



UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT



FRANCISCO CLEITON SOARES BARBOSA

Construções Geométricas Possíveis e Impossíveis

Orientador: Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva.

Natal/RN - 2021

FRANCISCO CLEITON SOARES BARBOSA

Construções Geométricas Possíveis e Impossíveis

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva.

Natal/RN - 2021

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Barbosa, Francisco Cleiton Soares.

Construções geométricas: possíveis e impossíveis / Francisco Cleiton Soares Barbosa. - 2021.

140f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, 2021.

Orientador: Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva.

1. Matemática - Dissertação. 2. Construções geométricas - Dissertação. 3. Problemas clássicos gregos - Dissertação. 4. Geometria euclidiana - Dissertação. 5. Números construtíveis - Dissertação. I. Silva, Carlos Alexandre Gomes da. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 51

Dissertação de Mestrado sob o título Construções Geométricas Possíveis e Impossíveis apresentado por Francisco Cleiton Soares Barbosa e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva
Orientador
UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Paulo Roberto Ferreira dos Santos Silva
Examinador Interno
UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Eurípedes Carvalho da Silva
Examinador Externo
IFCE - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

Natal/RN - 2021

Dedico este trabalho a meus entes mais queridos, em especial a minha mãe, dona Dora, minha esposa Stella Regina e minha linda filhinha, Lilian Medeiros Barbosa.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por todas as oportunidades criadas para que eu tenha alcançado meus objetivos.

À minha esposa Stella Medeiros, que mais uma vez me deu todo o suporte e forças para superar as dificuldades durante o desenvolvimento deste trabalho e sempre esteve disponível para ajudar no que fosse possível, criando um ambiente favorável para que eu pudesse realizar esse trabalho e por me presentear com a filha mais linda desse mundo, Lilian.

À minha mãe Francisca Cleide que sempre me incentivou a trilhar minha vida de forma íntegra e correta. Foram esses ensinamentos que moldaram grande parte da pessoa que hoje sou.

Aos meus irmãos e irmãs que, nos períodos de maiores dificuldades que vivemos, foram meu suporte, me mantiveram sempre alegre e me permitiram construir memórias maravilhosas. Em especial ao meu irmão Silvan que, por ser o mais velho, me passou um pouco de sua experiência. Ter seu exemplo de perseverança, garra, disciplina e retidão, foi de grande valia para a formação do meu caráter.

Ao meu pai que sempre foi um guerreiro, capaz de revirar montanhas para garantir o sustento de sua família.

Ao professor Francisco Quaranta que teve enorme significado para que eu escolhesse essa área e que muito contribuiu com esse trabalho, uma vez que a bagagem que tenho sobre o tema que aqui tratei foi iniciada em suas aulas e nos projetos dos quais fomos parceiros.

À minha grande amiga Alessandra, que mesmo estando passando por muitas mudanças em sua carreira profissional, conseguiu arranjar tempo para ler e auxiliar com correções ortográficas e expressando sua opinião sobre especificidades do trabalho.

Agradeço também aos colegas de turma do PROFMAT, pelas risadas, ajudas, conversas descontraídas e pelas tardes em que ficamos estudando pelos corredores da UFRN.

Por fim, agradeço aos meus professores do mestrado, Edgar Pereira, Jaques Lopes, Marcelo Gomes, Gabriela Lucheze, Débora Borges, Paulo Roberto, Fagner Lemos e, em especial, Carlos Alexandre Gomes, devido à sua orientação conseguimos alcançar os objetivos desse trabalho. Todos eles são exemplos de profissionais que levarei para o futuro da minha carreira.

Resumo

O presente trabalho se propõe a explorar as diversas construções geométricas realizadas com instrumentos de desenho, desde aquelas que são possíveis, as aproximadas e até as impossíveis, feitas com a régua e o compasso. Partindo de uma exploração histórica das principais construções que permitiram que a Matemática se desenvolvesse nas civilizações antigas, assim como aquelas que levaram séculos para serem demonstradas como impossíveis, fazendo com que os matemáticos criassem diferentes abordagens à geometria euclidiana. Em especial há três problemas de construções geométricas impossíveis e até hoje são conhecidos como “Os Três Problemas Clássicos da Antiguidade”: quadratura do círculo, trissecção de um ângulo e duplicação de um cubo. No presente texto foram expostos os caminhos que levaram à descoberta da irresolubilidade desses problemas, desde a algebrização das construções geométricas, tratando cada etapa como uma operação entre os segmentos e elementos primitivos da geometria euclidiana, aos recursos desenvolvidos posteriormente que permitiram obter uma solução de tais problemas. Por fim, foram discutidos também sobre os números construtíveis, também partindo da conexão entre as construções geométricas e as operações matemáticas básicas, permitindo que os matemáticos pudessem gerar construções aproximadas de diversos objetos geométricos e segmentos de comprimentos impossíveis de serem gerados perfeitamente com as ferramentas básicas de construção.

PALAVRAS-CHAVE: Construções Geométricas; Problemas Clássicos Gregos; Geometria Euclidiana; Números Construtíveis.

Abstract

The present work proposes to explore the diverse geometric constructions made with drawing instruments, from those that are possible, the approximate and even the impossible, made with the ruler and the compass. Starting from a historical exploration of the main constructions that allowed mathematics to develop in ancient civilizations, as well as those that took centuries to be demonstrated as impossible, causing mathematicians to create different approaches to Euclidean geometry. In particular, there are three problems with impossible geometric constructions and even today they are known as “The Three Classical Problems of Antiquity”: squaring the circle, angle trisection and cube duplication. In this text, the paths that led to the discovery of the irresolubility of these problems were exposed, from the algebraization of geometric constructions, treating each step as an operation between the segments and primitive elements of Euclidean geometry, to the resources developed later that allowed to obtain a solution of such problems. Finally, constructive numbers were also discussed, starting from the connection between geometric constructions and basic mathematical operations, allowing mathematicians to generate approximate constructions of various geometric objects and segments of lengths impossible to be generated perfectly with the basic construction tools.

KEYWORDS: Geometric Constructions; Classical Greek Problems; Euclidean Geometry; Constructible Numbers.

Lista de Figuras

1.1	Tábuas Babilônicas	19
1.2	Papiros de Rhind e de Moscou	20
1.3	Ilustração de Euclides e capa da edição de 1470 dos Elementos	23
1.4	Curva de Hípias	25
1.5	Construção de Arquitas	27
2.1	Réguas para usos diversos.	30
2.2	Régua sem marcações.	30
2.3	Construção de um círculo com o compasso	31
2.4	Traçando ângulos com os esquadros.	32
2.5	Outros ângulos construídos com par de esquadros.	32
2.6	Construção de paralelas com os esquadros	33
2.7	Tipos de transferidores para usos diversos.	34
2.8	Medindo ângulos com o transferidor.	34
2.9	Reta perpendicular construída.	36
2.10	Reta perpendicular construída com o par de esquadros.	37
2.11	Etapa 2 da construção da reta paralela.	38
2.12	Reta paralela construída.	39
2.13	Reta paralela construída com o par de esquadros.	39
2.14	Reta mediatriz construída.	41

2.15	Etapa 2 da construção da reta bissetriz.	42
2.16	Reta bissetriz construída.	43
2.17	Etapa 2 da construção do arco capaz.	44
2.18	Arco capaz de ângulo α construído.	45
2.19	Alguns ângulos sobre o arco capaz de ângulo α construído.	46
2.20	Etapa 2 da divisão de um segmento em n partes iguais.	47
2.21	Segmento \overline{AB} dividido em n partes iguais.	48
2.22	Média aritmética dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD}	49
2.23	Etapa 2 da construção da média geométrica de dois segmentos. . .	50
2.24	Média geométrica dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD}	50
2.25	Média harmônica dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD}	51
3.1	Etapa 2 da construção do triângulo equilátero inscrito.	54
3.2	Triângulo equilátero inscrito numa circunferência.	55
3.3	Etapa 2 da construção do triângulo equilátero dado um de seus lados. . .	56
3.4	Triângulo equilátero construído.	56
3.5	Etapa 3 da construção do quadrado inscrito.	57
3.6	Quadrado inscrito construído.	58
3.7	Etapa 3 da construção do quadrado dado um de seus lados.	59
3.8	Quadrado construído.	59
3.9	Etapa 4 da construção do pentágono regular inscrito.	60
3.10	Etapa 6 da construção do pentágono regular inscrito.	61
3.11	Pentágono regular inscrito construído.	61
3.12	Etapa 3 da construção do hexágono regular inscrito.	62
3.13	Hexágono regular inscrito construído.	63
3.14	Etapa 3 da construção do pentadecágono regular inscrito.	64

3.15	Pentadecágono regular inscrito construído.	65
3.16	Etapa 3 da construção do heptadecágono regular inscrito.	67
3.17	Etapa 6 da construção do hexágono regular inscrito.	68
3.18	Etapa 9 da construção do heptadecágono regular inscrito.	69
3.19	Etapa 11 da construção do heptadecágono regular inscrito.	70
3.20	Etapa 12 da construção do heptadecágono regular inscrito.	71
3.21	Heptadecágono regular inscrito construído.	72
3.22	Obtendo o lado do quadrado equivalente ao retângulo $ABCD$	75
3.23	Quadrado $BQRS$ equivalente ao retângulo $ABCD$	76
3.24	Etapa 2 da construção do retângulo equivalente ao losango $ABCD$	77
3.25	Obtendo o lado do quadrado equivalente ao losango $ABCD$	77
3.26	Etapa 2 da construção do retângulo equivalente ao paralelogramo $ABCD$	78
3.27	Obtendo o lado do quadrado equivalente ao paralelogramo $ABCD$	79
3.28	Transformando o trapézio escaleno $ABCD$ em um retângulo.	80
3.29	Obtendo o lado do quadrado equivalente ao trapézio escaleno $ABCD$	80
3.30	Obtendo um retângulo equivalente ao triângulo ABC	81
3.31	Um dos lados do retângulo equivalente ao triângulo ABC foi obtido.	82
3.32	Quadrado $QUVW$ equivalente ao triângulo ABC	82
3.33	Triângulos equivalentes.	83
3.34	Obtendo um triângulo equivalente ao quadrilátero $ABCD$	84
3.35	Quadrado $QUVW$ equivalente ao quadrilátero $ABCD$	85
3.36	Obtendo um quadrilátero equivalente ao pentágono $ABCDE$	86
3.37	Obtendo um triângulo equivalente ao quadrilátero $AC'DE$	86
3.38	Quadrado $QUVW$ equivalente ao pentágono $ABCDE$	87

3.39	Gerando o $(n - 1)$ -ágono equivalente ao n -ágono inicial.	88
3.40	Triângulo $A_1A'_{n-2}A_n$ equivalente ao n -ágono inicial.	88
3.41	Quadratura de luna de Hipócrates para um triângulo retângulo isósceles.	89
3.42	Quadratura de luna de Hipócrates para um trapézio isósceles.	90
4.1	Pontos obtidos por meio da intersecção de dois objetos geométricos.	95
4.2	Transferindo o comprimento a para uma reta.	96
4.3	Obtendo o segmento $a + b$	96
4.4	Transferindo o comprimento a para uma reta.	97
4.5	Obtendo o segmento $a - b$	97
4.6	Traçando o segmento $1 + a$	98
4.7	Reta auxiliar s usada para gerar o segmento de comprimento $a \cdot b$.	98
4.8	Obtendo o segmento $a \cdot b$	99
4.9	Obtendo o segmento $b + 1$	100
4.10	Reta auxiliar s usada para gerar o segmento de comprimento $\frac{a}{b}$	100
4.11	Obtendo o segmento $\frac{a}{b}$	101
4.12	Obtenção do segmento inverso $\frac{1}{a}$	102
4.13	Obtendo o segmento $a + 1$	103
4.14	Obtendo o segmento \sqrt{a}	103
5.1	Etapa 3 da divisão da circunferência.	119
5.2	Circunferência dividida em 7 partes aproximadamente iguais com um heptágono inscrito.	120
5.3	Uma possível aproximação para π como um número racional.	121
5.4	Aproximação para $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$	122

5.5	Construção do número de ouro.	123
5.6	Construção do segmento $5(1 - \varphi)$	124
5.7	Construção aproximada para π	125
5.8	Construção do triângulo equiângulo de lado unitário.	126
5.9	Obtenção da $\text{tg } 30^\circ$	126
5.10	Obtenção do segmento de comprimento $(3 - \text{tg } 30^\circ)^2$	127
5.11	Aproximação de Dickson para π	128
5.12	Aproximação de Konchaski para π	129
5.13	Aproximação de Viète para π	131
5.14	Trissecção do ângulo de 90°	134

Sumário

1	Um breve histórico da Geometria	18
1.1	Babilônicos	18
1.2	Egípcios	19
1.3	Gregos	20
1.4	Os Três Problemas Clássicos da Antiguidade	23
2	Construções Básicas da Geometria Grega	28
2.1	Apresentando as Ferramentas de Construções Geométricas	29
2.1.1	Régua	29
2.1.2	Compasso	30
2.1.3	Par de Esquadros	32
2.1.4	Transferidor	33
2.2	Construções Básicas com Régua e Compasso	35
2.2.1	Reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado	35
2.2.2	Construção de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto P	38
2.2.3	Ponto médio de um segmento \overline{AB} – Reta Mediatriz	40

2.2.4	Divisão de um ângulo dado em dois ângulos iguais - Reta Bissetriz	41
2.2.5	Construção do arco capaz de ângulo α	43
2.2.6	Divisão de um segmento dado em n partes iguais	46
2.2.7	Médias de dois Segmentos	48

3 Problemas Clássicos de Construções Geométricas 53

3.1	Polígonos Regulares	53
3.1.1	Triângulo Equilátero	54
3.1.2	Quadrado	57
3.1.3	Pentágono Regular	60
3.1.4	Hexágono Regular	62
3.1.5	Pentadecágono Regular	63
3.1.6	Heptadecágono Regular	66
3.2	Quadratura de Polígonos	74
3.2.1	Quadratura do Retângulo	75
3.2.2	Quadratura do Losango	76
3.2.3	Quadratura do Paralelogramo	78
3.2.4	Quadratura do Trapézio Escaleno	79
3.2.5	Quadratura do Triângulo	81
3.2.6	Quadratura do Quadrilátero	84
3.2.7	Quadratura do Pentágono	85
3.2.8	Quadratura do n -ágono	87

4 Construções possíveis e impossíveis 92

4.1	Introdução	92
-----	----------------------	----

4.1.1	Números construtíveis	93
4.2	Operações com Régua e Compasso	95
4.2.1	Adição	96
4.2.2	Subtração	97
4.2.3	Multiplicação	97
4.2.4	Divisão	99
4.2.5	Inversão de um Segmento	101
4.2.6	Raiz Quadrada	102
4.3	Alguns conceitos algébricos	104
4.3.1	A insolubilidade dos três problemas Gregos clássicos de construções geométricas	111
4.4	Quais polígonos regulares são construtíveis?	114
4.4.1	Primos de Fermat	115
5	Construções Aproximadas e Construções com Restrições	118
5.1	Polígonos Regulares Aproximados	118
5.1.1	Divisão Aproximada da Circunferência em n Partes	118
5.2	Construções aproximadas para o π	120
5.2.1	$\pi \approx \frac{22}{7}$	121
5.2.2	Aproximação de Ramanujan	121
5.2.3	$\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$	122
5.2.4	Aproximação de Dickson	122
5.2.5	Aproximação de Kochanski	128
5.2.6	Aproximação de Viète	130
5.3	Construção aproximada de $\sqrt[3]{2}$	132
5.4	É possível trissectar um ângulo?	133

5.5 Construções com restrições 135

Capítulo 1

Um breve histórico da Geometria

Sabe-se que o desenvolvimento da Matemática se deu com os povos antigos, principalmente os mesopotâmicos, egípcios e gregos, que contribuíram desde 4000 anos a.C. até o século **III** a.C. com uma matemática empírica, isto é, focada em solucionar suas necessidades cotidianas na prática. Devido ao caráter bastante aplicável atribuído à Geometria, não é estranho pensar que esta área da Matemática, até então considerada a Matemática em sua totalidade, recebeu bastante contribuição e tenha se destacado durante essa época de nossa história.

1.1 Babilônicos

Segundo Eves (2009), no livro *Introdução à História da Matemática*, os babilônicos (2000 a.C. a 1600 a.C.), deram à geometria o tratamento inteiramente prático, usada para mensuração. A partir das várias tábulas encontradas com a escrita cuneiforme, pode-se concluir que eles já tinham clara percepção das regras gerais da área do retângulo, das áreas dos triângulos retângulo e isósceles, da área do trapézio retângulo e do volume de prismas retos quadrangulares bem como o de base trapezoidal. Os babilônicos também fizeram uma aproximação para o

comprimento da diagonal do quadrado de lado 30 (figura 1.1).



Figura 1.1: Tábuas Babilônicas

Além desses conhecimentos eles atribuíram à circunferência comprimento igual ao triplo do seu diâmetro e área igual ao duodécimo da área de um quadrado de lado igual a sua circunferência, que é precisamente correta para $\pi = 3$. Outras tábulas encontradas, revelaram que eles calculavam volumes do cilindro pelo produto da área da base pela altura, erroneamente usavam como volume do tronco de cone e de pirâmide quadrangular regular o produto da altura pela semissoma das bases e também vários conhecimentos da geometria plana, incluindo sobre o Teorema de Pitágoras (EVES, 2011).

1.2 Egípcios

Assim como os babilônicos, os egípcios também tinham uma geometria bastante empírica, voltada para resolução de problemas cotidianos. Segundo Roque (2012) no livro História da Matemática, a autora comenta sobre o relato de Heródoto, que viveu no século V a. C., personagem que dedicou uma de suas obras inteiramente ao Egito, nela ele menciona a palavra grega “Geometria” e nos revela que em épocas de enchentes do rio Nilo, se fazia necessário medir novamente áreas de terras para

recalcular os impostos devidos pelos camponeses. As medidas de terras eram feitas com cordas repletas de nós igualmente espaçados e os funcionários solicitados para realizar as novas medições eram os *agrimensores*, o que é possível inferir como o vocábulo que pode ter sido traduzido como “geometria”, usada pelo Heródoto.

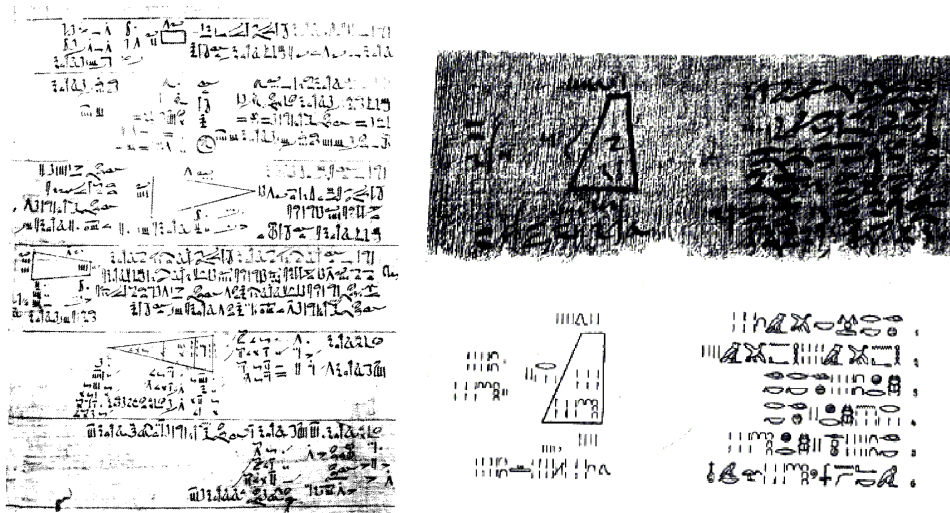


Figura 1.2: Papiros de Rhind e de Moscou

Tal conhecimento geométrico dos egípcios pode ter sido importado pelos gregos, uma vez que estes eram um povo que incorporavam elementos de outras culturas à sua própria, e assim teve início ao desenvolvimento da geometria grega.

1.3 Gregos

Como visto anteriormente, os babilônios e egípcios já realizavam cálculos de áreas e volumes, tinham conhecimentos sobre diversos tipos de triângulos e alguns procedimentos aritméticos devem ter sido obtidos por meios geométricos, portanto, os gregos receberam uma enorme contribuição ao acessar essas culturas.

A história da civilização grega pode ser recuada em até 2000 a.C., onde podemos compreender como surgiu o elemento de assimilação de culturas, presente na

cultura grega. Provavelmente uma característica que tenha permanecido enraizada nos gregos, uma vez que, de acordo com Boyer (1974), seus antepassados, os helenos, sendo “invasores iletrados vindos do norte [...]”. Não trouxeram tradição matemática ou literária consigo, no entanto, tiveram o desejo ansioso de aprender”. Por exemplo, o alfabeto grego pode ter sido uma adaptação do alfabeto fenício que não possuía vogais, mas os gregos inseriram essas novas letras. Não foi diferente com os conhecimentos matemáticos adquiridos a partir do contato com os babilônicos e egípcios, mais especificamente nos conhecimentos geométricos, séculos mais tarde.

Embora não haja documentos que comprovem com precisão que os conhecimentos matemáticos desenvolvidos na Grécia a partir do sec. **VII** a. C. tiveram como pioneiros Tales e Pitágoras, são atribuídos a essas duas figuras históricas a maior contribuição à Matemática desse período, pois de forma tradicional e não muito confiável, os gregos transmitiam os conhecimentos oralmente e, sendo assim, há muitas divergências quanto às datas e autorias de diversos trabalhos posteriormente descobertos. Não obstante, os registros consideram como as principais mentes por trás do desenvolvimento da matemática grega o Tales de Mileto (624-548 a.C., aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580-500 a.C., aproximadamente).

Sobre Tales, é dito que ele deu início à matemática demonstrativa, o que pode ser inferido por meio do comentário do filósofo neo-platônico Próclus (410-485) nas páginas iniciais do seu Comentário sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides, onde afirma que Tales “[...] primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e insistiu nos seus sucessores princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais gerais, em outros mais empíricos” (BOYER, 1974, p. 34). Mais

adiante, conforme visto em Boyer (1974, p.35), Próclus também atribui à Tales os teoremas a seguir:

1. Um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto;
2. Um círculo é bissectado por um diâmetro;
3. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
4. Os pares de ângulos opostos formados por duas retas que se cortam são iguais;
5. Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos de um lado de outro, então os triângulos são congruentes.

Essa abordagem matemática feita pelos gregos nos mostra sua principal diferença para os babilônios e egípcios, pois tem um aspecto mais teórico, não se tratando unicamente de aplicações práticas, exibindo um alto grau de exatidão de pensamento.

Como não é possível afirmar com precisão quem de fato introduziu a Matemática demonstrativa, considera-se Euclides de Alexandria aquele que transformou o modo de fazer e pensar a matemática. Não se conhece muito sobre como viveu Euclides, mas o que o eternizou de fato foi o legado bibliográfico que ele nos deixou. *Os Elementos* foi sua principal contribuição para a Matemática e para a Geometria, abordava a aritmética, a geometria plana e espacial - os segmentos de reta eram para os gregos o que os números são para os matemáticos da atualidade - que consistia em construções geométricas usando apenas uma régua sem marcações e um compasso, registrando cada possibilidade da construção do objeto geométrico definido com a exposição do passo a passo da construção. Além disso em *Os Elementos*, composto por 13 livros que compilam toda a Matemática conhecida naquele período, Euclides foi capaz de introduzir em sua argumentação os *axiomas* e postulados, termos que passaram a ser utilizados pelos matemáticos ao longo dos séculos seguintes, até os dias de hoje.



Figura 1.3: Ilustração de Euclides e capa da edição de 1470 dos Elementos

Embora seja impossível negar que Euclides tenha sido aquele que elevou o nível de profundidade do pensamento matemático, sendo assim um expoente na história da matemática grega, muito se deve à vários outros matemáticos (filósofos) gregos que o antecederam. Não obstante ele ter realizado a obra supracitada, as contribuições provenientes de séculos anteriores de investigação e criação de diversas proposições e teoremas tiveram o despertar a partir da curiosidade e do sentimento de desafio, principais fontes desencadeadoras da busca insaciável por conhecimento pelo ser humano, graças a essa característica que foi possível surgir o que hoje conhecemos por *Os Três Problemas Clássicos* da antiguidade, são eles: Quadratura do Círculo; Duplicação do Cubo; e Trissecção do Ângulo.

1.4 Os Três Problemas Clássicos da Antiguidade

Conta-nos a história que o filósofo grego Anaxágoras (499 a 427 a. C.), enquanto preso, incubiu-se de tentar quadrar o círculo, isto é, obter um quadrado de área equivalente a de um círculo dado. Outras fontes históricas nos contam a lenda

que durante um período o qual uma peste assolava a vida dos gregos tomando um quarto da população de Atenas, uma delegação fora enviada para o oráculo de Apolo em Delos para perguntar como a peste poderia ser combatida e que o oráculo respondeu que o altar cúbico de Apolo deveria ter seu volume dobrado, que era exatamente o problema da duplicação do cubo. Na mesma época um outro problema surgia também em Atenas, que era o da trissecção de um ângulo, isto é, dado um ângulo questionava-se qual a construção com régua e compasso que deve ser feita para dividi-lo em três ângulos iguais (BOYER, 1974). Esses problemas são conhecidos como “Os Três Problemas Clássicos” e ao longo de mais de 2200 anos não foi possível apresentar uma solução com régua e compasso, ou melhor, não foi possível demonstrar a impossibilidade dessas construções.

A importância desses problemas para a matemática reside no fato deles não terem solução por meio dos instrumentos utilizados. A busca por uma solução permitiu que várias ideias brilhantes surgissem permitindo que novas teorias e descobertas fossem desenvolvidas, como afirma Eves (2011, p. 134) “muitas descobertas frutíferas, como as secções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentais. Um produto muito posterior foi o desenvolvimento de partes da teoria das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos”.

É importante comentar que a impossibilidade de solução desses problemas deve ser encarada do ponto de vista das limitações dos instrumentos de desenho geométrico utilizados. A régua sem marcações permite traçar segmentos de comprimento indefinido e o compasso permite traçar círculos e com isso transferir medidas, portanto, as regras para determinar a solubilidade dos problemas estão estabelecidas.

Embora tenha durado vários séculos até que se demonstrasse a impossibilidade da solução desses problemas, nesse ínterim, houveram diversos matemáticos que se dedicaram a esses problema, como transcreveu Simplicio parte da obra de Eudemo onde o Hipócrates, faz uma breve menção a quadratura de lunas, o que pode ser considerado como uma abordagem particular ao problema da quadratura do círculo.

Por volta do século V a. C., o filósofo grego Hípias apresenta uma forma de construir a trisseção de um ângulo por meio de uma ideia no mínimo criativa: considerando o deslocamento uniforme de um ponto sobre um arco de circunferência e de um segmento, lado de um quadrado. Veja a figura 1.4.

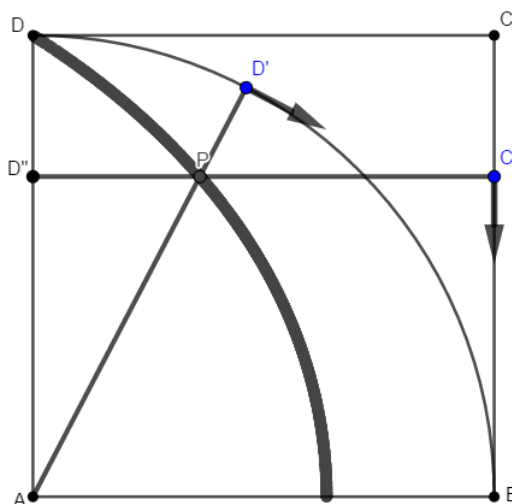


Figura 1.4: Curva de Hípias

Deslocando o ponto D' sobre o arco de 90° inscrito ao quadrado $ABCD$, até coincidir com o vértice B , assim como o segmento $\overline{D''C''}$ até coincidir com o lado \overline{AB} , de modo que, partindo de suas respectivas posições iniciais e com velocidade constante, os pontos D' e C'' cheguem simultaneamente ao ponto B , podemos obter a chamada curva de Hípias, gerada ao traçar o lugar geométrico descrito pelo deslocamento do ponto P (interseção de $\overline{D''C''}$ e $\overline{AD'}$). Dessa maneira, fica

muito fácil obter a trisseção do ângulo $\angle BAD'$, algo que será discutido com mais detalhes posteriormente.

Temos também um outro matemático e pitagórico, que contribuiu com uma solução tridimensional para o problema de Delos, a duplicação do Cubo. Arquitas de Tarento, contemporâneo de Hípias, explicou a obtenção sem o uso da Geometria Analítica ou quaisquer eixos coordenados, no entanto, sua solução utilizando apenas figuras tridimensionais funciona e pode ser construída com os recursos tecnológicos atualmente. Dado um cubo de aresta a que se pretende obter uma nova aresta de um cubo cujo volume é o dobro daquele, a tradução da construção do Arquitas na linguagem anacrônica da geometria analítica, seria: construa três círculos ortogonais entre si contidos nos planos xy , xz e yz , com raio a e centrados em $(a, 0, 0)$; trace um cone de vértice $(0, 0, 0)$ passando pelo círculo ortogonal a Ox ; construa um cilindro reto sobre o círculo do plano xy ; por fim, criando uma superfície de revolução do círculo do plano xz em torno do eixo z , com isso, teremos 4 ponto de interseção entre essas três superfícies, de modo que a coordenada x de cada um desses pontos é justamente $a\sqrt[3]{2}$, que é a aresta procurada, conforme pode ser visto na figura 1.5 (BOYER, 1974).

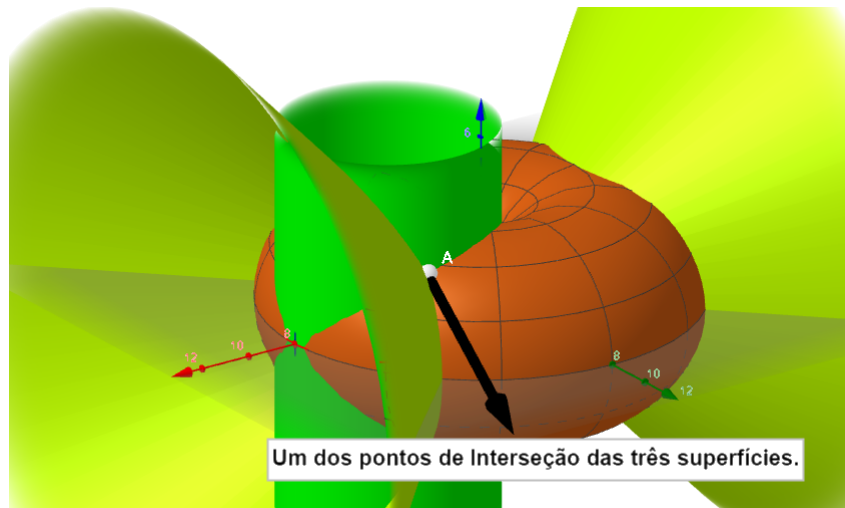


Figura 1.5: Construção de Arquitas

Tais construções realizadas por caminhos independentes mostram a criatividade dos matemáticos em solucionar os problemas clássicos, todavia foram feitas muitas tentativas para obter uma solução desses problemas via construção com régua e compasso. Com apenas essas duas ferramentas os gregos puderam criar uma infinidade de construções que solucionavam diversos problemas, porém, foi necessário passar muitos anos para descobrir as limitações das construções geométricas realizadas com régua e compasso. Portanto, o capítulo a seguir introduziremos as construções básicas com esses instrumentos, assim como, apresentar algumas construções de objetos geométricos mais elaborados que os gregos nos legaram.

Capítulo 2

Construções Básicas da Geometria Grega

As ferramentas utilizadas para realizar construções geométricas eram apenas a régua sem marcações e o compasso. Com apenas esses dois instrumentos os gregos foram capazes de desenvolver uma série de propriedades, teoremas, construções e diversos outros conceitos geométricos deveras importantes para a matemática, no entanto, também legaram muitos problemas sem solução a época e que passaram por muitos séculos até que se descobrissem as soluções e para alguns outros problemas, findaram por destacar as limitações desses instrumentos.

No que tange aos números construtíveis, vale ressaltar que o “número”, para os gregos, significava um segmento mensurável, portanto, aqui será utilizado também, a princípio, com esse significado, porém, após apresentar os principais instrumentos de construções geométricas utilizados pelos gregos, assim como a forma de utilizá-los - incluindo também alguns outros que foram introduzidos posteriormente para agregar maior valor ao ensinar geometria e também pela praticidade na construção de certos objetos básicos - será explicado o passo a passo da construção dos principais objetos geométricos básicos para, em seguida, explorar os números construtíveis com régua e compasso, isto é, os números que são possíveis de obter ao aplicar uma série de construções fundamentais.

2.1 Apresentando as Ferramentas de Construções Geométricas

Estudar geometria com régua e compasso é uma atividade que necessita aprender a utilizar algumas ferramentas de desenho. As principais são: a régua, o compasso, o par de esquadros e o transferidor. As duas últimas não são necessárias para construções específicas, apenas para aumentar a praticidade daquelas realizadas com a régua e o compasso. Para cada instrumento apresentado será exposta a sua função, a forma de usar e as figuras que podem ser construídas com seu uso.

2.1.1 Régua

A régua utilizada pelos geômetras gregos, não apresentava uma graduação em nenhum tipo de unidade de medida padrão, uma vez que nos primórdios do desenvolvimento científico, não existia um sistema de medidas unificado, além disso, para os estudos de geometria, a unidade poderia ser admitida a partir de qualquer segmento, portanto, era dispensável a utilização de uma régua graduada como régua padrão. Porém, atualmente, o uso da régua graduada não interfere no que pretende-se mostrar aqui, apenas acrescenta a função de comparar medidas de segmentos a partir do sistema de medida padronizado.

