



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



Um Estudo Sobre Polígonos em \mathbb{Z}^2

por

Leonardo da Costa Silva

sob a orientação da

Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN/UFPA, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maio/ 2021
João Pessoa - PB

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586e Silva, Leonardo da Costa.

Um estudo sobre polígonos em Z^2 / Leonardo da Costa
Silva. - João Pessoa, 2021.

72 f. : il.

Orientação: Elisandra de Fátima Gloss de Moraes.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Polígonos em Z^2 . 2. Área de polígonos. 3. Teorema de
Pick. 4. Malha quadriculada. I. Moraes, Elisandra de
Fátima Gloss de. II. Título.

UFPB/BC

CDU 519.145.4(043)

Um estudo sobre polígonos em \mathbb{Z}^2

por

Leonardo da Costa Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN/UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

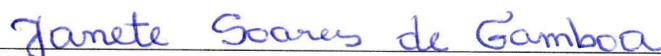
Aprovada por:



Profa. Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes - UFPB (Orientadora)



Profa. Dra. Gabriela Albuquerque Wanderley - UFPB



Profa. Dra. Janete Soares de Gamboa - UnB

Maio/2021

Agradecimentos

Agradeço a Deus pois Ele é o meu provedor em todos os momentos. A minha esposa por ser minha amiga, companheira e incentivadora. A meus familiares e amigos que compreenderam minha ausência em momentos importantes em que precisei me dedicar aos estudos. Agradeço a minha Igreja, a PIB Aliança e tantos irmãos que intercedem por mim em suas orações. Agradeço à direção da Escola Dom Bosco, na pessoa da Diretora Rosemary Olindina e da EREM Joaquina Lira, na pessoa da Ex-Diretora Luzinete Martins pelo apoio e incentivo aos estudos, bem como ao Governo do Estado de Pernambuco pela licença para curso que me foi concedida. Agradeço a meus colegas e amigos de mestrado dos quais me sinto honrado em citar: Gutemberg, Rafael, Cristiano, Marcos, Luis e Carlos. Agradeço aos professores e Coordenação do PROFMAT-UFPB pelo conhecimento que me ajudaram a construir. Agradeço especialmente a Professora Dra. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes pela forma como me orientou na construção desse trabalho. Por último, mas não menos importante, agradeço CAPES que forneceu suporte financeiro possibilitando meus estudos durante todo este curso. Obrigado a todos!

Dedicatória

*Dedico este trabalho a meu Deus
“Porque dEle, por Ele e para Ele são
todas as coisas.” (Rm.11.36a).*

Resumo

O objetivo desse trabalho é apresentar um estudo sobre os polígonos imersos em \mathbb{Z}^2 , uma vez que tanto os polígonos quanto a malha quadriculada estão presentes em diversos contextos na Educação Básica. O capítulo inicial traz conceitos básicos que servem de suporte para os resultados obtidos ao longo do trabalho. Em seguida mostra-se que, além dos quadrados, nenhum n -ágono regular pode ser imerso em \mathbb{Z}^2 . Tratamos também da área de polígonos imersos em \mathbb{Z}^2 , que pode ser facilmente calculada quando sabemos o número de pontos de \mathbb{Z}^2 localizados em seus lados e no seu interior, por meio do Teorema de Pick. Finalmente, trazemos a solução de um problema que trata da imersão de quadrados em \mathbb{Z}^2 e algumas aplicações do Teorema de Pick em questões extraídas de exames de diversos níveis acadêmicos.

Palavras-chaves: Polígonos em \mathbb{Z}^2 ; área de polígonos; malha quadriculada; Teorema de Pick.

