UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Adolfo Pragana Dantas do Nascimento

CONHECENDO O MUNDO DA OTIMIZAÇÃO: PROPOSTAS DE INTRODUÇÃO DA OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA NO ENSINO BÁSICO

RECIFE
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Adolfo Pragana Dantas do Nascimento

CONHECENDO O MUNDO DA OTIMIZAÇÃO: PROPOSTAS DE INTRODUÇÃO DA OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA NO ENSINO BÁSICO

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profª. Drª. Anete Soares Cavalcanti

RECIFE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N244c Nascimento, Adolfo Pragana Dantas do

Conhecendo o mundo da Otimização: Propostas de introdução da Otimização Geométrica no Ensino Básico / Adolfo Pragana Dantas do Nascimento. - 2021.

132 f. : il.

Orientadora: Anete Soares Cavalcanti.

Inclui referências e anexo(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Recife, 2021.

1. Otimização Geométrica. 2. Histórias em Quadrinhos. 3. Sequências didáticas. 4. Jogos Matemáticos. 5. Problemas Clássicos. I. Cavalcanti, Anete Soares, orient. II. Título

CDD 510

DECLARAÇÃO

Eu, **Adolfo Pragana Dantas do Nascimento**, declaro, para devidos fins e efeitos, que a dissertação sob título CONHECENDO O MUNDO DA OTIMIZAÇÃO: PROPOSTAS DE INTRODUÇÃO DA OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA NO ENSINO BÁSICO, entregue como Trabalho de Conclusão de curso para obtenção do título de mestre, com exceção das citações diretas e indiretas claramente indicadas e referenciadas, é um trabalho original. Eu estou consciente que a utilização de material de terceiros incluindo uso de paráfrase sem a devida indicação das fontes será considerado plágio, e estará sujeito à processos administrativos da Universidade Federal Rural de Pernambuco e sanções legais. Declaro ainda que respeitei todos os requisitos dos direitos de autor e isento a Pós-graduação PROFMAT/UFRPE, bem como a professora orientadora **Anete Soares Cavalcanti**, de qualquer ônus ou responsabilidade sobre a sua autoria.

Recife, **07/05** de **Fevereiro** de **2021**.

Assinatura: ____

ADOLFO PRAGANA DANTAS DO NASCIMENTO

Conhecendo o Mundo da Otimização: propostas de introdução da otimização geométrica no ensino básico

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 08/03/2021

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Anete Soares Cavalcanti (Orientadora)– UFRPE

Prof. Dr. Elias Santiago de Assis– UFRB-BA

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza– PROFMAT/UFRPE

A todos que lutam para proporcionar a liberdade

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Hélcia e Manoel, que dedicaram suas vidas a criar condições das mais favoráveis para eu estar aqui sem nunca permitir que me faltasse nada, principalmente amor. Agradeço também ao meu irmão Túlio pelo companheirismo e a minha esposa Ceiça por sempre me apoiar, compreender a necessidade de dedicar tempo a este trabalho e também por todo o amor e dedicação que poucos nesta vida têm a sorte de ter. No geral, agradeço a todas as pessoas importantes para mim, fora as já citadas, que sempre torceram para a minha vitória e tiveram do meu lado em diversos momentos. Não posso esquecer de agradecer também aos meus cachorros, Pitu e Catuaba por trazerem um equilíbrio espiritual imensurável. Sou grato a todos os professores que realmente se importaram com o meu futuro ao longo desta trajetória, em especial, aos do Profmat da UFRPE, com destaque para a professora Anete, minha orientadora que dedicou muito tempo e esforço para fazer deste trabalho o melhor possível. Também o sou a todos os artistas, sejam músicos, atores ou cineastas, indispensáveis para nos manter firmes e em equilíbrio psicológico em muitas situções. À ilustradora Giovanna que fez um belo trabalho de extrema importância para esta dissertação confeccionando a HQ e, por fim, profudamente à CAPES por ter disponibilizado recursos indispensáveis para a realização deste feito.

Morra bem, viva rápido.
Don L

Resumo

Neste trabalho, é feito um catálogo de sequências didáticas envolvendo otimização geométrica, desde problemas clássicos até um jogo criado pelo autor, visando atingir um alunado de ensino básico, para estimular um primeiro contato com a otimização através do ensino da Geometria do Ensino Básico, enxergar suas múltiplas utilidades no cotidiano e fortalecer os conhecimentos matemáticos do currículo escolar que venham a estar envolvidos. Otimizar, de forma generalizada, é o processo de elevar ao extremo a produtividade de algo. Na Matemática, consiste em fazer uma grandeza atingir um valor extremo dentro de determinadas condições, estando o desenvolvimento em dependência de recursos desta área. Acredita-se que o primeiro conceito definido torna-se cada vez mais incidente na vida dos indivíduos do mundo moderno e depende muitas vezes do segundo. Para instigar o interesse social no tema, o autor utiliza-se do ensino da geometria para introduzir essas ideias através de propostas de sequências didáticas, envolvendo desde a confecção de um jogo até uma História em Quadrinhos trazendo um contexto construído em torno do assunto, e abordar, com tais propostas, problemas diários ansiando demonstrar o poder que as habilidades e competências relacionadas à otimização carregam e como é possível dialogar com tais conhecimentos através do próprio conteúdo escolar.

Palavras-chave: Otimização Geométrica; Histórias em Quadrinhos; Sequências didáticas; Jogos Matemáticos; Problemas Clássicos.

Abstract

In this Paper Work, a catalog of didactic sequences involving geometric optimization is made, from classic problems to a game created by the author, aiming to reach students of basic education, to stimulate a first contact with optimization through the teaching of Basic Education Geometry, to see its multiple uses in everyday life and strengthen the mathematical knowledge of the school curriculum that may be involved. Optimizing, in general, is the process of raising the productivity of something to the highest level. In Mathematics, it consists in making a quantity reach an extreme value under certain conditions, with development depending on resources in this area. It is believed that the first defined concept is becoming increasingly common in the lives of individuals in the modern world and often depends on the second. To instigate social interest in the theme, the author uses the teaching of geometry to introduce these ideas through proposals for didactic sequences, involving everything from making a game to a Graphic Novel bringing a context built around the subject, and approaching, with such proposals, daily problems yearning to demonstrate the power that the skills and competences related to optimization carry and how it is possible to dialogue with such knowledge through the school content itself.

Keywords: Geometric Optimization; Comics; Didactic sequences; Mathematical Games; Classic Problems.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Atualmente, a rotina dos indivíduos torna-se cada vez mais frenética, o tempo, cada vez mais raro, o custo de vida aumenta, as pessoas precisam trabalhar mais, ocupam-se com diversas atividades para manter a saúde em dia ou por *hobbie*. Com isso, é inevitável otimizar sua produtividade, o tempo de suas viagens, o tempo de sono para conseguir se adaptar a tal realidade. Seria possível utilizar o ensino da Otimização Geométrica para auxiliar neste processo?

Refletindo, durante a graduação, sobre a possibilidade de demarcar uma maior área com uma corda sobre o chão, na confecção de uma situação problema, ou seja, comparando curvas fechadas de mesmo perímetro, o autor teve seu primeiro contato com a otimização geométrica, descobrindo pela manipulação de algoritmos que um círculo limitaria uma área maior em comparação a um quadrado. Posteriormente, já no mestrado, em contato com o professor do curso de Geometria, descobriu a existência de estudos sobre a relação verificada, qual tinha o nome de *Desigualdade Isoperimétrica*. Aprofundando-se em leituras sobre este conteúdo, descobriram-se o problema da princesa Dido (será descito e envolvido nas propostas do trabalho) e o de Zenodoro. Notou-se uma maior generalidade do primeiro caso, pois foi descoberto que o círculo delimita a maior área entre todas as curvas fechadas de mesmo comprimento e muitas outras propriedades ainda não pensadas. Viu-se ainda um grande potencial de solucionar problemas reais com os resultados obtidos da pesquisa.

Em contato com a sua orintadora, o autor expôs seu interesse por desigualdade isoperimétrica e aquela lhe mostrou algo ainda mais vasto, a otimização geométrica, um conjunto de relações geométricas que revelam valores máximos e mínimos possíveis de serem atingidos por grandezas. Todo o conteúdo de desigualdade isoperimétrica era apenas uma parte da nova área apresentada. O autor notou que por vários momentos lidou com a otimização geométrica, mas nunca se deu conta. Desigualdade de médias, função quadrátrica e derivada são exemplos de assuntos por ele estudados os quais permitiram este contato e são ferramentas muitas vezes indispensáveis na solução de problemas clássicos, além é claro da própria geometria. Naquele momento, foi notado um aumento de potencial de utilidade na vida real dos conhecimentos matemáticos considerando a indicação da orientadora. Os problemas de Heron, Fagnano (Estes dois, assim como o de dido, terão suas descrições feitas e integrarão as propostas do trabalho) e Regiomontanus, por exemplo, trouxeram um leque de ideias sobre possíveis contextos realizáveis.

Considerada a aplicabilidade dos problemas clássicos de otimização geométrica, o que os tornariam de grande valia para os objetivos da educação brasileira, vide os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo (BRASIL, 1997, p. 6).

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC), documento guia mais recente do sistema educacional brasileiro, conserva este cerne quanto à importância da contextualização apontado pelo PCN, defendendo a:

> construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 528)

Ainda sim, os tópicos relacionados à otimização geométrica normalmente não integram o currículo escolar de Matemática. Este trabalho não é um apelo a esta inclusão, mas uma proposta de abordagem em momentos oportunos.

Introduzir uma ideia de otimização desde o Ensino Fundamental, considerando os obstáculos diários citados no primeiro parágrafo, tornar-se-á necessário, pois ela será, certamente, uma ferramenta para qualquer indivíduo. Pela afinidade com a Geometria e o aprofundamento em estudos de problemas clássicos da otimização geométrica, o autor optou por trazer aquela como uma porta de entrada, uma iniciação aos estudos da otimização de forma local, para induzir um pensar sobre esta de forma geral.

Foi pensada, a princípio, a aplicação de uma pesquisa de campo, na qual construiriam-se contextos em torno de alguns problemas clássicos e os trabalhariam em sequências didáticas. Obviamente, escolheriam-se apenas problemas cuja solução é feita de conteúdos acessíveis para cada turma, por exemplo, com reflexão de um ponto sobre uma reta e conhecendo a distância entre dois pontos, torna-se possível resolver o *Problema de Heron*. A partir de certo momento no nível de Ensino Fundamental anos finais, este conteúdo já é trabalhado. Porém, viveu-se no ano de 2020 a pandemia da Covid-19, que inviabilizou aulas presenciais por um longo período. O autor é professor de uma escola estadual periférica onde o índice de estudantes com condições de assistir aulas *online* é baixo e de forma assíncrona o processo avaliativo sofreria muitas perdas, levando em consideração ainda uma limitação de acesso à *internet* e até mesmo a aparelhos de celular. Mesmo com a volta gradual das aulas presenciais nas escolas públicas do estado de Pernambuco, foi inviável aplicar qualquer proposta, pois as dinâmicas presenciais exigiam contato e um certo quantitativo de estudantes, o qual não foi verificado. Se isto não fosse um problema, ainda tem-se o fato de apenas as turmas de ensino médio retornaram às atividades presenciais e o autor não lecionava matemática em nenhuma delas, tornando ainda mais difícil a pesquisa de campo, pois ele dependia da disponibilização de tempo por parte de outro docente para tal atividade. Diante deste cenário, a decisão final foi criar um catálogo de sequências didáticas envolvendo otimização geométrica, umas com problemas clássicos, outras não, para servir a qualquer docente que tenha interesse em aplicá-las em algum momento que lhe for conveniente.

Em reflexão sobre a estruturação das propostas, o autor optou por construir sequências didáticas montadas com diferentes métodos e recursos didáticos, como uma história em quadrinhos e um jogo autorais, além de conservar o princípio de sempre proporcionar alternativas ou construir a própria sequência visando a acessibilidade financeira e bio-sutentável de material e a simplificação das argumentações matemáticas através de analogias com situações corriqueiras. As sequências são independentes umas das outras e adapatáveis às necessidades de seu público alvo. Todas elas buscam entregar uma noção de utilidade do saber sobre a otimização como peça fundamental na resolução de algumas situações problema para trazer e despertar no alunado um conhecimento e a valorização, respectivamente, deste processo para o dia-a-dia. Além disso, exercitar e consolidar habilidades e competências do currículo de matemática envolvidos em cada contexto também é característica das propostas. Sim, a Matemática pode auxiliar as pessoas a otimizar muito do que precisam para manter uma qualidade de vida ou ultrapassar outros grandes obstáculos pessoais e até de interesse público. Estas são as alvejadas contribuições sociais de *Conhecendo o mundo da Otimização: Propostas de introdução da Otimização Geométrica no Ensino Básico.*

1 O encaixe da otimização geométrica no ensino da geometria

Neste capítulo, desenvolvem-se uma ideia inicial de otimização geométrica, alguns conhecimentos sobre a história da otimização geométrica, do ensino da geometria no Brasil e uma motivação social buscando apresentar, no fim, motivação para a escolha do tema abordado.

1.1 O ensino da geometria no Brasil

Quanto ao ensino da geometria no Brasil, ela surge por uma necessidade militar em 1648 (SENA; DORNELES, 2013, p. 139): "[...]os soldados sentiam dificuldade em acertar os alvos por não ter conhecimento da área" (KONZEN; BERNARDI; CECCO, 2017, p. 60). Limitada para oficiais, o ensino da geometria não explorava conceitos matemáticos a fundo, apenas o suficiente para suprir a necessidade citada e esta tinha como objetivo principal capacitar os colonos para a proteção das riquezas que estavam sendo exploradas e a segurança do país (CALDATTO; PAVANELLO, 2015, p. 105). Isto expande-se pelos 100 anos seguintes.

No próximo século (XIX), o ensino da geometria ganha maior rigor matemático e preocupação com a linguagem, devido a Vilela Barbosa e é expandido para fora do ensino militar com a fundação do tradicional Colégio Dom Pedro II, segundo Konzen, Bernardi e Cecco (2017). As obras de Vilela Barbosa são posteriormente substituídas pelas de Ottoni, autor com influências também europeias e com abordagem similar ao seu antecessor, mesmo Ottoni negando isto. Aparentemente, pelo fato de na prática não haver evolução conceitual, didática e nem técnica de um material para outro e ainda o último autor ter influência política suficiente para executar a mudança, esta acaba ocorrendo, segundo Meneses (2007).

No fim desses cem anos, nascem Sociedades Matemáticas, como as de Edimburgo, da França, de Londres, alemã, americana e o Círculo Matemático de Palermo, segundo Buesco (2016). Elas, ainda de acordo com a obra de Buesco (2016), promoviam eventos internacionais de matemática além de uma divulgação de revistas com seus estudos. Isto possibilitou uma troca de conhecimento através de eventos internacionais proporcionando debates sobre o ensino da Matemática, causadora de transformações: "o movimento influenciou a maneira de ensinar, voltando-se para o ser humano, mais do que para o conteúdo a ser ensinado" (KONZEN; BERNARDI; CECCO, 2017, p. 62). Posteriormente, ver-se-ão os efeitos causados por estes fatos no ensino da Geometria no Brasil.

No século XX, é possível notar mudanças mais significativas para ensino atual da geometria, como a integração dos conteúdos de aritmética, álgebra e a própria geometria. Outro fato importante é que surgem, nos anos 30, os cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil (neste caso, Magistério Secundário), até então, os cargos eram ocupados por profissionais de outras áreas, como engenheiros. Isto mudou com o surgimento das Universidades de São Paulo e a do Distrito Federal (PAVANELLO, 1993). Atualmente, o país ainda sofre sintomas daquela cultura, pois nota-se uma incidência significativa de professores das Ciências Exatas com formações em outros campos. Além disso, ocorre uma mudança de objetivo no ensino daqueles conhecimentos: ainda atendendo unicamente o público militar, buscava-se uma preparação para o ensino superior. Tudo isso devido à adoção do material de Euclides Roxo, no século XX, defensor do 1º Movimento de Reforma do Ensino da Matemática, no Brasil, onde houve um desprendimento com a obra de Euclides (o matemático grego antigo) e adoção de novas diretrizes, inclusive a adaptação do ensino em dependência da demanda do público (CALDATTO; PAVANELLO, 2015). Na reforma Campos, do governo Vargas, segundo Konzen, Bernardi e Cecco (2017) é visado preparar jovens para quaisquer tipos de atividades, não só para o ensino superior. A integração das três áreas da matemática transforma-se em, de fato, uma fusão devido à aprovação do decreto nº 18.564 de 15 de janeiro de 1929, que tinha entre suas propostas "a criação de uma nova disciplina denominada "Matemática", que significaria a fusão das três disciplinas já existentes[...]" (ALVAREZ, 2004, p. 6). Uma divergêcia entre as eras Roxo e Campos é que a primeira buscava trazer um conhecimento teórico, generalizações quanto as características de figuras geométrica, noções de coordenadas no plano cartesiano, já a última utilizava-se de intuitividade e experimentação, segundo Caldatto e Pavanello (2015).

Nos anos 60 e 70, posteriores à criação da primeira Lei de Diretrizes e Bases, a de 1961, o Movimento da Matemática Moderna (MMM) enfraquece o ensino da geometria por priorizar Teoria dos Conjuntos e Álgebra (KONZEN; BERNARDI; CECCO, 2017). Segundo Caldatto e Pavanello (2015), este movimento teve suas origens na Universidade de São Paulo, com alguns professores franceses que, como já dito, entendiam as estruturas algébricas como a base da matemática. O MMM exerce maior influência diante do sistema educacional brasileiro, se comparado aos ideais da reforma Campos por alguns motivos, entre eles, a atuação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM). Com isso:

> A difusão do MMM entre a grande massa dos professores foi essencialmente via livros didáticos, especialmente os elaborados por Osvaldo Sangiorgi, autor que influenciou o GEEM e que nesse momento, já era reconhecido nacionalmente pela elaboração de livros didáticos para o ensino secundário.(CALDATTO; PAVANELLO, 2015, p. 119)

Em Pavanello (1993), notam-se relatos de um real abandono do ensino da Geometria por parte significativa dos docentes, mesmo com uma liberdade legal concedida às escolas de programação de disciplinas, isto solidificou-se como costume a ponto de alguns professores sentirem-se pressionados a não incluírem a matéria em seu ano letivo e, quando o faziam, não a priorizavam, nem ao menos a punham em igualdade com a Álgebra.

Após um período de estagnação, no fim dos anos 90, surgem dois documentos de suma importância para a educação de forma geral: A nossa segunda Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), em 1996, e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), em 1998. O primeiro fortalece a democratização da educação no país, atribuindo também ao estado a responsabilidade do cumprimento dela, concretizando-a como direito de todo cidadão, o que certamente expande o público a ser atingido, isso implica em uma transformação na forma de ensinar, fato este agravado pelos novos objetivos da educação: "A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social" (BRASIL, 1997, p. 1). Não tratava-se mais de ensinar soldados a atirar ou treinar filhos da alta sociedade para a prática profissional, nem mesmo para a prática agrícola, unicamente. O PCN argumenta sobre as habilidades a serem alcançadas no ensino da matemática:

> Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); [...] Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis; Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas; Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares; Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto[...] (BRASIL, 1998, p. 47-48).

Fica claro que não se trata mais de uma visão tecnicista, desintegrada e expositiva da geometria e as outras áreas, quando falamos desta filosofia de educação. Esta se mostra totalmente antagônica a isso. Agora, a expectativa é que os alunos agreguem a ciência à sua cultura, de forma contextualizada e analisada. O documento mais recente sobre o assunto é a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), ela conserva os ideais do PCN em grande parte, porém dá uma ênfase ao uso da tecnologia "Usar tecnologias digitais no trabalho com conceitos matemáticos nas práticas sócio científicas" (BRASIL, 2018, p. 254). Em BRASIL (2018), é perceptível uma priorização do Álgebra no ensino fundamental, mas não há desligamento da geometria: "Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los"(BRASIL, 2018, p. 271). Isto representa um abandono da ideia abstrata de números e uma aproximação à representação geométrica e, para ratificar sua presença em todo Ciclo Básico, no Ensino Médio são propostos “a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental”(BRASIL, 2018, p. 527). Por fim, a BNCC guarda nas competências e habilidades uma seção exclusiva da Geometria.

Diante destas diretrizes, a Geometria ganha espaço, hoje, nos livros didáticos de Matemática, Física (em Mecânica, por exemplo) e até mesmo Química (no tocante a estrutura molecular) e torna-se um pilar dos currículos de, provavelmente, todos os sistemas de ensino do Brasil, mirando sempre ser um útil no cotidiano do cidadão.

1.2 O que é otimização geométrica?

A grosso modo, otimizar pode ser *elevar o desempenho de algo ou alguém ao máximo, trazer a produtividade ao seu limite*. Quando a matemática está envolvida em tal processo, inevitavelmente, os elementos envolvidos tornam-se variáveis e os métodos pelos quais se busca a melhoria quantativa ou qualitativa do produto acabam dependendo desta ciência, pois as situações tornam-se suscetíveis a uma modelagem e isto trará possibilidades numéricas de alcance de desempenho ou de aquisição de valor. A otimização geométrica é basicamente um conjunto de métodos que utilizam-se de conhecimentos de geometria para atingir tais fins.

A otimização geométrica dialoga com diversas áreas da ciência e da tecnologia, sem perder sua ideia base. É possível verificar isso em Gonzalez (2015). Seu trabalho envolve um problema de transferência de calor, na área de modelagem computacional. Ou de Robalinho (1998), em estudo sobre tecnologia nuclear, trabalho este onde o autor diz sobre a otimização, “Um problema de otimização começa com um conjunto de variáveis independentes, ou parâmetros geralmente chamados de variáveis de projeto, e freqüentemente inclui condições ou restrições que definem valores aceitáveis para estas variáveis”(ROBALINHO, 1998, p. 47), desconsiderando os termos técnicos, estas palavras ainda sim consolidam o que se tem como características indispensáveis da otimização já ditas no primeiro parágrafo, ou até mesmo problemas clássicos da Grécia antiga, da Idade Média e outros cotidianos mais simples como pensar em maneiras de organizar um pote para caber o máximo de objetos possíveis ou o caminho mais curto para se chegar ao trabalho.

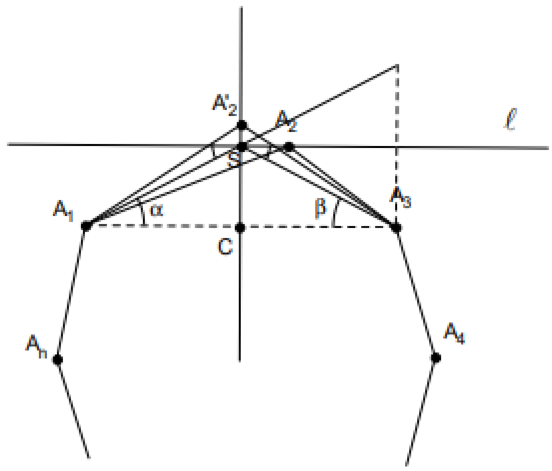
Portanto, baseado neste cerne da ideia de otimização, é isto que se compreende por otimização geométrica, independente de onde se encontre, ’bebe’ sempre da geometria para manipular a situação e trazer uma variável, normalmente uma grandeza, ao seu extremo. É ampla, útil e sólida, porém, pode ser acessível e contém esta essência independente de onde se aplique.

1.3 Uma breve abordagem histórica da otimização geométrica

Partindo da antiguidade, existem registros que carregam uma ideia de otimização. É contada história da fundação da famigerada cidade de Brisa (significa "couro"em português), por autoria da princesa Dido, sendo aquela encontrada na obra do escritor da Roma antiga, Virgílio, Eneida (19 a.C)(tendo sua versão traduzida: Publius (1983)), onde ela teria de delimitar, com o couro de um boi, uma superfície para ser sua propriedade e construir ali uma cidade. Situação resolvida da melhor maneira possível: a princesa executou a construção de um semicírculo diante do mar mediterrâneo, usando ele como limite e poupando couro (FLORES, 2011, p. 17).

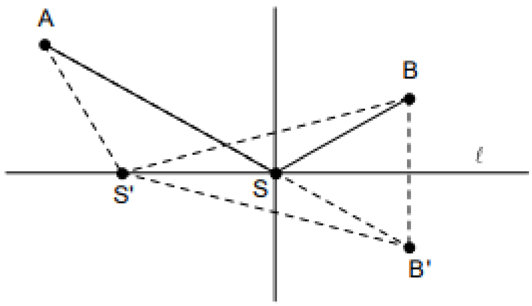
Encontram-se os problemas e soluções envolvendo área, perímetro e comprimento dos gregos antigos, como a solução para o problema isoperimétrico de Zenodoro (200 a.C. — 140 a.C.), onde vemos, na Figura 1, uma construção para demonstrar a maximização do área de um polígono quando ele é regular em Madeira (2005), um passo indispensável para a empreitada deste matemático grego, ou o famoso problema de Heron de Alexandria (explicado e aprofundado em 2.1) (10 d.C. — 70 d.C) (Figura 2), observam-se situações que nos trazem indagações sobre possíveis valores máximos ou mínimos, mesmo sem a ideia estruturada de otimização, no mundo antigo, tanto em situações reais, como o caso da relação direta do caso de Heron com o ângulo de incidência e reflexão da luz sobre uma superfície plana, por exemplo, como de forma abstrata.

Figura 1 – Encontrando o perímetro máximo para um polígono de n lados



Fonte: Madeira (2005)

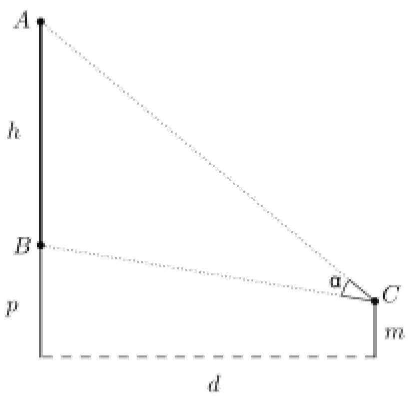
Figura 2 – A solução do problema de Heron



Fonte: Madeira (2005)

Cronologicamente próximo, temos outros registros como o problema contextualizado do renascentista Regiomontanus (1436 – 1476), onde, dados uma estátua, um pedestal de baixo dela, um espectador menor do que o pedestal, a distância deste para a base do pedestal e seu ângulo de visão da estátua, busca-se encontrar o valor da distância tal que o ângulo de visão seja o maior possível (Figura 3). Fagnano (1715 – 1797) propõe também uma indagação famosa, a do triângulo mínimo interno a um triângulo qualquer com seus lados contendo cada vértice do primeiro. Schwarz (1843 – 1921) e Fejér (1880 – 1959) propuseram diferentes resoluções para tal, utilizando predominantemente recursos de geometria plana e álgebra, no caso do segundo. Alguns destes problemas serão aprofundados nos capítulos seguintes.

Figura 3 – Interpretação geométrica do problema de Regiomontanus



Fonte: Santos (2013)

Com os inventos, no século XVII, do plano cartesiano, por René Descartes, do Cálculo, por Leibniz e Newton, no século XVIII, o desenvolvimento da ideia de função, por Euler e o da análise, por Cauchy, segundo Bennaton (2001), e, no século seguinte, o Teorema de Weierstrass, possibilitando o argumento da continuidade (PASQUALI, 1990, p. 17), entre outros, foi possível compreender a ideia de otimização e a expandir para fora da geometria, mesmo em situações geométricas. Partindo desses conhecimentos, a otimização passou a ser abordada sob a ótica de outros recursos matemáticos. Funções e desigualdades algébricas, por exemplo.

Este cenário proporcionou novos caminhos para resolução de problemas de todas as épocas. Além do mais, observam-se situações de economia, engenharia e outras áreas, envolvendo uma busca por valores máximos e mínimos, passíveis de serem solucionados por métodos matemáticos. A otimização é justamente a utilização destes meios para atingir aqueles fins. Ela atrela a si um grupo de ferramentas matemáticas para resolver situações específicas onde buscam-se atingir extremos e encontrar caminhos mais eficazes, rápidos e econômicos em projetos de todos os tipos.

1.4 Agregando a otimização ao ensino da geometria

Na história recente da humanidade, é notória a crescente necessidade de um indivíduo adotar a otimização em seu dia a dia. As pessoas têm se ocupado cada vez mais e sofrem com impecilhos da modernidade para lidar com o tempo. Mesmo com a diminuição da jornada de trabalho:

> O fenômeno das duas últimas décadas pode estar fazendo menos referência à redução da jornada como uma conquista da classe trabalhadora e mais a uma dualização da jornada de trabalho, onde alguns trabalham em tempo integral e mais extensamente, enquanto outros trabalham em tempo parcial e de forma precarizada. (CALVETE, 2006, p. 40)

Além disso, o aumento do consumo de automóveis, verificável em Carvalho (2016), influencia diretamente no tempo de locomoção de maneira geral. Os jovens gastam cada dia mais tempo em redes sociais e, em uma tentativa irracional de ganhar tempo, o indivíduo "vive uma busca incessante por tempo livre e que, para isso, não para de comprar aparelhos para poder ser dispensado das tarefas que lhe ocupam o tempo"(FREZZA; GRISCI; KESSLER, 2009, p. 492). Devido a estas e outras diversas causas, os dias parecem cada vez mais curtos e o ser humano ainda não adaptou-se completamente a este ritmo. A otimização é um bom início para isso. É preciso produzir o máximo em menor tempo, gastar o mínimo com a melhor qualidade e mínima quantidade, encontrar o menor caminho, conseguir ter um sono saudável e outros desafios mais preenchem o dia a dia de qualquer indivíduo. É preciso otimizar. Não é um mero exercício de funções, desigualdades ou teoremas geométricos. Busca-se induzir o homem a dominar a principal ferramenta para sua adaptação e preservação no mundo moderno: a otimização.

