



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



# **ESTUDO DE FUNÇÃO AFIM ATRAVÉS DA MODELAGEM MATEMÁTICA**

**Soraya Martins Camelo**

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientadores: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Rosana Marques da Silva  
Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza

Campina Grande - PB  
Agosto/2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG.

C181e Camelo, Soraya Martins.

ESTUDO DE FUNÇÃO AFIM ATRAVÉS DA MODELAGEM  
MATEMÁTICA / Soraya Martins Camelo

Campina Grande, 2013.

41 f.:il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal  
de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia.

"Orientação: Profa. Dra. Rosana Marques da Silva,  
Prof. Dr. Aparecido Jesuíno de Souza".

Referências.

1. Função Afim. 2. Modelagem Matemática. 3. Aula Inovadora.

I. Silva, Rosana Marques da.

II. Souza, Aparecido Jesuíno de. III. Título.

CDU-517.518.26(043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



## **ESTUDO DE FUNÇÃO AFIM ATRAVÉS DA MODELAGEM MATEMÁTICA**

**por**

**Soraya Martins Camelo <sup>†</sup>**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

<sup>†</sup>Bolsista CAPES

# ESTUDO DE FUNÇÃO AFIM ATRAVÉS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

por

**Soraya Martins Camelo**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

*Maria Isabelle Silva*

\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Maria Isabelle Silva - UEPB

*Jefferson Abrantes dos Santos*

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG

*Rosana Marques*

\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Rosana Marques da Silva - UFCG  
Orientadora

*Aparecido Jesuino de Souza*

\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza - UFCG  
Orientador

**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Centro de Ciências e Tecnologia**  
**Unidade Acadêmica de Matemática**  
**Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**Agosto/2013**

# Dedicatória

A Raimundo Camelo, meu pai, e  
Maria do Socorro, minha mãe, por  
tudo que me ensinaram e pelo in-  
centivo constante.

# Agradecimentos

A Deus, que por Sua misericórdia e sabedoria me possibilitou vivenciar essa experiência.

A Emília e Amanda, minhas filhas amadas, pelo carinho e compreensão.

A Samara, Sérgio e Sinara, meus irmãos, pelo apoio principalmente nas horas difíceis.

A Ana Maria, minha tia querida, pelas palavras de incentivo sempre que precisei.

A Marcos Vinícius, grande companheiro nesta caminhada, pelo carinho e apoio constantes. E pelas contribuições com este trabalho.

A minha orientadora, professora Rosana, pela paciência, dedicação e pelas orientações firmes, e principalmente pelo ambiente de harmonia e amizade. E pelos momentos de trocas de experiências tão importantes para minha formação profissional e pessoal.

Ao meu orientador, professor Aparecido, por suas grandiosas contribuições em meu trabalho.

A professora Isabelle e ao professor Jefferson. Ao participarem da banca apresentaram sugestões importantes para o êxito deste trabalho.

Agradeço à Escola Municipal de Ensino Fundamental Margarida Almeida pela liberação de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

# Resumo

Neste trabalho, propomos a utilização de modelagem matemática como uma ferramenta no estudo de funções. Com este objetivo, sugerimos uma atividade relacionada com a escolha do melhor plano de telefonia móvel entre três empresas. Esta atividade foca-se sobre os princípios básicos de modelagem matemática, a partir da escolha do tema e as hipóteses feitas no processo até a obtenção de uma função afim (objeto de estudo) que modela o custo de cada empresa, concluindo com uma análise crítica dos resultados encontrados. Esta atividade foi desenvolvida com a intenção de motivar os alunos, valendo-se do interesse que o tema pode despertar, num processo que irá ajudá-los a consolidar o conceito de função, serem autônomos, capazes de pensar e construir suas próprias estratégias para resolver problemas. A proposta é adequada aos alunos do primeiro ano do ensino médio e pressupõe que os mesmos já construíram os conceitos básicos envolvidos neste assunto.

**Palavras Chaves:** 1. Função Afim. 2. Modelagem Matemática. 3. Aula Inovadora

# Abstract

In this work, we propose the use of mathematical modeling as a tool in the study of functions. With this goal, we suggest an activity related to choosing the best mobile phone plan between three companies. This activity is focused on the basic principles of mathematical modeling, from the choice of the topic and the assumptions made in the process to the obtention of an affine function (object of study) that models the cost of each company, concluding with a critical analysis of the found results. This activity was developed intending to motivate students, using the interest that it can arouse in a process that will help them consolidate the concept of function, be autonomous, able to think and build their own strategies for solving problems. The proposal is appropriate for students in the first year of high school and assumes that students have already built the basic concepts involved in this subject.

**Keywords:** 1. Affine Function 2. Mathematical Modeling 3. Innovative Classroom



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Objetivo . . . . .	5
1.2	Organização . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Modelagem Matemática</b>	<b>6</b>
2.1	Introdução . . . . .	6
2.2	Trabalhos Relacionados . . . . .	6
2.3	Obtenção do Modelo Matemático . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Função</b>	<b>14</b>
3.1	Introdução . . . . .	14
3.2	Funções . . . . .	15
3.2.1	A ideia de correspondência . . . . .	15
3.2.2	A noção de lei da correspondência . . . . .	16
3.2.3	O conceito de variável . . . . .	17
3.2.4	O gráfico de uma função . . . . .	18
3.3	Função Afim . . . . .	19
3.3.1	Taxa de variação média . . . . .	20
3.3.2	Proporcionalidade . . . . .	21
3.3.3	Gráfico de uma função afim . . . . .	23
3.3.4	Caracterização de uma função afim . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Atividade Didática</b>	<b>26</b>
4.1	Introdução . . . . .	26

4.2 Aspectos Metodológicos . . . . .	27
4.3 Uma Aplicação . . . . .	28
<b>5 Conclusão</b>	<b>38</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>40</b>

# Capítulo 1

## Introdução

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio [6], dentre outras recomendações, propõem que o Ensino Médio seja desenvolvido de forma contextualizada, de forma a aproveitar ao máximo as relações existentes entre o conteúdo de ensino e o contexto pessoal ou social do aluno. Considerando que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento, acredita-se que propor atividades relacionadas ao cotidiano do aluno despertará uma postura ativa e trará significado ao que está sendo estudado. Nessa perspectiva, alguns livros didáticos de Matemática trazem em suas apresentações a tônica da contextualização apontando suas vantagens, como por exemplo *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia* de Jackson Ribeiro [16], *Matemática* de Dante [12] e *Conexões com a Matemática* de Juliene Matsubara Barroso [1]. Logo, a princípio, o livro didático de Matemática valendo-se de situações contextualizadas, deveria ser um importante auxiliar do professor no processo ensino-aprendizagem, ajudando-o a despertar o interesse do aluno ao objeto do conhecimento. Mas não é o que vem sendo observado e o que vem sendo apresentado nos resultados obtidos pelos alunos nas avaliações escolares e nos testes nacionais de Matemática, indicando que trata-se de uma disciplina em que os alunos obtêm pouca identificação e em que os conhecimentos estão abaixo do desejado. Esse fato está associado a diversos fatores, porém em um deles o professor pode atuar, de fato: a forma como a Matemática vem sendo ensinada em sala de aula.

A ligação da Matemática escolar com a Matemática da vida cotidiana do aluno tem um papel importante no processo de ensino-aprendizagem. Assuntos abordados em sala de aula, na maioria das vezes, são distantes da realidade dos alunos, deixando de lado o que na verdade poderia motivá-los. Werneck [19] aponta que: "Ensinamos demais e os alunos aprendem de menos e cada vez menos! Aprendem menos porque os assuntos são a cada dia mais desinteressantes, mais desligados da realidade dos fatos e os objetivos mais distantes da realidade da vida dos adolescentes".

Situações contextualizadas que despertem o interesse do aluno; ou de um grupo de

alunos, são algo que carece de um estudo mais aprofundado, com algumas variáveis a considerar; em geral, não é algo global nem atemporal. Talvez, por esse motivo, os livros didáticos não estão sendo eficientes. Evidentemente, nem sempre é possível e/ou conveniente, no ensino da matemática, trabalhar de forma contextualiza explorando o cotidiano do aluno<sup>1</sup>.

Função é um conceito matemático importante, presente em situações distintas do dia-a-dia e de caráter integrador, assim sendo, de fácil contextualização. Os Referenciais Curriculares para o Ensino Médio da Paraíba [15] apontam a importância da exploração do papel do conceito de Função dentro e fora da Matemática para o estudo, o entendimento e a explicação de fenômenos da realidade.

Com base nisto, dentre as várias tendências de ensino de matemática disponíveis na literatura, encontramos uma metodologia que nos despertou interesse por se propor a relacionar e dar significado ao conhecimento baseado na experiência vivida pelo aluno no seu cotidiano com o conhecimento matemático sistematizado na escola, partindo de um tema de seu interesse, a Metodologia da Modelagem Matemática<sup>2</sup>. Acreditamos ser essa metodologia capaz de responder a pergunta que tanto atrapalha o processo de ensino e de aprendizagem da matemática: Porque tenho que aprender isso?

Portanto, no intuito de tornar o ensino de Função mais significativo e as aulas mais atrativas aos alunos; proporcionando condições mais eficazes de aprendizagem e de aplicação dos conteúdos aprendidos em situações de interesse do aluno; sugerimos a Metodologia da Modelagem Matemática como alternativa de ensino. Para tanto desenvolvemos uma Atividade Didática a fim de ilustrar a aplicabilidade, ante a contextualização, dessa metodologia. Utilizamos como suporte teórico a concepção de Burak [10] sobre Modelagem Matemática e, sobre Função, utilizamos a abordagem apresentada por Caraça [11] no trato com a formação do conceito e as contribuições de Elon L. Lima [13].

Neste trabalho propomos o uso da Modelagem Matemática no estudo de Função Afim através dos planos de telefonia celular, analisando vantagens e desvantagens de optar por um determinado plano, numa sequência ordenada de questões que levem o aluno a formar e consolidar conceito de Função Afim. As etapas são apresentadas de forma detalhada para esclarecer ao leitor as possibilidades de trabalho na concepção apresentada.

---

<sup>1</sup>Os PCN orientam que para o ensino de Matemática ser significativo é necessário o professor se perguntar qual o contexto que dá sentido ou significado ao conteúdo, ou oriente a aprendizagem matemática. Esse é o caminho da contextualização. Logo, a contextualização pode ser a partir de situações do dia-a-dia ou a partir de questões internas da própria matemática. A escolha do contexto dependerá do conteúdo a ser trabalhado.