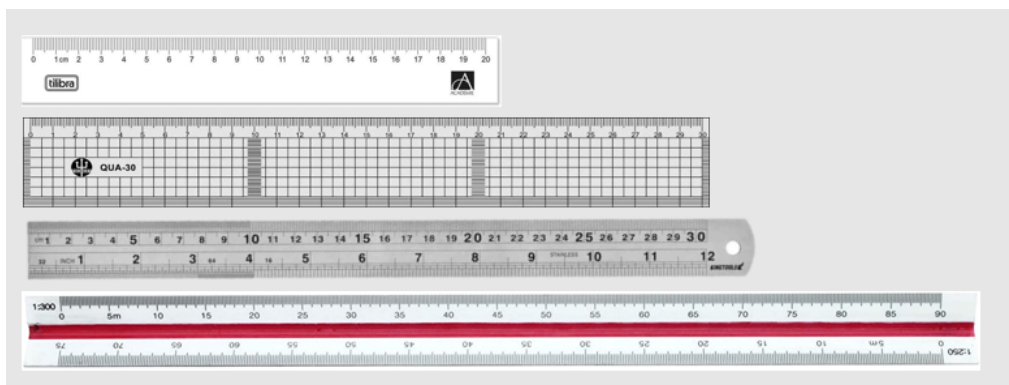


Figura 2.1: Réguas para usos diversos.

A principal função é a de construir segmentos de reta, portanto, não havia necessidade de ter demarcação de diferentes medidas de comprimento, sendo assim, era suficiente utilizarem uma régua sem marcações, como por exemplo a da figura a seguir:



Figura 2.2: Régua sem marcações.

2.1.2 Compasso

O compasso é um instrumento de desenho utilizado para construir arcos e circunferências. Ele também é bastante usado para transferir segmentos e medidas. O mais comum possui uma ponta seca, em forma de agulha, que determina o ponto fixo no papel, centro do arco a ser traçado. A outra ponta possui um grafite usada para traçar circunferências.

Manusear um compasso é relativamente simples. Primeiro temos que determinar a abertura, ou seja, a distância da ponta seca até a outra ponta, isto é, o raio do

arco de circunferência. Depois disso, fixamos a ponta seca em um plano e giramos o compasso de modo a formar, com a ponta de grafite, um arco com o tamanho pretendido. A imagem abaixo poderá ilustrar esse processo.

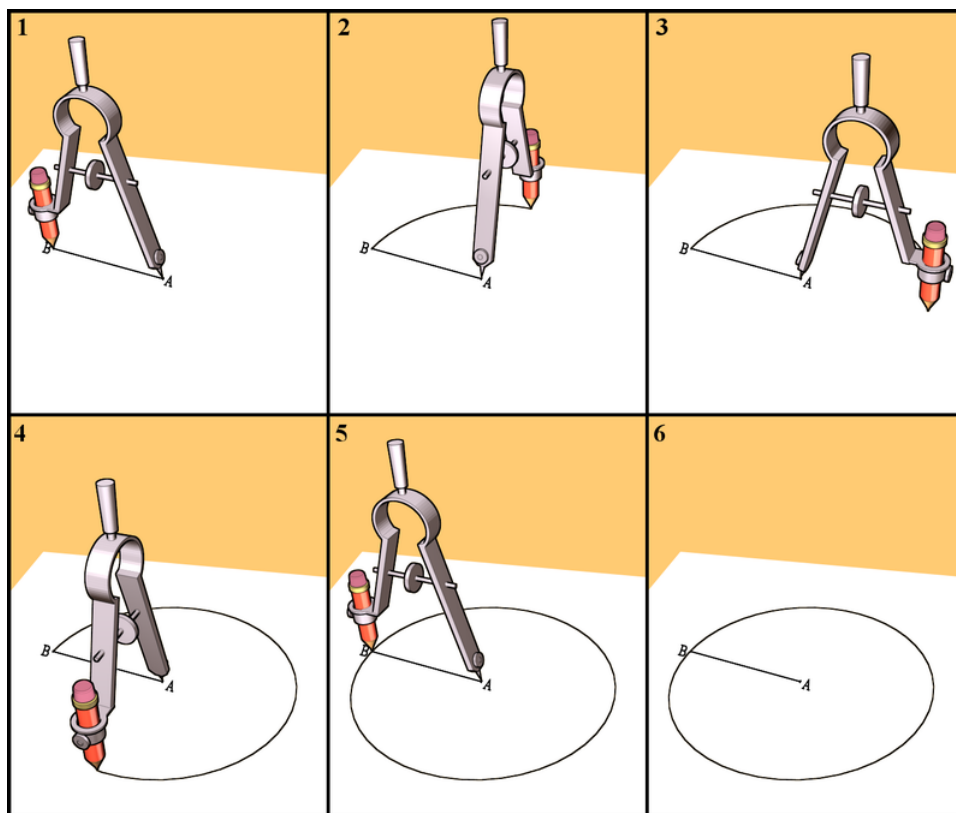


Figura 2.3: Construção de um círculo com o compasso

Para facilitar a construção de alguns objetos geométricos comuns, como por exemplo, retas perpendiculares, retas paralelas e ângulos notáveis de 30° , 45° , 60° e 90° , foi desenvolvido o par de Esquadros, que são dois triângulos retângulos. O primeiro triângulo é escaleno retângulo, possui ângulos internos de 30° , 60° e 90° . O Segundo é isósceles retângulo, logo possui dois ângulos internos de 45° e o terceiro ângulo de 90° .

2.1.3 Par de Esquadros

O esquadro serve principalmente para construir ângulos notáveis, segmentos perpendiculares e paralelos. São bastante úteis para desenhar retângulos e paralelogramos. Manusear um esquadro é um pouco similar ao uso de uma régua. Para construir ângulos, basta contornar, os lados adjacentes a esse ângulo pretendido. Observe as figuras abaixo:

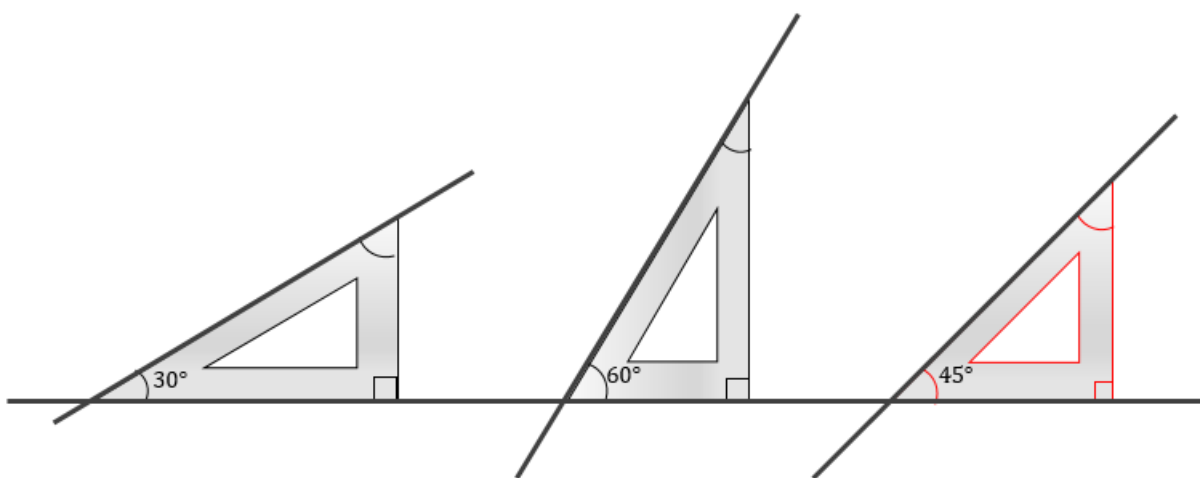


Figura 2.4: Traçando ângulos com os esquadros.

Outras formas de construir ângulos:

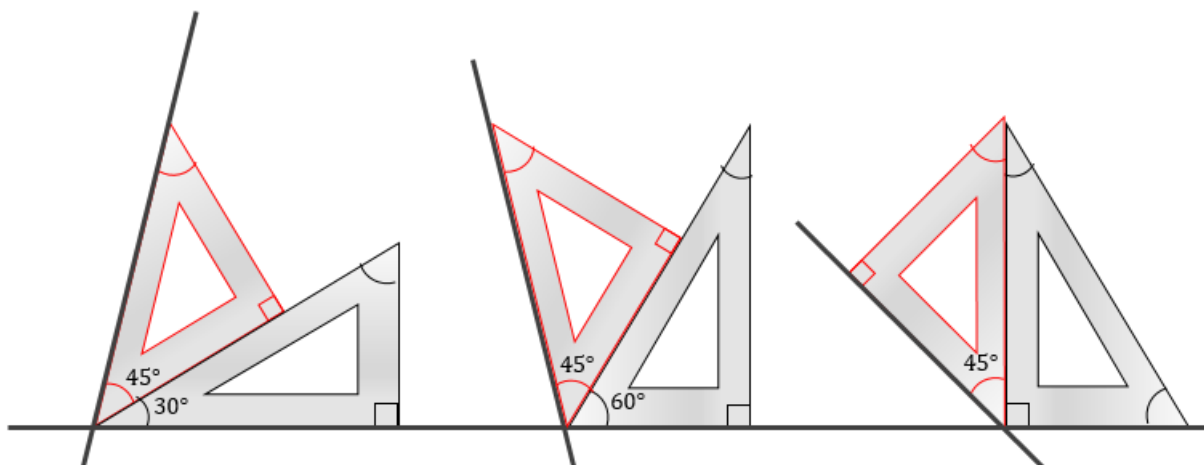


Figura 2.5: Outros ângulos construídos com par de esquadros.

Para traçar segmentos perpendiculares basta contornar os lados adjacentes ao ângulo de 90° do esquadro ou traçar um segmento qualquer e girar o esquadro, alinhando um dos catetos com o segmento, contornando o outro cateto.

Já para traçar segmentos paralelos podemos deslizar o par de esquadros, fazendo o uso de um dos esquadros como uma régua auxiliar. Veja a figura 2.6 a seguir.

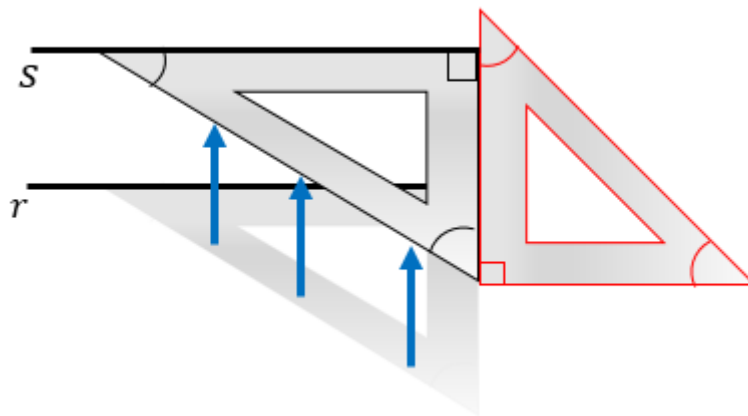


Figura 2.6: Construção de paralelas com os esquadros

2.1.4 Transferidor

Existem alguns tipos de transferidores, de 90° , de 180° com régua e o de 360° . Todos utilizados não só para construir ângulos diversos, mas também para medir e transferir ângulos mais precisamente. Para isso, deve ser adotado uma unidade de medida de ângulos, geralmente são medidos em graus. Muitos transferidores possuem a escala de ângulos marcada em ambos os sentidos do arco.

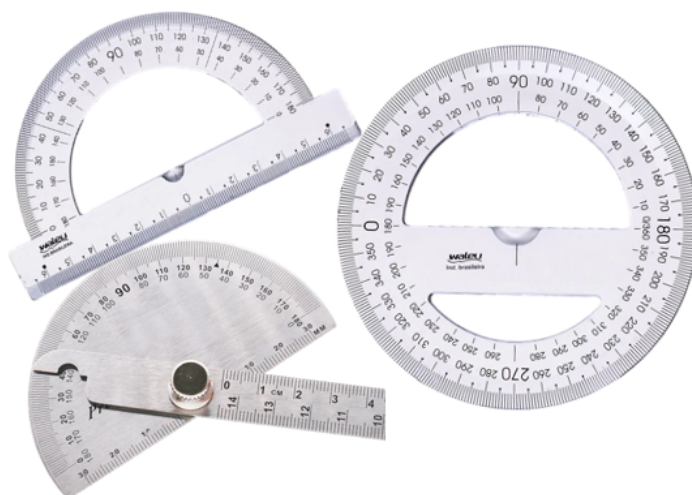


Figura 2.7: Tipos de transferidores para usos diversos.

Com o uso de transferidor é possível construir ângulos agudos, retos, obtusos rasos, reentrantes (côncavos) e giros (completos). Ele também é útil nas construções de polígonos regulares, segmentos perpendiculares e bissetrizes.

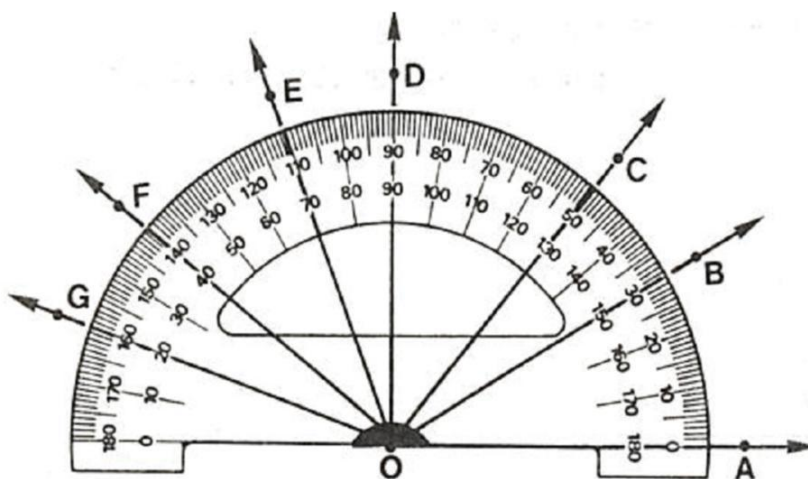


Figura 2.8: Medindo ângulos com o transferidor.

Medir ângulos com o transferidor é uma tarefa que não é difícil, mas requer bastante atenção. A figura 2.8 mostra de forma simplificada o processo de medição

de ângulos. O primeiro passo é alinhar o vértice e um dos segmentos adjacente do ângulo, respectivamente, com o centro (semirreta S_{OA}) e a marcação de 0° do transferidor. Após esse procedimento, basta visualizar, na escala do transferidor, onde o outro lado adjacente ao ângulo (semirretas S_{OB} , S_{OC} , S_{OD} e etc.) está intersectando as marcações do transferidor. O ponto onde o outro lado do ângulo intercepta o transferidor é a medida do ângulo.

2.2 Construções Básicas com Régua e Compasso

As construções aqui seguirão a mesma ideia presente no livro Os Elementos, de Euclides, chamadas Construções Euclidianas e são amparadas por uma série de axiomas e postulados que, a princípio, não serão abordados aqui em sua totalidade.

Vale comentar que o livro de Euclides contém uma sequência de proposições “Os Teoremas são afirmações cujas demonstrações são baseadas em postulados e em teoremas previamente demonstrados. Um problema exige uma nova entidade geométrica a ser criada a partir de um conjunto dado” (MARTIN, 1998, p. 2).

Com base nessa premissa, serão realizadas construções partindo de um conjunto de elementos dados previamente, munido de alguns teoremas já provados por Euclides, e a partir deles será obtido o objeto geométrico buscado.

2.2.1 Reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado

As etapas a seguir irão permitir traçar uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto P .

1. Com centro no ponto P , faça um arco que intersecte a reta r em dois pontos, D e E ;
2. Com os pontos D e E obtidos, faça uma circunferência com centro em D e com raio maior que $\frac{\overline{DE}}{2}$;
3. Faça outra circunferência, mantendo o mesmo raio da anterior, centrada no ponto E . As duas circunferências se intersectam nos pontos F e G ;
4. Trace uma reta que passe pelos pontos F e G . Está reta é perpendicular a \overline{AB} e passa por P .

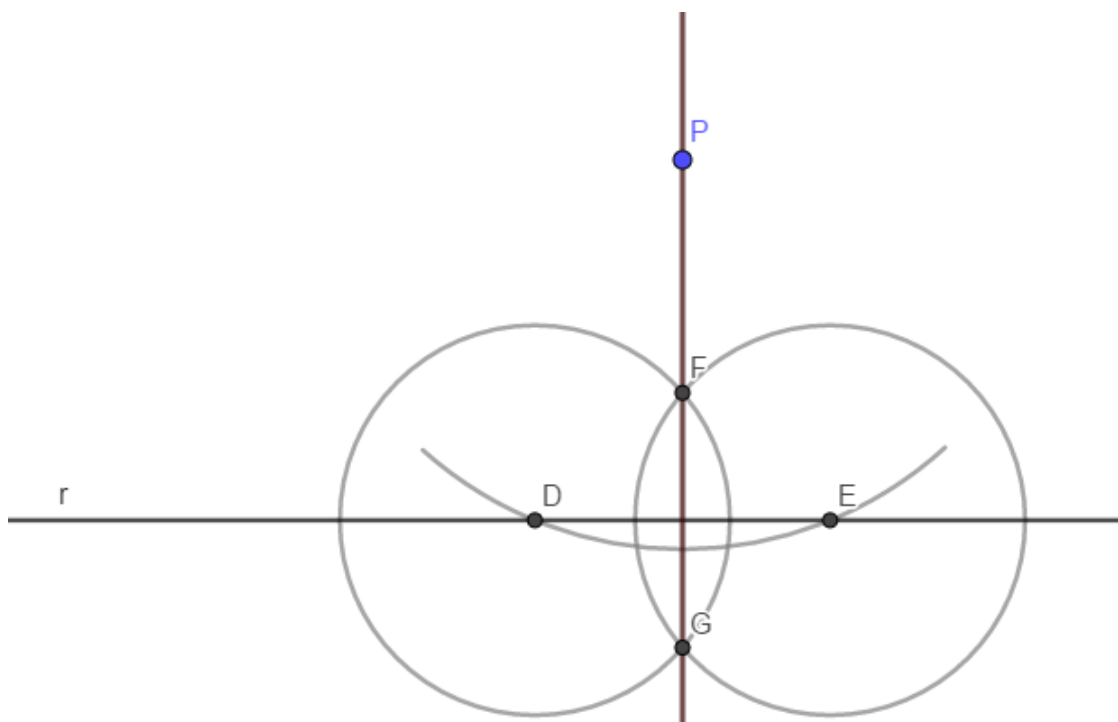


Figura 2.9: Reta perpendicular construída.

Construção realizada com o esquadro:

1. Deslize um dos catetos do esquadro sobre a reta r , de tal forma que o outro cateto passe pelo ponto P . Trace a reta s passando pelo ponto P . A reta perpendicular foi construída.

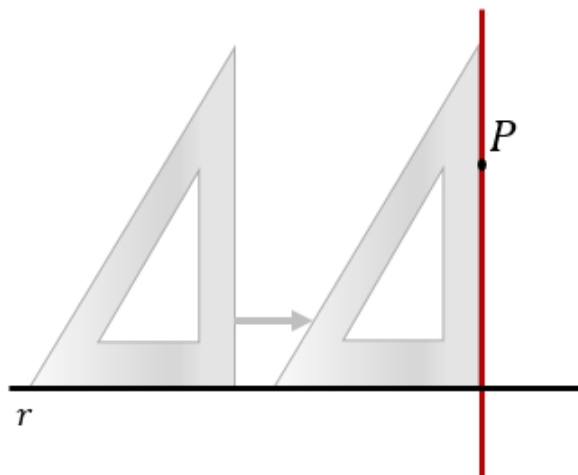


Figura 2.10: Reta perpendicular construída com o par de esquadros.

Essas duas construções, tanto com régua e compasso, quanto com o esquadro, funcionam independente do ponto P pertencer ou não a reta. A seguir demonstraremos que a construção 2.2.1 gera uma reta perpendicular.

Demonstração: Na figura 2.9, seja Q o ponto de interseção da reta r com o segmento \overline{PG} . Observando os triângulos DGP e EGP nota-se que são congruentes pelo caso LLL ([19] pg. 41) pois $\overline{PD} \equiv \overline{PE}$ pois são raios do mesmo arco de centro em P e $\overline{DG} \equiv \overline{EG}$, são os raios de circunferências congruentes de centro em D e E , além disso, possuem o lado \overline{PG} em comum. Com isso, chegamos a conclusão que $\angle DPQ \equiv \angle EPQ$. Também temos que pela congruência dos segmentos \overline{DP} e \overline{EP} , o triângulo DEP é isósceles, donde $\angle PDE \equiv \angle PED$, assim, os triângulos PDQ e PEQ são congruentes, pelo caso ALA ([19] pg. 40). Assim, temos que $\angle PQD \equiv \angle PQE = 90^\circ$ demonstrando o que queríamos.

2.2.2 Construção de uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto P

Dada uma reta r e um ponto P , as etapas a seguir permitirão construir uma reta paralela a r e que contém P .

1. Com o centro do compasso sobre o ponto P , trace um arco que intercepte a reta r , obtendo o ponto D ;
2. Com centro em D , faça outro arco que intercepte r , obtendo o ponto E ;

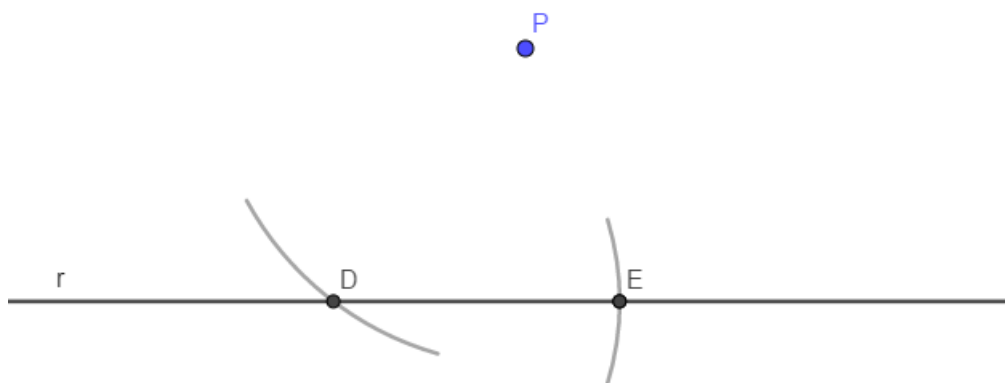


Figura 2.11: Etapa 2 da construção da reta paralela.

3. Com abertura \overline{PD} e centro em E , faça um arco com comprimento grande o suficiente para que P esteja na região interior dele;
4. Com centro em P faça um arco de abertura \overline{DE} que intercepte o arco criado anteriormente, obtendo o ponto F ;
5. Trace uma reta que passe por P e F . Essa reta é paralela ao segmento \overline{AB} .

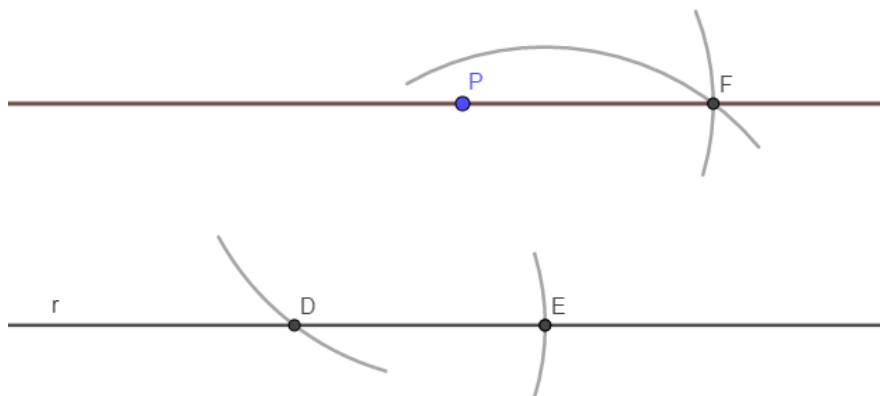


Figura 2.12: Reta paralela construída.

Construção realizada com o esquadro:

1. Deslize um dos catetos do esquadro sobre a reta r , de tal forma que o outro cateto passe pelo ponto P . Trace a reta s passando pelo ponto P . Repita o processo, agora sobre a reta s , até que um dos catetos passe por P contido em s , obtendo a reta t . Note que t é paralela à reta r .

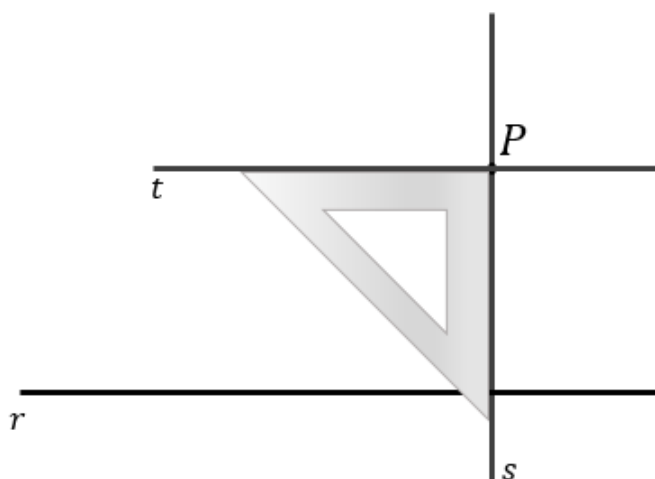


Figura 2.13: Reta paralela construída com o par de esquadros.

Será demonstrado a seguir que a construção 2.2.2 gera uma reta paralela.

Demonstração: Na figura 2.13, as distâncias $d(P, D)$ e $d(E, F)$, são iguais, por construção. Também temos que as distâncias $d(D, E)$ e $d(P, F)$ também são iguais pelo mesmo motivo, então o quadrilátero $PDEF$ possui lados opostos de mesma medida, portanto, é um paralelogramo, donde, $\overline{DE} \parallel \overline{PF}$, portanto, a reta que contém \overline{PF} é paralela à reta r dada inicialmente.

2.2.3 Ponto médio de um segmento \overline{AB} – Reta Mediatriz

Dessa vez, dado um segmento \overline{AB} o passo a passo adiante permitirá construir a reta mediatriz desse segmento e, conseqüentemente, também será obtido seu ponto médio.

1. Com centro do compasso sobre o ponto A e com uma abertura visivelmente maior que a metade do segmento \overline{AB} , trace uma circunferência Γ ;
2. Faça o mesmo procedimento com mesma abertura do compasso, só que com a ponta seca sobre o ponto B , gerando a circunferência Λ . Marque os pontos C e D na intersecção de Γ com Λ ;
3. Trace a reta que contém \overline{CD} . Esta é a **mediatriz** de \overline{AB} . Marque o ponto M de intersecção dessa reta com \overline{AB} . O ponto M é o ponto médio do segmento dado.

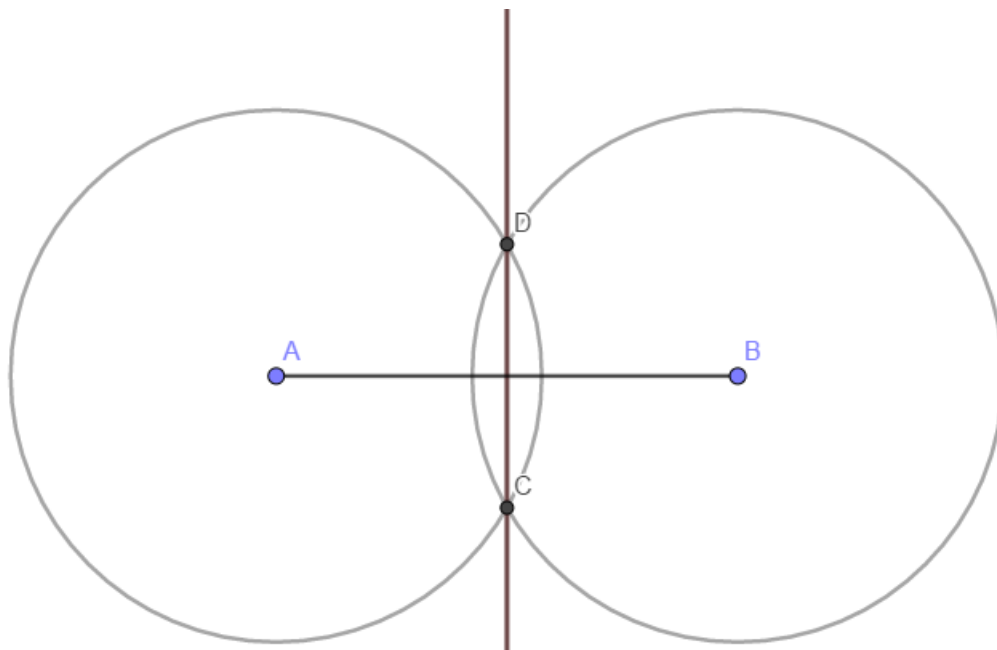


Figura 2.14: Reta mediatriz construída.

Será demonstrado a seguir que a construção 2.2.3 gera uma reta chamada de mediatriz de um segmento.

Demonstração: Na figura 2.14, as distâncias $d(D, A)$ e $d(D, B)$, são iguais, pois são raios de circunferências congruentes de centros em A e em B , assim como as distâncias $d(C, A)$ e $d(C, B)$ também são iguais pelo mesmo motivo, então a reta (t) que passa por \overline{DC} equidista de A e B , portanto, qualquer ponto sobre ela também equidista de A e B , donde a intersecção de \overline{AB} com a reta t é o ponto médio de \overline{AB} .

2.2.4 Divisão de um ângulo dado em dois ângulos iguais - Reta Bissetriz

Mais uma reta especial, a reta bissetriz, será construída ao realizar as etapas descritas a seguir. Dado um ângulo $\angle ABC$ a reta bissetriz será obtida, dessa maneira, o ângulo $\angle ABC$ será dividido pela metade.

1. Com centro do compasso no vértice do ângulo dado (\hat{A}) e com uma abertura qualquer, trace a circunferência Γ , obtendo os pontos B e C de interseção com os lados do ângulo;
2. Faça o segmento \overline{BC} . Com centro em C trace a circunferência Λ de raio maior que a metade do segmento \overline{BC} ;

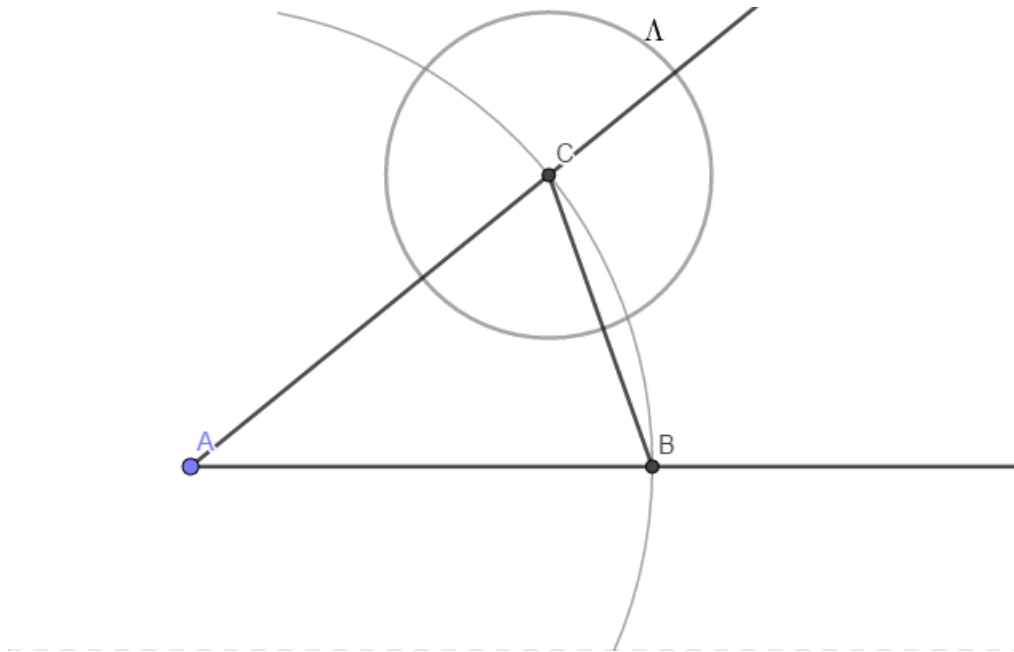


Figura 2.15: Etapa 2 da construção da reta bissetriz.

3. Repita a etapa 2, agora com centro em B , mantendo a abertura do compasso, obtendo a circunferência Π e os pontos P e Q , na intersecção de Λ com Π ;
4. Trace uma reta que passe por P e Q , conseqüentemente também passará por A . Essa reta é a bissetriz do ângulo \hat{BAC} .

