

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

ÉRICO SANTANA DE MACÊDO

**A Terra não é plana : como a Geometria do
Ensino Fundamental pode ensinar noções de
Astronomia**

Campinas

2021

Érico Santana de Macêdo

A Terra não é plana : como a Geometria do Ensino Fundamental pode ensinar noções de Astronomia

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Roberto Andreani

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Érico Santana de Macêdo e orientada pelo Prof. Dr. Roberto Andreani.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M151t Macêdo, Érico Santana de, 1989-
A terra não é plana : como a geometria do ensino fundamental pode ensinar noções de astronomia / Érico Santana de Macêdo. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Roberto Andreani.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Astronomia. 2. Educação matemática. 3. Ensino fundamental. 4. Geometria plana. 5. História da ciência. 6. Trigonometria. 7. Terra plana. I. Andreani, Roberto, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The earth is not flat : how high school geometry can teach notions of astronomy

Palavras-chave em inglês:

Astronomy

Mathematics education

Elementary school

Plane geometry

History of science

Trigonometry

Flat earth

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Roberto Andreani [Orientador]

Claudina Izepe Rodrigues

Jamielli Tomaz Pereira

Data de defesa: 30-03-2021

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-0476-3190>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/7537333992153873>

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 30 de março de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof(a). Dr(a). JAMIELLI TOMAZ PEREIRA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

A Jorge da Costa Macedo (in memoriam), “pois quando o espelho é bom, ninguém jamais morreu”.

Agradecimentos

Agradeço à minha mãe, Kátia Ferraz Santana, por me educar pelo exemplo. Sua dedicação aos estudos, sua postura profissional, os jornais, livros e discos que havia em casa influenciaram grandemente a minha formação. Em especial os volumes da *História Ilustrada da Ciência*, que constituíram fonte valiosa para este trabalho.

Ao professor Roberto Andreani, não apenas por sua orientação, mas por sua incansável batalha pelo PROFMAT na Unicamp. Sua dedicação à formação de professores da rede pública motiva todos os participantes do programa.

A todos os professores do IMECC que, lecionando ou orientando, compõem o PROFMAT e programas como o Prolímpico, PAPMEM e “OBMEP na escola”, por dedicarem seu tempo aos docentes da Educação Básica, mesmo sem, muitas vezes, terem o devido reconhecimento institucional.

A meus amigos Amanda, André e Danilo e Nicolás pelo companheirismo compartilhado desde a adolescência, e por acompanharem de perto a gestação deste trabalho.

A meu amigo Eugênio Gonçalves, pela amizade de décadas e pelas sempre construtivas conversas, que acabaram rendendo referências para esta pesquisa.

A meus cachorros Bituca, Rita, Ronaldo e Rosa, pelo amor incondicional que me ofertam, e pela lealdade e companhia em tempos alegres e difíceis de minha vida.

A meu amigo Marcelo, que sempre que precisei cuidou tão bem de meus amigos caninos acima citados, o que influenciou diretamente na conclusão da dissertação.

A todos os alunos a quem já tive o privilégio de lecionar, em especial as turmas de 9º ano, em 2019, da escola Mário Bergamasco, onde o projeto aqui descrito foi realizado.

À equipe gestora, no ano de 2019, da escola Mário Bergamasco, que viabilizou a realização do projeto, além de sempre me incentivar e confiar em meu trabalho. Obrigado, diretora Ilma e coordenadoras Bia e Wilza. Vocês são grandes referências para mim.

Aos educandos e educadores dos cursinhos populares “Oziel Alves Pereira” e “DCE Unicamp/Dandara dos Palmares”, onde forjei minha prática docente e minha leitura de mundo.

Ao IMPA, pela criação e manutenção do PROFMAT, permitindo a nós, professores de rede pública, o acesso à Academia, levando o devido retorno a nossos alunos.

A todos aqueles que lutam por uma educação pública de qualidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“[...] me parece uma enorme contradição que uma pessoa progressista, que não teme a novidade, que se sente mal com as injustiças, que se ofende com as discriminações, que se bate pela decência, que luta contra a impunidade, que recusa o fatalismo cínico e imobilizante, não seja criticamente esperançosa.”

Paulo Freire

Resumo

O recrudescimento de movimentos que negam a Ciência, como o terraplanismo, preocupa professores, pesquisadores e a sociedade em geral, devido à nocividade de suas ideias. Neste trabalho é apresentada uma proposta de como trabalhar o tema do formato da Terra, a partir de duas perspectivas: a histórica e a matemática. Na perspectiva histórica espera-se que o aluno compreenda como funciona a evolução de conceitos científicos, e por que determinada teoria é estabelecida como verdadeira. Na perspectiva matemática procura-se utilizar conceitos simples de Geometria para se realizar demonstrações em Astronomia. Também propõe-se atividades práticas, como a participação no Projeto Eratóstenes, no qual centenas de escolas ao redor do mundo compartilham medições a fim de se obter o raio da Terra.

Palavras-chave: Astronomia; Educação Matemática; Ensino Fundamental; Geometria Plana; História da Ciência; Terra Plana; Trigonometria.

Abstract

The recrudescence of movements that deny Science, such as the Flat Earthism, worries teachers, researchers and society in general, due to the harmfulness of their ideas. This work presents a proposal on how to work on the Earth's shape theme, from two perspectives: historical and mathematical ones. In the historical perspective, the student is expected to understand how the evolution of scientific concepts works, and why a certain theory is established as true. In the mathematical perspective, we tried to use simple concepts of Geometry to perform demonstrations in Astronomy. Practical activities are also proposed, such as participation in the Eratosthenes Project, in which hundreds of schools around the world share measurements in order to obtain the Earth's radius.

Keywords: Astronomy; Mathematical Education; High School; Plane Geometry, History of Science; Flat Earth; Trigonometry. .

Lista de ilustrações

Figura 1 – Evolução das buscas pelo termo “Terra Plana” no <i>Google</i> (o índice 100 indica o momento em que houve a procura máxima, mas a empresa não informa a quantidade de buscas). ¹	15
Figura 2 – Pessoas que procuram por “Terra Plana” também costumam procurar por “Olavo de Carvalho”. ²	16
Figura 3 – Nativos de Bornéu determinando o meio-dia solar, em 1910, do mesmo modo que as primeiras civilizações ³	24
Figura 4 – Papiro egípcio no qual vemos <i>Nut</i> amparada por <i>Chu</i> , enquanto <i>Geb</i> aparece deitado. ⁴	25
Figura 5 – O movimento de um planeta em torno da Terra, segundo Ptolomeu ⁵	30
Figura 6 – Mapa estelar chinês, do século X, onde se vê as constelações Cão Menor, Câncer, Hidra, Cão Maior, Órion e Lebre ⁶	31
Figura 7 – Sistema heliocêntrico de Copérnico, como publicado em <i>Das Revoluções</i> ⁷	33
Figura 8 – Esquema de um universo infinito proposto por Leonard e Thomas Digges (1576), sem uma “Esfera Celeste”, que inspirou Giordano Bruno ⁸	33
Figura 9 – Esquema do universo por Tycho Brahe ⁹	34
Figura 10 – Ilustração do <i>Diálogo</i> , de Galileu, em que se vê, da esquerda para a direita: Aristóteles, Ptolomeu e Copérnico ¹⁰	36
Figura 11 – Triângulos congruentes	39
Figura 12 – Demonstração do caso ALA	40
Figura 13 – Triângulo isósceles	40
Figura 14 – Demonstração do caso LLL	41
Figura 15 – Ângulo externo e os internos não adjacentes	42
Figura 16 – Demonstração do Teorema do Ângulo Externo	42
Figura 17 – Ângulos alternos internos	43
Figura 18 – Demonstração do Teorema 3.2.2	43
Figura 19 – Ângulos correspondentes	44
Figura 20 – Demonstração do Teorema 3.2.3	44
Figura 21 – Demonstração do Teorema 3.2.4	45
Figura 22 – Demonstração do Teorema 3.2.5	45
Figura 23 – A soma dos ângulos internos de um triângulo	46
Figura 24 – Caso em que A e D são distintos, s e t não paralelas	47
Figura 25 – Caso em que $A=D$, s e t não paralelas	47
Figura 26 – Caso em que s e t são paralelas	48
Figura 27 – O Teorema Fundamental da Proporcionalidade	49
Figura 28 – Demonstração do Teorema para segmentos comensuráveis	49

Figura 29 – Demonstração do Teorema para segmentos incomensuráveis	50
Figura 30 – Recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade	51
Figura 31 – Triângulos semelhantes	51
Figura 32 – Demonstração do caso de semelhança AAA	52
Figura 33 – Demonstração do caso de semelhança LAL	53
Figura 34 – Triângulo retângulo e seus elementos	54
Figura 35 – Demonstração das relações métricas no triângulo retângulo	55
Figura 36 – Triângulos retângulos semelhantes	56
Figura 37 – Modelo para o problema da pirâmide.	57
Figura 38 – Modelo para o problema do navio.	58
Figura 39 – Teodolito feito com transferidor de lousa e tubo de papelão	59
Figura 40 – Exercício do Vestibulinho ETEC - 2011.	60
Figura 41 – Modelo para o experimento de Eratóstenes	61
Figura 42 – Determinação do ângulo de incidência do raio de Sol.	61
Figura 43 – Distância em linha reta entre Alexandria e Siena (atual Assuã), segundo o <i>Google Maps</i>	63
Figura 44 – Modelo para a demonstração de Aristarco	63
Figura 45 – Modelo para a o cálculo da distância Terra-Sol (fora de escala)	64
Figura 46 – Modelo para a determinação do diâmetro do Sol (fora de escala)	65
Figura 47 – Experimento feito com alunos	66
Figura 48 – Caso em que as localidades estão no mesmo hemisfério	68
Figura 49 – Caso em que as localidades estão em hemisférios distintos	69
Figura 50 – Evolução do IDEB da escola Mário Bergamasco ¹¹	70
Figura 51 – Alunos assistindo à explicação de Carl Sagan para o experimento de Eratóstenes	74
Figura 52 – Professor medindo a altura do gnômon	75
Figura 53 – Aluno medindo a sombra do gnômon	76
Figura 54 – Aluna anotando as medidas	77
Figura 55 – Certificado de participação no Projeto Eratóstenes	78

Lista de tabelas

Tabela 1 – Ambientes de aprendizagem ¹²	19
Tabela 2 – Habilidades que serão utilizadas nas demonstrações e experimentos, de acordo com a BNCC	22
Tabela 3 – Sombra do gnômon em função do horário, a fim de se obter o meio-dia solar	72
Tabela 4 – Medidas obtidas pelo <i>Institut Brugulat</i>	72

Sumário

	Introdução	15
1	FUNDAMENTAÇÃO PEDAGÓGICA	19
1.1	Matemática para além dos exercícios	19
1.2	Adequação ao currículo	21
2	UM POUCO DE HISTÓRIA	23
2.1	Da Terra plana à Terra esférica	23
2.2	Do geocentrismo ao heliocentrismo	32
3	REFERENCIAL TEÓRICO	39
3.1	Congruência de triângulos	39
3.2	Retas paralelas cortadas por uma transversal	41
3.3	O Teorema Fundamental da Proporcionalidade	46
3.4	Semelhança de triângulos	51
3.5	Triângulos Retângulos	54
3.6	Trigonometria no triângulo retângulo	55
4	ALGUMAS APLICAÇÕES	57
4.1	Tales e a pirâmide	57
4.2	Tales e o navio	58
4.3	Alturas inacessíveis com um teodolito	59
4.4	A medida da circunferência da Terra.	61
4.5	A distância da Terra à Lua	63
4.6	A distância da Terra ao Sol	64
4.7	Determinando o diâmetro do Sol	65
4.8	Considerações sobre os exemplos desse capítulo	67
5	O PROJETO ERATÓSTENES	68
5.1	O projeto	68
5.2	A rede de ensino municipal de Jaguariúna	69
5.3	O experimento	71
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	79
	REFERÊNCIAS	80

Introdução

Segundo pesquisa do Datafolha, 7% dos brasileiros (cerca de 11 milhões de pessoas) acreditam que a Terra seja plana¹³. Ainda não há um estudo rigoroso no Brasil sobre a ascensão do terraplanismo, mas uma pesquisa no *Google Trends* nos mostra que o interesse por esse assunto começou no início de 2015, e teve seu auge em setembro de 2019, pouco antes da primeira convenção nacional da Terra Plana, ocorrida em 10 de Novembro de 2019, em São Paulo. Além disso, a análise do *Google* nos mostra que quem procura pelo termo “Terra Plana” também costuma procurar pelo nome de Olavo de Carvalho, autointitulado filósofo brasileiro que exerce grande influência sobre o governo Bolsonaro¹⁴ conhecido por já ter tecido vários comentários que questionam o método científico estabelecido e a reputação de cientistas como Newton,¹⁵ Einstein¹⁶ e Carl Sagan.¹⁷

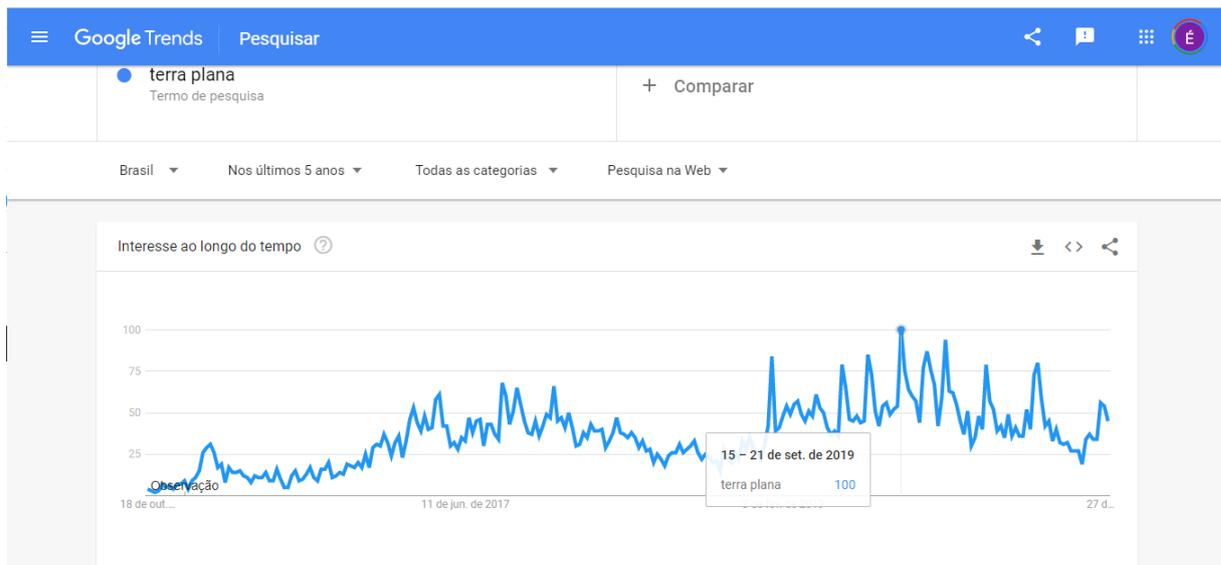


Figura 1 – Evolução das buscas pelo termo “Terra Plana” no *Google* (o índice 100 indica o momento em que houve a procura máxima, mas a empresa não informa a quantidade de buscas).¹⁸

¹³ (GARCIA, 14 de jul. de 2019)

¹⁴ (GORTÁZAR, 13 de abr. de 2019)

¹⁵ (CARVALHO, 15 de jun. de 2006)

¹⁶ (TESSLER, 10 de jan. de 2019)

¹⁷ (CARVALHO, 10 de jun. de 2019)

¹⁸ (GOOGLE, 2019)

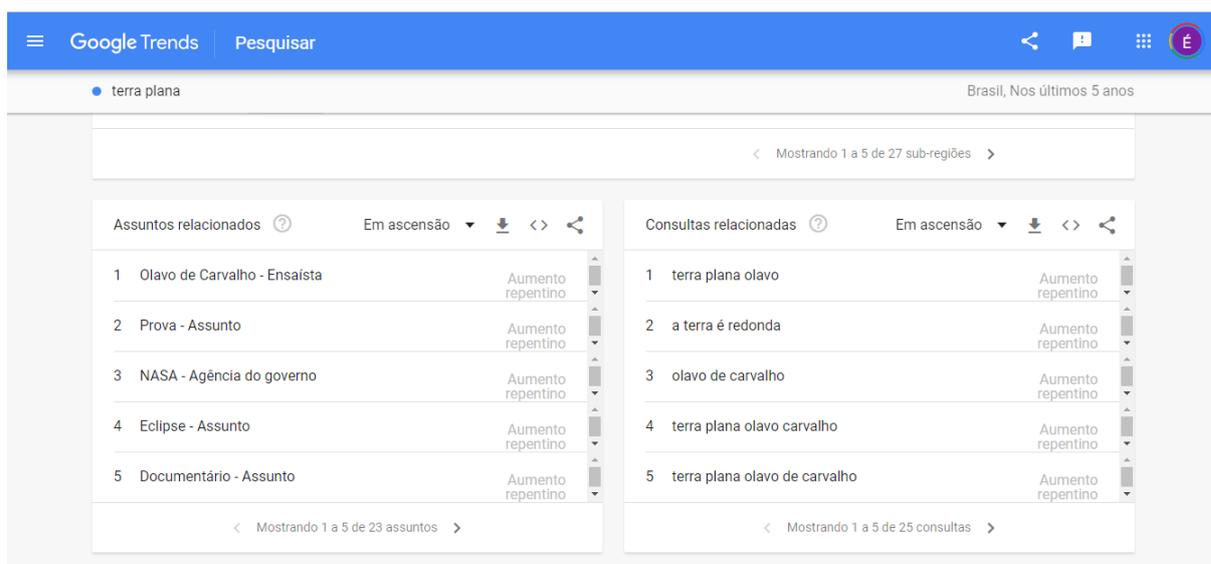


Figura 2 – Pessoas que procuram por “Terra Plana” também costumam procurar por “Olavo de Carvalho”.¹⁹

Hoje proliferam pelo *YouTube* vídeos de autointitulados cientistas, filósofos e teólogos que tentam explicar a seus seguidores o “real formato da Terra”. Também existem dezenas de grupos de *Facebook* com essa discussão. Nesses vídeos e grupos, fica evidente a falta de conhecimento de princípios básicos de Ciências da Natureza e de Matemática.

Com a pandemia do Coronavírus, vimos que o desconhecimento científico não tem como consequência apenas um movimento considerado, a princípio, cômico e inofensivo; no lastro do terraplanismo, encontramos militantes antivacina, contra o uso de máscaras, contra o isolamento social, contra a aferição de temperatura com termômetros digitais e a favor do uso de medicamentos sem eficácia comprovada.

Porém o foco desta dissertação não será um estudo do movimento terraplanista e anticiência no Brasil (o que pode ficar para um próximo trabalho), e nem uma resposta aos argumentos “científicos” dos terraplanistas, por não se acreditar que isso seja produtivo. Segundo Jorge Coli:

Francis Bacon, que rompeu com a tradição das autoridades clássicas como Aristóteles, no século 17, alerta para as dificuldades do conhecimento, mesmo quando aparentemente apoiado por razões: “O entendimento humano, quando uma vez adotou uma opinião [...] atrai todas as outras coisas para apoiá-la e concordar com ela.”

Por isso é tão difícil debater com mentes previamente convictas, por razões ideológicas, partidárias ou quaisquer outras. Quem acredita que a Terra é

¹⁹ (GOOGLE, 2019)

plana terá argumentos falsamente racionais, já que partem do irracionalismo provocado por uma convicção íntima.²⁰

Também não é interessante a posição de desespero frente aos “novos tempos”, uma vez que a opção por acreditar em superstições, no lugar da Ciência, sempre acompanhou a humanidade, mesmo que sempre criticada por pensadores de cada época, como lembra Eugênio Gonçalves em um estudo sobre o filósofo Gabriel Naudé (séc. XVII).

A violenta crítica de Naudé ao caráter que atribui sem titubear às massas não é algo inédito em sua obra. Data de 1625 o texto *Apologie pour tous les grands personnages qui ont este faussement soupçonnez de magie*, publicado em Paris pelo bibliotecário. Nele, o jovem Gabriel critica o misticismo e as tolas credences populares, que fazem com os que homens, através de suas superstições, vejam a presença de um deus em um “dente de macaco, de um boi, de um gato, de uma cebola ou de algum outro ídolo ainda mais ridículo (...)” .

Essas crenças, aliás, são também elas outro viés a ser explorado pelos homens de Estado, que podem utilizá-las como um meio seguro de melhor atingir os objetivos traçados. Fazer crer à população que seu príncipe possui contato direto com uma divindade abre caminho para que ele consiga realizar sem dificuldades as empreitadas que almeja. Efeito semelhante pode ser adquirido fingindo milagres, sonhos, visões e profecias, o que aproxima o governante das religiões do povo, ganhando a estima dele²¹.