Todo este cenário montado expõe o quão propício é o momento para a introdução do trabalho da otimização, através da geométria, nas escolas. Já existem recursos tecnológicos, tanto manuais quanto digitais, para se contextualizar os problemas de área e perímetro. Por exemplo, de Fagnano ou Dido. Estes são passíveis de gerar conteúdo para diálogos internos entre as áreas da matemática e externo de outras ciências para com a geometria, investigações, debates, reflexões, resoluções e, por consequência, aprendizagem por parte do alunado, contribuindo com toda a busca pela potencialização do conhecimento científico exposta nos mais recentes documentos guia de nossa educação.

Estruturado em uma lista de sequências didáticas, o trabalho busca, através de uma contextualização de problemas clássicos de otimização geométrica e jogos com este tema, fornecer possíveis maneiras de atingir a compreensão construtiva de habilidades e competências do campo da Geometria plana, tornado essas, ferramentas para as resoluções daqueles e ainda demonstrar a importância de ter conhecimento das relações geométricas abordadas para resolver questões da vida real, sempre partindo de conhecimentos básicos do conteúdo e situações reais para atingir a formalização matemática, como em uma descoberta científica, e usando esta para trazer respostas para novas indagações.

2 Problemas clássicos da otimização geométrica

Neste capítulo, serão abordados algumas definições e resultados necessários para a solução de todos os problemas modelados nas sequências didáticas propostas no Capítulo 5, principalmente os clássicos da otimização.

2.1 O problema de Heron e o caso específico de Fagnano

Asolução do *Problema de Heron*, já citado na Seção 1.3, envolve reflexão de pontos e segmentos sobre uma reta. Nele, são dados uma reta e dois pontos em um mesmo semiplano gerado por aquela. Busca-se encontrar o menor caminho que um ponto pode fazer, passando pela reta, até o outro. O seu resultado traz ainda argumentos interessantes quando variam-se as posições dos pontos, como será observado no *Corolário 2.1.1.1* e na proposta de sequência didática da Subseção 5.2.2.

Esta seção traz a solução do problema de Heron e, como o resultado deste, é usado como artifício para resolver alguns outros problemas, dentre eles, os que envolvem situações específicas do problema de Fagnano para quadriláteros. As sequências sobre estes assuntos são as aplicadas nas Subseções 5.2.1 e 5.2.2.

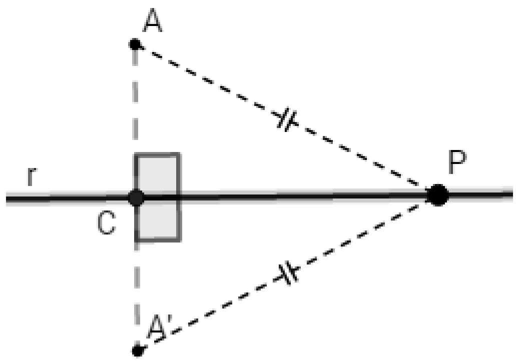
Para solucionar o problema de Heron é necessário tomar conhecimento de algumas definições.

Definição 1. *A distância entre dois pontos A e B quaisquer, é o comprimeto da menor curva, tal que os dois pontos são seus extremos, seja no plano ou no espaço.*

Toma-se como verdade que a distância entre dois pontos, no plano, é um segmento de reta tendo eles como extremos. A demonstração deste fato pode ser encontrado em Castro (2014).

Definição 2. *Dados uma reta r e um ponto A fora dela, o ponto A' é o reflexo de A sobre r se, e somente se, A' e A estão em semiplanos diferentes definidos por r, para todo $P \in r$, tem-se, : $|\overline{AP}| = |\overline{A'P}|$ e $\overline{AA'} \perp r$.*

Figura 4 – Reflexão de A sobre r



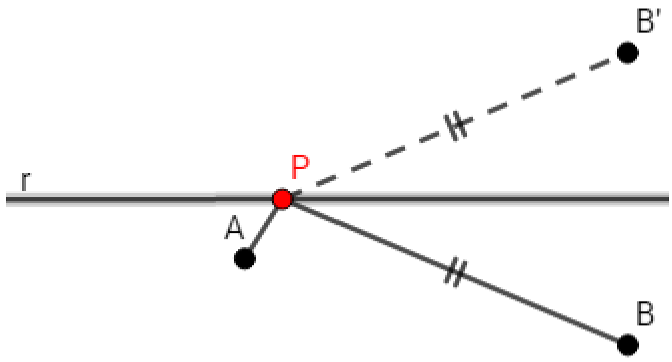
Fonte: Produzido pelo autor

Tais informações serão usadas para demonstrar o resultado do Problema de Heron já citado anteriormente, agora formalizado.

Teorema 2.1.1 (Solução do Problema de Heron)**.** *Dados dois pontos A e B em um mesmo semiplano gerado pela reta r, um ponto $P \in r$ é posto de forma que $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$ é mínimo se, e somente se, A e P são colineares ao reflexo de B sobre r, B' ou B e P são colineares ao reflexo de A sobre r, A'.*

Demonstração: ($\Rightarrow$)Considerando os pontos A e B em um mesmo semiplano e a reta r o limitando. A princípio, será demonstrada a colinearidade de A, P e B' como condição e consequência da minimlidade de $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$. Escolhe-se uma posição qualquer para P em r e constrói-se o reflexo de B, sobre r, B'. Pela *Definição 2*, sabe-se que $|\overline{BP}| = |\overline{PB'}|$, para qualquer posição de P. $|\overline{AP}| + |\overline{PB'}| = |\overline{AP}| + |\overline{BP}|$, pois o segmento $\overline{AP}$ é comum às duas linhas poligonais e seus segmentos diferentes, $\overline{PB'}$ e $\overline{BP}$ terão sempre mesmo comprimento (Figura 5). Logo, as duas sempre serão congruentes, para qualquer configuração.

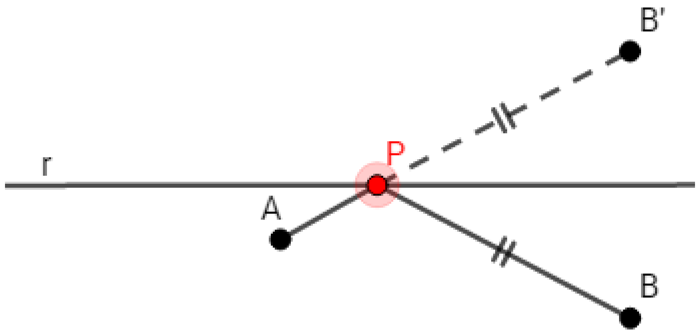
Figura 5 – Caminho para B'



Fonte: Produzido pelo autor

O comprimento da linha poligonal envolvendo A, P, e B' é mínima quando os três pontos são colineares (Figura 6), ou seja quando temos $P \in \overline{AB'}$, logo $|\overline{AP}| + |\overline{BP}|$ também atinge sua minimalidade nesta circunstância. O processo é similar para demonstrar a colinearidade de B, P e o reflexo de A sobre r como condição e consequência da minimalidade do comprimento de $\overline{APB}$.

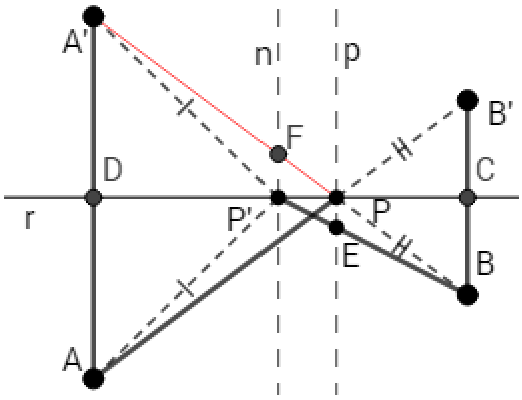
Figura 6 – O menor caminho para B'



Fonte: Produzido pelo autor

É necessário demonstrar a unicidade de P. Toda a construção geométrica deste processo está na Figura 7. Dado $P : P = \overline{AB'} \cap r$ e $P' : P' = \overline{BA'} \cap r$, tem-se, por definição, $\overline{AA'} \perp r$ e $\overline{BB'} \perp r \Rightarrow \overline{AA'} // \overline{BB'}$. Supõe-se, por absurdo, que $P \neq P'$. Dados C e D, em r, tais que $\overline{AA'} \cap r = D$ e $r \cap \overline{BB'} = C$, duas retas perpendiculares a r, n e p tais que $n \cap r = P'$ e $p \cap r = P$ e os pontos $F = \overline{PA'} \cap n$ e $E = \overline{BP'} \cap p$. Considera-se ainda que $(\angle CPB') = (\angle CPB) = \alpha$, pois $\triangle BPB'$ é isósceles e $\overline{CP}$ é sual altura e bissetriz, o mesmo aplica-se a $\triangle AP'A'$: $(\angle DP'A) = (\angle DP'A') = \alpha'$, $(\angle P'A'D) = (\angle P'AD) = \beta'$ assim como $(\angle PBC) = (\angle PB'C) = \beta$. Utilizam-se agora $(\angle FP'P) = (\angle EPP') = 90°$; $(\angle P'PF) = \alpha$, $(\angle BPE) = \beta$, $(\angle PP'E) = \alpha'$ e $(\angle A'P'F) = \beta'$, todos esses valores são obtidos por seus ângulos opostos pelo vértice e por α e β serem complementares, assim como α' e β'. Tal dedução é percebida se analisada as somas dos ângulos internos de $\triangle P'DA'$ e $\triangle PCB'$. Por fim: $(\angle BPA') = (\angle BPE) + (\angle EPP') + (\angle P'PF) = 180°$ e $(\angle BP'A') = (\angle A'P'F) + (\angle FP'P) + (\angle EP'P) = 180°$. Ou seja, B, P' e A' são alinhados assim como B, P, A', uma contradição, pois P e P' não são o mesmo ponto e estão na reta r, transversal a $\overline{BA'}$, ou seja, só podem ter um ponto em comum. Absurdo.

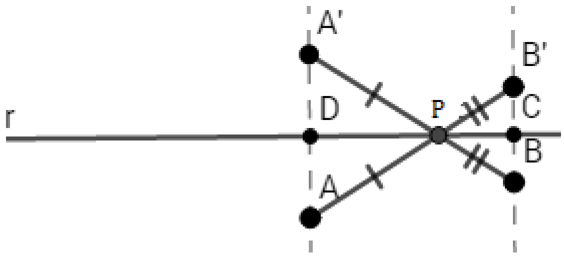
Figura 7 – Se $P \neq P'$.



Fonte: Produzido pelo autor.

Daí, o absurdo vem do fato de $P \neq P'$, portanto $P = P'$ (Figura 8).

Figura 8 – Ponto P único



Fonte: Produzido pelo autor.

($\Leftarrow$) Se A, P e B', assim como B, P e A', estão alinhados, então: $|\overline{AP}| + |\overline{PB'}| = |\overline{AB'}|$ e $|\overline{BP}| + |\overline{PA'}| = |\overline{BA'}|$.
Analisa-se a relação de A, P e B', inicialmente. Para uma posição qualquer de P tal que $P \notin \overline{AB'}$, seria possível formar $\triangle APB'$ e, pela desigualdade triangular, $|\overline{AB'}| < |\overline{AP}| + |\overline{PB'}|$. Logo, a colinearidade de A, P e B' minimiza $|AP| + |\overline{PB'}|$. O caso é análogo para os pontos B, P e A'. □

Para referir-se ao *Problema de Heron* e ao seu caminho encontrado como resultado, o autor do trabalho pode escrever, respectivamente, apenas *Heron* ou *Problema Grego* e *caminho de Heron* .

O corolário a seguir é abordado na sequência didática da Subseção 5.2.2. A causa da aparição deste adendo é o fato de ele ser passivo de uma problematização complementar da sequência da Subseção 5.2.1, pois permite a utilização do resultado de *Heron* como uma ferramenta de solução.

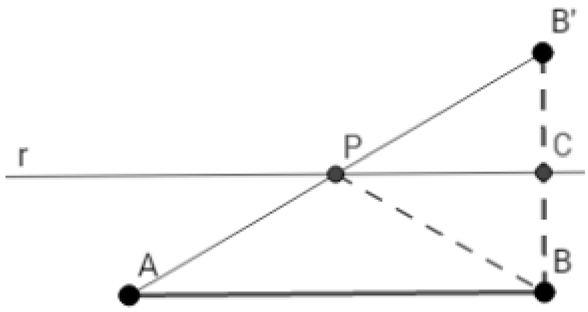
Corolário 2.1.1.1. *Dados dois pontos A e B e uma reta r de forma que ambos os pontos estão no mesmo semiplano definido pela reta e $\overline{AB}//r$. P é um ponto em r tal que $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$ tenha valor mínimo se, e somente se, $|\overline{AP}| = |\overline{PB}|$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$)Como P é um ponto em r tal que $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$ tenha valor mínimo (Figura 9), pelo resultado do *Problema de Heron*, A, P e B' (o reflexo de B sobre r), são pontos alinhados. Como observado na Figura 8, se for traçado o segmento $\overline{BB'}$, obtem-se seu ponto de inteseção com r, denominado C. Podem ser formados dois triângulos $AB'B$ e $PB'C$. Pela *Definição 2*, $\angle PCB'$ é reto. Além disso, $\angle ABB'$ também o é, pois $\overline{AB}//r$. Os dois triângulos têm também o ângulo do vértice B' em comum, logo, pelo critério de semelhança, $AB'B \sim PB'C$ e, considerando $|\overline{BC}| = |\overline{CB'}|$, tem-se $|\overline{AP}| = |\overline{PB'}|$. Por B' ser reflexo de B sobre r, é verdade que $|\overline{PB}| = |\overline{PB'}|$, por fim, pela transitividade da igualdade, $|\overline{AP}| = |\overline{PB}|$.
($\Leftarrow$) Observando a Figura 9, tem-se $|\overline{PB}| = |\overline{PB'}|$, logo $\triangle PBB'$ é isósceles. Daí, $\overline{PC}$ é altura e bissetriz relativas a $\overline{BB'}$, portanto, $(\angle BPC) = (\angle B'PC)$. Por serem alternos internos: $(\angle ABP) = (\angle BPC) = \alpha$. Toma-se $\angle APB = \beta$, nota-se que $\beta + 2\alpha = 180^o$, pois os dois ângulos congruentes de $\triangle APB$ medem α. Daí:

$$(\angle APB') = (\angle APB) + (\angle BPB') = \beta + 2\alpha = 180^o$$

Logo, A, P e B' são colineares. Pelo argumento de *Heron*, $|\overline{AP}| + |\overline{PB}|$ atinge seu valor mínimo. $\square$

Figura 9 – Construção do *Corolário 2.1.1.1*



Fonte: Produzido pelo autor

Nota 1: Este corolário também pode ser apresentado como *o problema do menor triângulo com um lado fixado*, onde se dá um segmento e um ponto fora dele, e aquele é o primeiro lado do triângulo e o ponto externo é o terceiro vértice. Questiona-se, *se a área for fixada, qual a configuração deste triângulo em que ele terá o menor perímetro?*. O resultado, por consequência do *Corolário 2.1.1.1*, é ele ser isósceles.

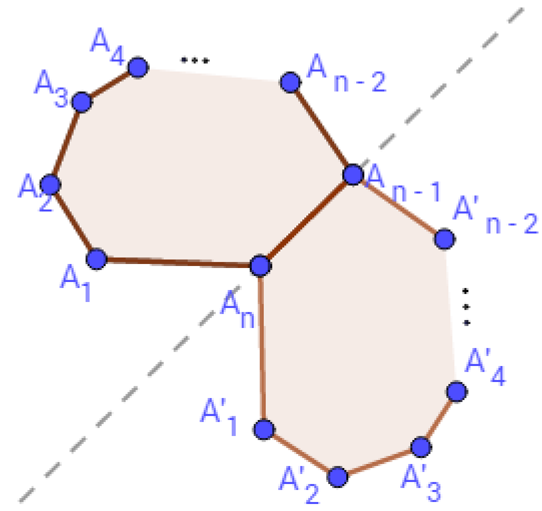
2.2 A solução de Schwarz para o problema de Fagnano

Nesta seção, serão trabalhados, diante das definições de reflexão de um polígono sobre um de seus lados e da distância entre dois pontos, os passos utilizados por Schwarz para solucionar o problema de Fagnano. Este conteúdo é base da atividade avaliativa da sequência didática da Subseção 5.2.3.

Definição 3. *Dado um polígono de n lados (n-gono), sua reflexão sobre um de seus lado* $\overline{A_iA_{i-1}}$ *com* $i \in \{2, ..., n\}$ *é o polígono gerado pela reflexão de todos os seus pontos sobre a reta suporte* $\overline{A_iA_{i-1}}$.

Exemplo: Tem-se na, Figura 10, a reflexão do n-gono sobre o lado $\overline{A_{n-1}A_n}$.

Figura 10 – Reflexão do n-gono sobre um lado qualquer



Fonte: Produzido pelo autor

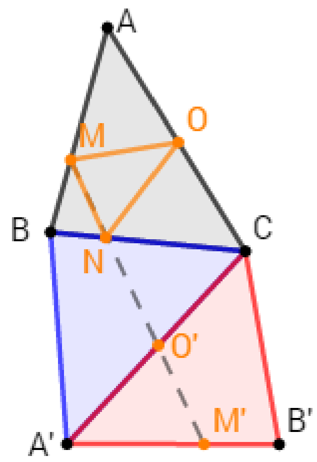
Apresentam-se agora duas definições necessárias para solução da proposição subsequente.

Definição 4. *Define-se **reflexão ideal**, como uma sequência de reflexões de um polígono sobre seus lados onde é possível ligar um ponto de um lado do polígono original ao seu reflexo, intersectando todos os lados ou uma reflexão de cada lado do polígono uma vez em cada um, com exceção do lado do ponto de origem, este será cruzado duas vezes, no ponto de origem e no seu reflexo final (Sequência de reflexões do triângulo* ABC*, da Figura 11).*

Definição 5. *Define-se como **segmento ideal** aquele a cruzar todas as reflexões, atravessando uma vez, cada lado do polígono principal ou ao menos a reflexão deles, com exceção do lado onde está contido o ponto de origem, pois sua reflexão também será intersectada no último polígono refletido, no reflexo final do ponto de origem (Segmento* $\overline{MM'}$ *da Figura 11).*

Proposição 2.1 (Problema de Fagnano)**.** *Dado um triângulo acutângulo qualquer ABC, existe o triângulo MNO inscrito em ABC, de perímetro mínimo.*

Figura 11 – Construção da solução do problema de Fagnano



Fonte: Produzido pelo autor

Demonstração: A princípio, deve-se construir um triângulo acutângulo ABC e sua *reflexão ideal* (Figura 11). Encontrada esta, constrói-se um *segmento ideal* $\overline{MM'}$ de $\triangle ABC$, com o ponto $M \in \overline{AB}$ de origem, sendo M' o reflexo de M no último polígono. São gerados os pontos $N = \overline{MM'} \cap \overline{BC}$, $O' = \overline{MM'} \cap \overline{A'C}$. Como o triângulo é um ciclo, se sua construção começar em um ponto, deve terminar no mesmo, que será M em $\triangle ABC$. Refletindo $\overline{NO'}$ e $\overline{O'M'}$ sobre o triângulo principal, obtém-se um outro, o MNO.Sua configuração está em dependência da linha $\overline{MNO'M'}$. Entende-se esta como o "caminho" de M a M', qual terá seu comprimento minimizado quando for um segmento. Isto interfere diretamente no perímetro de $\triangle MNO$, que também torna-se mínimo nestas circunstâncias. Qualquer outra configuração assumida por um de seus lados fará com que o seu reflexo se desalinhe com o *segmento ideal* e terá de tomar um caminho diferente deste, o qual não será mínimo. A mudança citada desalinharia M, N, O' e M' e faria do percurso $\overline{MNO'M'}$ uma poligonal convexa como mesmos extremos de $\overline{MM'}$. Então o $\triangle MNO$ de perímetro mínimo é uma reflexão do *segmento ideal* dentro de $\triangle ABC$. □

Nota 1: Esta foi a solução do matemático alemão Hermann Amandus Schwarz para o problema de Fagnano e sobre ela é desenvolvido este trabalho nas Seções que abordam variações deste problema onde não têm-se pontos fixados do polígono que se almeja construir.

Agora, o leitor interagirá com o problema de Fagnano para quadriláteros (sem pontos fixado, o que difere desta última circunstância). Como será visto a seguir, é o caso matemático no qual ocorre a modelagem e a abordagem da sequência didática da Subseção 5.2.3.

Proposição 2.2 (O problema de Fagnano para Quadriláteros)**.** *Dado um quadrilátero $ABCD$ convexo qualquer, existe um quadrilátero $MNOP$ inscrito em $ABCD$, de perímetro mínimo.*

Demonstração: A solução de Schwarz aplica-se a esta situação. Executam-se a *reflexão ideal* e o *segmento ideal* e refletem-se os segmentos gerados por estes no polígono principal para obtenção o quadrilátero de perímetro mínimo. □

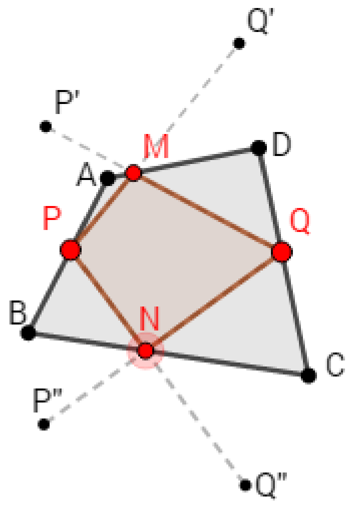
2.2.1 Extensões do problema de Fagnano da Subseção 5.2.2

Nesta subseção, serão abordadas algumas situações advindas do problema de Fagnano e envolvidas em outra sequência didática. O teorema seguinte é apresentada como atividade avaliativa final da Subseção 5.2.2. Ele soluciona o problema: "*Dado um quadrilátero qualquer $ABCD$, com os pontos $P \in \overline{AB}$ e $Q \in \overline{CD}$, como construir o quadrilátero de perímetro mínimo inscrito em $ABCD$, $MPNQ$?*". Esta avaliação permite a utilização de todos os conteúdos agregados pela sequência da subseção anterior, a 5.2.1, além de suas próprias competências envolvidas para executar construção e solução. Isto pode permitir averiguar o limite de desenvolvimento de cada discente, porque torna-se possível verificar se o estudante consegue instrumentalizar o resultado de *Heron*, como será visto a seguir.

Teorema 2.2.1 (A solução para o Problema de Fagnano em quadriláteros e com dois pontos definidos)**.** *Dado um quadrilátero qualquer $ABCD$, com os pontos $P \in \overline{AB}$ e $Q \in \overline{CD}$. Se os pontos $M \in \overline{AD}$ e $N \in \overline{BC}$ forem posicionados de forma que $\overline{PNQ}$ e $\overline{PMQ}$ sejam caminhos de Heron, o quadrilátero inscrito em $ABCD$, $MPNQ$, terá perímetro mínimo.*

Demonstração: Dados M em $\overline{AD}$ e N em $\overline{BC}$ tais que $\overline{PMQ}$ e $\overline{PNQ}$ sejam *caminhos de Heron*, estas poligonais convexas atingem seus comprimentos mínimos (*Teorema 2.1.1*). Definindo o perímetro de $MPNQ$ como $P(MPNQ)$: $P(MPNQ) = |\overline{PMQ}| + |\overline{PNQ}|$. Como as duas variávies desta soma estão em seu valores mínimos, $P(MPNQ)$ também o atinge (Figura 12). □

Figura 12 – Quadrilátero $MPNQ$ de perímetro mínimo

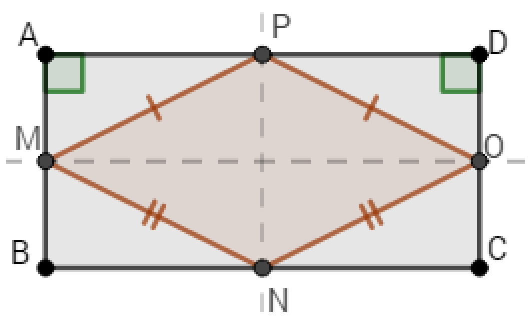


Fonte: Produzido pelo autor

Este teorema a seguir é utilizado como atividade avaliativa no último encontro da Subseção 5.2.2. O motivo de sua escolha é a demonstração poder ser feita com o resultado do *Corolário 2.1.1.1* e congruência de triângulos, conteúdo envolvido nesta sequência didática.

Teorema 2.2.2. *Dado um retângulo $ABCD$, o quadrilátero, com cada um de seus vértices em um lado de $ABCD$, dados $M \in \overline{AB}$ e $O \in \overline{CD}$, tais que $\overline{OM}//\overline{DA}//\overline{BC}$ e $\overline{OM}$ divide o $ABCD$ simetricamente, o quadrilátero $MNOP$ inscrito de menor perímetro é um paralelogramo.*

Figura 13 – Quadrilátero de mínimo perímetro $MNOP$



Fonte: Produzido pelo autor

Demonstração: Sejam $M \in \overline{AB}$ e $O \in \overline{CD}$ tais que $\overline{OM}$ divide simetricamente $ABCD$. O paralelismo entre os 3 segmentos citados é implícito. Pelo *Teorema 2.2.1*, P e N assumem posições tais que $\overline{MPO}$ e $\overline{MNO}$ atinjam seus comprimentos mínimos, quando $\triangle MOP$ e $\triangle MON$ são isósceles. Ou seja, $MNOP$ ter o mínimo perímetro implica $|\overline{MP}| = |\overline{PO}|$ e

$|\overline{MN}| = |\overline{NO}|$ (Figura 11). Deve-se demonstrar agora a congruência dos quatro lados. Toma-se $(\angle PMA) = \alpha$ e $(\angle POD) = \beta$. $(\angle AMO) = (\angle PMO) + \alpha$ e $(\angle DOM) = (\angle POM) + \beta$. Como existe congruência entre $(\angle PMO)$ e $(\angle POM)$, então $\alpha = \beta$. Os triângulos APM e DPO são congruentes, pois $(\angle MAP) = (\angle PDO)$, $(\angle PMA) = (\angle POD)$ e $|\overline{MP}| = |\overline{PO}|$ (Lado-Ângulo-Ângulo oposto). Daí, $|\overline{AP}| = |\overline{PD}|$, da mesma maneira, $|\overline{BN}| = |\overline{NC}|$, logo $\overline{PN}$ também divide $ABCD$ simetricamente. Com isso, é possível concluir que $|\overline{MN}| = |\overline{MP}|$. Pela transitividade da igualdade, $|\overline{MN}| = |\overline{NO}| = |\overline{OP}| = |\overline{PM}|$. Logo $MNOP$ é um paralelogramo. □

2.3 Situações de relações isoperimétricas

Agora, serão trabalhados conhecimentos relativos à Subseção 5.2.4, onde é apresentada uma contextualização lúdica do problema de Dido, na qual algumas personagens levantam hipóteses sobre a possível solução. A primeira fala de uma das personagens diz sobre o quadrilátero de maior área possível, com o perímetro fixado, e a segunda, sobre uma comparação entre a área de um círculo e um quadrilátero de comprimento e perímetro congruentes.

Proposição 2.3. *Fixado um perímetro P, o retângulo de maior área é um quadrado.*

Demonstração: Dados um quadrado Q e um retângulo R de lados variáveis com o mesmo perímetro, onde o lado do quadrado mede l e a base e altura do retângulo medem a e b, respectivamente. Sabe-se que a área e semiperímetro do quadrado é $A_Q = l^2$ e $P_Q = 2l$ e a área e semiperímetro do retângulo é $A_R = ab$ e $P_R = a + b$, respectivamente, onde:

$$P_Q = P_R \Rightarrow a = 2l - b \quad (I)$$

Substituindo (I) em A_R tem-se: $A_R = b(2l - b) = 2lb - b^2$. Daí, pode-se definir uma função quadrática $A_R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $A_R(b) = 2lb - b^2$. A área do retângulo irá atingir seu valor máximo quando a A_R estiver no "y do vértice".

$$y_v = A_{Rmáx} = \frac{-[(2l)^2 - 4.(-1).0]}{4.(-1)} = l^2$$

Logo, se quando A_R ocupa a maior área, esta se expressa pela fórmula de A_Q, então, fixado o perímetro, o retângulo de maior área possível é um quadrado. □

Proposição 2.4. *Dados um retângulo e um círculo com perímetro e comprimento iguais. Entre eles, a curva plana fechada de maior área é o círculo (Observar Figura 23).*

Demonstração: Como, segundo o resultado da *Proposição 2.4*, o retângulo de maior área com o perímetro fixado é um quadrado, então, a comparação deve ser feita entre um círculo e um quadrado isoperimétricos. Dados, com esta relação, um círculo C de raio r e um quadrado Q de lado l com áreas e perímetros (comprimento de circunferência, no caso do círculo) $A_C = \pi.r^2$ e $P_C = 2.\pi.r$ e $A_Q = l^2$ e $P_Q = 4l$, respectivamente. Sabe-se que $P_C = P_Q$, logo $2.\pi.r = 4l \Rightarrow l = \frac{\pi.r}{2}$ (I). Substituindo (I) em A_Q temos:

$$A_Q = (\frac{\pi.r}{2})^2 = \frac{\pi^2.r^2}{4} = \frac{\pi}{4}.(\pi.r^2) = \frac{\pi}{4}A_C$$

Como $\pi < 4 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < 1 \Rightarrow A_Q = \frac{\pi}{4}A_C < A_C$, ou seja, $A_Q < A_C$. $\square$

3 A utilização das histórias em quadrinhos na educação

3.1 Uma breve abordagem histórica das HQs

As Histórias em Quadrinhos (HQ), ou Gibis, como são conhecidas hoje (produzidas em massa, comercializadas e com falas representadas em balões), tem seu suposto surgimento nos Estados Unidos, nas últimas décadas do século XIX, como diz Campos (, p. 30) "Atualmente, a obra do americano Richard F. Outcault é aclamada como a primeira série de histórias em quadrinhos do mundo, por anteceder a obra de Rudolph Dicks, além de passar a incluir as falas dos personagens dentro dos quadrinhos". Inicialmente, visavam atingir um público migrante, com sua temática, como pontua Barbosa et al. (2006, p. 10): "Despontando inicialmente nas páginas dominicais dos jornais norte-americanos e voltados para as populações de migrantes, os quadrinhos eram predominantemente cômicos, com desenhos satíricos e personagens caricaturais". A prova disto, é a primeira obra deste momento histórico, nominada *The Yellow Kid*, de Richard F. Outcault. Retratava a vida de uma criança asiática, dentuça e cheia de gírias de gueto em sua linguagem, expondo a imagem marginalizada e estereotipada de uma parcela da população norte-americana sobre os estrangeiros não europeus que viviam no país.