Abstract

The objective of the work is to present a study on the polygons immersed in \mathbb{Z}^2 , since both the polygons and the grid are present in several contexts in Basic Education. The opening chapter provides basic concepts that support the results obtained throughout the work. Then, it is shown that, in addition to the squares, no regular n-agon can be immersed in \mathbb{Z}^2 . We also deal with the area of polygons immersed in \mathbb{Z}^2 , which can be easily calculated when we know the number of points of \mathbb{Z}^2 located on their sides and inside, through Pick's Theorem. Finally, we bring the solution to a problem that deals with the immersion of squares in \mathbb{Z}^2 and some applications of Pick's Theorem in questions extracted from exams of different academic levels.

Key-words: Polygons in \mathbb{Z}^2 ; polygon area; grid; Pick's Theorem.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Básicos	3
1.1 Distância entre pontos e ângulos entre segmentos	3
1.2 Polígonos	5
1.2.1 Triângulos	7
1.2.2 Quadriláteros	14
1.2.3 Área de um polígono:	15
2 Imersão de polígonos em \mathbb{Z}^2	20
2.1 Definições preliminares	21
2.2 Imersão de polígonos regulares em \mathbb{Z}^2	26
2.2.1 Imersão de triângulos regulares em \mathbb{Z}^2	26
2.2.2 Imersão de quadrados em \mathbb{Z}^2	30
2.2.3 Imersão de pentágonos regulares em \mathbb{Z}^2	30
2.2.4 Imersão de n-ângulos regulares, com $n > 5$, em \mathbb{Z}^2	34
2.3 Imersão de polígonos regulares em \mathbb{Z}^k	39
3 Área de polígonos imersos em \mathbb{Z}^2 - Teorema de Pick	42
3.1 Triângulos e paralelogramos fundamentais	42
3.2 Decomposição de polígonos em triângulos	48
3.2.1 Decomposição de polígonos em triângulos fundamentais	51
3.3 Demonstração do Teorema de Pick	53
4 Aplicações	55
4.1 Problema motivador do Capítulo 2	55
4.2 Cálculo de áreas via Teorema de Pick	59
Referências Bibliográficas	65

Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (BRASIL, 2018 [5]). Serve de referência para formulação dos currículos e propostas pedagógicas das redes escolares dos Estados, Distrito Federal e Municípios além das propostas pedagógicas das instituições escolares. Ela define e fundamenta as aprendizagens essenciais a todos os estudantes a fim de que desenvolvam as dez competências gerais da educação básica configuradas como direitos de aprendizagem e desenvolvimento de cada indivíduo, e asseguradas pela Constituição Federal do Brasil, em seu artigo 205 (BRASIL, 2018 [5]).

De acordo com a BNCC, as decisões pedagógicas devem instruir o sobre o que cada aluno deve saber e saber fazer, visando o desenvolvimento de competências que promovem aprendizagens essenciais ao desenvolvimento da educação integral de cada indivíduo.

A BNCC também trata de como as aprendizagens são organizadas na Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, que são as etapas da educação Básica.

Tratando especificamente da Matemática, a BNCC propõe cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. Abordando um pouco a unidade temática Grandezas e medidas de forma mais direcionada ao estudo realizado nesse TCC, vemos que, sob a justificativa de que as medidas quantificam grandezas do mundo físico e são fundamentais para a compreensão da realidade, a BNCC, dentre outras coisas, espera que:

No *Ensino Fundamental - Anos Iniciais*, os estudantes compreendam a relação entre medir e comparar e expressem o resultado da comparação. Resolvam problemas relacionados à situações do cotidiano envolvendo grandezas como áreas (de triângulos e retângulos), que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos.

No *Ensino Fundamental - Anos Finais*, os estudantes reconheçam área como uma grandeza associada a figuras geométricas e resolvam problemas que envolvam essa grandeza determinando expressões de cálculo da área de quadriláteros, triângulos e círculos.

No *Ensino Médio* os estudantes construam e ampliem a noção de medida, pelo

estudo de diferentes grandezas, e obtenham expressões para o cálculo da medida da área de superfícies planas.