Em seu livro *O Mundo Assombrado Pelos Demônios*, Carl Sagan explica como um conceito como o de mecânica quântica gera tanta desconfiança:

Vamos imaginar que alguém queira seriamente compreender o que é a mecânica quântica. É preciso que primeiro adquira uma base, o conhecimento de cada subdisciplina matemática, transportando-o ao limiar da seguinte. Uma a uma, ele deve aprender aritmética, geometria euclidiana, álgebra da escola secundária, cálculo diferencial e integral, equações diferenciais ordinárias e parciais, cálculo vetorial, certas funções especiais da física matemática, álgebra matricial e teoria dos conjuntos. Isso pode ocupar a maioria dos estudantes de física desde a terceira série primária até o início do curso de pós-graduação - aproximadamente quinze anos. Esse plano de estudos não envolve realmente o aprendizado da mecânica quântica, mas apenas estabelece os fundamentos matemáticos necessários para conhecê-la em profundidade.

²⁰ (COLI, 11 de ago. de 2019)

²¹ (GONÇALVES, 2015, p. 46)

O trabalho do divulgador da ciência, tentando transmitir uma ideia da mecânica quântica a um público leigo que não passou por esses ritos de iniciação, é desalentador. Na realidade, acho que não existe nenhuma divulgação bem-sucedida da mecânica quântica - em parte por essa razão. Essas complexidades matemáticas se combinam o fato de a teoria quântica ser definitivamente contrária à intuição. Para abordá-la, o senso comum é quase inútil. Não funciona, disse Richard Feynman certa vez, ao perguntar por que ela *é* assim. Ninguém sabe por que ela *é* assim. É simplesmente assim.²²

Das citações acima, vemos que:

- 1-) É muito difícil argumentar com um adulto já “convertido” ao terraplanismo.
- 2-) Certos conceitos científicos exigem anos de estudo para serem compreendidos.

Felizmente, entender o formato da Terra envolve menos pré-requisitos do que o estudo de mecânica quântica. Assim sendo, o objetivo desta dissertação é responder à seguinte pergunta: como evitar que nossos alunos se tornem adultos terraplanistas? Como fazê-los compreender o funcionamento do método científico, para que não acreditem em qualquer boato que vejam na internet? No caso específico do formato da Terra, acredito que se um estudante possuir bases sólidas de Física, Geografia e Matemática, esse conhecimento jamais poderá ser no futuro substituído por pseudociências. Isso é o que eu tentei fazer com meus alunos de nono ano em 2019, e são essas experiências que relatarei neste trabalho.

²² (SAGAN, 1996, p. 247)

1 Fundamentação Pedagógica

1.1 Matemática para além dos exercícios

É comum que se questione professores de Matemática sobre a utilidade do conteúdo que ensinam ou sobre um suposto engessamento de seus métodos. Assim como é comum a ojeriza que alguns professores possuem a esse tipo de crítica, numa defesa quase religiosa de certos conteúdos e de certos métodos, como a repetição infundável de exercícios.

Creio que a dicotomia entre o ensino por exercícios e o ensino da Matemática “contextualizada” seja falsa, e muitos dos debates que ouvimos em salas de professores e até mesmo na mídia mostrar-se-iam inócuos se dedicássemos algum tempo de nossas vidas à leitura do que produzem os pesquisadores em Educação Matemática.

Crítico do “paradigma do exercício” em sala de aula, Skovsmose propõe uma interessante classificação do que ele chama de *ambientes de aprendizagem*, dividindo-os entre “exercícios” e “cenários para investigação”, e com uma escala que vai de “referências à matemática pura” a “referências à realidade”, conforme a tabela:

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à Matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Tabela 1 – Ambientes de aprendizagem¹

Os ambientes (1), (3) e (5) seriam aqueles em que os temas são tratados apenas como exercícios em sala de aula, sendo que em (1), os exercícios são puramente teóricos, e no caso (3), referem-se a problemas reais. Os ambientes (2) (4) e (6) seriam atividades exploratórias e investigativas.

No ambiente (1) por exemplo, os alunos resolveriam exercícios de álgebra sem contexto algum, como a prática de desenvolvimento de produtos notáveis. No ambiente (2), o desenvolvimento de um produto notável poderia estar envolvido com uma investigação envolvendo áreas. No ambiente (3), existe uma contextualização pré-estabelecida pelo material didático, mas sem que o aluno possa interferir nos dados do problema. Por exemplo, pede-se para otimizar o volume de uma piscina, mas não são permitidos questionamentos do tipo; essa piscina é para adultos ou crianças? A sua profundidade é fixa ou pode variar?

¹ (SKOVSMOSE, 2000, p.73)

No ambiente (4), o problema também é pré-estabelecido, mas não como um exercício, mas como atividade exploratória. Finalmente, nos ambientes (5) e (6), os problemas são reais: leva-se, por exemplo, os alunos a tirar as medidas de uma piscina e resolve-se todos os questionamentos que possam surgir dessa prática, desde os custos dos materiais à tarifa da conta de água.

Skovsmose nos convida a superar os ambientes de (1) a (3), onde estão inseridas a maior parte dos problemas vistos em sala de aula, mas não defende que o ambiente (6) seja o único possível na Educação Matemática². Inclusive afirma que, uma vez em contato com o ambiente (6), os alunos podem se sentir motivados a reforçar os pré-requisitos necessários para compreendê-lo, voltando assim ao ambiente (1) para resolverem exercícios de fixação³.

Assim, propõe-se que ao longo do ano letivo o professor aborde os diferentes tipos de ambiente, e ao final dele, avalie, junto aos alunos, quais funcionaram melhor. Por experiência própria, afirmo que muitos alunos continuarão se sentindo mais confortáveis com o método “o professor explica na lousa e eu resolvo os exercícios no meu caderno”, e não há problema algum nisso; o problema está em ignorar os alunos que preferem outros ambientes.

Acredito que as investigações que propus aos meus alunos são uma tentativa de colocar em prática o ambiente de aprendizagem do tipo (6). No ano de 2019, construímos teodolitos e com eles determinamos alturas inacessíveis; determinamos o diâmetro do Sol e reproduzimos o experimento de Eratóstenes. São situações evidentemente práticas e reais, não são falsas contextualizações. Através dos experimentos, colocamos em prática conteúdos de Geometria previstos pelo currículo. Durante as atividades práticas, surgiam muitas dúvidas que eu não havia previsto, e muitas vezes os próprios alunos conseguiam saná-las com autonomia.

Também é importante que os alunos entendam que o conhecimento produzido pela humanidade é construído, e não “natural”. Se estudamos Geometria Plana hoje é porque os escribas egípcios precisavam determinar áreas de terrenos a fim de calcular impostos⁴. Se utilizamos a álgebra, é porque al-Khwarizmi precisava pôr em prática o sistema de divisão de heranças de acordo com os preceitos do Corão⁵. E, por fim, se existe um conhecimento estabelecido sobre o formato da Terra e a estrutura do universo, ele é resultado da contribuição de praticamente todas as civilizações de que se tem notícia, que, a princípio, precisavam responder desde questionamentos práticos sobre agricultura a questões metafísicas, como a suposta influência dos astros em nosso destino. Lentamente, todo o misticismo envolvendo a astronomia foi abandonado, mas não sem muita disputa,

² (SKOVSMOSE, 2000, p.80)

³ (SKOVSMOSE, 2000, p.81)

⁴ (MLODINOW, 2004, p. 18)

⁵ (D'AMBROSIO, 1996, p. 32)

como veremos no capítulo 3.

Segundo Corazza (citada por Gasparin):

Sendo assim, o conhecimento se origina na prática social dos homens e nos processos de transformação da natureza por eles forjados. [...] Agindo sobre a realidade os homens a modificam, mas numa relação dialética, esta prática produz efeitos sobre os homens, mudando tanto seu pensamento, como sua prática.⁶

Por último, acredito que esse trabalho seja relevante para que os alunos entendam que a divisão que propomos para os conhecimentos não é tão precisa. Que História, Matemática, Física e Geografia podem (e devem) se confundir.

Escreve Gasparin:

No mundo das divisões do conhecimento, das especificidades que possibilitam, e, frequentemente, proporcionam a perda da totalidade, busca-se, cada vez mais, a unidade, a interdisciplinaridade, não como forma de pensamento unidimensional, mas como uma apreensão crítica das diversas dimensões da mesma realidade⁷.

1.2 Adequação ao currículo

Evidentemente, estar alinhada com o que pensam os teóricos da Educação não é o suficiente para que uma ideia possa ser colocada em prática no âmbito da escola. É necessário um alinhamento com o currículo vigente.

Homologada em 2017, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que define

o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).⁸

A sua existência estava prevista desde a Constituição de 88, e, após anos de discussão com a sociedade civil, chegou-se ao documento que determina o que deve ser

⁶ (CORAZZA, 1991, p. 84, apud (GASPARIN, 2012, introdução))

⁷ (GASPARIN, 2012, introdução)

⁸ (BRASIL, 2018, p.5)

ensinado em cada ano do Ensino Fundamental (a versão relativa ao Ensino Médio ainda não está concluída).

Para que os alunos compreendam as demonstrações matemáticas utilizadas nos conceitos apresentados no trabalho, as seguintes habilidades serão necessárias:

(EF06MA19)	Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
(EF07MA33)	Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.
(EF09MA10)	Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
(EF09MA12)	Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
(EF09MA13)	Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Tabela 2 – Habilidades que serão utilizadas nas demonstrações e experimentos, de acordo com a BNCC

Infelizmente a Trigonometria não aparece de forma explícita na BNCC para o Ensino Fundamental, nem no *Novo Currículo Paulista*, documento elaborado pelo Governo do Estado de São Paulo.

As razões trigonométricas elementares (seno, cosseno e tangente), porém, são sempre cobradas em provas do “vestibulinho” do Centro Paula Souza, e nas provas do Colégio Técnica de Campinas (COTUCA) são cobrados também os valores de tais razões para os ângulos notáveis (30° , 45° , 60°).

De modo que, a despeito do que orienta a BNCC, eu sempre ensinei e continuarei ensinando Trigonometria aos meus alunos de 9º ano, afinal, como lembra D’Ambrosio, “currículo é a estratégia para a ação educativa”⁹ e, sendo uma estratégia, nunca deve limitar nossas possibilidades, e sim permitir-se ser expandido para que alcancemos nossos objetivos.

Sendo assim, unindo o que já é previsto na BNCC com o que prevê o Currículo Paulista, acredito ser possível atingir o objetivo proposto: fazer com que alunos de 9º ano do Ensino Fundamental aprendam noções mínimas de Astronomia.

⁹ (D’AMBROSIO, 1996, p. 68)

2 Um pouco de História

2.1 Da Terra plana à Terra esférica

Segundo Ronan, “a astronomia talvez tenha sido o primeiro estudo distinto a incorporar a aplicação da matemática”¹. Números eram empregados para medir a distância entre os astros, e ângulos eram utilizados para medir a elevação de um astro em relação ao horizonte . Todos os povos antigos baseavam-se na Lua para construir seus calendários, afinal seus ciclos de 29,5 dias eram regulares o suficiente para demarcar a passagem do tempo.

O fato que marcava o início do ano egípcio era o surgimento da estrela Sirius na alvorada, após um período de invisibilidade ². Tal acontecimento coincidia com a inundação anual do Nilo. A partir desse evento era determinado um ano com 12 meses de 29 ou 30 dias, aos quais se acrescia um mês adicional a cada dois ou três anos. Posteriormente foi determinada a duração de um ano com 365 dias, que é o período compreendido entre dois solstícios de verão, que devem ter sido obtidos a partir da sombra de uma haste ao meio-dia solar (o meio-dia solar é obtido determinando-se a menor sombra do dia. O solstício é o dia em que o Sol encontra-se à maior distância do Equador, logo é o dia em que é obtida a menor sombra do ano). Mas, como se sabe atualmente, o ano possui 365,25 dias, e tal calendário passou a apresentar um erro de 50 dias a cada dois séculos, o que não o tornava útil para acompanhar as estações do ano. Assim sendo, foi criado um novo calendário lunar.

¹ (RONAN, 1987a, p. 18)

² (RONAN, 1987a, p. 24)



Figura 3 – Nativos de Bornéu determinando o meio-dia solar, em 1910, do mesmo modo que as primeiras civilizações ³

Os egípcios foram o primeiro povo a dividir o dia em 24 horas, e também a uniformizar a duração dessas horas ⁴. Essa divisão foi criada a partir da observação do céu noturno, determinando o tempo entre o surgimento de um grupo de estrelas na alvorada e o surgimento do grupo seguinte. As 12 horas do dia provavelmente foram criadas para haver uma simetria com as 12 horas da noite. Para medir a passagem das horas, eram utilizados relógios de sol ou de água (clepsidras).

A visão egípcia da ciência era muito pragmática. As técnicas de construção que possibilitaram erguer as pirâmides, por exemplo, não evoluíram ao longo de séculos, pois as que se conhecia já se mostravam suficientes ⁵. De mesmo modo, embora fizessem observações rigorosas do céu noturno, os astrônomos não se preocupavam em fazer conjecturas sobre os movimentos do Sol e da Lua. Acreditava-se que o Céu fosse o corpo da deusa *Nut*; a Terra, o deus *Geb*, e o Ar, o deus *Chu* ⁶.

³ (RONAN, 1987a, p. 42)

⁴ (RONAN, 1987a, p. 26)

⁵ (RONAN, 1987a, p. 22)

⁶ (RONAN, 1987a, p. 23)

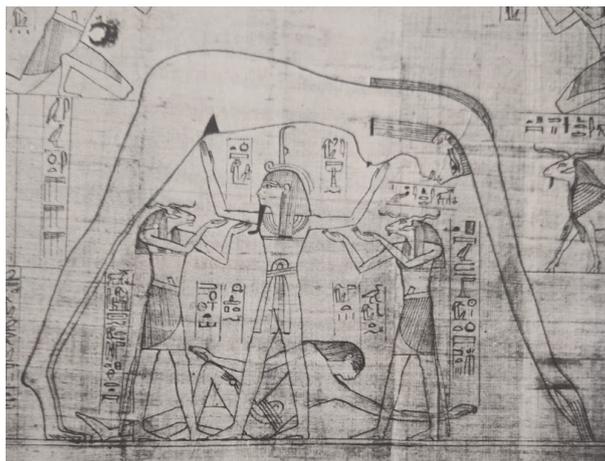


Figura 4 – Papiro egípcio no qual vemos *Nut* amparada por *Chu*, enquanto *Geb* aparece deitado. ⁷

Já os babilônios mostraram ter criado uma observação astronômica mais científica do que os egípcios. A própria explicação do formato da Terra não dependia de deuses. A Terra teria a forma de um barco de pesca emborcado, envolto em mar salgado, em cuja margem haveria uma cadeia de montanhas que o sustentaria e daria acesso ao céu ⁸. O Sol e a Lua moveriam-se acima e abaixo da Terra, e o brilho da lua seria apenas o reflexo do brilho do Sol. O céu seria feito de pedras preciosas de cor azul. Os movimentos e órbitas dos planetas foram minuciosamente estudados, muitas vezes do alto de um zigurate. Assim como os egípcios, os babilônios formularam vários calendários para conseguir resolver o problema de um ano não possuir um número inteiro de dias - o resolveram com doze meses de 29 ou 30 dias, com um total de 354 dias, utilizando um mês extra quando era necessário fazer a adequação ao ciclo das estações.

Um grande feito dos babilônios foi estudar não apenas as posições dos astros, mas suas velocidades. Conseguiram estabelecer relações entre a época do ano e a velocidade do movimento aparente do Sol⁹. Atribui-se aos caldeus (povo que ocupou a Babilônia a partir do século IX a.C.) a introdução da astrologia, que durante séculos confundiria-se com a astronomia em um só campo de estudo.

Na América, destacam-se os zapotecas, que criaram um calendário de 365 dias em um ciclo de 52 anos, que seria adotado pelos maias. Esses observavam cuidadosamente o Sol, a Lua e Vênus, tendo determinado que o período sinódico desse planeta (tempo decorrido para que o astro reapareça no mesmo ponto do céu) era de 584 dias, e organizaram um ciclo de 2920 dias, que é quando o ano solar de 365 dias e o ano venusiano coincidem (afinal 8×365 é igual a 5×584 - e aí temos uma aplicação interessante do conceito de mínimo múltiplo comum).

⁷ (RONAN, 1987a, p. 43)

⁸ (RONAN, 1987a, p. 49)

⁹ (RONAN, 1987a, p. 51)

Os gregos são conhecidos por formularem interpretações para os fenômenos que independiam de qualquer obscurantismo ¹⁰. Independentemente de essas interpretações serem corretas ou não, o esforço desse povo em entender a natureza de modo racional é notável. Um dos primeiros nomes de destaque é o de Tales de Mileto (624 a.C.), filósofo, comerciante, matemático, astrônomo e estadista. Passou longos períodos no Egito, aprendendo a Matemática feita por lá, e é famoso até hoje por ter medido a altura de uma pirâmide utilizando semelhança de triângulos, e por ter utilizado a mesma técnica para determinar a distância de um navio no mar ¹¹, conforme veremos no capítulo 4. Atribui-se a Tales o primeiro uso, em grego, da palavra Geometria, que os egípcios já utilizavam para definir a “medida da terra” ¹². Há, porém, um famoso feito atribuído a Tales que pode nunca ter acontecido. Segundo Heródoto, ele teria previsto um eclipse total do sol em 28 de maio de 525 ou 585 a.C. ^{13,14}. Tal previsão teria encerrado uma guerra de seis anos entre lídios e persas. Porém a maioria dos historiadores afirma que ele não possuía as ferramentas necessárias para realizar essa dedução.

Sobre o formato da Terra, Tales acreditava ser um disco plano boiando na água. Anaximandro (610 a.C.) é conhecido por ter determinado os equinócios e a inclinação da órbita do Sol em relação ao equador celeste (conhecimento que os babilônios já tinham) ¹⁵, e por ter criado um mapa do mundo habitado. Para ele, a Terra seria como um cilindro, e o Sol e a Lua eram anéis de fogo circundados pelo ar (aí podemos ver que a evolução da Ciência não é linear, pois os babilônios já propunham que a Lua refletia a luz do Sol). Seu discípulo Anaxímenes acreditava que a Terra flutuava no ar, e que o Sol e a Lua, discos de fogo, ficavam invisíveis quando estavam muito longe. Credita-se a ele a suposição, aceita durante séculos, de que as estrelas estariam fixas em uma esfera cristalina, girando em torno da Terra ¹⁶. Heráclito, por sua vez, acreditava que os corpos celestes eram taças contendo fogo, e as fases da Lua eram provocadas pelo modo como a abertura de sua taça se voltava para a superfície terrestre ¹⁷.

Pitágoras (560 a.C.) fez importantes avanços em astronomia: determinou uma ordem entre os planetas, a partir da velocidade com que se moviam, aparentemente, ao redor da Terra ¹⁸. A ordem sugerida (Terra, Lua, Sol, Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno) é a mesma que se conhece hoje, com exceção, obviamente, do Sol, da Terra e dos então desconhecidos Urano e Netuno. Além disso, os pitagóricos foram os primeiros pensadores a assumir uma Terra esférica, e acredita-se que a adoção desse modelo se

¹⁰ (RONAN, 1987a, p. 64)

¹¹ (MLODINOW, 2004, p. 25)

¹² (MLODINOW, 2004, p. 26)

¹³ (MLODINOW, 2004, p. 25)

¹⁴ (RONAN, 1987a, p. 69)

¹⁵ (RONAN, 1987a, p. 71)

¹⁶ (GLEISER, 1997, p. 48)

¹⁷ (RONAN, 1987a, p. 73)

¹⁸ (RONAN, 1987a, p. 78)

deve à observação dos barcos sumindo ao horizonte (se a Terra fosse plana, veríamos o barco como um todo diminuindo de tamanho; mas o que se observa nas praias é que o casco desaparece primeiro, por estar abaixo da curvatura da Terra). Acredita-se que Aristóteles tenha feito as mesmas observações e tido a mesma conclusão ¹⁹. Os pitagóricos, responsáveis por grandes contribuições ao estudo de intervalos musicais, acreditavam que o movimento dos planetas gerava uma música celeste, que os homens não conseguiam perceber pois já ouviriam desde o nascimento ²⁰.