<sup>2</sup>Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo matemático. Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. Modelagem Matemática, segundo Bassanezi [2], é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Modelagem Matemática como metodologia de ensino apresenta-se como estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado.

## **1.1 Objetivo**

O principal objetivo deste trabalho é propor uma Atividade Didática que consolide o conceito de Função Afim, através de uma aplicação, a fim de ilustrar a aplicabilidade, ante a contextualização, da Metodologia Modelagem Matemática.

## **1.2 Organização**

Este trabalho está organizado da seguinte maneira além desta Introdução (Capítulo 1). O Capítulo 2 consta da fundamentação teórica do trabalho sobre Modelagem Matemática apresentando três concepções sobre o tema. O Capítulo 3 apresenta os conceitos de Função e de Função Afim dando ênfase a conceitos específicos que contribuem para a construção desse conhecimento. O Capítulo 4 apresenta uma Atividade Didática detalhando a forma como foi planejada, elaborada e aplicada. O Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho. Para terminar temos as Referências Bibliográficas.

# Capítulo 2

## Modelagem Matemática

### 2.1 Introdução

Na busca de uma metodologia de ensino que: facilite o aprendizado da matemática, proporcione ao aluno uma aula mais motivadora e seja capaz de possibilitar uma aplicação do conteúdo de Função Afim, escolhemos a Metodologia da Modelagem Matemática.

Nesta seção faremos algumas considerações acerca de concepções de Modelagem Matemática, tentando tecer um referencial teórico apoiado nas contribuições de Bassanezi [2], Burak [10] e Biembengut e Hein [3].

### 2.2 Trabalhos Relacionados

Para Bassanezi [2] a Modelagem Matemática é definida como "a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Na visão do autor: "A modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura de entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la."

Burak [10] propõe o ensino através da modelagem matemática. Ele apresenta uma metodologia que busca relacionar os conhecimentos práticos do aluno, do seu cotidiano, com conhecimentos matemáticos sistematizados na escola, a partir de um tema de seu interesse. O autor aponta como objetivo dessa metodologia "... construir um paralelo para tentar explicar matematicamente os fenômenos do qual o homem vive o seu cotidiano ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões".

Biembengut e Hein [3] definem Modelagem Matemática como "uma arte, ao formular,

resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma situação particular, mas que também sirvam, posteriormente para outras aplicações". De acordo com os autores:

"A modelagem matemática, originalmente, como metodologia de ensino-aprendizagem parte de um tema e sobre ele desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso de ferramental matemático e de pesquisa sobre o tema. [...] O trabalho de modelagem tem como objetivo principal criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos, aprimorando seus conhecimentos. Os alunos escolhem o tema e a direção do próprio trabalho, cabendo ao professor promover essa autonomia".[3]

Biembengut e Hein [3], afirmam que:

"Embora haja consenso quanto à importância da Matemática na formação de nossos jovens e a necessidade de encontrar meios eficientes para que o ensino-aprendizagem no âmbito escolar atinja esse objetivo, emergem de nossos educadores questões: O que é modelagem? Como implementar a modelagem matemática no ensino de Matemática? Como o professor pode aprender modelagem matemática para poder ensinar? "

## 2.3 Obtenção do Modelo Matemático

O processo de obtenção de um modelo ou de modelagem de situações com referência na realidade ou semi-realidade é composto por etapas, as quais apresentam diferenças sutis entre os autores citados.

Bassanezi [2] apresenta cinco etapas, num esquema simplificado chamado atividades intelectuais da Modelagem Matemática, a seguir:

### **1ª etapa:** Experimentação

Etapa de obtenção de dados para dar conta do problema não matemático (problema real).

### **2ª etapa:** Abstração

Etapa onde se seleciona as variáveis, formula questões, levanta hipóteses e simplifica o problema em termos matemáticos.

### **3ª etapa:** Resolução

Etapa de obtenção do modelo matemático capaz de responder a questão, quando acontece a troca da linguagem natural pela linguagem matemática coerente.

#### 4ª etapa: Validação

Etapa onde ocorre a aceitação ou não do modelo proposto. Nesse momento, os modelos devem ser conferidos com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real.

#### 5ª etapa: Modificação

Momento de, diante de uma negativa, caso algum fator provoque rejeição do modelo, voltar aos dados iniciais do experimento, e retomar o processo.

A Figura 2.1 representa o esquema de modelagem matemática segundo Bassanezi [2]. As setas contínuas representam segundo o autor a primeira aproximação, já as setas pontilhadas mostram que a busca de um modelo que melhor represente o problema estudado é um processo dinâmico.

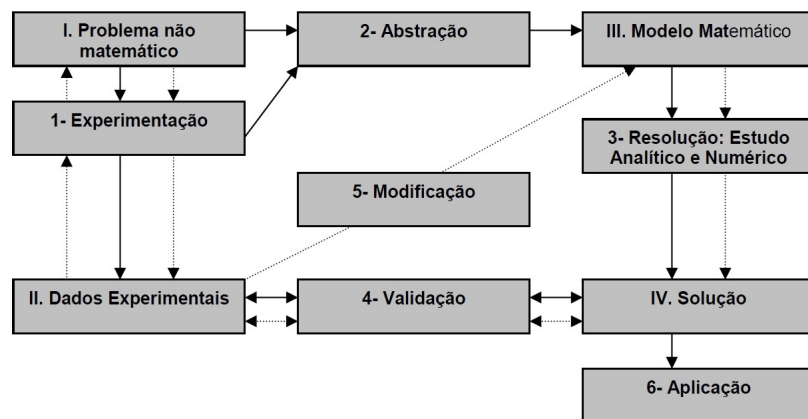


Figura 2.1: Divisão de Atividades Intelectuais. Fonte [2].

Bassanezi [2] argumenta, como relevância da Modelagem Matemática, os seguintes pontos:

- Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais;
- Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
- Pode sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas, e eventuais tomadas de decisão;



- Pode preencher lacunas onde existem falta de dados experimentais;
- Pode servir como recurso para melhor entendimento da realidade;
- Pode servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento.

E elenca uma série de pontos para destacar a relevância da Modelagem Matemática quando utilizada como estratégia de ensino-aprendizagem, a seguir:

- Argumento formativo: "ênfatisa [...] a performance da modelagem matemática [...] para desenvolver capacidades em geral e atitudes dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas";
- Argumento de competência crítica: "focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos";
- Argumento de utilidade: "[...] pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas";
- Argumento intrínseco: "considera que a inclusão de modelagem [...] fornece ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas";
- Argumento de aprendizagem: "garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valoriza a própria matemática".

Burak [9] apresenta Modelagem Matemática como metodologia que pretende proporcionar ao aluno aprender matemática de forma contextualizada, numa postura ativa através da ação com o objeto a seu alcance. O professor é mediador do conhecimento, seu papel é de auxiliar e orientar as ações entre o sujeito e o objeto, despertando reflexão sobre o que se pretende aprender. Não há a sequência rígida de conteúdos. A situação-problema é que determina o conteúdo a ser estudado.

Para fins de encaminhamentos do trabalho em sala de aula, Burak [10] apresenta cinco etapas para a aplicação da Modelagem Matemática como metodologia de ensino:

**1ª etapa:** Escolha do tema:

O professor estimula e oferece oportunidades para a escolha de um tema que faz parte do interesse do aluno ou do grupo de alunos e sobre esse tema eles realizam pesquisa.

**2ª etapa:** Pesquisa exploratória:

Permite aos alunos a coleta de todos os dados que julguem relevantes ao tema de pesquisa.

**3ª etapa:** Levantamento dos problemas:

De acordo com os dados coletados pela pesquisa é feita a elaboração e esquematização dos problemas pertinentes ao tema.

**4ª etapa:** Resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema:

Etapa paralela à etapa anterior. Nessa etapa surge a necessidade dos conteúdos matemáticos ou modelos matemáticos que ajude na compreensão e resolução da situação-problema.

**5ª etapa:** Análise crítica da(s) solução(es):

Propicia aos alunos o desenvolvimento de sua criticidade, reflexão, coerência. Além da relação e adequação dos resultados com a realidade e adequabilidade.

Diferentemente de Bassanezi [2], Burak [10] salienta a escolha do tema pelo aluno.

Para Biembengut e Hein [3] o processo de obtenção de um modelo ou de modelagem de situações com referência na realidade ou semi-realidade é composto por três etapas subdivididas em seis subetapas, a seguir:

**1ª etapa:** Interação com o assunto

Reconhecimento da situação problema;  
Familiarização com o assunto a ser modelado.

Etapa em que ocorre o envolvimento com o tema a ser estudado. Nessa etapa deverá ser feita uma pesquisa sobre o assunto escolhido através de pesquisas em livros, jornais, revistas especializadas e de dados obtidos junto a especialistas da área.

**2ª etapa:** Matematização

Formulação do problema;  
Resolução do problema em termos do modelo.

Etapa mais desafiadora, onde se dará à tradução da situação problema para a linguagem matemática, ou seja, é aqui que se formula um problema e escreve-o segundo um modelo que leve a solução. Intuição, criatividade e experiência acumulada são elementos indispensáveis nessa etapa.

### 3ª etapa: Modelo Matemático

Interpretação da solução;

Verificação ou validação.

Etapa de conclusão e utilização do modelo, onde ocorre uma testagem ou validação do modelo obtido para verificar em que nível este se aproxima da situação-problema. Assim, sua interpretação deve ser feita através de análise das implicações da solução, derivada do modelo que está sendo investigado, para então, avaliar sua adequabilidade e grau de confiabilidade.

A Figura 2.2 ilustra a dinâmica da Modelagem Matemática segundo Biembengut e Hein [3].

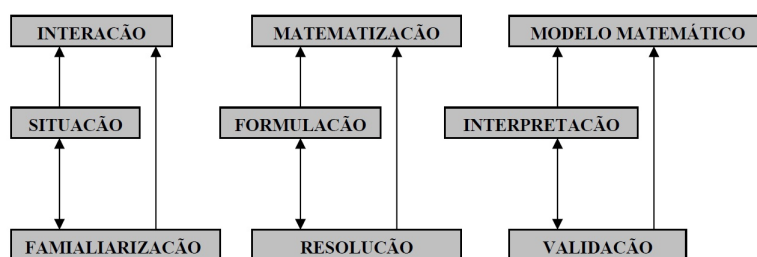


Figura 2.2: Dinâmica da Modelagem Matemática. Fonte [3].

Biembengut e Hein [3] argumentam, como relevância da Modelagem Matemática como metodologia de ensino-aprendizagem, os seguintes pontos:

- Pode incentivar a pesquisa;
- Pode promover a habilidade em formular e resolver problemas;
- Pode aplicar o conteúdo programático e
- Pode desenvolver a criatividade.