Estreitando ainda mais o foco, de acordo com a BNCC, o estudo dos polígonos deve ter início no 2º Ano e o estudo das áreas de regiões planas no 4º Ano, ambos do Ensino Fundamental - Anos iniciais, e continuar durante todo o restante da formação básica do estudante. Claro que a medida que o estudante evolui em cada ano o nível das habilidades a serem desenvolvidas também evolui. A utilização da malha quadriculada, nesse trabalho tratada como malha \mathbb{Z}^2 , também tem início no Ensino Fundamental - Anos Iniciais. É tratada como um, dentre outros, recurso didático essencial pra a apreensão de significados e utilização matemáticos. Convém salientar que o surgimento de uma habilidade nas séries iniciais de ensino não significa que sua utilização se resume a essas séries e sim que, a partir delas, o estudante deve apropriar-se e aprimorar tal habilidade. Assim, o estudo das áreas de polígonos em malhas quadriculadas está (ou deveria) presente nos currículos das escolas das redes públicas e privadas de ensino de todo o território nacional.

Essa dissertação traz um estudo sobre polígonos em \mathbb{Z}^2 . Nele dois temas principais são abordados.

No *Capítulo 3*, tratamos do cálculo de áreas de polígonos imersos em \mathbb{Z}^2 por meio do Teorema de Pick. O qual, ao invés de medidas de comprimento, como a maioria das fórmulas convencionais, usa o número de pontos da malha \mathbb{Z}^2 presentes nos lados do polígono e no seu interior para calcular a área de um polígono. Apresentando-se como uma forma alternativa e atraente de se chegar ao valor da área de polígonos simples cujos vértices são pontos da malha \mathbb{Z}^2 . Nesse capítulo fazemos a demonstração desse teorema a luz dos resultados apresentados por Elon Lages Lima em seu livro "Meu Professor de Matemática e outras histórias"(veja [13]).

No *Capítulo 2*, tratamos da existência de polígonos regulares na malha \mathbb{Z}^2 . Foi inspirado em um problema proposto por Burkard Polster em um dos vídeos de seu canal do YouTube "Mathologer", sobre quantos quadrados cabem em uma malha pontilhada com $n \times n$ pontos. E, corroborando com Albert Einstein quando disse "Não são as respostas que movem o mundo, são as perguntas", esse problema evolui para a verificação da existência de outros polígonos regulares nessa malha. Mostramos que os quadrados são os únicos polígonos regulares imersos em \mathbb{Z}^2 . Para isso, vemos que triângulos equiláteros não podem ser imersos em \mathbb{Z}^2 , pentágonos regulares também não e, finalmente, generalizamos para n-âgonos regulares com $n \geq 6$.

Naturalmente, para validar os resultados obtidos ao tratar dos temas dos Capítulos 2 e 3 acima citados, faz-se necessário alguns conceitos básicos que, nesse trabalho, são tratados no *Capítulo 1*. Tais conceitos, por si só, já trazem grande importância pois fazem parte dos conteúdos de matemática que devem ser trabalhados durante toda a Educação Básica, de acordo com a BNCC.

Encerrando esse trabalho, no *Capítulo 4*, trazemos a resolução de problemas e questões de exames aplicando os conteúdos estudados.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo trataremos de alguns conceitos necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Tais conceito serão utilizados nos resultados obtidos no estudo da imersão dos polígonos regulares em \mathbb{Z}^2 (Capítulo 2) e no cálculo das áreas desses polígonos por meio do Teorema de Pick (Capítulo 3). No entanto, com o intuito de ser sucinto, vários dos temas aqui serão tratados de maneira pontual, sempre que possível, deixando margens para aprofundamento em estudos futuros.