As HQs foram usadas para propaganda ideológica e dominação cultural ao longo do tempo, como explica Barbosa et al. (2006):

> Levados a todo o mundo pelos *syndicates*, grandes organizações distribuidoras de notícias e material de entretenimento para jornais de todo o planeta, essas histórias disseminaram a visão de mundo norte americana, colaborando, juntamente ao cinema, para globalização dos valores e cultura daquele país. (BARBOSA et al., 2006, p. 10)

Não por acaso, toda a gama de super-heróis mais populares é produto norte-americano, a exemplo do processo citado. Além do teor político e cultural destas obras, em outras ocasiões, seu conteúdo era sintomático do momento histórico vivido, como o aumento da procura por quadrinhos de heróis lutando em guerras, a exemplo do Capitão América, figura viva e muito popular até hoje, representante do ufanismo e da esperança da salvação contra a ameaça nazista, ao menos no imaginário da sociedade estadunidense. Houve um combate ideológico contra os quadrinhos, após a Segunda Guerra, originado pelo psiquiatra alemão e residente nos Estados Unidos, Fredderick Werthan.

> O psiquiatra alemão estabeleceu correlações entre os atendimentos realizados por ele em jovens problemáticos e a leitura dos quadrinhos. A partir disso, publica artigos em jornais e revistas especializadas, e

> até mesmo participações em programas de rádio e televisão, nos quais enfatizava os aspectos negativos a leitura dos quadrinhos, alegando que a influência desse tipo de material poderia desencadear diversas anomalias comportamentais(CAMPOS, , p.58).

O lançamento de seu livro *Seduction of the innocent*, em 1954, reunindo trabalhos seus sobre o tema, gerou uma reação social marcante:

> Devido ao impacto das denúncias do Dr. Werthan e de outros segmentos da sociedade norte americana – como associações de professores, mãe e bibliotecários, além de grupos religiosos das mais diferentes tendências –, não tardou para que todos os produtos da indústria de quadrinhos passassem a ser vistos como deletérios, exigindo uma "vigilância" rigorosa por parte da sociedade(BARBOSA et al., 2006, p.12).

Esta ideologia atingiu também a cultura brasileira, pois, no governo de Jânio Quadros, foi criado um código de ética a ser seguido na confecção dos HQs, nominado Código de Ética dos Quadrinhos, limitando superficialmente a moralidade do conteúdo divulgado, os impondo a ser não educativos e meramente entretenimento, proibindo de instigar, em demasia, a imaginação da juventude, entre outras proposições. Com o passar do tempo, no mesmo século, começou-se a ressignificar o papel dos meios de comunicação de forma geral, incluindo os quadrinhos. Então, a ideia de que canais comunicativos, principalmente os mais populares, corrompiam e adoeciam a sociedade foi amenizada pelo senso comum. Hoje, a reputação dos quadrinhos é produto direto deste último processo citado, pois são utilizados como ferramenta educativa, muitas vezes de forma integrada ao processo de ensino e aprendizagem escolar. É muito comum a incidência de tirar de *Mafalda*, *Turma da Mônica* ou *Menino Maluquinho* nas provas e livros voltados para matriz de linguagens e códigos, por exemplo.

Antes mesmo do surgimento comercial e com falas em balões dos HQs nos Estados Unidos e em diferentes épocas e locais, percebe-se a utilização da imagem como meio de comunicação. Desde a arte rupestre na América do Sul, África e Europa pré-históricas e da semana de arte moderna no Brasil, em 1922, até o acervo de vídeos do *YouTube*, as imagens carregam mensagens, das mais simples às mais complexas, de forma proposital ou não. A invenção da escrita fez esta tomar a dianteira como principal meio de comunicação em certos períodos da história, mas o visual permanece forte e vivo até a contemporaneidade, principalmente por ser mais democrático, pois "Até o século XVII poucas pessoas eram alfabetizadas. Por isso, a imagem foi tão importante. Até um analfabeto consegue absorvê-la. Surdos-mudos entendem. Crianças entendem. Homens das cavernas entendiam"(LOVETRO, 2011, p. 11). Portanto, "pode-se dizer que as histórias em quadrinhos vão ao encontro das necessidades do ser humano, na medida em que utilizam fartamente um elemento de comunicação que esteve presente na história da humanidade desde os primórdios: a imagem gráfica"(BARBOSA et al., 2006, p. 8).

3.2 A utilização de HQs no ensino da matemática

Os fatores entretenimento, as necessidades da representação imagética do ser humano, já citada por Barbosa et al. (2006) e a contextualização da realidade fazem com que as revistas em quadrinhos dialoguem bem com públicos de diversas idades e isso lhes fornece um potencial lúdico valorizado nos processos de ensino e avaliativo. Sobre o último fator, Santos, Silva e Lucena (2016) pontuam:

> O uso da contextualização por parte do professor, e também, do estudante, pode contribuir como método de ensino de matemática, tal como, instrumento de verificação de aprendizagem. Haja vista, que no primeiro caso, o estudante precisa evocar conceitos matemáticos para resolver situações reais, enquanto no segundo, para contextualizar, o estudante fará uso de situações reais para explicar conceitos matemáticos (SANTOS; SILVA; LUCENA, 2016, p. 2).

O autor ainda aponta para o fato de, utilizando a contextualização como via, o estudante ter a possibilidade de perceber e usar o conhecimento matemático em situações reais (SANTOS; SILVA; LUCENA, 2016). Certamente, a forma mais clara de aplicar os conhecimentos trabalhados em sala de aula de forma indireta é trazendo contextos hipotéticos ou reais quais podem ser modelados pelo conteúdo em questões ou propondo a criação disto. Porém, existem armadilhas na contextualização, são elas: Trazer um contexto artificial, como abordam Gitirana e Bittar (2013),

> Ao lado da discussão sobre um fato de uma contextualização ser artificial ou não, é importante ter clara a função do saber em foco. Assim, por exemplo, usar uma equação do 1º grau para responder a questão "Que número somado a 8 resulta 12? "pode não contribuir para o aluno entender a importância do uso da álgebra como ferramenta uma vez que a questão proposta é facilmente resolvida aritmeticamente, até mesmo por meio do cálculo mental (GITIRANA; BITTAR, 2013, p. 78).

Além disso, o exemplo utilizado ainda sim é uma situação abstrata, sem contato explícito com a realidade, esta é a outra "armadilha"da contextualização, pois a correlação entre o abstrato e o real não é observada.

Considerando isto, a escolha das HQs é justificada por ser uma forte arma de contextualização. Segundo Verônica Gitirana e João Bosco Pitombeira de Carvalho em Carvalho et al. (2010), a criança tem um poder imaginativo forte e muitas situações aparentemente sem sentidos para o adulto conseguem prender o interesse infantil. Isto dá poder aos jogos e literatura infantil, por exemplo, serem utilizado para contextualizar conteúdos matemáticos. É verdade que com o passar do tempo, para um indivíduo vem o amadurecimento, porém vale ressaltar que a geração contemporânea tem um grande apego a jogos, principalmente eletrônicos e literatura, mesmo na adolescência e fase adulta. Ou seja, a utilização de revistas em quadrinhos pode ser uma ferramenta pedagógica até para um público de anos finais do ensino fundamental. Então, sua ludicidade é forte e tem potencial de despertar interesse do aluno, pois este pode não se incomodar com uma dúvida de um problema de álgebra, mas provavelmente fará questão de compreender um diálogo de uma história que lê ou de dar sentido a uma construção sua, este também é o motivo e talvez o principal de sua instrumentação no ensino da matemática ser justificado.

> Dessa forma, as HQs podem ser aplicadas pelo professor de matemática na contextualização dos assuntos vistos na sala de aula, como uma alternativa, buscando despertar o interesse dos alunos, fazendo com que a partir da análise de textos e imagens a aprendizagem aconteça de forma mais significativa e atrativa. (ARAÚJO JÚNIOR; TRINDADE; OLIVEIRA, 2019, p. 39)

Existem algumas formas de trazer as HQs para o processo de ensino e aprendizagem, o professor pode trazer uma já existente, englobando conteúdos matemáticos, para trabalha-los com seu alunado. Neste processo, o docente pode produzir uma história como achar conveniente e apresentá-la da mesma forma. Além disso, pode ser feita uma proposta de confecção, por parte dos alunos, dos seus próprios quadrinhos, deixando livre a escolha do contexto, mas fixando um conteúdo matemático a ser abordado. Do ponto de vista avaliativo, a segunda forma de abordagem pode trazer um retorno sólido, pois o estudante terá de construir, passo a passo, utilizando todas as suas habilidades e competências, seu contexto. Qualquer falha ou incompatibilidade de informação estará registrada em seu trabalho, facilitando a função diagnóstica. Existe a dificuldade de verificar exatamente em que ponto de um assunto o aluno não desenvolveu o saber, pelo método tradicional avaliativo. Portanto, utilizar os quadrinhos no ensino da matemática, permite ao docente trazer o lúdico e um diagnóstico forte lado a lado.

3.3 Proposta de aplicação de HQ em sequência didática

Na proposta de sequência didática voltada para o problema de Fagnano-Schwarz (Subseção 5.2.3), o autor reservou um momento para a utilização de uma HQ autoral (Anexo B) construída sobre o contexto da dinâmica aplicada. A história narra a vida de um jovem, estudante de escola pública, periférico, negro, que trabalha no horário fora da escola e não gosta de matemática chamado Bonifácio. Este material proposto foi criado para dialogar, principalmente, com alunos de escolas estaduais e municipais de regiões metropolitanas, não à toa o perfil da personagem principal foi construído desta maneira, para causar uma identificação com a realidade do estudante médio deste grupo. Porém, o contexto não soa irreal para nenhum público. Buscou-se, nesta confecção, considerar as seguintes palavras:

> Propor a criação de HQ, visando o ensino e a aprendizagem de matemática, é preciso levar em consideração a qualidade e a pertinência

> da contextualização aplicada e relacionada à matemática que se busca ensinar e/ou aprender. (SANTOS; SILVA; LUCENA, 2016, p. 4)

Isto traz ao leitor uma preocupação do autor em desviar das armadilhas da contextualização, as tome como as construções que levam o autor a investir em realidades tão desconexas a ponto de impossibilitar a identificação do leitor. Neste caso, o conteúdo envolve personagens e uma circuntância preparadas para vencer este problema

No texto, a solução de Schwarz para o problema de Fagnano adaptado é feita, passo a passo, com o intuito de auxiliar a personagem na solução de um problema de sua vida profissional, o instigando a perceber a possibilidade de fazer de ferramenta os conhecimentos matemáticos aprendidos. Isto é muito importante, pois sobre as práticas sociais e econômicas: "O seu uso (do conhecimento matemático) evidencia como a Matemática pode auxiliar a formação do aluno quanto cidadão, consciente de suas responsabilidades e atento aos problemas sociais de nosso país"(CARVALHO et al., 2010, p, 71, grifo do autor). Afinal, Bonifácio está buscando uma forma de reduzir o seu desgaste físico e mental em seu trabalho, o que pode alterar diretamente a sua qualidade de vida. É de conhecimento comum que a jornada de trabalho no Brasil é muitas vezes desumana e os cuidados com o bem-estar sempre são um desafio. Esta HQ traz uma circunstância onde um cidadão, auxiliado pela matemática, otimiza o seu serviço passando por um obstáculo pessoal, instigando os leitores a fazer o mesmo, potencializando uma luta contra um problema social.

Na subseção da sequência didática em questão, apresenta-se como alternativa de avaliação final no último encontro aos alunos uma confecção de seus próprios quadrinhos, sendo necessária uma construção de contexto sobre a solução do problema de Fagnano, podendo utilizar outros polígonos, além do triângulo. Daí, além do exemplo de como utilizar a matemática como ferramenta no dia a dia, no texto principal, o estudante terá de fazer o mesmo, agora com uma ideia ou experiência própria, sendo induzido a conectar isto com o conteúdo.

4 Jogos no ensino da Matemática

Este capítulo traz argumentos conceituais e empíricos sobre a ludicidade na educação contemporânea, jogos matemáticos e uma prévia da proposta de sequência didática abordando o projeto de jogo autoral com otimização geométrica, aprofundado na Subseção 5.3.1.

4.1 Por que utilizar a ludicidade?

Os sistema de educação brasileiro tem laços embrionários com a educação tradicional, pois esta surgiu como consequência dos Sistemas Nacionais de Ensino, no Século XX de tal forma que "As teorias da educação que nortearam a escola tradicional confundem-se com as próprias raízes da escola tal como a concebemos como instituição de ensino" (LEÃO, 1999, p. 2). Entre as características mais questionáveis desta corrente pedagógica está o modelo de aula expositivo, tendo como empecilho "o risco da não-aprendizagem, já que não há interação entre o sujeito e o objeto de conhecimento, o que torna essa metodologia pouco adequada à formação dos jovens estudantes para a vida" (OLIVEIRA, 2006, p. 1)

O público estudantil atual está sendo tomado pela Geração Z, que dentre suas características são imediatistas, dinâmicos, capazes de lidar com múltiplas tarefas simultaneamente (TOLEDO, 2012). Alem disto, ainda em Toledo (2012), desde a Geração Y, é possível notar a impaciência e impassividade, tanto que era estigmatizada como a geração da tentativa e erro. Pôr este alunado como agente passivo dentro de um sala, com as atividades sendo conduzidas pela exposição, em aulas geminadas, tanto foi anunciada como é consolidada uma tragédia. Ainda mais, a posição assumida pelos professores como detentores do saber gera um senimento neles de arrogância, como é possível notar em Teixeira (2018), onde este autor registra relatos de pessoas, frutos de um sistema tradicionalista, e o seu primeiro entrevistado, sobre um de seus ex-professores, alega:

> Desde o primeiro dia de aula manteve certa distante de nós, era até bem arrogante, acho que ele queria se mostrar acima dos alunos. Ele sempre nos dava um tema para dissertar e na aula seguinte pontuava as melhores redações, e depois as piores. Havia rumores na escola de que ele queimava as piores redações em sala, para ensinar os alunos a serem melhores (TEIXEIRA, 2018, p. 4).

Este é um problema para qualquer relação pessoal, agravando-se quando lida-se com um jovem desta geração, pois outra de suas características, segundo Teixeira e Ribeiro (2018), é estarem propensos a serem egocêntricos, algo que dificultaria um estreitamento de laços para com um docente do perfil citado.

Outro grande problema que transcende a adaptação da antiquada escola contemporânea ao seu público, é a existência de um alunado carente, com uma cultura diferente da usual, seja no campo ou no subúrbio. Os alunos periféricos, comumente, têm uma autoestima baixa, pois em Melo et al. (2005), é feita uma pesquisa com dezenas de famílias de baixa renda em uma comunidade do Recife para apurar a relação do alcoolismo e da violência nas relações, em diferentes estruturas familiares. No fim, nenhuma família, independente de formação, estava livre de bebidas alcoólicas e possíveis tratamentos violentos. Além disso, em Paixão (2014), entre todas as pesquisas citadas que correlacionam baixa autoestima com alguma causa, uma acusa o seguinte:

> Aqueles participantes que referiram ter memórias de abuso emocional mostraram altos escores de afeto negativo (ex.: impaciente, angustiado) e baixos escores de autoestima, afeto positivo (ex.: amigável, cuidadoso) e satisfação de vida (PAIXÃO, 2014, p. 14)

Ou seja, o ambiente de um aluno periférico médio tem forte potencial para afetar sua autoestima negativamente, com isso, gerar estudantes envergonhados, seja quando não compreendem algo, carregando suas dúvidas até onde puderem, ou por terem de lidar com o perfil recorrente de professor, como já foi citado. Isso os torna pouco preparados e inativos, como os alunos de outros extratos sociais de sua geração. Além disso, este grupo de estudantes muitas vezes não tem acesso à internet ou aparelhos tecnológicos modernos, o que lhes desloca dos costumes da Geração Z (isto afeta também o aluno do campo), em outras palavras, têm uma realidade diferente, mas ainda aparecem como um desafio para a escola tradicional pelos motivos descritos.

Pensando nestas situações, pensa-se na ludicidade como peça de grande valia no processo de ensino e aprendizagem. Muitos subestimam o lúdico e o "reduzem"a brincadeiras, mas desconsideram que “Brincando a criança aprende a interagir com outras pessoas, além de aprender a compartilhar, cumprir regras e tomar decisões” (VENTURINI, 2016, p. 14) e, por isso, “Brincar é uma atividade que facilita o desenvolvimento físico, cognitivo, psicológico, estimula o desenvolvimento intelectual, possibilita as aprendizagens” (MODESTO; RUBIO, 2014, p. 2). O lúdico não é o único meio pelo qual se ensina, mas pode ser proveitoso para lidar com a Geração Z, pois segundo Venturini (2016), uma brincadeira é capaz de projetar o jovem em uma situação excitante, sem lhe impor grandes riscos, apesar da liberdade de imaginação. Isto é favorável ao tratamento com esta geração, considerando o fato de os seus indivíduos serem dinâmicos, impacientes (normalmente quando encontram-se em passividade, situação esta que inverte-se, pois torna-se o fator ativo quando se joga) e precavidos (não gostarem de grandes riscos (TEIXEIRA; RIBEIRO, 2018, p. 4)). A forma como a brincadeira instiga, trazendo para um mundo imaginário, também é um atrativo pedagógico para lidar com o alunado de baixa autoestima, pois lhes distrai da pressão exercida no ambiente escolar ligada a obtenção de resultados e talvez o discente consiga participar e desenvolver-se melhor, pois é possível não sentir exigências de desempenho da capacidade, qual ele imagina não ter o suficiente.

4.2 Uma proposta de jogo para o ensino da Otimização Geométrica

Pensando em todos os estudos feitos sobre contextualização (Seção 3.2) e ludicidade, para além da HQ criada, o autor também pensou em envolver um jogo com Otimização Geométrica nas propostas de sequências didáticas. Analisando as opções fornecidas pelo lúdico, foram escolhidos os jogos, porque dentro deles "cada jogador tem a possibilidade de acompanhar o trabalho de todos os outros, defender pontos de vista e aprender a ser crítico e confiante em si mesmo" (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 9), sendo a construção do senso crítico uma das diretrizes da educação brasileira e um jogo "propicia um ambiente favorável ao interesse da criança, não apenas pelos objetos que o constituem, mas também pelo desafio das regras impostas por uma situação imaginária" (GRANDO, 2000, p. 20), ou seja, não bastasse a ideia de jogar ser totalmente associada à diversão e cativar o estudante por isso, este ainda pode sentir-se desafiado pela circunstância proposta (as regras), se aprofundando ainda mais em interesse e tornando o desenvolvimento de habilidades e competências a menor de suas preocupações, sem este processo deixar de ocorrer.

Em suas buscas por jogos com o tema preterido, o autor não encontrou resultados, então criou *Um ótimo caminho* (história e regras na Subseção 5.3.1). Nele, é construído um contexto medieval, onde existem guerras e personagens com habilidades diferenciadas, para causar um encantamento e identificação do público com a trama, pois este tipo de cenário é recorrente em jogos eletrônicos online, séries e entretenimento jovem de outras naturezas. Um dos jogadores tem a missão de arquitetar pontes utilizando recursos de geometria, sendo obrigado a lançar sua criatividade unida a aos objetos de conhecimento, e o outro deverá descobrir a ponte de menor comprimento com suas habilidades neste campo. Na proposta de sequência didática, os discentes terão contato com o conteúdo antes de serem apresentados ao *game*, portanto, o contexto ganha mais importância como recurso de engajamento dos estudantes, pois eles, provavelmente, jogarão conscientes de que estão em uma atividade pedagógica. A sala será dividida em grupos e cada um deles terá de apresentar seus trabalhos, descrevendo o passo a passo, tanto da confecção quanto da solução. Com esta exposição oral, espera-se uma precisão nas avaliações, pois eles serão induzidos a argumentar sobre cada ponto de suas obras e também a produzirem da melhor maneira, porque a exigência do ambiente escolar faz o estudante associar erro a fracasso e ter vergonha de expô-lo, o levando a evitá-los quando uma ocasião deste tipo é esperada.

5 Sequências didáticas

Este capítulo entregará ao leitor todo o conteúdo construído e sugerido pelo trabalho, inicialmente mostrando como se dá uma sequência didática e sob quais diretrizes foram construídas. Na sequência, as propostas em si, descritas passo a passo, desde suas fichas técnicas às estruturas avaliativas e perspectivas de aplicação. Todos os recursos para quem desejar aplicar estar bem servido.

5.1 Uma breve introdução às sequências didáticas

Buscando por meios pelo qual o trabalho em questão pudesse ser arquitetado, foram encontrados diversos conceitos e informações sobre sequência didática, onde ela pode ser definida, resumidamente, por Pereti e Tonin da Costa (2013) como

> A sequência didática é um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para aprendizagem de seus alunos e envolvendo atividades de avaliação. (PERETI; TONIN DA COSTA, 2013, p. 6)

tendo como seus aspectos importantes "salientar a interação dos componentes afetivos, motores e cognitivos[...] a conexão do texto com recursos motivadores dos quais exijam as competências e habilidades dos estudantes sem detrimento aos conteúdos" (CRUZ, 2017, p. 43). Ainda, é notável o potencial de avaliar formativamente os estudantes, ou seja, de forma contínua, devido à organização progressiva das etapas da sequência, segundo Nunes e Nunes (2019), sugerindo, muitas vezes, o trabalho de diferentes habilidades em cada uma daquelas. Na BNCC, são vistos parâmetros educacionais, no início do documento. Dois deles, especificamente, unidos às informações sobre sequências didáticas, justificam a escolha deste método para a aplicação do trabalho em questão:

> Contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas; Construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos alunos; (BRASIL, 2018, p. 16 e 17)

Para confeccionar as sequências, buscou-se tentar responder as 8 perguntas direcionadoras propostas por Zabala (2010), porém citadas em Cruz (2017) da seguinte forma:

> Existem atividades que nos permitem determinar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
>
> Os conteúdos são propostos de forma significativa e funcionais? (Diferentes formas de resolver um conflito ou um problema)
>
> Existe atividade que infere o nível de desenvolvimento da cada estudante? (É possível quando o conceito não aparece antes de que tenha se apresentado sua necessidade)
>
> Existem atividades que representem desafio alcançáveis para o aluno? (Ocorre quando os próprios alunos propõem soluções diferentes aos desafios/problemas colocados pelo professor)
>
> Existem atividades que provoquem um conflito cognitivo nos estudantes? (Ocorre quando o problema proposto não é fácil, para não causar desinteresse, e nem difícil ao discente para não causar frustração)
>
> Existem atividades que promovam uma atitude favorável, e sejam motivadoras em relação à aprendizagem de novos conteúdos? (Compõem o nível de interesse que o estudante tem em aprender)
>
> Que estimule a autoestima e o autoconhecimento em relação à aprendizagem? (Refere-se às contribuições dos alunos em resolver os problemas).
>
> Que ajudem os alunos adquirir habilidades relacionadas com o aprender a aprender? (Ocorre quando o estudante desenvolve habilidades e competências, sua forma de pensar promove estratégias cognitivas) (CRUZ, 2017, p. 44 e 45).

Além disso, a estrutura da sequência seguirá um formato similar ao de Silva Júnior (2018), apenas introduzindo atividades de retomada de conteúdos, tanto para trazer à tona assuntos vistos, recentes e de longa data, como para reforçar o domínio deles, pois serão ferramentas para o alunado neste trabalho.

Propõe-se uma avaliação formativa para todas as sequências didáticas , com destaque para a função diagnóstica, que, segundo Rios e Cassundé (2016), interpretando Luckesi (1998. p.180), induz a avaliação a "ser o objeto dialético do avanço [...] o instrumento de identificação de novos rumos" (RIOS; CASSUNDÉ, 2016, p. 106). Para isso, o processo avaliativo englobará a participação, a produção e o desenvolvimento de cada estudante em todas as etapas do trabalho, envolvendo: compreensão das definições, capacidade de usá-las como ferramenta na resolução de problemas, confecções com materiais de medição e consrução geométrica e união dos conceitos e domínio das competências visando desenvolver novas ideias para lidar, em contextos diferentes, com situações relacionadas e cotidianas. Em cada encontro, são construídos processos sequenciais, pois torna-se mais fácil a identificação das causas das dúvidas e erros do alunado quando cada degrau do processo de ensino-aprendizagem está discriminado. O material recolhido será observado buscando o entendimento das lógicas construídas por cada participante. As avaliações dos últimos encontros de cada sequência têm uma aplicação aparentemente tradicional, mas não haverá nenhum tipo de classficação, ou atribuição de valor ao desempenho dos alunos nelas. Tal avaliação final terá o mesmo teor e signficância das demais atividades, porém, exigirá uma compreensão geral das habilidades e competêcias abordadas em cada dinâmica, explorando o limite de aprendizado da turma. As primeiras atividades serão sempre de retomada ou introdução de conteúdo. Suas análises trazem informações mais profundas sobre a "bagagem"matemática do alunado, se comparadas às execuções posteriores. Ideias coletadas nos encontros terão suas construções investigadas, não seus resultados apenas, buscando as relacionar, em toda a produção, com os objetivos já explicitados do trabalho em questão.

5.2 Sequências didáticas com problemas clássicos

Esta seção descreve todas as sequências didáticas do trabalho que foram montadas sobre problemas clássicos de otimização geométrica. No intuito de dar recursos ao professor ou pesquisador para analisar a funcionalidade de todas as sequências didáticas, é proposto aplicar alguns passos descritos com uma turma diferente e de mesmo grau de ensino (denominada como turma paralela em vários momentos) à do trabalho principal. A turma paralela é indispensável, pois toda pesquisa necessita de um parâmetro. É possível obter informações confiáveis sobre a vantagem de uma aula com alguma das sequências didáticas propostas diante de uma com o modelo tradicional de ensino, por exemplo, apenas se o mesmo grupo de estudantes avaliados tiver tido contato com os mesmos conteúdos sob o último modelo e obteve um resultado menos satisfatório, ou se outra turma do mesmo nível sofre o mesmo processo e obtém resultados similarmente inferiores (esta segunda é a situação da turma paralela). Daí, este é o objetivo dela: Trazer dados e permitir observações sobre um grupo de estudantes interagindo com os assuntos das sequências, buscando os mesmos objetivos, porém diante de uma estrutura mais tradicional de ensino. No decorrer da descrição dos encontros, as ações referentes aos dois conjuntos de discentes serão precisamente abordadas.

5.2.1 Do experimento para o conceito: Contextualizando *Heron* para solucioná-lo

Pesquisando e estudando o *Problema de Heron*, o autor notou este em alguns contextos: Reflexão da luz, movimento de uma bola batendo em uma parede e voltando, entre outros. Além disto, foram observadas algumas deduções feitas do resultado do problema, como ângulo de incidência e reflexão serem congruentes, o triângulo de menor perímetro, fixado um lado, ser um isósceles. Unindo isto à acessibilidade de habilidades e conteúdos, para alunos do Ensino Básico, envolvidos nas soluções deste problema e seus derivados, notou-se um potencial de trazer situações problema e dinâmicas modeladas sobre *Heron* e envolvidas em sequências didáticas como uma porta de entrada para a otimização geométrica direcionada a este nível de estudantes.

A sequência didática desta seção traz um contexto onde uma personagem mora em uma fazenda ribeira e pretende preencher seu poço. Para isso, ela deve partir de sua casa, coletar água no rio e levá-la até o poço fazendo o menor percurso possível. Nesta circunstância, a margem do rio funciona como uma reta e os outros dois locais são pontos em um mesmo semiplano, como será visto em breve. Para envolver os jovens, propõe-se uma dinâmica competitiva onde eles devem, em grupos, montar o menor percurso manualmente com barbantes, fitas coloridas, garrafas pet e materiais didáticos de medição e construção geométrica.

