alunos não desenvolveram os itens e 3 alunos resolveram parcialmente. Nos problemas, 9 alunos não desenvolveram as questões e outros 5 desenvolveram parcialmente, dando destaque ao aluno MSP que desenvolveu as questões de multiplicação fazendo uso do método árabe, Figura 33.

Figura 33 - Resoluções dos problemas de multiplicação do aluno MSP



Fonte: Próprio autor.

Um fator que pode ter sido determinante no resultado final da pesquisa, incluindo a redução de participantes, se dar ao fato que o teste ocorreu a menos de duas semanas para fim do ano letivo de 2019, onde já estavam realizando os procedimentos referentes à recuperação paralela e divulgação dos resultados finais, gerando, dessa forma, uma ansiedade devido as circunstancias do período e, segundo Silva e Faria (2016), “Níveis elevados de ansiedade impedem que a aprendizagem ocorra, pois interfere em sua atenção seletiva, codificação de informações na memória, raciocínio, concentração e percepção, e seu desempenho em geral”. Afim de constatar ou refutar essa possiblidade, estava previsto uma nova aplicação da proposta metodológica na qual esse trabalho se propõe, porém não foi possível devido a pandemia provocada pelo Covid19 e a suspenção das aulas presenciais no ano letivo de 2020.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos são os desafios relacionados ao ensino da matemática, tanto para os alunos, que muitas vezes a considera como algo inacessível onde apenas alguns poucos *iluminados* tem o privilégio de compreender e chegando a desistir de “aprender matemática”, outros com problemas familiares sérios com os lares totalmente desestruturados ou deficiências físicas/neurológicas, que por si só são de grande empecilho no processo ensino/aprendizagem, como também para os professores que geralmente se sentem desmotivados devido a fatores inerentes ao trabalho docente como infraestruturas inadequadas e/ou recursos básicos inexistentes aliado a desmotivação (ou dificuldades em assuntos básicos) dos alunos onde acaba intensificando uma postura que visa estimular a participação e instigar o desejo de aprender nos alunos de modo a possibilitar o vislumbre de “tempos melhores” em suas vidas, e por fim e de certa forma, uma “sobrecarga de trabalho” sendo que, muitas vezes, são cobrados a seguir uma sequência didática que permita contemplar um conteúdo mínimo a ser trabalhado durante o ano letivo porém que não permite (ou não se permite) uma maior flexibilização, como discutido na introdução desse trabalho, e quando identificada uma dificuldade por parte dos alunos, para buscar novos métodos ou técnicas que visem sanar tais dificuldades ou retomar todo o conteúdo não assimilado, vale destacar que muitos professores possuem mais de um vínculo empregatício, trabalhando na rede pública municipal e estadual de ensino e também na rede privada, o que acaba comprometendo consideravelmente possiblidade de haver um “tempo livre” para a busca de novas ferramentas didáticas.

Com o intuito de melhorar esse cenário, no que se refere a aritmética e especificamente à multiplicação e divisão, nos propomos a indicar métodos, alternativos aos usuais, de efetuar tanto a multiplicação quanto a divisão que possuem, em sua maioria, um contexto histórico que podem representar aos alunos uma forma de “liberdade” na qual há uma maior possibilidades de efetuar essas operações de formas distintas e de mostrar a eles que a matemática está mais próxima de seu cotidiano do que imaginam, pois cada cultura criou uma forma peculiar e mais familiar possível para suas realidades de modo a lidar com determinados tipos de situações, dessa forma, um mesmo problema pode ser resolvido de formas distintas. Quanto aos professores, essa proposta pode ser usada como subterfúgio em relação a retornar ao ensino dos algoritmos usuais de multiplicação e divisão que, eventualmente, não foram compreendidos pelos alunos, se tornando-se alternativas didáticas a essas operações e que não requereriam a tomada de muitas horas aula, para a conceituação, explicação, exemplificação e aplicação das propostas metodológicas.

Destacamos que os métodos propostos nesse trabalho não são todas as possíveis alternativas que podem ser adotadas pelo professor em relação aos algoritmos usuais, tanto para multiplicação quanto para a divisão, havendo formas realizar essas operações através de algoritmos específicos, o uso das mãos, de materiais manipuláveis como o ábaco (soroban) e material dourado e até mesmo o uso do lúdico, seja por meios concretos quanto por meios virtuais. A escolha dos métodos aplicados, basicamente, se deu pela possibilidade der serem apresentados aos alunos em um período de tempo não demasiadamente longo e que são possíveis verificar se realmente foram utilizados. Também não nos propomos a rejeitar os algoritmos usuais da multiplicação e divisão, tendo em vista seus aspectos práticos oriundos da evolução histórica mas apenas propor alternativas quando não plenamente compreendidas.