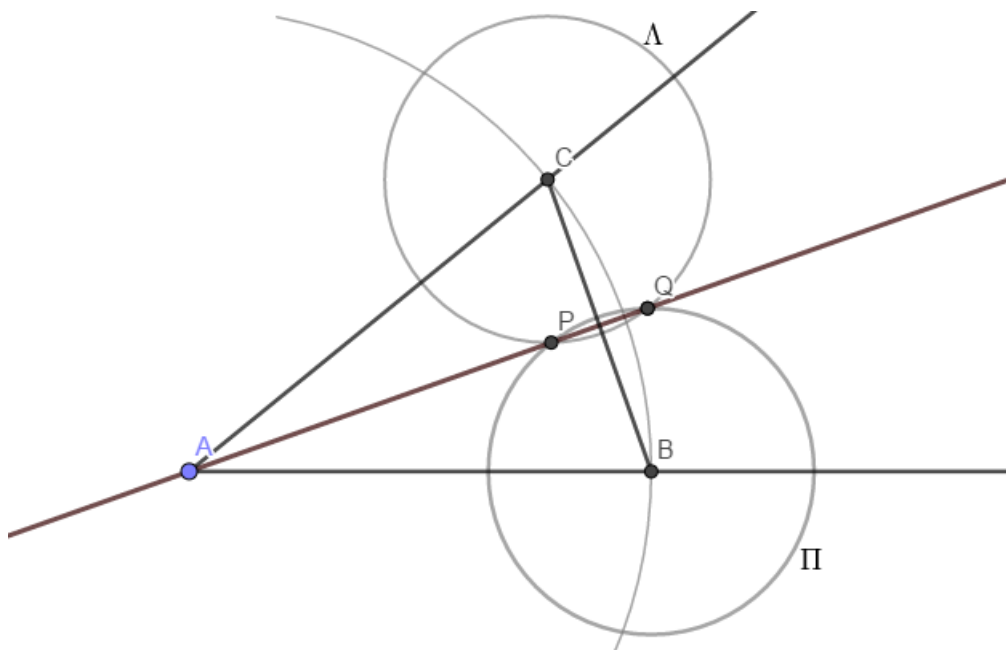


Figura 2.16: Reta bissetriz construída.

Agora mostraremos que a reta traçada é de fato a bissetriz do ângulo α dado.

Demonstração: Na figura 2.16, temos que os triângulos ACP e ABP são congruentes pelo caso LLL ([19] pg. 41) de congruência, pois \overline{AP} é lado comum aos dois triângulos e os segmentos \overline{AC} e \overline{AB} tem mesma medida, pela construção e, por fim, como a reta que contém os pontos A , P e Q é mediatriz de \overline{BC} , então \overline{PB} e \overline{PC} são congruentes. Portanto $\angle BAC = \angle PAB + \angle PAC$, donde $\angle BAC$ foi dividido em dois ângulos iguais.

2.2.5 Construção do arco capaz de ângulo α

Esta será a primeira construção um pouco mais elaborada, sendo necessário utilizar algumas das construções anteriores para realizá-la. Vejamos como se obtém o arco capaz de ângulo α a seguir.

1. Trace um segmento \overline{AB} , em seguida, trace um segmento auxiliar \overline{AC} com um dos extremos sendo o ponto A e formando com \overline{AB} o ângulo α ;

2. Faça uma perpendicular a \overline{AC} , passando por A ;

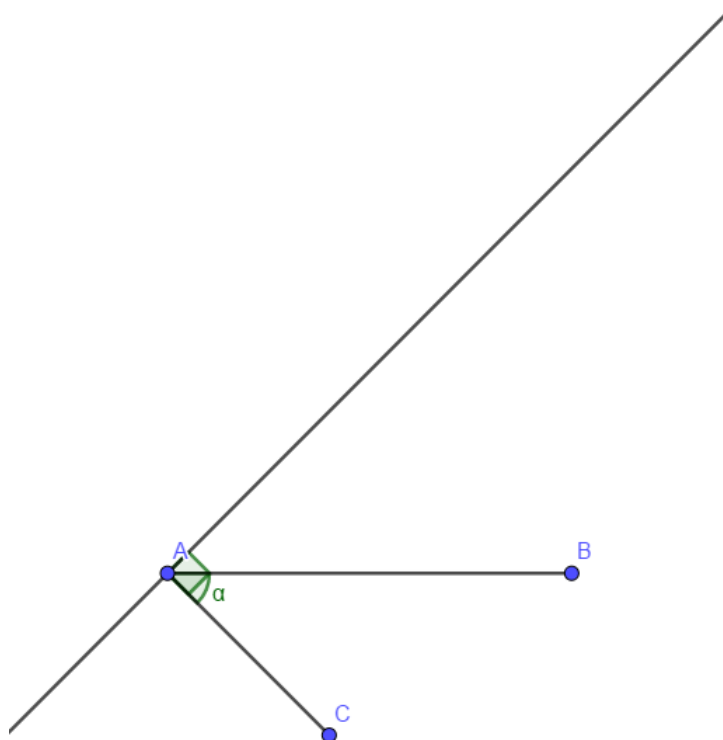


Figura 2.17: Etapa 2 da construção do arco capaz.

3. Faça a mediatriz de \overline{AB} . Marque o ponto de encontro dessa mediatriz com a perpendicular construída na etapa 2 (ponto O);
4. Com centro em O e de raio \overline{AO} , faça o arco \overline{AB} . Esse é o arco capaz.

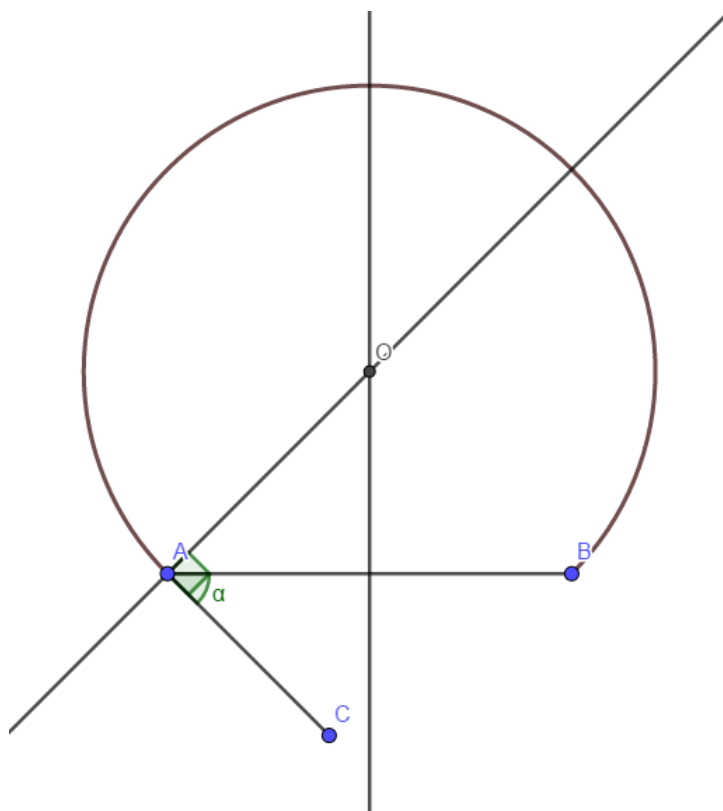


Figura 2.18: Arco capaz de ângulo α construído.

Qualquer ângulo cujo vértice esteja sobre o referido arco e que as retas que o formam passem por A e por B possuem a mesma medida (α). Na figura 2.19, os ângulos γ , δ e ϵ , medem α .

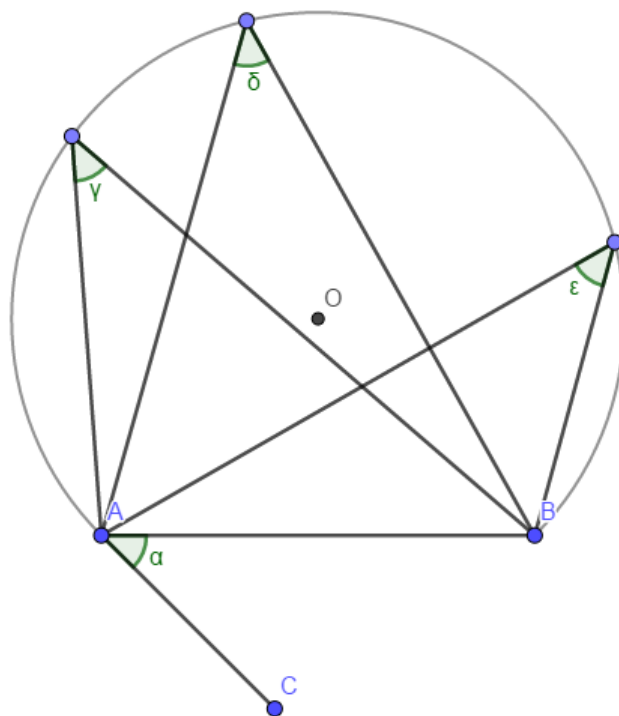


Figura 2.19: Alguns ângulos sobre o arco capaz de ângulo α construído.

Demonstração: Na figura 2.18, é fácil notar que $\angle AOB = 2 \cdot \alpha$, pois $\angle OAB = 90^\circ - \alpha$, e como AOB é isósceles, então $\angle OBA = 90^\circ - \alpha$ também, logo $\angle AOB = 2 \cdot \alpha$. Portanto, como $\angle AOC$ é ângulo central, então qualquer ângulo inscrito ao arco e cujos lados contenham os pontos A e B , medirá α , pela propriedade de ângulo inscrito.

2.2.6 Divisão de um segmento dado em n partes iguais

Esta construção também permite obter o ponto médio de um segmento de outra maneira, para o caso $n = 2$, mas de maneira mais geral, ela permite dividir um segmento dado na razão desejada, ou seja, com ela é possível dividir este segmento em n partes.

1. Trace um segmento \overline{AT} com origem no ponto A , formando um ângulo preferencialmente agudo com \overline{AB} ;
2. Com uma abertura qualquer e com centro em A , trace n arcos sobre \overline{AT} (n representa o número de partes que se deseja dividir o segmento), de maneira que o centro do arco seguinte seja a intersecção do arco anterior com \overline{AT} ;

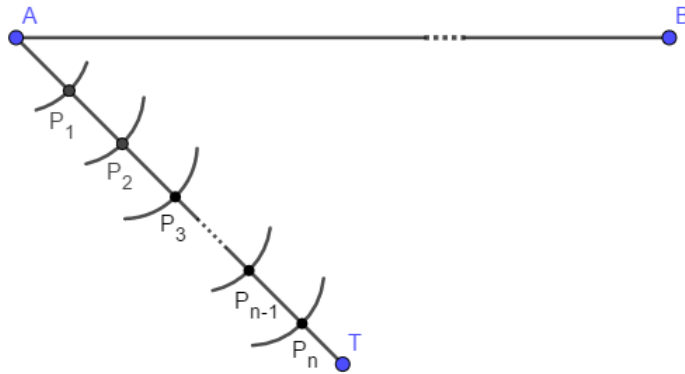


Figura 2.20: Etapa 2 da divisão de um segmento em n partes iguais.

3. Trace um segmento que una o último ponto (P_n), obtido ao traçar o n -ésimo arco, ao ponto B ;
4. Faça retas paralelas ao segmento $\overline{P_nB}$, passando por cada P_i marcado sobre \overline{AT} .

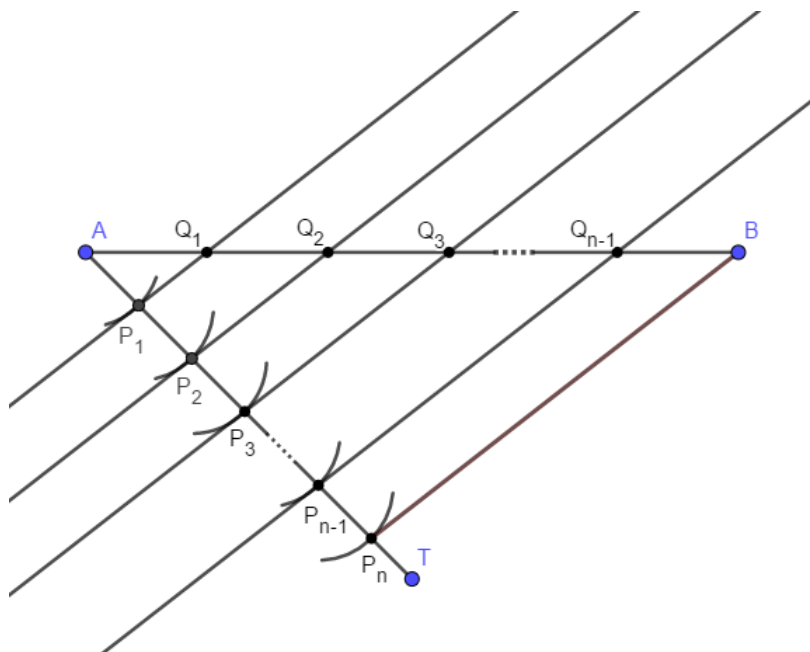


Figura 2.21: Segmento \overline{AB} dividido em n partes iguais.

Essa construção pode ser usada para calcular a média aritmética de n segmentos.

Demonstração: Com uma aplicação direta do Teorema das Paralelas ([2] pg. 80), prova-se que o segmento foi dividido em n partes congruentes, pois as paralelas traçadas estão igualmente espaçadas, uma vez que sobre o segmento \overline{AT} foram traçados arcos de mesmo raio.

2.2.7 Médias de dois Segmentos

Iremos expor agora uma série de construções que permitem obter as médias aritmética, geométrica e harmônica. Vejamos:

Média Aritmética:

1. Dados os dois segmentos, \overline{AB} e \overline{CD} , una-os sobre uma mesma reta pelos extremos B e C , de tal forma que gere um novo segmento \overline{AD} ;
2. Construa o ponto médio M de \overline{AD} (reta mediatriz de um segmento). \overline{AM} é a média aritmética da soma dos comprimentos dos segmentos dados.

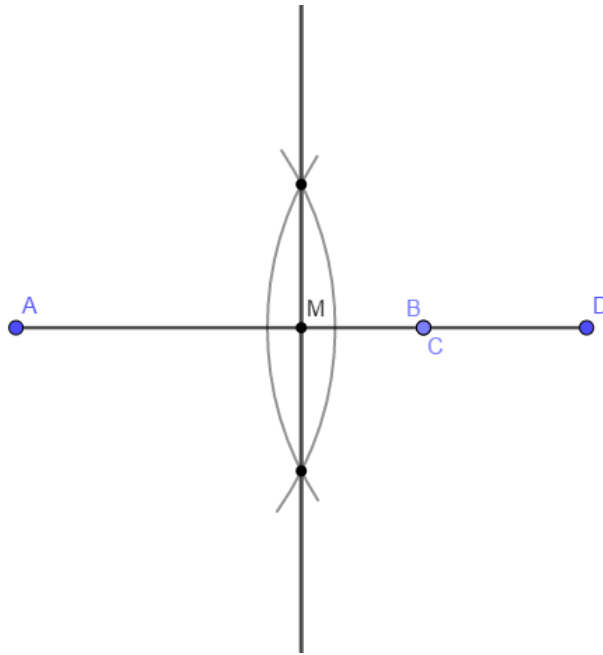


Figura 2.22: Média aritmética dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} .

Média Geométrica:

1. Dados os dois segmentos, \overline{AB} e \overline{CD} , una-os sobre uma mesma reta pelos extremos B e C , de maneira que gere um novo segmento \overline{AD} ;
2. Obtenha o ponto médio M de \overline{AD} ;
3. Com centro em M e raio \overline{AM} , faça uma circunferência Γ ;

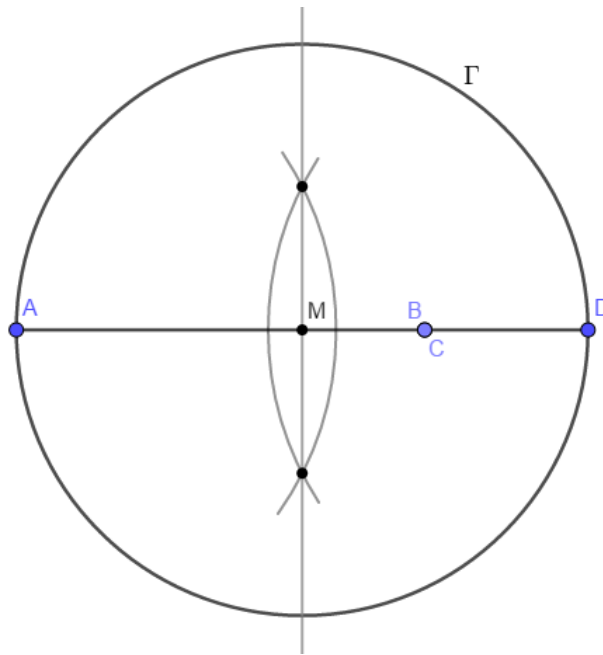


Figura 2.23: Etapa 2 da construção da média geométrica de dois segmentos.

4. Faça uma perpendicular a \overline{AD} passando por B , intersectando Γ nos pontos F e G . \overline{BG} (ou \overline{BF}) é a média geométrica dos segmentos dados.

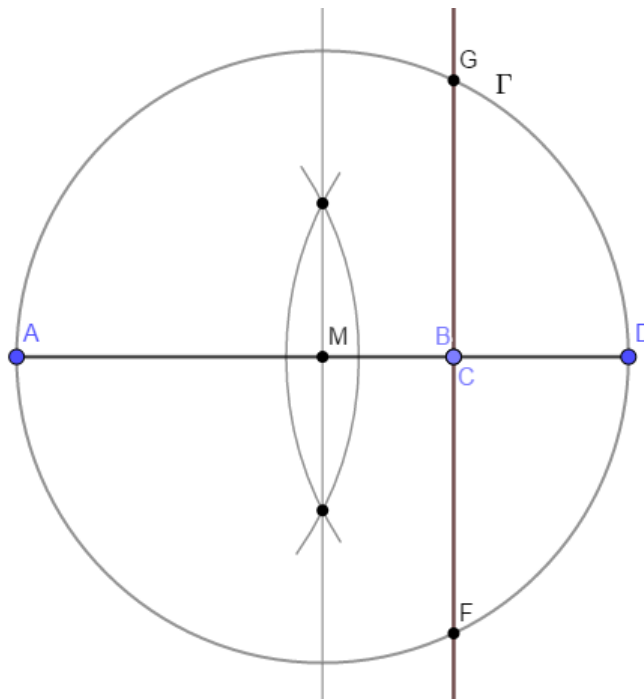


Figura 2.24: Média geométrica dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} .

Média Harmônica:

1. Repita a construção anterior;
2. Trace o segmento \overline{MG} , em seguida, faça uma perpendicular s a esse segmento passando por B , marcando H na interseção de \overline{MG} com s . \overline{GH} é a média harmônica de \overline{AB} e \overline{CD} .

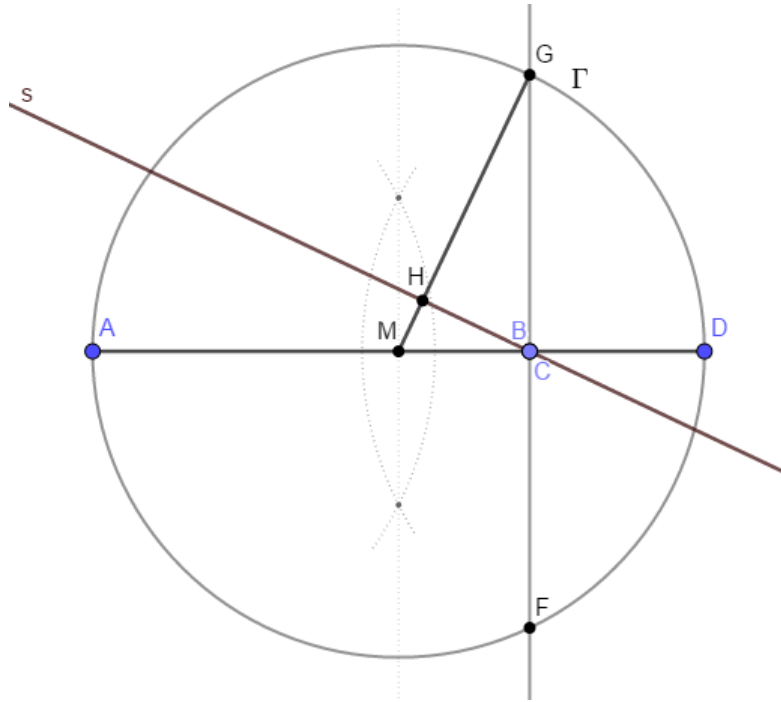


Figura 2.25: Média harmônica dos segmentos \overline{AB} e \overline{CD} .

Demonstração:

Média Aritmética:

Na figura 2.22, como M é ponto médio de $\overline{AB} + \overline{CD}$, então, $\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$, donde \overline{AM} é a média aritmética.

Média Geométrica

Observando a figura 2.24, nota-se que os segmentos \overline{AD} e \overline{FG} são cordas da circunferência Γ , e como se intersectam em B (ou C), podemos aplicar *Potência de um Ponto* em B (consultar [20], pg. 203), logo

$$\overline{BF} \cdot \overline{BG} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

Como \overline{AD} é diâmetro de Γ , então $\overline{BF} = \overline{BG}$, assim

$$\overline{BF}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{CD} \Rightarrow \overline{BF} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$$

Portanto, \overline{BF} é a média geométrica.

Média Harmônica

Observe a figura 2.25, como os triângulos BGH e BGM , pelo caso AA de semelhança (consultar [20], pg. 73) são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GM}} \Rightarrow \overline{HG} = \frac{\overline{BG}^2}{\overline{GM}} \Rightarrow \overline{HG} = \frac{\sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}^2}{\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}} \Rightarrow \overline{HG} = \frac{2\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} + \overline{CD}}$$

Com uma pequena reorganização ficamos com

$$\overline{HG} = \frac{2}{\frac{1}{\overline{AB}} + \frac{1}{\overline{CD}}}$$

Portanto, \overline{HG} é a média harmônica de \overline{AB} e \overline{CD} .

A seguir iremos abordar alguns problemas mais avançados que os gregos nos legaram com suas respectivas soluções, utilizando procedimentos bastante criativos que permitiram gerar diversas construções interessantes com a régua e o compasso.

Capítulo 3

Problemas Clássicos de Construções Geométricas

No presente capítulo, serão abordados problemas geométricos presentes no livro Os Elementos da Geometria e em diversas literaturas, no entanto, trataremos principalmente dos que são possíveis de serem construídos, incluindo casos particulares dos problemas Clássicos da Geometria Grega, mostrando que existem possibilidades de construção para os problemas considerados impossíveis no caso geral, mas que possuem solução em um número limitado de casos.

3.1 Polígonos Regulares

Um polígono é dito regular quando todos os seus lados tem mesmo comprimento e todos os seus ângulos internos são congruentes.

Veremos a seguir as construções com régua e compasso de alguns polígonos regulares e como obter uma sequência infinita de polígonos regulares a partir de um padrão de construção.

3.1.1 Triângulo Equilátero

1. Construa uma circunferência Γ de raio r com o compasso;
2. Trace o diâmetro \overline{AP} ;
3. Com abertura medindo r e centro em P , trace uma circunferência Λ , em seguida marque os pontos B e C da interseção de Λ com Γ ;

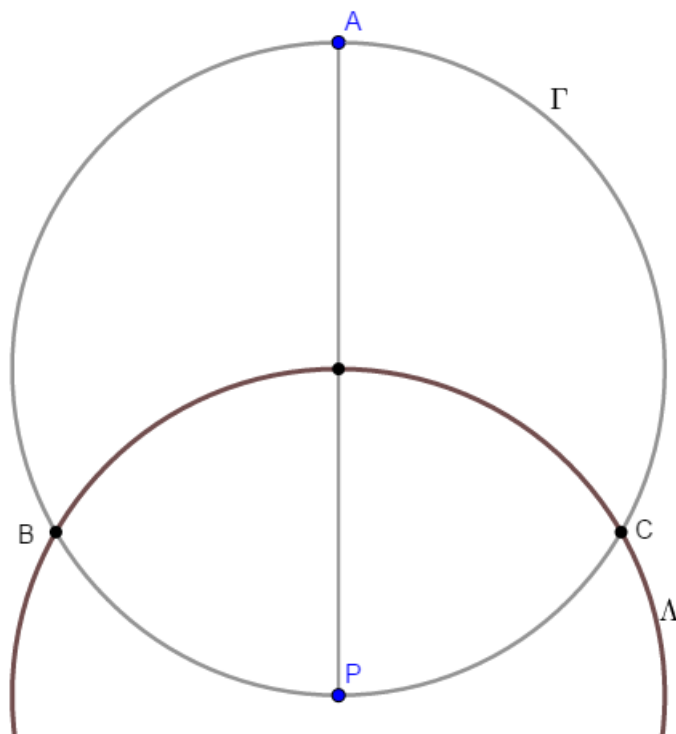


Figura 3.1: Etapa 2 da construção do triângulo equilátero inscrito.

4. Trace os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} . O triângulo equilátero ABC está construído.

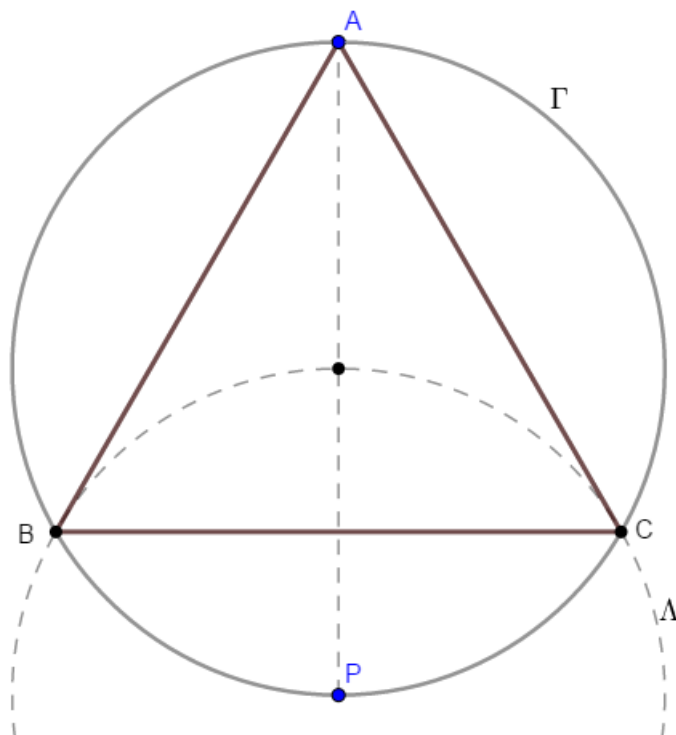


Figura 3.2: Triângulo equilátero inscrito numa circunferência.

Outra maneira de construir um triângulo equilátero, dessa vez semelhante a que é apresentada em Os Elementos, de Euclides, pode ser feita da seguinte maneira:

Dado um segmento \overline{AB} construir um triângulo equilátero de lados medindo \overline{AB} .

1. Construa a circunferência Γ de raio \overline{AB} , e centro A ;
2. Construa a circunferência Λ de raio \overline{AB} , e centro B ;

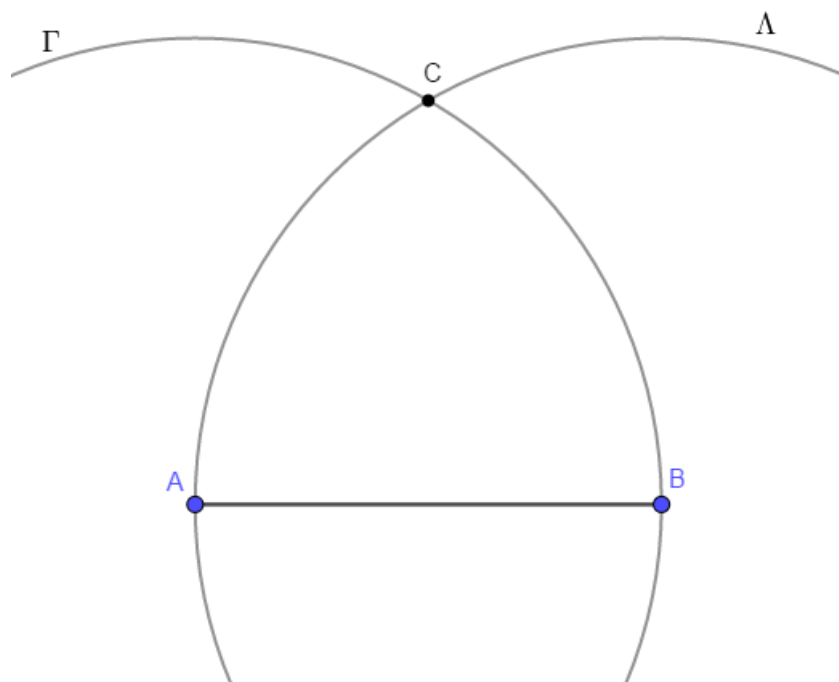


Figura 3.3: Etapa 2 da construção do triângulo equilátero dado um de seus lados.

3. Marque C em um dos pontos de intersecção de Γ com Λ ;
4. Trace os segmentos \overline{AC} e \overline{BC} . O triângulo equilátero ABC foi construído.

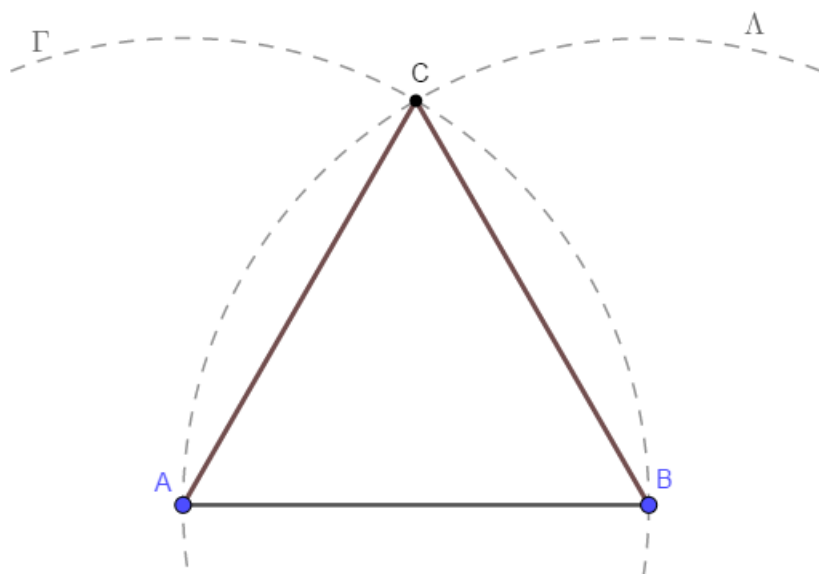


Figura 3.4: Triângulo equilátero construído.

3.1.2 Quadrado

1. Construa uma circunferência Γ de centro O e raio r com o compasso;
2. Trace um diâmetro qualquer, \overline{AC} ;
3. Faça a mediatriz do segmento \overline{AC} , obtendo os pontos B e D ;

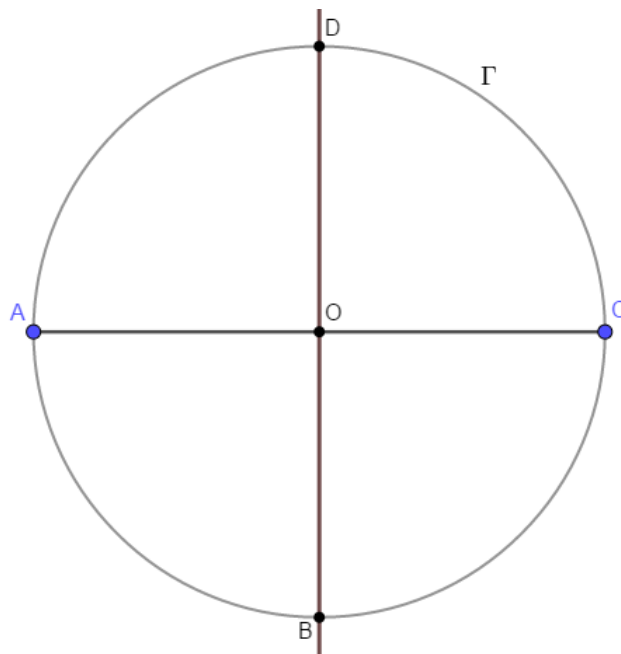


Figura 3.5: Etapa 3 da construção do quadrado inscrito.

4. Trace os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} . O quadrado $ABCD$ está construído.

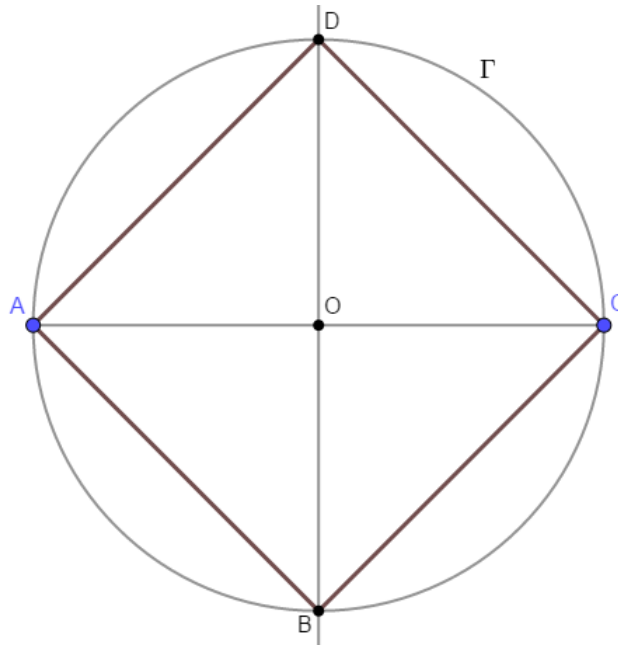


Figura 3.6: Quadrado inscrito construído.

Assim como o triângulo equilátero, o quadrado também pode ser construído de outra maneira, semelhante a que consta no Os Elementos da Geometria, veja o passo a passo a seguir:

Dado um segmento \overline{AB} construir um quadrado de lados medindo \overline{AB} .