Filolau, discípulo de Pitágoras, é conhecido por afirmar que a Terra é um planeta, em órbita como todos os outros. Atribui-se a Filolau um sistema com 10 corpos celestes, pois esse era um número considerado “perfeito” pelos pitagóricos. Esses corpos seriam: a Terra, o Sol, a Lua, os cinco outros planetas conhecidos, a esfera celeste (na qual ficariam as estrelas) e o antikhtonon, a “contra-Terra” ²¹. O centro do universo seria um fogo central, estacionário, em torno do qual se moveriam os 10 corpos. O Sol apenas refletiria a luz do fogo central. A contra-terra ficaria entre a Terra e o fogo central, movendo-se à mesma velocidade que a Terra.

É interessante notar que os pitagóricos não podem ser considerados cientistas desprendidos de misticismo, pois, apesar de não recorrerem a deuses, acreditavam que certos números com propriedades especiais regiam o Universo. Mas foi um enorme avanço assumir que a Terra, além de esférica, não era o centro do Universo e possuía movimentos de rotação e translação.

Em mais uma prova de que a História da Ciência não se desenvolve de forma linear, Anaxágoras (cerca de 467 a.C.), afirmava que a Terra tinha forma de disco e que o Sol era uma pedra aquecida. Já Empédocles acreditava que o universo era uma esfera de cristal, nas quais ficavam as estrelas, saliências de fogo (como os planetas), e que a Terra seria plana. Platão (427 a.C.) propõe um Universo com planetas esféricos realizando movimentos circulares, pois o círculo seria uma figura geométrica perfeita ²². Como os movimentos circulares só seriam abandonados graças a Kepler, foram feitas várias tentativas de “salvar os fenômenos”, ou seja, tentar adequar a explicação de eventos observados no Céu à teoria platônica.

O movimento retrógrado, por exemplo, é dificilmente explicado com movimentos circulares. Ele consiste no aparente recuo da trajetória de um planeta quando observada da Terra. Eudóxio (cerca de 400 a.C.) é creditado como o criador da teoria das “esferas homocêntricas” ²³, para explicar as diferentes velocidades dos movimentos dos corpos celestes. Mais de uma esfera poderia ser necessária para explicar o movimento de um corpo,

¹⁹ (MLODINOW, 2004, p. 9)

²⁰ (GLEISER, 1997, p. 56)

²¹ (RONAN, 1987a, p. 79)

²² (GLEISER, 1997, p. 69)

²³ (RONAN, 1987a, p. 106)

como a Lua (que possui seu movimento diário em torno da Terra, mensal em relação às estrelas e do ciclo de eclipses que se repete a cada 18 anos, aproximadamente).

Aristóteles (384 a.C.) retomou a ideia da Terra como centro imóvel do Universo, e manteve a ideia das esferas homocêntricas, mas foi além: elas seriam feitas de cristal. Além disso, argumentou que existia uma “força motriz” que gerava o movimento da esfera das estrelas - a mais externa de todas, e que induziria o movimento das demais esferas²⁴. Aristóteles acreditava que o mundo terrestre era imperfeito e em constante mutação. Já o domínio celeste seria imutável. Assim como os pitagóricos, Aristóteles parece ter observado embarcações sumindo no horizonte e concluído que a Terra era esférica²⁵. Outros argumentos foram apresentados em sua obra *Sobre o Céu*, como o formato da sombra da Terra projetada na Lua durante os eclipses (era sempre redonda - caso fosse um disco, a sombra seria achatada) e as diferentes posições aparentes da estrela Polar, quando vista próxima do Equador ou em latitudes mais ao norte. A partir da diferença da posição dessa estrela vista do Egito e da Grécia, Aristóteles chegou a estimar um valor para a circunferência da Terra, cerca do dobro do conhecido atualmente²⁶.

Aristarco (310 a.C. - 230 a.C.) é conhecido por ter desenvolvido um elegante método para determinar as distâncias Terra-Sol e Terra-Lua²⁷. O método de Aristarco, embora matematicamente correto, carecia de precisão nas medições, por isso a sua distância encontrada foi bem menor do que a conhecida atualmente. As medidas de Hiparco para essas distâncias são mais precisas²⁸, mas o método de Aristarco é mais fácil de ser explicado a alunos de Ensino Fundamental, conforme veremos no capítulo 4.

Aristarco também deve ser reconhecido por ter sido pioneiro na adoção do modelo heliocêntrico - substituía o fogo central de Filolau pelo Sol estacionário no centro do universo - mas não encontrou adeptos de sua teoria entre os gregos. O modelo mais aceito durante séculos seria o de Ptolomeu.

Eratóstenes (276 a.C. - 195 a.C.), geógrafo e matemático, segundo bibliotecário da biblioteca de Alexandria, é responsável pela mais famosa medição da circunferência da Terra. Seu método será explicado detalhadamente no capítulo 4, mas baseia-se fundamentalmente na determinação do ângulo que os raios solares faziam com Alexandria no solstício de verão. Sabendo que, no mesmo dia, os raios eram perpendiculares à cidade de Siena (atual Assuã, no Egito), foi possível determinar a diferença de latitude entre as duas cidades. E, conhecendo a distância, em passos, entre as localidades, calculou-se, com uma regra de três simples, a circunferência da Terra. Eratóstenes chegou a um valor, convertido em medidas atuais, de aproximadamente 46600 quilômetros, enquanto o valor

²⁴ (RONAN, 1987a, p. 110)

²⁵ (RONAN, 1987a, p. 111)

²⁶ (HAWKING, 2015, p. 12)

²⁷ (RONAN, 1987a, p. 125)

²⁸ (RONAN, 1987a, p. 127)

aceito atualmente é de 39941 quilômetros.

Pode-se dizer com segurança, portanto, que desde cerca de 200 a.C. sabe-se não apenas que a Terra não é plana, como se conhece o valor aproximado de seu raio. Terraplanistas costumam argumentar que a demonstração de Eratóstenes supõe uma terra esférica pois seria a única maneira de que, ao mesmo tempo, raios de sol paralelos possuíssem diferentes ângulos de inclinação em pontos distintos; mas esse fenômeno, dizem, seria possível em uma Terra plana com um Sol suficientemente próximo. Mas o experimento de Eratóstenes apenas **reafirma** o formato da Terra, já conjecturado por seus antecessores Pitágoras e Aristóteles.

Ptolomeu (100 d.c) é reconhecido como o autor do *Almagest* (Corruptela árabe para *He megiste syntaxis*, ou “A maior compilação” em grego), livro utilizado como base da astronomia até o século XVII, inclusive por Copérnico e Kepler ²⁹.

O *Almagest* é uma grande compilação da astronomia grega até então, combinando descobertas de Ptolomeu com as de seus antecessores. Nele se estabelece o modelo geocêntrico, com uma Terra esférica, um Sol, uma Lua e cinco planetas (todos esféricos). Para explicar o distanciamento dos planetas em relação à Terra (que só seria compreendido corretamente com as trajetórias elípticas de Kepler), Ptolomeu adota a teoria dos epiciclos proposta por Apolônio.

Segundo essa teoria, haveria um grande movimento circular, em uma trajetória chamada de deferente. Mas o centro do deferente não seria a Terra. Para além dessa trajetória, o planeta faria pequenos movimentos circulares, em um trajeto chamado de epiciclo. Haveria um ponto diametralmente oposto à Terra, em relação ao centro do deferente, chamado de equante. Em relação ao equante, o epiciclo se moveria em velocidade uniforme. Tal movimento está esquematizado na figura 5.

Para um observador da Terra, a distância planeta-Terra não seria uniforme, então assim se explicaria o movimento retrógrado, “salvando o fenômeno” das trajetórias circulares propostas por Platão.

²⁹ (RONAN, 1987a, p. 128)

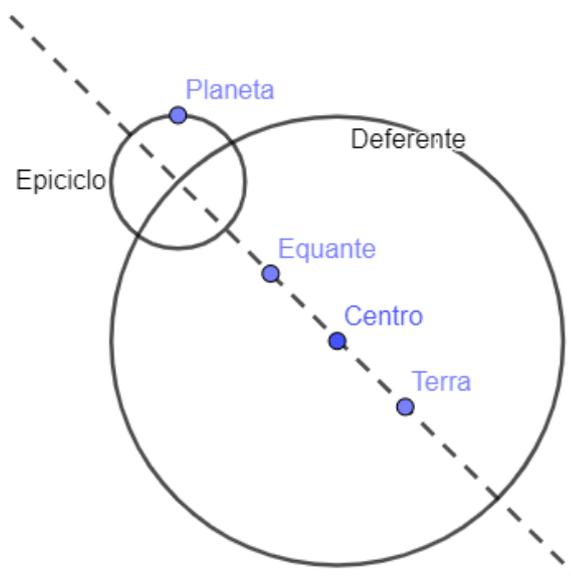


Figura 5 – O movimento de um planeta em torno da Terra, segundo Ptolomeu ³⁰

É importante frisar, portanto, que, para os gregos (e, portanto, para as civilizações científicas ocidentais), a Terra era esférica desde, pelo menos o século III a.C.. Apenas na Idade Média a ideia de uma Terra plana volta a ganhar força, graças a um livro chamado *Topographia Christiana*, baseado nas Escrituras Sagradas ³¹. Esse livro permaneceu um dos mais populares na Europa até o século XII. Alguns autores creditam esse obscurantismo ao domínio dos romanos sobre os gregos, pois aqueles estavam mais interessados nos aspectos práticos das ciências do que em questões mais profundas ³². Outros, à ascensão da Igreja Católica ³³. Credita-se aos árabes a manutenção e disseminação das ideias gregas enquanto a Europa afundava em ignorância. A partir do século XIII, traduções do árabe para o latim do *Almagest* tornam-se populares e aos poucos abandona-se o terraplanismo ³⁴. São Tomás de Aquino descreve a Terra como esférica e ocupando o centro do universo, circundada por oito esferas que ligavam a Deus ³⁵.

Como o próprio ensino de História nas escolas segue uma linha eurocêntrica, o pouco conteúdo de História da Ciência que os alunos recebem não poderia deixar de sê-lo. Mas os povos do oriente tiveram muita importância no desenvolvimento da Astronomia. Os chineses possuíam um avançado método de observação dos astros, que é utilizado até hoje, enquanto o dos gregos foi abandonado. Enquanto os gregos determinavam a posição dos astros em relação à trajetória aparente do Sol (a eclíptica), os chineses o faziam em relação ao equador celeste (uma projeção do equador terrestre na esfera das estrelas) ³⁶. Assim

³⁰ Quando não citada, a fonte de cada figura é o próprio autor da dissertação

³¹ (MLODINOW, 2004, p. 55)

³² (MLODINOW, 2004, p. 54)

³³ (GLEISER, 1997, p. 95)

³⁴ (GLEISER, 1997, p. 96)

³⁵ (GLEISER, 1997, p. 97)

³⁶ (RONAN, 1987b, p. 36)

como os demais povos, os ciclos da lua foram utilizados para determinar a duração do ano. Uma diferença interessante é que por muito tempo a semana chinesa foi considerada com 10 dias, sendo que o período de 7 dias foi introduzido após o contato com persas.

Também foram determinados os períodos de translação de Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Porém os chineses não se ocuparam em tentar explicar o porquê dos movimentos planetários³⁷. Também eram feitas minuciosas observações sobre eclipses, supernovas, chuvas de meteoros e passagem de cometas (havendo um registro de um período de mais de 22 séculos), sendo que as observações sobre o cometa Halley são importante fonte de consulta até hoje³⁸.

Outro feito intrigante foi a criação de uma projeção da esfera celeste muito semelhante à que Mercator usaria, seis séculos mais tarde, para planificar o mapa terrestre³⁹.

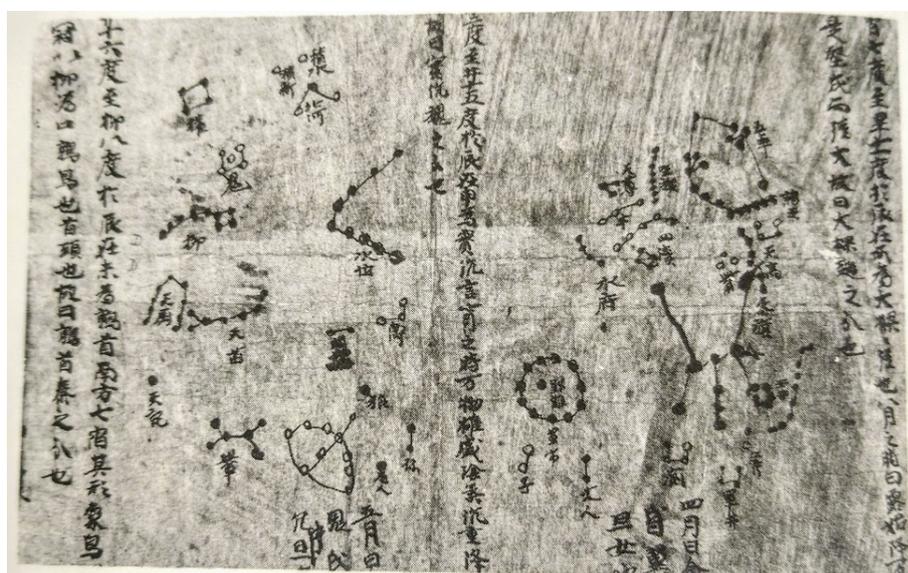


Figura 6 – Mapa estelar chinês, do século X, onde se vê as constelações Cão Menor, Câncer, Hidra, Cão Maior, Órion e Lebre⁴⁰

Sobre as teorias acerca do universo, havia três mais aceitas. Uma segundo a qual a Terra seria plana com uma cúpula sobre ela. Em outra, a Terra seria uma esfera dentro da esfera celeste. E uma terceira afirmava que, para além da Terra esférica, havia um imenso espaço vazio, no qual o Sol, a Lua e as estrelas flutuariam devido a um “vento forte”⁴¹. É interessante notar que um universo infinito aproxima-se mais dos atuais modelos do que as “esferas celestes” gregas.

Já os Hindus, apesar de observarem a olho nu a existência de cinco planetas, acreditavam haver ainda mais dois “corpos”, Rahu e Ketu, responsáveis pelos eclipses

³⁷ (RONAN, 1987b, p. 38)

³⁸ (RONAN, 1987b, p. 39)

³⁹ (RONAN, 1987b, p. 40)

⁴⁰ (RONAN, 1987b, p. 42)

⁴¹ (RONAN, 1987b, p. 51)

solares. Os budistas acreditavam que a Terra seria plana, envolta por um oceano, após o qual haveria uma cadeia de montanhas a sustentar o céu⁴².

Dentre os povos do oriente, pode-se afirmar que os árabes foram os herdeiros da tradição grega, e não só estudaram o que havia sido descoberto anteriormente, como aprimoraram as medidas apresentadas no *Almagest* e criaram instrumentos de medição mais precisos. Muitos eram críticos do epíclito de Ptolomeu, e retomaram as explicações das esferas homocêntricas de Eudóxio. Além disso, criaram várias tabelas astronômicas chamadas de *ziji*, contendo previsões das posições de planetas, estrelas e constelações⁴³. Al-Khwarizmi, conhecido por difundir os algarismos indo-arábicos pela Europa, foi também um importante astrônomo árabe, tendo sido responsável por alguns dos *ziji*.

2.2 Do geocentrismo ao heliocentrismo

Com o Renascimento, novas ideias acerca do Universo passam a circular, e a mecânica aristotélica sofre duros ataques. Nicolau de Cusa (século XV) é um dos pioneiros a reconsiderar a Terra com movimento e não estacionária⁴⁴. Regiomontanus publica uma obra chamada *Epítome*, na qual revisa e corrige observações do *Almagest*. Copérnico, do alto de seu observatório construído em 1513, pôde verificar que algumas posições de corpos previstas no *Almagest* estavam incorretas. Além disso, sentia-se desconfortável com a teoria dos equantes de Ptolomeu⁴⁵. Propõe então o Sol como o centro do universo, sendo orbitado pela Terra e os demais planetas. Com seu modelo, conseguiu explicar as estações do ano e a origem dos equinócios. Porém, sua teoria não respondia perguntas como: por que as estrelas não se moviam em relação à Terra? Por que o movimento da Terra não provocava temporais e ondas de marés⁴⁶? As respostas a essas perguntas só viriam anos mais tarde. Apesar de contrariar a visão católica que tinha o Homem como centro da Criação, a teoria heliocêntrica contida em sua obra *Das Revoluções* não recebeu, de imediato, condenação da Igreja. Tomou-se o cuidado de publicá-la como “apenas uma teoria”.

A cosmovisão de Copérnico ainda herdava muito da ptolomaica, como os movimentos circulares dos planetas e a existência de uma esfera fixa das estrelas, mas aos poucos foi sendo aperfeiçoada por seus seguidores. Thomas Digges propõe, em 1576, que as estrelas estenderiam-se infinitamente no espaço⁴⁷. Giordano Bruno (1548-1600) foi um grande divulgador da teoria copernicana (e ia além: propunha um universo infinito

⁴² (RONAN, 1987b, p.72)

⁴³ (RONAN, 1987b, p. 36)

⁴⁴ (RONAN, 1987c, p. 65)

⁴⁵ (RONAN, 1987c, p. 67)

⁴⁶ Convém apontar que o autor dessa dissertação se depara com esses mesmos questionamentos vindos de terraplanistas no século XXI.

⁴⁷ (RONAN, 1987c, p. 55)

⁴⁸ (RONAN, 1987c, p.70)

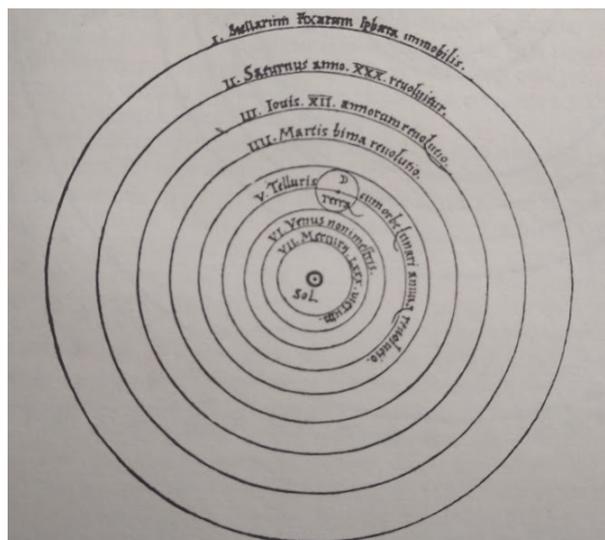


Figura 7 – Sistema heliocêntrico de Copérnico, como publicado em *Das Revoluções*⁴⁷

com possíveis vidas em outros planetas), mas também um hermético (seguidor das ideias ocultistas de Hermes Trismegisto), e não se sabe ao certo se sua condenação à fogueira se deu pela defesa do heliocentrismo ou por outras heresias (como negar a divindade de Cristo)⁴⁹.

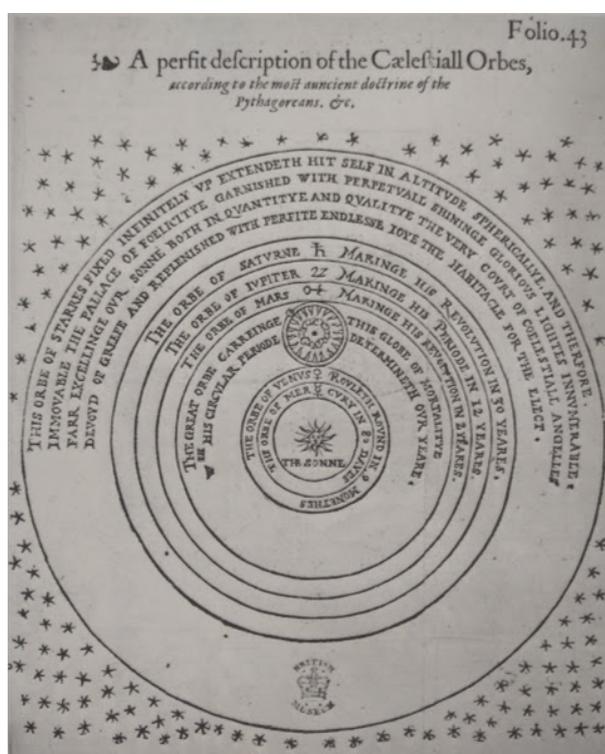


Figura 8 – Esquema de um universo infinito proposto por Leonard e Thomas Digges (1576), sem uma “Esfera Celeste”, que inspirou Giordano Bruno⁵⁰

⁴⁹ (RONAN, 1987c, p. 72)

⁵⁰ (RONAN, 1987c, p. 57)7

A invenção de instrumentos de observação cada vez mais precisos foi um passo determinante ao abandono definitivo do geocentrismo. Tycho Brahe (séc. XVI) criou um quadrante com precisão de cinco arcos de segundo (0,0014 grau)⁵¹, dentre outros instrumentos. Observando um cometa, concluiu que não poderiam existir, fisicamente, as “esferas celestes” propostas pelos gregos, uma vez que tal corpo transitava através do espaço onde elas deveriam estar⁵². Além disso, cometas e supernovas mostravam que o céu não era imutável, como propunha Aristóteles. Isso não foi o suficiente para que ele abandonasse o heliocentrismo. Tycho propunha a Lua e o Sol orbitando a Terra, e os demais planetas orbitando o Sol.