Entre as situações avaliativas, há um destaque para a última (qualitativamente falando), pois ela é uma versão do *Problema de Fagnano* para quadriláteros com dois vértices do polígono escrito definidos (*Teorema 2.2.1*).

Todas as definições, demonstrações e soluções dos recursos matemáticos abordados nesta sequência estão devidamente feitos nas Seções 2.1 e 2.2, mais especificamente, tudo da primeira subseção citada e o *Teorema 2.2.1* da última.

DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Tema: A distância entre dois pontos, Reflexão de um ponto sobre uma reta, Problema de Heron;

Público alvo: Sala do 2º ano do ensino médio;

Duração: 8 aulas (4 encontros com, aproximadamente, duas aulas cada);

Disciplina: Matemática;

Objetivo geral: Apresentar uma dinâmica sobre reflexão, simetria e distância entre dois pontos no plano, utilizando uma situação problema que contextualiza o *Problema de Heron* como forma de trazer tal conteúdo para a realidade sem perder a raiz científica, permitindo a compreensão do resultado deste e sua instrumentalização;

Objetivos específicos :

1. Compreender que a distância entre dois pontos é uma reta;
2. Compreender que a reflexão de um ponto A sobre uma reta r é outro ponto A' que equidista da mesma e $\overline{AA'}$ é perpendicular a r;
3. Dominar o uso de esquadro e transferidor para construção da reflexão de pontos sobre um reta;
4. Utilizar os conceitos de distância entre pontos no plano, reflexão e simetria para resolver problemas, inclusive o de *Heron*;

5. Compreender a aplicabilidade e relevância do resultado de *Heron* para o cotidiano;
6. Utilizar a conclusão do problema de *Heron* para resolver uma situação problema baseada em um caso particular do *Problema de Fagnano*.

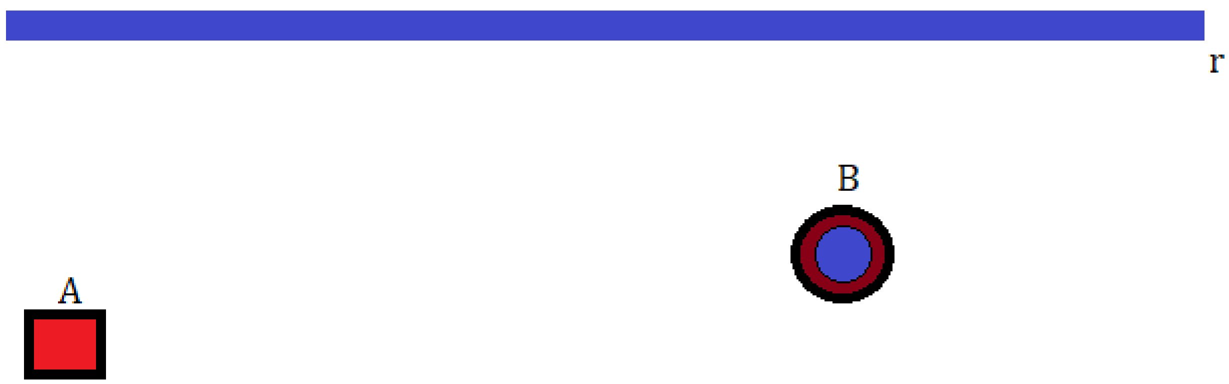
Material: Quadro branco e marcadores, objetos de medição de comprimento (Réguas, trenas e fitas métricas), transferidores, barbantes, fitas coloridas de diferentes cores (uma para cada grupo) e garrafas pet com areia;

Descrição das atividades: Todo o desenvolvimento do trabalho foi partilhado em 5 encontros.

1º Encontro: Iniciar aula trazendo exemplos de formas de ligar dois pontos e perguntando aos alunos o caminho mais curto possível de construir, guiando-os à resposta correta depois de ouvir algumas ideias de alunos. Em seguida, abordar a reflexão de um ponto sobre uma reta, introduzindo com um contexto envolvendo uma personagem e seu reflexo no espelho, questionando os discentes sobre a distância do reflexo para o vidro em relação à distância real. Expor o conceito matemático de reflexão de um ponto sobre uma reta e fazer construções com régua e transferidor, mostrando contraexemplos para explicitar a configuração correta: a perpendicularidade entre a reta formada pelo ponto e seu reflexo para com a reta que reflete o ponto e a equidistância deles sobre ela (para criar um contraexemplo, basta colocar pontos em diferentes semiplanos, gerados por uma reta e sem estar equidistantes ou gerarem um segmento não perpendicular a ela). As construções devem ser feitas sempre induzindo o alunado a dar ideias sobre os passos seguintes. Propor exercícios e problemas envolvendo os assuntos abordados aos estudantes (Anexo A.1), tanto trabalhando as definições como construções e os auxiliando minimamente na solução. Coletar material gerado pela turma após o fim desta etapa.

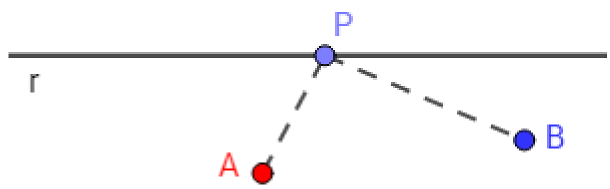
2º Encontro: Introduzir uma situação problema onde temos uma personagem, uma casa à beira do rio e, a uma certa distância, um poço de água que precisa ser reabastecido (Figura 14). Dividir a sala em grupos, entregar para cada um: barbante e 3 garrafas pet com areia e questionar qual seria o ponto do rio onde a personagem deveria parar para coletar a água de forma que o percurso Casa-Rio-Poço (Figura 14) fosse o menor possível. Deve-se demarcar, no chão, uma linha para representar o rio. Solicitar a utilização dos sacos de areia como representantes da casa, do poço e do suposto ponto P onde deve ser tocado o rio pela personagem (este será o único que pode ser movido), numa espécie de maquete utilizando o chão da própria sala, e o barbante como o traçado do caminho. Cada grupo deve receber uma fita colorida de uma cor para marcar no chão o caminho por ele escolhido e ficar fácil de diferenciar. Conduzir os discentes a executar uma interpretação geométrica da situação (Figura 15) e utilizar os saberes desenvolvidos no encontro anterior como ferramenta para solucionar. Dado um tempo necessário para o desenvolvimento das respectivas propostas de resolução de cada grupo, solicitar que cada um deles apresente suas respostas e as justifiquem. Para descobrir o vencedor, aferir a medida do barbante utilizado em cada caminho escolhido para encontrarmos um suposto triunfo, ou seja, aquele grupo a apresentar o menor caminho entre todos. Anunciar precipitadamente como ganhador o grupo que obtiver o menor caminho de todos e esperar os alunos se manifestarem na expectativa de alguém alegar a incompatibilidade da resposta vitoriosa com o questionamento do problema. Não havendo tal atitude por parte dos discentes, indagar se o grupo vencedor realmente apresentou o menor caminho possível ou só o menor caminho entre os apresentados na sala. Para a turma paralela, nem a dinâmica e nem o contexto serão apresentados, apenas o passo que será citado. Ainda neste momento, apresentar o *Problema de Heron* e desafiar o alunado a solucioná-lo. Coletar toda a produção de todos os discentes das duas situações.

Figura 14 – Casa, Rio e Poço



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 15 – Interpretação geométrica Casa-Rio-Poço



Fonte: Produzido pelo autor

3º Encontro: Retomar o ponto terminal do encontro anterior e solucionar o *Problema de Heron* com a mesma demonstração do *Teorema 2.1.1*, porém utilizando apenas um caso de colinearidade entre pontos para a minimização do percurso (É importante ir até o teorema para compreender isto). Utilizar a última atividade proposta do 1º encontro (Anexo A.1) como recurso para a demonstração. Tendo em mãos o resultado do problema de *Heron*, desafiar os alunos a resolverem a situação problema do percurso Casa -Rio -

Poço, esperando utilizarem-se da solução de *Heron* como argumento para isto. Este desafio será feito apenas à turma principal. Perguntar a opinião da turma sobre a complexidade e a possível origem e idade desse problema para introduzir uma abordagem histórica sobre a Grécia Antiga e o surgimento daquele, por autoria de Heron. Expor o problema de maneira formal e mostrar à turma que a contextualizamos e resolvemos. Escrever o resultado definitivo e solicitar a sua anotação para ser utilizado como ferramenta em situações posteriores. Propor à sala cada um registrar uma possível circunstância cotidiana onde a solução de Heron seja útil (Isso deve ser feito na turma paralela também). Coletar toda a produção dos participantes. A solução do *Problema de Heron* deve ser abordada na turma paralela, se possível, ainda no 2º encontro, mas deve-se manter oculto o contexto aplicado na turma principal e a abordagem história contando o seu surgimento.

4º Encontro: Na primeira aula, abrir espaços para os alunos apresentarem suas respostas da última proposição do último encontro. Todas as ações deste encontro devem-se aplicar nas duas turmas, a principal e a paralela. Na útlima aula, trazer o desafio:"Dado um quadrilátero qual $ABCD$, temos 2 pontos P e Q em lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Como devemos localizar os pontos R em $\overline{BC}$ e S em $\overline{DA}$ para que possamos construir o quadrilátero de perímetro mínimo $PRQS$?". Esse um caso particular do problema de Fagnano com dois pontos definidos (Figura 12). Dar as dicas:"Construam P e Q em posição arbitrária"; "Analisem as possíveis posições de R e S em separado, seccionando o quadrilátero por um segmento $\overline{PQ}$". O auxílio do professor na situação anterior pode variar de acordo com o reconhecimento do nível de sua turma. É possível optar por simplesmente expor a situação avaliativa sem auxiliá-los em nada. Coletar todo o material produzido ao término deste momento.

Expectativas: Nos primeiros encontros, das atividades de recapitulação e introdução, é esperado que o grupo de estudantes a mostrar domínio ou desenvolver, no decorrer das aulas, as habilidades e competências referentes aos conceitos básicos de distância entre pontos e reflexão de um ponto sobre uma reta, estará apto a compreender a solução de *Heron* e a instrumentalizar, posteriormente, na última avaliação. A expectação quanto à dinâmica de construção do caminho com barbante e outros materiais é de que os alunos não consigam solucionar o problema dentro do tempo determinado, mas a competitividade e o desafio despertem um interesse, os façam prestar atenção na hora da solução da questão de apoio do Anexo A.1 e aí sim, provavelmente, algum discente encontrará a solução. Um menor engajamento e importância é aguardado por parte da turma paralela, que não terá a dinâmica e será diretamente solicitada a solucionar *Heron*. O momento reservado para a história do problema é também no intuito de chamar a atenção do alunado. Após a proposta de criar ou relatar uma situação cotidiana onde verifica-se uma aplicabilidade do problema, é imaginado que a sala principal compreenda melhor ao exigido, pois já lidou com um contexto na dinâmica e dedicou-se mais, se comparado a um estudante paralelo, para assimilar todo o conteúdo trabalhado. Por fim, na avaliação final, a parcela estudantil a tirar mais proveito dos ensinamentos sobre *Heron*, a ser capaz de visualizá-lo em uma circunstância real, tem muitas chances de instrumentalizá-lo nesta última ocasião, e este será o provável desempenho de discentes do grupo principal. Acredita-se que os alunos paralelos, no geral, mostrarão dificuldades pelas limitações de recursos a eles imposta e com consequências esperadas já descritas no decorrer do processo.

Avaliação: É importante ter um cerne de predominância da função formativa da avaliação neste trabalho. Todo o produto escrito dos alunos, seus diálogos durante aulas, sua interação de forma geral com o conteúdo, deve entrar em análise para deliberar sobre a construção das competências e habilidades. Os conteúdos são vistos de forma progressiva e construtiva. No 1º encontro, desenvolve-se um trabalho de introdução, ou talvez reintrodução, de assuntos triviais para os objetivos em questão. Esta etapa avaliativa diz respeito tanto à turma paralela quanto à principal. O alunado deverá demonstrar o mínimo de compreensão sobre o conceito de distância entre dois pontos e reflexão de um ponto sobre uma reta. Para isso, foi criado o Anexo A.1 com situações problema exigindo a utilização destes conhecimentos geométricos e serem obtidas tentativas razoáveis de solução. O 2º encontro, é proposta dinâmica já descrita com o *Problema de Heron* implícito. Toda a produção dos alunos nesta será recolhida, para haver uma verificação sobre sua capacidade de executar um argumento bom com os conhecimentos concebidos, ou até se vão enxergar utilidade neles para isso. É um momento crucial da avaliação, pois a turma paralela não passa pela dinâmica e nem o contexto proposto, apenas pelo problema, isso possivelmente permitirá observar a influência da sequência para a aquisição dos objetivos. Por fim, depois do desenvolvimento de ideias do 3º encontro, aplica-se uma atividade avaliativa final do quarto, que envolve todos os conhecimentos, incluindo o próprio resultado de *Heron*, para averiguar até que ponto vai a compreensão do conteúdo abordado diante da sequência apresentada. Aqui, a turma paralela também estará incluída, ou seja, todas as coletas de produção devem ocorrer também nelas, com os mesmos alvos.

Esta proposta de sequência didática pode sofrer alterações de acordo com a preferência ou necessidade do docente, porém, a dinâmica e meios para avaliar a capacidade de visualizar no cotidiano e instrumentalizar o *Problema de Heron* não podem faltar. A primeira é uma maneira de aproximar o aluno e, considerando apenas o fato de envolver uma demonstração matemática, algo bem incomum e pouco priorizado na educação básica, uma alta dedicação do estudante é necessária para buscar-se um rendimento razoável e a dinâmica é um ótimo caminho para isso. Os dois últimos são indispensáveis, pois o objetivo principal da sequência envolve a instrumentalização e o geral do trabalho busca despertar o reconhecimento de que a otimização pode ser útil no dia a dia. Podem até sofrer alterações na ordem ou forma de abordar, mas suas estruturas devem ser permanentes. Esta é apenas uma maneira de envolver *Heron* em uma sequência didática. A seguir, será vista uma proposta de extensão para ela, agregando outros conteúdos (semelhança de triângulos, por exemplo), mas sem desassociar os trabalhados aqui. Seria ideal aplicá-las a uma mesma turma, pois é mais um exercício de utilizar o problama clássico aqui abordado como ferramenta, de forma acessível a um estudante da educação básica, sem deixar de ser prestativo à matriz curricular deste público.

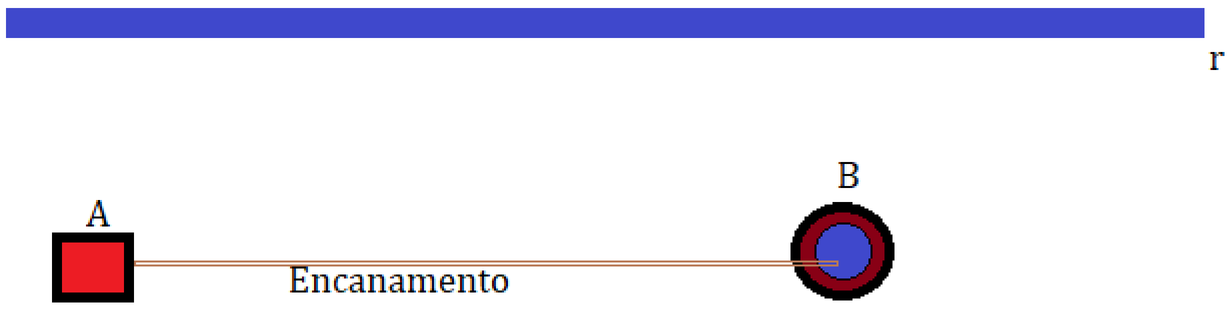
5.2.2 Proposta de extensão alternativa para a sequência didática

Observando alguns problemas de otimização geométrica com triângulos, o autor encontrou aquele onde fixa-se um lado de um triângulo qualquer e é procurada a configuração dos outros dois lados que torna o perímetro deste polígono o menor possível. O resultado é atingido quando se tem um triângulo isósceles, podendo ser obtido através de uma interpretação geométrica remetente ao *caminho de Heron* e deduções de semelhança poligonal.

Notou-se uma possibilidade adaptar o contexto da sequência didática anterior e criar uma nova e complementar àquela, pois ainda envolveria *Heron*, porém agora agregaria também habilidades relativas a semelhança de triângulos, conteúdo normalmente presente no currículo do ciclo básico dos sistemas de ensino. Viu-se ainda que o problema de *Fagnano* para quadriláteros e definindo-se dois pontos do vértice do polígono inscrito (*Teorema 2.2.1*), sendo, o primeiro um retângulo, pode ser solucionado com todas as habilidades almejadas nesta sequência. Por tal motivo, uma versão onde busca-se classificar o quadrilátero inscrito neste problema, o fez figurar como a atividade avaliativa final.

Sobre o contexto abordado nesta sequência didática, pensando na situação problema da dinâmica anteriormente abordada, se for considerado que a Casa (ponto A) e o Poço (ponto B) são interligados por um encanamento reto (segmento $\overline{AB}$) que está em paralelo ao rio, ou seja, os pontos representantes da Casa e do Poço definem uma reta paralela à representada pela margem do Rio (reta r) (Figura 16). Se o professor pretende aplicar esta sequência, independente da anterior, em sua turma, ele deve seguir o mesmo passo a passo dos encontros 1 e 2 antes de começar o 5º, pois o contato com *Heron* e as definições de distância e reflexão sobre uma reta fazem-se necessários, respeitando obviamente as atibuições desterminações das turmas paralela e principal e executando a dinâmica de grupo com a circunstância específica ilustrada e descrita na Figura 16. Se for pretendido aplicar esta sequência posteriormente à proposta anterior, este reconhecimento do *caminho de Heron* já terá sido feito antes e as atividades poderão ser iniciadas partindo dos conteúdos do 5º encontro.

Figura 16 – Casa, Rio, Poço e Encanamento



Fonte: Produzido pelo autor

Todas informações envolvidas nesta sequência foram devidamente demonstradas nas Seções 2.1 e 2.2, mais especificamente no *Corolário 2.1.1.1* e *Teorema 2.2.2*.

DESCRIÇÃO DA EXTENSÃO ALTERNATIVA

Tema: A distância entre dois pontos, Reflexão de um ponto sobre uma reta, *Problema de Heron*, semelhança de triângulos e identificação de quadriláteros;

Público alvo: Sala do 2º ano do ensino médio;

Duração: 13 aulas, 8 aulas para aplicação da sequência original (divididas em 4 encontros) e mais 3 encontros, 2 aulas para os dois primeiros encontros da extenção e o último com 1 encontro para o momento avaliativo geral;

Disciplina: Matemática;

Objetivos gerais: Além da aquisição dos objetivos relativos a reflexão, simetria e distância entre dois pontos , inclui-se semelhança de triângulos;

Objetivos específicos :

1. Dominar os métodos de verificação da semelhança entre triângulos;
2. Utilizar os métodos dominados no último objetivo para resolver a situação específica do problema de Heron abordada.

Material: Quadro branco e marcadores, objetos de medição de comprimento (Réguas, trenas e fitas métricas), transferidores, barbantes, fitas coloridas de diferentes cores (uma para cada grupo) e garrafas pet com areia;

Descrição das atividades:

No intuito de dar recursos ao professor ou pesquisador para analisar a funcionalidade desta extensão alternativa da sequência didática, é proposto aplicar alguns passos descritos com uma turma diferente e em paralelo com o trabalho principal ou a mesma, porém previamente a aquele, no decorrer da descrição dos encontros. Para referir-se a esta turma, o autor normalmente a chamará de turma paralela. Considere as atividades do 1º ao 4º encontro da sequência original as mesmas para a possível opção de aplicação desta extensão. Seguem, agora, as atividades posteriores:

5º encontro: Trazer o conceito de semelhança entre dois polígonos, abordando a proporção e mostrando alguns exemplos de triângulos semelhantes e as formas de identificar e classificar quadriláteros notáveis. Em seguida, abordar os critérios usados para identificação da semelhança entre dois polígonos de 3 lados, congruência e a relação entre as duas. Aplicar ficha de atividades do Anexo A.2 para verificar as habilidades e competências dos alunos relativas a esses assuntos. Auxiliar ao máximo os estudantes no momento de resolução. Nos 20 minutos finais, corrigir a ficha no quadro, após recolher toda a produção do alunado. Todas as atividades deste encontro devem ser feitas também na turma paralela.

6º encontro: Na primeira aula, apresentar o problema abordado na introdução do tópico e descrito na Figura 16. Propor uma representação geométrica da situação, como feito anteriormente, considerando a casa e poço como pontos, o rio como uma reta e, agora, o encanamento como um segmento de extremos casa e poço. Indagar: "Agora, como já se sabe onde deve ficar o ponto para o caminho feito ser o menor possível, resta saber, dos caminhos Casa-Rio e Rio-Poço, qual deles é maior?"(Solucionado no Capítulo 2. O problema do triângulo de perímetro mínimo com um lado fixado (*Corolário 2.1.1.1*) responde isto: Os dois percursos são iguais, pois o triângulo é isósceles). Dar um tempo para o surgimento de ideias. Passado o período, estimular os estudantes a exporem suas construções e conduzir a partir disso a resolução correta da situação, pelo método de semelhança. Mostrar à turma que os percursos serão iguais. Neste encontro, as atividades até este ponto descritas não devem ser aplicadas à sala paralela. O restante delas deve. Mostrar aos discentes o teorema "Fixado um dos lados do triângulo, o de menor perímetro será isósceles"e a solução exposta como resultado disso. Na turma paralela, o teorema deve ser trabalhado, mas o contexto não. Coletar todo o material gerado pelos alunos ao fim do encontro.

7º encontro: Aplicar a atividade avaliativa, tanto na turma principal como na paralela: Será proposto o mesmo do caso específico do problema de *Fagnano*, como visto, porém com mais especificidades, "Dado um quadrilátero retângulo $ABCD$ como pontos P em $\overline{AB}$ e Q em $\overline{CD}$ de forma que $\overline{PQ}//\overline{BC}//\overline{AD}$. Além disso, P e Q são pontos médios, como na Figura 17. Se pusermos os pontos R em $\overline{BC}$ e S em $\overline{AD}$ de forma que o quadrilátero $PRQS$ seja o de menor perímetro possível interno a $ABCD$, $PRQS$ será regular? Se sim, qual quadrilátero regular é ele?". Esperar que os discentes usem como ferramenta o resultado do teorema visto no encontro anterior para deduzir $|\overline{PR}| = |\overline{RQ}| = |\overline{QS}| = |\overline{SP}|$, ou seja, o quadrilátero $PRQS$ é, no mínimo, um paralelogramo. Ao fim do encontro, coletar todo o material produzido pelos participantes.

Figura 17 – Quadrilátero $ABCD$

Fonte: Produzido pelo autor

Expectativas: No primeiro encontro, em contato com o conteúdo trivial, é esperado que uma parte significativa do alunado já tenha trabalhado minimamente o assunto, porém uma parte deles tenha dificulades em demonstrar a semelhança entre dois triângulos, estabelecer as relações de proporcionalidade e encontrar medidas de segmentos ou lados, manipulando tais relações. Porém, após a finalização das atividades deste encontro, tal grupo de alunos diminua, mas não se extinga. Os estudantes a não desenvolverem-se nas habilidades citadas até o fim deste primeiro momento de recapitulação, não consigam concluir o desafio do 6º encontro. Se a turma em questão tiver passado pela 1ª sequência didática, provavelmente parte dela conseguirá, ao menos, esquematizar geometricamente a situação problema e aplicar o caminho de Heron, pois já o fizeram ou observaram ser feito naquela. Se não for o caso e esta sequência estiver sendo aplicada parcialmente independente daquela, espera-se que uma parcela pequena consiga envolver *Heron* para solucionar o desafio do segundo encontro desta extensão. Portanto, os participantes que vivenciaram a sequência anterior têm uma vantagem. Das turmas paralelas, aguarda-se o mesmo desempenho da principal, nos dois primeiros encontros. Porém, no 7º encontro, a expectativa é de que a principal, por conhecer um contexto unido à definição formal do *Corolário 2.1.1.1*, o compreenda mais sua aplicabilidade e traga melhores resultados na atividade avaliativa final. É muito provável uma grande recorrência de estudantes a não conseguir concluí-la na turma principal por não identificar como paralelogramo o quadrilátero inscrito de perímetro mínimo, mas, eles, em quantia superior à sala paralela, atingirão o fato de todos os lados deste polígonos serem congruentes, ou seja, chegarão mais perto do que os integrantes daquela.

Avaliação: O cerne formativo da avaliação deve ser mantido. No 5º encontro, é aplicada e coletada após produção uma ficha voltada a retornar ao professor o patamar de desenvolvimento das habilidades e competências do alunado relativo a semelhança entre polígonos, desde seu conceito elementar até a utilização dos métodos de semelhança entre triângulos para solucionar situações problema. Este momento de verificar a compreensão do básico é indispensável, tanto para a turma paralela quanto para a principal, pois a limitação do desenvolvimento por parte dos estudantes, muitas vezes, está atrelado a uma bagagem necessária, a qual ele pode não ter. Se este for o caso, os feitos do 5º encontro revelarão. No 6º encontro, apresenta-se o contexto para o alunado entrar em contato com uma abordagem real do problema proposto de fagnano com dois pontos definidos. Lembrando, a contextualização é apenas com a turma principal. Na turma paralela, o problema principal deve ser abordado apenas formalmente. Momento avaliativo crucial, pois permite verificar a influência da contextualização seguida da formalização da proposição, se comparada apenas com a abordagem formal, na compreensão e construção da solução. No 7º encontro, a última avaliação é comum a todas as turmas e permite observar se o suposto aprendizado dos momentos anteriores foram adquiridos e estão bem conectados, pois é possível usar o "triângulo mínimo" e recursos de semelhança de triângulos para solucionar a avaliação final, da forma que está explicada na descrição do encontro. O discente não obter, por completo, êxito neste momento da sequência não define uma nula evolução, pois o processo é construtivo e o estudante pode ter atingido um nível mais baixo porém mais alto em relação ao princípio. Ele pode apenas não ter conseguido fazer de ferramenta as construções atingidas, para tal ocasião.

Esta proposta de extensão da primeira sequência didática, como foi dito, pode ser aplicada parcialmente independente daquela. Recomenda-se que ambas sejam executadas, para consolidar a instrumentalização do *Problema de Heron*. O professor pode mudar os métodos avaliativos, mas não convém o fazer aos objetivos e os desafios envolvendo o *Problema de Fagnano*, pois este primeiro contato é importante para possibilitar uma melhor conexão entre esta e a próxima proposta, qual é construída em torno deste problema.

5.2.3 Contextualizando e solucionando o Problema de Fagnano-Schwarz

Estudando o *Problema de Fagnano-Schwarz* em quadriláteros, abordado em Brito (2013), a partir da página 36, o autor percebeu que, fixando dois vértices do polígono inscrito em lados opostos do outro quadrilátero, é possível solucioná-lo apenas com o resultado de *Heron*, como foi feito na proposta de extensão alternativa da sequência passada. Porém, notou que isto só se tornava possível se existissem dois pontos fixados. Mas o método de *Schwarz* para resolver o problama original *Fagnano* (sem vértices do polígonos fixados), apesar de ter uma construção nada indutiva, utilizava apenas conceitos de reflexão de polígonos sobre seus lados, distância entre dois pontos e comprimento de linhas poligonais.

Considerando o fato de boa parte destes conteúdos envolvidos, já estarem dentro da sequência didática anterior ou poder ser alcançados através daqueles (no caso, conseguir refletir um polígono sobre seus lados é possível, conhecendo-se a definição de reflexão de um ponto sobre uma reta e isto é trabalhado na Subseção 5.2.1), tornou-se plausível a ideia de confeccionar uma sequência didática com contextos em torno dos dois problemas.

Buscando meios pra tornar esta sequência didática mais interessante, o autor idealizou uma história em quadrinhos onde a personagem principal se depara com o problema de *Fagnano* em uma situação cotidiana, para ser trazida à sala de aula: Bonifácio, o jovem protagonista, trabalha distribuindo almoços em uma praça triangular, percebe estar tendo um desgaste grande em sua jornada profissional e começa a pensar em meios para minimizar o percurso percorrido, o qual ele faz por dentro da praça. O desafio de Bonifácio será introduzido à turma principal como um meio para interagir com *Fagnano* e solicioná-lo pelo método de *Schwarz*.

Esta sequência é independente das duas anteriores, porém, pode ser aplicada aproveitando o que foi trabalhado naquelas, como as definições de distância entre pontos e reflexão de ponto sobre reta, além da abordagem do *Problema de Fagnano* ser feita em atividades avaliativas de ambas. Portanto, se o professor optar por aplicar apenas esta sequência em sua turma, pode o fazer seguindo apenas os passos da descrição dos encontros desta subseção.

Todos as definições, teoremas, corolários e proposições desta proposta estão devidamente demostrados e solucionados na Seção 2.2, mais especificamente, em toda seção, exceto no conteúdo da Subseção 2.2.1.

DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Tema: Distância entre dois pontos, reflexão de um polígono sobre seus lados, rotação de um polígono por reflexão e problema de Fagnano-Schwarz;

Público alvo: 2º ano do Ensino Médio (Podendo ser aplicado no 7º ano do Ensino Fundamental Anos Finais, em dependência do nível da turma);

Duração: 5 encontros, 4 com 2 aulas e 1 com 1 aula para aplicação do momento avaliativo;

Disciplina: Matemática;

Objetivo geral: Utilizar o conhecimento de distância entre dois pontos e reflexão de um polígono sobre seus lados para resolver o problema de Fagnano pelo método de Schwarz;

Objetivos específicos :

1. Compreender que a distância entre dois pontos é um segmento de reta que os une;
2. Compreender que o simétrico de um polígono sobre um de seus lados é a reflexão de todos os seus pontos e outros lados sobre o mesmo lado;
3. Dominar diferentes formas construir o reflexo de um polígono sobre um de seus lados;
4. Dominar o método de refletir o polígono sobre todos os seus lados;
5. Compreender a resolução de Schwarz para o problema de Fagnano.