Quanto ao resultado da pesquisa, é notável a diferença entre o volume de acertos das contas diretas relacionado à multiplicação, que, apesar de fatores externos possivelmente terem interferido no resultado final, mostrou um avanço significativo dos acertos sendo a maioria pelo método árabe que, de certa forma, é o precursor do algoritmo usual da multiplicação, e o método chinês. Apesar dos resultados da pesquisa não demostrar avanços relacionados a divisão, referindo-se ao volume ou tentativas de resoluções, e haver uma equivalência na resolução dos problemas, sendo que o resultado final foi proporcionalmente melhor do que o preliminar com a aplicação do método árabe. Podemos inferir que os resultados mostram que houve uma contribuição positiva em relação aos possíveis meios de resolução das operações, principalmente a multiplicação, que permite uma melhor progressão dos assuntos que necessitam dessas bases, de forma, pode ser facilmente utilizado como uma estratégia, por parte dos professores, que vise sanar dificuldades dos alunos sem se tornar repetitivo em pontos que geraram dificuldades e mostrar que há várias possibilidades de se atacar um problema estimulando o raciocínio lógico.

Acreditamos que em uma eventual contraprova dos resultados desta pesquisa em uma nova aplicação da metodologia proposta, mas com um melhor controle dos fatores externos que podem interferir no experimento, há grande potencial de que os resultados se mostrem bastante satisfatórios, não apenas na multiplicação como também na divisão na qual a grande maioria dos alunos que afirmam possuir dificuldades são relacionadas a essa operação.

Ressaltamos que o objetivo do presente trabalho está diretamente ligado a tarefa de fornecer alternativas ao ensino das operações de multiplicação e divisão quando o algoritmo usual não foi plenamente compreendido pelos alunos, assim, apesar de discorrer sobre as possíveis causas das dificuldades por parte dos alunos em relação ao tema, não é nosso intuído identificar tais dificuldades e/ou propor alternativas específicas. No que tange aos problemas propostos, podemos identificar que há uma grande dificuldade, por parte dos discentes, em interpretar o enunciado e elaborar uma estratégia de solução, como esse ponto também não estava definido nos objetivos do trabalho, não houve uma investigação e consequentemente uma proposta que vise minimizar essa problemática mas como se trata de algo que é de extrema importância no cenário atual, provavelmente os próximos trabalhos terão como objetivo em aprofundar nessa temática, que aliado a esse presente, pode possibilitar um considerável avanço dentro desta disciplina como também em suas vidas cotidianas.

REFERÊNCIAS

ALBINO, Thais Sena de Lanna. **A Prática Docente e o Uso de Metodologias Alternativas no Ensino de Matemática: Um olhar para as escolas que adotam propostas pedagógicas diferenciadas**. XIX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. 2015. (Congresso), disponível em: https://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd7_thais_albino.pdf. Acesso em 08 de dezembro de 2020.

ANDRINI, Álvaro. **Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 1989.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS J. Maria. **Praticando Matemática**. 4ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

BERNARDI, Jussara; STOBAUS, Claus Dieter. **Discalculia: conhecer para incluir**. Revista Educação Especial, Santa Maria, v. 24, n. 39, p. 47-60, janeiro/abril 2011.

BOYER, C.B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard. Blücher, 1974

BRASIL. **Lei nº 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional (LDB). Brasília, DF: Casa Civil da Presidência da República do Brasil, 1996. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 31 de março de 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática**. Brasília: MECSEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: ensino fundamental: matrizes de referência, tópicos e descritores**. Brasília, Inep, 2011.

CÂMARA DOS SANTOS, M. **Algumas Concepções sobre o ensino aprendizagem de matemática**. Educação Matemática em Revista, n.12, p. 11-15, jul 2005.

COLL, César; MARCHESI, Álvaro; PALACIOS, Jesús. **Desenvolvimento psicológico e educação:** transtornos de desenvolvimento e necessidades educativas especiais. 2.ed. Porto Alegre: Artmed, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática**. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2018.

DAUBEN, Joseph W. **Chinese Mathematics**. In: Mathematics of Egypt, Mesopotamia, Chine India, and Islam. A soucerbook. Victor Katz (Ed.). New Jersey: Princeton University Press, 2007. P. 187-384

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática da Teoria á Prática** - Campinas, SP, Papirus, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education. Netherlands:** Kluwer Academic Publishers, 1991.