Para Biembengut e Hein [3], em relação ao processo de implantação da Modelagem Matemática em sala de aula, afirmam que: "[...] A condição necessária para o professor implementar a Modelagem no ensino, é ter audácia, grande desejo de mudar sua prática e disposição de conhecer, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas significativas".

Os autores chamam atenção à necessidade de adequação, por parte do professor, da metodologia ao currículo e a importância do acompanhamento do tema escolhido pelos alunos. Logo, orientam que os professores podem seguir os seguintes procedimentos:

- a. propor aos alunos que façam uma breve pesquisa e a partir desta, uma síntese;
- b. propor que façam questionamentos sobre o assunto ou sugestões do que se possa estudar;
- c. determinar, dado que o aluno desconhece, o conteúdo matemático a ser desenvolvido e qual a questão a ser resolvida primeiro;
- d. desenvolver o conteúdo programático;
- e. propor, nesse momento, exemplos análogos para que o conteúdo não se restrinja ao modelo.

Sendo que a ordem dos procedimentos está enumerada a seguir:

1. Escolha do tema central a ser desenvolvido pelos alunos;
2. Pesquisa para coletar dados quantitativos e informações que possam auxiliar a apresentação de hipóteses;
3. Elaboração de problemas que serão distribuídos para os grupos de interesses comuns;
4. Abstração no sentido de selecionar as variáveis essenciais envolvidas no problema e formular hipóteses;
5. Sistematização dos conceitos que serão usados na resolução dos modelos Matemáticos e que fazem parte do conteúdo programático do curso em questão. Deve ser efetuada, também enquanto se trabalha na resolução e formalização dos Modelos.
6. Interpretação da solução de maneira analítica e com possíveis representações gráficas;
7. Validação dos modelos que devem ser os mais coerentes possíveis com a realidade pesquisada. Caso o Modelo não seja adequado, o sistema deve ser retomado com novas pesquisas, tornando assim o processo dinâmico;
8. Quando o Modelo é satisfatório deve-se procurar utilizá-lo fazendo previsões, análises, ou qualquer outra forma de ação sobre a realidade.

Biembengut e Hein [3] sistematizam a prática do método, apresentando as seguintes etapas:

1. Diagnóstico

O objetivo dessa etapa é traçar o perfil do aluno levando em conta, dentre outras coisas, a realidade sócio-econômica, o grau de conhecimento matemático e a disponibilidade para trabalhos extra-classe. Os autores indicam que o diagnóstico, o número de alunos e o horário da disciplina, são pontos determinantes para o planejamento das atividades de modelagem matemática.

## 2. A escolha do tema

Nessa etapa, o professor ou os alunos, podem escolher o tema a ser investigado, porém a preferência é que os alunos escolham o tema. Os autores pontuam a importância do papel do professor nessa etapa, cabe a ele observar se o tema escolhido está em sintonia com o conhecimento e a expectativa dos alunos e preparar a condução do processo para que desenvolva o conteúdo programático.

## 3. O desenvolvimento do conteúdo

Nesse momento o professor segue as mesmas etapas e sub-etapas do processo de modelagem, isto é: Interação: reconhecimento da situação-problema e familiarização; Matemática: formulação e resolução do problema; e Modelo Matemático: interpretação e validação.

Diferentemente de Burak [10], Biembengut [4] faz a adaptação do processo de Modelagem Matemática com a estrutura vigente: currículo, horário, espaço físico, dentre outros aspectos; o ensino do conteúdo programático é que orienta a modelagem.

A Figura 2.3 ilustra o Desenvolvimento do Conteúdo Programático segundo a visão de Biembengut e Hein [3].

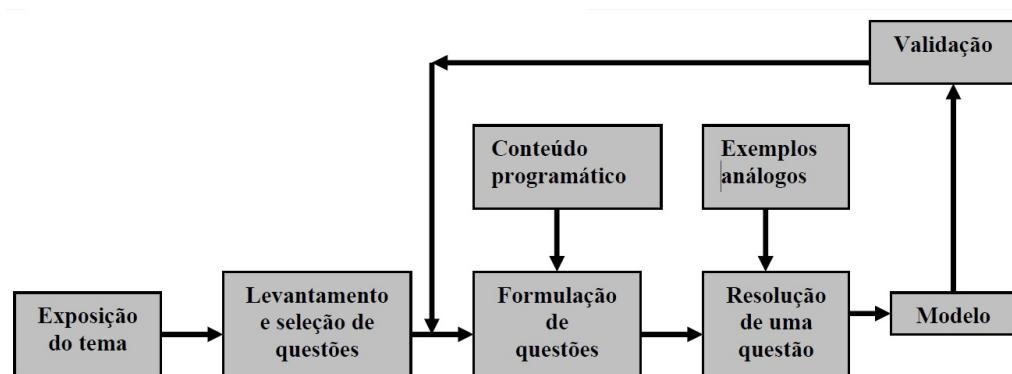


Figura 2.3: Desenvolvimento do Conteúdo Programático. Fonte [3].

# Capítulo 3

## Função

### 3.1 Introdução

No estudo das variações das quantidades e na busca de leis quantitativas, criou-se o objeto matemático chamado função.

Caraça [11] conceitua função como o instrumento próprio para o estudo das leis e enfatiza que o estudo de funções deve ser desenvolvido a partir de ideias de correspondência entre grandezas, dependência entre as grandezas, variáveis para representar essas grandezas, taxa de variação entre as variáveis e observação de regularidades.

Em consonância com Caraça [11], os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [7] recomendam que o ensino de funções pode ser iniciado diretamente pela noção de correspondência entre conjuntos que descrevem situações de dependência entre duas grandezas,

"...o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algebricamente e graficamente. Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado. Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas." [7]

O tema Função aparece nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) [8] enfatizado pelo seu caráter integrador; que permite exploração, no que diz respeito às suas aplicações, dentro e fora da Matemática. Em relação ao ensino de função afirmam que:

"[...] cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática." [8]

Ainda em relação a função, Elon L. Lima [13], coloca que do mesmo modo que "...os conjuntos são o modelo matemático para a organização do pensamento lógico; os números são o modelo matemático para as operações de contagem e medida; as funções [...], cada uma delas é estudada como modelo matemático adequado para representar uma situação específica.", e acrescenta:

"A fim de saber qual o tipo que deve ser empregado para resolver um determinado problema, é necessário comparar as características desse problema com as propriedades típicas da função que se tem em mente. Este processo requer que se conheçam os teoremas de caracterização para cada tipo de função. [13]

A seguir apresentaremos o que consideramos ser essencial, para a formação do conceito "Função", as noções de: Correspondência, Lei da Correspondência e Variável à luz de Caraça [11] e com base nas notas de aula da Prof<sup>a</sup> Izabel Maria Barbosa de Albuquerque<sup>1</sup> e Gráfico de uma função, taxa de variação, gráfico e a caracterização da Função Afim à luz de Elon L. Lima [13].

## **3.2 Funções**

### **3.2.1 A ideia de correspondência**

A ação de "fazer corresponder" está intimamente ligada à ideia de correspondência. Ela surgiu com o conceito de número natural. Podemos citar como exemplo dessa ação o processo de contagem. Ele se realiza fazendo corresponder sucessivamente, a cada objeto da coleção, um número da sucessão natural. A operação "fazer corresponder" é uma das operações mentais mais importantes e que utilizamos constantemente no dia-a-dia. A correspondência ou a associação de dois objetos, exige que haja um antecedente e um conseqüente. A fim de exemplificar, consideremos os estados brasileiros e suas capitais. Ao pensarmos em um nome de um estado brasileiro, imediatamente o associamos a sua capital, temos, então, uma correspondência: estado brasileiro (antecedente) e capital (conseqüente).

---

<sup>1</sup>Doutora em Educação Matemática pela UFC, professora aposentada da UAMat/CCT/UFCEG e professora vinculada ao Curso de Especialização em Educação Matemática/UEPB

Por outro lado, ao tomarmos o nome de uma determinada capital, logo o associamos ao nome do estado, obtemos, assim, a correspondência: capital (antecedente) estado brasileiro (consequente).

Destacamos que a diferença entre as correspondências citadas aparece ao trocarmos os papéis de antecedente e consequente; nestas condições as correspondências dizem-se recíprocas.

Consideremos, agora, os estados brasileiros e os estádios de futebol para a copa 2014. Ao pensarmos em um nome de um estado brasileiro, ele pode ou não estar associado a um estádio, logo, a correspondência: estado brasileiro (antecedente) e estádio (consequente) não contempla todos os antecedentes. Por outro lado, ao tomarmos um determinado estádio, logo o associamos ao nome do estado onde está situado, obtemos, assim, a correspondência: estádio (antecedente) estado brasileiro (consequente), mas também neste caso, nem todos os estados brasileiros serão contemplados.

A correspondência em que todo antecedente possui consequente, chama-se completa. Toda correspondência completa em que cada antecedente possui um único consequente chama-se unívoca (um-a-um). Se pelo menos um dos antecedentes possui mais de um consequente, a correspondência chama-se não unívoca (um-a-mais).

Quando uma correspondência completa é unívoca e a sua recíproca também, a correspondência chama-se biunívoca.

### **3.2.2 A noção de lei da correspondência**

Fenômeno Natural, segundo Caraça [11], é uma secção da realidade nela recortada arbitrariamente. Há fenômenos que apresentam regularidades, ou seja, comportamento idêntico, dado que as condições iniciais sejam as mesmas. Uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da natureza é a procura de regularidades dos fenômenos naturais, porém nem todos os fenômenos possuem regularidades. Os que não possuem regularidades não são estudados pela matemática. A determinação de regularidades permite a repetição e previsão sobre etapas que não são observáveis. A essa regularidade, pela qual o antecedente está associado ao consequente, denominamos a lei da correspondência. De acordo com esse conceito, pode haver dois tipos de lei: lei qualitativa, que considera a variação qualitativa do fenômeno, e lei quantitativa, que considera a variação da quantidade do fenômeno. A lei quantitativa que consiste na forma de correspondência unívoca dos elementos de dois conjuntos é um instrumento matemático.

A lei quantitativa pode ser expressa de forma verbal (em linguagem corrente), gráfica (usando sistemas de coordenadas, diagrama de flechas, tabelas ou outras formas não convencionais) e analíticas (expressões matemáticas). A representação de uma correspondência



através de tabelas ou diagrama de flexas é uma representação adequada quando os conjuntos envolvidos (antecedentes e consequentes) possuem um pequeno número de elementos. Pode ser bastante útil também, caso os conjuntos envolvidos possuam um número grande de elementos, quando serve para observação do comportamento da correspondência entre os conjuntos e, a partir de casos particulares, identificar regularidades levando à generalização.