1.1 Distância entre pontos e ângulos entre segmentos

Sejam dados os pontos A e B , conforme [14], chamamos *distância* entre A e B e representamos por $d(A, B)$ o comprimento do segmento AB , assim $d(A, B) = \overline{AB}$. De acordo com [6] dados os pontos $A(a, b)$ e $B(c, d)$ pertencentes a um plano π com suas coordenadas relacionadas a um sistema de eixos ortogonais OXY dado, a distância de A a B pode ser calculada por

$$d(A, B) = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}.$$

Em [14] temos que, no plano, dadas duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das duas regiões delimitadas por essas semirretas. Na Figura 1.1, o ângulo α é convexo e β não convexo. Ambos os ângulos da figura pode ser denotados por $\angle AOB$, $\angle BOA$, \widehat{AOB} ou \widehat{BOA} .

Ainda em [14] vemos que é possível associar a cada ângulo uma medida da região ocupada por ele num espaço. Ao dividirmos um círculo em 360 arcos com medidas iguais, cada um desses arcos tem medida de 1° (um grau). Na Figura 1.2, temos $\angle AOB = 1^\circ$.

Os ângulos podem ser classificados de acordo com suas medidas. Alguns deles possuem nomes especiais, como, por exemplo: *Ângulo nulo* que é o ângulo de 0° ,

1.1. DISTÂNCIA ENTRE PONTOS E ÂNGULOS ENTRE SEGMENTOS

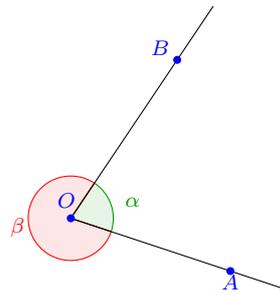


Figura 1.1: Regiões angulares no plano.

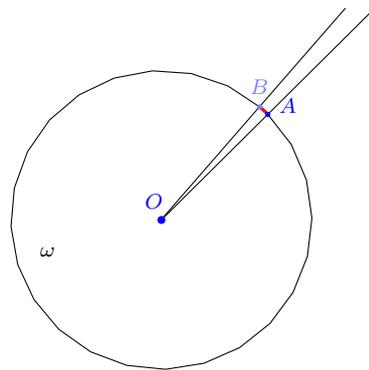


Figura 1.2: Representação de ângulo de 1° .

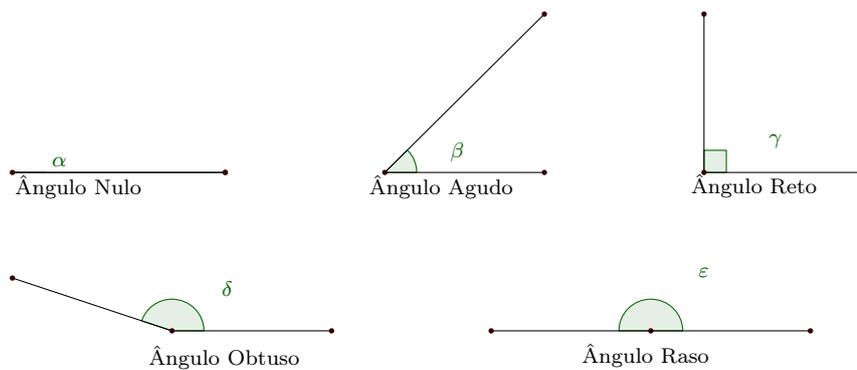


Figura 1.3: Nomenclatura dos ângulos.

Ângulo reto, o ângulo de 90° , *Ângulo Raso* que possui medida igual a 180° , entre outros. Também existe uma classificação para os ângulos. Chamamos *ângulo agudo* aquele que possui medida maior que 0° e menor que 90° e *ângulo obtuso* aquele cuja

medida é maior que 90° e menor que 180° , ver Figura 1.3.

1.2 Polígonos

Definição 1.1 Consideremos a sequência finita de pontos A_1, A_2, \dots, A_n com n natural maior que dois. Chamamos de polígono $A_1A_2\dots A_n$ o conjunto de todos segmentos formados por dois pontos consecutivos, a saber, $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ onde dois desses segmentos não possuem intersecção além dos vértices e, se consecutivos, não pertencem a mesma reta, ver exemplo na Figura 1.4.