1. Construa a reta r contendo \overline{AB} ;
2. Construa a reta s , perpendicular a r , contendo o ponto A , em seguida, construa a reta t , perpendicular a r , contendo B ;
3. Com centro em A e raio \overline{AB} , trace a circunferência Γ , e marque D em um dos pontos de intersecção com s ;

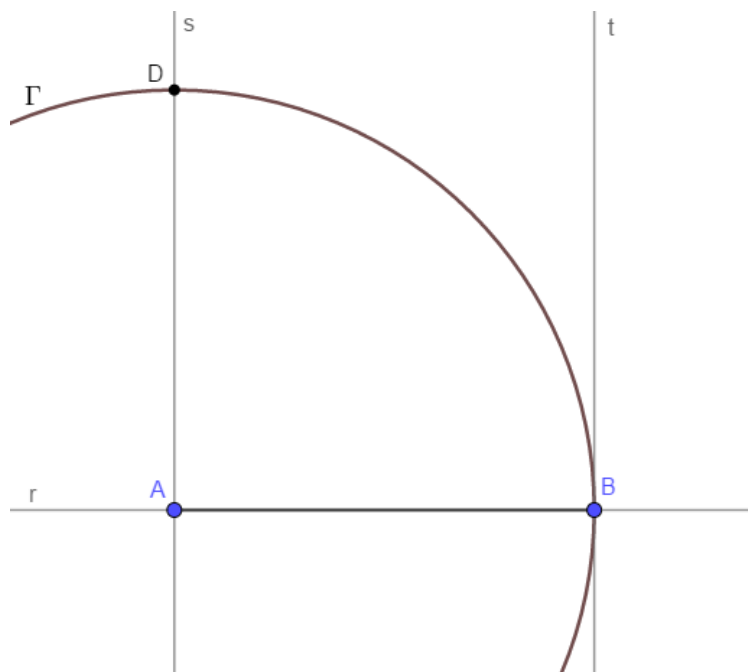


Figura 3.7: Etapa 3 da construção do quadrado dado um de seus lados.

4. Faça a reta v , perpendicular a s , contendo D . Marque C na intersecção de t com v ;
5. Trace os segmentos \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{AD} . O quadrado $ABCD$ está construído.

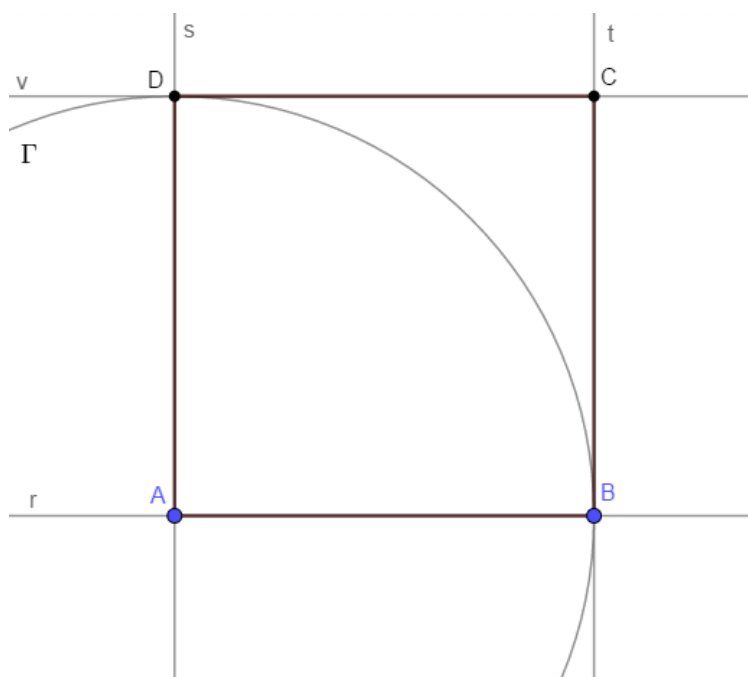


Figura 3.8: Quadrado construído.

3.1.3 Pentágono Regular

1. Construa uma circunferência Γ de raio r e centro O ;
2. Trace um diâmetro qualquer de Γ (\overline{AP});
3. Construa um diâmetro \overline{QR} perpendicular ao primeiro;
4. Marque o ponto médio M de \overline{QO} ;

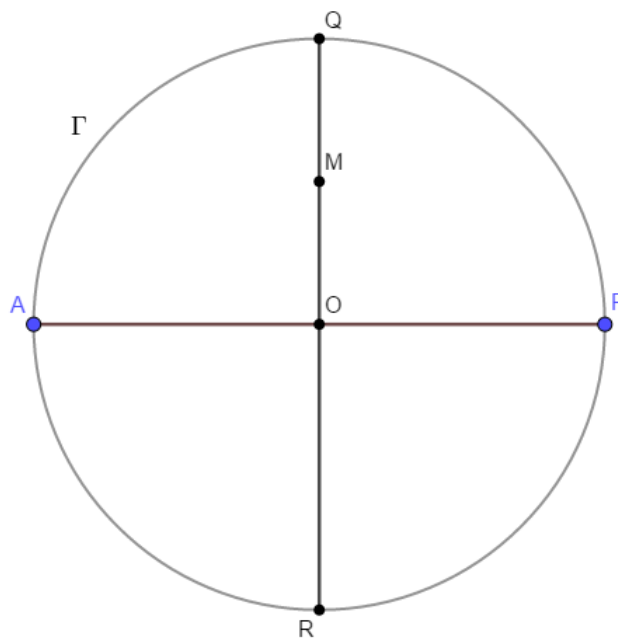


Figura 3.9: Etapa 4 da construção do pentágono regular inscrito.

5. Com centro em M e raio \overline{AM} , trace um arco de circunferência intersectando \overline{QR} no ponto S ;
6. O segmento \overline{AS} será o lado do pentágono regular inscrito em Γ . Trace um arco de raio \overline{AS} sobre Γ , com centro em A , obtendo o ponto B ;

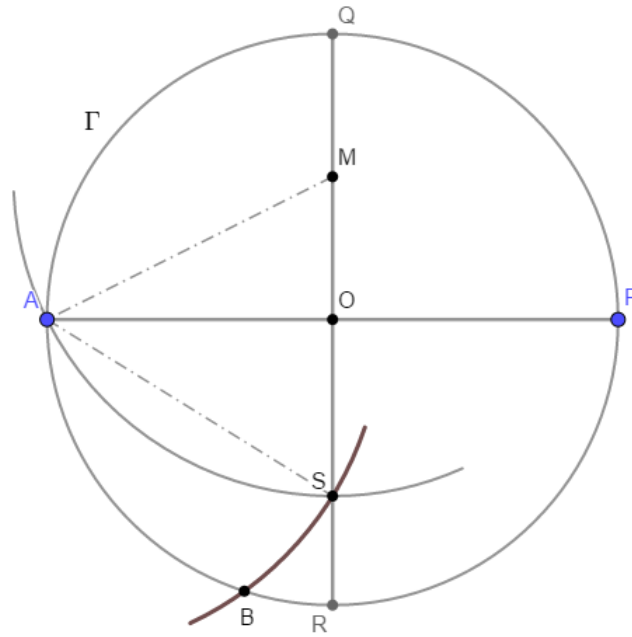


Figura 3.10: Etapa 6 da construção do pentágono regular inscrito.

7. Com centro em B e raio \overline{AS} trace um arco sobre Γ , obtendo C , repita o processo para obter os pontos D e E ;
8. Trace os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EA} . O pentágono regular $ABDCE$ está construído.

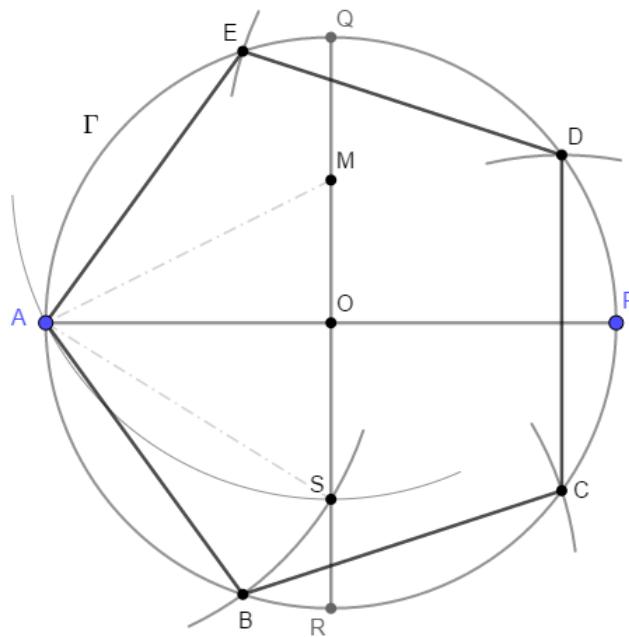


Figura 3.11: Pentágono regular inscrito construído.

3.1.4 Hexágono Regular

1. Construa uma circunferência Γ de centro O e raio r ;
2. Marque o ponto A sobre Γ , com o centro do compasso em A trace um arco de raio r sobre Γ , obtendo o ponto B ;
3. Com centro em B e raio r , trace um novo arco passando intersectando Γ , obtendo C ;

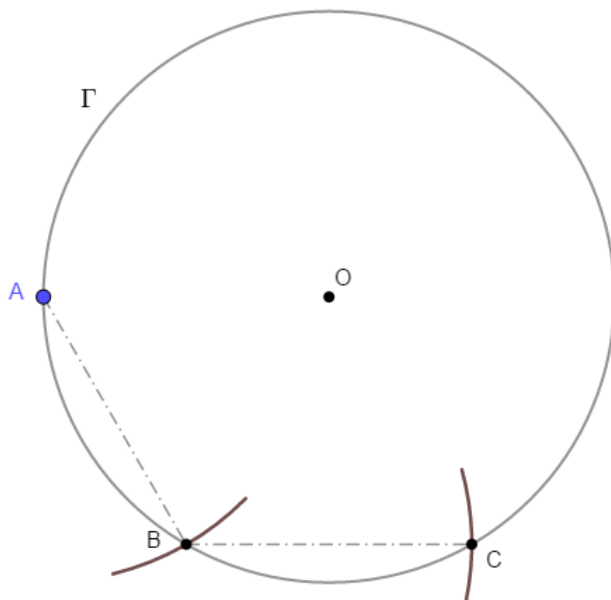


Figura 3.12: Etapa 3 da construção do hexágono regular inscrito.

4. Repita o processo para obter os pontos D , E e F ;
5. Construa os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EF} e \overline{FA} . O hexágono regular $ABCDEF$ está construído.

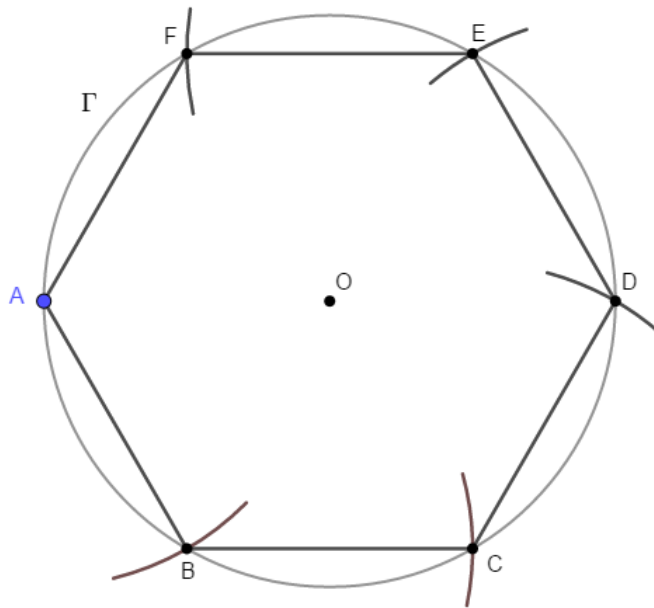


Figura 3.13: Hexágono regular inscrito construído.

3.1.5 Pentadecágono Regular

O ângulo central do pentadecágono regular mede 24° , então precisamos gerar esse ângulo por meio de uma construção com régua e compasso, como $60^\circ - 36^\circ = 24^\circ$, então usando a construção do ângulo de 60° (triângulo equilátero) e a construção do ângulo de 36° (metade do ângulo central do pentágono regular) é possível gerar o ângulo central do pentadecágono.

Partindo do passo 6 da construção do pentágono, daremos início a construção do pentadecágono a seguir.

1. Trace a bissetriz de $\angle AOB$, marcando J em sua interseção com Γ ;
2. Com raio r e centro em A , construa a circunferência Π ;
3. Marque o ponto K , na interseção de Π e Γ ;

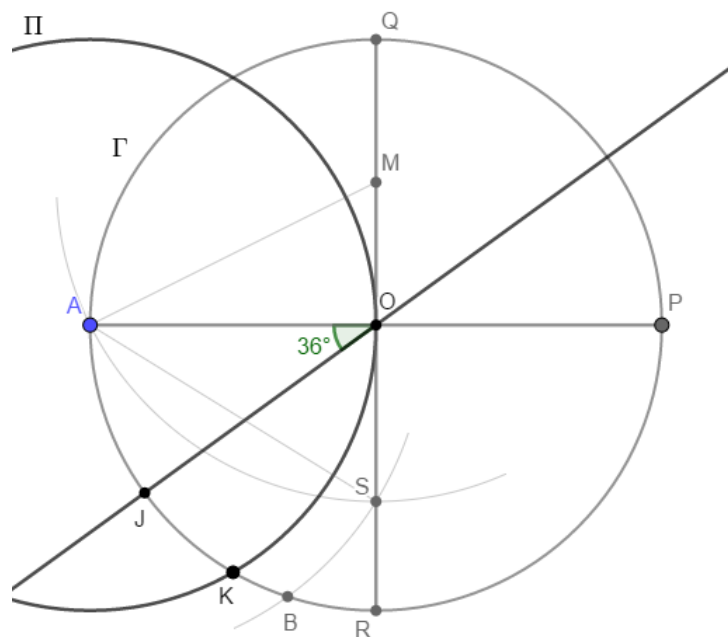


Figura 3.14: Etapa 3 da construção do pentadecágono regular inscrito.

4. Trace o segmento \overline{OK} . O ângulo $\angle JOK$ mede 24° ;
5. Trace o segmento \overline{JK} que é o primeiro lado do pentadecágono regular;
6. Transfira a medida do segmento \overline{JK} sobre Γ para obter os demais pontos do pentadecágono.

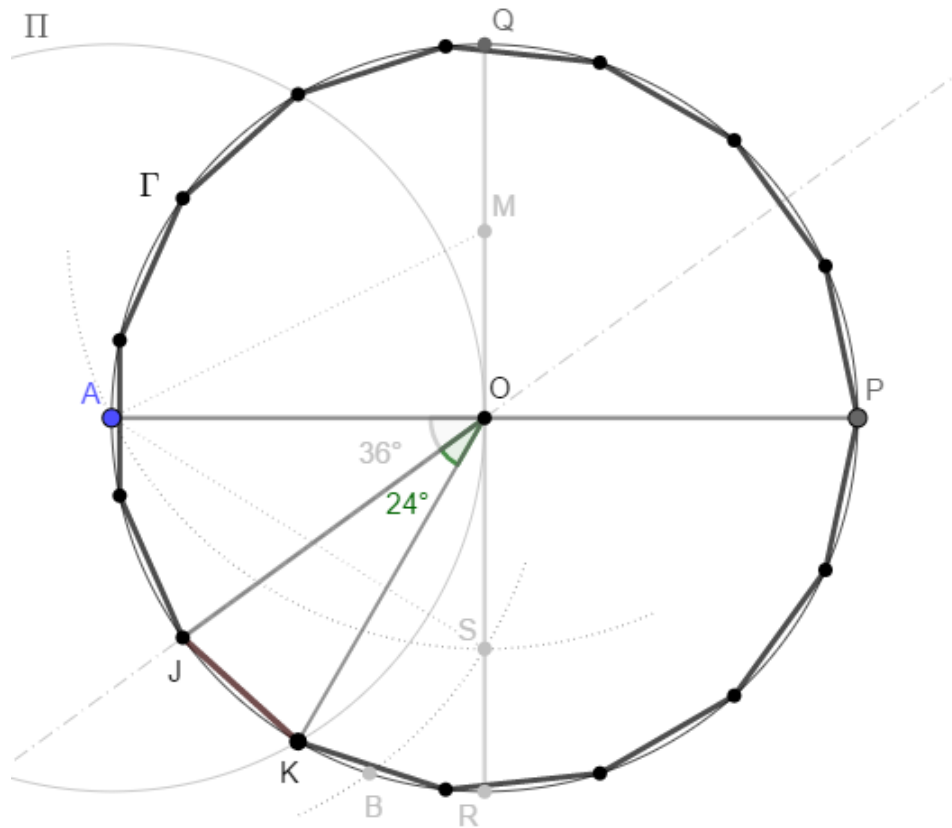


Figura 3.15: Pentadecágono regular inscrito construído.

Note que nas construções dos polígonos inscritos numa circunferência, é possível traçar as retas mediatrizes de cada lado do polígono, obtendo com isso, pontos de interseção entre essas mediatrizes e a circunferência, de modo que, ao traçar os segmentos unindo os pontos da circunferência, adjacentes aos vértices do polígono, teremos um novo polígono regular, com o dobro de lados. Tal processo pode ser repetido para esse novo polígono regular e obteremos um outro polígono regular com o quádruplo de lados do polígono regular inicial. Dessa maneira, podemos concluir que se for possível desenhar um polígono regular de n lados, então, usando esse procedimento, também poderemos construir polígonos regulares de $n \cdot 2^k$ lados, com n e $k \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, a régua e o compasso são instrumentos suficientes que permitem criar uma infinidade de polígonos regulares.

Até os últimos anos do século **XVIII**, os polígonos regulares construtíveis consistiam em n -âgonos para os seguintes valores de n :

3, 6, 12, 24, ...

4, 8, 16, 32, ...

5, 10, 20, 40, ...

15, 30, 60, 120, ...

Apenas em 29 de março de 1796, Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) com apenas dezoito anos, apresentou pela primeira vez a possibilidade de construção do heptadecágono regular, mas sua construção foi publicada alguns anos depois. Todavia, será apresentada aqui a construção do heptadecágono regular feita pelo matemático Herbert W. Richmond (1863 - 1948), da Universidade de Cambridge, feita de forma mais eficiente em 1893 e mais detalhada em 1909.

3.1.6 Heptadecágono Regular

1. Construa a circunferência Γ de raio r e centro O ;
2. Trace os diâmetros \overline{AC} e \overline{BD} , perpendiculares entre si;
3. Marque M ponto médio de \overline{OC} ;

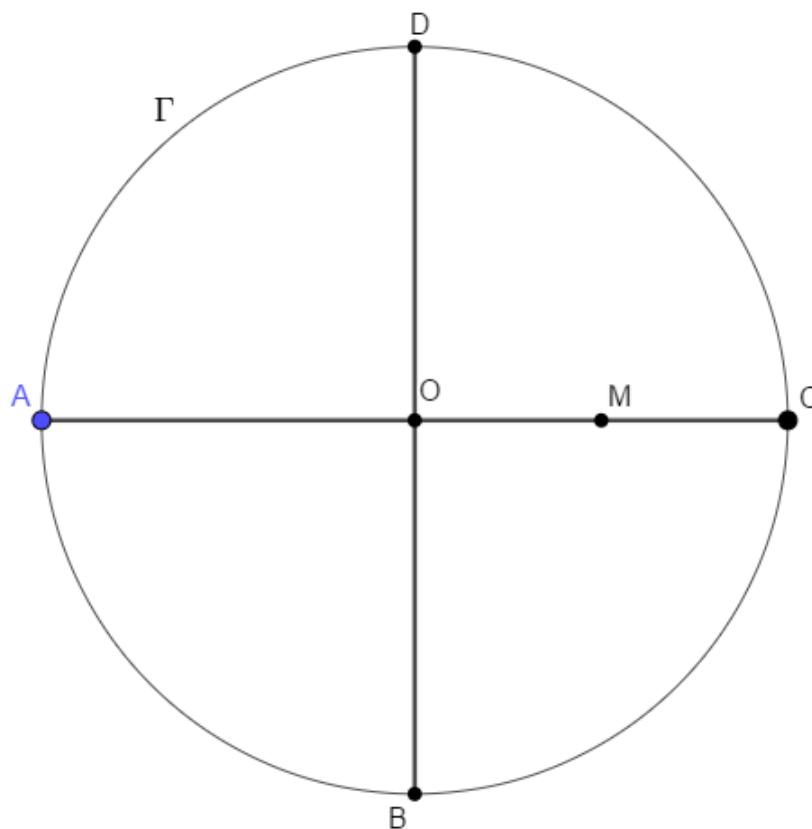


Figura 3.16: Etapa 3 da construção do heptadecágono regular inscrito.

4. Obtenha P ponto médio de \overline{OM} ;
5. Faça a bissetriz de $\angle OPD$, obtendo Q na interseção da bissetriz com \overline{BD} ;
6. Construa a bissetriz de $\angle OPQ$, obtendo R na interseção da bissetriz com o diâmetro \overline{BD} ;

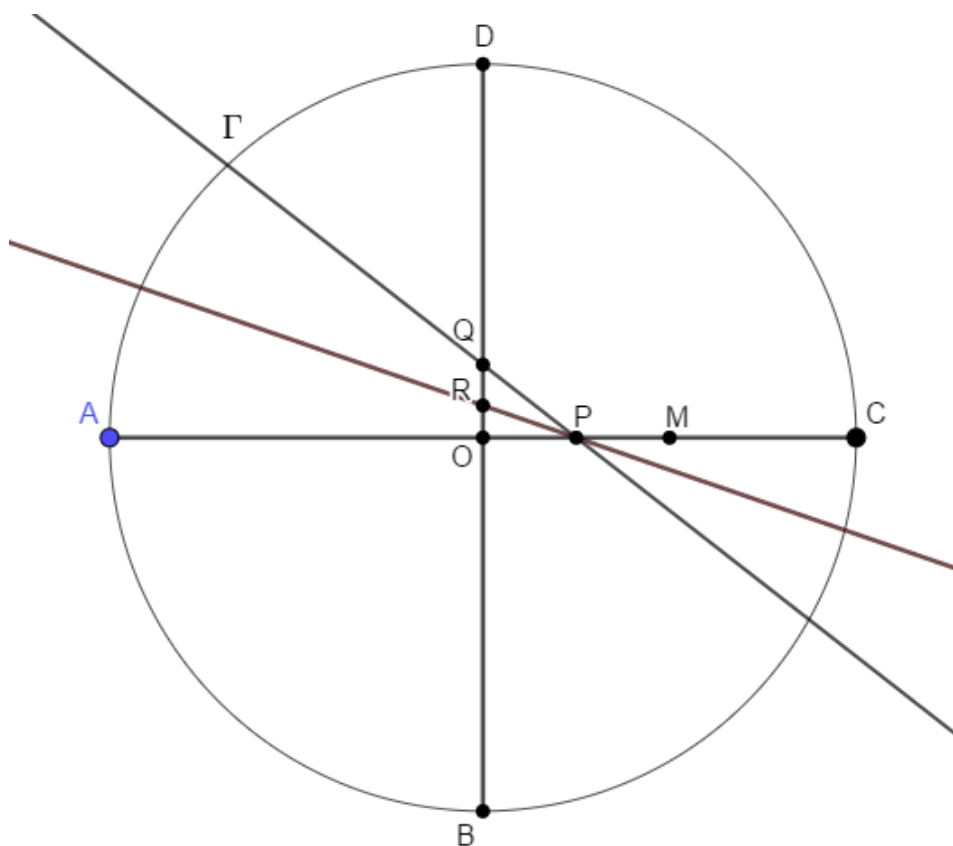


Figura 3.17: Etapa 6 da construção do hexágono regular inscrito.

7. Faça a reta s perpendicular a \overline{PR} passando por P , marcando o ponto S de interseção com \overline{BD} ;
8. Construa a bissetriz de $\angle SPR$ e marque T na sua interseção com \overline{BD} ;
9. Marque o ponto médio N do segmento \overline{TD} e trace o arco com centro em N e raio \overline{TN} , intersectando \overline{OC} no ponto U ;

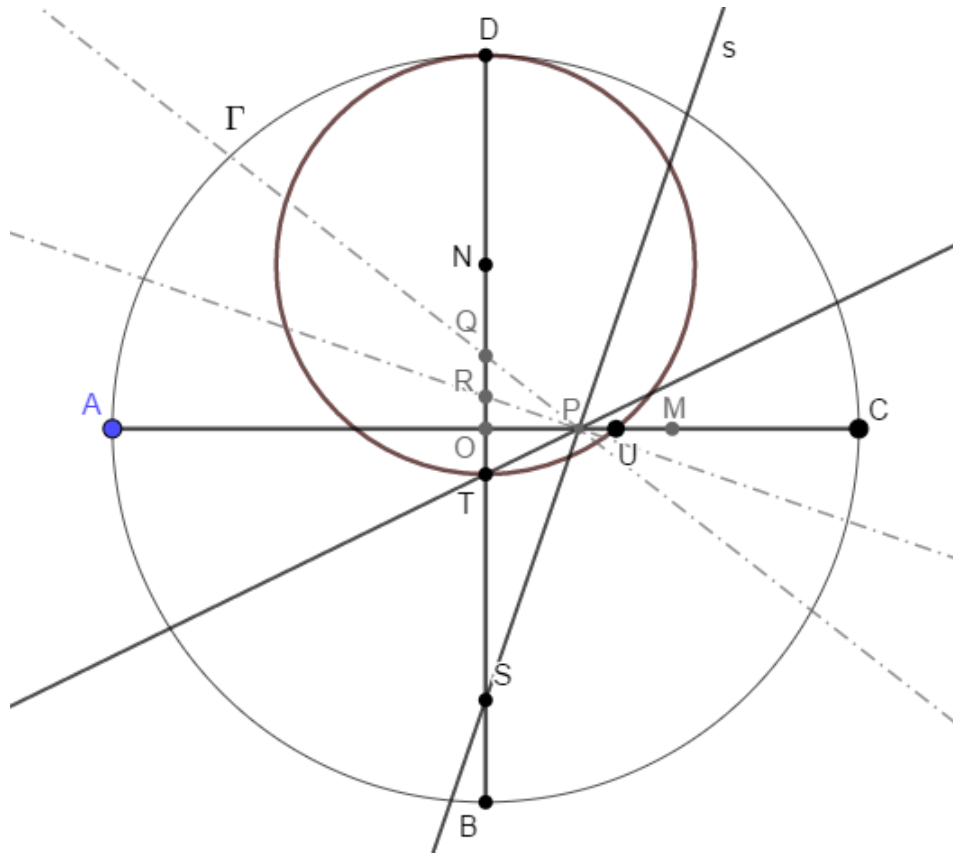


Figura 3.18: Etapa 9 da construção do heptadecágono regular inscrito.

10. Trace uma circunferência de centro R e raio \overline{RU} intersectando \overline{BD} nos pontos X e Y ;
11. Trace duas retas, m e n perpendiculares a \overline{BD} passando por X e Y , em seguida marque V_3 e V_1 na interseção de m e n com Γ , respectivamente, sobre o arco \widehat{BCD} ;

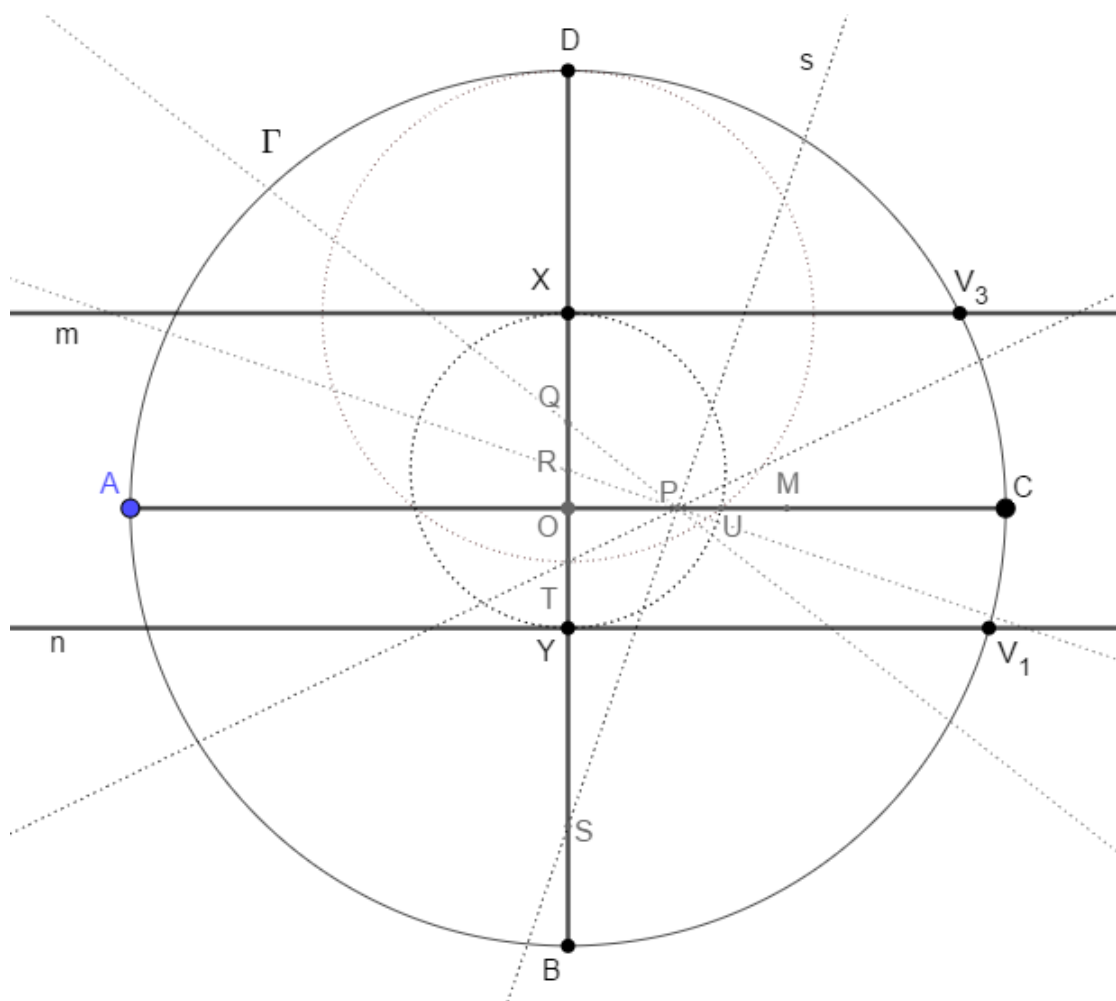


Figura 3.19: Etapa 11 da construção do heptadecágono regular inscrito.

12. Faça a mediatriz o segmento $\overline{V_1V_3}$, obtendo V_2 na interseção com Γ . Os pontos V_1 , V_2 e V_3 , são três vértices do heptadecágono regular inscrito em Γ , donde $\overline{V_1V_2}$ é o lado procurado.

que todos os números dessa sequência eram primos, porém Leonard Euler (1701 - 1783), mostrou que F_5 não é primo, possui 641 e 6700417 como fatores primos em sua decomposição o que de fato se mostrou mais tarde que para $N > 4$ não se tem conhecimento de nenhum outro número de Fermat que seja primo. Portanto, os únicos primos de Fermat conhecidos são:

Tabela 3.1: Primos de Fermat conhecidos.

n	0	1	2	3	4
F_n	3	5	17	257	65537

Alguns autores sugerem que, provavelmente, a tentativa de construir um eneágono regular tenha sido a tarefa que fez surgir o problema da trissecção de um ângulo qualquer, pois para construir tal polígono, deveria ser possível trissectar o ângulo central do triângulo equilátero, porém, somente em 1837 a resposta para esse problema foi obtida, quando o matemático francês Pierre Laurent Wantzel mudou o foco desse problema e passou a procurar demonstrar a impossibilidade de trissectar um ângulo qualquer, obtendo êxito na sua busca.

Todavia, o fato de entrarmos aqui no problema da trissecção de um ângulo não justifica a inexistência da construção de outros polígonos regulares, senão esses que já foram apresentados, esse fato será melhor explicado a seguir.

Após a morte de Gauss nada foi encontrado sobre o que seria uma demonstração em seus documentos acerca da sua afirmação sobre quais são os polígonos regulares construtíveis com régua e compasso, mas quem publicou um artigo em que de fato isso ocorria, foi o jovem matemático francês Pierre Laurent Wantzel. Dessa maneira, o seguinte teorema é atribuído aos dois matemáticos:

Teorema 1. *Teorema de Gauss-Wantzel: Um n -ágono regular é construtível com régua e compasso se, e somente se, $n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$, tal que, o maior fator ímpar de n ou é 1 ou um produto de distintos primos de Fermat.*

É claro que teoricamente os polígonos regulares de 257 e 65537 lados podem ser construídos, de fato, uma construção do polígono regular de 257 lados foi apresentada pelo Friedrich Julius Richelot (1808 - 1875) que publicou sua construção do 257-ágono regular em 1832, enquanto que o J. Hermes, da Universidade de Lingen, dedicou dez anos de sua vida para construir o 65537-ágono. Seu trabalho, nunca foi publicado, mas pode ser encontrado na Universidade de Göttingen, embora, acredita-se que seus resultados contenham erros.

A seguir será apresentado outro tipo de problema que os gregos desenvolveram ao longo dos anos e que acabou dando origem a mais um dos Problemas Clássicos da Geometria.

3.2 Quadratura de Polígonos

Um outro tipo de problema que os gregos costumavam trabalhar se tratava da quadratura de polígonos, isto é, dado um polígono qualquer encontre um segmento de reta cujo quadrado de lado igual a esse segmento possui área equivalente a área do polígono dado.

A construção **2.2.9** (Média Geométrica vista no capítulo 2) nos dá uma solução para quando o polígono dado é um retângulo. A seguir temos o passo a passo dessa construção:

3.2.1 Quadratura do Retângulo

Dado um retângulo $ABCD$, construa um quadrado de mesma área.