### 3.2.3 O conceito de variável

Para generalizarmos uma regularidade observada a partir de casos particulares, necessitamos de uma representação simbólica para os elementos dos conjuntos; consegue-se isso introduzindo o conceito de variável, da seguinte forma:

Seja  $A$  um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convençionemos chamar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por exemplo  $x$ . A este símbolo, representativo de qualquer elemento do conjunto  $A$ , chama-se variável.

Quando dizemos, por exemplo, seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais e seja  $x$  a sua variável, significa que o símbolo  $x$  representa um número real qualquer.

Com o conceito de variável, a representação da lei ou da correspondência pode ser dada por meio de uma sentença algébrica.

Seja  $x$  a variável do conjunto de partida (conjunto dos antecedentes) e seja  $y$  a variável do conjunto de chegada (conjunto dos consequentes). A lei consiste na existência de uma correspondência entre  $x$  e  $y$ , ( $x \rightarrow y$ ). Onde o conjunto dos antecedentes denominamos de Domínio e o conjunto dos consequentes denominamos de Contra-domínio. A variável  $x$  é chamada de variável independente e a variável  $y$  de variável dependente.

Dois casos particularmente importantes são aqueles em que:

- o domínio é o conjunto dos números reais ou um subconjunto dos números reais; a variável  $x$  diz-se então variável real.
- o domínio é o conjunto infinito dos números naturais  $1, 2, 3, 4, \dots$ ; neste caso o símbolo  $n$  é a variável e a designaremos por variável inteira.

Considere  $A$  o conjunto de partida,  $B$  o conjunto de chegada,  $x$  a variável do conjunto  $A$  e  $y$  a variável do conjunto  $B$ . Diz-se que  $y$  é função de  $x$  se para cada variável  $x$  de  $A$ , existir uma única variável  $y$  de  $B$  que está em correspondência com  $x$ , no sentido  $x \rightarrow y$  (correspondência unívoca). Quando  $y$  é função de  $x$  escreve-se  $y = f(x)$ . Neste caso, dizemos que a variável  $y$  é função da variável  $x$ . Como a correspondência ocorre para todo  $x$  de  $A$ ,

diz-se que  $f$  é uma função de  $A$  em  $B$ . Podemos representar pela notação a seguir:

$$f : A \rightarrow B$$
$$x \rightarrow y = f(x).$$

**Definição 3.1** *Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos não vazios. Sejam  $x$  a variável do conjunto  $A$  e  $y$  a variável do conjunto  $B$ . Seja  $f$  uma correspondência entre os elementos de  $A$  e de  $B$ . Dizemos que  $f$  é uma função de  $A$  em  $B$  se para cada variável  $x$  de  $A$ , existir uma única variável  $y$  de  $B$  tal que  $y$  é função de  $x$ , isto é,  $y = f(x)$ . Neste caso o conjunto  $A$  é chamado de domínio da função,  $B$  de contradomínio e o conjunto de todos os valores de  $y$ , tais que  $y = f(x)$  é chamado a imagem da função  $f$ .*

**Observação 3.1** *Na Definição 3.1 quando  $A$  é um subconjunto do conjunto dos números reais e  $B = \mathbb{R}$ , dizemos que  $f$  é uma função real de variável real.*

**Definição 3.2** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de uma variável real definida por  $y = f(x)$ . A função  $f$  é dita:*

- monótona crescente quando, para todo  $x_1, x_2 \in A$  com  $x_1 < x_2$  implica  $f(x_1) < f(x_2)$ ;
- monótona decrescente quando, para todo  $x_1, x_2 \in A$  com  $x_1 < x_2$  implica  $f(x_1) > f(x_2)$ ;
- monótona não-crescente quando, para todo  $x_1, x_2 \in A$  com  $x_1 < x_2$  implica  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ;
- monótona não-decrescente quando, para todo  $x_1, x_2 \in A$  com  $x_1 < x_2$  implica  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

### 3.2.4 O gráfico de uma função

A representação da lei pode ser dada também por meio de um gráfico no plano cartesiano. Para tal, além dos conceitos já expostos serão necessários os conceitos de par ordenado, produto cartesiano e de plano cartesiano.

Dados dois números reais  $x$  e  $y$ , o par ordenado destes números reais, denotado por  $(x, y)$ , é formado quando se escolhe  $x$  para ser a primeira coordenada e, conseqüentemente,  $y$  para ser a segunda. Os pares ordenados  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  são iguais se, somente se,  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ .

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  o produto cartesiano de  $A$  por  $B$ , indicado por  $A \times B$ , é o conjunto formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$ , com  $x \in A$  e  $y \in B$ , ou seja,

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos dos números reais e  $f$  uma função de  $A$  em  $B$ . Algebricamente, o gráfico de  $f$  é o conjunto de todos os pares ordenados  $(x, y)$  pertencentes ao conjunto  $A \times B$  para os quais  $y = f(x)$ . Assim, o gráfico de  $f$  é o conjunto

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}.$$

A representação geométrica do gráfico de  $f$  é o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano que estão em correspondência biunívoca com os pares ordenados de  $G(f)$ .

O Plano Cartesiano (Plano Numérico ou  $\mathbb{R}^2$ ) é uma representação geométrica do produto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . É representado por duas retas (eixos) perpendiculares e orientadas<sup>2</sup>, uma horizontal e outra vertical, onde cada uma das retas representa o conjunto dos números reais e o ponto  $O$  de interseção é chamado de origem. Chamamos, geralmente, de eixo  $x$  ou eixo das abscissas, a reta horizontal e a reta vertical denominamos de eixo  $y$  ou eixo das ordenadas. O Plano cartesiano permite representar graficamente representações algébricas, por exemplo, um ponto  $P$  do plano cartesiano é a representação gráfica de um par ordenado de números reais  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e denotamos por  $P = (x, y)$ , onde  $x$  e  $y$  são suas coordenadas.

Dado um ponto de coordenadas  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , a coordenada  $x$  indica a medida do deslocamento a partir da origem para a direita (se positivo) ou para a esquerda (se negativo) e a coordenada  $y$  indica o deslocamento a partir da origem para cima (se positivo) ou para baixo (se negativo) (Figura 3.1). O Plano Cartesiano é dividido em quatro regiões, chamadas de quadrantes, quando  $x > 0$  e  $y > 0$ , o ponto está localizado no primeiro quadrante; quando  $x < 0$  e  $y > 0$ , no segundo;  $x < 0$  e  $y < 0$ , no terceiro e quando  $x > 0$  e  $y < 0$ , o ponto está localizado no quarto quadrante.

### 3.3 Função Afim

Uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se Afim quando existem constantes reais  $a$  e  $b$  tais que

$$f(x) = ax + b, \text{ para } x \text{ real.}$$

---

<sup>2</sup>Imaginemos uma reta, na qual fixamos um ponto  $O$ , o qual chamaremos de origem, e tomemos um ponto  $A$ , diferente de  $O$ , e o segmento  $OA$  como unidade de comprimento, neste caso, a abscissa de  $A$  é 1. A reta assim determinada será chamada de reta real [13], ou reta orientada. A origem divide a reta em duas semi-retas, a que contém  $A$  de semi-reta positiva, a outra de semi-reta negativa. Seja  $X$  um ponto qualquer da reta e  $x$  a sua abscissa. Se  $X$  está a direita da origem,  $x$  é a medida do segmento  $OX$ . Se  $X$  está a esquerda da origem,  $x$  é a medida do segmento  $OX$  precedido do sinal - (menos). Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e a reta real, a qual associa a cada ponto  $X$  da reta a sua abscissa  $x \in \mathbb{R}$ .

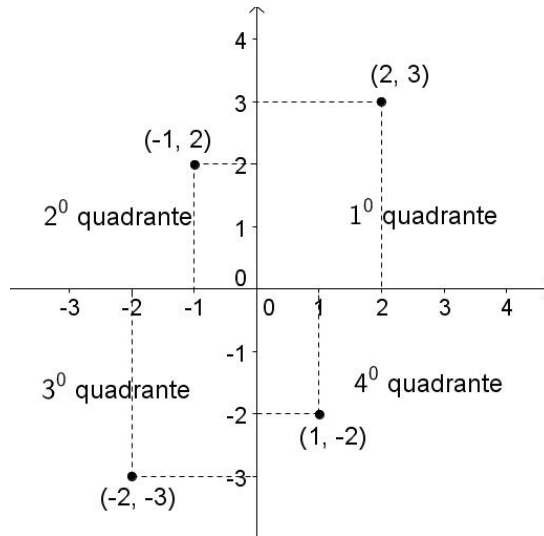


Figura 3.1: Representação de alguns pontos no plano cartesiano.

Casos particulares de funções afim:

Função identidade:  $f(x) = x$ ;

Translação:  $f(x) = x + b$ ;

Função linear:  $f(x) = ax$ ;

Função constante:  $f(x) = b$ .

### 3.3.1 Taxa de variação média

A taxa de variação média de uma função real  $f$ , em relação a sua variável independente  $x$ , é a razão entre a variação sofrida pela função quando  $x$  varia. Por exemplo, tomando dois valores reais quaisquer,  $x_1$  e  $x_2$ , definimos  $\Delta x = x_2 - x_1$  a variação de  $x_1$  à  $x_2$ , ou seja,  $x_2 = x_1 + \Delta x$ . Já a variação da função  $f$  de  $y_1 = f(x_1)$  à  $y_2 = f(x_2)$  é definida por  $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = (y_2 - y_1)$ .

Se  $x_1 \neq x_2$ , podemos calcular a razão  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . E essa razão é chamada de taxa de variação média (ou taxa de crescimento) da função  $f$  em relação a  $x$  quando  $x$  varia de  $x_1$  à  $x_2$ .

**Proposição 3.1** A taxa de variação média de uma função afim dada por  $f(x) = ax + b$  é constante e igual ao parâmetro  $a$ .

**Demonstração.**

Calculando a razão  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  obtemos,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

□

O sinal do coeficiente  $a$  (taxa de variação) média da função afim  $f(x) = ax + b$ , determina se a mesma é crescente ou decrescente.

- Se  $a > 0$ , então a função é crescente. De fato: Se  $x_1 < x_2$ , então  $ax_1 < ax_2$  logo  $ax_1 + b < ax_2 + b$ , ou seja,  $f(x_1) < f(x_2)$ ;
- Se  $a < 0$ , então a função é decrescente. De fato: Se  $x_1 < x_2$ , então  $ax_1 > ax_2$  logo  $ax_1 + b > ax_2 + b$ , ou seja,  $f(x_1) > f(x_2)$ ;
- Se  $a = 0$ , então a função é constante. Neste caso, temos  $f(x) = b$ , para todo  $x$  real.