GINSBURG, Herbert P. Mathematics Learning Disabilities: a view from developmental psychology.**Journal of Learning Disabilities**, Austin, v. 30, p. 20-36, jan./fev. 1997.

GOULART, Nathalia. **Baixo grau de instrução dos pais interfere no desempenho escolar dos filhos**: Pesquisa inédita no Brasil analisa o comportamento e a saúde mental da população infanto-juvenil. [*S. l.*], 6 ago. 2010. Disponível em: https://veja.abril.com.br/educacao/baixo-grau-de-instrucao-dos-pais-interfere-no-desempenho-escolar-dos-filhos. Acesso em: 5 abr. 2020.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LLORENTE, Analía. **3 métodos simples para aprender a multiplicar sem calculadora**: Há formas alternativas - e mais visuais - de se resolver essa operação matemática, bem diferentes do método tradicional que aprendemos na escola.. [*S. l.*], 11 dez. 2017. Disponível em: https://www.terra.com.br/noticias/ciencia/3-metodos-simples-para-aprender-a-multiplicar-sem-calculadora,efa37b250cec764a128a999ea6f7c410n64c4vjf.html. Acesso em: 5 abr. 2020.

MIGUEL, J. C. O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas. In: PINHO, S. Z.; SAGLIETTI, J. R. (Org.). **Núcleos de Ensino** - PROGRAD - UNESP. I ed. São Paulo - SP: Editora UNESP, v. I, p. 375-394, 2005

MIRANDA, Daniela de. **Sistema de Numeração Egípcios**. c2019. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-egipcios.htm. Acesso em 18 nov, 2019.

MOREIRA, Marcos Antônio. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999.

O método de multiplicação russa. Só Matemática (s.d.)., Disponível em: https://www.somatematica.com.br/curiosidades/c59.php. Acesso em: 20 nov. 2019.

PARÁ. Secretaria de Estado de Educação. **Sistema Paraense de Avaliação** Educacional – SISPAE. Belém, 2018. Disponível em: https://sispae.vunesp.com.br/reports/RelatorioSISPAE.aspx?c=SEPA1702. Acesso em: 24 de ago. de 2019.

PESQUISA revela que ansiedade dificulta resolução de problemas e trabalho em equipe: Estudo feito com estudantes mostra que desenvolver habilidades socioemocionais contribui para evolução cognitiva do aluno. [*S. l.*]: Redação TV Cultura, 7 ago. 2014. Disponível em: http://cmais.com.br/jornalismo/saude/pesquisa-revela-que-ansiedade-dificulta-resolucao-de-problemas-e-trabalho-em-equipe. Acesso em: 2 abr. 2020.

PONTE, J. P.(1992). **Concepções dos professores de Matemática e processos de formação**. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e J. P. Ponte (Eds.), Educação e Matemática: Temas de investigação (pp. 186-239). Lisboa: IIE e Secção de Educação e Matemática da SPCE.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o ensino de Matemática no nível fundamental**. Belém: EDUEPA, 2009.

SILVA, Jasiele Aparecida de Oliveira; FARIA, Ana Caroline da Silva. **Relação da ansiedade com a dificuldade de aprendizagem no ensino fundamental**. VII Congresso de Iniciação Científica da FEPI - Centro Universitário de Itajubá, Minas Gerais, 2016.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. **Matemática é difícil**: **um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos**. 2002. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf Acesso em: 20 jun. 2020.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Materiais manipulativos para o ensino das quatro operações básicas**. Porto Alegre: Penso, 2016.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da Matemática**. São Paulo: FTD, 1997.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TCLE PARA OS ALUNOS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) senhor(a), o(a) menor, pelo qual o(a) senhor(a) é responsável, está sendo convidado(a) para participar da pesquisa intitulada: **Métodos Alternativos de Cálculos na Multiplicação e Divisão: Para Além dos Algoritmos Usuais da Aritmética**, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Samuel Levi e Eder Araujo da Silva**, vinculados a Universidade Federal do Pará. Nesta pesquisa nós estamos buscando avaliar os efeitos da aplicação de uma sequência didática, diferente da tradicional, para o ensino de resolução de problemas envolvendo as operações de multiplicação e divisão tem sobre a participação dos alunos de uma escola pública do Ensino Fundamental de Parauapebas nas aulas de Matemática e sobre o desempenho de resolução de questões envolvendo esses tipos de problemas.