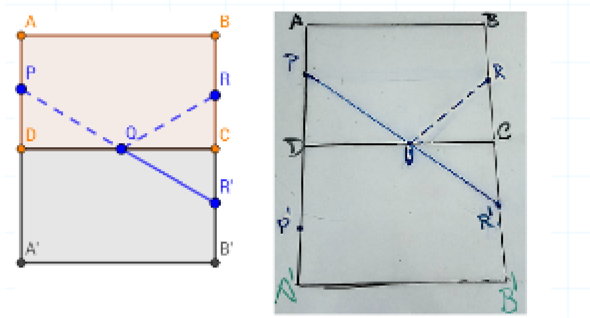
Material: Computadores com Geogebra instalado e projetor ou papelão (para fazer construções manuais se utilizando deste e dos materiais consequentes), esquadro, transferidor, régua, tesoura, quadro branco e marcadores de cores diferentes, se possível, além de esquadro, transferidor para quadro e HQ "Otimizando Caminhos"(Anexo B), produzido pelo autor.

Descrição das atividades:

1º Encontro: Introduzir em slides ou quadro branco, a aula com uma pergunta sobre qual o menor caminho que podemos fazer de um ponto para outro e, posteriormente, trazer o conceito de distância entre dois pontos. Em seguida, relembrar os conhecimentos sobre reflexão de um ponto sobre uma reta para definir a reflexão de um polígono qualquer sobre um de seus lados como a reflexão de todos os seus pontos sobre a reta suporte do lado "espelhado" da situação. Garantir que existem, na sala, transferidores, réguas e esquadros suficientes para todos os estudantes os utilizarem dentro do tempo determinado (isto no caso de rodízios de material se fazerem necessários pela escassez). Explicar o passo a passo da construção do reflexo de um ponto sobre uma reta utilizando os materiais citados. Propor o mesmo processo para um polígono sobre um de seus lados, baseando-se naquele processo. Apresentar exercícios de construção para toda a turma (Anexo A.3), coletando, ao fim do tempo, todo material produzido. Todos os passos deste encontro devem ser também aplicados à turma paralela.

2º Encontro: Relembrar o trabalho do encontro passado e resolver no quadro as questões propostas nele, buscando finalizar as dúvidas dos discentes ao máximo. Abrir o Geogebra e garantir que a turma faça o mesmo em seus respectivos computadores ou celulares. No programa, ensinar aos alunos como executar uma reflexão de polígono sobre um de seus lados. Propôr a construção de um quadrilátero aleatório e, em seguida, a reflexão dele sobre um de seus lado. Construir segmento no reflexo poligonal e desafiá-los a fazer o mesmo no polígono original, ou seja, refletir segmentos internos ao polígono em seu reflexo (Figura 18 (a)).

Figura 18 – $\overline{QR}$ refletido em $\square A'B'CD$



a) b)

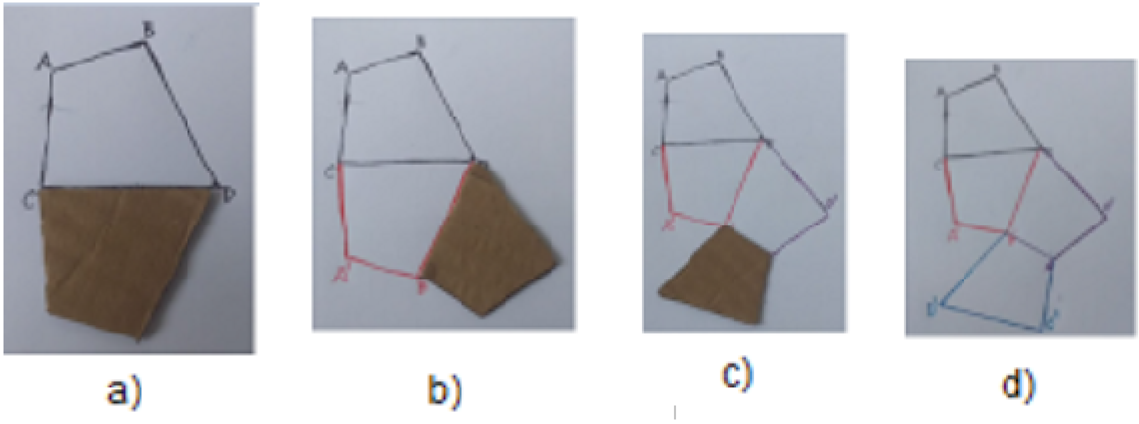
Fonte: Produzido pelo autor

Se a escassez de recursos impedir o acesso à tecnologia em questão: distribuir pedaços de papelão ou qualquer recurso de espessura considerável, facilmente cortável e biodegradável, confeccionar com toda a turma o "quadrilátero qualquer"neste material, utilizando as réguas e outros materiais, junto aos estudantes, considerando a necessidade daquele ter pequenas proporções, visando sua função como parâmetro na produção das reflexões em folha de caderno (Figura 18 (b)). Em seguida, guiá-los a executar reflexões em lados consecutivos, como feito na demonstração de *Schwarz*. Garantir o porte do utensílio produzido por parte dos participantes e ensinar, no quadro, como funcionará tal método.

- Decalcar o polígono original tendo o quadrilátero confeccionado como base;
- Para refleti-lo sobre um de seus lado, fixar este no quadro e girar a peça pondo sua outra face sobre a lousa e o contornando com o marcador como mostram as Figura 19 (a);
- A repetição do processo é padrão para lados consecutivos (Figuras 19 (b), (c) e (d)).

Isto possibilita a aprendizagem de outro método. Se o professor ou pesquisador achar concebível, os dois caminhos podem ser trabalhados para munir ao máximo os participantes de formas de executar estas produções geométricas. Na turma paralela, tanto o método do geogebra quanto o alternativo não devem ser aplicados. Se deve apenas utilizar o método tradicional com materiais de medição e construção (régua, transferidor e esquadro, neste caso). Ao fim de tudo, desafiá-los a descobrir o *Segmento Ideal* (o definindo da mesma forma que no Capítulo 2). Este desafio também deve ser posto para a turma paralela.

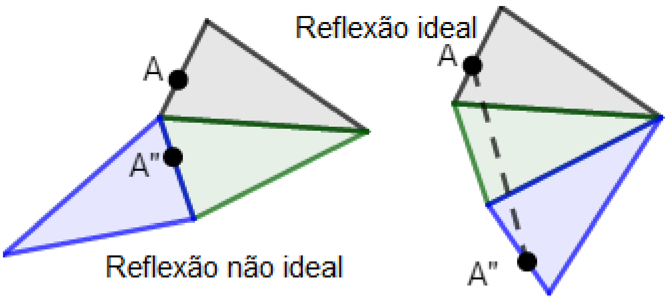
Figura 19 – Construção manual



Fonte: Produzido pelo autor

3º Encontro: Recapitular o conteúdo do último momento e solucionar o desafio feito: trazer à sala, a busca pelo conjunto de reflexões ideais, ou seja aquela onde pode-se traçar um segmento que passe por todo lado ou o reflexo de cada um deles e termine no reflexo do ponto onde foi iniciado, como na Figura 20, o exemplo e o contraexemplo.

Figura 20 – Reflexões não ideal e ideal

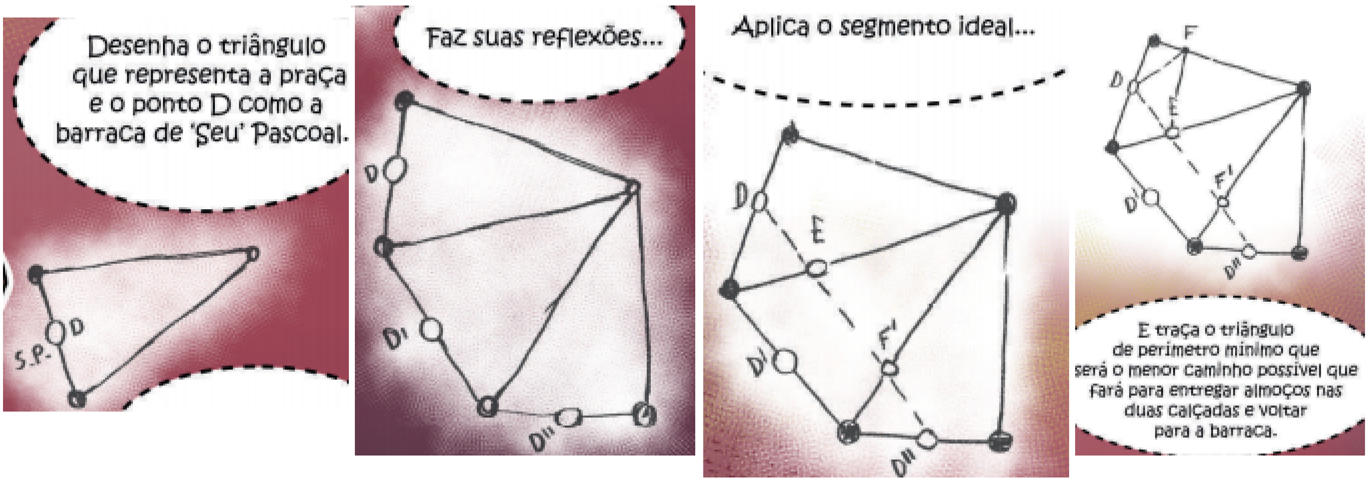


Fonte: Produzido pelo autor

Ou seja, qualquer lado do polígono ou ao menos o seu reflexo deve ser cruzado pelo segmento ideal uma vez, com exceção do lado qual contém o ponto inicial. Este será cruzado no início e seu reflexo será no fim do segmento. As reflexões ideais devem permitir esta construção.

É possível também exemplificar uma sequência reflexiva com tal configuração na Figura 11, no Capítulo 2. Isto também deve ser aplicado à turma paralela. Posteriormente, apenas para a turma principal, trazer a HQ prevista (Anexo B) até o momento em que a personagem principal lida com a situação problema, ou seja, deixando registrado para os discentes que: "Bonifácio trabalha destribuindo almoços na praça Risoflora. Ele coleta todos os almoços no ponto D (barraca de 'Seu' Pascoal) e tem de entregar para grupos de clientes, cada um vem buscar em uma calçada da praça, sem ser a da barraca. Bonifácio faz as entregas andando por dentro da Risoflora para encurtar o caminho. Buscando tentar diminuir ainda mais o caminho, ele deseja marcar com uma bandeira um ponto no chão de cada calçada que os clientes lhe esperam todo dia e solicitar a eles o posicionamento diante de tais bandeiras, de forma a tornar o percurso o mais curto possível. Dessa forma, como ele deve localizar estas bandeiras?". O mapa da situação é observado na Figura 22. Solicitar aos estudantes a tentativa de solução. Se não chegarem ao resultado, dar a ideia de tentarem utilizar o problema resolvido na primeira aula para ajudá-los. Coletar a produção da turma. Encerrar a aula lendo o restante da HQ com a turma para apresentá-los a solução de Bonifácio (Figura 21) e o fim da história. Reiterando: A história em quadrinhos e a situação problema não devem ser apresentadas na turma paralela.

Figura 21 – Bonifácio solucionando o problema de *Fagnano*



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 22 – A praça Risoflora

Fonte: Produzido pelo autor

4º Encontro: Iniciar a aula relembrando a situação problema trazida e a solucionando mais uma vez. A resolução pode ser feita tanto pelo Geogebra quanto pelo método alternativo, no quadro. Apresentar o problema de Fagnano e compará-lo à circunstância geométrica do problema resolvido. Mostrar a resolução de *Schwarz*, como na *Proposição 2.1* do Capítulo 2, trazendo uma pequena abordagem histórica: Quem são os matemáticos envolvidos, o ano da produção exposta e nacionalidade, ao menos. Isto deve ser feito também na turma paralela. Propor a ficha do Anexo A.4, para o avaliar a capacidade do alunado de trazer o resultado do problema abordado para a realidade. As atividades deste encontro deverão ser também feitas com a turma paralela.

5º Encontro: Neste encontro, terá o momento avaliativo final. Aqui existem duas alternativas:

- 1ª alternativa: Aplicar o seguinte desafio: "Dado um quadrilátero qualquer $ABCD$, construa o quadrilátero $PQRS$ de forma que cada vértice deste pertence a um lado daquele e $PQRS$ tenha o mínimo perímetro". Informar ser tal proposição uma extensão do problema de Fagnano para quadriláteros;

- 2ª alternativa: Propor aos alunos a criação de uma história em quadrinhos manual, sobre alguma situação onde a solução de Schwarz pode ser útil. A escolha feita deverá servir tanto à turma paralela quanto à principal. Recolher o material produzido ao fim do encontro.

Expectativa: No dois primeiros encontros, é esperado que boa parte dos alunos não saibam fazer construções, tanto em Geogebra quanto com os materiais, a não ser se tiverem vivenciado a primeira sequência didática, onde, nos momentos iniciais, são trabalhadas construções de reflexões de pontos sobre retas. Ainda sim, provavelmente sentirão dificuldade em as fazer no aplicativo se não tiverem um conhecimento prévio dele. Mas, o número de indivíduos a conseguir compreender e executar as construções ao fim deste encontro provavelmente vai ser satisfatório. Aqueles que não conseguirem desenvolver estas habilidades, certamente terão um desempenho quase nulo no restante da sequência. Até este instante, a expectativa sobre as turmas paralela e principal são as mesmas. No terceiro encontro, após apresentar a HQ e trabalhar a solução de *Schwarz*, provavelmente esta última será melhor assimilada pelos estudantes da sala principal, se comparados aos da paralela, os quais terão contato apenas com resolução formal e sem contexto. Além disso, provavelmente, quem viu o resultado do problema aplicado na situação da HQ tem alguma referência para criar uma nova circunstância com esta mesma informação, como é avaliado na ficha do 4º encontro. No momento avaliativo final, se o professor escolher a 1ª alternativa, deve esperar que os alunos da turma principal apliquem bem as reflexões e o segmento ideais, pois a HQ (Anexo B) explica bem isso, além de ter sido construído em aula. A turma paralela, por não ter tido contato com a ludicidade, apenas com a formalidade, trará resultados menos satisfatórios. Se a 2ª alternativa for a opção, provavelmente a HQ criada pelos integrantes da turma paralela fique menos coesa e muitos nem consigam idealizar ou executar nada. Isto pode até acontecer com o outro grupo, mas com menos incidência, pois, como já dito, estes têm uma referência de contexto para criar o seu. A coesão também pode ser um problema recorrente aqui, porém eles produzirão mais.

Avaliação: O cerne formativo da avaliação deve ser mantido. No 1º encontro, o conteúdo do Anexo A.3 verifica a compreensão elementar de habilidades relativas a construções de reflexos de polígonos sobre seus lados. No 2º e 3º encontros, o desafio introduzido no fim daquele testa a capacidade do alunado construir o segmento ideal já citado e indispensável para a solução de Schwarz, após a aplicação da HQ (turma principal) ou sem ela (turma paralela). No Anexo A.4, como já dito, verifica-se a capacidade do discente compreender o problema de Fagnano-Schwarz como uma ferramenta em diferentes situações, como a construída na 1ª questão deste mesmo anexo. A segunda questão deste documento busca trazer um suposto resultado numérico para a consolidação da vantagem aplicada de conhecer o problema trabalhado. No último encontro, deve-se escolher entre, avaliar a condição de o estudante aplicar *Fagnano-Schwarz* em um quadrilátero, utilizando todas as habilidades e competências agregadas a esta sequência, ou de criar e/ou relatar um contexto onde a solução de Schwarz funcione, porém, usando outros polígonos, possibilitando ver o quanto de conteúdo o estudante assimilou deste trabalho e se consegue utilizar sua aquisição intelectual para uma experiência real. Ambas habilidades são testadas em outros momentos da sequência, por exemplo, no Anexo A.4, mas se o professor ou pesquisador desejar aplicar as duas, não há problemas, mas o autor recomenda adaptar a sua sequência didática para ter 6 encontros. Vale salientar que todos os processos de construção, tanto manual quanto digital, devem ser precisamente acompanhados, porque eles também estão sendo avaliados e qualquer dificuldade apresentada também deve ser registrada para auxiliar em um relatório final.

Nesta proposta de sequência didática, é indispensável proporcionar meios para todos os alunos conseguirem participar das atividades de construção, pois se não ocorrer, o processo de ensino e aprendizagem é inviabilizado por não se ter chance de desenvolver algumas habilidades almejadas com todo o público. Novamente, não convém alterar os objetivos avaliativos, porém os meios de avaliação podem sofrer alterações. É possível e recomendável aplicar estas três primeiras propostas de sequência didática com a mesma turma, pois se isso for feito respeitando a ordem de apresentação, elas conectam-se e podem fazer um bom trabalho de exploração e instrumentalização dos problemas de *Heron* e *Fagnano-Schwarz*, sem deixar os conteúdos do currículo do Ensino Básico de fora. A próxima sequência não tem relação direta com elas, também envolve um problema clássico da otimização geometrico, porém é montada não com a intenção de torná-lo (O problema de Dido) um instrumento para ser usado em outras ocasiões, mas funcionando como objeto de análise e gerando outra situações que, estas sim, serão exploradas no decorrer dos encontros, além disso, servirá, principalmente, como referência para a identificação de casos cotidianos onde pode-se verificar a otimização.

5.2.4 Vamos ajudar a Princesa Dido

Em pesquisa sobre problemas isoperimétricos, o autor deparou-se com o problema da princesa Dido, encontrado na obra *Eneida*, de Virgílio, e percebeu que já havia tido contato com uma situação similar, porém em outro contexto, quando tentava imaginar a maior área possível de ser delimitada com uma corda. Encontrar esta solução exige um conhecimento fora de alcance para o aluno médio do Ensino Básico, porém, durante esta sua busca, o autor encontrou problemas acessíveis de comparação de área entre polígonos isoperimétricos, envolvendo habilidades relativas a funções quadráticas e algoritmos de área de polígonos regulares como será visto, relacionáveis à circunstância.

O contexto do problema de Dido é bastante abrangente, pois o fato de ela fundar a cidade com abertura para o rio e querer abranger um território máximo envolve questões de outros campos do saber, como fertilidade de um solo ribeiro ou mobilidade potencializada pela saída para águas movimentadas, o que permite a interdisciplinaridade. Unindo estes fatos, concluiu-se que seria de grande valia confeccionar uma proposta de sequência didática com o tema, adaptando apenas a história para gerar desafios possíveis para o alunado.

A sequência didática foi construída sob o contexto da história de Dido e a fundação de Birsa, algo que pode ser bastante atrativo ao aluno, pois, a princípio, parece apenas uma brincadeira de construir a maior cidade. Com diálogos fictícios, os seguidores da princesa deliberam sobre a curva fechada ideal para satisfazer a vontade dela, comparando áreas de polígonos isoperimétricos. Além de trabalhar conteúdos tanto de álgebra quanto de geometria, esta sequência também buscará dar ao aluno a desigualdade isoperimétrica como ferramenta para ocasiões reais.

Os informações dessa sequência foram construídas em forma de proposição, na Seção 2.3.

DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Tema: Comprimento de uma circunferência, perímetro de polígonos, área da circunferência e do retângulo, área máxima do retângulo, função quadrática, o problema de Dido;

Público alvo: 3º ano do ensino médio ou 1º ano do ensino médio, a depender do nível dos alunos;

Duração: 4 encontros, com 2 aulas cada.

Disciplina: Matemática;

Objetivo geral: Compreender a existência e as soluções de problemas envolvendo relações isoperimétricas de área a partir de situações adaptadas do problema de Dido;

Objetivos específicos :

1. Tomar conhecimento sobre o que é uma relação isoperimétrica;
2. Compreender a modelagem da proposição do retângulo de máxima área utilizando função de 2º grau e suas características no gráfico;
3. Compreender o potencial causado pela igualdade de perímetro entre dois polígonos de diferentes quantidades de lados: Com substituições sistemáticas, deixar a área de ambos em função de um mesma variável, possibilitando uma comparação de área;
4. Manipular fórmulas de área de polígonos regulares de mesmo perímetro para comparar aquela grandeza entre estes dois;
5. Compreender a melhor solução para o problema de Dido e refletir sobre os motivos pelo qual não adotou aquela, mesmo aparentando a conhecer;

Material: Quadro branco e marcadores, ficha de exercícios, computador e projetor;

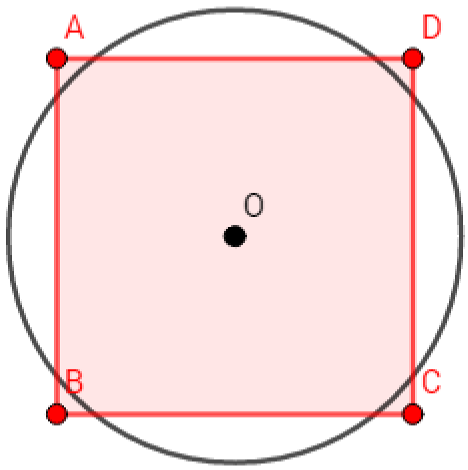
Descrição das atividades:

1º Encontro: Relembrar aos alunos a estrutura algébrica de uma função quadrática, as características da parábola em dependência dos termos da função, suas raízes e máximo ou mínimo. Aplicar alguns exercícios para trabalhar estes conceitos (Anexo A.5). Introduzir a história da princesa Dido até o momento em que ela recebe o couro de um boi para demarcar a superfície da sua futura cidade. Perguntar aos alunos como eles fariam isso e ouvir suas ideias. Depois de expostos e discutidos os pensamentos, revelar como a personagem principal resolveu cortar o couro. Apresentar o questionamento sobre qual maneira os filetes devem ser organizados para sua cidade ter área máxima. Adicionar situações à história:"Um indivíduo presente aproxima-se e diz - Que tal se construirmos um retângulo não quadrado, ou seja, seus quatro lados não podem ser congruentes, com lados medindo a e b? - Aí então outra pessoa chega e diz - Não, se construirmos um quadrado de lado l com este mesmo comprimento, a área será maior". Questionar aos alunos quem está certo e o porquê. Esta situação deve ser apresentada para a turma paralela apenas como a *Proposição 2.3*. Nada do contexto da Princesa Dido deve ser apresentado aqui. Coletar o material produzido nos exercícios e problema aplicados.

2º Encontro: Retomar o questionamento final do último encontro e trazer sua resolução. Em seguida, mostrar a *Proposição 2.3* e solucioná-la para ambas as turmas.

Na principal, deve-se fazer uma conexão entre seu resultado e a situação problema do encontro passado. De forma didática, concluir para os estudante: "Se tivermos uma corda e quisermos demarcar um espaço retangular no chão, ele vai ser o maior possível se tiver um formato quadrado, ou seja, todos os seus lados devem ser iguais". Apresentar um material com algumas questões de recapitulação sobre área de polígonos e círculos e a manipulação de seus algoritmos Anexo A.6. Trazer de volta os discentes para o contexto histórico abordado: "Surge uma terceira pessoa no grupo de ajudantes da princesa Dido iniciando uma nova discussão - O quadrado é o de maior área entre os retângulos, porém, eu tenho certeza que um círculo com este mesmo comprimento delimitaria uma área ainda maior!". Desafiar o alunado a testar a informação dada pela última personagem. Respeitar um tempo para o desenvolvimento de ideias e, passado este, coletar suas soluções e resolver a proposição. Apresentar e solucionar a *Proposição 2.4* (mostrar a Figura 23, onde temos um quadrado e uma circunferência de comprimentos aproximados (Lado do quadrado medindo 2cm e raio da circunferência $\frac{2}{\pi}$cm, por exemplo) e é notória a superioridade da superfície demarcada pela última). Questionar se a solução feita há pouco resolve a proposição. Concluir informando à sala que o círculo é de fato a curva fechada a limitar uma maior área, mesmo as demonstrações feitas não sustentando isto, pois elas só consolidam esta desigualdade isoperimétrica entre cículos e retângulo. Na turma paralela, não se deve abordar a história da princesa Dido nem nada sobre seu contexto subsequente. Apenas falar das proposições do retângulo de máxima área e do círculo e quadrado de mesmo comprimentos tendo o primeiro a maior área, trazendo as mesmas demonstrações da sequência original, mas sem as incluir naquele contexto;

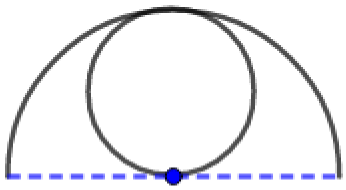
Figura 23 – Circunferência e quadrado isoperimétricos



Fonte: Produzido pelo autor

3º Encontro: Na turma original, retomar os resultados e os meios de obtenção dos últimos 2 encontros e revelar a escolha final de Dido: Ela construiu a cidade de Brisa, entres os mares Terreno e Mediterrânea, delimitando uma aproximada semicircunferência, onde o rio o serviria como o limite do diâmetro. Utilizar recursos imagéticos, considerando o Geogebra ou Paint, a exemplo, como ferramentas, para mostrar que a semicircunferência encostada no rio demarca uma área maior até mesmo se comparada a uma circunferência, pois o rio serve como um limite e o couro de boi seria poupado (Figura 24, a semicircunferência e a circunferência mostradas são isoperimétricas) onde é notória a diferença de área delimitada entre Dido e a curva fechada que atinge a maior área (o círculo). Esta imagem deve ser mostrada à turma.

Figura 24 – A decisão de Dido



Fonte: Produzido pelo autor

A partir daqui, todas as atividades devem ser aplicadas apenas à turma principal, até o término do encontro. Trazer exemplos de cidades que têm uma construção similar à solução de Dido, no caso, Colônia, na Alemanha e Paris, na França (Figura 25).

Figura 25 – Mapas de Paris e Colônia

mapa de Paris mapa de Colônia

Fonte: Souza (2012)

Perguntar a todos sobre as vantagens de se contruir uma cidade à beira do rio e as desvantagens também, promovendo uma troca com conteúdos interdisciplinares, a saber, geográficos, biológicos e históricos. Solicitar a criação de uma situação onde o conhecimento obtido neste problema possa ser utilizado como ferramenta. Coletar tudo ao fim do encontro. Com a turma paralela, apenas a atividade avaliativa deve ser trabalhada, tendo apenas apresentado a eles o resultado formal do problema isoperimétrico trabalhado, mantendo a omissão do contexto abordado com o alunado principal.

4º Encontro: Aplicar a segunda atividade avaliativa (Anexo A.7) e a recolher ao fim de tudo. Isso também deve ser feito à turma paralela.

Expectativas: No primeiro encontro, é esperado encontrar, mais do que no momento de recapitulação das outras propostas de sequência didática, uma recorrência maior de dúvidas e limitações por parte do alunado, pois função quadrática é um conteúdo normalmente problemático no processo de ensino e aprendizagem. Aqui, talvez o ocorra a maior incidência de participantes com baixo desempenho por defesagem nas habilidades elementares da sequência, em ambas as turmas. O contexto criado pelo autor para o primeiro problema proposto, tem potencial de captar a atenção do aluno, principalmente por os obrigar a pensar como demarcar um território com couro boi, uma situação inusitada e desafiadora. Como o contexto não construiu nada para dar base à solução do primeiro problema, até o momento, a única diferença esperada de comportamento entre a turma principal e a paralela é o engajamento dos alunos. Lembrando, os integrantes desta apenas interagem com um problema formalizado. No 2º encontro, do novo desafio trazido, espera-se o mesmo de antes: a vantagem entre os dois grupos de alunos é o fato de os que estão vivenciando a história de Dido e a trama fictícia estarem, provavelmente, mais interessados. Agora, no 3º encontro, o momento de interdisciplinaridade é uma experiência a parte. Portanto, não tem como fazer um pareativo, muito menos esperar alguma resposta da turma paralela neste quesito, pois eles não tiveram contato algum com a história. Iste serve para mostrar quão indispensável é um contexto para conceber a interdisciplinaridade. Na atividade avaliativa final do Anexo A.7, as duas primeiras questões aguardam muitas dificuldades de solução por parte do alunado, mesmo com exercícios similares tendo sido feitos nos momentos anteriores, porém, como a turma principal, supostamente, teve maior dedidação em todo o processo, terão melhor desempenho nelas. Na 3ª questão, esta disparidade entre os dois grupos de aluno será mais exposta, pois, novamente, os integrantes da sala paralela não tiveram referência de situações reais com desigualdade isoperimétrica. Por isso, se espera uma coesão e produtividade maior da turma principal na criação ou identificação destes contextos.