Se  $a \neq 0$ , então o valor  $x = -\frac{b}{a}$  é o zero da função  $f$ .

### 3.3.2 Proporcionalidade

Um caso particular de função afim, a função linear, dada por  $f(x) = ax$  é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

**Definição 3.3** Uma proporcionalidade é uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para quaisquer números reais  $c$  e  $x$ , tem-se  $f(cx) = cf(x)$  (proporcionalidade direta) ou  $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ , se  $c \neq 0$  (proporcionalidade inversa) [13].

Na definição de proporcionalidade direta, fazendo  $a = f(1)$ , tomando  $x = 1$  temos que  $f(c) = f(c1) = cf(1) = ac$ , para todo  $c \in \mathbb{R}$ . Fazendo  $c = x$  temos  $f(x) = ax$ , para todo  $x$  real. Portanto o modelo que estuda os problemas de proporcionalidade (direta) é a função linear e  $a$  é chamado de constante de proporcionalidade.

**Teorema 3.2** Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (1)  $f(kx) = kf(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  e  $\forall k \in \mathbb{Z}$ .
- (2) Pondo  $a = f(1)$ , tem-se  $f(x) = ax$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- (3)  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Demonstração.

Primeiramente, suponha que  $f$  verifica a condição (1).

Tomemos o número racional  $q = \frac{n}{m}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$  e não nulos. Assim,

$$nf(x) = f(nx) = f(qmx) = f(mqx) = mf(qx),$$

implica que

$$\frac{n}{m}f(x) = f(qx),$$

ou seja,

$$qf(x) = f(qx).$$

Assim, a igualdade  $f(kx) = kf(x)$ , é ampliada para  $\forall x \in \mathbb{R}$  e  $\forall k \in \mathbb{Q}$ .

Seja  $a = f(1)$ . Como  $f(0) = f(0 \cdot 1) = 0f(1) = 0$  e  $f$  é crescente, temos que  $a = f(1) > f(0) = 0$ . Logo,  $a$  é positivo e  $f(q) = f(q \cdot 1) = qf(1) = aq$ ,  $\forall q \in \mathbb{Q}$ .

Mostremos agora que se tem  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Vamos supor, por absurdo, que existe algum número real  $x$  (necessariamente irracional) tal que  $f(ax) \neq ax$  ( $f(x) > ax$  ou  $f(x) < ax$ ). Vamos considerar que  $f(x) > ax$  (O caso  $f(x) < ax$  é tratado de maneira análoga). Como  $x$  e  $a = f(1) > 0$  são fixos, deve existir algum número racional  $q$  tal que

$$\frac{f(x)}{a} > q > x.$$

Logo,

$$f(x) > aq = f(q).$$

Mas isto é uma contradição, uma vez que a função  $f$  é crescente e,  $q > x$ , deveríamos ter  $f(q) > f(x)$ , o que prova que  $f$  verifica a condição (2).

Agora, suponha que  $f$  verifica a condição (2). Consideremos  $z = x + y$  onde  $z, x, y \in \mathbb{R}$ . Pelo item (2), segue que

$$f(z) = az.$$

Como  $z = x + y$ , novamente por (2) temos que

$$f(x + y) = f(z) = az = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y),$$

o que prova que  $f$  verifica a condição (3).

A demonstração que (3) implica em (1) pode ser encontrada em Elon L. Lima [13]. Faremos a prova para  $k$  inteiro positivo (para  $k$  inteiro negativo é análoga). Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Fazendo  $x_1 = x, x_2 = x, \dots, x_k = x$ , temos

$$\begin{aligned} f(kx) &= f(x_1 + x_2 + \dots + x_k) = f(x_1) + [f(x_2 + x_3 + \dots + x_k)] \\ &= f(x_1) + f(x_2) + [f(x_3 + \dots + x_k)] = \dots = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) \\ &= kf(x). \end{aligned}$$

□

**Observação 3.2** *O teorema da proporcionalidade considera que quando a função  $f$  é crescente, tem-se  $a = f(1) > 0$ . O resultado é análogo para o caso de  $f$  ser decrescente, ou seja, neste caso tem-se que  $a = f(1) < 0$ .*

Concluimos do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que uma condição suficiente para que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função linear, é:

1.  $f$  deve ser crescente ou decrescente e
2.  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 3.3.3 Gráfico de uma função afim

Sobre uma função afim vamos demonstrar duas outras proposições importantes a seguir:

**Proposição 3.3** O gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical.

**Demonstração.**

Para mostrar que o gráfico de uma função afim é uma reta, vamos usar a condição de colinearidade de três pontos dada pela distância entre eles: "Três pontos distintos são colineares se a maior distância entre cada dois deles é igual à soma das outras duas menores".

Consideremos três pontos arbitrários  $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$ ,  $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ ,  $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$  pertencentes ao gráfico de uma função afim. Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $x_1 < x_2 < x_3$ . Calculando a distância entre os pontos, temos que:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo processo para  $d(P_1, P_3)$  e  $d(P_2, P_3)$  obtemos

$$\begin{aligned}d(P_1, P_3) &= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \\d(P_2, P_3) &= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}.\end{aligned}$$

Assim  $d(P_1, P_2) < d(P_1, P_3)$ ,  $d(P_2, P_3) < d(P_1, P_3)$  e

$$\begin{aligned}d(P_1, P_3) &= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \\&= (x_3 - x_2 + x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \\&= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2} + (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2} \\&= d(P_2, P_3) + d(P_1, P_2).\end{aligned}$$

Mostrando assim que os pontos são colineares e, portanto, o gráfico de qualquer função afim é uma reta não-vertical.  $\square$

Uma consequência imediata da Proposição 3.3 é que a partir de dois pontos quaisquer  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , com  $x_1 < x_2$ , existe uma única função afim cujo gráfico é a reta que passa por esses pontos.

De fato, considere o sistema de equações a seguir nas variáveis  $A$  e  $B$ :

$$\begin{cases} y_1 = Ax_1 + B \\ y_2 = Ax_2 + B. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos que a única solução do mesmo é dada por  $A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  e  $B = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_1 - x_2}$ .

Definindo  $f(x) = Ax + B$  segue que esta é a única função afim cujo gráfico contém os pontos dados.

**Proposição 3.4** Dada uma reta não vertical, ela é o gráfico de uma função afim.

**Demonstração.**

Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , com  $x_1 \neq x_2$  pontos pertencentes a uma reta não vertical  $r$ . Já vimos que dados dois pontos existe uma única função afim, cujo gráfico contém esses dois pontos. Como o gráfico desta função afim é uma reta que contém os pontos dados, ela só pode ser a reta  $r$  dada.  $\square$

O parâmetro  $a$  de uma função afim  $f$  é chamado de coeficiente angular da reta, gráfico de  $f$ , e está relacionado à inclinação da mesma. O parâmetro  $b$  é a ordenada do ponto onde a reta, gráfico de  $f$ , intersecta o eixo  $OY$ .



### 3.3.4 Caracterização de uma função afim

O Teorema da Caracterização de uma Função Afim vem a responder o porque de uma função afim ser o modelo matemático adotado para um determinado problema.

Ele garante que em determinadas condições, se a taxa de variação de uma função, com relação a sua variável independente  $x$ , for constante (independe de  $x$ ), então a função é uma função afim.

**Teorema 3.5** *Teorema da Caracterização de uma Função Afim.*

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona crescente ou monótona decrescente. Se o acréscimo  $f(x + \Delta x) - f(x)$  depender apenas de  $\Delta x$  mas não de  $x$ , então  $f$  é uma função afim.

**Demonstração.** Seja  $h = \Delta x$ . Sem perda de generalidade vamos supor  $f$  crescente. Seja  $f$  uma função qualquer e  $g$  uma função satisfazendo a condição  $f(x + h) - f(x) = g(h)$ , ou seja, a variação de  $f$  em relação à  $x$  depende apenas de  $h$ . Observemos que  $g(0) = f(x + 0) - f(x) = 0$ .

Se  $h_1 < h_2$ , então  $g(h_1) = f(x + h_1) - f(x) < f(x + h_2) - f(x) = g(h_2)$ . Portanto  $g$  também é crescente.

Calculemos  $g(v + h)$ , para  $v$  e  $h$  reais quaisquer,

$$g(v + h) = f(x + (h + v)) - f(x) = f((x + v) + h) - f(x). \quad (3.1)$$

Somando e subtraindo  $f(x + v)$  do lado direito de (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} g(v + h) &= f((x + v) + h) - f(x + v) + f(x + v) - f(x) \\ &= [f((x + v) + h) - f(x + v)] + [f(x + v) - f(x)] \\ &= g(h) + g(v). \end{aligned}$$

Visto que a função  $g$  satisfaz as condições do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, conclui-se que  $g$  é uma função afim.

Logo, fazendo  $a = g(1)$ , temos  $g(h) = ah$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}$ . Isto quer dizer que  $f(x + h) - f(x) = ah$ . Tomando  $x = 0$ , temos que  $f(0 + h) - f(0) = ah$  ou  $f(h) - f(0) = ah$ . Chamando  $f(0) = b$ , temos  $f(h) = ah + b$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}$ .

Substituindo  $h$  por  $x$  obtemos  $f(x) = ax + b$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $f$  é uma função afim.  $\square$

# Capítulo 4

## Atividade Didática

### 4.1 Introdução

Tomamos a Modelagem Matemática como metodologia de ensino na esperança de motivar e contribuir para o ensino-aprendizagem dos alunos de uma forma diferente e contextualizada. Consideramos que os alunos, enxergando a aplicabilidade do que estudam na escola, se sentirão mais motivados para o estudo de matemática e terão mais facilidade em compreender as ideias matemáticas, já que poderão conectá-las a outros assuntos; além de desenvolver a capacidade de aplicar a matemática em diversas situações. Todos esses fatores apontam na direção da Modelagem Matemática como um processo rico e criativo.

A Atividade Didática apresentada nesta seção foi conduzida na perspectiva de Burak [10], por acreditarmos ser mais apropriado à Educação Básica, ao mesmo tempo que trazemos a contribuição de Biembengut e Hein [3] no momento em que adaptamos a metodologia ao conteúdo programático a ser cumprido.

A proposta parte do pressuposto de que os alunos já construíram conceitos básicos que envolvem o conteúdo de função, tais como: variáveis, relação de dependência, representação gráfica e algébrica de função. Reiteramos que pretendemos, com este trabalho, consolidar o conceito de função afim.