1. Construa a reta r que contém o lado maior do retângulo (considere \overline{AB});
2. Com raio \overline{BC} e centro em B , construa a circunferência Γ intersectando r no ponto P , com $P \notin \overline{AB}$;
3. Marque o ponto médio M do segmento \overline{AP} e faça a circunferência Π de raio \overline{AM} e centro M ;

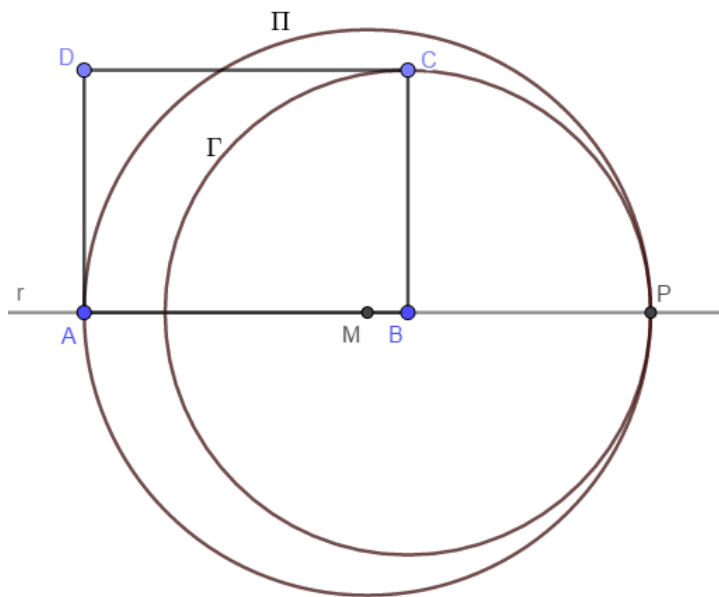


Figura 3.22: Obtendo o lado do quadrado equivalente ao retângulo $ABCD$.

4. Trace a perpendicular s a r passando por B e marque Q em um dos pontos de intersecção de s com Π ;
5. Construa o quadrado de lado \overline{BQ} . Esse quadrado terá área equivalente a do retângulo $ABCD$.

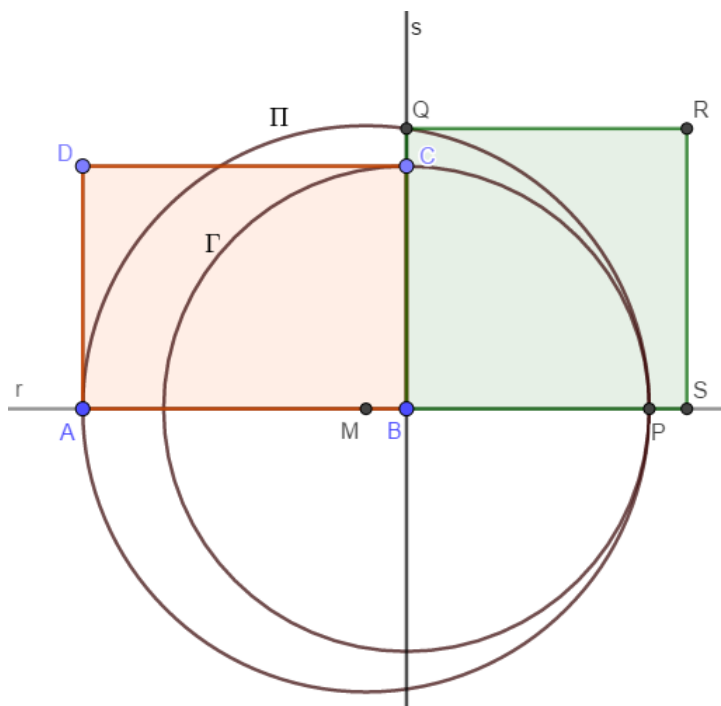


Figura 3.23: Quadrado $BQRS$ equivalente ao retângulo $ABCD$.

3.2.2 Quadratura do Losango

Nesse caso, o problema se resume a transformar o losango em um retângulo e então repetir a construção anterior.

Dado um losango $ABCD$, construa um retângulo de mesma área.

1. Trace as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} do losango;
2. Construa as retas r e s , paralelas a \overline{BD} , com r contendo A e s contendo C ;

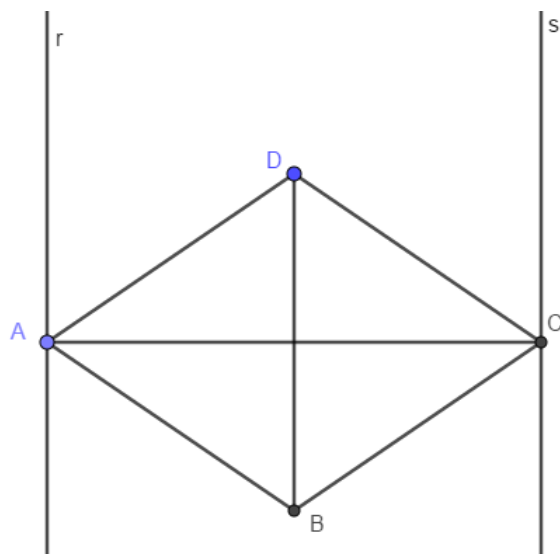


Figura 3.24: Etapa 2 da construção do retângulo equivalente ao losango $ABCD$.

3. Trace a reta t paralela a \overline{AC} contendo B e marque os pontos P e Q na interseção de t com r e s , respectivamente;
4. Repita a construção anterior para obter o quadrado de área equivalente ao retângulo $APQC$.

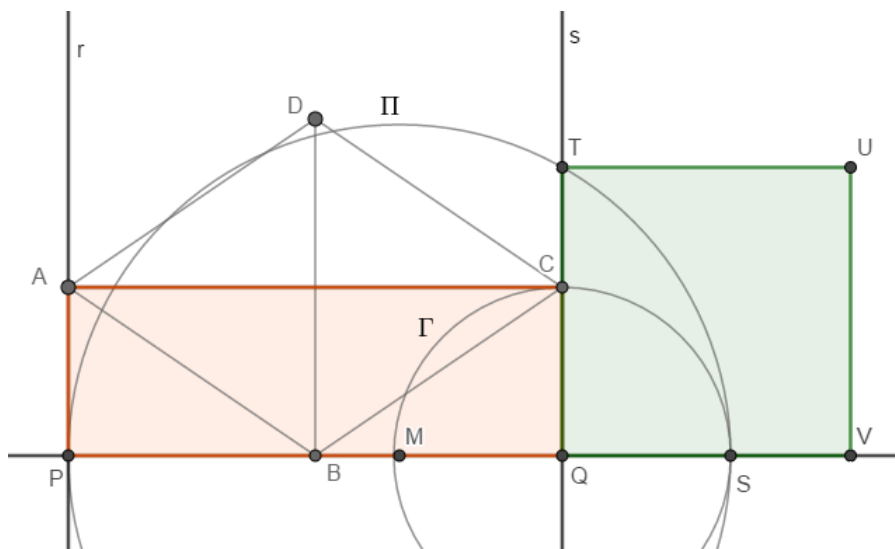


Figura 3.25: Obtendo o lado do quadrado equivalente ao losango $ABCD$.

3.2.3 Quadratura do Paralelogramo

Assim como na quadratura do losango, o problema a seguir se resume a transformar o paralelogramo em um retângulo e então repetir a quadratura do retângulo.

Dado um paralelogramo $ABCD$, construa um retângulo de mesma área.

1. Construa a reta r contendo \overline{AB} ;
2. Trace as retas s e t perpendiculares a r , com s contendo o ponto D e t contendo C ;

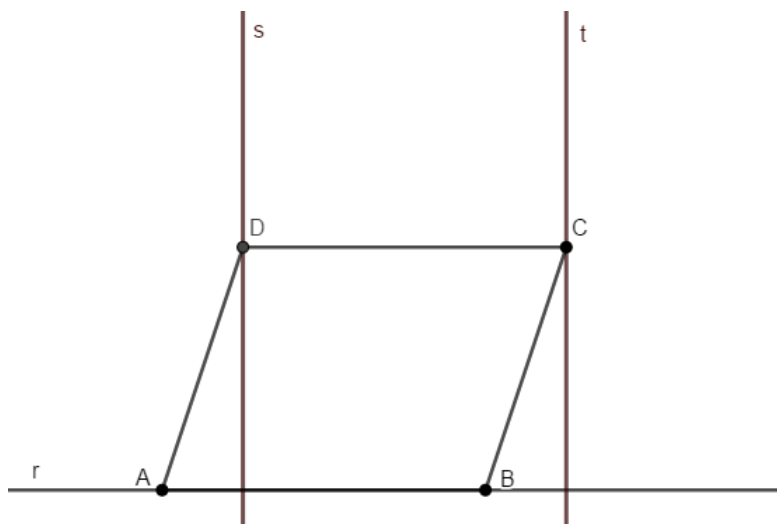


Figura 3.26: Etapa 2 da construção do retângulo equivalente ao paralelogramo $ABCD$.

3. Marque os pontos P e Q na interseção de r com s e t , respectivamente;
4. Repita a construção **3.2.1** para obter o lado do quadrado de área equivalente ao retângulo $PQCD$.

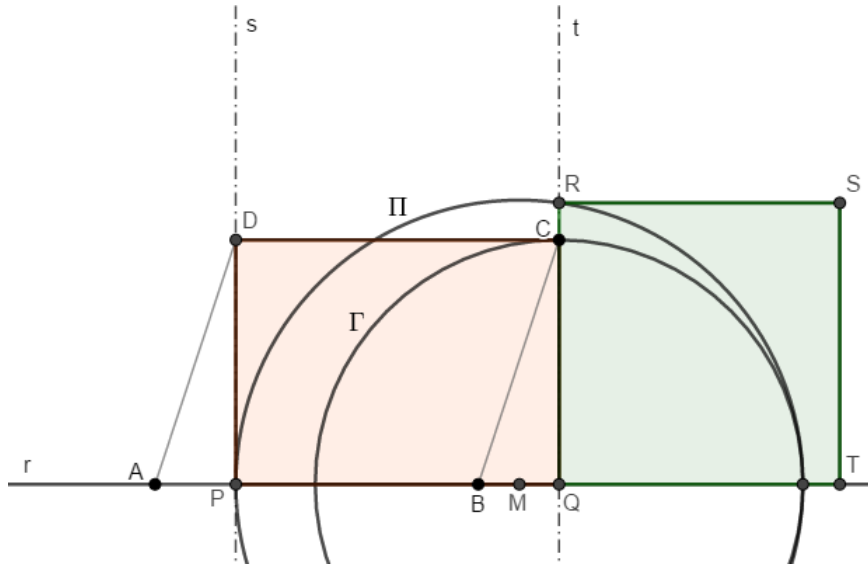


Figura 3.27: Obtendo o lado do quadrado equivalente ao paralelogramo $ABCD$.

3.2.4 Quadratura do Trapézio Escaleno

Seguindo uma idéia semelhante a das duas construções anteriores, devemos transformar o trapézio escaleno em um retângulo e então repetir a quadratura do retângulo.

Dado um trapézio $ABCD$, construa um retângulo de mesma área.

1. Construa as retas r e s , com r contendo \overline{AB} e s contendo \overline{CD} ;
2. Marque os pontos médios M e N , dos lados \overline{AD} e \overline{BC} , respectivamente;
3. Trace as retas t e v perpendiculares a r , com t contendo o ponto M e v contendo N ;

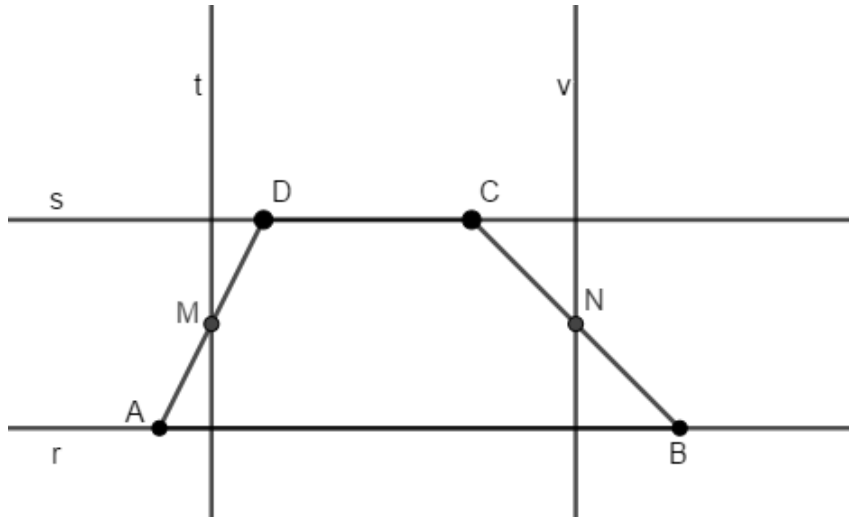


Figura 3.28: Transformando o trapézio escalo $ABCD$ em um retângulo.

4. Marque os pontos P e Q na interseção de r com t e v , respectivamente;
5. Marque os pontos R e S na interseção de s com v e t , respectivamente;
6. Após obter o retângulo $PQRS$, repita a construção **3.2.1** para obter o lado do quadrado de área equivalente a esse retângulo.

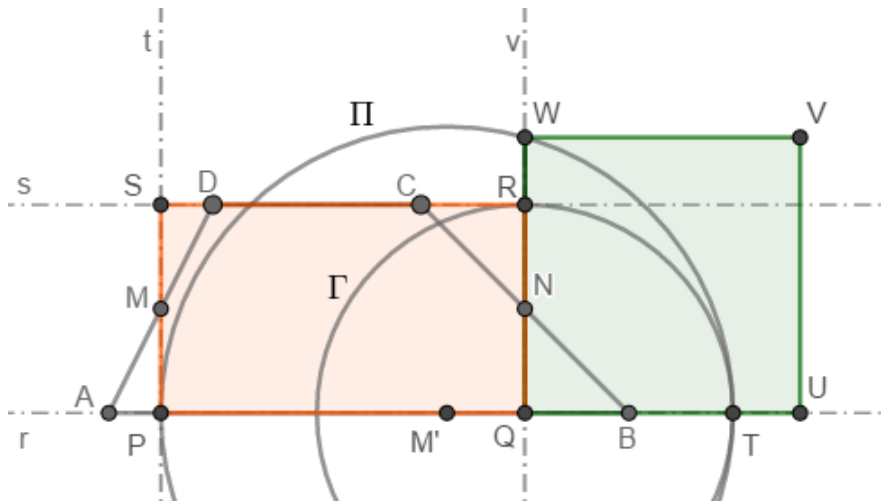


Figura 3.29: Obtendo o lado do quadrado equivalente ao trapézio escalo $ABCD$.

Com todas essas construções podemos ter uma noção de como pode ser feita a quadratura do triângulo. Vejamos como isso pode ser feito:

3.2.5 Quadratura do Triângulo

A princípio podemos pensar em como transformar o triângulo em um retângulo, para só então, usarmos a construção **3.2.1** e obter o quadrado de área equivalente.

Dado um triângulo ABC , construa um retângulo de mesma área.

1. Construa a reta r contendo \overline{AB} ;
2. Trace a reta s paralela a r , contendo o ponto C ;
3. Marque os pontos médios M e N dos lados \overline{AC} e \overline{BC} , respectivamente;

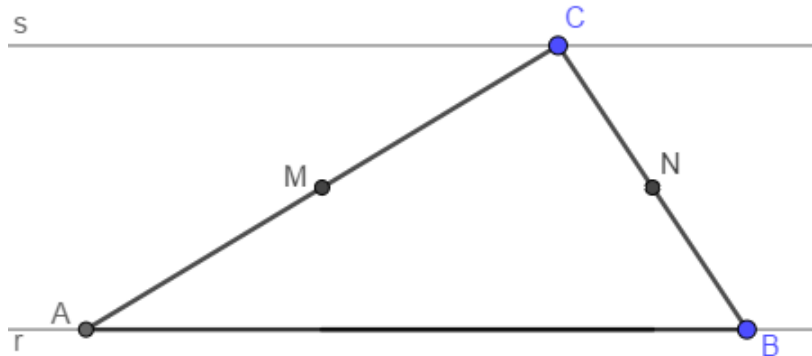


Figura 3.30: Obtendo um retângulo equivalente ao triângulo ABC .

4. Trace as retas t e v perpendiculares a r , com t contendo o ponto M e v contendo N ;
5. Marque os pontos P e Q na interseção de r com t e v , respectivamente;

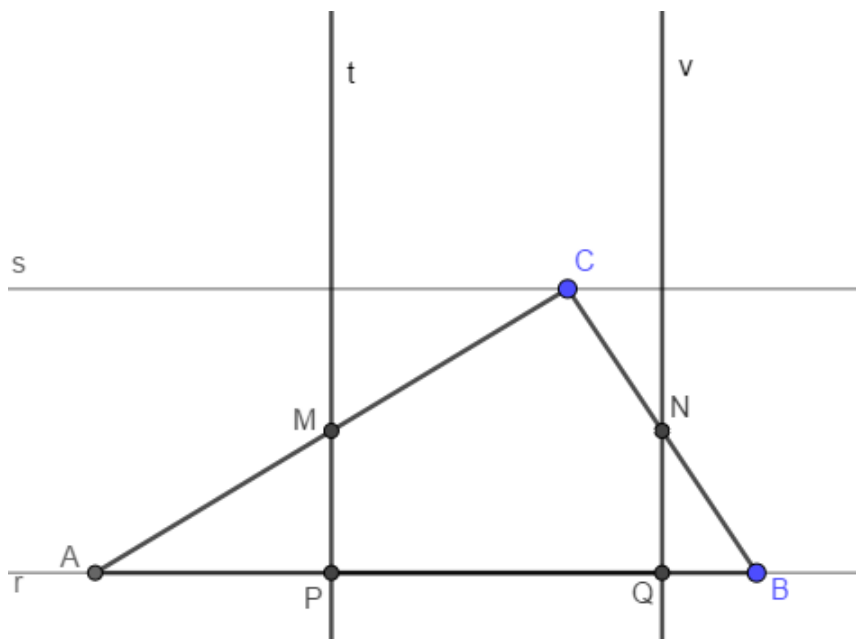


Figura 3.31: Um dos lados do retângulo equivalente ao triângulo ABC foi obtido.

6. Marque os pontos R e S na interseção de s com v e t , respectivamente;
7. Repita a construção **3.2.1** para obter o lado do quadrado de área equivalente ao retângulo $PQRS$.

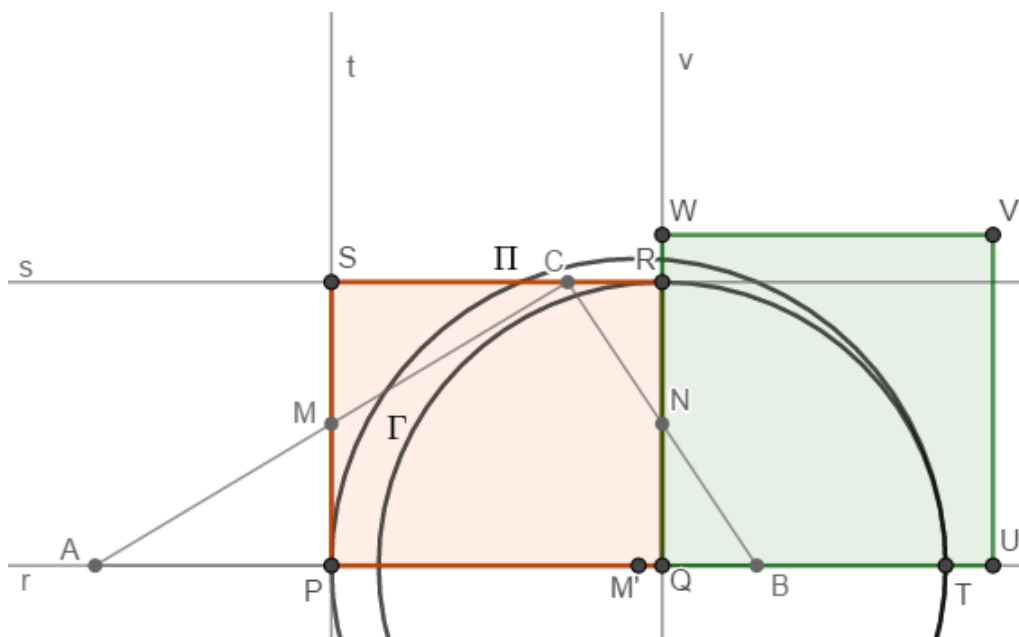


Figura 3.32: Quadrado $QUVW$ equivalente ao triângulo ABC .

Até o presente momento, sabemos como fazer a quadratura de quadriláteros especiais e triângulos, mas como é que os gregos quadravam um quadrilátero qualquer? e um polígono de n lados? A resposta surge a partir do conceito de área do triângulo. A seguinte fórmula de cálculo da área do triângulo $\frac{b \cdot h}{2}$, conhecida pelos gregos, onde b é o comprimento de um dos lados do triângulo e h a altura relativa a esse lado, nos diz muita coisa.

Dado um triângulo ABC de base $b = \overline{AB}$ e altura h relativa a esse lado, seja $r \parallel \overline{AB}$, qualquer outro triângulo que compartilhe mesma base e cujo terceiro vértice pertença a r , possuirá mesma área do triângulo ABC , veja a figura 3.33.

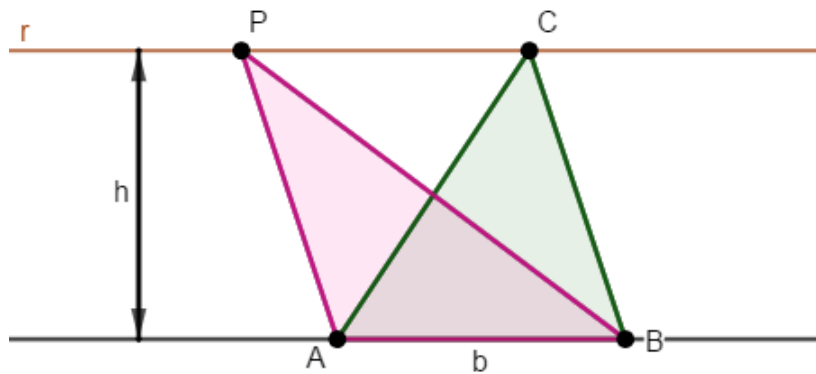


Figura 3.33: Triângulos equivalentes.

A figura acima deixa claro que ao marcar qualquer ponto P pertencente a reta $r \parallel \overline{AB}$, resultará em um novo triângulo ABP equivalente ao ABC dado inicialmente.

Com isso, estamos aptos a realizar a quadratura de um quadrilátero qualquer, ou até mesmo de um n -ágono qualquer. Vejamos a seguir como quadrar um quadrilátero qualquer, depois um pentágono e, em seguida, generalizaremos a ideia para um polígono qualquer.

3.2.6 Quadratura do Quadrilátero

Para essa quadratura precisamos transformar o quadrilátero em um triângulo de área equivalente à área do quadrilátero.

Dado um quadrilátero $ABCD$, obtenha um triângulo de área equivalente.

1. Trace a reta r que contém \overline{AB} ;
2. Trace a diagonal \overline{BD} , e construa a reta $s \parallel \overline{BD}$ contendo o ponto C ;

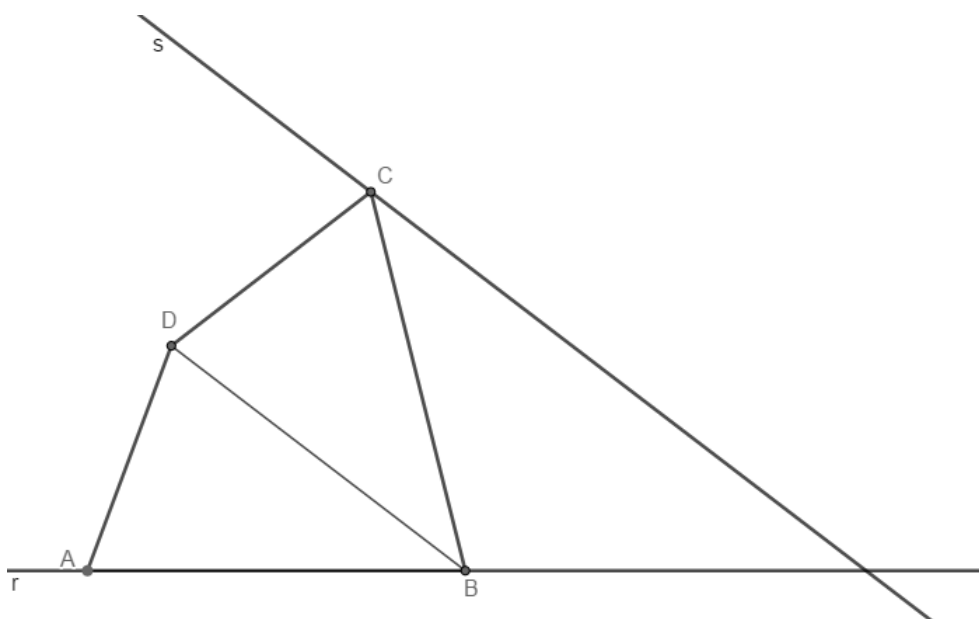


Figura 3.34: Obtendo um triângulo equivalente ao quadrilátero $ABCD$.

3. Marque C' na intersecção de r com s ;
4. Trace o segmento $\overline{DC'}$;
5. O triângulo $AC'D$ é equivalente ao quadrilátero $ABCD$. Repita a construção

3.2.5.

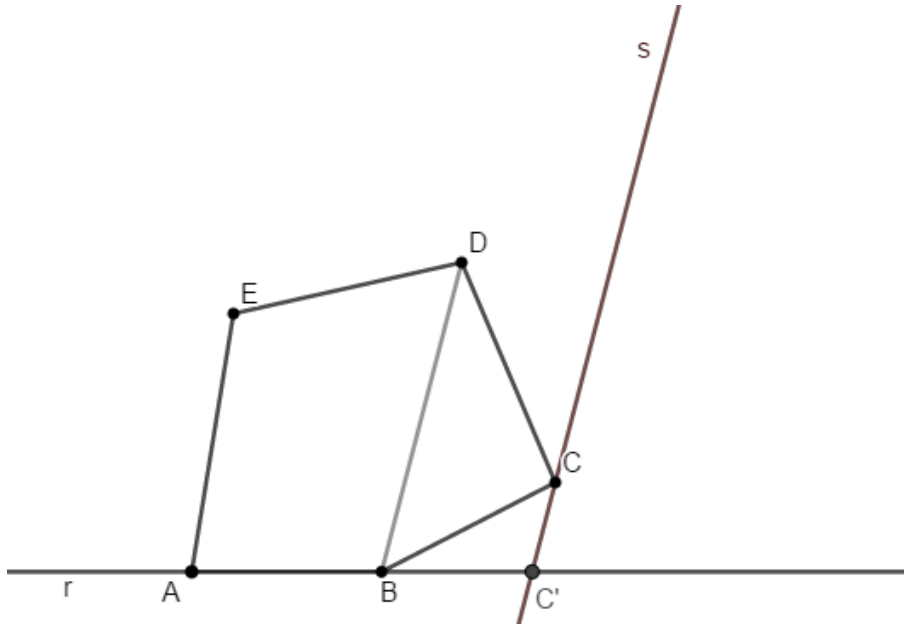


Figura 3.36: Obtendo um quadrilátero equivalente ao pentágono $ABCDE$.

4. O quadrilátero $AC'DE$ é equivalente ao pentágono $ABCDE$. Agora repita a construção 3.2.6 para o quadrilátero $AC'DE$;

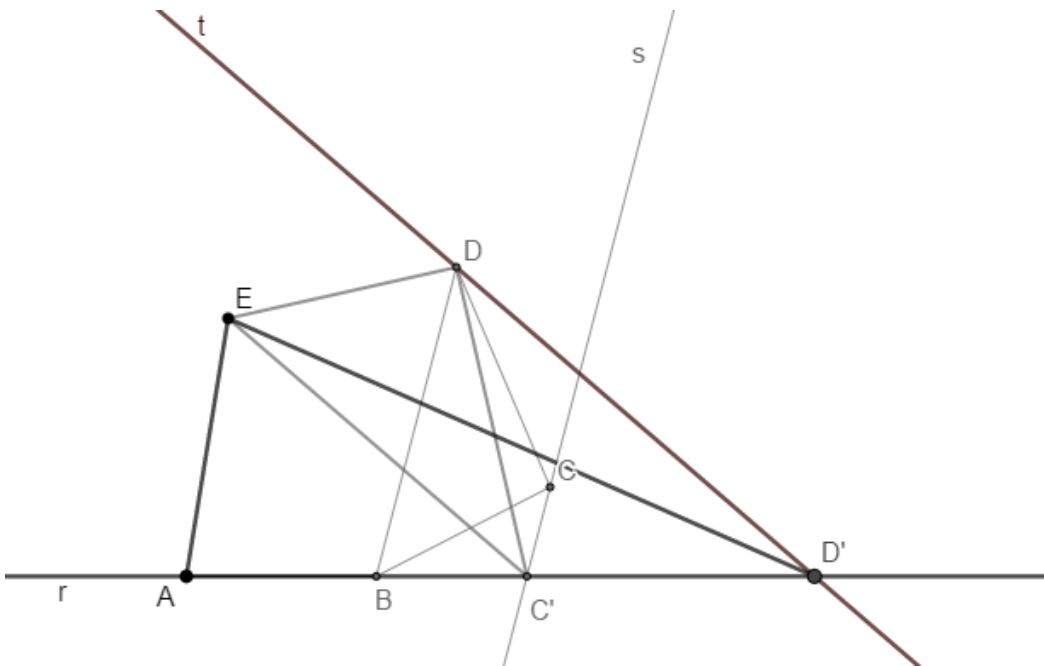


Figura 3.37: Obtendo um triângulo equivalente ao quadrilátero $AC'DE$.

5. O triângulo $AD'E$ é equivalente ao quadrilátero $AC'DE$, que por sua vez é equivalente ao pentágono $ABCDE$. Repita a construção 3.2.5.

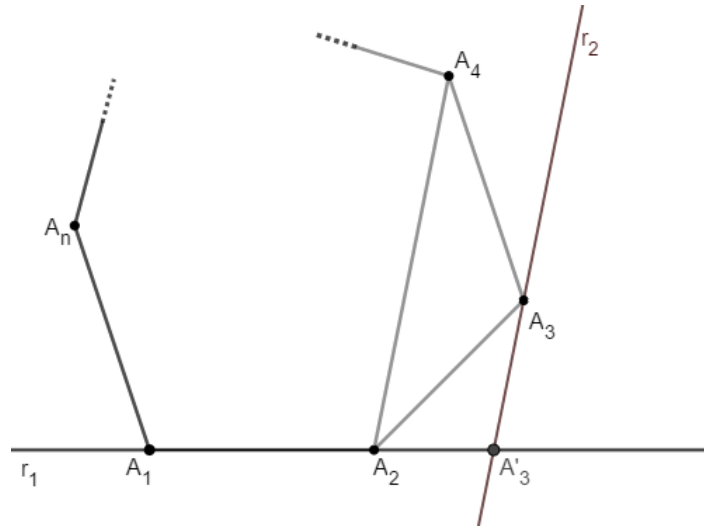


Figura 3.39: Gerando o $(n - 1)$ -ágono equivalente ao n -ágono inicial.

4. O polígono $A_1A'_3 \dots A_n$ é equivalente ao $A_1A_2 \dots A_n$ e possui $n - 1$ lados. Agora repita $n - 4$ vezes e obterá o triângulo $A_1A'_{n-1}A_n$;
5. O triângulo $A_1A'_{n-1}A_n$ é equivalente ao n -ágono inicial. Agora basta repetir a construção **3.2.5**.

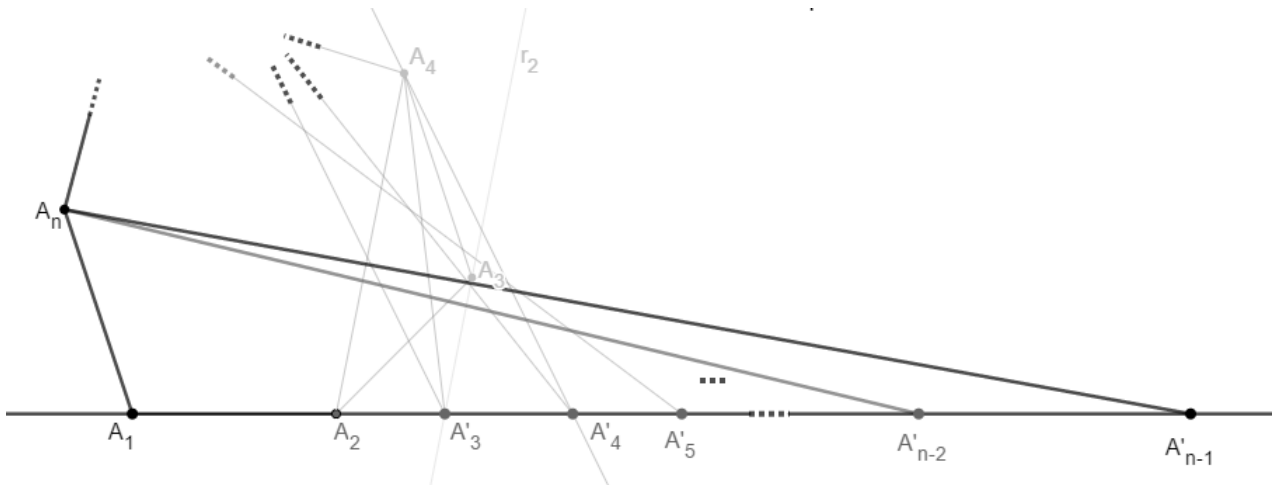


Figura 3.40: Triângulo $A_1A'_{n-2}A_n$ equivalente ao n -ágono inicial.