Na participação do(a) menor, ele(a) responderá as perguntas a serem realizadas sob a forma de questionário e durante a execução da sequência didática será utilizado uma câmera como um recurso para captar vídeo e áudio do ambiente de sala de aula, após a transcrição das gravações para a pesquisa as mesmas serão desgravadas. Também, durante a aplicação das atividades uma pessoa exercerá a função de observador das mesmas e registrará toda a dinâmica de sala de aula.

O(A) senhor(a) e seu dependente não terão nenhum **custo ou quaisquer compensações financeiras** por participarem da pesquisa. **Não haverá riscos** de qualquer natureza relacionada à participação do(a) menor na pesquisa. O **benefício** relacionado à participação de seu dependente será de aumentar o conhecimento científico na área de ensino de matemática. O(A) menor é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Uma via original deste **Termo de Consentimento Livre e Esclarecido** ficará com o senhor (a). Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, você poderá entrar em contato com: Eder Araujo da Silva (94-98186XXXX) ou Samuel Levi (91-98382XXXX). Poderá também entrar em contato com a Secretaria do Mestrado Profissional da Universidade Federal do Pará (UFPA): Av. dos Universitários, s/n - Jaderlândia, Castanhal - PA, CEP 68746-630.

Parauapebas - PA, 1º de novembro de 2019.

______________________________	______________________________
Prof. Dr. Samuel Levi Orientador	Eder Araujo da Silva Mestrando PROFMAT/UFPA

Eu,____ autorizo o(a) menor ____ a participar da pesquisa citada acima, voluntariamente, após ter sido devidamente esclarecida.

____

Assinatura do responsável

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO DISCENTES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Prezado(a) aluno(a),
Estamos realizando um estudo que busca a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, para tanto necessitamos de sua colaboração respondendo as questões abaixo para o êxito deste trabalho. Desde já agradecemos sua colaboração e garantimos que as informações prestadas serão mantidas em total anonimato.

Muito obrigado!

Parauapebas – PA, ___ de ________________ de 2019.

1- Idade: _____ anos **2- Gênero**: ( ) Masculino ( ) Feminino

3- Qual o tipo de escola em que você estudou o ano anterior?
( ) Municipal ( ) Estadual ( ) Privada/Particular ( ) Conveniada

4- Você é repetente desta série?
( ) Não ( ) Sim. Em qual(is) disciplina(s)? ____________________________________

5- Você gosta de estudar Matemática?
( ) Não gosto ( ) Gosto um pouco ( ) Gosto ( ) Gosto muito

6- Quem lhe ajuda nas tarefas de casa de Matemática?
( ) Professor particular ( ) Pai ( ) Mãe ( ) Irmão
( ) Amigo(a) ( ) Ninguém ( ) Outro, quem? ____________________

7- Você costuma estudar Matemática fora da escola?
( ) Só estudo em sala de aula ( ) Só no período de prova ( ) Só na véspera da prova
( ) Só nos fins de semana ( ) Alguns dias da semana ( ) Todos os dias

8- Suas notas em Matemática geralmente são:
( ) Abaixo da média ( ) Na média ( ) Acima da média

9- Você tem dificuldade para aprender Matemática?
( ) Não ( ) Um pouco ( ) Muita

10- Qual a operação que você tem mais dificuldade em Matemática?
( ) Adição ( ) Subtração ( ) Multiplicação ( ) Divisão ( ) Nenhuma

11- Você tem domínio da tabuada? ( ) Não ( ) Um pouco ( ) Sim

12- Você faz algum curso?
( ) Informática ( ) Língua Estrangeira ( ) Não faço nenhum curso ( ) Outros: ________________

13- Você se distrai nas aulas de Matemática?
( ) Não, eu sempre presto atenção.
( ) Na maioria das vezes eu me distraio nas aulas de Matemática
( ) Sim, eu não consigo prestar atenção.