Avaliação: Conserva-se um cerne formativo, assim como no sistema avaliativo das outras sequências. No 1º encontro, em um trabalho de revisitar as competências e habilidades relacionadas a funções de 2º grau e suas características no gráfico além de utilizá-las como ferramenta em algum contexto, aplica-se o Anexo A.5, sendo estes conhecimentos elementares para o trabalho desta sequência. Ainda neste momento, as afirmações feitas pelas personagens fictícias na história de Dido servirão de desafio para o alunado testar suas ideias e a capacidade de manipular informações sobre a função quadrática e seu gráfico para a solução de um contexto, neste caso a comparação isoperimétrica de área entre um quadrado com um retângulo não quadrado. No 2º encontro, deve ser feita um revisitação também no conteúdo de área de polígonos e cículos (Anexo A.6). Este servirá especificamente para verificar a capacidade de manuseio do indivíduo com os algoritmos de área das superfícies citadas e sistemas de equação gerados por eles. Isto é indispensável para lidar com a próxima situação problema no mesmo encontro: a comparação isoperimétrica de área entre um círculo e um quadrado. Além de avaliar as habilidades já ditas, estas dicotomias contextualizadas (turma principal) e descontextualizadas (turma paralela) vão dar informação sobre as influências que o contexto pode ter sobre a compreensão. Como a comparação abstrata, neste caso, contém os mesmo recursos de situação problemas, afinal imaginar um círculo feito com couro de boi em vez de um círculo desenhado com um lápis não trará grande vantagem, o autor espera não haver grande disparidade de desempenho entre os dois grupos de discentes, nesta etapa. Em todo questionamento oral feito aos alunos, seus raciocínios também orais devem ser considerados. No 3º encontro, é buscado nos discentes a capacidade de enxergarem como tal conhecimento pode ser instrumentalizado, com a pergunta sobre as consequências de se ter acesso a um rio. Isto só dá para ser feito à turma principal. Para este momento, não é necessária nenhuma comparação com a outra turma, pois ele foi aproveitado apenas para valorizar a interdisciplinaridade, sem grande relevância para os objetivos de aprendizagem matemática alvejados. Por fim, no momento avaliativo final do 4º encontro, o Anexo A.7, traz expectativas de que o alunado utilize a manipulação dos algoritmos de área de polígonos e círculos para solucionar outros problemas isoperimétricos propostos.

Esta proposta de sequência didática é importante para trazer ideias de abordar de maneira produtiva a história da matemática na sala de aula do Ensino Básico. Alguns problemas históricos são, de fato, inacessível para o público deste nível, mas é possível adaptar a circunstância para ele, sem deixar de tirar proveito do contexto. Os objetivos avaliativos são mutáveis de acordo com as relações isoperimétricas e os meios de solução que o professor desejar, porém o contexto histórico e os recurso imagéticos, comparando as áreas das curvas fechadas, devem ser preservados para manter a ludicidade e a representação geométrica dos resultados algébricos. A sequência didática da Princesa Dido encerra o catálogo de sequências com problemas históricos de otimização geométrica.

5.3 Sequência didática com jogo de otimização

Agora, será apresentado um jogo envolvendo otimização geométrica, criado pelo próprio autor e construída uma proposta de sequência didática em torno dele.

5.3.1 Um ótimo caminho

Para além de problemas clássicos da otimização, o autor buscou incluir um jogo com este tema, no catálogo de sequências didáticas, porém, não encontrando nenhum, decidiu criar um.

Buscou-se produzir um jogo com um contexto cativante para o aluno, onde ele se identifique com a personagem e sinta-se instigado a jogar ou a criar uma situação para desafiar outro jogador. A competitividade foi priorizada. Além disso, tentou-se agregar uma gama de conteúdos de geometria que fosse adaptável a diferentes níveis dentro do jogo, pois isso permite uma adesão de mais séries do Ensino Básico ao grupo de turmas aplicáveis. Sob estes pilares, surge *Um ótimo caminho*.

A sequência didática deste jogo, o utiliza para trabalhar os conteúdos abordados, tanto o jogando (sendo os alunos tanto os criadores quanto os jogadores de cada rodada), quanto apresentando e questionando a confecção das rodadas criadas por cada grupo. Além disso, também busca-se verificar se o contato com *Um ótimo caminho* teve influência na capacidade de o aluno identificar uma situação de otimização na vida real. Isto é fundamental para os objetivos do trabalho, pois o primeiro passo para iniciar uma procura por meios de maximizar ou minimizar valores, é perceber a possibilidade de fazê-lo.

DESCRIÇÃO DO JOGO

"Um ótimo caminho"é um jogo matemático idealizado pelo autor que envolve conhecimentos de comprimento de arcos de circunferência, perímetro, operações com reais e conversão de unidades de comprimento. Tudo isto para encontrar-se o melhor e o pior caminho a ser seguido pela nossa personagem em sua aventura.

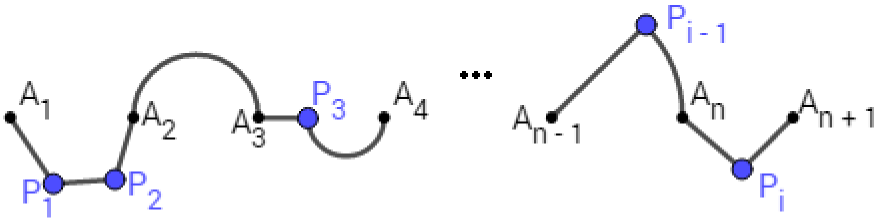
Contexto : Um jovem guerreiro deixa sua pequena cidade no interior da Espanha medieval em uma tentativa de ir à cidade grande mais próxima tentando adquirir alguns recursos para sua aldeia. Certo dia, quando estava na estrada com seu cavalo, é parado por um mensageiro e este informa que o seu povoado será atacado pela cidade vizinha e ele precisa voltar para defendê-la, pois só assim teriam chance de sobreviver, visto que ele era o único grande herói de guerra da região. O engenheiro da cidade, papel assumido pelo organizador do jogo, destrói a ponte de acesso a ela e cria o seguinte projeto: Construir várias pontes com diferentes configurações onde uma entre elas deve ter o menor comprimento, pois o herói da história deve receber o projeto pelo mensageiro e calcular o menor caminho para poder chegar o mais rápido possível à sua cidade. Ele deve calcular também a ponte de maior comprimento, pois considerando o fato de nenhum dos inimigos o conhecerem, ele pode os convencer, se os encontrar no caminho de volta, a escolher o percurso mais longo os atrasando. As pontes têm configurações realmente incomuns, pois a ideia é deixar os oponentes confusos ao tentarem acessar a pequena cidade. O engenheiro não esclarece o caminho mínimo e o máximo, porque deve-se considerar o risco das tropas inimigas saquearem o nosso herói no caminho e acharem o mapa com a resposta. Porém, o povo da cidade vizinha não entende matemática tão bem. Se as informações não estiverem explícitas, não conseguirão interpretá-las. Os participantes farão papel do herói guerreiro e tentarão calcular o melhor e o pior caminho entre os propostos pelo engenheiro (participante que confeccionará as pontes).

Obs.:É indispensável a história do jogo ser contada passo a passo, pois assim o teor lúdico conserva-se. Serão vistas agora as maneiras como podem ser construídas as pontes.

Regras :

- As pontes construídas são divididas em setores. E cada setor é delimitado por pontos com nomes formados por uma letra fixa e índices consecutivos, por exemplo: Na ponte A, os setores são demarcados por A_i e A_{i+1} com $i \in [1, 2, 3, ..., n]$. Ou seja, o primeiro setor S_{A_1} da ponte A começa em A_1 e termina em A_2, o segundo S_{A_2} começa em A_2 e termina em A_3, tal como o setor $S_{A_{n-1}}$ começa em A_{n-1} e termina em A_n (Figura 26);
- Em cada setor, o caminho construído pode ser feito com uma linha poligonal, um arco de circunferência ou uma combinação dos dois tipos de objeto geométrico. Os setores podem ser divididos em partes menores, determinadas por pontos postos entre os que definem o setor. Sobre a superfície onde estes pontos podem ser postos, ela é delimitada por duas retas perpendiculares à reta suporte da ponte. Por exemplo, dado um setor S_{A_i} e duas perpendiculares a $\overline{A_iA_{i+1}}$, $r : r \cap \overline{A_iA_{i+1}} = A_i$ e $s : s \cap \overline{A_iA_{i+1}} = A_{i+1}$. Os pontos divisores do setor podem localizar-se no semiplano gerado por r e s. Eles devem carregar uma mesma letra, diferente das dos setores das pontes, porém um índice que cresce da mesma maneira descrita para os pontos das pontes, de forma sucessiva crescente, em ordem posicional da esquerda para a direita, como P_1, P_2, P_3, P_{i-1} e P_i na Figura 26.

Figura 26 – Ponte qualquer



Fonte: Produzido pelo autor

- O organizador deve construir no mínimo duas pontes com, no mínimo, um setor em cada uma, para ser possível uma comparação;
- As pontes devem ter a mesma quantidade de setores;
- Os pontos delimitadores dos setores devem ter a mesma distâcia no mesmo setor em diferentes pontes: $|\overline{A_iA_{i+1}}| = |\overline{B_iB_{i+1}}|$, como na Figura 27.
- O mapa das pontes deve vir seguido da descrição da medida de cada segmento e os valores de raio e angulação do arco dos caminhos, para ser possível o jogado calcular o comprimento de cada objeto;
- Para um caminho ser o menor de todos, ele deve ser explicitamente menor do que todos os outros em todos os setores, ou no somatório de todos os setores, assim como para ser o maior, é necessário ter o maior somatório ou ser o máximo caminho em todos os setores. É verdade, ser mínimo em todos os setores vai implicar em ter o menor somatório, porém é possível não ser o menor em todos os setores e ter menor somatório. O contrário funciona para o maior caminho.

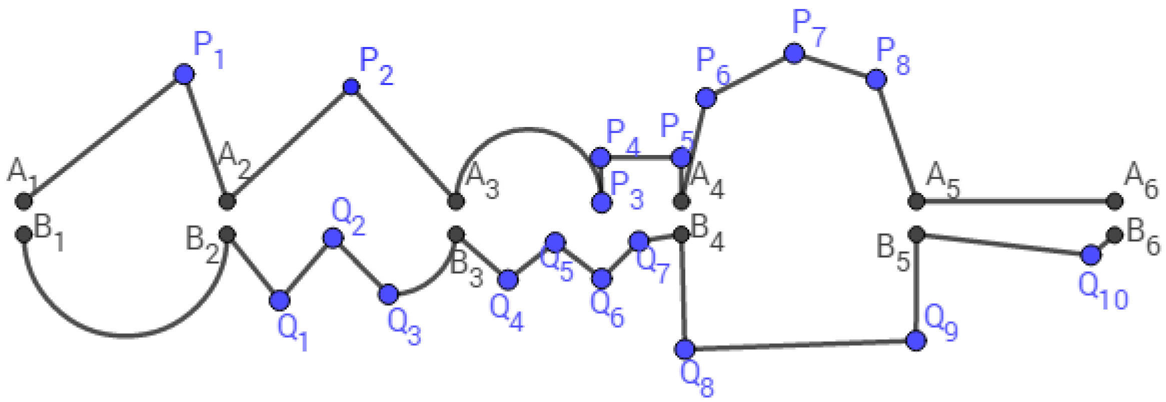
  Exemplo 1 : Denota-se por $|A_i \to A_{i+1}|$ o comprimento do i-ésimo setor da ponte A. Dadas duas pontes A e B tais que$|A_1 \to A_2| = 5$m, $|A_2 \to A_3| = 4$m, $|A_3 \to A_4| = 3$m, $|B_1 \to B_2| = 4$m, $|B_2 \to B_3| = 3$m e $|B_3 \to B_4| = 9$m. Tem-se que $|A_1 \to A_2| > |B_1 \to B_2|; |A_2 \to A_3| > |B_2 \to B_3|$ e $|A_3 \to A_4| < |B_3 \to B_4|$, porém

  $$\sum_{k=1}^{3} |A_i \to A_{i+1}| < \sum_{k=1}^{3} |B_i \to B_{i+1}|$$

  Ou seja, a ponte B é a maior tendo apenas um setor máximo e a ponte A é a menor tendo apenas um setor mínimo.

- Construir as curvas baseadas em propriedades matemáticas, como a desigualdade triangular, no caso dos quintos setores, que tornem possível a comparação de comprimento;
- Deve haver ao mínimo uma ponte de comprimento diferente das demais;
- A visão que tem-se das pontes é panorâmica e não lateral;
- A confecção do mapa deve seguir ao menos 1 dos seguintes critérios:
  - $|\overline{A_1P_1}| = 4\sqrt{3}$; $|\overline{P_1A_2}| = 3\sqrt{3}$; $\widehat{B_1B_2}$ é uma semicircunferência de raio $2\sqrt{3}$;
  - $\overline{A_2P_2A_3}$ é um um fragmento de um quadrado de lado $l = 24$ cm, tal que, $\overline{A_2P_2}$ é cinco sextos de l e $\overline{P_2A_3}$ é dois terços de l. No setor 2 da ponte B, $|\overline{B_2Q_1}| = |\overline{Q_1Q_2}| = |\overline{Q_2Q_3}| = l/4$. Q_3 e B_3 são ligados por um arco de circunferência de 120° e raio $l/3$;
  - $\widehat{A_3P_3}$ é uma semicircunferência de raio x; $|\overline{P_3P_4}| = |\overline{P_5A_4}| = x/2$ e $|\overline{P_4P_5}| = x$; $|\overline{B_3Q_4}| = |\overline{Q_4Q_5}| = |\overline{Q_5Q_6}| = |\overline{Q_3Q_7}| = x$ e $|\overline{Q_7B_4}| = 4x/5$;

Figura 27 – Exemplo de mapa



Fonte: Produzido pelo autor

  - $|\overline{B_4Q_8}| = 26\text{m}$; $|\overline{Q_8Q_9}| = 3,9\text{Dam}$; $|\overline{Q_9B_5}| = 0,02\text{km}$; $|\overline{A_4P_6}| = 0,02\text{km}$; $|\overline{P_6P_7}| = 0,15\text{hm}$; $|\overline{P_7P_8}| = 13\text{m}$ e $|\overline{P_8A_5}| = 0,21\text{hm}$.

- Atribuir medidas reais às curvas geométricas setoriais ou às grandezas necessárias para calculá-las, como no primeiro setor das duas pontes;
- Caracterizar as linhas poligonais como fragmentos de polígonos regulares com medidas definidas de lado, e atribua aos outros segmentos e arcos valores fracionários dele,como no segundo setor das duas pontes;
- Fazer o mesmo do item anterior, porém dando como uma incógnita o valor referencial, obrigando os jogadores a escreverem as medidas em função dela, substituindo relações de igualdade em outras sentenças, resolvendo sistemas de equação. Apenas desta forma a comparação dos caminhos é possibilitada, como no terceiro setor das duas pontes;
- Atribuir unidades de medida para cara curva, como no setor 4 das duas pontes, explorando a conversão de medidas. Considerando estas construções de tamanho real, o organizador deve pôr unidades convenientes, por exemplo, é inimaginável uma ponte de $0,05mm$ de comprimento.
- O organizador pode escrever as medidas em função de incógnitas, porém se elas impossibilitarem a comparação ao fim do cálculo dos caminhos, aquele deve atribuir valores reais a elas de forma que os caminhos não fiquem com o mesmo comprimento. A única forma disto não acontecer, é se uma das pontes tiver todos os mínimos setores e se outra tiver todos os máximos setores, pela situação explicitada no exemplo anterior.

Nessas orientações, apenas a segunda exclui a terceira, mas é cabível atribuir unidades de medida em todos os casos, por exemplo, assim como utilizar números reais para comprimento de curva. Os recursos construtivos 3 e 5 carregam uma limitação, como neles surgem valores desconhecidos nas medidas das curvas, é necessário o minimalismo absoluto dos setores de um caminho para este ser mínimo ($|A_i \to A_{i+1}| < |B_i \to B_{i+1}|$ para todo $i \in [0, 1, 2, 3, ..., n]$) ou um maximalismo no caso do caminho máximo ($|A_i \to A_{i+1}| > |B_i \to B_{i+1}|$ para todo $i \in [0, 1, 2, 3, ..., n]$), como relatado em uma regra anterior. Por exemplo, a desigualdade triangular permite saber que um dos lados do triângulo nunca é maior ou igual à soma dos outros dois, ou seja, é menor, porém isso não possibilita saber o quão menor é o primeiro lado comparado à soma dos restantes. Logo, os critérios 3 e 5 não informam valores absolutos, tornando inviável a comparação do somatório dos setores quando não existir um caminho absolutamente mínimo ou máximo setorial. Esta última informação não deve ser passada aos jogadores, pois em mapas onde todos os caminhos foram construídos sob teoremas de otimização geométrica, se isto for percebido, aqueles podem conseguir resolver o problema apenas decifrando um setor. Por fim, se os comprimentos das pontes estiverem em função de diferentes incógnitas, o organizador deve atribuir valores a elas de forma a possibilitar a diferenciação de medidas.

DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Tema: Comprimentos de arcos de circunferência, perímetro de polígonos regulares, conversão de unidades de comprimento, fração de medidas, sistema de equação, comparação de comprimento de curvas, comparação de números reais;

Público alvo: Do 7º ao 9º ano do ensino fundamental 2 e qualquer turma de ensino médio, adaptando a construção ao nível e às habilidades adquiridas e visadas nas respectivas séries;

Duração: 5 encontros, 4 com duas aulas para aplicar a sequência e 1 com apenas um horário para aplicar a atividade avaliativa geral;

Disciplina: Matemática;

Objetivo geral: Dominar ferramentas para cálculo de comprimento de curvar regulares em situações de otimização geométrica e perceber a utilidade deste conhecimento para solucionar um contexto;

Objetivos específicos :

1. Revisitar os valores científicos de perímetro e/ou comprimento de circunferência e seus fragmentos;
2. Compreender os critérios de comparação entre números reais e seus subconjuntos (inteiros, racionais e irracionais, para ser mais exato);

3. Utilizar consequências de teoremas ou corolários para comparar comprimentos de curvas;
4. Entender a utilidade da otimização para a facilitação e a melhoria de nosso dia a dia na vida real, através da história do jogo;

Material: Quadro branco e marcadores, ficha de exercícios, computador e projetor;

Descrição das atividades:

1º Encontro: Relembrar os conteúdos relativos a cálculo de perímetro, comprimento de linhas poligonais convexas, de circunferência, de arcos, conversão de unidades de comprimento, comparação de números reais e seus subconjuntos, assuntos utilizados na confecção dos mapas (Anexo A.8). Isto depende da série a ser aplicada a sequência, por exemplo, um 7º ano ainda não teve contato com comprimento de circunferência, arcos e números irracionais. Não cabe abordar estes assuntos com eles. Porém, de uma turma de terceiro ano do ensino médio, espera-se ter um domínio razoável de todos os temas citados. Produzir fichas de exercícios e problemas direcionados, auxiliando ao máximo no desenvolvimento individual do alunado e solucionando todas as atividades propostas até o fim do encontro. O último ato antes disto acontecer deve ser coletar todo o material gerado pelos estudantes. Com a turma paralela, todas as atividades deste encontro devem ser executadas.

2º Encontro: Apresentar o jogo, a princípio pela sua história, e, posteriormente, suas regras. Detalhar o suficiente que os participantes precisam saber para jogar, como o fato de todos os setores serem delimitados por pontos iniciais e finais de mesma distância. Informações estas melhor detalhadas nas regras. Dividir a sala em duplas ou trios e apresentar, no projetor ou quadro, mapas do jogo (Anexo A.9), desafiando os conjuntos formados a tentar resolver cada um. É importante o professor ou pesquisador ter confeccionado previamente e testado o resultado de sua criação para aplicá-la neste encontro, dada a necessidade de adaptação já citada. Não revelar as soluções ainda e coletar toda a produção do alunado. Para a turma paralela, se deve não apresentar o jogo e apenas aplicar os mapas como exercícios, de forma descontextualizada, trazendo apenas comparação de comprimentos de linhas poligonais, solicitando aos estudantes encontrarem o menor e o maior caminho;

3º Encontro: Introduzir o momento resolvendo os desafios propostos na aula anterior. Solicitar que os grupos unam-se novamente para cada um deles criar o seu próprio mapa, em 50 minutos. Propor a cada grupo a apresentação de seus mapas no quadro. Coletar todo o material produzido e devidamente identificado por cada equipe para, no próximo encontro, ele ser devolvido e as apresentações terem continuidade. Com a turma paralela, nenhuma atividade deste encontro e nem do próximo devem ser realizadas, passando ao conteúdo desenvolvido no 5º encontro.

4º Encontro: Continuar as apresentações buscando a exposição e discurssão integral delas, até o fim da segunda aula. Coletar todo o material produzido e encerrar o encontro.

5º Encontro: Neste momento avaliativo geral, aplicar uma ficha de atividades com perguntas sobre otimização geométrica adaptadas aos conteúdos de cada turma e a utilidade disso para algumas situações reais (Anexo A.10). Ao fim de tudo, coletar toda a produção dos estudantes. Na turma paralela, isto também deve ser feito.

Expectativas: No 1º encontro, as atividades ficarão muito densas de conteúdos, mesmo se todos eles já tiverem sido vistos pelo público. Mas a defasagem em um ou outro não comprometerá todo o desenvolvimento, como foi visto em outras sequências didáticas deste trabalho. Entre os tópicos envolvidos, normalmente, o com maior potencial de ter sido esquecido é conversão de medidas de comprimento. Além disso, é um assunto subestimado, pois cálculo de comprimento de circunferência e de arcos, por exemplo, aparenta ser mais desafiador à ótica do aluno médio brasileiro por envolver algoritmos. Por isso, espera-se uma recorrência significativa de erros em conversão de medida no decorrer do trabalho. Entrando no 2º econtro, quando apresenta-se o jogo apenas à turma principal e depois o Anexo A.9 às duas, é aguardado o mesmo desempenho entre ambas, pois aquela ainda não o jogou, apenas teve um contato inicial. Como nos 3º e 4º encontros da sala principal é trabalhado o jogo, os participantes dela estarão treinando as habilidades almejadas, lidando com problemas através do lúdico e com um contexto (provavelmente estarão mais empolgados com o processo de aprendizagem), portanto tenderão, na atividade avaliativa final, a conseguir indicar e idealizar, com mais facilidade, uma circunstância onde é verificada a presença da otimização e a dominar as habilidades envolvidas com melhor desempenho, se comparado à turma paralela.

Avaliação: O cerne formativo da avaliação deve manter-se nesta sequência. Introdutivamente, no 1º encontro, buscando revisitar e verificar o conhecimento do alunado relativo a tópicos elementares para o desenvolvimento desta sequência didática: comparação de números reais positivos, a cálculo de perímetro, comprimento de linhas poligonais convexas, de circunferência, de arcos e conversão de unidades de medidas de comprimento, em dependência do nível escolar da turma onde pretende-se aplicar a proposta, como visto na descrição deste encontro. Vale lembrar o poder de adaptação do jogo. O professor pode escolher, por exemplo, não utilizar arcos de circunferência se seus alunos nunca tiveram contato até o momento da aplicação. A avaliação nesse caso deve não ser só investigativa, mas também oral, visto que a ficha será trabalhada durante a aula e os alunos podem apenas copiar a solução do docente e isso interfere diretamente no processo pois oculta a real "bagagem"do discente sobre o assunto. No 2º encontro, são usados exemplos de mapas do jogo como desafio para avaliar a capacidade do alunado utilizar como ferramenta os conceitos abordados no último encontro (Anexo A.9). No 3º encontro, os estudantes agora devem utilizar aqueles conhecimentos para confeccionarem os mapas e no 4º, apresentarem suas obras. Espera-se que eles "lapidem"suas habilidades, pois o processo de criação de problemas instiga o discente a refletir mais sobre as regras regentes do conteúdo utilizado, não apenas o limita a usar sua posse intelectual para solucionar questões pré-prontas. Esta etapa avaliativa deve apenas ser aplicada à turma principal, pois só eles trabalharão com a construção de mapas. No último encontro, o momento avaliativo averigua se o aluno consegue identificar processos de otimização em situações reais e utilizar conhecimentos matemáticos para lidar com alguma delas (Anexo A.10).

A proposta de sequência didática com o jogo "Um Ótimo Caminho"tem como núcleo, a busca pelo desenvolvimento da capacidade de identificaçao da otimização em uma situação real e ser um meio lúdico para prática de habilidades em geometria. Portanto, a presença do jogo e os objetivos das avaliações são imutáveis. Mudar algo nestes, trará uma alternância de significado em algumas atividades desenvolvidas. Os objetos avaliativos, assim como as limitações de recurso do jogo (conteúdos envolvidos na construção dos caminhos) podem sofrer alterações por parte do professor, se preciso for, considerando possíveis necessidades de adaptação às condições de uma turma. O intuito de trazer um jogo para este trabalho, foi estimular os profissionais da educação a considerarem este recurso em suas aulas, pois lidam com uma geração que cresceu e vive em meio a uma gama de jogos eletrônicos. Isto é uma forma de atualizar o processo de ensino e aprendizagem. O mais importante, provavelmente será mais efetivo apresentar ou confeccionar jogos contextualizados, com personagens e histórias intrigantes, porque os jovens apegam-se muito a isto em todo tipo de entretenimento, com jogos não é diferente. Se faz necessário torná-lo o mais atraente o possível para este grupo. Aqui termina o catálogo de sequências didáticas do trabalho.

Conclusão e Projetos Futuros

É mostrado, em todo o decorrer deste trabalho, uma gama de possibilidades com a qual os profissionais da educação podem adicionar o estudo da otimização no ensino básico, por meio da geometria, utilizando-se de jogos, histórias em quadrinhos, recursos digitais, interdisciplinaridade, material sustentável e até as tradicionais ferramentas de medição e construção, sem desligar-se do currículo, fazendo sempre uma conexão com situações reais e contribuindo para os anseios de formação integral da educação nacional.

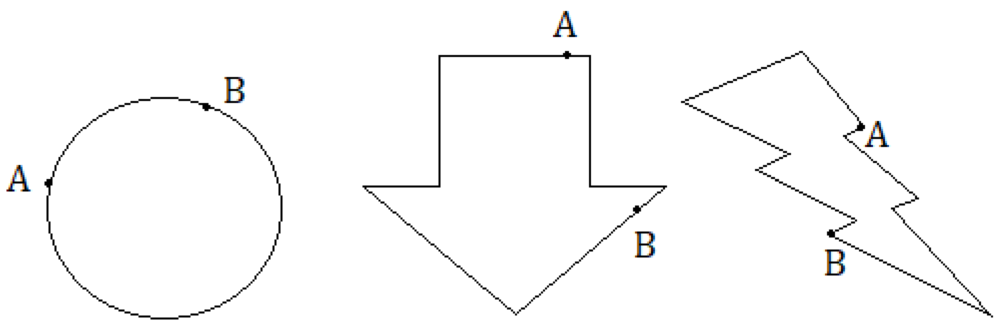
Depois de um tempo considerável de pesquisas sobre problemas de otimização geométrica, diversas formas recursos didáticos e avaliação formativa, o autor conseguiu unir estes assuntos e trazer propostas de sequências didáticas adapatáveis a diferentes níveis do ciclo básico, interativas, variadas, propositivas e acessíveis em todos os sentidos, com temas que, alguns podem ser considerados regionalizados, porém todos idealizáveis em suas partes contextualizadas e uma estrutura processual completa de aplicação e avaliação, prontas para serem executadas por docentes de matemática em qualquer lugar deste país. Um dos maiores empecilhos desta empreitada foi não encontrar registros de tentativas de uma conexão tão contextualizada e facilitadora entre a Otimização Geométrica e a Educação Básica. Foi necessária uma superação no campo da criatividade.

Considerando o potencial da otimização geométrica exposto neste trabalho, o autor visa continuar explorando outros problemas clássicos e formas de introduzi-los em séries do ensino fundamental anos finais e ensino médio da melhor maneira para criar e aplicar novas sequências didáticas. Além disso, passada a circunstância de saúde pública vivida pelo mundo no momento, a pandemia de Covid-19, com o retorno total das aulas presenciais na rede pública de ensino, pretende-se aplicar todas as propostas feitas neste trabalho e trazer os resultados a público para informar os leitores sobre os efeitos de toda construção e anseios deste trabalho, visando possibilitar uma lapidação dos métodos e conceitos e consolidar mais uma forma de praticar ensino da matemática e proporcionar a aquisição das ferramentas de otimização por parte do indivíduo no mundo moderno.

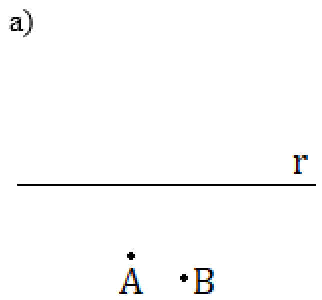
ANEXO A – FICHAS DE ATIVIDADES

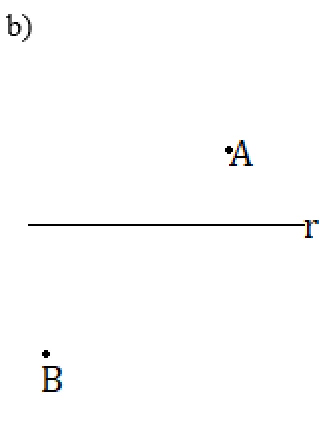
A.1 Atividade do 1º encontro, Subseção 5.2.1

1. Nas figuras abaixo, trace a menor distância entre os pontos A e B.

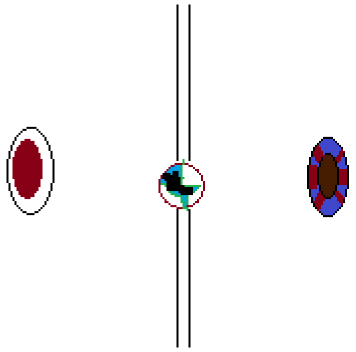


2. Construa os reflexos dos pontos A e B sobre as retas r.





3. No *El Clásico*, termo espanhol que nomeia o confronto entre Barcelona e Real Madrid, a bola está sobre a linha da grande área e Messi vai disputar a bola com Sérgio Ramos. A posição de Messi é a reflexão da posição de Sérgio Ramos sobre a linha da grande área. É correto dizer que Messi está mais próximo da bola? Por que?