Diante de todas essas construções que já faziam parte dos estudos da geometria grega, é possível imaginar que, pelo caráter filosófico que os gregos deram à matemática, tenha surgido no seu meio a discussão acerca da quadratura do

círculo, isto é, dado um círculo, procura-se um quadrado de área exatamente igual à do círculo. De fato, Boyer (1974, p. 48) afirma em seu livro, História da Matemática, que há diversos registros acerca do problema da quadratura incluindo o que conta Plutarco, de que “enquanto Anaxágoras esteve preso, ocupou-se em uma tentativa de quadrar o círculo”, e isso mostra que o surgimento desse problema data desde a época de Anaxágoras (431 a.C.), quase dois séculos e meio atrás.

Adiante, Boyer comenta mais detalhes acerca das tentativas de quadrar um círculo. Dessa vez, parte da obra perdida de Hipócrates onde há menções da quadratura de lunas. Lunas são figuras limitadas por dois arcos de circunferência de raios diferentes. Hipócrates foi capaz de deduzir a quadratura rigorosa de uma figura curvilínea que se tem notícia, a quadratura de um semicírculo circunscrito a um triângulo isósceles retângulo cuja hipotenusa era o diâmetro do semicírculo, representado na figura 3.41.

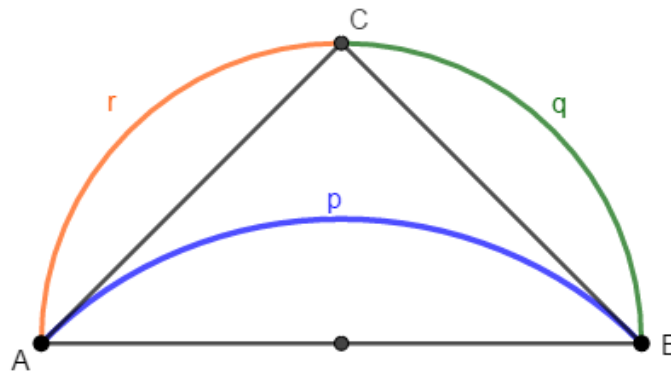


Figura 3.41: Quadratura de lua de Hipócrates para um triângulo retângulo isósceles.

Nota-se uma semelhança com a generalização do Teorema de Pitágoras.

Hipócrates também deu mais uma contribuição a esse problema ao quadrar lunas baseadas num trapézio isósceles inscrito em um semicírculo, donde seus lados menores eram todos iguais e o quadrado da base era igual a soma dos quadrados dos lados menores. Veja a figura 3.42.

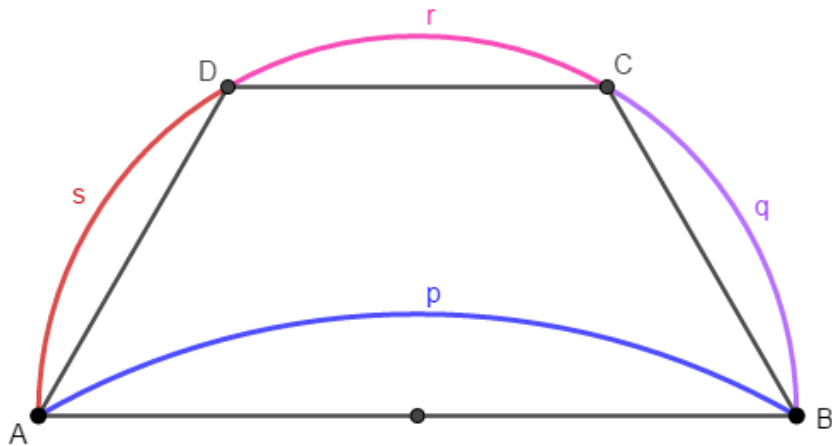


Figura 3.42: Quadratura de lua de Hipócrates para um trapézio isósceles.

A contribuição das quadraturas de lunas do Hipócrates foi muito além de criar a esperança de um dia se quadrar um círculo, também mostrou que o nível da matemática que era trabalhada naquela época, e estamos falando do século VI a.C., era muito sofisticada. Os atenienses mostraram domínio na ideia de tratar transformações de áreas em proporções, vimos isso no cálculo da média geométrica de dois segmentos, em que apenas com a régua e o compasso é possível obter a partir de duas medidas conhecidas a e b , uma terceira x , tal que $a : x = x : b$. Acerca disso, Boyer (1974, p. 53) comenta:

“Era natural, pois, que tentassem generalizar a questão inserindo dois meios entre duas grandezas dadas a e b . Isto é, dados dois segmentos a e b , esperavam construir dois outros x e y , tais que $a : x = x : y = y : b$. Diz-se que Hipócrates percebeu que esse problema contém o da duplicação do cubo; pois se $b = 2a$, as proporções, por eliminação de y , levam à conclusão que $x^3 = 2a^3$ ”

Ainda assim, vários séculos se passaram e esses problemas ficaram sem solução, não pela falta de tentativa, mas sim, pela abordagem dada a eles, focada apenas em encontrar a solução acreditando que ela existia, com suspeitas de que fossem impossíveis, porém não se buscou uma forma de mostrar sua impossibilidade durante

séculos, talvez pela falta de conhecimentos algébricos ou da ainda inexistente Geometria Analítica. Assim sendo, foi necessário que a Matemática evoluísse ao ponto de converter construções geométricas em operações algébricas e isso, é claro, passando por um longo processo de amadurecimento do pensamento matemático.

Capítulo 4

Construções possíveis e impossíveis

4.1 Introdução

Os gregos antigos dedicaram muitos esforços para elaborar várias construções geométricas muitas vezes impondo certas restrições aos equipamentos permitidos para realizá-las. A restrição mais conhecida é aquela que os únicos equipamentos permitidos são o compasso e uma régua sem marcações (há outras restrições, como por exemplo, o uso apenas do compasso ou de apenas uma régua e um círculo de raio fixo, entre outras). Com o uso apenas de uma compasso e uma régua, muitas construções foram descobertas pelos gregos tais como traçado de uma perpendicular a uma reta dada, traçado da bissetriz de um ângulo, a construção de certos polígonos regulares, entre tantas outras. Todavia, três problemas deste período clássico permaneceram sem solução durante vários séculos, são eles:

- (a) **A trisseccção do ângulo:** dividir um ângulo em 3 partes utilizando somente régua e compasso;
- (b) **A duplicação do cubo:** dado um segmento que é a aresta de um cubo, obter com régua e compasso um segmento cujo comprimento seja a aresta de

um cubo cujo volume é o dobro do primeiro cubo;

- (c) **A quadratura do círculo:** dado um círculo, obter com régua e compasso um quadrado de mesma área.

Apesar de todos os esforços de séculos de conhecimento acumulados, a constatação de que essas três construções geométricas são impossíveis de serem realizadas com a restrição de só podermos usar régua (sem marcações) e compasso, só veio à tona no século *XIX*, com o desenvolvimento da Álgebra Abstrata, mais especificamente com a Teoria dos Corpos. Neste capítulo faremos uma breve incursão neste tema, mostrando os principais resultados que levam à demonstração da impossibilidade das três construções geométricas acima citadas.

Para isso, vamos introduzir a noção de número construtível e o corpo dos números construtíveis.

4.1.1 Números construtíveis

Os números reais podem ser representados por pontos da chamada *reta real*. No caso dos números reais positivos, fixada uma unidade de medida, cada um deles representa a medida do segmento cujas extremidades são a origem e o ponto que representa esse número. Já no caso dos números reais negativos, a interpretação é análoga, se considerarmos os seus módulos. Já que os números reais são representados geometricamente por pontos sobre a reta real, é natural nos perguntarmos quais desses pontos podem ser determinados com o uso de uma régua e um compasso. Por outro lado, um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, pode ser identificado com o par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nesse contexto, cabe a mesma pergunta quais desses pontos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ podem ser determinados com régua e compasso?

Definição 4.1.1 (Números reais construtíveis). *Um número $a \in \mathbb{R}$ é dito **construtível** se $|a|$ é o comprimento de um segmento que pode ser obtido a partir de um segmento de tamanho 1 (unidade de medida) utilizando apenas construções geométricas com régua e compasso. Denotaremos o conjunto dos números construtíveis por \mathcal{C}*

Nessa terminologia, os três problemas gregos de construção com régua e compasso que citamos no início deste capítulo podem ser reformulados em termos de números construtíveis. Por exemplo, com relação ao problema de trissecção de um ângulo de 60° pode ser trissectado com régua e compasso se, e somente se, $\cos 20^\circ$ é construtível, já que construir um ângulo de 20° com régua e compasso é o mesmo que construir um triângulo retângulo de hipotenusa 1 e ângulos agudos de 20° e 70° . Por outro lado, tomando a aresta do cubo e o raio da circunferência dos problemas (b) e (c) como referência (unidade de comprimento) o problema de duplicação do cubo e da quadratura do círculo têm solução se, e somente se, os números $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt{\pi}$ forem construtíveis. Para mostrarmos que nenhum desses três problemas têm solução, o primeiro passo é estabelecermos alguns conceitos algébricos para posteriormente apresentarmos o Teorema de Gaus Wantzel que esclarece definitivamente essas e outras questões.

Diante do exposto, neste capítulo iremos analisar quais tipos de números podemos construir com uma régua e um compasso.

Está claro até o presente momento que, como já foi comentado e tratado nos capítulos anteriores, a régua que está se trabalhando aqui é a não graduada, portanto, os objetos que essa ferramenta pode construir se limitam a segmentos de reta. Já o compasso pode transferir comprimentos de segmentos, traçar circunferências e arcos. Podemos compreender também que os pontos que podemos traçar com

esses instrumentos serão obtidos por meio das interseções dos objetos geométricos criados por eles, no caso, interseção de dois segmentos, de um segmento e uma circunferência e, por fim, interseção entre duas circunferências. Veja a figura 4.1.

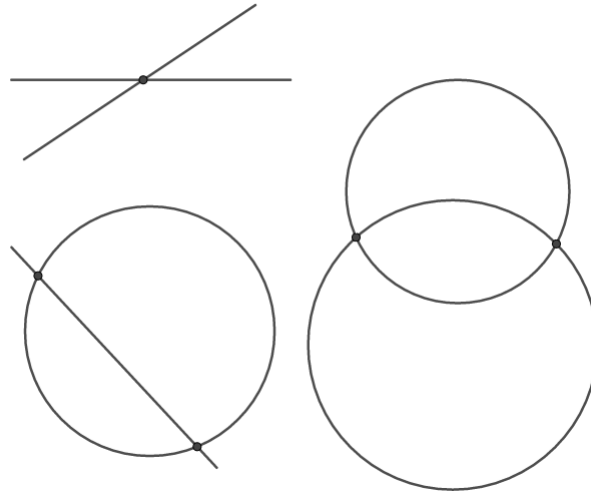


Figura 4.1: Pontos obtidos por meio da intersecção de dois objetos geométricos.

Agora podemos verificar que tipo de operação matemática está associada à geometria e às construções com régua e compasso.

4.2 Operações com Régua e Compasso

A princípio podemos verificar que as últimas construções do capítulo 2 tiveram um caráter mais numérico, embora, na geometria, os números sejam os segmentos, podemos realizar algumas operações desses segmentos.

Para cada construção a seguir, suponha já estabelecido o segmento de comprimento unitário, logo, a medida dos segmentos está dada em relação a esta unidade.

Vejamos como trabalhar as quatro operações básicas com segmentos de reta:

4.2.1 Adição

Dados dois segmentos de reta de comprimentos a e b , suponha $a > b$, obter o segmento $a + b$:

1. Trace a reta r e marque o ponto A sobre ela;
2. Com centro do compasso em A e raio a , trace um arco, marcando o ponto B na interseção com r ;

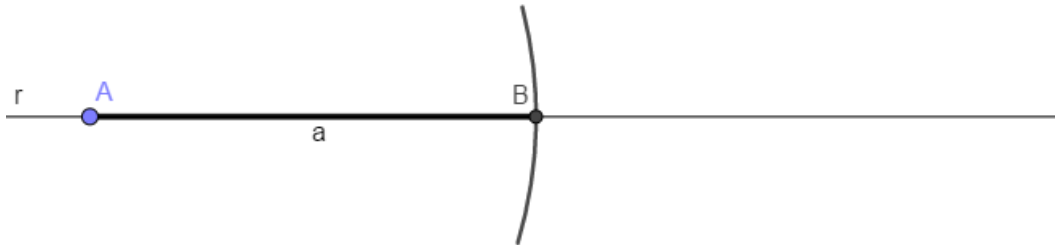


Figura 4.2: Transferindo o comprimento a para uma reta.

3. Com centro em B e raio b , trace um arco marcando C na interseção com r , de modo que $C \notin \overline{AB}$;
4. O segmento \overline{AC} mede $a + b$. Eis a soma dos segmentos a e b ;

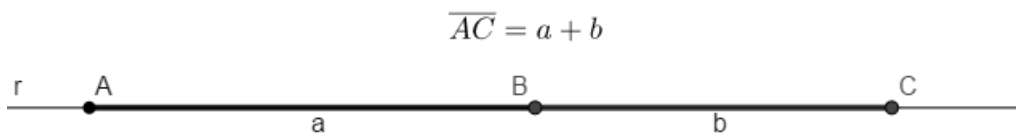


Figura 4.3: Obtendo o segmento $a + b$.

4.2.2 Subtração

Dados dois segmentos de reta, de comprimento a e b , com $a > b$, obter o segmento $a - b$:

1. Trace a reta r e marque o ponto A sobre ela;
2. Com centro do compasso em A e raio a , trace um arco marcando o ponto B na interseção com r ;



Figura 4.4: Transferindo o comprimento a para uma reta.

3. Com centro em B e raio b , trace um arco marcando C na interseção com \overline{AB} ;
4. O segmento \overline{AC} mede $a - b$. Eis a subtração dos segmentos a e b .

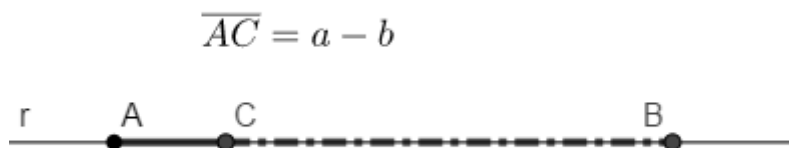


Figura 4.5: Obtendo o segmento $a - b$.

4.2.3 Multiplicação

Dados dois segmentos de reta de comprimentos a e b , e o segmento unitário, obter o segmento $a \cdot b$:

1. Trace a reta r e marque o ponto A sobre ela;
2. Com centro em A e raio 1, trace um arco que intersecte r no ponto B ;
3. Com centro em B e raio a , trace um arco que intersecte a semirreta S_{AB} , marcando C na intersecção;

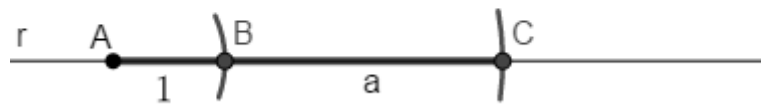


Figura 4.6: Traçando o segmento $1 + a$.

4. Trace a reta s passando por A , formando um ângulo agudo com a reta r ;
5. Com centro em A e raio b , trace um arco que intersecte s , marcando D na intersecção;

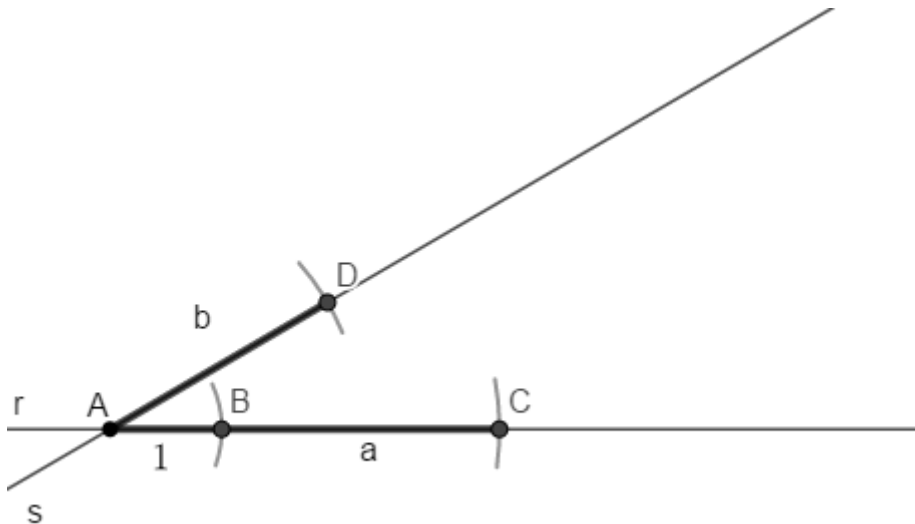


Figura 4.7: Reta auxiliar s usada para gerar o segmento de comprimento $acdotb$.

6. Trace o segmento \overline{BD} e faça a reta $t \parallel \overline{BD}$ com $C \in t$. Marque E na intersecção de s com t ;

7. Trace o segmento \overline{DE} . Este mede $a \cdot b$. Eis a multiplicação dos segmentos a e b .

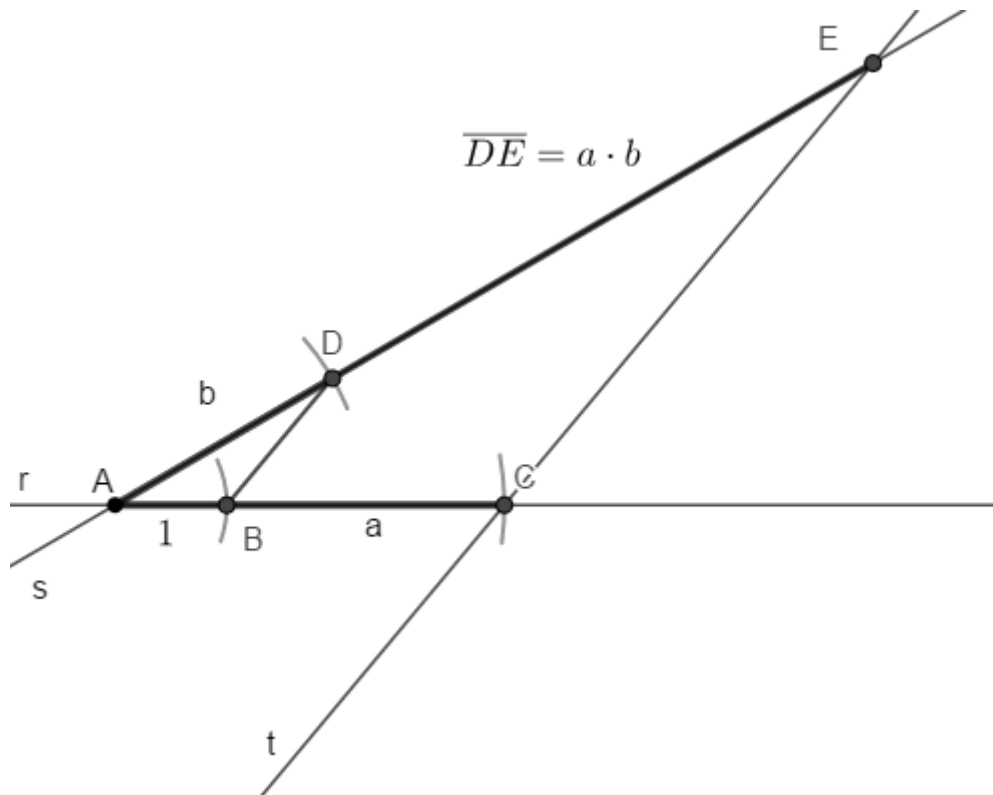


Figura 4.8: Obtendo o segmento $a \cdot b$.

4.2.4 Divisão

Dados dois segmentos de reta, de comprimento a e b , e o segmento unitário, obter o segmento $\frac{a}{b}$:

1. Trace a reta r e marque o ponto A sobre ela;
2. Com centro em A e raio b , trace um arco marcando o ponto B na interseção com r ;
3. Com centro em B e raio 1 , trace um arco marcando C na interseção com r , de modo que $C \notin S_{BA}$;



Figura 4.9: Obtendo o segmento $b + 1$.

4. Trace a reta s passando por A , formando um ângulo agudo com a reta r ;
5. Com centro em A e raio a , trace um arco marcando D na interseção com s ;

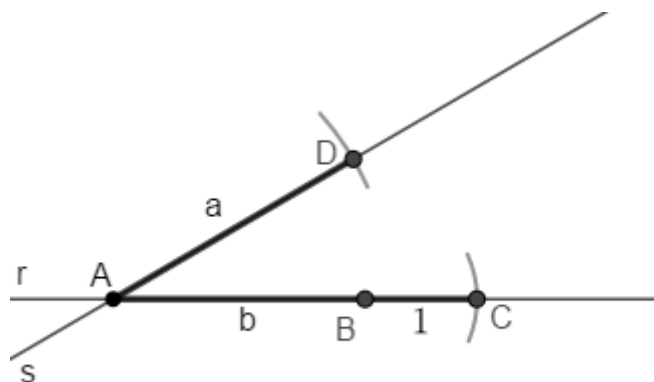


Figura 4.10: Reta auxiliar s usada para gerar o segmento de comprimento $\frac{a}{b}$.

6. Trace o segmento \overline{BD} e faça a reta $t \parallel \overline{BD}$ com $C \in t$. Marque E na interseção de s com t ;
7. O segmento \overline{DE} mede $\frac{a}{b}$. Eis a divisão do segmento a por b .

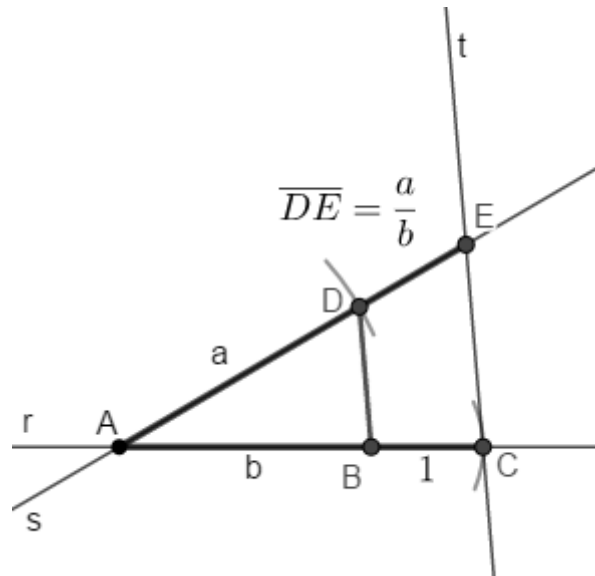


Figura 4.11: Obtendo o segmento $\frac{a}{b}$.

Outra importante operação decorrente da divisão é a inversão de um segmento, isto é, dado um segmento de comprimento a , é possível construir o segmento de comprimento $\frac{1}{a}$, utilizando o passo a passo da construção anterior, basta observar que se $a = 1$ o segmento \overline{DE} será o inverso de b . Além dessa forma de gerar o segmento inverso, será apresentada mais uma maneira a seguir:

4.2.5 Inversão de um Segmento

Dados um segmentos de reta de comprimento a e o segmento unitário, com $a > 1$, obter o segmento $\frac{1}{a}$:

1. Trace a reta r e marque o ponto A sobre ela;
2. Com centro em A e raio a , trace um arco marcando o ponto B na interseção com r ;
3. Com centro em A e raio 1, trace um arco marcando C na interseção com \overline{AB} ;
4. Construa uma semicircunferência Γ de raio $\frac{a}{2}$, com diâmetro \overline{AB} ;

5. Com centro em A e raio 1, trace um arco marcando D na interseção com Γ ;
6. Trace $s \perp r$ passando por D , marque E , na interseção de s com \overline{AB} . O segmento \overline{AE} mede $\frac{1}{a}$. Eis a inversão do segmento a .

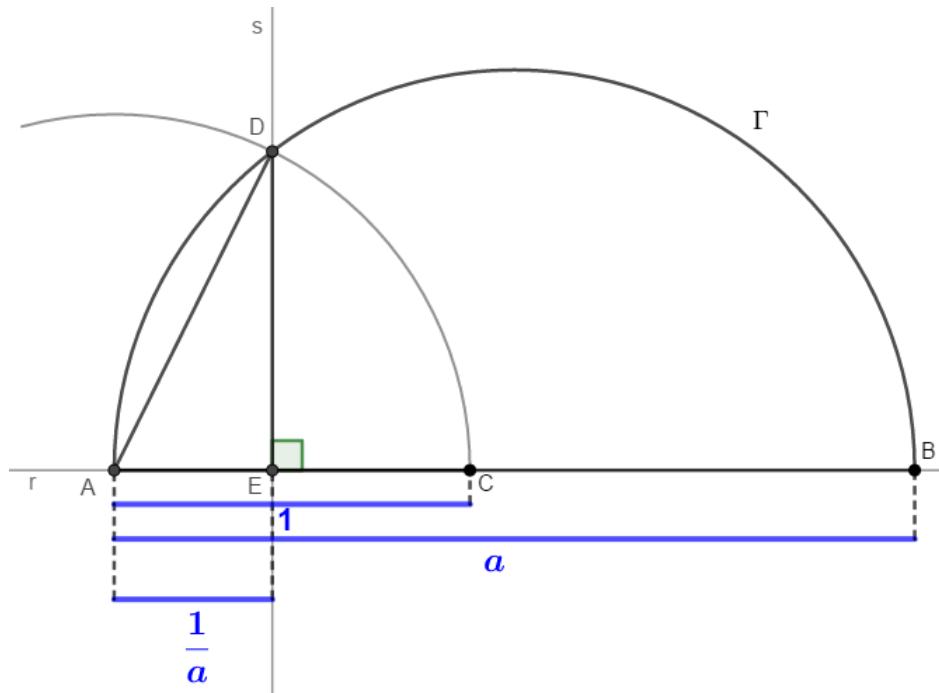


Figura 4.12: Obtenção do segmento inverso $\frac{1}{a}$.

Além dessas operações é possível calcular a raiz quadrada de um segmento dado. Basta conhecer a unidade e realizar a construção da média geométrica, explicada no capítulo 2. Veja o passo a passo a seguir:

4.2.6 Raiz Quadrada

Dados os segmentos de comprimento a e o unitário, obter um segmento de comprimento \sqrt{a} .

1. Trace uma reta r e marque sobre ela o ponto A ;

2. Com centro em A e raio a , faça um arco marcando do o ponto B na intersecção com r ;
3. Com centro em B e raio 1, faça um arco marcando o ponto C na intersecção, de modo que C não pertença a semirreta S_{BA} ;

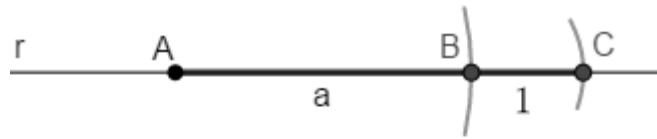


Figura 4.13: Obtendo o segmento $a + 1$.

4. Obtenha o ponto médio M de \overline{AC} , em seguida, com centro em M e raio \overline{AM} , trace a circunferência Φ ;
5. Faça uma reta perpendicular a \overline{AC} passando por B , intersectando Φ nos pontos F e G ;

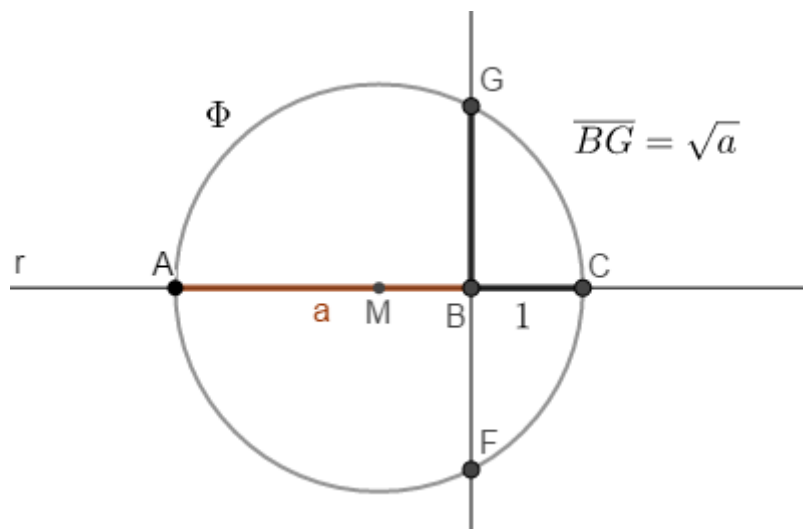


Figura 4.14: Obtendo o segmento \sqrt{a} .

\overline{BG} (ou \overline{BF}) é a média geométrica dos segmentos de comprimento a e 1 , dados. Logo, $\overline{BF} = \sqrt{a \cdot 1} = \sqrt{a}$.

Tendo adquirido conhecimentos sobre quais operações podem ser realizadas com as ferramentas básicas de construções geométricas, podemos agora nos aprofundar nas noções algébricas que encerraram as buscas de uma solução para os problemas clássicos da geometria via régua e compasso.

4.3 Alguns conceitos algébricos

Na Álgebra Abstrata estuda-se vários tipos de estruturas algébricas tais como grupos, anéis, corpos e módulos. Os corpos são especialmente importantes para um entendimento completo dos números construtíveis e portanto para o esclarecimento definitivo da impossibilidade de resolução dos três problemas clássicos de construções dos gregos. Nesta seção compilaremos uma série de conceitos e resultados clássicos da Álgebra que são necessários para um completo entendimento de quais construções geométricas podem ou não efetivamente serem realizadas com régua e compasso. Apresentaremos muitos resultados sem exibir as suas devidas demonstrações (mas sempre citaremos onde encontrá-las), por dois motivos; o primeiro é que muitas delas são bem técnicas e necessitam de uma longa discussão de conceitos tipicamente de Álgebra Abstrata (que não é o nosso objetivo neste trabalho) e segundo, isso nos desviaria bastante do nosso enfoque geométrico. Apesar dessas dificuldades técnicas, achamos plenamente possível absorver e usar o essencial desse maquinário algébrico para esclarecer o antigo problema de saber o que podemos e o que não podemos construir com régua e compasso. Caminhando nessa direção, iniciemos lembrando a definição de algébrica de Corpo.

Definição 4.3.1 (Corpo). *Um corpo é um estrutura algébrica $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ constituída de três ingredientes: um conjunto não vazio \mathbb{K} , e duas operações $+: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ (adição) e $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ (multiplicação) que gozam das seguintes propriedades:*

$$(A1) \quad a + b = b + a, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}.$$

$$(A2) \quad (a + b) + c = a + (b + c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}.$$

$$(A3) \quad \text{Existe } 0 \in \mathbb{K} \text{ tal que } a + 0 = a \quad \forall a, b \in \mathbb{K}.$$

$$(A4) \quad \text{Para todo } a \in \mathbb{K}, \text{ existe } -a \in \mathbb{K} \text{ tal que } a + (-a) = 0.$$

$$(M1) \quad a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}.$$

$$(M2) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}.$$

$$(M3) \quad \text{Existe } 1 \in \mathbb{K} \text{ tal que } a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{K}.$$

$$(M4) \quad \text{Para todo } a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \text{ existe } a^{-1} \in \mathbb{K} \text{ tal que } a \cdot a^{-1} = 1.$$

Além disso, a multiplicação é distributiva em relação a adição, isto é,

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}.$$

Por exemplo, o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} , o conjunto dos números reais \mathbb{R} e o conjunto dos números complexos \mathbb{C} , munidos das operações usuais de adição e multiplicação são corpos. Além disso, \mathbb{Q} é o menor corpo (subcorpo) contido em \mathbb{C} , no sentido de que qualquer corpo $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ contém \mathbb{Q} .

Teorema 2. *O conjunto dos números construtíveis $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$, munido as operações de adição e multiplicação usuais é um corpo. Além disso, $a \in \mathcal{C} \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathcal{C}$.*

Demonstração: Pela própria definição de número real construtível tem-se que $a \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |a| \in \mathcal{C}$. Dessa forma basta mostrar que dados $a, b \in \mathcal{C}$ teremos que

$a \pm b, a \cdot b, \frac{a}{b} \in \mathcal{C}$, com $a \geq 0$ e $b > 0$. Diante do que foi exposto no início deste capítulo na secção operações com Régua e Compasso, a partir de uma segmento de tamanho 1 podemos construir todos os segmentos de comprimentos inteiros e, portanto, racionais. Portanto \mathcal{C} é um subcorpo de \mathbb{R} que contém \mathbb{Q} . Além disso, dado $a \in \mathcal{C}$, com $a > 0$, temos que $\sqrt{a} \in \mathcal{C}$, o que demonstra o teorema.

Agora vamos introduzir mais algumas definições e resultados que são comumente estudados num curso de Teoria dos Corpos, mas que são essenciais para que possamos atingir a explicação para a insolubilidade dos três problemas clássicos de construções geométricas que enunciamos no início deste capítulo.

Definição 4.3.2 (Extensão de corpos). *Sejam \mathbb{K} e \mathbb{L} corpos tais que $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Nesse caso, dizemos que o corpo \mathbb{L} é uma **extensão** do corpo \mathbb{K} .*

Por exemplo, como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tem-se que \mathbb{R} é uma extensão de \mathbb{Q} e que \mathbb{C} é uma extensão tanto de \mathbb{Q} quando de \mathbb{R} , já \mathbb{R} é uma extensão de \mathbb{Q} .