14- Como você se sente quando está diante de uma avaliação em Matemática?
( ) Contente ( ) Tranquilo ( ) Medo
( ) Preocupado ( ) Raiva ( ) Calafrios

15- Você trabalha de forma remunerada? ( ) Não ( ) Às vezes ( ) Sim

16- Você costuma fazer compras (comércio, mercearia, supermercado, etc.)?
( ) Não ( ) Às vezes ( ) Sim

17- Quem é o seu responsável masculino?
( ) Pai ( ) Avô ( ) Tio ( ) Irmão ( ) Não tenho ( ) Outro. _________________

18- Qual a profissão do seu responsável masculino? ____________________________

19- Qual a escolaridade do seu responsável masculino?
( ) Não escolarizado
( ) Ensino Fundamental Incompleto (1ª a 4ª série / 1º ao 5º ano)
( ) Ensino Fundamental Incompleto (5ª a 8ª série / 6º ao 9º ano)
( ) Ensino Fundamental Completo
( ) Ensino Médio Incompleto (antigo 2º Grau)
( ) Ensino Médio Completo (antigo 2º Grau)
( ) Ensino Superior

20- Quem é o seu responsável feminino?
( ) Mãe ( ) Avó ( ) Tia ( ) Irmã ( ) Não tenho ( ) Outro. ___________________

20- Qual a profissão do seu responsável feminino? ______________________________

22- Qual a escolaridade do seu responsável feminino?
( ) Não escolarizado
( ) Ensino Fundamental Incompleto (1ª a 4ª série / 1º ao 5º ano)
( ) Ensino Fundamental Incompleto (5ª a 8ª série / 6º ao 9º ano)
( ) Ensino Fundamental Completo
( ) Ensino Médio Incompleto (antigo 2º Grau)
( ) Ensino Médio Completo (antigo 2º Grau)
( ) Ensino Superior

23-Quando você estudou problemas envolvendo as quatro operações com números naturais a maioria das aulas começava:
( ) Pela definição seguida de exemplos e exercícios.
( ) Com uma situação problema para depois introduzir o assunto.
( ) Com um experimento para chegar ao conceito.
( ) Com um modelo para situação e em seguida analisando o modelo.
( ) Com jogos para depois sistematizar os conceitos.
( ) Com uma história sobre o assunto.

24- Para exercitar a resolução de problemas envolvendo as quatro operações com números naturais o(a) seu(a) professor(a) costumava:

( ) Apresentar uma lista de exercícios a serem resolvidos.
( ) Apresentar jogos envolvendo o assunto.
( ) Solicitar que os alunos resolvessem questões do livro didático.
( ) Solicitar que os alunos procurassem questões sobre o assunto para resolverem.
( ) Não propor questões de fixação.

25- Fale sobre suas experiências com a matemática e com as operações de multiplicação e divisão.

APÊNDICE B – TESTE DE DIAGNÓSTICO

PARAUAPEBAS – PARÁ, ____ DE __________________ DE 2019
NOME: ____

01. Resolva os seguintes cálculos da maneira que preferir.
a) 4 x 21
b) 17 x 72
c) 19 x 195
d) 205 x 273
e) 242 x 1471
f) 2128 x 4237

02. Resolva as divisões da maneira que preferir.
a) 56 : 8
b) 895 : 5
c) 1 308 : 12
d) 1 624 : 203
e) 47.750 : 382
f) 35.022: 26

03. Iago é responsável pelo setor de compras de uma padaria. Mensalmente, ele compra 15 caixas de 24 embalagens de leite. Ao todo, quantas embalagens de leite Iago compra por mês?

04. De acordo com a Tabela Brasileira de Composição de Alimentos publicada pela Unicamp em 2011, uma laranja-pera de tamanho médio tem cerca de 54 mg de vitamina C. Cerca de quantos miligramas de vitamina C podemos obter de três dúzia de laranjas-pera de tamanho médio?

05. Um programa de computador, cada vez que é executado, dobra o número de linhas verticais e o número de linhas horizontais que formam uma imagem digital. Uma imagem tinha, no início, 64 linhas verticais e 32 linhas horizontais. Se o programa foi executado 4 vezes, quantas linhas verticais e quantas linhas horizontais passou a ter essa imagem?

06. Uma amiga se desfez de sua coleção e deu 184 papéis de carta para distribuir igualmente entre mim e minhas 3 irmãs. Quantos papéis de carta cada uma de nós vai receber?

07. Um elevador pode carregar, no máximo, 560 quilogramas. Na fila para entrar nesse elevador há um grupo de pessoas que “pesam”, juntas, 6 160 quilogramas. Quantas viagens, no mínimo, esse elevador deve fazer para transportar, com segurança, todas essas pessoas?

08. Preciso distribuir 6.452 brigadeiros em 32 bandejas. Quantos brigadeiros ficarão em cada bandeja?

09. (UFPB - Adaptado) Certa máquina copiadora faz, no máximo, 30 cópias por minuto. Essa máquina só pode funcionar, no máximo, duas horas por dia. Para essa máquina fazer 15.000 cópias, são necessários pelo menos quantos dias?