A Atividade Proposta está organizada para ser desenvolvida em 20 horas/aula e é adequada aos alunos do 1º ano do Ensino Médio.

A fim de ilustrar a aplicabilidade e sentir o trabalho com essa Metodologia, escolhemos uma turma do 1º ano do Ensino Médio em que a autora é a professora titular para desenvolver esse trabalho. A atividade foi iniciada em 06 de novembro de 2012 e encerrada em 18 de dezembro de 2012.

## 4.2 Aspectos Metodológicos

Faremos algumas considerações acerca das cinco etapas para a aplicação da Metodologia Modelagem Matemática em sala de aula, na concepção de Burak [10], agora inserindo a concepção de Biembengut e Hein [3] conforme foi aplicada. Resaltando situações que poderão surgir e que merecem a atenção do professor,

### **1ª etapa:** Escolha do Tema.

A princípio, a escolha do tema pode ser feita pelo professor ou pelos alunos, cujo objetivo é motivar os alunos para a resolução de problemas, e posteriormente para a discussão e a validação do modelo matemático. Em relação à tarefa de escolher o tema, Soistak [17] aponta que um dos princípios da modelagem matemática é partir de temas que sejam do interesse do aluno, fato este que pode, ao mesmo tempo, favorecer a contextualização, haja vista que um assunto de interesse do aluno, provavelmente, estará relacionado ao seu cotidiano.

"A escolha feita pelos alunos tem vantagens e desvantagens. Uma vantagem é que eles se sentem participantes do processo. Em contrapartida, as desvantagens podem surgir se o tema não for adequado para o desenvolvimento do programa ou ainda, muito complexo, exigindo do professor um tempo de que não dispõe para aprender e ensinar".[4]

### **2ª etapa:** Pesquisa Exploratória.

Após a escolha do tema, deverá ser realizada uma pesquisa exploratória objetivando a coleta de dados qualitativos e quantitativos acerca do tema escolhido. Pela amplitude do tema é possível que os alunos apresentem informações diversas, algumas irrelevantes ao estudo em questão. Nesse momento, o papel do professor é, dentre os dados apresentados pelos alunos, enumerar algumas considerações que podem ser mais relevantes a ser levantadas na pesquisa.

### **3ª etapa:** Levantamento dos Problemas.

Nesse momento o professor delimita o problema de forma a requerer o conteúdo de função para resolução.

### **4ª etapa:** Resolução dos Problemas e o Trabalho com os Conteúdos no Contexto do Tema.

A partir daí, as atividades deverão ser realizadas em grupos para que cada um também possa auxiliar aquele que encontre mais dificuldade.

No primeiro momento os alunos ficam livres para escolherem ferramentas para tentar resolver o problema.

Caso o aluno ou grupo de alunos não consigam inicialmente resolver o problema apresentado; ou seja, não consiga relacionar os conhecimentos adquiridos e aplicá-los de modo a achar a solução de problema; caberá ao professor apresentar outros questionamentos a fim de levar os alunos à reflexão, para por fim chegar à resposta do problema originalmente levantado.

Esse é um bom momento para o professor levantar questionamentos que servirão tanto para consolidar como para revisar conceitos já estudados. A sequência desses questionamentos deverá abordar aspectos do conceito em foco. Servirá também para o professor observar se algum aspecto do conceito ficou sem significado, e diante da dificuldade apresentada poder atuar.

**5ª etapa:** Análise Crítica dos Resultados Encontrados.

### 4.3 Uma Aplicação

Iniciamos a aplicação da Modelagem Matemática com uma conversa sobre a importância da Matemática no dia-a-dia e na escola. Explicamos aos alunos que, na intenção de mostrar a aplicabilidade de conteúdos matemáticos, escolhemos essa metodologia como alternativa. Inicialmente, os alunos comentaram sobre como deveria ser desenvolvido o trabalho. Percebemos que os alunos se entusiasmaram com a possibilidade de escolher o tema de estudo e de aprender matemática de modo mais relacionado com o seu cotidiano. Segue as etapas dessa aplicação:

**1ª etapa:** Escolha do tema.

Para a primeira etapa do processo com a modelagem matemática, promovemos a escolha do tema. Os alunos sugeriram alguns temas propostos que faziam parte do contexto destes, e a partir daí a escolha foi feita conjuntamente com a professora, pois, em nosso entendimento, o tema escolhido teria que possibilitar uma eficaz relação entre o tema e o conteúdo programático em foco, função afim. O tema escolhido foi "Telefonia Celular".

**2ª etapa:** Pesquisa Exploratória

Em nossa aplicação, as considerações mais relevantes a serem pesquisadas foram: Perfil dos consumidores de telefonia celular, operadoras que atuam na região, tipos de plano e serviços oferecidos e tarifas de planos pós e pré-pagos. As informações obtidas na pesquisa foram apresentadas pelos grupos de alunos, socializando o conhecimento.

**3ª etapa:** Levantamento dos Problemas

Um dos dados da pesquisa apontou que na cidade há três operadoras mais atuantes. Denominamos essas operadoras de Operadora A, Operadora B e Operadora C. As informações coletadas sobre essas operadoras despertaram questionamentos e dúvidas. As discussões surgidas nos grupos foram muito importantes para despertar um interesse maior dos alunos. Nessa etapa foram levantados alguns problemas:

- Diante de tantas opções qual a vantagem e/ou a desvantagem de optar por determinado plano?
- Como calcular e/ou conferir se a fatura do celular está correta?
- Qual operadora tem melhor e/ou maior cobertura em nossa região?
- Quais as vantagens do serviço pós-pago?
- Como optar por um plano pós-pago mais adequado ao perfil do usuário se as operadoras apresentam tabelas com categorias diferentes?

O problema formulado pelos alunos com orientação da professora foi:

*"Como optar por um plano pós-pago mais adequado ao perfil do usuário se as operadoras apresentam tabelas com categorias diferentes?"*

Nesta etapa o professor deve ter o cuidado de formular o problema de modo a proporcionar o trabalho com o conteúdo de função no contexto do tema.

**Observação 4.1** *Em situações do cotidiano é comum trabalharmos com função cujo domínio é o conjunto dos naturais. E uma discussão importante nesse momento está relacionado ao domínio dessa função. O fenômeno é modelado por uma Função Afim com restrição de domínio.*

**4ª etapa:** Resolução dos Problemas e o Trabalho com os Conteúdos no Contexto do Tema.

É importante observar que para solucionar esse problema algumas variáveis foram desprezadas por não serem relevantes, tais como: ligações para a mesma operadora, por serem ilimitadas em todos os planos; vantagens adicionais; como acesso a internet e descontos na compra de aparelhos.

Devido ao problema formulado ser um problema aberto, proporciona aos alunos diversas possibilidades de caminhos a trilhar. Como orienta a metodologia, deixamos os alunos livres para escolherem as ferramentas que lhes aprouverem. Houve, inicialmente, uma grande confusão, os alunos não conseguiram sistematizar os dados e se sentiram frustrados, pois não conseguiram solucionar o problema de imediato.

Com a intervenção da professora, os dados mais relevantes da pesquisa foram sistematizados e organizados em tabelas para melhor visualização pelos alunos de acordo com a Figura 4.1.

OPERADORA A			OPERADORA B		
PLANO	VALOR MENSAL(R\$)	VALOR POR MIN EXTRA(R\$)	PLANO	VALOR MENSAL(R\$)	VALOR POR MIN EXTRA(R\$)
60min	49,90	0,87	60min	59,00	0,59
100min	124,71	0,87	110min	75,00	0,59
200min	179,70	0,87	220min	105,00	0,59
400min	237,72	0,87	400min	135,00	0,59

OPERADORA C		
PLANO	VALOR MENSAL(R\$)	VALOR POR MIN EXTRA(R\$)
50min	49,00	0,99
100min	65,00	0,99
200min	99,00	0,99
400min	155,00	0,99

Figura 4.1: Tabelas de Planos e Valores.

Apresentaremos a seguir uma sequência de questionamentos que foi proposta aos alunos na perspectiva apresentada. A sequência de questionamentos foi elaborada com base na retomada de conceitos específicos de Função e de Função Afim seguindo as ideias de Caraça [11] e de Elon Lima [13]. Dessa forma pretende-se possibilitar aos alunos relacionar, buscar vínculos, aspectos comuns e diferenças relevantes entre as situações apresentadas; produzindo um efeito facilitador na busca de estratégias para a resolução do problema inicialmente elaborado; consolidando assim o conceito de Função. Junto aos problemas, apresentaremos sugestões metodológicas com dicas para a atuação do professor, objetivo e conceito envolvido.

O grau de conhecimento matemático do aluno ou grupo de alunos permitirá estabelecer a forma como os conteúdos matemáticos serão trabalhados e o número de questionamentos a serem propostos em cada etapa do trabalho.

### Questionamento 1.

*Objeto de Estudo/Conteúdo:* Conceito de Correspondência.

*Como é feito o cálculo do valor a ser pago de uma fatura de telefonia celular em planos pós-pagos?*

*Recomendações Metodológicas:* Devemos observar se os alunos perceberam a correspondência existente entre o valor a ser pago e a quantidade de minutos extras utilizados.

Os alunos, diante de informações variadas da tabela, não conseguiram perceber a correspondência existente. Para fazê-los refletir, apresentamos, por etapas, questionamentos adicionais, a fim de conduzi-los à solução.

### **Questionamento Adicional 1.1.**

- ◇ Para cada perfil de usuário os planos de telefonia celular associam uma categoria que possui pacote de minutos e valor por minutos extras distintos. Fixando um perfil de usuário, quando alteramos a quantidade de minutos extras usados há alteração do valor a ser pago?
- ◇ Como ocorre essa alteração?
- ◇ Cada quantidade de minutos extras fixada tem um único valor correspondente a ser pago?

Nesse momento os alunos que perceberam a correspondência existente se entusiasmaram e explicaram aos outros alunos que ainda não haviam percebido. A professora apenas acompanhou o desenvolvimento do trabalho e orientou aos alunos que registrassem as informações descobertas.

### **Questionamento 2.**

*Objeto de Estudo/Conteúdo:* Relação de Dependência entre Quantidades.