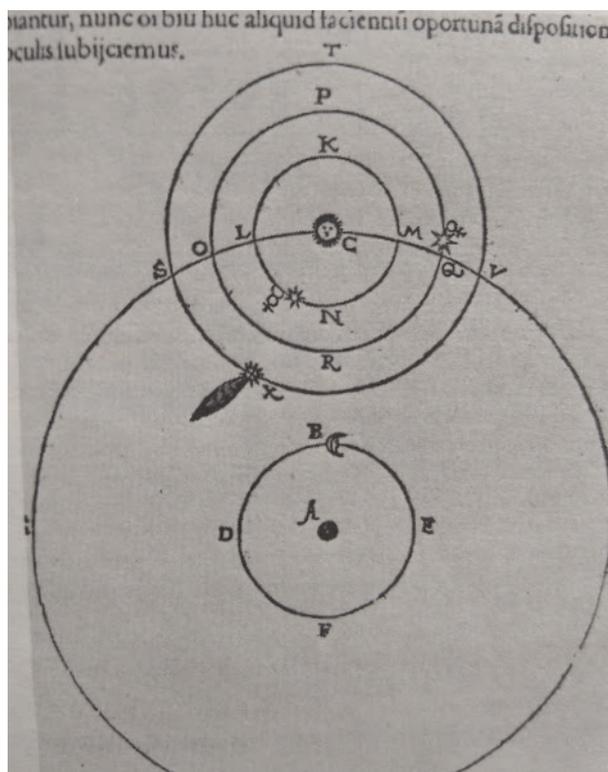


Figura 9 – Esquema do universo por Tycho Brahe⁵³

Após à sua morte, um de seus assistentes, Johannes Kepler, continuaria estudando as detalhadas tabelas criadas por Tycho, em especial a do movimento de Marte, o que o levou à revolucionária descoberta de que os planetas não orbitavam o Sol em movimentos circulares, mas elípticos; que a velocidade da órbita dependia do ponto da elipse em que o corpo se encontrava, de modo que áreas iguais do interior da elipse eram percorridas em intervalos de tempos iguais. Finalmente o equante de Ptolomeu era superado. Além disso, Kepler formulou a famosa Lei dos Períodos, relacionando a distância média de um planeta ao Sol (D) com o tempo necessário para completar sua órbita (T),

⁵¹ (RONAN, 1987c, p. 74)

⁵² (RONAN, 1987c, p. 75)

⁵³ (RONAN, 1987c, p. 87)

de acordo com a igualdade

$$\frac{T^2}{D^3} = K$$

em que K é uma constante.

O instrumento que mais trouxe evidências em favor do heliocentrismo foi o telescópio de Galileu Galileu (séc. XVI). Galileu não foi o criador do primeiro telescópio, mas aprimorou esse instrumento de modo que fosse capaz de ampliar um objeto em até 30 vezes ⁵⁴. Em seu livro *Mensageiro Sideral*, são relatadas estrelas invisíveis a olho nu - mais uma evidência contra a “esfera celeste” - e satélites orbitando Júpiter, o que mostra que a Terra pode se mover sem se afastar da Lua ⁵⁵. Sua obra *Diálogo sobre o fluxo e o refluxo das marés* explica, com o princípio da inércia, por que a rotação da Terra não causa desastres naturais. Os corpos sobre a Terra se movem junto a ela, assim como uma pedra lançada de um navio não é “deixada para trás”, mas acompanha o movimento horizontal do navio ⁵⁶. No mesmo livro, argumenta que o Sol e a Lua não são corpos perfeitos como supunham os aristotélicos, afinal, com seu telescópio, pôde observar manchas solares e montanhas lunares. Galileu é aconselhado pela Igreja a apresentar uma visão imparcial sobre os sistemas heliocêntrico e geocêntrico na obra *Diálogos sobre os dois principais sistemas do mundo - o ptolomaico e o copernicano*, mas, sem conseguir disfarçar sua preferência pelo modelo copernicano, em 1633 é processado pela Inquisição e condenado à prisão domiciliar.

⁵⁴ (RONAN, 1987c, p. 80).

⁵⁵ (RONAN, 1987c, p. 81)

⁵⁶ (GLEISER, 1997, p. 155)

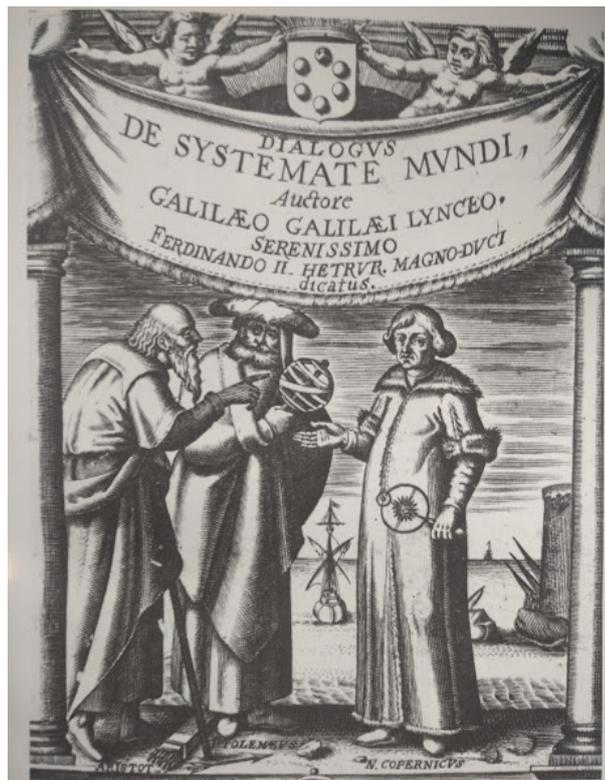


Figura 10 – Ilustração do *Diálogo*, de Galileu, em que se vê, da esquerda para a direita: Aristóteles, Ptolomeu e Copérnico⁵⁷

Apesar das importantes descobertas a favor do modelo heliocêntrico, Galileu não aceita as órbitas elípticas propostas por Kepler⁵⁸. A união de todas as novas teorias a respeito dos movimentos dos astros seria feita mais tarde, graças aos esforços de um cientista que nasceu no mesmo ano da morte de Galileu: Isaac Newton.

Muitos astrônomos e matemáticos tentaram explicar o porquê das órbitas elípticas de Kepler, e, além disso: por que haver órbitas? Por que os planetas não se moviam livremente pelo espaço? Em 1666, Giovanni Borelli propôs a combinação de três forças: um “instinto natural” de atração dos planetas pelo Sol, uma força tangencial proveniente dos raios solares e uma força de reação, fazendo os planetas recuarem⁵⁹. Robert Hooke acreditava que o Sol atraía os planetas com uma força magnética. Jeremiah Horrocks e Edmond Halley foram os primeiros a suspeitar que a força de atração entre o Sol e os planetas diminuía com o inverso do quadrado da distância, mas não chegaram a elaborar um modelo matemático que explicasse isso.

A inexistência de um modelo matemático satisfatório se dava porque, para explicar a força de atração entre o Sol e um planeta, “ponto a ponto” ao longo de sua órbita, era preciso considerar que tal órbita era formada por uma quantidade de pontos

⁵⁷ (RONAN, 1987c, p. 91)

⁵⁸ (GLEISER, 1997, p. 83).

⁵⁹ (RONAN, 1987c, p. 85)

que hoje chamamos de contínua, não enumerável, e não discreta (contável). Para tratar esse tipo de problema, seria necessária uma nova Matemática, que Newton, literalmente, inventou: o Cálculo⁶⁰ (que ele chamava de “teoria dos fluxos”).

Em seu livro *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, Newton enuncia que as leis que regem o movimento na Terra são as mesmas responsáveis pelo movimento dos planetas. Que, assim como uma maçã cai à Terra devido à força gravitacional, os corpos celestes atraem-se entre si através da gravidade. As três “leis de Newton” (Inércia, Princípio Fundamental da Dinâmica e Ação e Reação) explicavam qualitativamente e quantitativamente todos os movimentos até então conhecidos, e demonstravam o porquê das órbitas elípticas⁶¹. Apesar de afirmar que a gravidade era diferente do magnetismo, Newton não explicou a natureza daquela força⁶². Mesmo acreditando em um Criador Divino para o Universo⁶³, preferiu não tentar criar alguma explicação metafísica para a gravitação.

A primeira grande validação da teoria de Newton se deu graças a Halley, que utilizou a matemática e a física newtoniana para prever o regresso de um cometa (posteriormente conhecido como “cometa Halley”) em 1758⁶⁴. A partir daí, os telescópios se popularizam, mais astrônomos passam a fazer (e acertar) previsões, e começam a ser construídos os grandes observatórios, como o de Greenwich e o de Paris.

Se o formato da Terra já era conhecido desde o século III a.C., os movimentos dos planetas em torno do Sol já são explicados desde o século XVII. A partir daí, a Astronomia evoluiu determinando a distância entre as estrelas e a Terra, descobrindo nebulosas e novos planetas (como Urano, em 1781 e Netuno, em 1846). Cada nova descoberta sempre confirmava a teoria da Gravitação de Newton. Netuno, por exemplo, só foi descoberto quando se percebeu que a trajetória de Urano não era consistente com a teoria, só sendo explicada se houvesse a interação de outro planeta.

Embora nas escolas a história da Astronomia seja comumente ensinada até o triunfo do Heliocentrismo sobre o Geocentrismo, é importante que se explique que não se fala mais no Sol como centro do Universo, afinal o Sistema Solar é um dos muitos conjuntos de corpos que compõem a Via Láctea, uma das trilhões de galáxias existentes.

Graças a Edwin Hubble (1889 - 1953) sabemos não apenas que nossa galáxia não é a única, mas que as galáxias observáveis da Terra estão se afastando em relação a nós. Ou seja, o universo está em expansão⁶⁵. Essa conclusão foi possível graças a uma

⁶⁰ apesar das discussões acerca da “paternidade” do Cálculo, opondo Newton a Leibniz, sabe-se hoje que ambos trabalharam de forma independente.

⁶¹ (RONAN, 1987c, p. 99).

⁶² (RONAN, 1987c, p. 100)

⁶³ (GLEISER, 1997, p. 190)

⁶⁴ (RONAN, 1987c, p. 100)

⁶⁵ (HAWKING, 2015, p. 60)

aplicação do efeito Doppler aos espectros de cores emitidos pelas galáxias ⁶⁶.

É importante realçar o fato de que todas as descobertas citadas até aqui dependeram apenas do raciocínio lógico e da observação, e são completamente independentes de qualquer fotografia tirada do Espaço. As expedições espaciais, tripuladas ou não, tão questionadas pelos negacionistas da Ciência, apenas vieram confirmar o que já se sabe há muito tempo: nosso planeta é (aproximadamente) esférico e gira em torno do Sol, que é apenas uma estrela dentre bilhões de nosso universo em expansão.

⁶⁶ (HAWKING, 2015, p. 59)

3 Referencial Teórico

Neste capítulo, será desenvolvida a teoria necessária para as atividades dos capítulos 4 e 5. Todos os postulados, Teoremas e definições são baseados na referência *Geometria Plana e Construções Geométricas* (REZENDE; QUEIROZ, 2008).

3.1 Congruência de triângulos

Definição 1. *Dois triângulos são chamados de congruentes quando é possível definir uma correspondência entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes possuam a mesma medida, assim como os lados correspondentes.*

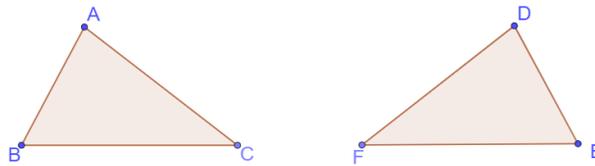


Figura 11 – Triângulos congruentes

Na figura acima, suponha $\left\{ \begin{array}{lll} \overline{AB} \cong \overline{DE} & \overline{BC} \cong \overline{EF} & \overline{CA} \cong \overline{FD} \\ \widehat{CAB} \cong \widehat{FDE} & \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} & \widehat{BCA} \cong \widehat{EFD} \end{array} \right.$

Então, os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Notação: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Postulado 3.1.1. *(Caso de congruência LAL - lado, ângulo, lado). Se, em dois triângulos ABC e DEF , tivermos*

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \end{array} \right.$$

Então os triângulos são congruentes.

Teorema 3.1.1. *(Caso de congruência ALA - ângulo, lado, ângulo) Se em dois triângulos ABC e DEF , tivermos*

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{BAC} \cong \widehat{EDF} \\ \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \end{array} \right.$$

Então os triângulos são congruentes.

Demonstração. Consideremos dois triângulos ABC e DEF satisfazendo as hipótese. Supomos, sem perda de generalidade, $\overline{DF} \geq \overline{AC}$. Seja F' um ponto sobre \overline{DF} tal que $\overline{DF'} = \overline{AC}$

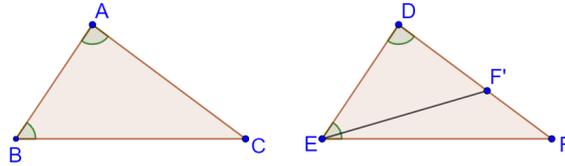


Figura 12 – Demonstração do caso ALA

Nos triângulos ABC e DEF' , temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \widehat{BAC} \cong \widehat{EDF'} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF'} \end{array} \right. \implies \Delta ABC \cong \Delta DEF' \text{ (caso LAL)}$$

Pela congruência, $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF'}$, mas por hipótese, $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$. Segue que $\widehat{DEF} \cong \widehat{DEF'}$. Portanto $F = F'$, e, pelo caso LAL, $ABC \cong DEF$

□

Definição 2. Um triângulo com dois de seus lados congruentes é chamado de **triângulo isósceles**. O terceiro lado é chamado de **base**.

Teorema 3.1.2. (Teorema do triângulo isósceles) Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração. Considere um triângulo isósceles ABC e façamos a seguinte correspondência entre seus vértices: $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$. Temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{AC} \\ \widehat{BAC} \cong \widehat{CAB} \\ \overline{AC} \cong \overline{AB} \end{array} \right. \implies \Delta ABC \cong \Delta CBA \text{ (caso LAL)}$$

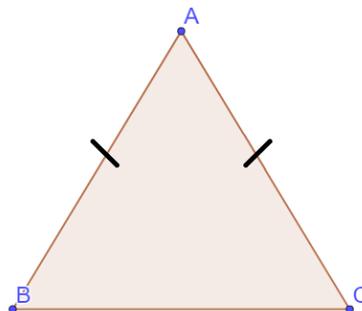


Figura 13 – Triângulo isósceles

Portanto $\widehat{ABC} \cong \widehat{BCA}$.

□

Teorema 3.1.3. (Caso de congruência LLL - lado, lado, lado) Se, em dois triângulos ABC e DEF , temos

$$\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \overline{CA} \cong \overline{FD} \end{cases}$$

então os triângulos são congruentes.

Demonstração. No semiplano definido pela reta que contém \overline{BC} e que não contém A , tomamos o ponto D' de modo que $\overline{BD'} \cong \overline{DE}$ e $\widehat{D'BC} \cong \widehat{DEF}$

Pelo caso *LAL*, os triângulos $BD'C$ e DEF são congruentes.

Mostremos agora que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Consideremos o ponto H de intersecção entre o segmento $\overline{AD'}$ e a reta que contém \overline{BC} .

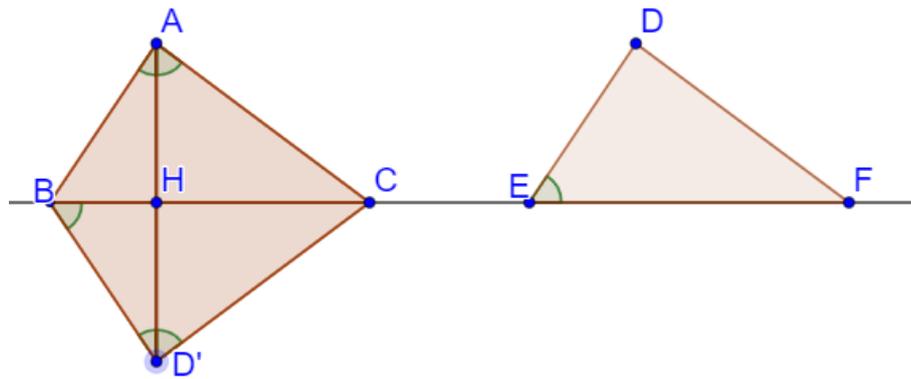


Figura 14 – Demonstração do caso LLL

Como $\triangle DEF \cong \triangle D'BC$, por hipótese temos $\overline{AB} \cong \overline{D'B}$ e $\overline{AC} \cong \overline{D'C}$. Logo, os triângulos ABD' e ACD' são isósceles, e, pelo Teorema 3.1.2, $\widehat{AD'B} \cong \widehat{BAD'}$ e $\widehat{AD'C} \cong \widehat{CAD'}$. De modo que $\widehat{BAC} \cong \widehat{CD'B}$. Logo, pelo caso *LAL*, $\triangle ABC \cong \triangle BD'C \cong \triangle DEF$.

Na figura, o ponto H está localizado entre B e C . Mas a demonstração é análoga se o triângulo ABC for construído de modo que B esteja entre H e C , ou em que H coincida com B .

□

3.2 Retas paralelas cortadas por uma transversal

Definição 3. Duas retas no mesmo plano são paralelas se não possuem ponto em comum.

Definição 4. Em um triângulo de vértices A , B e C , seja D um ponto da reta que contém B e C , de modo que C esteja entre B e D . Dizemos que o ângulo \widehat{ACD} é um ângulo externo do triângulo ABC , e que os ângulos em A e em B são seus ângulos internos não adjacentes.

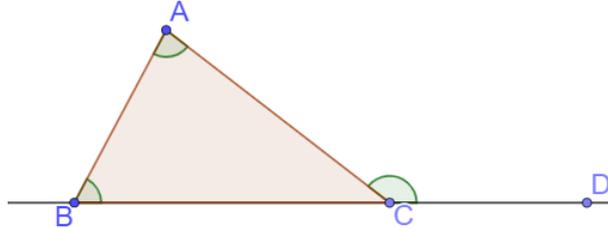


Figura 15 – Ângulo externo e os internos não adjacentes

Teorema 3.2.1. (Teorema do Ângulo Externo). Em todo triângulo, um ângulo externo é maior que seus ângulos internos não adjacentes.

Demonstração. Seja E o ponto médio de \overline{AC} , e prolonguemos o segmento \overline{BE} até obtermos o ponto F , de modo que \overline{BE} e \overline{EF} sejam congruentes. Temos, então

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AE} \cong \overline{EC} \\ \widehat{AEB} \cong \widehat{FEC} \text{ (opostos pelo vértice)} \\ \overline{EB} \cong \overline{EF} \end{array} \right. \implies \triangle AEB \cong \triangle CEF$$

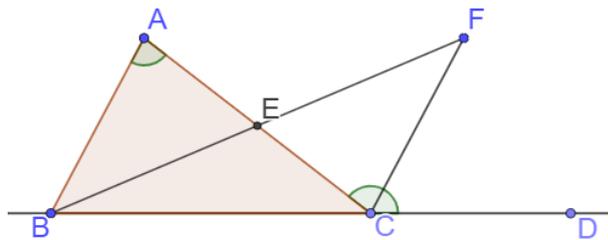


Figura 16 – Demonstração do Teorema do Ângulo Externo

Desse modo, $\widehat{BAC} \cong \widehat{FCE}$, e

$$\widehat{DCA} = \widehat{DCF} + \widehat{FCE} = \widehat{DCF} + \widehat{BAC} \implies \widehat{DCA} > \widehat{BAC}$$

Analogamente, prova-se que $\widehat{DCA} > \widehat{ABC}$. □

Definição 5. Consideremos duas retas r e s , e P e Q seus respectivos pontos de intersecção com a transversal t . Seja A um ponto de r e B um ponto de s que estejam em semiplanos distintos definidos por t . Dizemos que os ângulos \widehat{APQ} e \widehat{BQP} são **alternos internos** definidos por r , s e t .