4. Observe a situação e faça o que se pede.

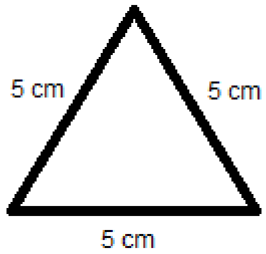
   a) Construa o reflexo de B sobre r e o nomeie B‘.

   b) Coloque um ponto P em qualquer lugar da reta r.

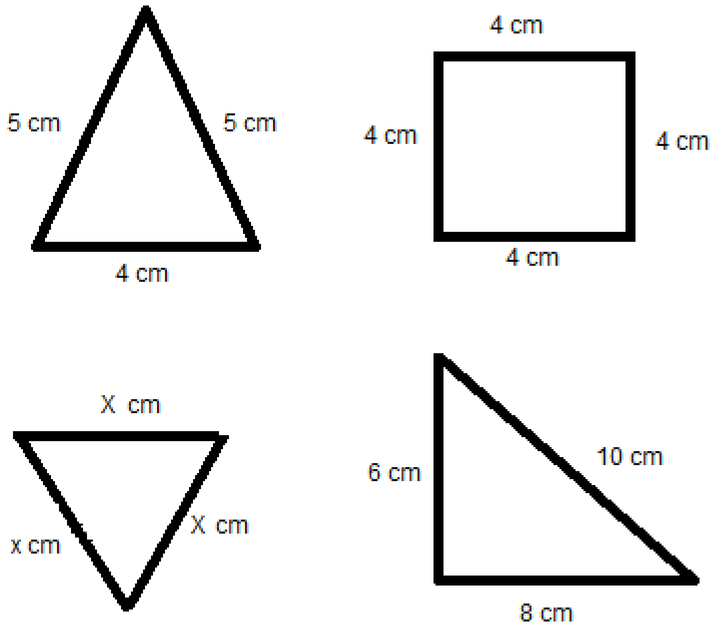
   c) $\overline{AP} + \overline{PB'}$ é igual a $\overline{AP} + \overline{PB}$?

A.2 Atividade do 5º encontro, Subseção 5.2.2

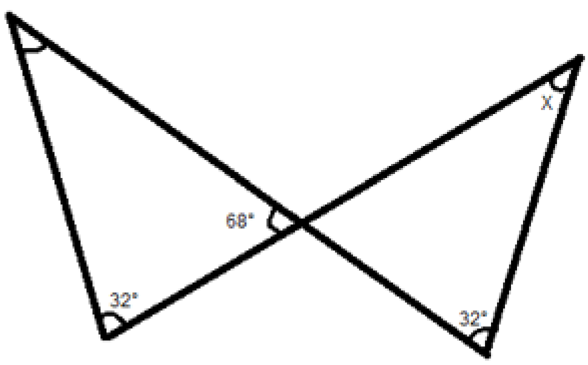
1. Observe o polígono abaixo



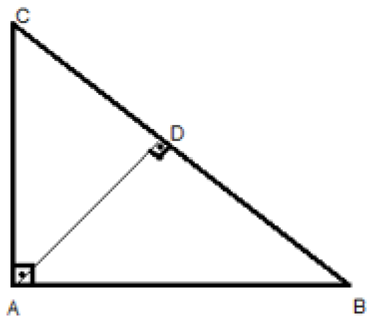
Circule os polígonos abaixo que são semelhantes à figura acima.



2. Descubra o valor do ângulo X.



3. Se $\overline{AB} = 24cm$, $\overline{BC} = 30cm$, $\overline{CD} = 15cm$ e $\overline{AD} = 15cm$.



a) Prove que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ são semelhantes.

b) Qual a razão entre os dois polígonos?

c) Quanto mede o lado $\overline{AC}$?

4. Marque x nas informações verdadeiras (Questão para ser acompanhada e debatida com auxílio do professor)

a) Para dois polígonos serem congruentes, têm de ter seus lados equivalentes com mesmas medidas e seusânguloas correspondentes também

b) Se dois polígonos são congruentes, são automaticamente semelhantes.

c) Todo quadrado é semelhante a outro quadrado qualquer

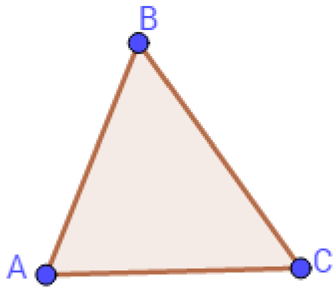
d) Todo quadrado é congruente a outro quadrado qualquer

e) Todo triângulo equilátero é semelhante a outro triângulo equilátero

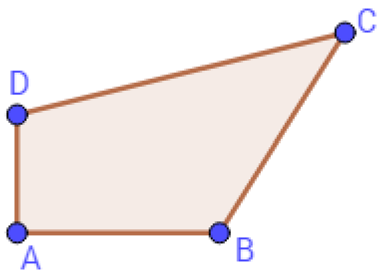
f) Todo triângulo retângulo é semelhante a qualquer outro triângulo retângulo

A.3 Atividade do 1º encontro, Subseção 5.2.3

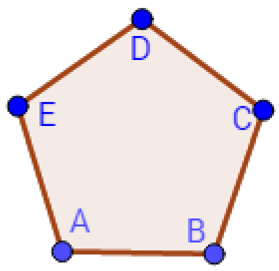
1. Construir a reflexão dos polígonos sobre o seu lado $\overline{AB}$.



a)

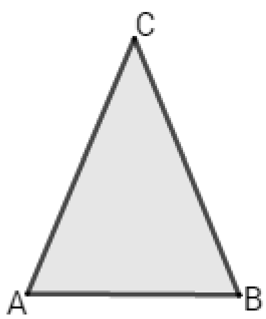


b)



c)

2. Observe o triângulo abaixo.



a) Construa a reflexão de ABC sobre o lado $\overline{AB}$.

b) Construa um ponto M em $\overline{AC}$, nomeie os pontos refletidos como A', B', C' e M'.

c) Crie um ponto N em $\overline{B'C'}$ e crie o segmento $\overline{MN}$.

d) Crie o ponto de intersecção entre $\overline{MN}$ e $\overline{AB}$, o denomine como O e o construa o reflexo de $\overline{ON}$ sobre $\overline{AB}$ e chame o reflexo de N de N'.

e) A poligonal convexa $\overline{MON'}$ é a menor possível se fixarmos os pontos M e O e podermos movimentar N' em $\overline{BC}$?

A.4 Ficha do 3º encontro, Subseção 5.2.3

1. O UFC é uma modalidade esportiva onde as lutas ocorrem em um octógono. Se um lutador assume uma tática de lutar rondando o seu adversário, andando de grade para grade, sempre de uma grade para a seguinte, sem poder voltar para a que já passou, no intuito de deixa o outro combatente tonto ao longo da luta, responda.

   a) Tem alguma importância para este lutador conhecer técnicas de otimizção geométrica?

   b) Quais riscos ele corre não tendo o domínio delas?

2. (Apenas para a turma principal)Digamos que Bonifácio, antes de conhecer o resultado de Fagnano, percorria 1,5 km por dia, entregando as refeições. Depois de ler o artigo entregue por Madalena e conhecer a solução do problema, ele começou a percorrer 1,12 km por dia. Quantos quilômetros de percurso a menos ele se poupou de percorrer depois de conhecer tal recurso matemático, semanalmente, sabendo que ele trabalha de segunda a sábado?

3. Nos conte ou crie uma situação onde é possível utilizar a solução do Problema de Fagnano para tirar alguma vantagem.

A.5 Ficha de 1º encontro, Subseção 5.2.4

1. Dada a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sendo $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Responda:

   a) Quais são as raízes desta função?

   b) Qual o vértice da função?

   c) Vamos construir o gráfico da função:

2. Indique quais funções abaixo tem ponto de máximo e quais tem ponto de mínimo.

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo $f(x) = -3x^2 + 10x + 1$

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo $f(x) = -x^2 + 1x - 12$

   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo $f(x) = (x + 1)(x - \frac{2}{3})$

   d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sendo $f(x) = 2x^2 + 15$

3. Uma piscina com um bar em posição de ilha será construído em um hotel, como mostra a imagem abaixo. A piscina terá o formato de um trapézio e o bar, quadrado. O lado deste terá uma medida fixa e variável m. A base menor da piscina será o dobro do lado do bar, a maior terá dois metros a mais que a menor e a altura do trapézio será de 5 metros. O dono do hotel pediu que a área com água da piscina seja a maior possível, sem desconsiderar o bar. Quais medidas a piscina e o bar devem ter para esta exigência ser realizada?

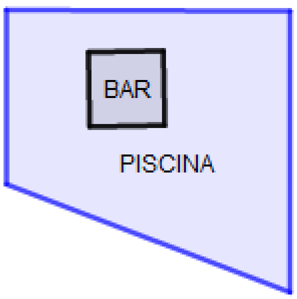


Figura da questão 3

A.6 Atividade avaliativa do 2º encontro, Subseção 5.2.4

1. Quanto medem as áreas de um quadrado de lado 4 cm e um círculo com diâmetro medindo a diagonal deste quadrado? Qual deles tem a maior área?

2. Dado um trapézio onde o a base maior mede o dobro da menor, esta mede x, e a menor é igual a altura e um círculo onde seu diâmetro é três quintos da base maior do trapézio. Qual destas duas superfícies tem uma área maior?

3. Dado um quadrado de lado l e um hexágono regular de lado $\frac{2l}{3}$. Qual deles tem uma área maior?

A.7 Atividade avaliativa do 4º encontro, Subseção 5.2.4

1. Entre um triângulo equilátero e um quadrado isoperimétricos, qual deles delimitará uma maior área?

2. Dois polígonos regulares, um de n lados, outro de m lados onde $m > n$, podem ser divididos em triângulos equiláteros por diagonais que cruzam o seu centro, assim como um hexágono regular, mostrado na figura abaixo. Se tais polígonos são isoperimétricos, qual deles tem uma maior área?

3. Descreva uma experiência ou alguma situação imaginável qual a desigualdade isoperimétrica pode ser usada como ferramenta de auxílio.

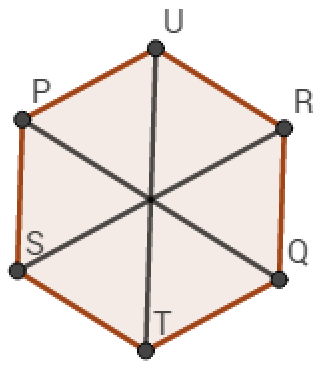
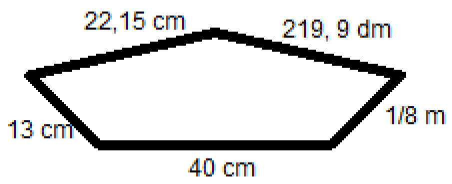
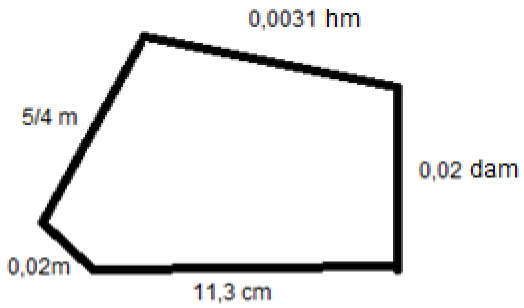


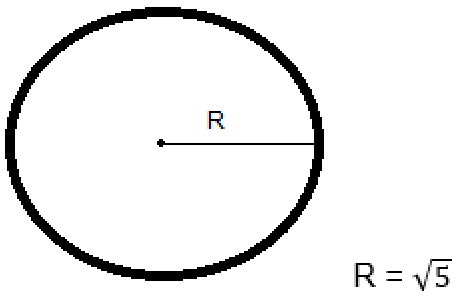
Imagem da questão 2

A.8 Ficha de 1º encontro, Subseção 5.3.1

1. Calcule o perímetro ou comprimento das curvas fechadas abaixo:

   a) 

   b) 

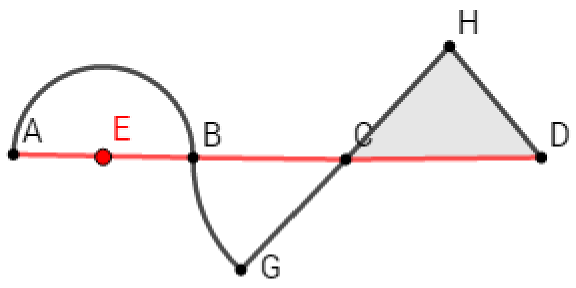
   c) 

2. Dado um quadrado de lado 3,2 cm. Responda as perguntas.

   a) Quanto mede o perímetro deste quadrado em decímetros?

   b) Se formarmos uma seção circular de 180° com o perímetro deste quadrado, teremos uma circunferência medindo quantos centímetros?

3. Um corpo pretende fazer um percurso do ponto A até o D. Sabendo que, em preto, de A até B tem-se uma semicircunferência de raio 4,5 metros; de B até C, em preto, tem-se um arco de circunferência de 45° e raio 0,08 hectômetros e HCD é um triângulo equilátero de lado 0,5 decâmetros. Responda:



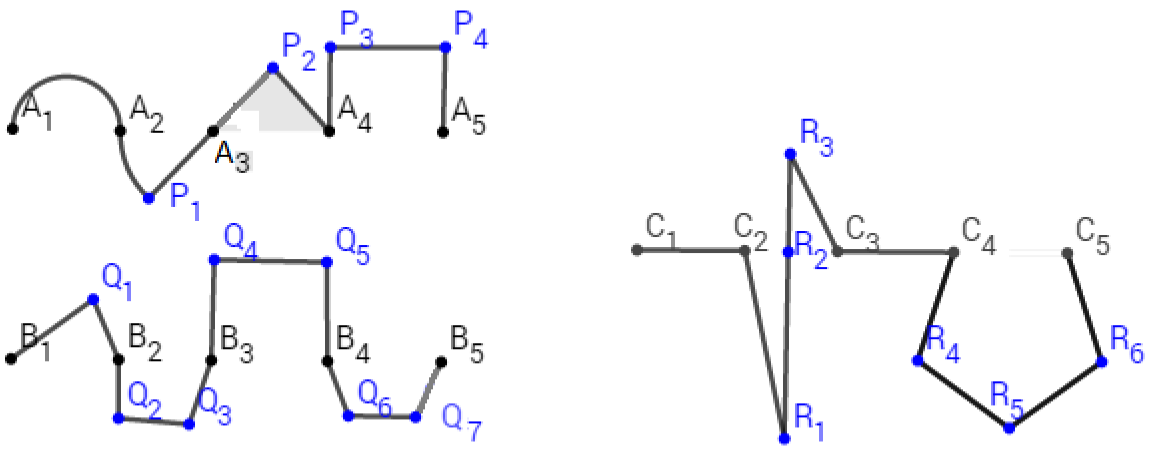
a) Qual a distância em metros do percurso marcado em vermelho ($AEBCD$)?

b) Qual adistância em metros do percurso marcado em preto ($ABGCHD$)?

c) Qual a diferença de comprimento entre os dois percursos?

A.9 Exemplos de mapas do jogo, 2º encontro, Subseção 5.3.1

1. Encontre a ponte de menor comprimento entre A, B e C (Aqui, o professor pode escolher não incluir a ponte A na comparação se sua turma não tiver tido contato com arcos de circunferências e comprimento de circunferências).



Ponte A:

- $A_1 \to A_2$ é uma circunferência de diâmetro 12 metros;
- $A_2 \to A_3$ é um arco de circunferância de 45° e raio 0,012 quilômetros;
- $A_3 \to A_4$ é a parte de um triângulo equilátero com vértices em A_3, P_2 e A_4 e lado medindo $\frac{41}{3}$ metros;
- $A_4 \to A_5$ é a metade de um retângulo com vértices em P_3 e P_4 e eixo de simetria contendo A_4 e A_5, onde seu menor e maior lados medem respectivamente 10 metros e $\frac{82}{3}$ metros.

Ponte B:

- $B_1 \to B_2$ é a metade de um retângulo onde 3 de seus vértices são B_1, Q_1 E B_2 e seus lados maior e menor medem respectivamente $0,009$ quilômetros e 5000 milímetros;
- $B_2 \to B_3$ é uma poligonal convexa onde $|\overline{B_2B_3}|$ mede $\frac{5}{7}$ de $\overline{Q_1Q_2}$ e $\overline{Q_2B_3}$ e ambos medem $0,021$ quilômetros;
- $B_3 \to B_4$ é parte de um quadrado de perímetro 10000 centímetros com vértices em B_3, Q_3, Q_4 e B_4;
- $B_4 \to B_5$ É parte de um trapézio $B_4Q_5Q_6B_5$ de perímetro 68 metros onde os dois lados nãoparalelos são congruentes à base menor e a base maior mede 2,3 decâmetros.

Ponte C:

- $C_1 \to C_2$ é um segmento de reta que mede 0,12 hectômetros

- $C_2 \to C_3$ é formado por duas partes de triângulos $C_2R_1R_2$ e $R_2R_3C_3$, onde ambos têm a mesma medida de base, porém o primeiro tem seus outros dois lados medindo o dobro de seus lados relativos no triângulo menor. $|\overline{C_2R_1}| = 24$ metros e $|\overline{R_1R_2}| = 18$ metros.
- $|C_3 \to C_4| = |C_1 \to C_2|$
- $C_4 \to C_5$ é parte de um pentâgono regular de lado $\sqrt{170}$

A.10 Ficha avaliativa, 5º encontro, Subseção 5.3.1

1. Com o que aprendemos de otimização, assinale a alternativa quais temos situações onde um indivíduo se utiliza de conhecimentos de otimização para tirar alguma vantagem.

    a) Uma pessoa procura tijolos, em um armazém de construção, largos para construir um muro resistente para sua casa.

    b) Uma pessoa procura tijolos, em um armazém de construção, mais largos possíveis, mas com o preço de unidade o mais baixo disponível para construir um muro resistente para sua casa.

    c) Um técnico de futebol recomenda que jogadores, quando forem correr em direção à bola em um lançamento longo tenta fazer um percurso em linha reta e não faça contornos.

    d) Um técnico de futebol recomenda que os atletas batam pênaltis sempre ao lado esquerdo do goleiro adversário.

    e) Um vendedor de pipocas muda a marca de seu produto para atrair mais clientes.

    f) Um vendedor de pipocas faz uma pesquisa para saber a qual linha de ônibus do centro da cidade carrega a maior quantidade de passageiros no horário de pico para puder vender seu material nele.

2. Das opções da questão anterior, selecione uma que não fica explícito o uso da otimização e transforme a situação de forma que ela passe a ter um ato de otimização explícita.

3. Imagine a seguinte situação de otimização: Você quer praticar um esporte e vai pesquisar nos locais perto de sua casa que fornecem aulas dele. Considere que você quer fazer 1 hora na segunda e 1,5 horas na quarta, quer o lugar mais barato e se dois ou mais tiverem o mesmo preço, o que estiver mais próximo será o local escolhido. Qual seria o local ideal?

LOCAIS	PREÇO	DISTÂNCIA
Ginásio A	R$20,00 por hora	0,197 km
Ginásio B	R$23,90 por hora	199000 mm
Colégio X	200 reais por mês	117 m
Colégio Y	R$ 59,90 por semana	1,12 hm

ANEXO B – OTIMIZANDO CAMINHOS

OTIMIZANDO CAMINHOS

- FICHA TÉCNICA

NOME: Otimizando Caminhos

AUTOR: Adolfo Pragana

ILUSTRADOR (A): Giovanna Barbosa

QTDE. DE PÁGINAS: 18

IDIOMA: Português

ANO DE LANÇAMENTO: 2021

Esta história em quadrinhos é fruto do meu trabalho de conclusão de curso, quando aluno do PROFMAT na UFRPE, em 2020, sob a orientação da Profª Anete Soares Cavalcanti. Tal trabalho foi voltado a criar propostas de sequências didáticas envolvendo otimização geométrica e buscamos, eu e Anete, investir em um outro recurso didático inovador e em conta. Participando de uma oficina da professora Rosilângela Lucena sobre o uso de HQ na educação matemática e entrando em contato com o professor Elias Santiago de Assis, outro pesquisador focado no assunto, indicado por minha orientadora, surgiu a ideia de trabalhar com o tema em uma das propostas. Unimos isso à experiência profissional em escolas públicas para criar algo voltado para este público: a personagem principal é um jovem negro, periférico, que trabalha no contra turno da escola e não gosta de matemática. Então, nasce "Otimizando Caminhos", premiado com toda a técnica de ilustração de Giovana Barbosa, influenciada por traços de Mangá, um elemento da cultura pop japonesa que já faz sucesso há algumas décadas com um público adolescente brasileiro, a obra mostra como pode ser útil o conhecimento de otimização e matemático em geral para solucionar problemas onde menos esperamos ver esta ciência como proporcionadora de uma porta de saída. O trabalho é uma oportunidade e tanto para qualquer docente introduzir a otimização geométrica no ensino básico e lhes estimular a pensar ideias de como incluir o uso das histórias em quadrinhos como recurso didático.

AGRADECIMENTOS

Agradeço profundamente à Capes por disponibilizar recursos para a confecção desta obra e, consequentemente, apoiar e potencializar a educação matemática neste país.

CAPES PROFMAT UFRPE

CAPES PROFMAT UFRPE

CAPES PROFMAT UFRPE

CAPES PROFMAT UFRPE

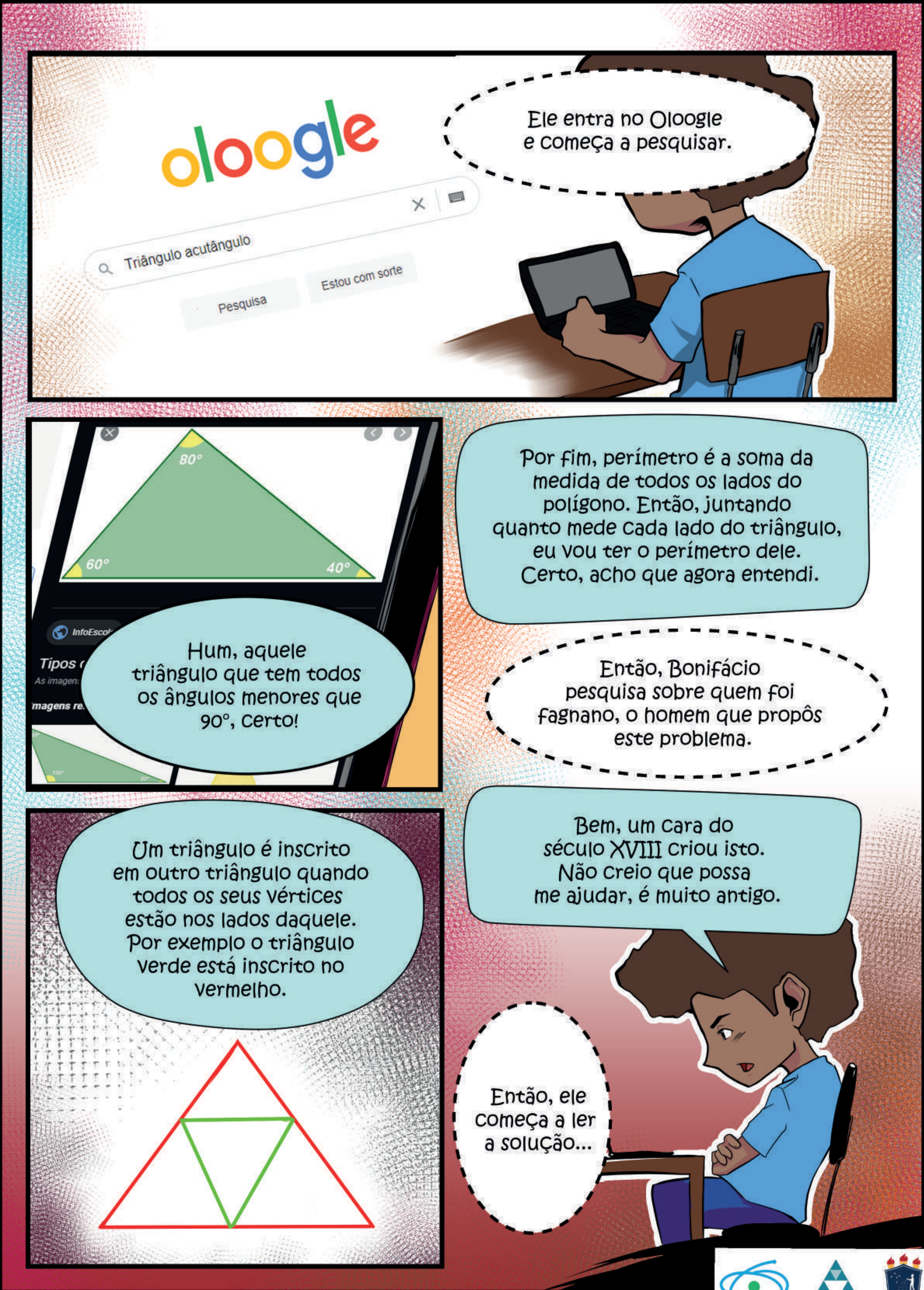
CAPES PROFMAT UFRPE


Ahhh...não! Só estou pensando em um negócio.
Ah... agora tu vais me dizer o que é, estou curiosa!! hehehe
Bonifácio explica o que estava tentando solucionar e madalena responde.
Ahh, então você quer saber como passar pelas três calçadas, fazendo o menor percurso?!
Isso mesmo!
Huum...já sei! Vou te dar um artigo que tenho aqui, você lê e me diz o que achou, beleza?!
CAPES
PROFMAT
UFRPE