*Em qual dos perfis de usuários pesquisados você se encaixa? Dentro desse perfil, de acordo com os dados da operadora de sua preferência, qual o valor mensal a ser pago se você utilizar 10min extras? E 30min extras? E 50min? Qual o modelo matemático que relaciona o valor mensal a ser pago e os minutos extras usados?*

*Recomendações Metodológicas:* Devemos orientar os alunos a construir uma tabela com os valores obtidos. Dado que o perfil do usuário e a operadora estão fixados, devemos observar se o aluno percebeu que há variação entre as quantidades e que existe uma relação de dependência entre elas e se concluiu que o valor a ser pago é dado em função de um valor fixo (franquia), acrescido do valor do minuto extra multiplicado pela quantidade de minutos extras utilizados. Identificando a relação de dependência existente e as variáveis envolvidas.

Dado que a atividade era realizada em grupo, os alunos entraram em consenso e escolheram o perfil de usuário e a operadora de preferência. Os alunos responderam as perguntas realizadas para 10min, 30min e 50min valendo-se de operações aritméticas, porém não perceberam o modelo matemático que relaciona o valor mensal a ser pago e os minutos extras usados. Daí, apresentamos os questionamentos a seguir:

### **Questionamento Adicional 2.1.**

*Objeto de Estudo/Conteúdo:* Conceito de variável. Variável dependente e variável independente. Domínio e Imagem.

- ◇ Sendo  $x$  a variável que representa os minutos extras usados e  $y$  a variável que representa o valor mensal a ser pago, que valores  $x$  pode assumir? E que valores  $y$  pode assumir?
- ◇ Há uma relação de dependência entre as quantidades envolvidas? De que forma?
- ◇ Existe uma regularidade entre as quantidades obtidas?
- ◇ De acordo com o perfil de usuário escolhido, qual o modelo matemático que relaciona o valor mensal a ser pago e os minutos extras usados ?

*Recomendações Metodológicas:* Nesse momento devemos esperar que o aluno já tenha identificado, para esse caso particular, que o modelo matemático adequado é uma função. Essa é uma boa oportunidade para observar se os alunos sabem identificar domínio, contra-domínio e imagem de uma função.

Porém, no nosso caso, os alunos não identificaram que a resposta é uma função afim, os questionamentos a seguir foram feitos.

### **Questionamento Adicional 2.2.**

*Objeto de Estudo/Conteúdo:* Representação algébrica da função. O Teorema da Caracterização da Função Afim.

- ◇ Tomando a diferença entre o 1º valor (10 min) e o 2º valor (30 min) atribuídos a  $x$  e o 2º e o 3º valor (50 min) atribuídos a  $x$ , o que você observa? E tomando a diferença entre os respectivos valores de  $y$ , o que você observa?
- ◇ O Teorema da Caracterização da Função Afim afirma que se uma sequência de valores atribuídos a  $x$  estão igualmente espaçados então o mesmo ocorre com os valores respectivos de  $y$ .
- ◇ De acordo com o perfil de usuário escolhido, qual o modelo matemático que relaciona o valor mensal a ser pago e os minutos extras usados ?

*Recomendações Metodológicas:* Devemos observar se os alunos estão relacionando a caracterização da função afim ao comportamento observado na variação entre as quantidades.

Os alunos, apesar de terem conseguido modelar o problema do questionamento 2 por uma função afim, não conseguiram ampliar o entendimento desse caso particular de modo a responder o problema inicialmente formulado. Logo, apresentamos o questionamento a seguir:

### **Questionamento 3.**

*Objeto de Estudo/Conteúdo:* Representação algébrica da função.



*De acordo com os dados obtidos nas pesquisas, para um usuário cujo perfil é de 60min.*

1. *Qual é a operadora mais vantajosa para um usuário que utilize 65min por mês?*
2. *Qual é a operadora mais vantajosa para um usuário que utilize 75min por mês?*
3. *Qual é a operadora mais vantajosa para um usuário que utilize 95min por mês?*

*Recomendações Metodológicas:* Devemos esperar que o aluno utilize-se da representação algébrica da função envolvida para responder as questões. Observe que não fixamos a operadora, apenas o perfil do usuário. Devemos observar também que existe uma mudança de comportamento quando variamos de 75min para 95min, a resposta dos itens 1 e 2 é a operadora A, porém a resposta do item 3 é a operadora B. Espera-se que essa mudança de comportamento desperte dúvidas nos alunos.

Alguns alunos, apesar de terem modelado o problema do questionamento 2 por uma função, realizaram algumas operações aritméticas e responderam aos questionamentos. Outros representaram cada situação dada por meio da representação algébrica da função envolvida e, atribuindo valores a variável  $x$  e fazendo comparações obtiveram os resultados procurados.

#### **Questionamento 4.**

*Objeto de Estudo/Conteúdo:* Conceito e representação de função.

*A partir de quantos minutos utilizados, para um usuário cujo perfil é de 60 min, a operadora B é mais vantajosa que a operadora A?*

*Recomendações Metodológicas:* Devemos ter em mente que, nesse momento, voltamos o olhar para duas operadoras, A e B. Os alunos podem não ter utilizado função como recurso para a resolução das questões anteriores, podem ter usado apenas recursos numéricos. Nesse momento devemos mostrar a importância do conceito de função para resolver a questão de forma eficiente e eficaz. Como também o uso de função para solucionar problemas do cotidiano. Igualando as expressões que representam as funções envolvidas, interpretando e aproximando o resultado chega-se rapidamente à solução do problema.

Os alunos que, para responder ao questionamento 3, não utilizaram a representação algébrica das funções envolvidas ficaram ainda mais distantes da resolução do questionamento 4 que os demais. Nesse momento, foi preciso a intervenção da professora, discutindo a importância de modelar essa situação por uma função afim, formalizando o conceito de função e levantando questionamentos adicionais a seguir:

### Questionamento Adicional 4.1.

- ◇ Escreva as funções que modelam a situação para as operadoras A e B. Neste contexto, para quantos minutos extras utilizados o valor a pagar é o mesmo para as operadoras A e B?
- ◇ A partir de quantos minutos utilizados, para um usuário cujo perfil é de 60 min, a operadora B é mais vantajosa que a operadora A?

Os alunos tentaram responder a este questionamento por meio de tentativa e erro, não obtendo sucesso. Após algumas discussões chegaram a resposta da 1ª pergunta do questionamento adicional 4.1, não respondendo, porém a 2ª pergunta. A resposta veio rapidamente ao apresentarmos o próximo questionamento adicional onde trabalhamos com a representação gráfica das funções.

### Questionamento Adicional 4.2.

*Objeto de Estudo/Conteúdo:* Representação gráfica de uma função. Ampliação do domínio de uma função para os reais. Identificação do domínio e da imagem nos eixos coordenados. Interpretação de gráficos de funções.

- ◇ Utilizando um Software Gráfico, desenhe o gráfico de uma função que contenha esses pontos, ampliando assim o domínio para os reais. Interpretando o gráfico, você identifica qual operadora é mais vantajosa para um usuário cujo perfil é de 60min?

*Recomendações Metodológicas:* Nessa etapa devemos revisar os conceitos de par ordenado, plano cartesiano, gráfico da função afim e observar se os alunos estão identificando domínio e imagem nos eixos coordenados, ressaltando o que representa cada eixo.

A Figura 4.2<sup>1</sup> ilustra o gráfico do custo para as Operadoras A e B.

Por fim, os alunos, observando o gráfico, conseguiram responder ao questionamento 4. Partimos para um outro caso particular, agora o perfil do usuário é de 100min. Segue o questionamento 5.

### Questionamento 5.

*Objeto de Estudo/Conteúdo:* Valor numérico da função.

1. De acordo com os dados obtidos nas pesquisas, qual é a operadora mais vantajosa para um usuário que utilize 100min por mês?

---

<sup>1</sup>Para obtenção do gráfico utilizamos o software gratuito de geometria dinâmica GeoGebra, disponível em <http://www.geogebra.im-uff.mat.br>

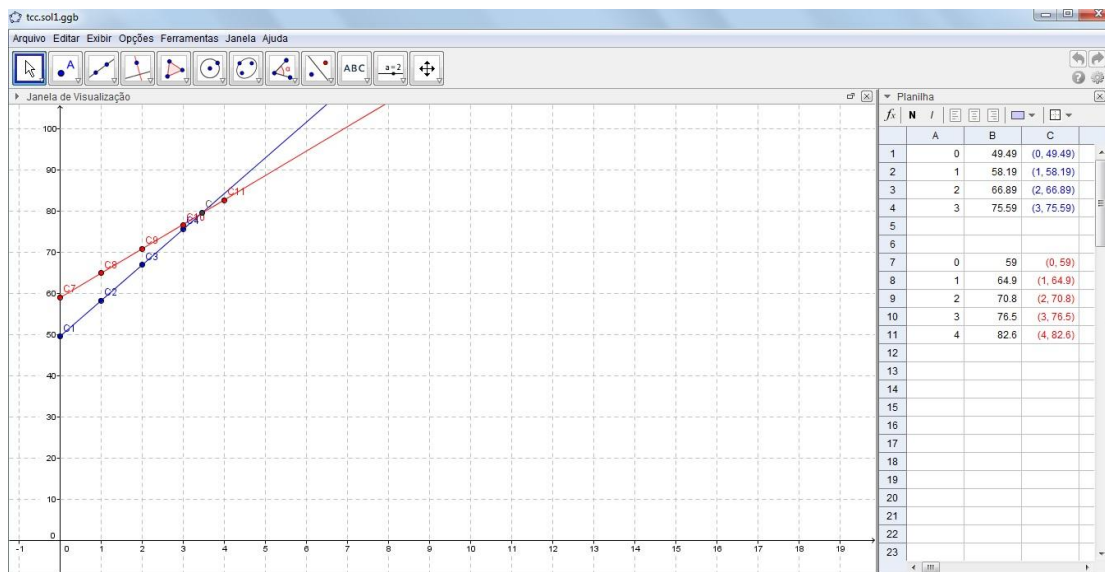


Figura 4.2: Gráfico do custo para as Operadoras A e B.

2. Qual é a operadora mais vantajosa para um usuário que utilize 120min por mês?
3. Qual é a operadora mais vantajosa para um usuário que utilize 130min por mês?
4. Qual é a operadora mais vantajosa para um usuário que utilize 140min por mês?

*Recomendações Metodológicas:* Devemos observar que não fixamos a operadora, apenas o perfil do usuário. Existe uma mudança de comportamento quando variamos de 110min para 120min, a resposta do item 1 é a operadora C, porém a resposta dos itens 2, 3 e 4 é a operadora B. Esperamos que essa mudança de comportamento desperte reflexões nos alunos.

Dessa vez os alunos responderam rapidamente, pois remeteram à resolução do questionamento 3.

### Questionamento 6.

*A partir de quantos minutos utilizados, para um usuário cujo perfil é de 100 min, a operadora B é mais vantajosa que a operadora C?*

#### Questionamentos Adicionais 6.1.

*Objeto de Estudo/Conteúdo:* Função definida por mais de uma sentença.