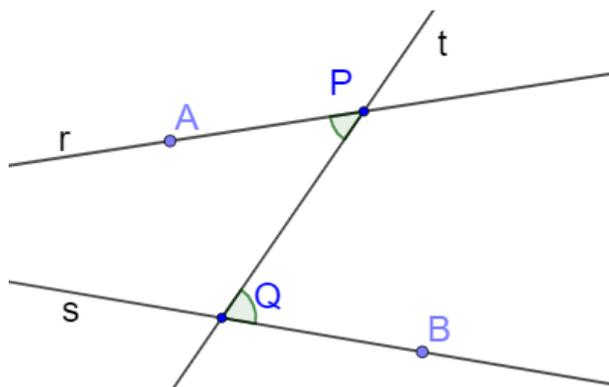


Figura 17 – Ângulos alternos internos

Teorema 3.2.2. *Se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes, então elas são paralelas.*

Demonstração. Sejam r e s as retas cortadas pela transversal t nos pontos P e Q , e a e b os ângulos alternos internos. Supomos que R seja o ponto de intersecção entre r e s . Haveria portanto o triângulo PQR do qual b seria um ângulo externo. Mas, pelo Teorema 3.2.1,

$b > a$, o que contraria a hipótese. Logo as retas são paralelas.

□

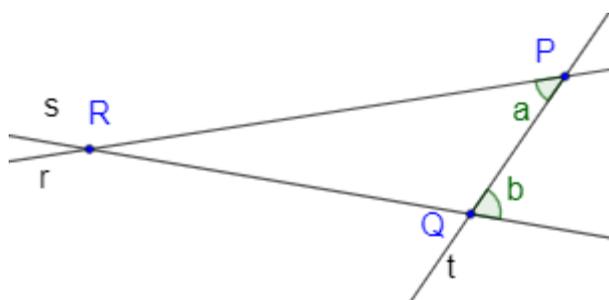


Figura 18 – Demonstração do Teorema 3.2.2

Definição 6. *Em duas retas cortadas por uma transversal, considere os ângulos alternos internos a e b . Seja c o ângulo tal que b e c sejam opostos pelo vértice. Dizemos que os ângulos a e c são **ângulos correspondentes**.*

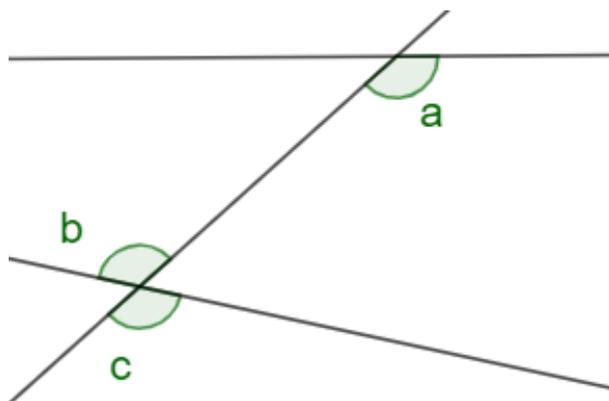


Figura 19 – Ângulos correspondentes

Teorema 3.2.3. *Se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes congruentes, então elas são paralelas.*

Demonstração. Sejam r e s as retas cortadas pela transversal t nos pontos P e Q , e a e c os ângulos correspondentes. Suponha que haja uma intersecção entre as retas no ponto R . Teríamos portanto o triângulo PQR do qual a seria um ângulo externo, e cujo ângulo interno $P\hat{Q}R$ teria a mesma medida que c , por serem opostos pelo vértice.. Mas, pelo Teorema 3.2.1, $a > c$, o que contrariaria a hipótese. Logo as retas são paralelas.

□

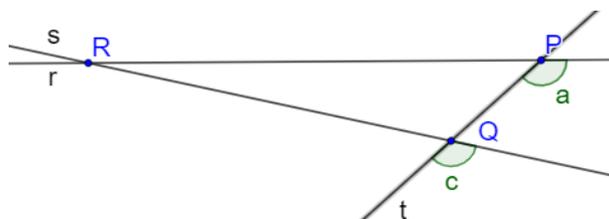


Figura 20 – Demonstração do Teorema 3.2.3

Postulado 3.2.1. *(Postulado das paralelas) Dada uma reta r e um ponto P não pertencente a r , passa por P uma única reta paralela a r*

Teorema 3.2.4. *Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes.*

Demonstração. Sejam r e s as retas cortadas pela transversal t nos pontos P e Q , e a e b os ângulos alternos internos. Suponhamos que a e b não sejam congruentes. Seja s' uma reta que, passando por P , forme com t o ângulo a' , congruente a b . Pelo Teorema 3.2.2, s' e s são paralelas. Mas, pelo postulado 3.2.1, a paralela a s , passando por P , deve ser única. Por contradição, os ângulos a e b são congruentes.

□

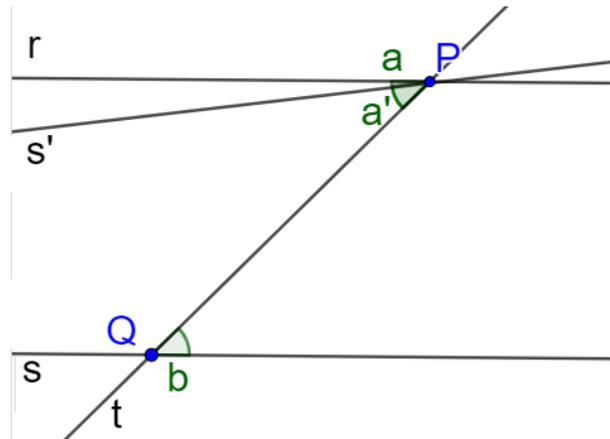


Figura 21 – Demonstração do Teorema 3.2.4

Teorema 3.2.5. *Retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes congruentes.*

Demonstração. Sejam s e r as retas cortadas pela transversal t nos pontos P e Q , e a e c os ângulos correspondentes. Suponhamos que a e c não sejam congruentes. Seja s' uma reta que, passando por P , forme com t o ângulo a' , congruente a c , com c e a' ângulos correspondentes. Pelo Teorema 3.2.3, s' e r são paralelas. Mas, pelo postulado 3.2.1, a paralela a r passando por P deve ser única. Por contradição, os ângulos a e c são congruentes.

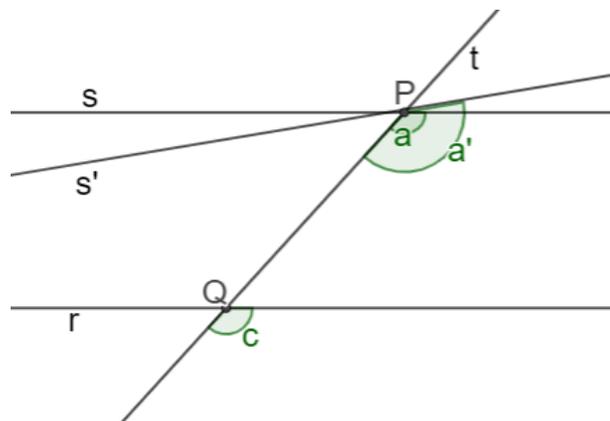


Figura 22 – Demonstração do Teorema 3.2.5

□

O resultado acima é muito importante para se demonstrar os casos de semelhança de triângulos.

Teorema 3.2.6. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .*

Demonstração. Dado um triângulo ABC , seja r uma paralela ao lado \overline{BC} passando por A . Obtemos, sobre r , e no semiplano que contém \overline{BC} , três ângulos adjacentes:

- β , formado por r e o lado \overline{AB}
- α , o ângulo interno $B\hat{A}C$
- γ , formado por r e o lado \overline{AC} .

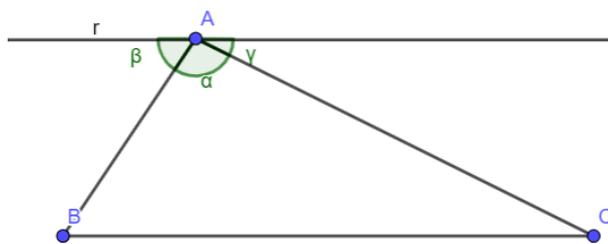


Figura 23 – A soma dos ângulos internos de um triângulo

Temos que $\beta + \alpha + \gamma = 180^\circ$.

Pelo Teorema 3.2.4, $\beta \cong A\hat{B}C$ e $\gamma \cong A\hat{C}B$.

Portanto $A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B = 180^\circ$.

□

Corolário 3.2.6.1. *Dado um triângulo com ângulos internos α , β e γ , e outro triângulo com ângulos internos δ , ϵ e ζ , de modo que $\alpha = \delta$ e $\beta = \epsilon$, então $\gamma = \zeta$.*

Demonstração. Pelo Teorema anterior, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ e $\delta + \epsilon + \zeta = 180^\circ$

Aplicando a hipótese e subtraindo as equações termo a termo, temos $\gamma - \zeta = 0 \implies \gamma = \zeta$ □

3.3 O Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Teorema 3.3.1. *Três retas paralelas que determinam segmentos congruentes sobre uma transversal determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.*

Demonstração. Sejam a e b e c três retas paralelas cortadas nos pontos A , B e C pela transversal t , determinando os segmentos congruentes \overline{AB} e \overline{BC} . Seja s uma transversal a a , b e c , cortando-as nos pontos D , E e F .

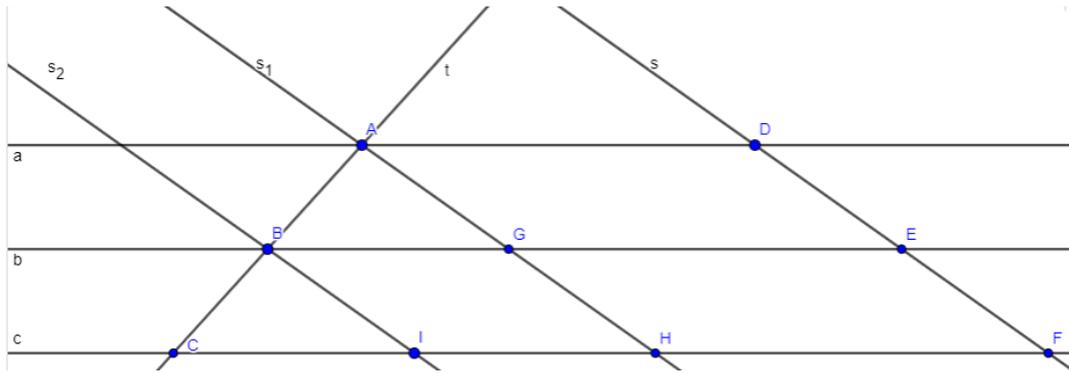


Figura 24 – Caso em que A e D são distintos, s e t não paralelas

Supondo s não paralela a t , e A e D distintos, seja s_1 uma paralela a s , cortando a , b e c nos pontos A , G e H , respectivamente. Seja s_2 uma paralela a s , cortando b e c nos pontos B e I . Temos que $AGED$ e $BIFE$ são paralelogramos, portanto $\overline{AG} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BI} \cong \overline{EF}$.

Os triângulos ABG e BCI são congruentes pelo caso ALA, pois:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{BAG} \cong \widehat{BCI} \quad (\text{ângulos correspondentes}) \\ \overline{AB} \cong \overline{BC} \quad (\text{por hipótese}) \\ \widehat{ABG} \cong \widehat{BCI} \quad (\text{ângulos correspondentes}) \end{array} \right. \implies \Delta ABG \cong \Delta BCI \text{ (caso ALA)}$$

Como consequência, temos $\overline{AG} \cong \overline{BI}$, e, portanto, $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, como queríamos demonstrar.

No caso em que $A = D$, seja s_1 uma paralela a s , passando por b no ponto B , e por c no ponto I . A demonstração é análoga ao caso anterior. $BIFE$ é um paralelogramo, portanto $\overline{BI} \cong \overline{EF}$, e os triângulos ABE e BCI são congruentes por ALA. Logo $\overline{AE} \cong \overline{BI} \cong \overline{EF}$

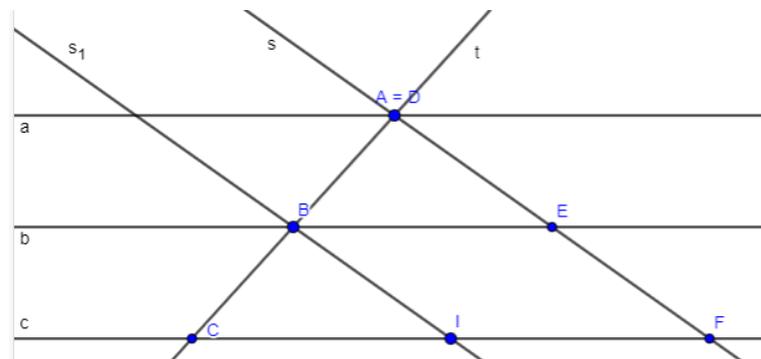


Figura 25 – Caso em que $A=D$, s e t não paralelas

No caso em que t e s são paralelas, temos que $ABED$ e $BCFE$ são paralelogramos, e, portanto, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, logo $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.

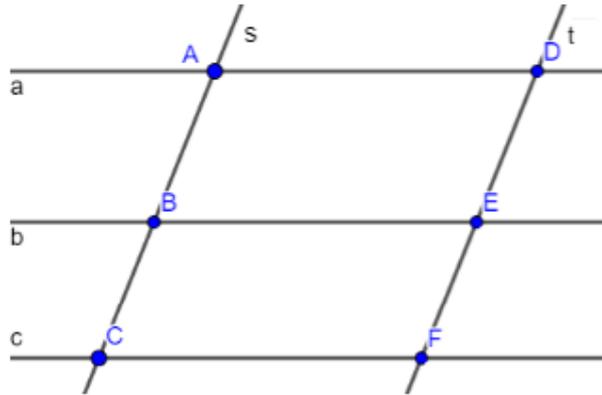


Figura 26 – Caso em que s e t são paralelas

□

Corolário 3.3.1.1. *Se três ou mais retas paralelas formam segmentos congruentes sobre uma determinada transversal, então elas determinam segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.*

Demonstração. Consideremos um feixe de n retas paralelas, denominadas a_1, a_2, \dots, a_n , $n > 3$, que cortam uma transversal t nos pontos A_1, A_2, \dots, A_n , respectivamente, de modo que $\overline{A_1A_2} \cong \overline{A_2A_3} \cong \dots \cong \overline{A_{n-1}A_n}$.

Considere outra transversal s que corte a_1, a_2, \dots, a_n nos pontos B_1, B_2, \dots, B_n , respectivamente. Queremos provar que $\overline{B_1B_2} \cong \overline{B_2B_3} \cong \dots \cong \overline{B_{n-1}B_n}$.

Basta tomarmos as paralelas 3 a 3 e aplicarmos o Teorema 3.3.1. Por exemplo, sabemos que, para as retas a_1, a_2 e a_3 , teremos $\overline{B_1B_2} \cong \overline{B_2B_3}$. Para as retas a_2, a_3 e a_4 , teremos $\overline{B_2B_3} \cong \overline{B_3B_4}$. E assim fazemos até as retas a_{n-2}, a_{n-1} e a_n , demonstrando o corolário. □

Lema 3.3.2. *Dois segmentos \overline{AB} e \overline{CD} e dois números naturais n, m são tais que*

$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{n}{m}$ se, e somente se, existir um segmento de comprimento c , de modo que $\overline{AB} = nc$ e $\overline{CD} = mc$.

*Nesse caso, dizemos que os segmentos \overline{AB} e \overline{CD} são **comensuráveis**, ou seja, a medida de um pode ser escrita como a medida de outro, multiplicada por certo número racional.*

Demonstração. Divide-se o segmento \overline{AB} em n partes iguais de comprimento c , ou seja, $\overline{AB} = nc$. Multiplicando o segundo membro da igualdade apresentada na hipótese por $\frac{c}{c}$, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{nc}{mc} = \frac{\overline{AB}}{mc}$$

De $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{mc}$, temos que $\overline{CD} = mc$

Para a recíproca, basta supormos que existam c , n e m tais que $\overline{AB} = nc$ e $\overline{CD} = mc$. Disso decorre que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{nc}{mc} = \frac{n}{m}.$$

□

Teorema 3.3.3. (Teorema Fundamental da Proporcionalidade) Consideremos um triângulo ABC e os pontos D em \overline{AB} e E em \overline{AC} , de modo que \overline{DE} seja paralelo a \overline{BC} . Então os lados AB e AC formam segmentos proporcionais, ou seja:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

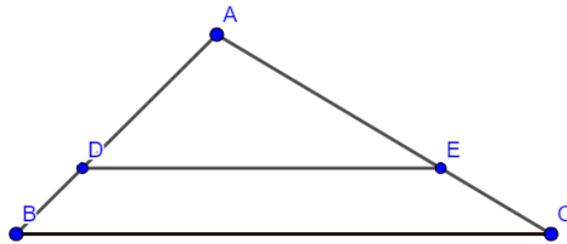


Figura 27 – O Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Demonstração. Começemos considerando o caso em que \overline{AB} e \overline{AD} são comensuráveis, ou seja, existem n , m e c naturais tais que $\overline{AD} = mc$, $\overline{AB} = nc$ e, por construção, $m < n$, pois $\overline{AD} < \overline{AB}$. Escolhe-se, sobre \overline{AB} , os pontos $P_0 = A, P_1, P_2, \dots, P_m = D, P_{m+1}, \dots, P_n = B$, de modo que $\overline{P_i P_{i+1}} = c$, para i variando de 0 até n .

Traçamos, partindo de $P_1, P_2, \dots, P_m, P_{m+1}, \dots$, até P_{n-1} , segmentos paralelos a \overline{BC} , cortando o lado \overline{AC} nos pontos $Q_1, Q_2, \dots, Q_m = E, Q_{m+1}, \dots, Q_{n-1}$. Pelo corolário 3.3.1.1, temos que $\overline{Q_i Q_{i+1}} = d$, para certo d positivo e i variando de 0 a n .

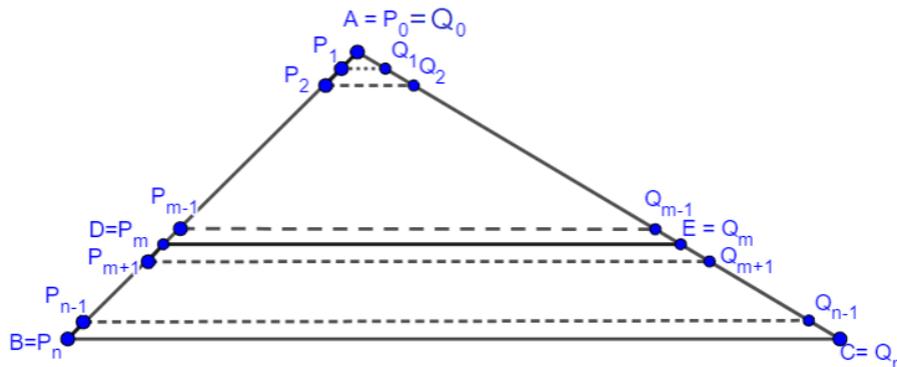


Figura 28 – Demonstração do Teorema para segmentos comensuráveis

Temos, portanto, que $\overline{AC} = nd$ e $\overline{AE} = md$. E, então,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{nd}{md} = \frac{n}{m} = \frac{nc}{mc} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$

Quando \overline{AB} e \overline{AD} não são comensuráveis (ou seja, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$ é irracional), temos o seguinte problema: não é possível encontrar um comprimento c tal que $\overline{AB} = nc$ e $\overline{AD} = mc$, para m e n naturais. Em outras palavras, não é possível encontrar uma medida que divida tanto \overline{AB} quanto \overline{AD} em partes iguais. Por isso, utilizamos o seguinte artifício:

Escolhemos em \overline{AB} os pontos $P_0 = A, P_1, P_2, \dots, P_m = D, P_{m+1}, \dots, P_n$, de modo que $\overline{P_i P_{i+1}} = c$, para i variando de 0 até m e de $m+1$ até n . Temos que $\overline{AD} = mc$, e, estando B entre $\overline{P_n}$ e $\overline{P_{n+1}}$, temos que $nc < \overline{AB} < (n+1)c$.