Na Álgebra Linear a noção de espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} é estabelecida como sendo uma tripla $(V, +, \cdot)$ onde V é um conjunto não vazio munido de duas operações, $+ : V \times V \rightarrow V, (u, v) \mapsto u + v$ e $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ são as chamadas operações de adição e multiplicação por escalar que devem gozar das seguintes propriedades:

$$(A1) \quad u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V.$$

$$(A2) \quad (u + v) + w = u + (v + w), \quad \forall u, v, w \in \mathbb{K}.$$

$$(A3) \quad \text{Existe } 0 \in V \text{ tal que } u + 0 = u \quad \forall u \in V.$$

$$(A4) \quad \text{Para todo } u \in V, \text{ existe } -u \in V \text{ tal que } u + (-u) = 0.$$

$$(M1) \quad \lambda \cdot (\gamma \cdot u) = (\lambda\gamma) \cdot u, \quad \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{K}, u \in V.$$

$$(M2) \quad 1 \cdot u = u, \quad \forall u \in V.$$

$$(M3) \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, u, v \in V.$$

$$(M4) \quad (\lambda + \gamma) \cdot u = \lambda \cdot u + \gamma \cdot u, \quad \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{K}, u \in V.$$

Cumpridas todas essas condições, dizemos que V é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} ou ainda V é um \mathbb{K} -espaço vetorial e que os elementos de V são chamados de vetores. Da Álgebra Linear, sabe-se que todo espaço vetorial possui uma base, isto é, existe um subconjunto $\beta \subset V$ tal que todo elemento de V pode ser escrito de modo único como uma combinação linear dos vetores do conjunto β . Além disso, quando β é um conjunto finito, diz-se que V é um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita e a sua dimensão é a quantidade de vetores presentes numa das suas bases (todas as bases de um espaço vetorial possuem a mesma quantidade de elementos). Como de costume na literatura do assunto, representaremos a dimensão do \mathbb{K} -espaço vetorial V por $\dim_{\mathbb{K}} V$.

Diante do exposto, se $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ é uma extensão do corpo \mathbb{K} , podemos olhar para \mathbb{L} com um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} .

Definição 4.3.3 (Grau de uma extensão). *Quando $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ é uma extensão do corpo \mathbb{K} , chamamos de **grau da extensão** a dimensão de \mathbb{L} visto como um \mathbb{K} -espaço vetorial, isto é, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$. Além disso, a extensão é **finita** quando $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} < \infty$ e é **infinita** caso contrário.*

Dois outros conceitos que são importantes para o tratamento algébrico dos problemas de construção geométrica são **elemento algébrico** e **elemento transcendente**. É exatamente isso que estabeleceremos a seguir.

Definição 4.3.4. *Dada uma extensão de corpos $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$, diz-se que um elemento $a \in \mathbb{L}$ é algébrico sobre \mathbb{K} quando existe um polinômio não nulo p , com coeficientes*

em \mathbb{K} tal que $p(a) = 0$. No caso em que tal polinômio não existe, diz-se que a é **transcendente** sobre \mathbb{K} .

Nesse contexto, considerando a extensão de corpos $\mathbb{C} \supset \mathbb{Q}$, diz-se que $\alpha \in \mathbb{C}$ é um **número algébrico** quando existe um polinômio não nulo p , com coeficientes em \mathbb{Q} tal que $p(\alpha) = 0$, caso contrário, diz-se que α é transcendente. Por exemplo, o número $\sqrt[3]{2}$ é algébrico, visto que é uma raiz do polinômio (de coeficientes racionais) $p(x) = x^3 - 2$. Por outro lado, existem números transcendententes. Em 1851, o matemático francês Joseph Liouville deu o primeiro exemplo de um número transcendente, hoje conhecido como **Número de Liouville** :

$$L = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} = 0,11001\dots$$

existe uma prova desse fato em [22].

Em 1873, Charles Hermite (1822 – 1901) provou que e (número de Euler) é transcendente (vide [21]). Aproximadamente uma década após essa célebre constatação, o alemão Ferdinand Von Lindemann (1852-1939) provou que e^α é transcendente, sempre que α é algébrico não nulo. Com isso Lindemann publicou uma bela demonstração que π é transcendente (vide [21]).

Definição 4.3.5 (Polinômio minimal). *Dada uma extensão de corpos $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ e $\alpha \in \mathbb{L}$ um elemento algébrico sobre \mathbb{K} , chamamos de **polinômio minimal de α** , o polinômio mônico não nulo com coeficientes em \mathbb{K} de menor grau possível tal que $p(\alpha) = 0$.*

Não vamos exibir aqui a demonstração da existência e a unicidade do polinômio minimal, mas essa prova pode ser encontrada em [7].

Observação 4.3.1. *Dada uma extensão de corpos $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ e $\alpha \in \mathbb{L}$ um elemento*

algébrico sobre \mathbb{K} , quando o polinômio minimal de α tem grau n , diz-se que α é algébrico de grau n sobre \mathbb{K} .

Agora vamos registrar aqui mais um conceito algébrico que será necessário para atingir o nosso propósito de provar a insolubilidade dos três problemas clássicos de construção geométrica dos gregos.

Definição 4.3.6 (Grau de uma extensão). *Dada uma extensão de corpos $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$, chamamos de **grau da extensão** e representamos por $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ a dimensão de \mathbb{L} , visto como um \mathbb{K} -espaço vetorial, ou seja, $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$.*

Proposição 1. *Sejam $\mathbb{M} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ extensões de corpos tais que $[\mathbb{M} : \mathbb{L}]$ e $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ são finitos, então $[\mathbb{M} : \mathbb{K}]$ é finito e além disso,*

$$[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}] \cdot [\mathbb{L} : \mathbb{K}].$$

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [7].

Teorema 3. *Dada uma extensão de corpos $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ e $\alpha \in \mathbb{L}$ um elemento algébrico sobre \mathbb{K} , então $\mathbb{K}[\alpha] := \{p(\alpha); p \text{ é um polinômio com coeficientes em } \mathbb{K}\}$ é um corpo que contém \mathbb{K} . Além disso, grau da extensão $\mathbb{K}[\alpha] \subset \mathbb{L}$ é igual ao grau do polinômio minimal de α , ou seja,*

$$[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] = \text{grau do polinômio minimal de } \alpha.$$

Agora apresentaremos o principal resultado desta secção. Este teorema oferece uma condição necessária e suficiente para que um número real seja construtível.

Teorema 4 (Critério de Construtibilidade). *Um número $a \in \mathbb{R}$ é construtível se, e somente se, existe uma torre de extensões de corpos*

$$\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{K}_n$$

com $a \in \mathbb{K}_n$ e $[\mathbb{K}_{i+1} : \mathbb{K}_i] = 2$ para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Em particular, se a é construtível, então $[\mathbb{Q}(a), \mathbb{Q}]$ é necessariamente uma potência de 2, o que equivale a dizer que a é um número construtível se, e somente se, é um número algébrico cujo polinômio minimal tem grau igual a uma potência de 2.

A demonstração dessa proposição também pode ser encontrada em [7].

Observação 4.3.2 (Números complexos construtíveis). *Dado um número complexo $z = a + bi$, podemos identificá-lo com o par de números reais (a, b) . Dessa forma, é possível localizar o afixo de z no plano complexo, se e somente se a e b (suas partes real e imaginária) são números construtíveis.*

Por fim, vamos apresentar mais dois resultados sobre irreduzibilidade de polinômios que serão úteis aos nossos propósitos neste trabalho.

Definição 4.3.7 (Polinômios irreduzíveis). *Seja $f(x)$ um polinômio não constante com coeficientes num corpo \mathbb{F} . Diz-se que $f(x)$ é **irreduzível** sobre o corpo \mathbb{F} , se $f(x)$ não pode ser escrito como um produto $g(x) \cdot h(x)$ de dois polinômios não constantes $g(x)$ e $h(x)$, com coeficientes no mesmo corpo \mathbb{F} e com grau menor que o grau de $f(x)$. No caso em que $f(x)$ não é irreduzível sobre o corpo \mathbb{F} , diz-se que $f(x)$ é **reduzível** sobre o corpo \mathbb{F} .*

A seguir apresentamos dois importantes resultados sobre irreduzibilidade de polinômios.

Proposição 2 (Critério de irreduzibilidade de Eisenstein). *Seja $p \in \mathbb{Z}$ um número primo. Suponha que $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ seja um polinômio com coeficientes inteiros. Se*

- $p \nmid a_n$;

- $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$;
- $p^2 \nmid a_0$.

então $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ é irredutível sobre \mathbb{Q} .

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [7].

Proposição 3 (Lema de Gauss). *Seja $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ seja um polinômio com coeficientes inteiros. Se $f(x)$ é irredutível sobre \mathbb{Z} , então $f(x)$ é irredutível sobre \mathbb{Q} .*

Depois desse apanhado de ideias e resultados sobre a Teoria dos corpos, enfim podemos enunciar um teorema que caracteriza os números construtíveis.

A demonstração desse resultado também pode ser encontrada em [7].

4.3.1 A insolubilidade dos três problemas Gregos clássicos de construções geométricas

Enfim, depois de introduzir todas essas ideias e resultados da Álgebra, estamos no ponto de apresentar o porquê da insolubilidade dos três problemas gregos clássicos de construções geométricas.

Proposição 4. *O número $\cos(20^\circ)$ não é construtível.*

Demonstração: De fato, da trigonometria básica, sabemos que:

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

tomando $x = 20^\circ$, segue que:

$$\cos(3 \cdot 20^\circ) = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ \Rightarrow \cos(60^\circ) = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ \Rightarrow 8 \cos^3 20^\circ - 6 \cos 20^\circ - 1 = 0.$$

Isso revela que $\cos 20^\circ$ é uma raiz do polinômio $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$. Mas esse polinômio é irredutível sobre \mathbb{Q} . De fato, pela Proposição (3), basta mostrar que esse polinômio é irredutível sobre \mathbb{Z} . Se p não fosse irredutível sobre \mathbb{Z} necessariamente teria um fator de grau 1 de uma das seguintes formas:

$$(8x \pm 1), (4x \pm 1), (2x \pm 1) \text{ ou } (x \pm 1).$$

Por outro lado, podemos verificar que nenhum dos números $\pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}$ ou ± 1 são raízes de p , o que revela que p não possui um fator do primeiro grau e portanto é irredutível sobre \mathbb{Z} . Isso nos permite concluir que o número $\cos 20^\circ$ é algébrico de grau 3. Assim, pelo Teorema (4), tem-se que $\cos 20^\circ$ por não ter grau igual a uma potência de 2.

Teorema 5. *Não é possível trissectar um ângulo qualquer com régua (não graduada) e compasso.*

Demonstração: Apesar de ser possível trissectar alguns ângulos com régua e compasso (por exemplo o ângulo de 90°) não é possível realizar esse procedimento com um ângulo qualquer. Por exemplo, não é possível trissectar com régua e compasso o ângulo cuja medida é 60° , uma vez que corresponderia a construir o número $\cos 20^\circ$. Mas, pela proposição anterior temos que $\cos 20^\circ$ não é construtível, revelando assim que o ângulo de medida 60° não pode ser trissectado com o uso de régua e compasso.

Proposição 5. *O número $\sqrt[3]{2}$ não é construtível.*

Vamos mostrar que o número $\sqrt[3]{2}$ é algébrico de grau 3 (que não é uma potência de 2), pelo Teorema (4), isso nos assegura que o número $\sqrt[3]{2}$ não é construtível.

De fato, o polinômio mônico $p(x) = x^3 - 2$ tem $\sqrt[3]{2}$ como raiz. Além disso, pelo critério de Eisenstein (2) usando o primo 2, tem-se que $p(x) = x^3 - 2$ é irredutível sobre \mathbb{Q} , o que revela que o número $\sqrt[3]{2}$ é algébrico de grau 3.

Teorema 6. *Dado um cubo não é possível, com régua e compasso, construir um cubo cujo volume seja o dobro do primeiro.*

Demonstração: Tomando uma aresta do primeiro cubo como unidade de medida, o seu volume seria $1^3 = 1$. Ora, como o segundo cubo tem o dobro do volume do primeiro, segue que o seu volume é 2. Supondo que uma aresta do segundo cubo tenha medida a , segue que $a^3 = 2$, ou seja, $a = \sqrt[3]{2}$. Diante do exposto, construir com régua e compasso um cubo com o dobro do volume de um cubo dado é equivalente a construir o número $\sqrt[3]{2}$, o que pela proposição anterior é impossível.

Proposição 6. *O número π não é construível.*

Demonstração: De fato, pelo Teorema (4), um número real é construtível se, e somente se, for algébrico de grau potência de 2. Por outro lado, sabemos que Lindemann provou que π é transcendente, portanto não é construtível.

Teorema 7 (A quadratura do círculo). *Não é possível, com régua e compasso, construir um quadrado cuja área seja a mesma área do círculo dado.*

Demonstração: Note que como consequência do teorema acima $\sqrt{\pi}$ não é construtível, pois se fosse construtível $\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \pi$ seria construtível, o que é uma contradição, pois o produto de dois números construtíveis é um número construtível. Lembrando que o problema da quadratura do círculo é equivalente ao problema de construir, com régua e compasso, o número $\sqrt{\pi}$, segue que tal problema é insolúvel.

Para finalizar este capítulo vamos tratar do problema de quais n -ângulos regulares podem ser construídos com régua e compasso.

4.4 Quais polígonos regulares são construtíveis?

Como já mencionamos ao longo do nosso texto, o problema de dividir uma circunferência em n partes iguais com régua e compasso (que corresponde a inscrever numa circunferência um polígono regular de n lados) era um problema em evidência desde a Grécia Antiga. Como já vimos, os gregos sabiam resolver esse problema para muitos casos particulares, como por exemplo, $n = 3, 4, 5, 6, 8, \dots$ mas não conseguiram, por exemplo, resolver o problema para $n = 7$. De um modo mais geral, a pergunta importante era: para quais valores inteiros $n \geq 3$ o problema tem solução, ou seja, quais os n -ângulos regulares podem ser construídos com régua e compasso?

O problema, apesar de fácil de enunciar, ficou séculos sem uma resposta definitiva e completa. Apenas no século XIX, com o desenvolvimento da Álgebra abstrata a resposta definitiva emergiu inicialmente a partir do famoso matemático alemão Carl Friederich Gauss em 1796 (com apenas 18 anos de idade), quando ele mostrou ser construtível com régua e compasso um polígono regular de 17 lados (o heptadecágono), fato que foi decisivo para tomar a decisão de estudar Matemática ao invés de Teologia. Motivado por essa solução, cinco anos mais tarde, em 1801 no seu famoso tratado *Disquisitiones Arithmeticae*, ele estabelece uma condição suficiente para que um n -ângulo regular possa ser construído com régua e compasso. Além disso, Gauss conjecturou que tal condição também fosse necessária, mas não apresentou uma prova. Anos depois, em 1837, matemático francês Pierre Wantzel, completa a prova, mostrando que realmente a condição

descrita por Gauss também é necessária. Por isso, esse teorema é conhecido na literatura como Teorema de Gauss-Wantzel. Para finalizar este capítulo, vamos tratar desse teorema.

4.4.1 Primos de Fermat

Ainda na Grécia antiga, Euclides provou que existem infinitos números primos. Motivados por esse resultado muitos matemáticos tentaram encontrar fórmulas que fornecessem, senão todos, pelo menos, uma infinidade de primos.

Fermat (Pierre de Fermat: 1601-1658), um dos maiores matemáticos do século **XVII**, acreditava conhecer uma tal fórmula. Em carta endereçada a seu amigo Bernard Frenide de Bessy, datada de provavelmente agosto de 1640, revelava ele embora confessando não estar de posse de uma prova completa, sua convicção de que os números da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, com $n \in \mathbb{N}$ eram primos para todos os valores de $n \geq 0$. Os primeiros números gerados por essa fórmula são:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65.537$$

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$$

$$F_6 = 2^{2^6} + 1 = 18.446.744.073.709.551.617$$

⋮

Os cinco primeiros números de Fermat realmente são primos, já o F_6 já é suficientemente grande para ter impedido que Fermat certificasse se ele era primo

ou não. Apesar de não possuir uma demonstração, Fermat voltou, em várias outras ocasiões, inclusive em carta endereçada a Pascal em 1654, a reiterar sua crença na primalidade desses números.

O problema, no entanto, só ficou definitivamente resolvido quando Euler, em 1732, provou, mostrando que 641 é um fator de F_5 , e portanto a conjectura de Fermat era falsa. Posteriormente o matemático alemão Ferdinand Gotthold Max Eisenstein conjecturou que existem infinitos valores de n para os quais $F_n = 2^{2^n} + 1$ é um número primo. Até hoje esse problema permanece em aberto e além disso os únicos primos de Fermat conhecidos são F_0, F_1, F_2, F_3 e F_4 .

Agora estamos prontos para enunciar o Teorema de Gauss-Wantzel.

Teorema 8 (Gauss-Wantzel). *Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Então o n -ágono regular pode ser construído se, e somente se, $n = 2^s \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ onde $s \geq 0$ é um inteiro e p_1, p_2, \dots, p_n são primos de Fermat distintos.*

A demonstração desse teorema também pode ser encontrada em [7].

Pelo Teorema de Gauss-Wantzel, os primeiros polígonos construtíveis resultam ter o seguinte número de lados:

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102,
 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272, 320, 340, 384, 408, 480, 510
 , 512, 514, 544, 640, 680, 768, 771, 816, 960, 1020, 1024, 1028, 1088, 1280, 1285, 1360,
 1536, 1542, 1632, 1920, 2040, 2048 . . .

Originalmente, a possibilidade de construir com régua (não graduada) e compasso o polígono regular de 17 lados é fruto do número $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ ser algébrico cujo polinômio minimal tem grau igual a uma potência de 2. Gauss, no seu

Disquisitiones Arithmeticae de 1799, mostrou que:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = & -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \\ & + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17}} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \end{aligned}$$

Embora Gauss tenha provado que o heptadecágono regular é construtível com régua (não graduada) e compasso, ele não exibiu uma construção explícita para ele. A primeira construção explícita foi dada por J. Erchinger. Para o polígono regular de 257 lados a primeira construção explícita foi feita por F.J. Richelot em 1832. Por fim, a construção do polígono regular de 65.357 lados foi dada por J. Hermes em 1894. Ele passou cerca de 10 anos para finalizar esse trabalho, que possui cerca de 200 páginas.

Observação 4.4.1. *Note que pelo Teorema de Gauss-Wantzel, até hoje só se conhecem 31 polígonos regulares com um número ímpar de lados que são construtíveis com régua e compasso. De fato, pelo referido teorema, se um n -ágono regular possui um número ímpar de lados, segue que n é igual a um primo de Fermat ou um produto de primos de Fermat distintos. Ora, como até hoje só são conhecidos 5 primos de Fermat, pelo princípio fundamental da contagem, segue que existem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 31$ possibilidades para o valor de n . A explicação é a seguinte: n pode ter ou não o fator F_0 , n pode ter ou não o fator F_1 e assim sucessivamente até que n pode ter ou não o fator F_5 , existindo então 2 possibilidades para cada um dos primos de Fermat conhecidos até hoje. Além disso, devemos excluir a possibilidade em que não pegamos nenhum dos primos de Fermat.*

Capítulo 5

Construções Aproximadas e Construções com Restrições

5.1 Polígonos Regulares Aproximados

Já vimos algumas construções de polígonos regulares no Capítulo 3, bem como o teorema de Gauss-Wantzel que formaliza quais polígonos regulares podem ser construídos, entretanto, existe uma maneira de construir polígonos regulares aproximados através da divisão da circunferência em n partes aproximadamente iguais. A seguir será apresentado o passo-a-passo dessa construção.

5.1.1 Divisão Aproximada da Circunferência em n Partes

Com essa construção é possível criar uma infinidade de polígonos aproximadamente regulares. O passo a passo segue um único padrão, portanto, ao realizá-la para um caso particular, será fácil replicá-la para um número qualquer de divisões.

A seguir temos descritas todas as etapas para realizar n divisões em uma circunferência, fazendo as devidas ressalvas com relação a paridade de n , porém as figuras ilustram para o caso em que $n = 7$, tornando possível a construção de

um heptágono aproximadamente regular, isto é, tanto seus ângulos internos têm amplitudes muito parecidas quanto as medidas de seus lados são muito próximas entre si.

1. Construa uma circunferência Γ de raio r e centro O ;
2. Trace um diâmetro qualquer de Γ (\overline{AB});
3. Construa dois arcos de raio \overline{AB} , o primeiro centrado em A e o segundo centrado em B , de modo que se intersectem nos pontos P e Q ;

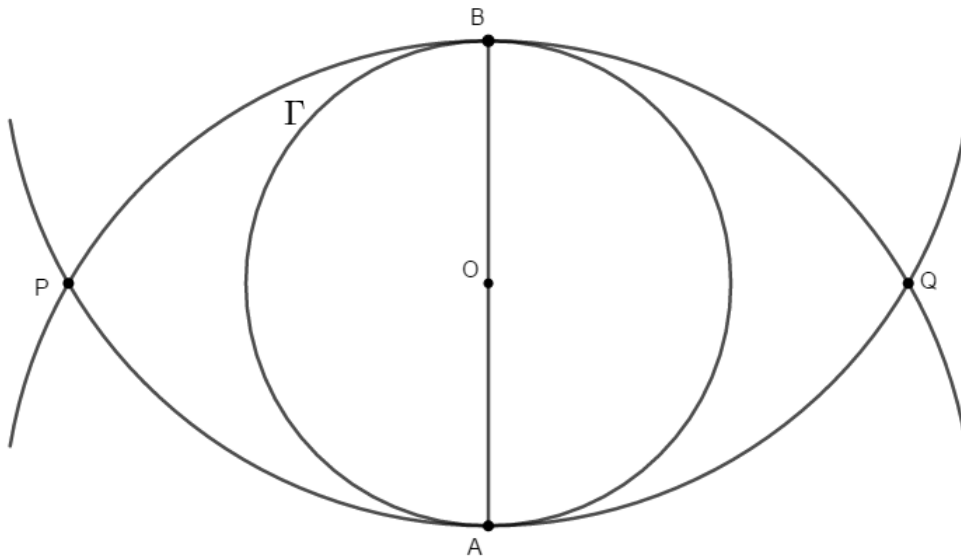


Figura 5.1: Etapa 3 da divisão da circunferência.

4. Divida o diâmetro \overline{AB} em n partes, como mostrado na construção **2.2.6**, obtendo os pontos N_1, N_2, \dots, N_{n-1} sobre \overline{AB} ;
5. Trace as semirretas $S_{PN_1}, S_{PN_3}, \dots, S_{PN_{n-2}}, S_{QN_1}, S_{QN_3}, \dots, S_{QN_{n-2}}$ (para n ímpar, se n for par serão traçadas semirretas até o ponto N_{n-1} sobre \overline{AB}), obtendo as interseções V_1, V_2, \dots, V_{n-1} (para n ímpar, se n for par serão obtidos n pontos), respectivamente, com a circunferência Γ ;

6. Construa os segmentos $\overline{V_1V_2}$, $\overline{V_2V_3}$, $\overline{V_3V_4}$, \dots , $\overline{V_{n-1}V_1}$ (se n par o último segmento traçado será $\overline{V_nV_1}$);

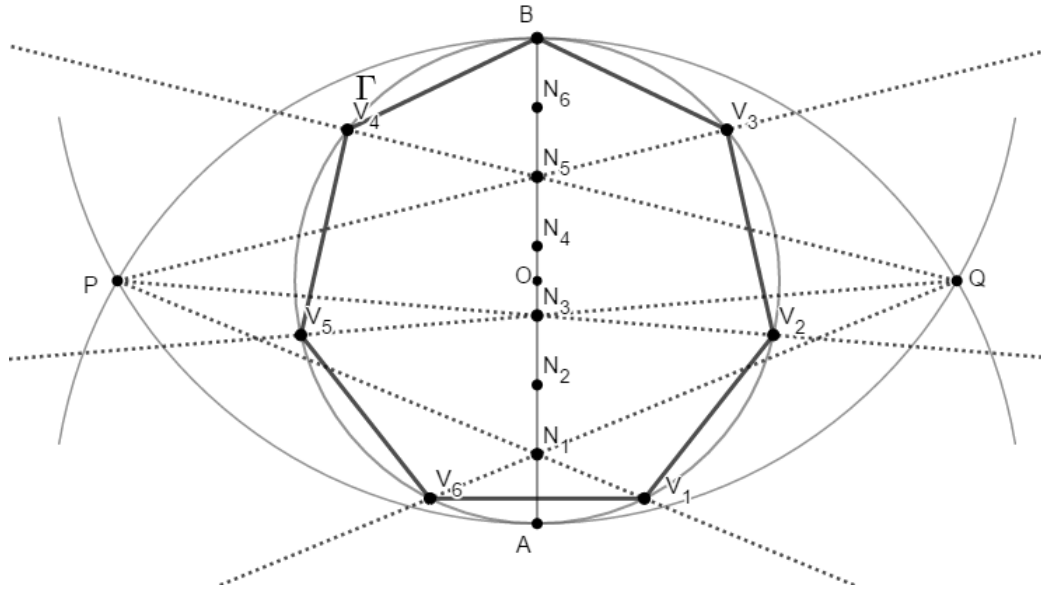


Figura 5.2: Circunferência dividida em 7 partes aproximadamente iguais com um heptágono inscrito.

Vale ressaltar que o quadrado pode ser construído de forma precisa dessa maneira, porém, por mais regular que outro polígono construído por esse método se pareça, é apenas uma aproximação, portanto, não podemos considerá-la como uma construção rigorosa de polígonos regulares com régua e compasso. Outra aproximação interessante que essa construção nos permite fazer é a de ângulos que não são construtíveis, como o ângulo de 40° (ângulo central do eneágono regular).

5.2 Construções aproximadas para o π

De acordo com o Teorema 6, do capítulo anterior, sabemos que π não é um número construtível. Entretanto ao longo dos tempos alguns matemáticos elaboraram construções de números que fornecem excelentes aproximações para o número π .

5.2.1 $\pi \approx \frac{22}{7}$

Esta é uma das mais antigas e conhecidas aproximações racionais do número π . Para construir com régua e compasso, basta definir o segmento unitário, criar os segmentos de comprimento 22 e 7, por fim, aplicar a divisão entre segmentos apresentada em 4.2.4. A seguir mostramos a construção geométrica que nos leva ao número racional $\frac{22}{7}$.

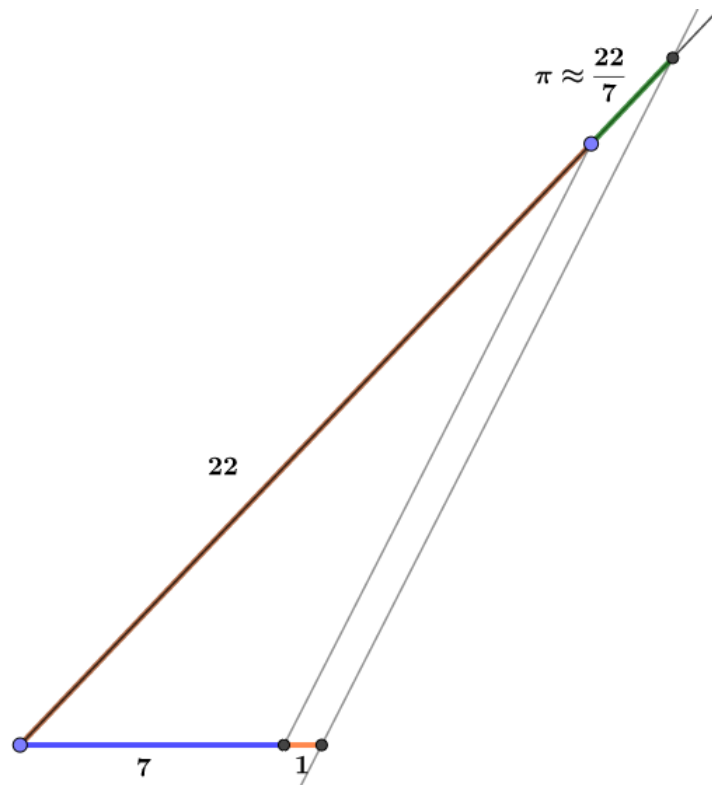


Figura 5.3: Uma possível aproximação para π como um número racional.

5.2.2 Aproximação de Ramanujan

Muito mais recente é a aproximação $\pi \approx \frac{355}{113}$, sugerida pelo famoso matemático indiano S. Ramanujan por volta dos anos de 1913 e 1914. Essa construção pode ser realizada rigorosamente como a anterior, basta definir o segmento unitário e criar os segmentos de comprimentos 355 e 113, em seguida, realizar a divisão entre

A seguir mostramos as construções geométricas que nos levam a essas aproximações para o π .

Aproximação 1:

$$\pi \approx \frac{6}{5(1 - \varphi)}$$

Para construir essa aproximação, obtemos o número de ouro φ , e, em seguida, aplicamos as operações de subtração, multiplicação e divisão, dadas pelas construções 4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4, respectivamente. Observe a construção do número de ouro (φ) a seguir:

1. Determine o segmento unitário e construa um triângulo retângulo de catetos $\overline{AB} = 1$ e $\overline{BC} = \frac{1}{2}$;
2. Trace um arco de centro em C e comprimento $\overline{BC} = \frac{1}{2}$ intersectando \overline{AC} no ponto D ;
3. Trace um arco de centro em A e raio \overline{AD} , intersectando \overline{AB} no ponto E .

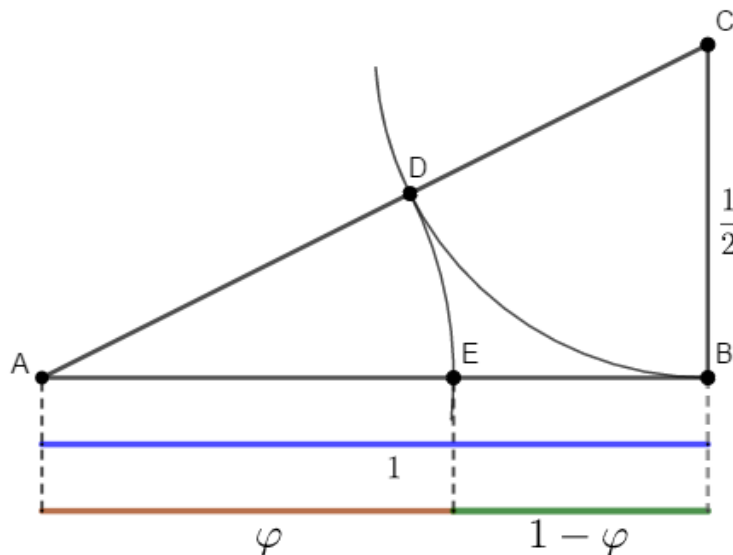


Figura 5.5: Construção do número de ouro.

Note que com essa construção, já foi possível obter, além do número de ouro, o

comprimento $1 - \varphi$, destacado na figura 5.5. Agora aplicaremos as operações de multiplicação e divisão. Veja como fazer a multiplicação na figura a seguir:

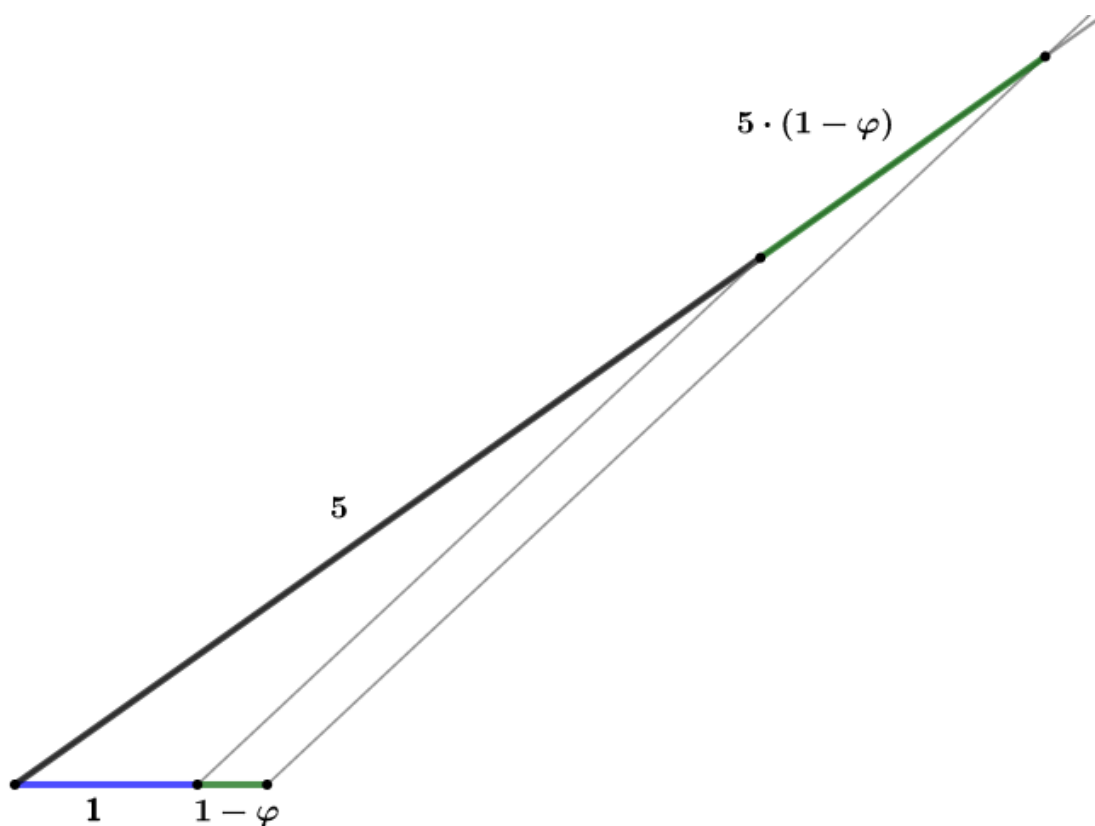


Figura 5.6: Construção do segmento $5(1 - \varphi)$.