Escreva as funções que modelam a situação para as operadoras B e C.

- ◇ Neste contexto, para quantos minutos utilizados o valor a pagar é o mesmo para as operadoras B e C?

- ◇ A partir de quantos minutos utilizados, para um usuário cujo perfil é de 100 min, a operadora B é mais vantajosa que a operadora C?

*Recomendações Metodológicas:* Devemos observar que as operadoras ofereçam, para esse perfil de usuário, pacotes de minutos diferentes, o que dificulta a comparação. Logo devemos fazer a adequação necessária, a função que representa o custo da Operadora B será dada por duas sentenças.

Os alunos, inicialmente, não perceberam que neste caso os pacotes de minutos eram diferentes, e remeteram rapidamente à resolução do questionamento 5. Porém a professora interveio fazendo-os observar a necessidade de adequação para a comparação. A resposta foi apresentada logo em seguida.

### **Questionamento Adicional 6.2.**

*Objeto de Estudo/Conteúdo:* Gráfico de uma função afim e de uma função definida por mais de uma sentença.

Utilizando um Software Gráfico, desenhe o gráfico das funções obtidas e que contenha esses pontos, ampliando assim o domínio para os reais.

- ◇ As retas que representam essas funções se intersectam?
- ◇ O que representa o ponto de intersecção?

*Recomendações Metodológicas:* Recomendamos a utilização de um software gráfico conhecido dos alunos, de preferência acessível a todos eles. Devido a adequação feita anteriormente, é importante observar a representação gráfica da função que representa o custo da Operadora B.

A Figura 4.3 ilustra o gráfico do custo para as Operadoras B e C.

Como usamos o software GeoGebra, os alunos puderam perceber as várias formas de representar uma função e a possibilidade de usar uma ou outra representação de acordo com as facilidades que cada uma oferece.

## **5ª etapa: Análise Crítica dos Resultados Encontrados**

### **Questionamento 7.**

*Como optar por um plano pós-pago mais adequado ao perfil do usuário se as operadoras apresentam tabelas com categorias diferentes?*

*Recomendações Metodológicas:* Espera-se que nesse momento os alunos saibam identificar quais elementos devem considerar para resolver o problema e qual

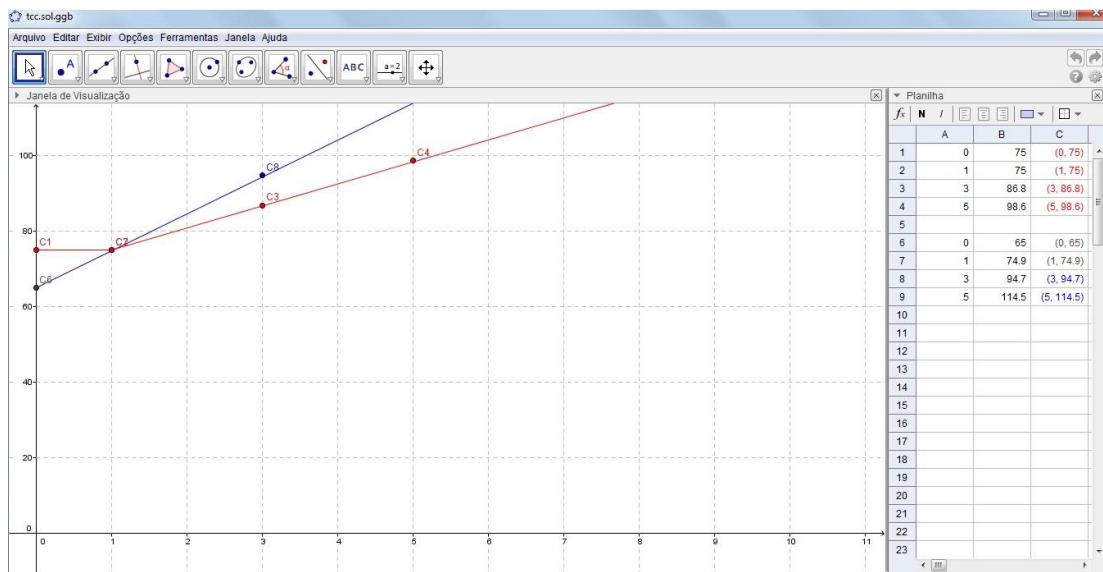


Figura 4.3: Gráfico do custo para as Operadoras B e C

modelo matemático adequado para aplicar como ferramenta de resolução do mesmo.

Para a resolução do problema formulado é necessária a compreensão conceitual dos aspectos envolvidos. Os alunos devem fazer vínculos entre os conceitos já desenvolvidos e a situação apresentada no problema. Nesta etapa, a maioria dos alunos conseguiu, fazendo interação entre as informações já adquiridas ao longo das etapas desenvolvidas, adotar estratégia, tomar decisões e solucionar o problema inicial. Os alunos que não conseguiram foram ajudados pelos que obtiveram êxito. Observamos o cuidado, por eles apresentado, identificando os erros cometidos e buscando reconhecer sua origem, realizando, em grupo, a reformulação das estratégias para nova tentativa de resolução. Inicialmente observamos a frustração dos alunos por não conseguirem solucionar o problema de imediato. Posteriormente observamos a euforia por conseguirem aplicar conceitos já adquiridos à um problema do cotidiano, escolhido por eles.

# Capítulo 5

## Conclusão

O trabalho apresentado exemplifica uma possibilidade de estudo de Função através da Modelagem Matemática.

Utilizar a Modelagem Matemática não é uma tarefa fácil. Exige muita dedicação do professor. As atividades devem ser bem elaboradas e planejadas, proporcionar motivação no ensino dos conteúdos disciplinares e ao mesmo tempo não atrapalhar o bom andamento da aula. Para tal, o professor precisa de muito tempo e comprometimento com o processo.

A Modelagem Matemática muda o papel do professor, de detentor do conhecimento para mediador. O professor, além de ter domínio de conteúdo, ele deve estar aberto aos questionamentos e às sugestões dos alunos. Ao mesmo tempo, muda o papel do aluno, tornando-os corresponsáveis pela formação do conhecimento.

O fato de buscar informações e pesquisar em parceria com os alunos foi uma experiência nova e gratificante. Possibilitou observar de perto cada dificuldade dos alunos ao longo de cada etapa e questionamentos. Os alunos se envolveram, assumiram responsabilidades em sala de aula e desenvolveram as atividades interessados em querer aprender. Daí tudo fica mais fácil. A motivação permaneceu intrínseca em todas as etapas. Os alunos saíram da condição de passividade, tornando-se mais ativos no processo de ensino e de aprendizagem. Percebemos que os alunos superaram algumas dificuldades relativas ao conceito de Função e perceberam a aplicabilidade da Matemática, mais especificamente do conteúdo Função Afim, em situações do cotidiano.

A temática escolhida serviu como uma fonte de oportunidades não apenas para o aprendizado da Matemática, como também para a formação crítica dos alunos, ajudando-os a estabelecer metas de consumo, dado que todos são usuários de telefonia celular.

Entendemos que o trabalho com a Modelagem Matemática foi positivo. O processo com a Modelagem Matemática, desde o planejamento até a aplicação da atividade, proporcionou à professora enxergar conhecimentos novos que podem contribuir para a melhoria

da prática docente. Como também, entender melhor como os alunos assimilam o conceito de função e aprender em conjunto, tentando compartilhar com os alunos conhecimentos adquiridos sobre o tema "Telefonia Celular".

Esperamos que este trabalho possa encorajar outros professores a ensinarem através da Modelagem Matemática e servir como tema motivador para futuras ações.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARROSO, J. M.(Organização). *Conexões com a Matemática*. 1ª. edição. São Paulo: Moderna, 2010, v.1.
- [2] BASSANEZI, R.C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. 3ª. Edição, São Paulo:Contexto, 2010.
- [3] BIEMBENGUT, M.S E HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. 5ª. Edição, São Paulo:Contexto, 2010.
- [4] BIEMBENGUT, M.S. *Modelagem Matemática e Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática*. 2ª. Edição, Blumenau:Edifurb, 2004.
- [5] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF. 2002. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.
- [6] BRASIL. Resolução CNE/CEB Nº 2, de 30 de janeiro de 2012. *Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Disponível em <[http://www.sinepe-pe.org.br/wp-content/uploads/2012/05/Resolucao\\_CNE\\_02\\_2012\\_Ensino\\_Medio.pdf](http://www.sinepe-pe.org.br/wp-content/uploads/2012/05/Resolucao_CNE_02_2012_Ensino_Medio.pdf)>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.
- [7] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF. 1997. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.
- [8] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio . Brasília: MEC/SEF. 1999. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em 15 de janeiro de 2013.
- [9] BURAK, D. *Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática*. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D. C.; KLÜBER, T. E.(ORG)



*Modelagem Matemática - Uma perspectiva para a Educação Básica*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2010. p. 15-38.

- [10] BURAK, D. *Modelagem Matemática e a Sala de Aula*. In: I EPMEM -Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática. Londrina. Anais do I EPMEM, 2004. Disponível em < <http://dionisioburak.com.br/TRABALHOS.html>>. Acesso em 10 de fevereiro de 2013.
- [11] CARAÇA, D. C. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Editora Gradiva publicações, 1951.
- [12] DANTE, L. R. *Matemática*. volume único, 1ª. edição. São Paulo: Ática, 2008.
- [13] LIMA, E. L. *A matemática do Ensino Médio*. 9ª. edição, Rio de Janeiro: SBM, 2006, v.1.
- [14] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 13ª. edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2011, v.1.
- [15] PARAÍBA. Coordenadoria de Ensino/ Secretaria de Estado da Educação e Cultura. Referenciais Curriculares para o Ensino Médio da Paraíba. João Pessoa: SEEC.2007. v.2
- [16] RIBEIRO, J. *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia*. 1ª. edição. São Paulo: Scipione, 2012, v.1.
- [17] SOISTAK, A. V. *Uma Experiência com Modelagem Matemática no Ensino Medio Profissionalizante*. In: BRANDT, C. F.; BURAK, D. C.; KLÜBER, T. E.(ORG) *Modelagem Matemática - Uma perspectiva para a Educação Básica*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2010. p. 39-62.
- [18] TINOCO, L. A. de A. (Coordenação). *Construindo o Conceito de Funções*. 5ª. edição. Rio de Janeiro: Projeto Fundação, 2004.
- [19] WERNECK, H. *Ensinamos Demais, Aprendemos de Menos*. Petrópolis: Vozes, 2000.