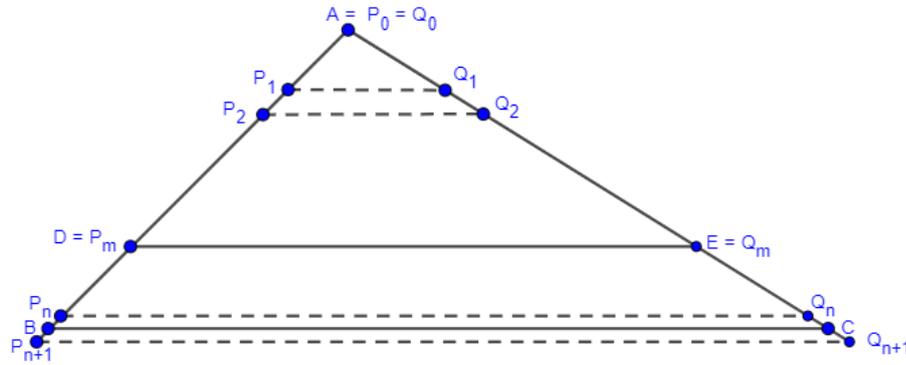


Figura 29 – Demonstração do Teorema para segmentos incomensuráveis

Dividindo os membros da desigualdade por mc , temos :

$$\frac{nc}{mc} < \frac{\overline{AB}}{mc} < \frac{(n+1)c}{mc} \implies \frac{n}{m} < \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} < \frac{n+1}{m} \quad (1)$$

Traçamos, partindo de $P_1, P_2, \dots, P_m, P_{m+1}, \dots$, até P_{n-1} , segmentos paralelos a \overline{BC} , cortando o lado AC nos pontos $Q_1, Q_2, \dots, Q_m = E, \dots, Q_{n+1}$. Pelo corolário 3.3.1.1, temos que $\overline{Q_i Q_{i+1}} = d$, para certo d positivo. Temos $\overline{AE} = md$, e, com E estando entre A e C, $nd < AC < (n+1)d$

Dividindo os membros da desigualdade por md , obtemos:

$$\frac{nd}{md} < \frac{\overline{AC}}{md} < \frac{(n+1)d}{md} \implies \frac{n}{m} < \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} < \frac{n+1}{m} \quad (2)$$

Nas desigualdades (1) e (2), notemos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$ e $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$ estão contidos em um intervalo de módulo $\left| \frac{n+1}{m} - \frac{n}{m} \right| = \frac{1}{m}$. Então $\left| \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \right| < \frac{1}{m}$.

Como m pode assumir qualquer valor, temos necessariamente

$$\left| \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \right| = 0 \implies \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.$$

□

Teorema 3.3.4. (Recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade): Se, em um triângulo ABC , houver pontos D e E sobre os lados \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente, de modo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, então $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

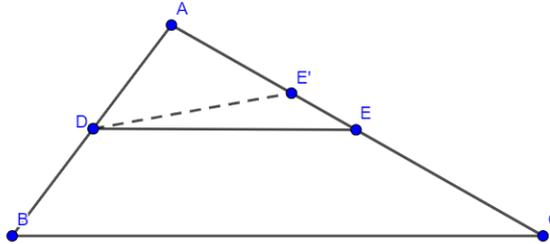


Figura 30 – Recíproca do Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Demonstração. Consideremos um ponto E' sobre \overline{AC} , tal que $\overline{DE'} \parallel \overline{BC}$. Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE'}} \implies \overline{AE'} = \overline{AC} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

$$\text{Mas, por hipótese, } \overline{AE} = \overline{AC} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}.$$

$$\text{De modo que } \overline{AE'} = \overline{AE} \implies E' = E \implies \overline{DE'} = \overline{DE}.$$

$$\text{Então, } \overline{DE} \parallel \overline{BC}.$$

□

3.4 Semelhança de triângulos

Definição 7. Dois triângulos são semelhantes se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

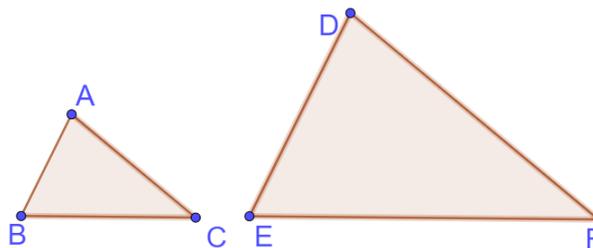


Figura 31 – Triângulos semelhantes

Se, na figura anterior, tivermos

$$\begin{cases} \widehat{C\hat{A}B} \cong \widehat{F\hat{D}E}, \widehat{A\hat{B}C} \cong \widehat{D\hat{E}F}, \widehat{B\hat{C}A} \cong \widehat{E\hat{F}D} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = k, \end{cases}$$

então os triângulos são semelhantes. O valor k é conhecido como *razão de semelhança*.

Notação: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Teorema 3.4.1. (Caso AAA) *Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\widehat{C\hat{A}B} \cong \widehat{F\hat{D}E}$, $\widehat{A\hat{B}C} \cong \widehat{D\hat{E}F}$, $\widehat{B\hat{C}A} \cong \widehat{E\hat{F}D}$, então $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.*

Demonstração. Sobre os lados \overline{AB} e \overline{AC} , marcamos os pontos E' e F' tais que $\overline{AE'} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AF'} \cong \overline{DF}$ (a demonstração é a mesma se E' ou F' estiverem no na semirreta que contém \overline{AB} e \overline{AC}).

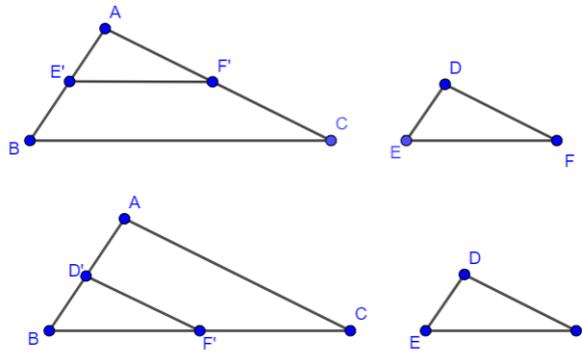


Figura 32 – Demonstração do caso de semelhança AAA

Pelo caso LAL, temos $\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$. Portanto, $\widehat{A\hat{E}'F'} \cong \widehat{A\hat{B}C}$ e $\widehat{A\hat{F}'E'} \cong \widehat{A\hat{C}B}$

De modo que, ou os segmentos $\overline{E'F'}$ e \overline{BC} são coincidentes ou são paralelos (Teorema 3.2.3). No caso de $\overline{E'F'} = \overline{BC}$, os triângulos ABC e DEF são congruentes, e, portanto, semelhantes de razão 1.

No caso de $\overline{E'F'} // \overline{BC}$, temos, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF'}} \implies \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

Analogamente, marcamos sobre os lados \overline{AB} e \overline{BC} os pontos D' e F' , de modo que $\overline{BD'} \cong \overline{DE}$ e $\overline{BF'} \cong \overline{EF}$.

Repetindo a argumentação anterior, chegaremos em

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{D'B}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF'}} \implies \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

Assim, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}, \text{ provando a semelhança.}$$

□

Observação: Devido ao corolário 3.2.6.1, dois pares de ângulos são suficientes para verificar a semelhança, ou seja, podemos nos referir ao caso AA em vez de AAA .

Teorema 3.4.2. (Caso LAL): Se dois triângulos ABC e DEF são tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$ e $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demonstração. Sobre \overline{AB} e \overline{AC} , marcamos E' e F' , de modo que $\overline{AE'} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AF'} \cong \overline{DF}$

Por hipótese, temos $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$, então, pelo Teorema 3.3.4, $\overline{E'F'} \parallel \overline{BC}$. Segue do Teorema 3.2.5 que $\widehat{AE'F'} \cong \widehat{ABC}$ e $\widehat{AF'E'} \cong \widehat{ACB}$.

Mas $\Delta AE'F'$ e ΔDEF são congruentes pelo caso LAL , então $\widehat{DEF} \cong \widehat{ABC}$ e $\widehat{DFE} \cong \widehat{ACB}$.

Portanto, pelo caso de semelhança AAA , $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

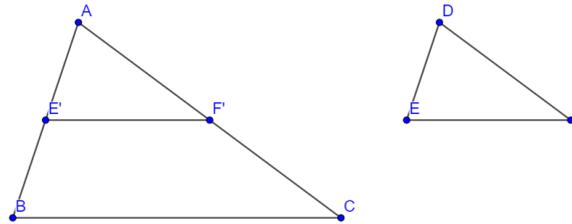


Figura 33 – Demonstração do caso de semelhança LAL

□

Teorema 3.4.3. (Caso LLL): Se, dados dois triângulos ABC e DEF , $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Demonstração. Construimos os pontos E' e F' sobre \overline{AB} e \overline{AC} , de modo que $\overline{AE'} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AF'} \cong \overline{DF}$. A figura 33 pode ser novamente utilizada para ilustrar a situação.

Por hipótese e pelo Teorema 3.3.4, $\overline{E'F'} \parallel \overline{BC}$. Assim, pelo Teorema 3.2.5 temos que $\widehat{AE'F'} \cong \widehat{ABC}$ e $\widehat{AF'E'} \cong \widehat{ACB}$ (*), e portanto $\Delta ABC \sim \Delta AE'F'$ (caso AA). O que implica que

$$\frac{\overline{E'F'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AB}} \implies \overline{E'F'} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{AE'}}{\overline{AB}} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$$

Por hipótese, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \implies \overline{EF} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}$

De onde concluímos que $\overline{EF} = \overline{E'F'}$.

Portanto $\Delta AE'F' \cong \Delta DEF$ (caso LLL), e então, por (*),

$$\begin{cases} \widehat{D\hat{E}F} \cong \widehat{A\hat{E}'F'} \cong \widehat{A\hat{B}C} \\ \widehat{E\hat{F}D} \cong \widehat{E'\hat{F}'A} \cong \widehat{B\hat{C}A} \\ \widehat{F\hat{D}E} \cong \widehat{F'\hat{A}E'} \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF.$$

□

3.5 Triângulos Retângulos

Um triângulo com um ângulo reto (de 90°) é chamado de **triângulo retângulo**. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**, e os demais são chamados de **catetos**.

Teorema 3.5.1. (*Relações métricas no triângulo retângulo*) Seja ABC um triângulo, retângulo em A , com hipotenusa a e catetos b e c . Seja h a altura relativa à hipotenusa, e H o pé da altura. Os segmentos \overline{BH} e \overline{HC} , de medidas n e m , respectivamente, são chamados de projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Notemos que $a = m + n$. As seguintes relações são válidas:

1. $h^2 = mn$
2. $b^2 = am$
3. $c^2 = an$
4. $ah = bc$
5. $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).

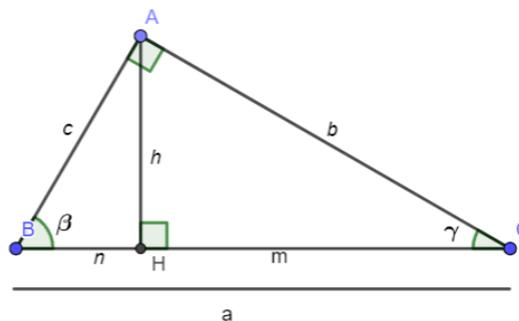


Figura 34 – Triângulo retângulo e seus elementos

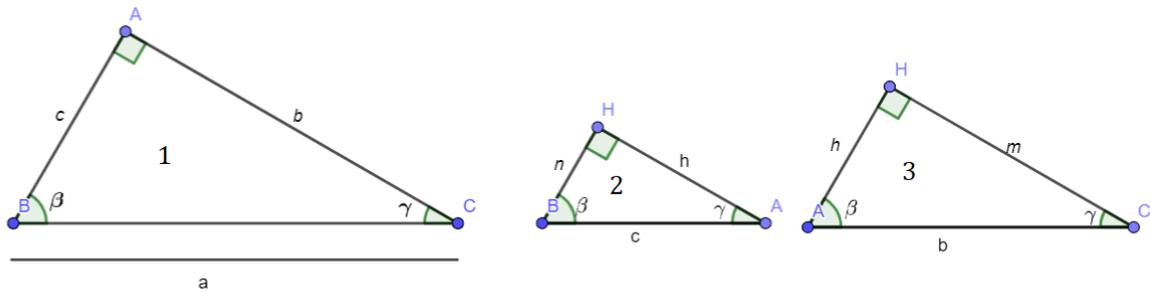


Figura 35 – Demonstração das relações métricas no triângulo retângulo

Demonstração. Enumeremos os triângulos ABC , HBA e HAC como triângulos 1, 2 e 3, respectivamente. No triângulo 1, devido ao Teorema 3.2.6, $\gamma + \beta = 90^\circ$. Segue que, nos triângulos 2 e 3, os ângulos não-retos são necessariamente γ e β . De modo que podemos montar as seguintes proporções:

Entre 2 e 3, temos:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \implies h^2 = mn.$$

Entre 1 e 3, temos:

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b} \implies b^2 = am.$$

Entre 1 e 2, temos:

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \implies c^2 = an.$$

Entre 1 e 2, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \implies ah = bc.$$

Somando as igualdades $b^2 = am$ e $c^2 = an$, temos:

$$b^2 + c^2 = a(m + n) \implies a^2 = b^2 + c^2.$$

□

3.6 Trigonometria no triângulo retângulo

Consideremos um triângulo ABC , retângulo em B , e C' um ponto obtido sobre a semirreta \overrightarrow{AC} . Considerando uma perpendicular à reta que contém \overline{AB} , passando por C' , seja B' sua intersecção com \overleftarrow{AB} . Os triângulos ABC e $AB'C'$ são semelhantes pelo caso AA , portanto podemos concluir que, em cada triângulo retângulo, as razões entre as medidas de seus lados são constantes.

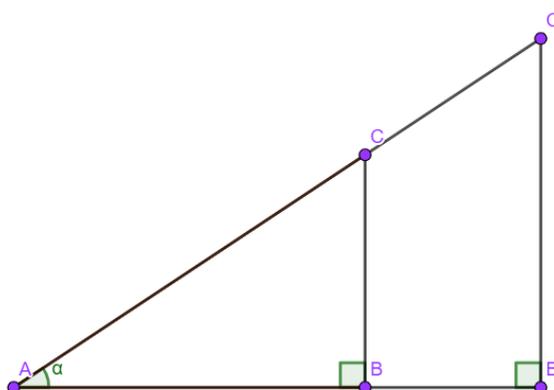


Figura 36 – Triângulos retângulos semelhantes

Definição 8. Em um triângulo ABC , retângulo em B , seja α a medida do ângulo $C\hat{A}B$.

- A razão $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ é chamada de seno do ângulo α , ou simplesmente $\text{sen}\alpha$
- A razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ é chamada de cosseno do ângulo α , ou simplesmente $\text{cos}\alpha$
- A razão $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ é chamada de tangente do ângulo α , ou simplesmente $\text{tg}\alpha$

Com as definições das relações trigonométricas, encerramos os pré-requisitos necessários para entendermos as noções de Astronomia passadas aos alunos.

4 Algumas aplicações

Neste capítulo, mostraremos como a semelhança de triângulos e a trigonometria podem ser utilizadas para resolver problemas interessantes, acessíveis a alunos de ensino fundamental.

4.1 Tales e a pirâmide

No capítulo 2, já mencionamos que Tales ficou famoso por desenvolver um método para determinar a altura de uma pirâmide. Abaixo transcrevo um exercício que sempre apresento para meus alunos:

Segundo o historiador Plutarco, o grande matemático grego Tales, em visita ao Egito, foi desafiado a medir a altura da pirâmide de Quéops. Consta que Tales fincou uma estaca de 6 m no chão e mediu a sombra formada, encontrando 12 m. No mesmo horário, um servo mediu o segmento formado pela sombra da pirâmide e metade de sua base, encontrando 278 m. Sendo assim, qual era a altura da pirâmide?

Os números que utilizo no enunciado são meramente ilustrativos. Inclusive, há duas versões distintas sobre esse fato, uma contada por Plutarco e outra por Hierônimos¹.

Resolução Podemos representar a situação com o seguinte esquema:

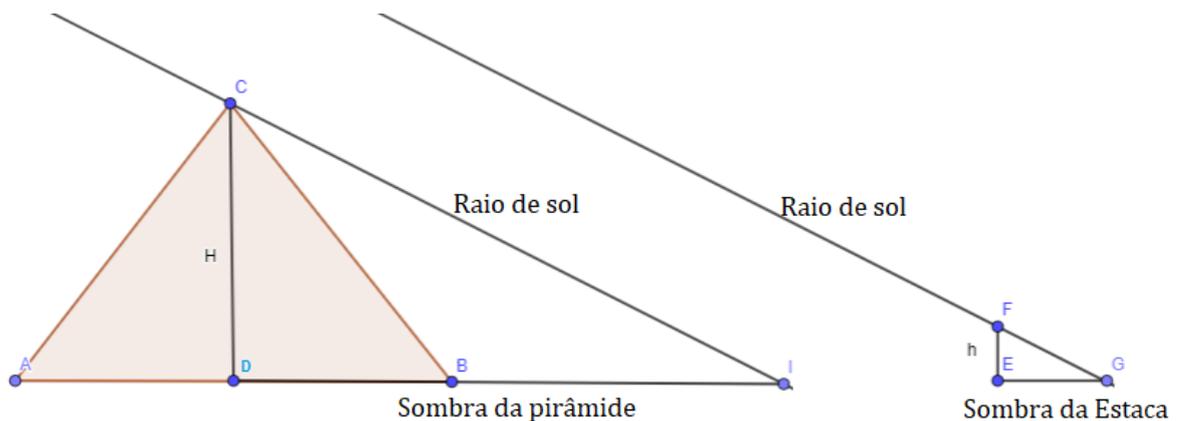


Figura 37 – Modelo para o problema da pirâmide.

Sabendo que os raios de sol são paralelos, os ângulos $\widehat{D\hat{I}C}$ e $\widehat{E\hat{G}F}$ são congruentes (basta tomar a reta que contém a base da pirâmide como transversal aos raios). Além

¹ (EVES, 1995, p. 115)

disso, por definição de altura, os ângulos \widehat{IDC} e \widehat{GEF} são retos. Portanto, os triângulos IDC e GEF são semelhantes pelo caso AA (Teorema 3.4.1).

Temos, portanto

altura (metros)	sombra (metros)
H	6
278	12

De modo que se encontra que $H = 139$ m.

4.2 Tales e o navio

Também mencionamos no capítulo 2 que Tales desenvolveu um método para determinar a distância de um ponto em terra até um navio no mar. Segue abaixo um exercício que explica como essa distância pode ser encontrada:

(...) Heat conjecturou que isso provavelmente foi feito com um instrumento formado de duas barras AC e AD articuladas em A, (...). A barra AD era mantida verticalmente sobre o ponto B da praia, ao passo que a barra AC era apontada na direção do navio P. Então, sem mudar o ângulo DAC, o instrumento era girado em torno de AD, marcando-se no chão o ponto Q para o qual AC estava apontada. Que distância deve ser medida a fim de achar a distância de B ao ponto inacessível P?²

Resolução

Considere a figura:

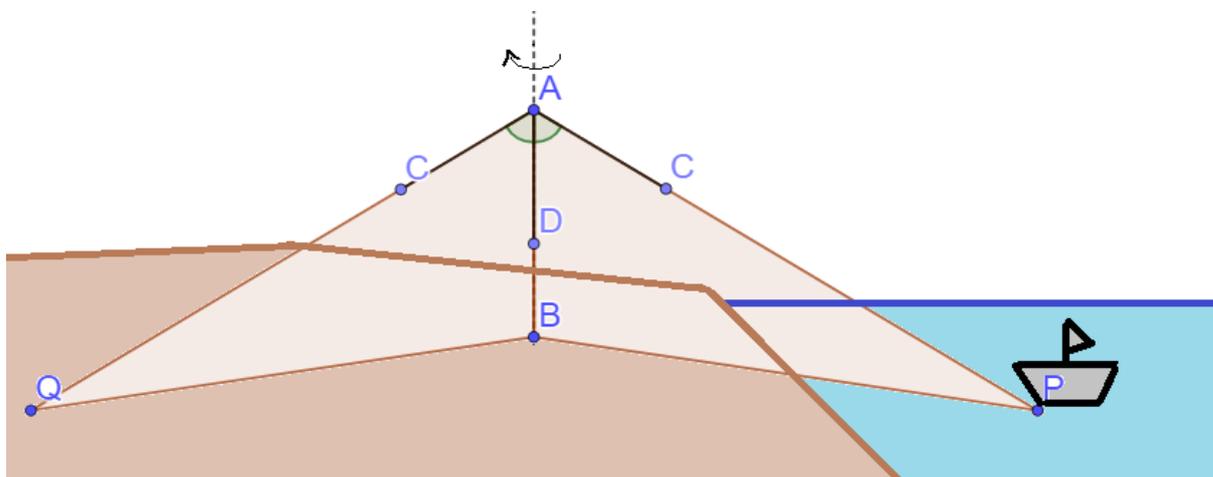


Figura 38 – Modelo para o problema do navio.

² (EVES, 1995, p. 115)

Toma-se \overline{AB} perpendicular ao solo. Ajusta-se o instrumento de modo que \overline{AC} aponte para P. Em seguida, faz-se um giro e obtém-se o ponto Q sobre a margem. Os triângulos ABP e ABQ são congruentes pelo caso ALA (Teorema 3.1.1). Portanto, a distância que deve ser medida é \overline{BQ} .