Para finalizar, realizamos a divisão e obteremos o segmento procurado para aproximação do número π . Veja a figura a seguir:

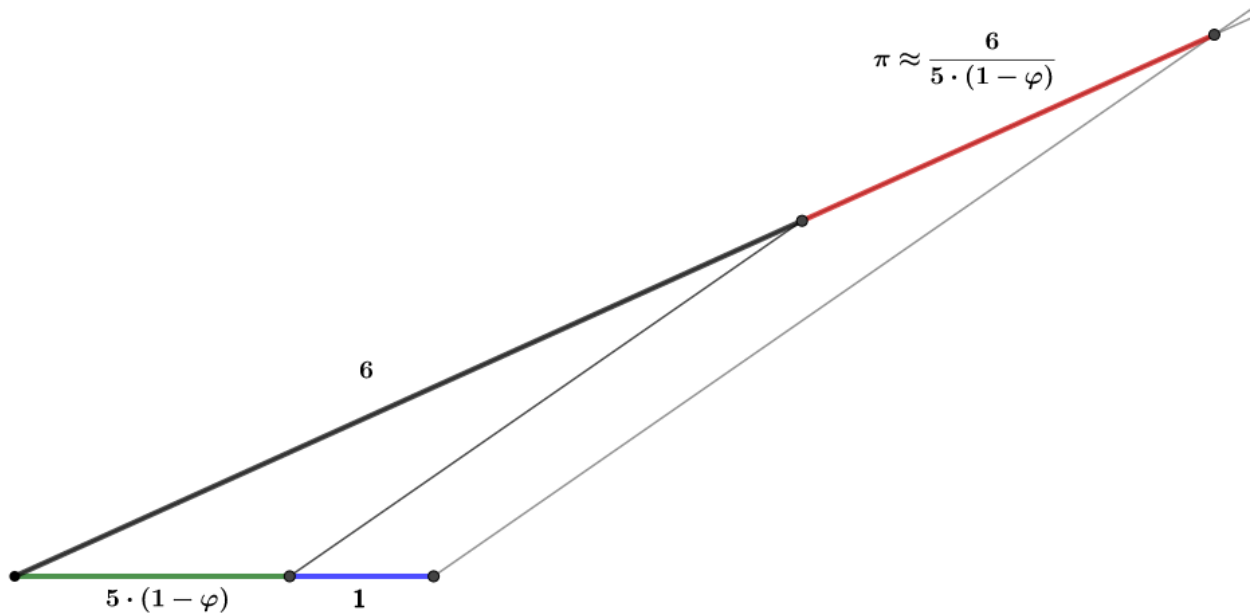


Figura 5.7: Construção aproximada para π .

Aproximação 2:

$$\pi \approx \sqrt{4 + (3 - \operatorname{tg} 30^\circ)^2}$$

Outra aproximação para π elaborada pelo Dickson consiste primeiramente na obtenção da $\operatorname{tg} 30^\circ$, em seguida, realizamos as operações de subtração, multiplicação, adição e radiciação, que foram explicadas no capítulo anterior nas construções 4.2.2, 4.2.3, 4.2.1 e 4.2.6, respectivamente. Vejamos o passo a passo para poder obter a $\operatorname{tg} 30^\circ$:

1. Construa um triângulo equilátero ABC de lado 1;
2. Trace a altura \overline{DC} ;

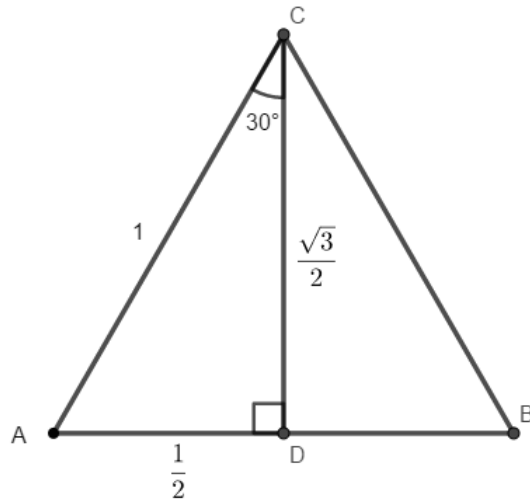


Figura 5.8: Construção do triângulo equiângulo de lado unitário.

3. Obtenha o segmento de comprimento $\frac{AD}{DC}$.

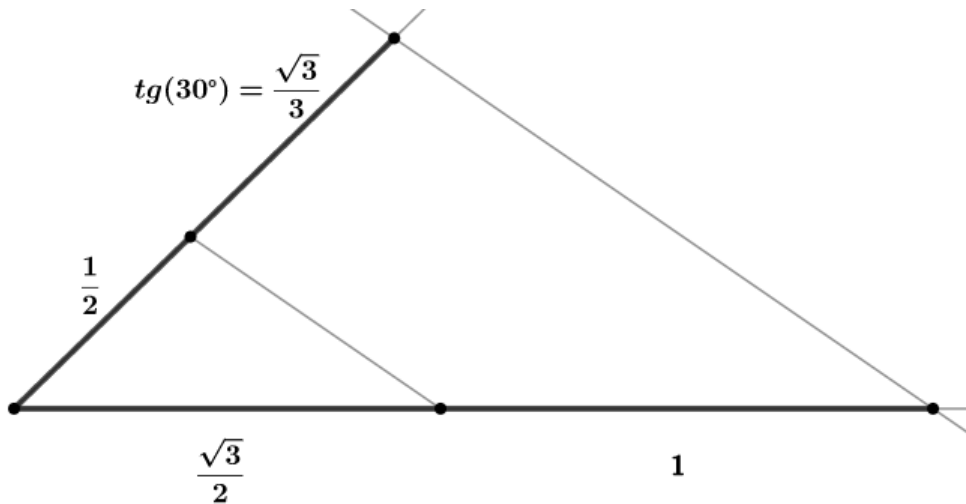


Figura 5.9: Obtenção da $\text{tg } 30^\circ$.

Agora precisamos apenas realizar as operações que aparecem na expressão $\pi \approx \sqrt{4 + (3 - \text{tg } 30^\circ)^2}$. Vejamos as operações de subtração e multiplicação aplicadas em uma única construção:

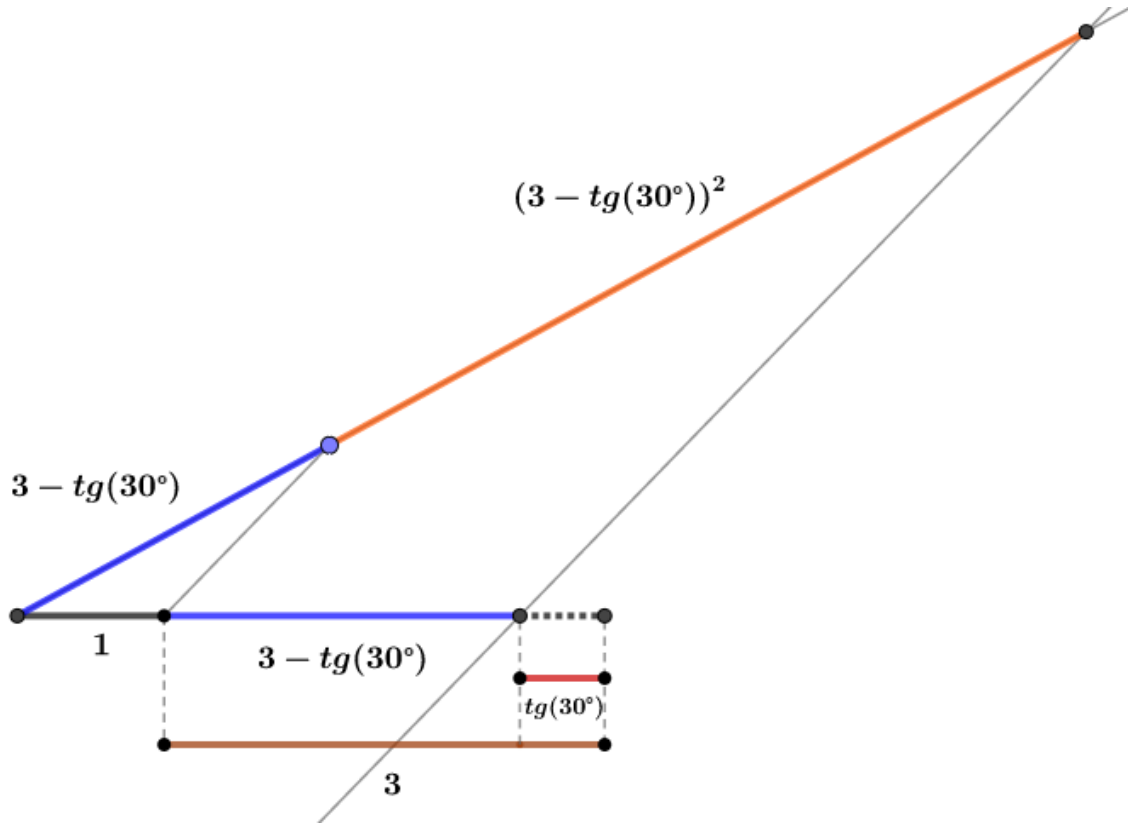


Figura 5.10: Obtenção do segmento de comprimento $(3 - \text{tg } 30^\circ)^2$.

A seguir aplicaremos as operações de adição e radiciação em uma única construção, obtendo com isso a aproximação desejada, observe a figura a seguir:

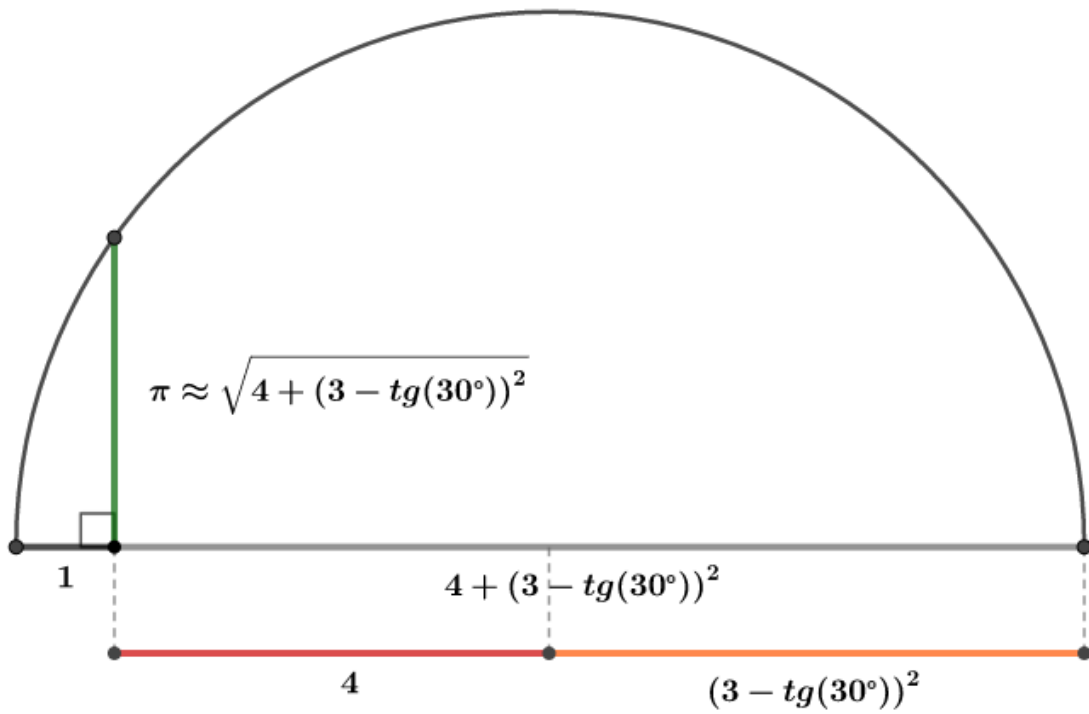


Figura 5.11: Aproximação de Dickson para π .

5.2.5 Aproximação de Kochanski

Uma outra aproximação para o π através de um número construtível é dada por $\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,14$. Uma possível construção para esse número é mostrada da figura abaixo:

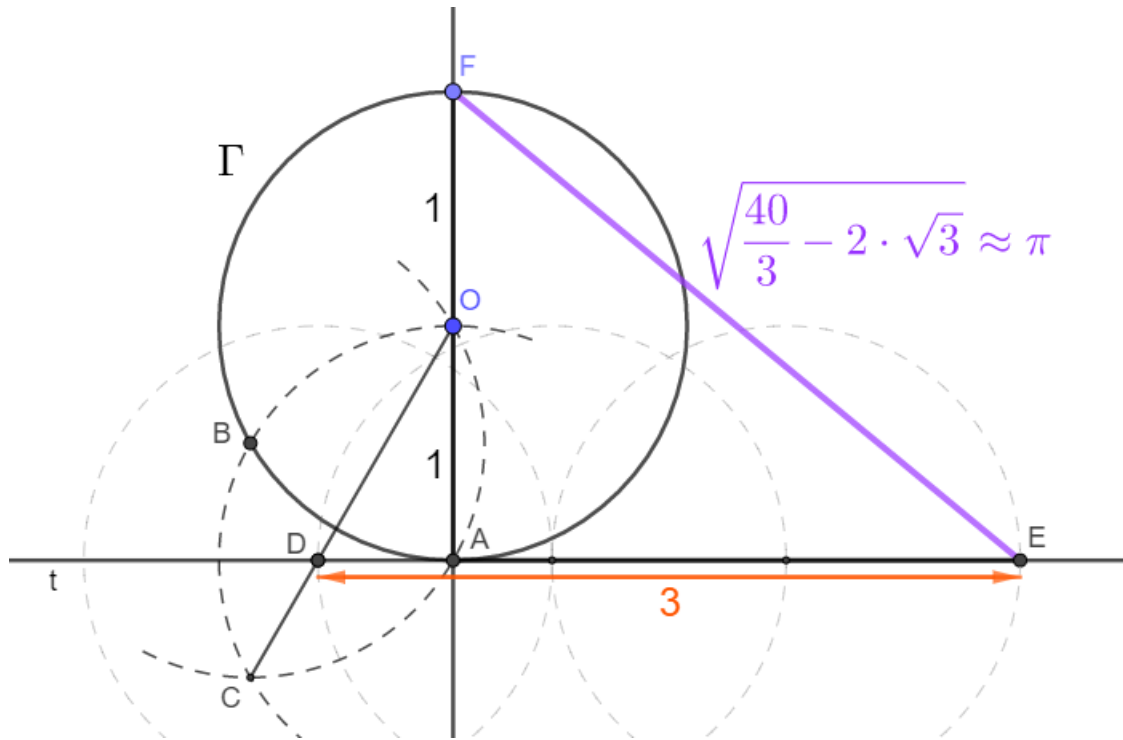


Figura 5.12: Aproximação de Konchaski para π .

Considerando que $\overline{OA} = \overline{OF} = 1$, construímos uma circunferência Γ de centro O e raio 1. O ponto $B \in \Gamma$ foi obtido pela interseção de Γ_1 com o arco de centro A e raio 1. Agora construímos outro arco de centro B e raio $\overline{BO} = 1$ que intersecta o arco anterior no ponto C . O segmento \overline{OC} intersecta a reta (t) que é perpendicular ao segmento \overline{AO} no ponto D . Por fim, obtenha o ponto E de modo que $\overline{DE} = 3 \cdot \overline{OA} = 3$. Aplicando Pitágoras no triângulo $\triangle AEF$ obtemos,

$$\begin{aligned}
 EF &= \sqrt{AF^2 + AE^2} = \sqrt{2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,14
 \end{aligned}$$

Essa construção foi sugerida pelo Jesuíta polonês Priest Kochansky.

5.2.6 Aproximação de Viète

Na literatura há uma belíssima identidade descoberta pelo matemático francês François-Viète que fornece uma aproximação para o π através de raízes quadradas (veja por exemplo, citar...). A identidade é a seguinte:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Na figura abaixo considere um quadrado de lado 1. O ângulo $\angle L_1 O L_\infty$ tem medida $\frac{\pi}{4}$. Considere OL_2 como bissetriz do ângulo $\angle L_1 O L_\infty$, o que faz com que o ângulo $\angle L_1 O L_2$ tenha medida $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$. De modo completamente análogo considere a bissetriz OL_3 do ângulo $\angle L_2 O L_\infty$, o que faz com que esse ângulo tenha medida $\theta_3 = \frac{\pi}{16}$. Continuando o mesmo processo formamos uma sequência de ângulos cujas medidas são $\theta_4 = \frac{\pi}{32}, \dots, \theta_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}, \dots$

A partir do vértice P_1 construímos o segmento $P_1 P_2$ de modo que ele seja perpendicular ao segmento OP_1 . A partir de P_2 , construímos o segmento $P_2 P_3$, de modo que seja perpendicular ao segmento OP_2 e continuamos esse processo de construção de modo completamente análogo para os pontos P_4, P_5, \dots

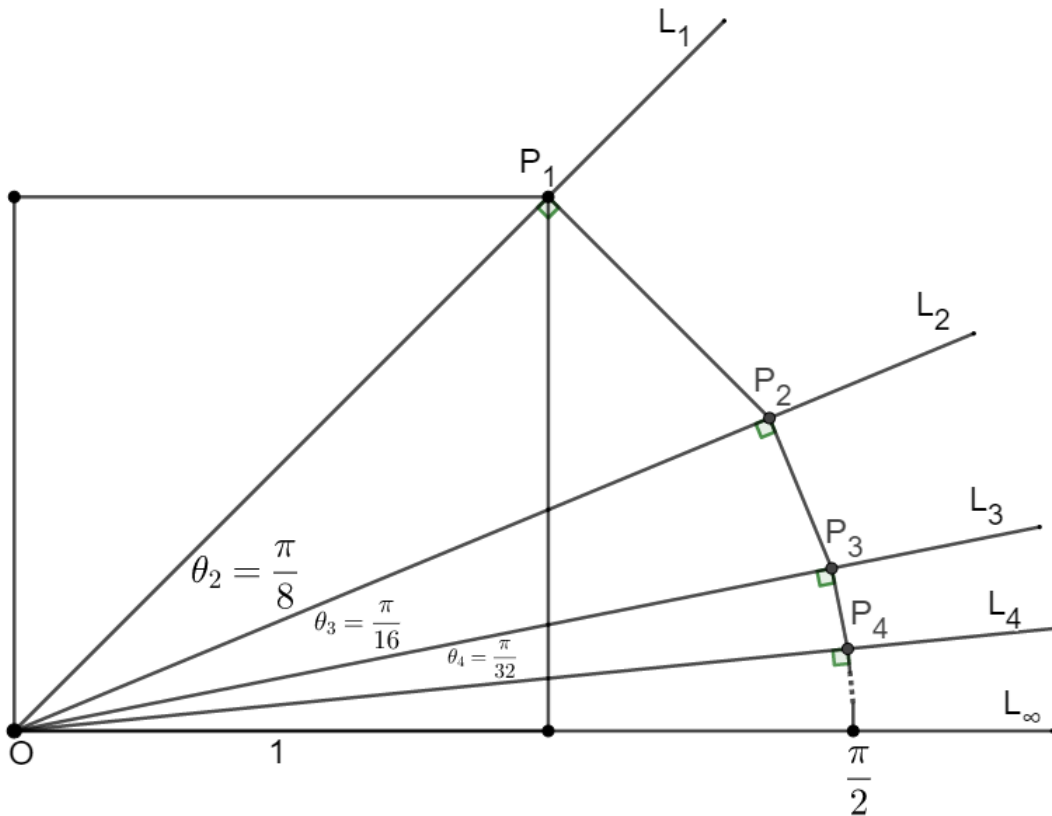


Figura 5.13: Aproximação de Viète para π

Os comprimentos dos segmentos OP_1, OP_2, OP_3, \dots são dados por:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{OP_1} \Rightarrow OP_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{OP_1}{OP_2} \Rightarrow OP_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

$$\cos \frac{\pi}{16} = \frac{OP_2}{OP_3} \Rightarrow OP_3 = \frac{1}{\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}}$$

$$\vdots$$

Comparando o que foi exposto acima com a fórmula de Viète, concluímos que o dobro do comprimento do segmento OP_n é igual ao dobro do inverso do produto

dos n primeiros fatores da referida fórmula, o que é uma aproximação para π , ou seja,

$$\pi \approx 2.OP_n = \frac{2}{\underbrace{\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdots \sqrt{\frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}}_{n \text{ fatores}}}$$

Assim, quanto maior o valor de n melhor é a aproximação para π .

5.3 Construção aproximada de $\sqrt[3]{2}$

No capítulo anterior provamos que o número $\sqrt[3]{2}$ não é construtível. Apesar disso, podemos construir com régua e compasso aproximações racionais para esse número. Uma maneira de obtermos aproximações racionais para o número $\sqrt[3]{2}$ é a partir do chamado método de Newton, estabelecido no século XVI. O método de Newton é um algoritmo bastante eficiente para obter uma raiz de uma equação $f(x) = 0$, onde $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Segundo esse método, iniciamos com um número x_1 que seja uma aproximação inicial (“um chute”) para uma raiz da equação $f(x) = 0$, e a partir daí formamos a sequência $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ de números de números reais obtidos pela fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

que tem como limite uma raiz da equação $f(x) = 0$.

Diante do exposto, a ideia básica desse método é dar uma primeira aproximação (“chute inicial”) e formar uma sequência de números racionais que convirja para o valor $\sqrt[3]{2}$. De modo mais preciso, definir uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números

racionais (pois todos eles são construtíveis) tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[3]{2}$. Para isso, começamos com uma "chute inicial" $x_1 = r \in \mathbb{Q}$ para a $\sqrt[3]{2}$.

Para obtermos aproximações racionais para o número $\sqrt[3]{2}$ podemos considerar a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 2$. Nesse caso o número $\sqrt[3]{2}$ é uma raiz da equação. Assim, tomando $x_1 = 1, 2$ como uma primeira aproximação para $\sqrt[3]{2}$, pelo método de Newton podemos obter uma sequência de aproximações racionais para o número $\sqrt[3]{2}$. De fato, como $f'(x) = 3x^2$, segue que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{2(x_n^3 + 1)}{3x_n^2}$$

Ora, como tomamos a primeira aproximação racional para $\sqrt[3]{2}$ como sendo $x_1 = 1, 2$, segue que outras aproximações (cada vez melhores) são:

$$x_2 = \frac{2(3 \cdot 1, 2^2 + 1)}{3 \cdot 1, 2^2} = \frac{341}{270} \approx 1, 26.$$

$$x_3 = \frac{2(3 \cdot 1, 26^2 + 1)}{3 \cdot 1, 26^2} = 1, 259$$

⋮

Dessa forma obtemos uma sequência de números racionais que converge para $\sqrt[3]{2}$. Como todo número racional é construtível, podemos obter construções aproximadas do número $\sqrt[3]{2}$ com a aproximação que julgarmos necessária, bastando construir um termo x_n da sequência acima com n suficientemente grande.

Por exemplo, para a aproximação $x_2 \approx 1, 26$, podemos obter o segmento de comprimento $\frac{63}{50}$, utilizando a operação de divisão vista em 4.2.4.

5.4 É possível trissectar um ângulo?

No capítulo 4, foi demonstrado que não existe um método geral de trissecção de um ângulo qualquer utilizando apenas a régua e o compasso, mas isso não significa

dizer que não existem ângulos que possam ser trissectados. Será mostrado a seguir uma construção que permite trissectar o ângulo de 90° .

Dado um ângulo de 90° , traçar uma reta que o divide na razão $2 : 1$:

1. Marque B sobre um dos lados do ângulo;
2. Com centro em A (vértice do ângulo), trace um arco de raio \overline{AB} na região interna do ângulo de modo que ele intersecte os dois lados do ângulo;
3. Com centro em B e raio \overline{AB} , trace outro arco marcando C na interseção com o arco anterior;
4. Trace a semirreta de origem em A passando por C . Essa semirreta divide o ângulo de 90° na razão $2 : 1$, ou seja, em um ângulo de 30° e outro de 60° .

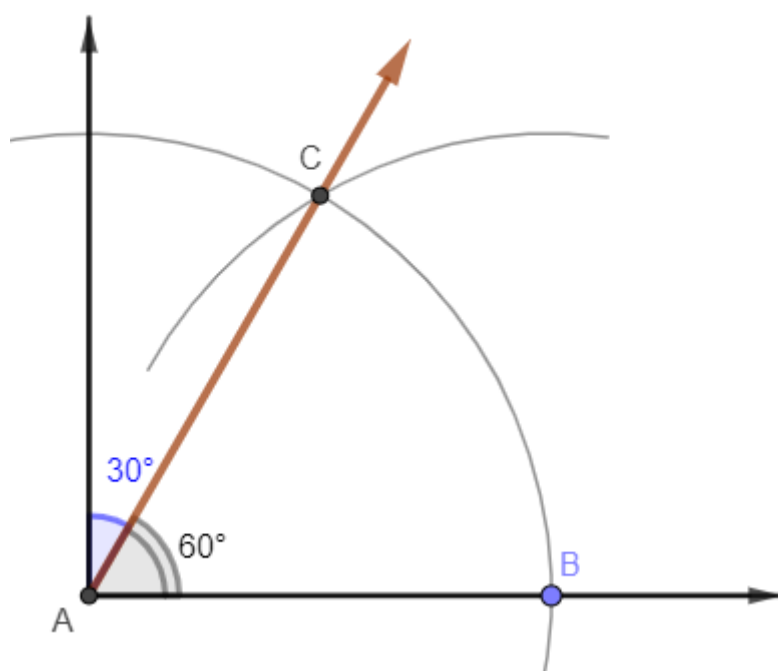


Figura 5.14: Trissecção do ângulo de 90° .

Com isso, fica claro que se soubermos construir algum ângulo com régua e compasso, então podemos trissectar um ângulo que mede o triplo desse ângulo cuja

construção é conhecida. Dessa maneira, a inexistência de uma construção genérica que permita trissectar qualquer ângulo, não significa dizer que não existam alguns ângulos trissectáveis, uma vez que o ângulo reto pode ser dividido em três iguais.

5.5 Construções com restrições

Até o presente momento, todas as construções foram realizadas mediante o uso da régua e do compasso, todavia, em 1797, o matemático italiano Lorenzo Masqueroni publicou um trabalho de título “Geometria do Compasso”, onde se demonstrou a seguinte proposição:

Proposição 7. *Todos os problemas de construção que se resolvem com o compasso e a régua, podem ser resolvidos com precisão usando apenas um compasso.*

Além das construções mediante o uso de apenas um compasso, existem também aquelas como as do geômetra suíço Jacobo Steiner que publicou, em 1833, sua obra “Construções geométricas realizadas com a ajuda de uma linha reta e um círculo fixo”, onde se analisou de maneira detalhada as construções feitas com uma régua e um disco circular. É possível expressar o principal resultado dessa obra como na proposição seguinte:

Proposição 8. *Cada problema de construção solucionável por meio do compasso e da régua, pode ser resolvido com uma única régua, desde que o plano do desenho tenha uma circunferência de raio fixo e seja conhecido o seu centro.*

Deste modo, para que a régua seja equivalente ao compasso, precisamos usar o compasso uma única vez.

Conclusões

O universo da geometria euclidiana plana é muito vasto e sabemos que pode ser muito complicado estudar esse ramo da matemática sem um norte, por esse motivo, e tentando compilar os problemas de maior destaque que os gregos nos legaram, que esse trabalho surgiu. Foi pensado sempre em manter a principal característica das construções geométricas gregas, além de focar mais naquelas construções realizadas mediante o uso da régua e do compasso. Para um aluno da educação básica obter os principais conceitos e temas acerca das construções geométricas com esses instrumentos se faz necessário abordar diversas literaturas, muitas vezes com uma linguagem mais direcionada para professores de matemática ou alunos de graduação dessa área, assim, buscamos manter a linguagem clara, com o intuito de tornar esse conhecimento mais acessível e de fácil compreensão para um público menos específico.

Nesse aspecto, o presente trabalho abordou as construções geométricas da forma mais abrangente possível, buscando sempre manter a geometria grega e as construções com régua e compasso como principais elementos do texto. Foram elencados diversos aspectos da geometria grega, partindo das principais funções das ferramentas mais utilizadas, passando por construções básicas, seguidas de suas demonstrações, e outras mais elaboradas que os gregos nos legaram, como as construções de alguns polígonos regulares e a quadratura de um n -ágono. Algumas

destas construções necessitaram de vários séculos para se obter uma solução, como foi a do heptadecágono regular, que somente no século **XVIII** com a descoberta feita por Gauss é que foi possível conhecer sua construção. Também fora abordado quais polígonos regulares podem ou não serem construídos por régua e compasso, que vem a ser um questionamento comum quando se ensina algumas construções de polígonos regulares na educação básica.

Além disso, também foi explorado aqueles problemas, cuja solução se mostrou impossível, devido as limitações das ferramentas de construção utilizadas, porém o caminho percorrido em busca de uma solução permitiu que a matemática alcançasse níveis mais elevados de abstração, que findou na demonstração da impossibilidade desses problemas, conhecidos como Os Três Problemas Clássicos da Antiguidade. Não obstante, buscamos fornecer o aparato algébrico necessário para justificar a impossibilidade de solução dos três Problemas Clássicos da Geometria Grega e apresentamos uma demonstração detalhada sobre a inviabilidade dessas construções via régua e compasso.

Outros aspectos das construções geométricas também foram apresentados, como a exposição de diversas construções aproximadas para o conhecido número transcendente π , bem como uma aproximação para o $\sqrt[3]{2}$, número chave do problema Deliano, além dessas abordagens, explicamos um procedimento de construção de polígonos aproximadamente regulares. Completamos o trabalho exibindo outros caminhos que as construções geométricas podem percorrer, que é o das construções com restrições, em que as ferramentas principais não são a régua e o compasso, tornando os desafios ainda maiores.

Por fim, esperamos que esse trabalho tenha conseguido cumprir seus objetivos, pois tentamos deixar a leitura mais didática possível para que o leitor, seja professor

ou aluno, consiga compreender os conceitos geométricos envolvidos nas construções com régua e compasso, bem como a possibilidade de que este trabalho se torne uma porta de entrada para aqueles que quiserem se aprofundar mais nesse assunto e que, assim, possamos contribuir com a educação do país.

Referências Bibliográficas

- [1] AZEVEDO, Natália de Carvalho de. O número de ouro e construções geométricas. 2013.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria euclidiana plana. SBM, 2012.
- [3] BATISTA, Amazilde de Farias. Construções geométricas, insolubilidade de soluções dos problemas clássicos e aplicações no ensino básico. 2018.
- [4] BICUDO, Irineu et al. Os elementos. Unesp, 2009.
- [5] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. História da matemática. Editora Blucher, 2019.
- [6] BRAGA, Theodoro. Desenho linear geométrico. São Paulo: Ícone, v. 13, p. 230, 1997.
- [7] COX, DAVID A Galois theory - Second edition - John Wiley & Sons - 2013.
- [8] CAMINHA, A. Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana. 2012.
- [9] CHAQUIAM, Miguel. Ensaio temático: história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM, 2017.
- [10] COMMANDINO, Frederico. Euclides-Elementos de Geometria. São Paulo: Edições Cultura, 1944.
- [11] DE FREITAS, Bruno Amaro. Os problemas clássicos da geometria: uma abordagem com o auxílio do Origami.
- [12] EVES, Howard Whitley. Introdução à história da matemática. Unicamp: 5ª Ed. Campinas, 2011.
- [13] FREITAS, Juliana Martins de. Os três problemas clássicos da Matemática grega. 2014.

- [14] GUSMAI, Rafael Martins. Um estudo sobre três problemas clássicos da geometria euclidiana. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- [15] HERMES, J. Ueber die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, v. 1894, p. 170-186, 1895.
- [16] KOSTOVSKI, Aleksandr Nikitich. Construcciones geométricas mediante un compás. 1980.
- [17] LAFETÁ, Anna Carolina; SILVA, Elaine; LELIS, Jean. Título: TEORIA DOS NÚMEROS TRANSCENDENTES: DO TEOREMA DE LIOUVILLE À CONJECTURA DE SCHANUEL. VIII Bienal de Matemática da SBM UFRJ 2017.
- [18] MARTIN, George E. Geometric constructions. Springer Science & Business Media, 1998.
- [19] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; JORGE, Miguel. Geometria I. Rio de Janeiro: F. Alves, 1990.
- [20] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; JORGE, Miguel. Geometria II: métrica plana. Rio de Janeiro: F. C. Araújo da Silva, 2002.
- [21] FIGUEIREDO, DJAIRO GUEDES DE, Números Irracionais e Transcendentes - Terceira edição - SBM - 2012.
- [22] NIVEN, I. Números: Irrational Numbers - First edition - The Carus Monographs - MAA - The Mathematical Association of America - 1956.
- [23] OLIVEIRA, Elvis Silva. Os três problemas clássicos: impossibilidade da solução com régua e compasso e soluções alternativas. 2017.
- [24] Pimentel, J. O Ensino de Geometria por Meio de Construções Geométricas. 2013.
- [25] PINTO, Luis Paulo. Os problemas clássicos da Grécia antiga. 2015.
- [26] ROQUE, Tatiana. História da matemática. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.
- [27] SAITO, Ken. Doubling the cube: A new interpretation of its significance for early Greek geometry. Historia Mathematica, v. 22, n. 2, p. 119-137, 1995.

- [28] SANTANA, LUCIANO MELO. Os problemas clássicos da geometria e a impossibilidade de solução com régua e compasso. 2013.
- [29] SANTOS, Jeovan Lira dos. Extensões de Corpos e os Três Problemas Clássicos de Construção Matemática. 2017.
- [30] SILVA, Vonicleiton Ribeiro. Construções com régua e compasso. 2019.
- [31] STEWART, Ian. Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2014.
- [32] WAGNER, Eduardo; CARNEIRO, Jose Paulo Q. Construções geométricas. Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.