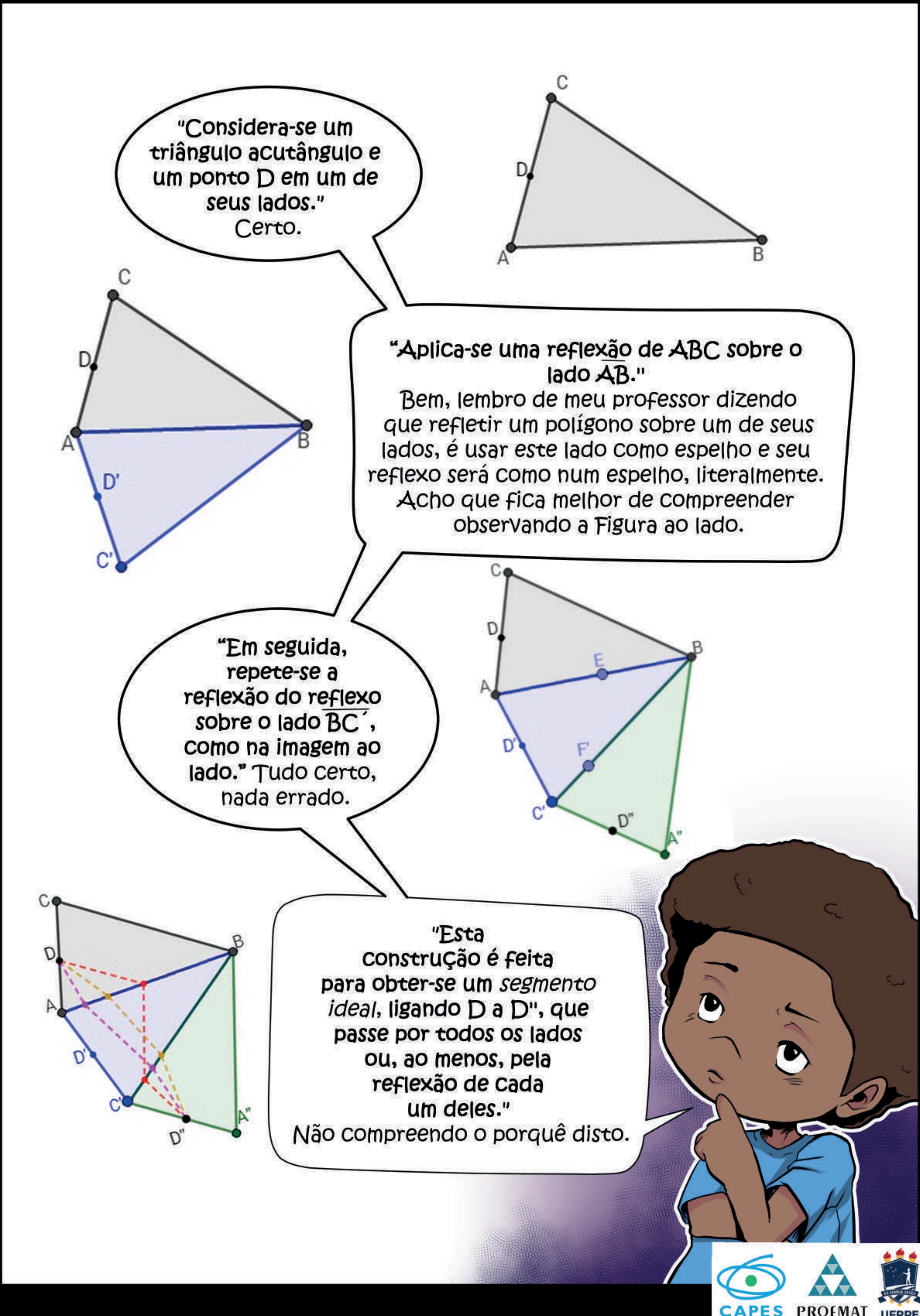
CAPES PROFMAT UFRPE

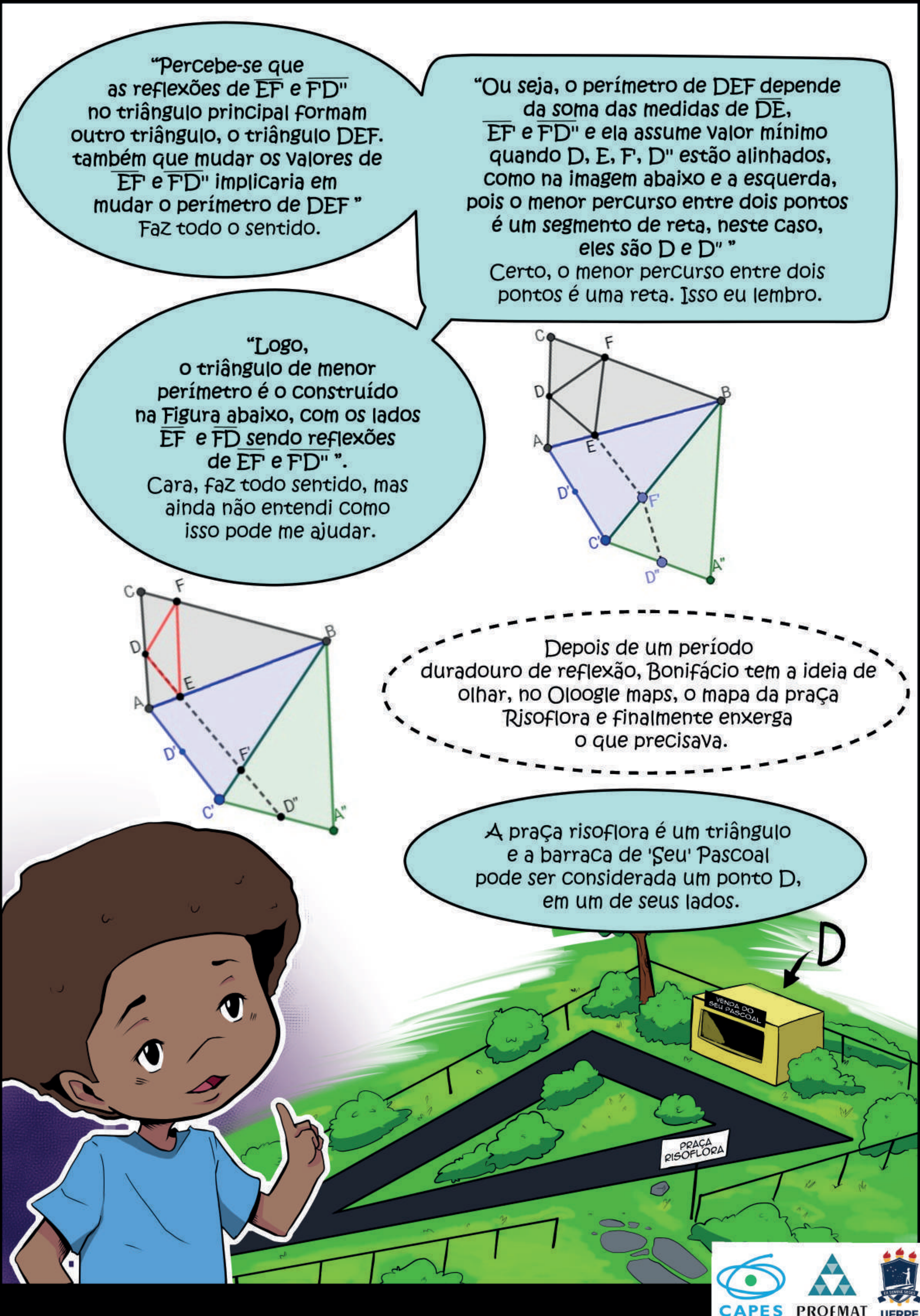
CAPES PROFMAT UFRPE

CAPES PROFMAT UFRPE



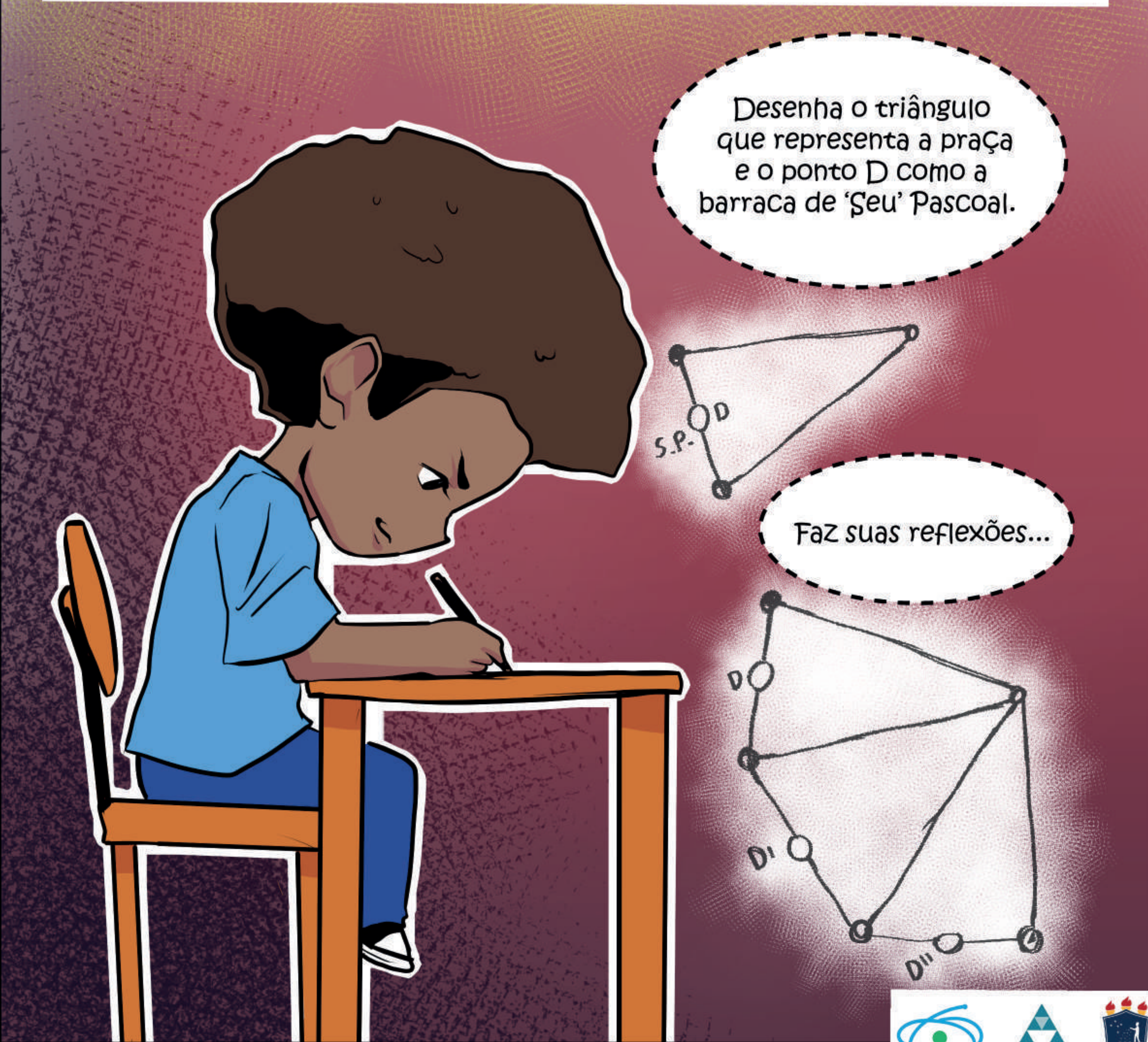
CAPES PROFMAT UFRPE

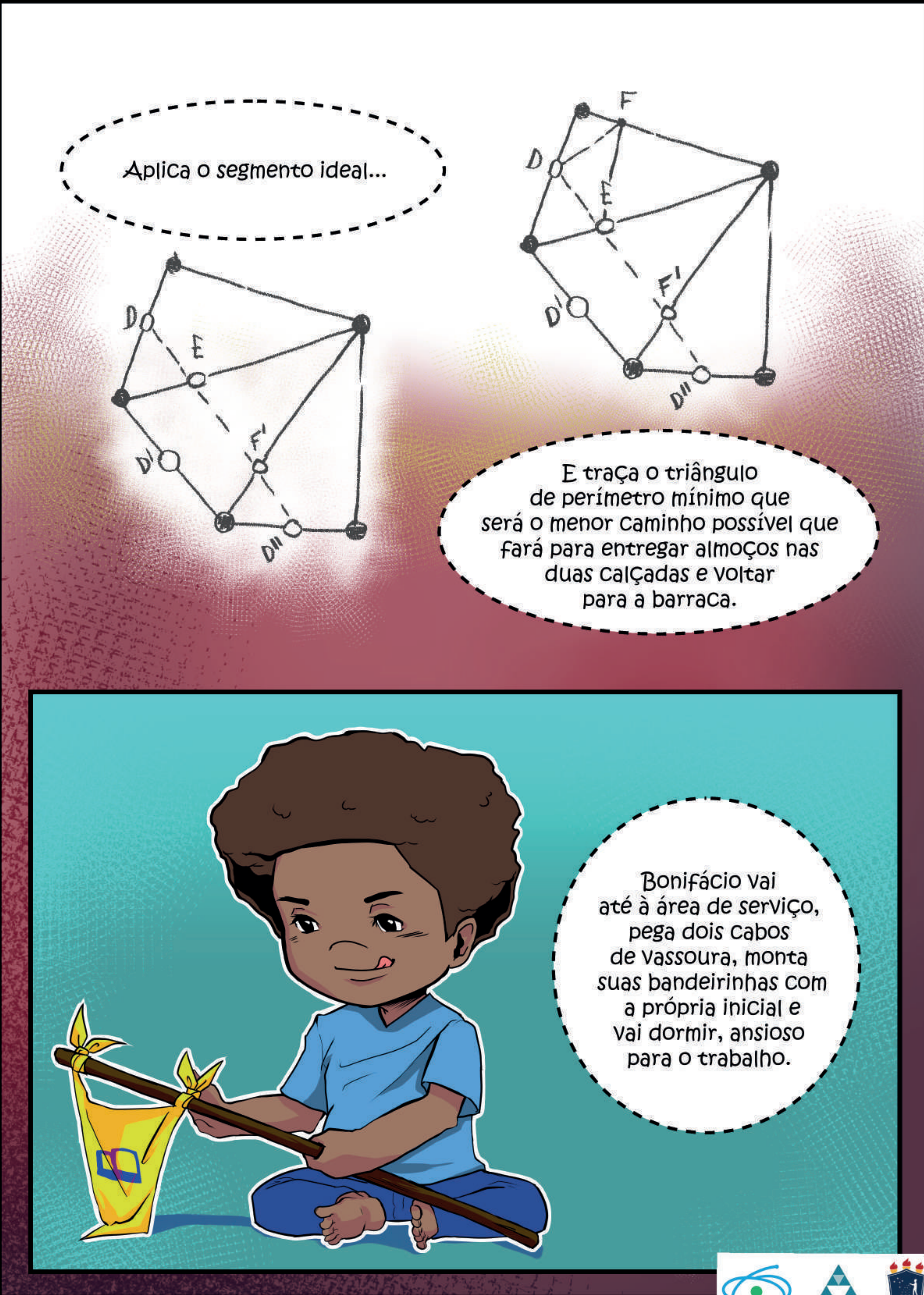

"Considera-se um triângulo acutângulo e um ponto D em um de seus lados." Certo.
"Aplica-se uma reflexão de ABC sobre o lado $\overline{AB}$." Bem, lembro de meu professor dizendo que refletir um polígono sobre um de seus lados, é usar este lado como espelho e seu reflexo será como num espelho, literalmente. Acho que fica melhor de compreender observando a Figura ao lado.
"Em seguida, repete-se a reflexão do reflexo sobre o lado $\overline{BC'}$, como na imagem ao lado." Tudo certo, nada errado.
"Esta construção é feita para obter-se um *segmento ideal*, ligando D a D", que passe por todos os lados ou, ao menos, pela reflexão de cada um deles." Não compreendo o porquê disto.
CAPES PROFMAT UFRPE



“Percebe-se que as reflexões de $\overline{EF'}$ e $\overline{F'D''}$ no triângulo principal formam outro triângulo, o triângulo DEF. também que mudar os valores de $\overline{EF'}$ e $\overline{F'D''}$ implicaria em mudar o perímetro de DEF ” Faz todo o sentido.
“Ou seja, o perímetro de DEF depende da soma das medidas de $\overline{DE}$, $\overline{EF'}$ e $\overline{F'D''}$ e ela assume valor mínimo quando D, E, F', D'' estão alinhados, como na imagem abaixo e a esquerda, pois o menor percurso entre dois pontos é um segmento de reta, neste caso, eles são D e D'' ” Certo, o menor percurso entre dois pontos é uma reta. Isso eu lembro.
“Logo, o triângulo de menor perímetro é o construído na Figura abaixo, com os lados $\overline{EF}$ e $\overline{FD}$ sendo reflexões de $\overline{EF'}$ e $\overline{F'D''}$ ”. Cara, faz todo sentido, mas ainda não entendi como isso pode me ajudar.
C F D B A E D' F' C' D'' A''
C F D B E A D' F' C' D'' A''
Depois de um período duradouro de reflexão, Bonifácio tem a ideia de olhar, no Oloogle maps, o mapa da praça Risoflora e finalmente enxerga o que precisava.
A praça risoflora é um triângulo e a barraca de 'Seu' Pascoal pode ser considerada um ponto D, em um de seus lados.
D
VENDA DO SEU PASCOAL
PRAÇA RISOFLORA
CAPES
PROFMAT
UFRPE


Bonifácio percebe que, de fato, a solução desenvolvida por schwarz realmente serve para ajudá-lo em seu problema com o percurso.
Tsc!
Daí, ele faz manualmente a solução para seu problema.


Desenha o triângulo que representa a praça e o ponto D como a barraca de 'Seu' Pascoal.
S.P.
D
Faz suas reflexões...
D
D'
D''

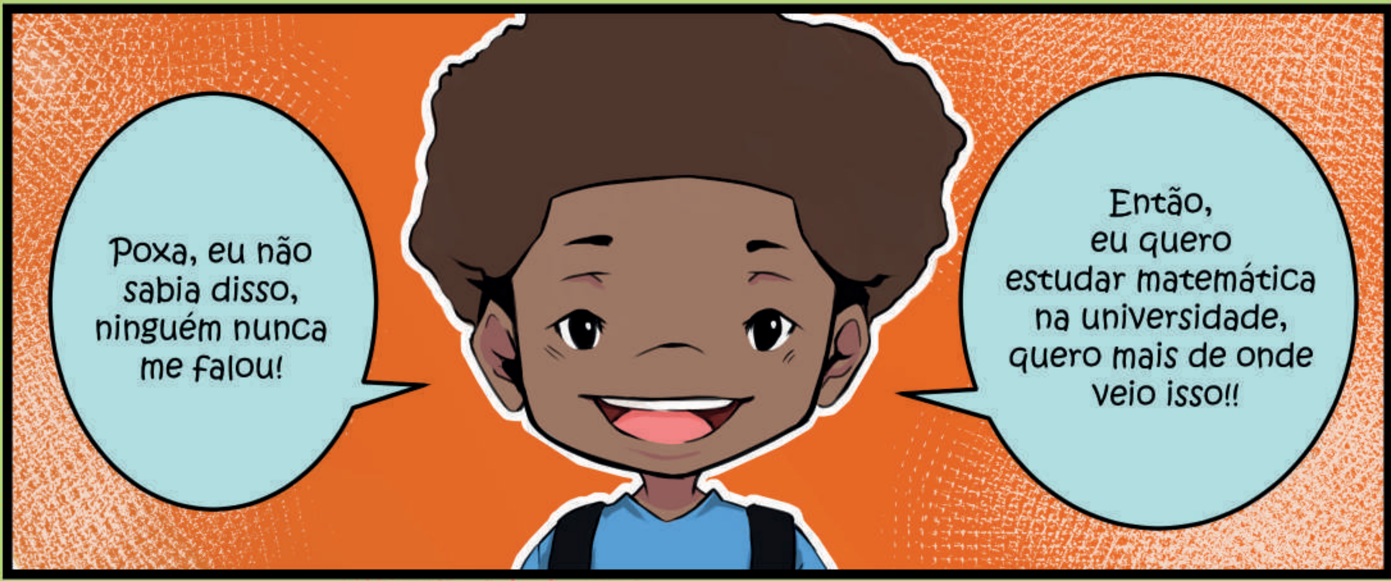

Aplica o segmento ideal...
D
E
F'
D'
D''
F
D
E
F'
D'
D''
E traça o triângulo de perímetro mínimo que será o menor caminho possível que fará para entregar almoços nas duas calçadas e voltar para a barraca.
Bonifácio vai até à área de serviço, pega dois cabos de vassoura, monta suas bandeirinhas com a própria inicial e vai dormir, ansioso para o trabalho.


Já na praça, sente dificuldade de saber onde exatamente fincará as bandeiras. No mapa, está marcado, mas como traduzir o mapa para a praça real? Busca ajuda com 'Seu' Pascoal.
Ah, meu filho. Eu lhe ajudo, você precisa saber a escala do mapa. Eu trabalhei de pedreiro por um tempo, sei como isso funciona. Faça assim, pegue uma trena, meça esta calçada e sua representação no mapa e me traga os valores.
Bonifácio, junto com Pitu, mede tudo e lhe informa.
A calçada tem 30 metros, enquanto que no mapa tem 15 cm.
CAPES PROFMAT UFRPE

CAPES PROFMAT UFRPE


Ei, você tinha razão, funcionou mesmo.
Ah, você leu o artigo??
Sim, me ajudou muito. Como você sabe dessas coisas?
Já te falei no outro dia, eu estudo Matemática na universidade.
Cara, eu gostaria de aprender mais sobre essas coisas, resolver certos problemas da minha vida...
E você pode estudar na universidade também...
Posso mesmo?!

CAPES PROFMAT UFRPE



CAPES PROFMAT UFRPE

Referências

ALVAREZ, T. G. *A matemática da reforma Francisco Campos em ação no cotidiano escolar*. Dissertação (Mestrado) — PUC/SP, São Paulo, SP, 2004.

ARAÚJO JÚNIOR, F. d. P. S. d.; TRINDADE, A. K. B. d.; OLIVEIRA, L. J. d. N. Histórias em quadrinhos como ferramenta de contextualizaço de conceitos matemáticos. PUCSP - **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo/SP, v. 6, n. 1, p. 32-41, 2019. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/332924505_Historias_em_quadrinhos_como_ferramenta_de_contextualizacao_de_conceitos_matematicos>. Acesso em: 18 fev. 2021.

BARBOSA, A. et al. *Como usar histórias em quadrinhos na sala de aula*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BENNATON, J. F. Fermat e o início da história dos problemas de otimização. UNESP, 2001. Disponível em: <https://url.gratis/H4tEw>. Acesso em: 16 dez. 2020.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 1997. Disponível em: <https://url.gratis/AzSLG>. Acesso em: 15 dez. 2020.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília, 1998. Disponível em: <https://url.gratis/0n1a7>. Acesso em: 28 dez. 2020.

BRASIL. *Base Nacional Curricular Comum (BNCC). Educação é a base*. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 12, dez. 2020.

BRITO, D. d. S. *Problemas de Otimização Geométrica aplicados ao estudo de praças*: Uma experiência de ensino com atividades de modelagem matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade estadual de Londrina, Londrina, PR, 2013.

BUESCO, J. *Matemática em Portugal, Uma Questão de Educação referência*. Lisboa: Fundação Francisco Manuel dos Santos, 2016.

CALDATTO, M. E.; PAVANELLO, R. M. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v. 24, n. 1, 103-128, 2015. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/view/22913>. Acesso em: 18, jan. 2021.

CALVETE, C. d. S. *Redução da jornada de trabalho*: uma análise econômica para o Brasil. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas, SP, 2006.

CAMPOS, C. C. de O. *Quadrinhos e o incentivo à leitura*. 2013. Monografia (Graduação de Bacharelado em Biblioteconomia) - UnB, Brasília, 2013.

CARVALHO, C. H. R. d. *Texto para discussão / Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada*. Brasília, 2016. Disponível em: <http://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/6664/1/td_2198.pdf>. Acesso em: 12, dez. 2020.

CARVALHO, J. B. P. F. d. et al. *Matemática*: Ensino fundamental (coleção explorando o ensino; v.17). Brasília:: Ministério da educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.

CASTRO, L. M. d. *O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília (UnB), Brasília, 2014.

CRUZ, N. S. *Aritmética em Sala de Aula*: Jogos, mágicas, diversão e desafios. Dissertação (Mestrado Profissinal em rede nacional - PROFMAT) — UFRPE, Recife, PE, 2017.

FLORES, A. P. X. *Cálculo Variacional*: aspectos teóricos e aplicações. Dissertação (Mestrado Profissinal em Matemática Universitária) — UNESP, Rio Claro, SP, 2011.

FREZZA, M.; GRISCI, C. L. I.; KESSLER, C. K. Tempo e espaço na contemporaneidade: uma análise através de uma revista popular de negócios. **RAC**, Curitiba, v. 13, n. 3, art. 8, p. 487-503, Jul/Ago, 2009. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1415-65552009000300009>. Acesso em: 18, jan. 2021.

GITIRANA, V.; BITTAR, M. Contextualização e tecnologia no Ensino da Matemática. **Perspecivas da Educação Matemática**, Campo Grande/MS, v. 6, n. 11, p. 77-84,jan./jun., 2013. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1wgaGfHV4J1TC4CItHfhTWG4ggNxayZCE/view>. Acesso em: 12 fev. 2021.

GONZALEZ, G. V. *Otimização geométrica da forma e estrutura em um problema de transferência de calor aplicando a teoria constructal e o Simulated Anneling*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Rio Grande, RS, 2015.

GRANDO, R. C. *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese (Doutorado) — UNICAMP, Campinas, SP, 2000.

KONZEN, S.; BERNARDI, L. T. M. d. S.; CECCO, B. L. O campo do ensino de Geometria no Brasil: Do Brasil colônia ao período do regime militar. **Revista Hipátia**, Campus do Jordão/SP, v. 2, n. 2, p. 58-70, 2017. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/712>. Acesso em: 18 fev. 2021.

LEÃO, D. M. M. Paradigmas contemporâneos de educação: Escola tradicional e escola construtivista. **Caderno de Pesquisa**, n° 107, p. 187-206, julho, 1999. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/cp/n107/n107a08.pdf>. Acesso em: 18, jan. 2021.

LOVETRO, J. A. Quadrinhos além dos gibis. em: Histórias em quadrinhos: um recurso de aprendizagem. **Salto Para o Futuro**. Ano XXI, boletim 01 - abril, 2011. Disponível em: <encurtador.com.br/lrS27>. Acesso em: 10 jan. 2021.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*. São Paulo: Cortez Editora, 1998. p.180.

MADEIRA, T. M. *O problema isoperimétrico clássico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal, 2005.

MELO, Z. M. d. et al. Família, àlcool e violência em uma comunidade da cidade do recife. **Psicologia em estudo**, Maringá, v. 10, n. 2, p. 201 - 208, mai./ago, 2005. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-73722005000200006>. Acesso em: 18, jan. 2021.

MENESES, R. S. d. *Uma história da geometria escolar no Brasil*: de disciplina a conteúdo de ensino. Dissertação (Mestrado) — PUC/SP, São Paulo, SP, 2007.

MODESTO, M. C.; RUBIO, J. de A. S. A importância da ludicidade na construção do conhecimento. **Revista Eletrônica Saberes da Educação**, v. 5, n. 1, 2014. Disponível em: <http://docs.uninove.br/arte/fac/publicacoes_pdf/educacao/v5_n1_2014/Monica.pdf>. Acesso em: 18, jan. 2021.

NUNES, R. d. S.; NUNES, J. M. V. Modelos constitutivos de sequências matemáticas: Enfoque na teoria das situações didáticas. Revista Exitus, Santarém/PA, Vol. 9, N° 1, p. 148 - 174, JAN/MAR, 2019. Disponível em: <http://www.ufopa.edu.br/portaldeperiodicos/index.php/revistaexitus/article/view/719>. Acesso em: 18, jan. 2021.

OLIVEIRA, C. L. *Significado e contribuições da afetividade, no contexto da Metodologia de Projetos, na Educação Básica*. Dissertação (Mestrado) — Capítulo 2, CEFET-MG, Belo Horizonte-MG, 2006.

PAIXÃO, R. F. *Variáveis individuais e familiares e sua relação com autoestima e saúde mental na adolescência*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2014.

PASQUALI, K. C. Máximos e mínimos em geometria euclidiana plana. Florianópolis: UFSC, 1990.

PAVANELLO, R. M. O abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, 1993. Disponível em: <encurtador.com.br/wzJP3>. Acesso em: 18, jan. 2021.

PERETI, L.; TONIN DA COSTA, G. M. Sequência didática na matemática. **Revista de Eduação do IDEAU**, Getúlio Vargas/RS, Vol. 8 – Nº 17 - Janeiro - Junho, 2013. Disponível em: <https://www.bage.ideau.com.br/wp-content/files_mf/7ff08743d52102854eaaf22c19c4863731_1.pdf>. Acesso em: 18 fev. 2021.

PUBLIUS, V. M. *Eneida*. Trad. de Carlos Alberto Nunes. Brasília: Editora Universidade de Brasília; São Paulo, A Montanha, 1983.

RIOS, S. C. G. d. S.; CASSUNDÉ, F. R. S. A. Reflexões sobre a implicação da avaliação no progresso ensino/aprendizagem. *REVASF*, Petrolina-PE, vol. 6, n.11, p. 102-114 dez., 2016. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/316941135_REFLEXOES_SOBRE_A_IMPLICACAO_DA_AVALIACAO_NO_PROCESSO_ENSINOAPRENDIZAGEM#:~:text=A%20avalia%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A9%20uma%20das,dentro%20de%20um%20processo%20pedag%C3%B3gico.&text=do%20aluno%20e%20o%20alcance,alcan%C3%A7ados%20e%20em%20que%20intensidade.> Acesso em: 18, jan. 2021.

ROBALINHO, E. *Otimização da forma geométrica de estruturas utilizando o método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN), São Paulo, SP, 1998.

SANTOS, E. S. d. *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*. Dissertação (Mestrado Profissinal em rede nacional - PROFMAT) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2013.

SANTOS, H. D. R. d. S.; SILVA, R. H. S.; LUCENA, R. Funções matemáticas em quadrinhos: Contextualização com o pixton. **XIV Congresso Internacional de Tecnologia na Educação**, Brasil|Recife|Setembro, 2016. Disponível em: <encurtador.com.br/bdFHI>. Acesso em: 12 fev. 2021.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de geometria: Rumos da pesquisa (1991-2011). **Revista Revemat**, Florianópolis/SC, v.08, n. 1 ,p. 138 - 155, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138>. Acesso em: 18 fev. 2021.

SILVA JÚNIOR, R. V. d. *A Lotérica de Galton*. Dissertação (Mestrado Profissinal em rede nacional - PROFMAT) — UFRPE, Recife, PE, 2018.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. *Cadernos do Mathema*: Jogos de materática de 6º a 9º ano. Porto Alegre: Artmed, 2007.

SOUZA, F. F. d. *A lenda de Dido como motivação para o estudo de figuras isoperímetro na Educação Matemática*: Explorando a dedução-lógica. Dissertação (Mestrado Profissinal em rede nacional - PROFMAT) — IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2012.

TEIXEIRA, A. D.; RIBEIRO, B. de O. Geração z: Problemáticas do uso da internet na educação escolar. **Ciclo Revista**, v. 3 n. 1 (2018): Anais do 3º ELPED e do 4º ELICPIBID, 2018. Disponível em: <https://www.ifgoiano.edu.br/periodicos/index.php/ciclo/article/view/850>. Acesso em: 18, jan. 2021.

TEIXEIRA, L. H. O. A abordagem tradicional de ensino e suas repercussões sob a percepção de um aluno. **Revista Educação em foco**, n. 10, p. 93-103, 2018. Disponível em: <https://portal.unisepe.com.br/unifia/wp-content/uploads/sites/10001/2018/08/009_A_ABORDAGEM_TRADICIONAL_DE_ENSINO_E_SUAS_REPERCUSS%C3%95ES.pdf>. Acesso em: 18, jan. 2021.

TOLEDO, P. B. F. O comportamento da Geração Z e a influência nas atitudes dos professores. In: *Simpósio de Excelência e Gestão em Tecnologia, 9.* , 2012, Resende/RJ. **Anais eletrônicos**[...]. Resende/RJ: IX Simpósio de Excelência e Gestão em Tecnologia, 2012. p. 1–16. Disponível em: <https://www.aedb.br/seget/arquivos/artigos12/38516548.pdf>. Acesso em: 18, jan. 2021.

VENTURINI, D. M. *A importância da ludicidade na escola na perspectiva de professores atuantes dos anos iniciais do Ensino Básico*. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação de Licenciatura em Pedagogia) - UNESP, Bauru - SP, 2016.

ZABALA, A. *A Prática Educativa*: Como ensinar. tradução Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ARTMED, 2010.