4.3 Alturas inacessíveis com um teodolito

Este é um de meus momentos preferidos quando ensino trigonometria. Construo um teodolito artesanal utilizando um transferidor de lousa e um tubo qualquer. Pode-se construir com os alunos teodolitos individuais utilizando transferidores e canudos, mas geralmente eles são menos precisos. Levo os alunos ao pátio da escola para medir o que eles acharem interessante (geralmente medimos antenas, árvores e hastes de bandeiras).



Figura 39 – Teodolito feito com transferidor de lousa e tubo de papelão

Abaixo transcrevo uma questão do vestibulinho ETEC (rede de escolas técnicas do Centro Paula Souza, vinculado ao Governo do Estado de São Paulo) que exemplifica o método que utilizo com os alunos, e nos mostra a importância de ensinar esse conteúdo no nono ano:

(...)Após a aula sobre astrolábios, o professor de uma ETEC propôs a seus alunos que determinassem a altura de uma antena localizada em um terreno plano e sem obstáculos à sua volta, que ficava próxima à escola. Para a realização da tarefa, explicou aos alunos os procedimentos para se determinar a altura (H) da antena:

- *O aluno deve-se colocar a uma distância (d) da base da antena;*
- *com o astrolábio, mirar o topo da antena e obter a medida do ângulo α ;*
- *medir a distância (h) dos olhos do aluno até o solo.*

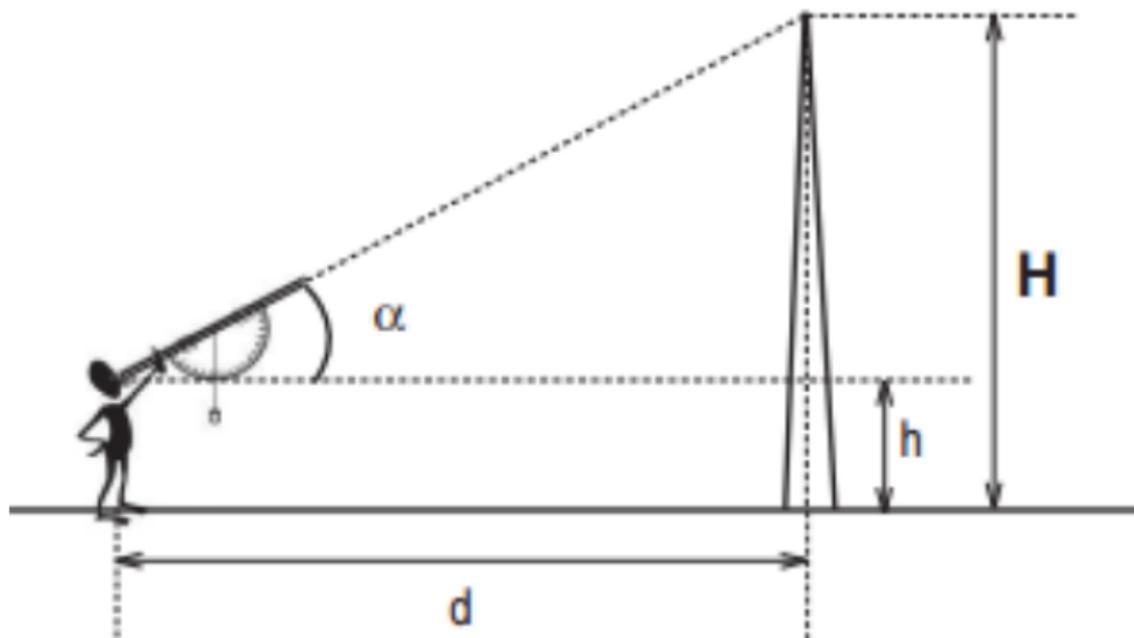


Figura 40 – Exercício do Vestibulinho ETEC - 2011.

Dados obtidos pelos alunos:

- $h = 1,50 \text{ m}$
- $d = 12 \text{ m}$
- $\alpha = 66^\circ$

Adote

- $\text{sen } 66^\circ = 0,9$
- $\text{cos } 66^\circ = 0,4$
- $\text{tan } 66^\circ = 2,25$

Os alunos concluíram que a altura (H) da antena era, em metros,

(A) 25,0. (B) 28,5. (C) 30,0 (D) 32,5. (E) 34,0

Resolução Temos que $\text{tan } \alpha = \frac{H - h}{d} \implies 2,25 = \frac{H - h}{12} \implies H - h = 27$.

Como $h = 1,50$, $H = 28,5 \text{ m}$ e a alternativa correta é a B.

Este tipo de exercício é mais comum ainda nas primeiras fases de vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), com a diferença de que geralmente se pedem os ângulos notáveis.

4.4 A medida da circunferência da Terra.

Como já mencionamos, Eratóstenes sabia que, no solstício de verão, em certo poço na cidade de Siena não havia sombra alguma. Isso significava que os raios de Sol estavam perpendiculares àquela localidade. Sabendo-se qual o ângulo entre um raio de Sol e uma perpendicular ao solo em Alexandria (onde Eratóstenes vivia), poder-se-ia saber a distância, em graus, entre as duas cidades.

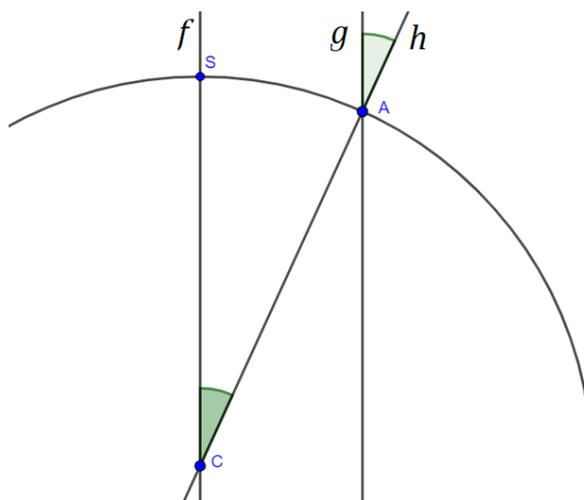


Figura 41 – Modelo para o experimento de Eratóstenes

Na Figura 41, o ponto S representa a cidade de Siena, e a reta f , uma perpendicular ao solo, que coincide com um raio de Sol. O ponto A representa a cidade de Alexandria, e a reta g , um raio de Sol incidindo em A. A reta h representa uma perpendicular a Alexandria. Assumindo que os raios de Sol são paralelos e aplicando o teorema 3.2.5, temos que o ângulo agudo entre g e h é congruente ao ângulo agudo entre f e h .

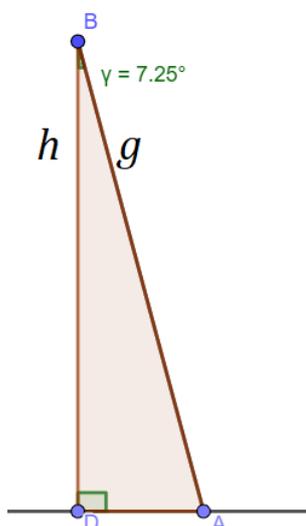


Figura 42 – Determinação do ângulo de incidência do raio de Sol.

Como a figura 41 foi feita em escala, dá-se a entender que as retas g e h têm sua intersecção no ponto A. Fazendo uma ampliação na figura, criada no *Geogebra*, vê-se que a intersecção se dá fora da circunferência, no ponto B, conforme a figura a Figura 42.

Podemos então criar o triângulo ADB, retângulo em D, em que o ponto D representa a intersecção a reta h com o solo. Suponhamos que \overline{DB} represente uma vareta de tamanho qualquer, e que \overline{DA} seja sua sombra. Obtemos facilmente o ângulo \widehat{DBA} (chamemos de γ), através de sua tangente, afinal

$$\tan\gamma = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

Encontrou-se $\gamma = 7,25^\circ$, e consta que Eratóstenes contratou alguém para medir, em passos, a distância entre as cidades (essa profissão era comum e denominada *bemetatistes*³). A distância encontrada seria de aproximadamente 5000 estádios, e em seguida fez-se uma regra de três.

ângulo (graus)	distância (estádios)
7,25	5000
360	d

Obtendo, aproximadamente, $d=248276$ estádios. Os valores variam um pouco de acordo com a fonte consultada, mas as conversões apontam que o resultado seria equivalente a 45911 km. Considerando 40075 km como o valor mais atual, o erro de Eratóstenes foi de aproximadamente 14,56%.

Dentre os erros que tornam o cálculo pouco preciso (para os padrões de hoje, mas surpreendente para a época) estão o fato de Eratóstenes ter considerado o Sol como uma fonte pontual; os erros experimentais das medidas para se determinar o ângulo γ e o fato de Siena e Alexandria não se encontrarem exatamente sobre o mesmo meridiano. O ideal seria medir a distância Norte-Sul entre as cidades.

Com todos esses possíveis erros experimentais, é realmente impressionante que esse cálculo tenha obtido sucesso. E também chama a atenção a sua simplicidade, de modo que esse experimento pode ser reproduzido com alunos de ensino fundamental, conforme veremos no capítulo 5.

³ (RONAN, 1987a, p. 25)

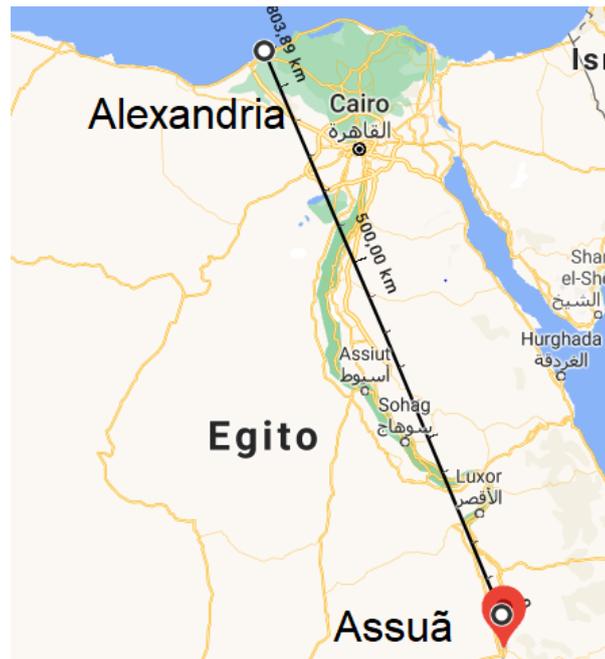


Figura 43 – Distância em linha reta entre Alexandria e Siena (atual Assuã), segundo o *Google Maps*.

4.5 A distância da Terra à Lua

Mencionamos no capítulo 2 que Aristarco havia medido a distância Terra-Lua. Ele assumiu corretamente que o raio da Terra é suficientemente menor do que o raio da Lua, de modo que um ângulo medido da superfície da Terra pode ser considerado congruente a um ângulo medido a partir do centro da Terra. Seu método consistia em determinar a duração de um eclipse lunar total ⁴.

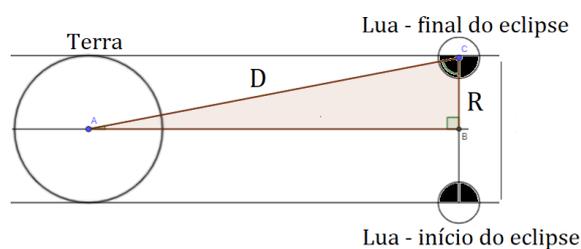


Figura 44 – Modelo para a demonstração de Aristarco

Para se determinar essa duração, é necessário observar quando a Lua tem metade de sua face completamente escurecida. Conforme a Lua adentra a região de sombra causada pela Terra, a região escurecida aumenta, e começará a diminuir quando a Lua sair dessa região. Quando metade de sua face estiver novamente escurecida, termina-se de contar o tempo. Chamemos esse tempo de T .

⁴ (SANTOS, 25 de abr. de 2007)

A partir disso, determinamos o ângulo α , sabendo a duração de um mês lunar (Chamaremos de T_L).

Assim sendo, faz-se a regra de três

ângulo (graus)	tempo
360	T_L
2α	T

Sabendo que T_L vale aproximadamente 29,5 dias, obtém-se o valor de 2α , e, conseqüentemente de α .

A partir disso, determina-se a distância Terra-Lua (D), fazendo:

$$\sin \alpha = \frac{R}{D}.$$

4.6 A distância da Terra ao Sol

De posse da distância Terra-Lua, Aristarco estimou o ângulo formado entre ela, a Terra e o Sol, quando se encontrasse no quarto minguante⁵

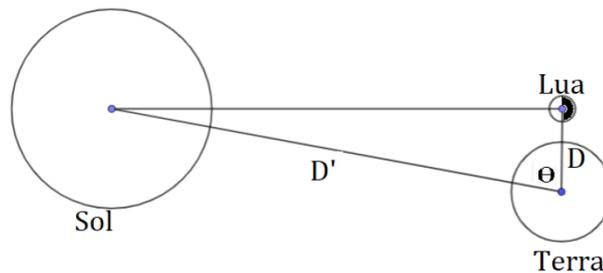


Figura 45 – Modelo para a o cálculo da distância Terra-Sol (fora de escala)

Aristarco encontrou $\theta = 87^\circ$, e tendo obtido anteriormente a distância D e admitindo ser perpendicular o ângulo Terra-Lua-Sol (o que de fato ocorre no quarto minguante), calculou:

$$\cos \theta = \frac{D}{D'}.$$

Os instrumentos da época eram pouco precisos, e hoje sabe-se que θ vale, aproximadamente, $89,8587^\circ$. Aristarco concluiu que a distância Terra-Sol era de 18 a 20 vezes a distância Terra-Lua, quando, na verdade, a razão entre as distâncias é igual a 400⁶.

Os resultados incorretos decorrem das falhas nas medições, mas os métodos são extremamente elegantes do ponto de vista matemático, e podem ser entendidos por qualquer aluno de ensino fundamental.

⁵ (SANTOS, 25 de abr. de 2007)

⁶ (RONAN, 1987a, p. 125)

É importante ressaltar que Aristarco obteve seus resultados **sem o uso de trigonometria**. As notações utilizadas neste trabalho (e que geralmente são utilizadas no ensino de Astronomia) se fazem por serem muito mais práticas. A quem interessar entender o método de Aristarco como descrito pelo próprio, pode consultar a belíssima tradução de *Sobre os Tamanhos e Distâncias do Sol e da Lua*, de Rubens Machado⁷.

4.7 Determinando o diâmetro do Sol

Neste método, determinamos o diâmetro do Sol através de uma projeção⁸. A simplicidade do experimento implica em um razoável erro experimental, mas impressiona pela elegância. Basta recortar o centro de um pedaço de papelão e tampá-lo com papel alumínio; no centro do papel alumínio, faz-se um furo bem pequeno com um alfinete ou agulha. Então, em um momento de Sol a pino, projeta-se a imagem do Sol através do orifício.

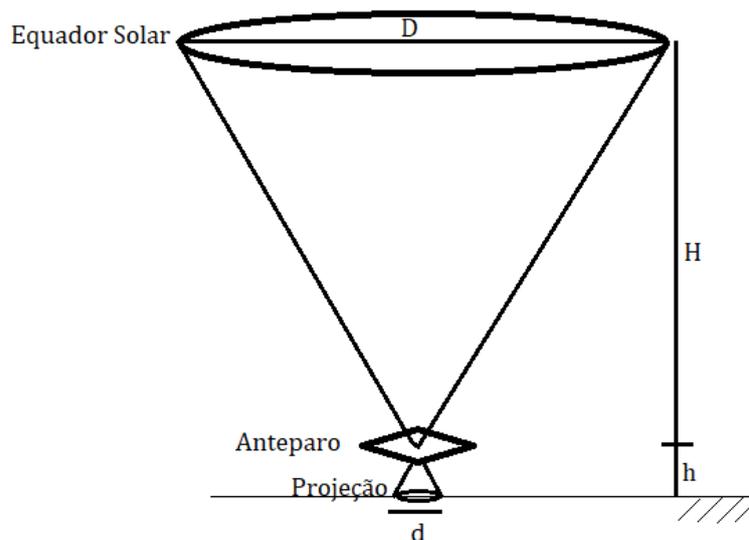


Figura 46 – Modelo para a determinação do diâmetro do Sol (fora de escala)

Se o Sol estiver a pino, supomos que seu círculo máximo esteja paralelo ao solo, e temos portanto dois triângulos semelhantes pelo caso AAA (Teorema 3.4.1). Então:

Diâmetro	distância
D	H
d	h

Conhecendo H , a distância Terra-Sol, e medindo d e h , fazemos uma regra de três e obtemos o valor de D .

⁷ (SAMOS, 2016)

⁸ (SANTOS, 25 de abr. de 2007)

Abaixo, uma foto do anteparo utilizado no experimento com meus alunos. A projeção do Sol é tão pequena que fica impossível observá-la na imagem.



Figura 47 – Experimento feito com alunos

Em nosso experimento, obtivemos $d = 2$ mm e $h = 16$ cm. Utilizando $H = 149\,600\,000$ km, obtemos $D = 1\,870\,000$ km. Como o valor correto é de $1\,392\,700$ km, tivemos um erro de 34%, que pode ser justificado pelas medições com a régua de h e d (a menor medida da régua é de 1 mm, metade do valor encontrado para d) e a suposição de que o equador do Sol esteja exatamente paralelo ao solo.

Caso estivéssemos trabalhando com alunos mais velhos, seria interessante calcular o erro experimental a partir do conceito de propagação de erros e incertezas, e assim avaliar se a distância entre o valor medido e o valor esperado está dentro da margem de erro. Porém considero que tais cálculos fogem do que se propõe para uma turma de nono ano do Ensino Fundamental.

4.8 Considerações sobre os exemplos desse capítulo

A ordem escolhida para apresentar os exemplos dados é a que eu considero ideal para se trabalhar com os alunos. Nos exemplos de 4.1 a 4.3, trabalha-se com problemas simples de congruência, semelhança e trigonometria. Nos problemas 4.4 a 4.6, cada resultado é pré-requisito para o resultado posterior. Em 4.4, com o conceito de retas paralelas cortadas por uma transversal, obtemos o raio da Terra. De posse desse valor e com trigonometria, obtém-se a distância Terra-Lua no exemplo 4.5. Com a distância Terra-Lua e mais trigonometria, determina-se a distância Terra-Sol no problema 4.6. E, finalmente, com a distância Terra-Sol, determina-se o diâmetro do Sol em 4.7

A intenção é que os alunos percebam como é possível chegar nesses resultados com raciocínio lógico e observação. Assim, desfaz-se a ideia de que a Ciência é uma linguagem inacessível, ideia essa que dá origem a conceitos equivocados como o terraplanismo - ao não se entender como se obtém um resultado, nega-se o resultado. Mais importante do que encontrar o valor numérico em cada experimento é entender o porquê de sua validade.

5 O Projeto Eratóstenes

5.1 O projeto

Criado nos Estados Unidos em 2005 (Ano Internacional da Física)¹, o Projeto Eratóstenes hoje é realizado em todo o mundo, coordenado por diferentes universidades. O projeto do qual participamos, em 2019, foi coordenado pelo Departamento de Física da Universidade de Buenos Aires, envolvendo 576 escolas da América, Europa e África na reprodução do experimento que obteve a medida da circunferência da Terra.

No projeto, cada escola, entre os dias 13 e 30 de setembro, determinou o ângulo de incidência dos raios solares ao meio-dia solar. Tal horário é obtido da seguinte maneira: com um objeto posicionado perpendicularmente ao solo, fazendo as vezes de gnômon, mede-se, em um horário avançado da manhã, o tamanho de sua sombra, a cada cinco minutos; em um determinado momento, a sombra atinge seu menor comprimento, e após isso, volta a crescer. O horário em que foi obtida a menor sombra é o meio dia solar. As medidas obtidas foram então enviadas à coordenação do projeto, para que fosse feito o devido tratamento estatístico dos dados.

O ângulo obtido por uma equipe foi comparado com o de outra, localizada, preferencialmente, no mesmo meridiano. No projeto, optou-se por encontrar diretamente o raio da Terra, em vez de sua circunferência.

Sendo θ_A o ângulo obtido por uma escola e θ_B o ângulo obtido por outra, a distância angular entre as localidades é $\theta_A - \theta_B$, caso estejam no mesmo hemisfério, ou $\theta_A + \theta_B$, caso estejam em hemisférios distintos, conforme as figuras a seguir:

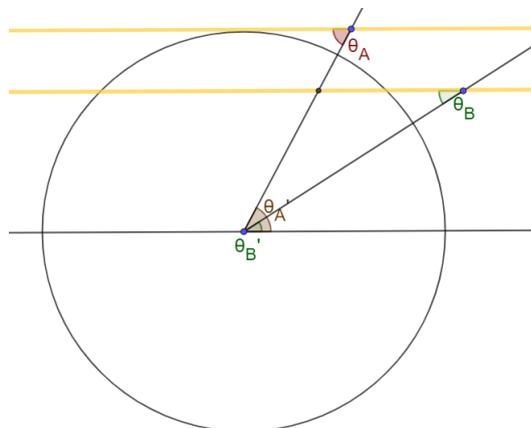


Figura 48 – Caso em que as localidades estão no mesmo hemisfério

¹ (SANTOS, A; VOELZKE, M; ARAÚJO, M., 2012, p.1146)

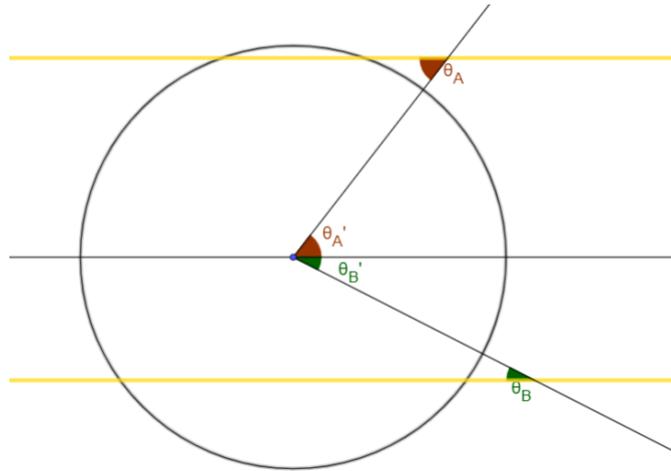


Figura 49 – Caso em que as localidades estão em hemisférios distintos

No caso particular relatado neste trabalho, as escolas estavam em hemisférios distintos. Constrói-se então a seguinte proporção:

ângulo (graus)	distância
$\theta_A + \theta_B$	d
360	C

Que nos leva a

$$C = \frac{360d}{\theta_A + \theta_B}$$

. No projeto, optou-se por encontrar o raio da Terra, portanto, utilizando $C = 2\pi R$ e isolando R , temos:

$$R = \frac{180d}{\pi(\theta_A + \theta_B)}$$

No caso de uma escola não possuir uma parceira no mesmo meridiano, escolheu-se outra de modo que o valor de d foi o da distância Norte-Sul entre as escolas.

A coordenação do projeto encarregou-se de parear as escolas e efetuar os cálculos, embora cada professor fosse livre para refazê-los com seus alunos.

Antes de relatar como foi a realização do experimento com meus alunos, acho importante fazer uma contextualização do município e da escola em que leciono.

5.2 A rede de ensino municipal de Jaguariúna

Com uma população estimada em pouco mais de 58 mil habitantes, o município de Jaguariúna possui o 13º PIB per capita do Brasil e o 5º do Estado de São Paulo. A prefeitura é responsável por 12 escolas municipais de Ensino Fundamental (além das

escolas de Ensino Infantil e EJA) e a nota da cidade no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), nos anos finais do Ensino Fundamental, é de 6,4, colocando-a em 11º lugar no país, 5º lugar no estado de São Paulo e 1º lugar na região metropolitana de Campinas².

As escolas utilizam material apostilado (no ano em que se realizou a pesquisa, o material era da editora OPET - atualmente, é da *Pearson*). Dentre os projetos que a rede municipal oferece aos alunos, está o cursinho “Lá Vou Eu”, no qual em cada escola são formadas turmas de Português e Matemática no contraturno. Essas turmas servem tanto para melhorar o desempenho dos alunos com dificuldades, quanto para incentivar os que se destacam, preparando-os para olimpíadas e para “vestibulinhos” de escolas técnicas.

O projeto foi realizado na escola “Professor Mário Bergamasco”, localizado no Parque Florianópolis, na periferia de Jaguariúna. Segundo os dados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) de 2019, a escola, com 775 matrículas, possui um indicador de complexidade de gestão no nível 3 (numa escala de 0 a 6). Os alunos estão classificados no grupo 4 no Indicador de Nível Socioeconômico³ (em que o grupo 6 seria o nível mais alto). Com uma taxa de aprovação de 100%, nota 6,1 na Prova Brasil (de 0 a 10) em Matemática e 6,2 em Língua Portuguesa, a escola obteve nota 6,2 no IDEB 2019⁴. Como se vê na figura abaixo, no ano de 2019 houve ligeira queda em relação ao ano de 2017, mas a escola continua se mantendo acima das metas propostas pelo Ministério da Educação.

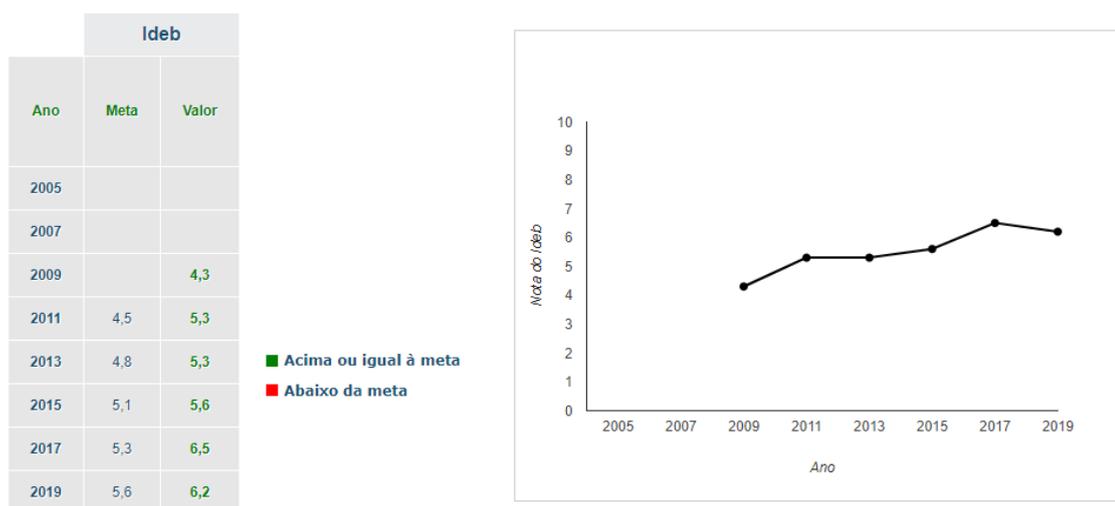


Figura 50 – Evolução do IDEB da escola Mário Bergamasco⁵

² (BRASIL, 2020b)

³ Este dado refere-se ao ano de 2017. Esse indicador não foi divulgado em 2019

⁴ A nota do IDEB é a média aritmética entre as notas de Língua Portuguesa e Matemática, multiplicada pela taxa de aprovação

⁵ (BRASIL, 2020a)

É importante frisar que utilizo esses dados apenas porque são a forma que existe, no momento, de se traçar o perfil da escola, o que não significa que concorde que a complexidade da realidade escolar possa ser resumida em uma avaliação de larga escala. Segundo o grande professor D’Ambrosio, os exames e testes padronizados são

[...]uma forma ainda mais inútil e enganadora de se proceder a avaliação do que os exames e testes comuns, e que lamentavelmente começam a ser propostos no Brasil e em muitos outros países como medidas de melhoria de ensino. Deixo muito clara minha opinião: exames e testes nada dizem sobre aprendizagem e criam enormes deformações na prática educativa. De fato, além de não dizerem nada, os testes e exames têm efeito negativo⁶.

Mas uma crítica mais aprofundada ao IDEB, com seus benefícios e malefícios, fugiria do escopo deste trabalho.

5.3 O experimento

No ano de 2019 eu fui responsável por um oitavo ano e pelas três turmas de nono ano na escola, e também pelas turmas do cursinho “Lá vou Eu”. Foi para a turma de nono ano do cursinho que eu propus a participação no projeto Eratóstenes. Quando expliquei do que se tratava o projeto, os alunos ficaram muito interessados e fizeram várias perguntas sobre astronomia, de modo que acabei explicando todos os itens apresentados no capítulo 4, aproveitando que havia acabado de lhes ensinar trigonometria.

Como eu acredito que projetos diferenciados não devem ser restritos apenas aos “melhores alunos”, convidei todos os demais alunos dos nonos anos para participar das medidas. O único entrave era o horário: como o Ensino Fundamental funciona à tarde, os alunos deveriam estar presentes no contraturno para obtermos o meio-dia solar. Mesmo assim, obtive a adesão de 30 alunos, mesmo frisando que não seria atribuída nota à presença nessa atividade.

No dia 23 de setembro de 2019, reuni-me com os alunos na biblioteca da escola e passei a eles um vídeo da série *Cosmos*, apresentada por Carl Sagan, no qual ele explicava o experimento de Eratóstenes. Em seguida, nos dirigimos à quadra da escola para iniciar as medições. Como gnômon, foi utilizado um tubo para guardar mapas escolares. Mas sabe-se que a ciência experimental pode ser muito frustrante, e nesse dia o céu ficou nublado de modo que não conseguimos medir as sombras com precisão. Apesar de o momento ter sido desolador, considero que essa situação tenha sido positiva para que os alunos entendessem como a pesquisa é feita na prática.

⁶ (D’AMBROSIO, 1996, p.69)

Reunimo-nos novamente no dia 30 de setembro, dessa vez com céu limpo, e conseguimos efetuar as medidas, conforme tabela abaixo:

Comprimento do gnômon: 67,2 cm	
Horário	Comprimento da sombra (cm)
11h25	26,1
11h30	25,2
11h35	24,6
11h40	24,2
11h45	23,8
11h50	23,5
11h55	23,3
12h00	23,0
12h05	22,8
12h10	22,5
12h15	22,8
12h20	23,2

Tabela 3 – Sombra do gnômon em função do horário, a fim de se obter o meio-dia solar

O meio-dia solar foi, portanto, às 12h10 e o menor comprimento da sombra foi de 22,5 cm.

Pudemos então descobrir o ângulo de incidência dos raios solares, fazendo

$$\theta_A = \arctan\left(\frac{22,5}{67,2}\right) \implies \theta_A \approx 18,51^\circ$$

Devido ao problema que tivemos com o céu nublado no dia 23, e, como a atividade ocorreu no contraturno e requeria que os responsáveis assinassem autorizações, só conseguimos realizar nossa última medição no último dia permitido. Não houve outra escola no mesmo meridiano que também tivesse feito a medida no dia 30, portanto a coordenação do projeto nos pareou com o *Institut Brugulat*, localizado em Girona, na Espanha. Orientados pelo professor Antoní Trilla, os alunos dividiram-se em três equipes, cada uma com um gnômon, e obtiveram as seguintes medidas:

Comprimento do gnômon (cm)	Comprimento da sombra (cm)
100,2	100,1
99,6	101,1
99,8	100

Tabela 4 – Medidas obtidas pelo *Institut Brugulat*

Encontramos assim três medidas para o ângulo θ_B , a saber:

$$\theta_{B_1} = \arctan\left(\frac{100,1}{100,2}\right) \implies \theta_{B_1} \approx 44,97^\circ$$

$$\theta_{B_2} = \arctan\left(\frac{101,1}{99,6}\right) \implies \theta_{B_2} \approx 45,43^\circ$$

$$\theta_{B_3} = \arctan\left(\frac{100}{99,8}\right) \implies \theta_{B_3} \approx 45,06^\circ$$

Fazendo a média aritmética entre os três valores acima, encontramos

$$\theta_B \approx 45,15^\circ$$

Como as localidades encontram-se em hemisférios diferentes, fazemos $\theta_A + \theta_B = 63,66^\circ$. O *Institut Brugulat* localiza-se à latitude $42,126^\circ$ Norte, e a escola Mário Bergamasco, à latitude $22,705^\circ$ Sul. Temos uma distância angular de $64,831^\circ$. Como cada grau de latitude equivale aproximadamente 111,12 km, temos uma distância Norte-Sul de aproximadamente 7204,02 km.

Substituindo esses dados na fórmula para o raio da Terra, obtemos

$$R = \frac{180 \cdot 7204,02}{\pi(63,65)} \implies R \approx 6484 \text{ km}$$

Como o valor correto é de 6371 km, obtivemos um erro de aproximadamente 1,8%.

Com 554 pares de medições (nem todas as escolas que participaram tiveram os dados validados), a coordenação do projeto chegou ao valor de $R = (6300 \pm 20) \text{ km}$.

Um observador mais atento perceberá que a distância utilizada de 111,12 km entre dois paralelos só é possível de se determinar se conhecermos o raio da Terra (cada grau de latitude corresponde $\frac{1}{360}$ da circunferência da Terra). Na verdade, o importante desse experimento é o valor da soma $\theta_A + \theta_B$, que, calculada corretamente, deverá ser igual à distância angular entre os paralelos. Encontramos $\theta_A + \theta_B = 63,66^\circ$, e $64,831^\circ$ para a distância entre as latitudes, um erro de 1,8%, o mesmo obtido para o raio da Terra.

Assim, pode-se argumentar que nossa “demonstração” foi circular, e de fato foi. Só não o seria se fosse possível fazer como Eratóstenes, e contratar alguém para medir a distância Norte-Sul entre Jaguariúna e Girona, na Espanha. De qualquer modo, não deixa de ser relevante como instrumento pedagógico. É importante que os alunos notem que, com apenas dois bastões (um em cada localidade), é possível descobrir a distância angular (Norte-Sul) entre quaisquer pontos do planeta.

A seguir, algumas imagens do projeto realizado na escola:



Figura 51 – Alunos assistindo à explicação de Carl Sagan para o experimento de Eratóstenes



Figura 52 – Professor medindo a altura do gnômon



Figura 53 – Aluno medindo a sombra do gnômon



Figura 55 – Certificado de participação no Projeto Eratóstenes

6 Considerações Finais

Acredito que o trabalho cumpriu importantes objetivos com os alunos, como:

- A compreensão de que os conhecimentos adquiridos na escola são construídos pela sociedade, resultado de milênios de atividade científica.
- O entendimento de como se dá a evolução histórica de conceitos científicos e como, a partir do embasamento teórico, demonstração matemática e validação experimental, uma teoria científica passa a ser aceita pela comunidade.
- A aplicação de conceitos de geometria do Ensino Fundamental em atividades investigativas, e com ela a noção de que não é necessária muita tecnologia para a obtenção de importantes resultados.
- O entendimento de que a Terra, definitivamente, não é plana.

Este trabalho é também um pequeno exemplo de como romper com o “paradigma do exercício”. No ambiente de aprendizagem proposto por Skovsmose, porém, precisaríamos ir além, investigando novas situações propostas pelos alunos. Mas com apoio dado pela gestão escolar e a ótima participação discente (comparecendo à escola fora do horário de aulas, sem contrapartida em notas), fica a certeza de que é possível a criação novos projetos, mais ousados e com maior participação dos alunos na elaboração.

Dos estudantes que frequentaram em 2019 o cursinho “Lá Vou Eu”, onde gestamos o projeto, 9 foram aprovados no concorrido “vestibulinho” do Centro Paula Souza, 2 em primeiro lugar em seus cursos, e hoje fazem o Ensino Médio na Escola Técnica João Belarmino, em Amparo, cidade vizinha de Jaguariúna, e têm um brilhante futuro acadêmico pela frente.

A pandemia da COVID-19 dificultou que o projeto fosse executado em 2020 - A organização do Projeto Eratóstenes até propôs que os alunos realizassem suas medições em suas próprias casas, mas em nossa escola a preocupação maior era que garantíssemos que os alunos fizessem "o mínimo", diante do difícil cenário do ensino a distância.

Porém acredito que no provável contexto de ensino híbrido que se avizinha em 2021, estaremos preparados para a realização deste e de outros projetos. E teremos alunos cada vez mais conscientes da importância de uma base sólida em Ciências Exatas; o domínio de suas técnicas e conceitos vai muito além da aplicação em exercícios e provas, pois contribui para a formação de cidadãos de fato emancipados.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a base*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Acesso em: 18 jan 2021. Citado na página 21.

_____. *IDEB Escola - Consulta Pública*. Brasília, 2020. Acesso em: 19 jan. 2021. Citado na página 70.

_____. *Panorama IBGE*. Rio de Janeiro: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2020. Acesso em: 19 jan. 2021. Citado na página 70.

CARVALHO, O. *Carl Sagan e Neil D. Tyson NÃO SÃO fontes confiáveis em assuntos científico*. Richmond: Twitter: @opropriolavo, 10 de jun. de 2019. Disponível em: <<https://twitter.com/opropriolavo/status/1138139158151598080>>. Acesso em: 15 jan. 2021. Citado na página 15.

_____. *Nas origens da burrice ocidental*. Rio de Janeiro: **Jornal do Brasil**, 15 de jun. de 2006. Disponível em: <<https://olavodecarvalho.org/nas-origens-da-burrice-ocidental/>>. Acesso em: 15 jan. 2021. Citado na página 15.

COLI, J. *O Voldemort da Virgínia fulmina o Iluminismo, Newton e Einstein..* São Paulo: **Folha de S.Paulo**, 11 de ago. de 2019. Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/colunas/jorge-coli/2019/08/o-voldemort-da-virginia-fulmina-o-iluminismo-newton-e-einstein.shtml>>. Acesso em: 16 out. 2020. Citado na página 17.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: Da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 20, 22 e 71.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.

GARCIA, R. *7% dos brasileiros afirmam que Terra é plana, mostra pesquisa*. São Paulo: **Folha de S.Paulo**, 14 de jul. de 2019. Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/ciencia/2019/07/7-dos-brasileiros-afirmam-que-terra-e-plana-mostra-pesquisa.shtml>>. Acesso em: 15 jul. 2019. Citado na página 15.

GASPARIN, J. *Uma didática para a pedagogia histórico-crítica*. Campinas: Autores Associados, 2012. Citado na página 21.

GLEISER, M. *A Dança do Universo: dos mitos de Criação ao Big Bang*. São Paulo: Companhia das Letras, 1997. Citado 6 vezes nas páginas 26, 27, 30, 35, 36 e 37.

GONÇALVES, E. *Prudência e razão de Estado na obra de Gabriel Naudé*. Dissertação (Mestrado em Filosofia) — Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, 2015. Citado na página 17.

GOOGLE. Mountain View: *Google Trends*, 2019. Disponível em: <<https://shorturl.at/gzN89>>. Acesso em: 15 jan. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

- GORTÁZAR, N. *Olavo de Carvalho, o onipresente oráculo do bolsonarismo*. São Paulo: **El País**, 13 de abr. de 2019. Disponível em: <https://brasil.elpais.com/brasil/2019/04/14/politica/1555201232_670246.html>. Acesso em: 15 jan. 2021. Citado na página 15.
- HAWKING, S. *Uma breve história do tempo*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 28, 37 e 38.
- MLODINOW, L. *A Janela de Euclides: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço*. São Paulo: Geração Editorial, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 20, 26, 27 e 30.
- REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008. Citado na página 39.
- RONAN, C. A. *História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 1987. v. 1. Citado 9 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 62 e 64.
- _____. *História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 1987. v. 2. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 32.
- _____. *História ilustrada da ciência da Universidade de Cambridge*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 1987. v. 3. Citado 6 vezes nas páginas 32, 33, 34, 35, 36 e 37.
- SAGAN, C. *O mundo assombrado pelos demônios: a ciência vista como uma vela no escuro*. São Paulo: Companhia das Letras, 1996. Citado na página 18.
- SAMOS, A. *Sobre os Tamanhos e Distâncias do Sol e da Lua*. Santiago: [s.n.], 2016. Traduzido e editado por Rubens E. G. Machado. Disponível em: <<http://www.shorturl.at/enpxR>>. Acesso em: 19 jan. 2021. Citado na página 65.
- SANTOS, A; VOELZKE, M; ARAÚJO, M. *O Projeto Eratóstenes: a reprodução de um experimento histórico como recurso para a inserção de conceitos da Astronomia no Ensino Médio*. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 29, n. 3, p. 1137–1174, 2012. Citado na página 68.
- SANTOS, T. *Algumas primeiras perguntas em Astronomia*. UFMG - Observatório Astronômico Frei Rosário, 25 de abr. de 2007. Disponível em: <<http://www.observatorio.ufmg.br/pas74.htm>>. Acesso em: 22 abr. 2020. Citado 3 vezes nas páginas 63, 64 e 65.
- SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *BOLEMA*, v. 13, n. 14, p. 66–91, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- TESSLER, L. *Olavo e a Relatividade*. Campinas: **Cultura Científica**, 10 de jan. de 2019. Disponível em: <<http://ccientifica.blogspot.com/2019/01/olavo-e-relatividade.html>>. Acesso em: 15 jan. 2021. Citado na página 15.