Os pontos A_1, A_2, \dots, A_n são chamados *vértices do polígono* e os segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ são chamados de *lados do polígono*. Cada vértice é formador de dois segmentos que são chamados adjacentes deste vértice. A soma das medidas dos lados do polígono é chamada de perímetro e a região delimitada por esses lados chamamos de *região poligonal* $A_1A_2\dots A_n$.

Dizemos que um polígono é *simplex* quando em cada um de seus vértices há intersecção de apenas 2 lados, ou seja, todos os vértices são distintos. Um polígono que não é simplex é dito *complexo*. Ver exemplos na Figura 1.4.

Um polígono simplex é dito *convexo* quando a reta determinada por cada um de seus lados deixa todos os demais pontos do polígono em um mesmo dos dois semiplanos por ela determinados.

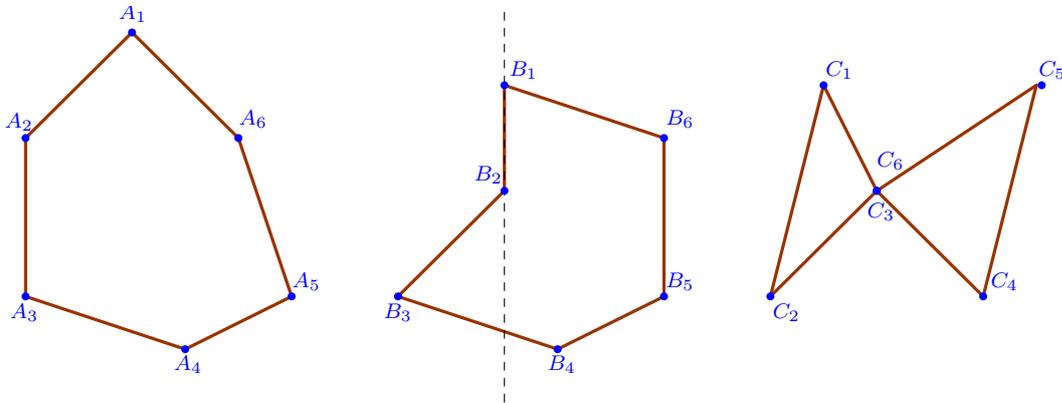


Figura 1.4: Polígonos de 6 lados: convexo (esq.) e não convexo (centro) e polígono complexo (dir.).

Em cada vértice do polígono convexo se forma um ângulo interno e dois externos. O interno, como o ângulo β na Figura 1.5, equivale ao ângulo convexo entre os dois lados adjacentes a esse vértice. Cada ângulo externo é formado entre um lado do polígono adjacente a um vértice e o prolongamento do outro lado adjacente ao mesmo vértice, como os ângulos α_1 e α_2 também na Figura 1.5.

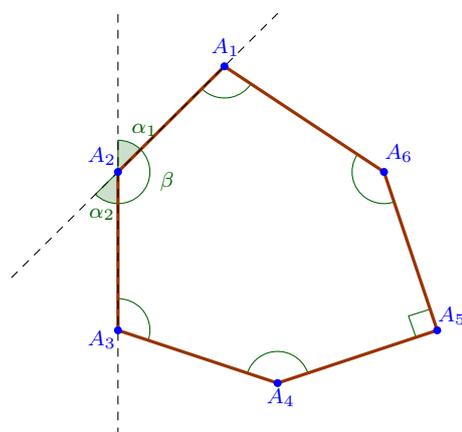


Figura 1.5: Ângulos no vértice A_2 .

Usando o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° (veja [14, Proposição 2.18]), verifica-se que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada por

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Quando as dimensões de todos os lados de um polígono são iguais, nós o denominamos de polígono *equilátero*. Se todos os ângulos internos de um polígono equilátero possuem a mesma medida, dizemos que esse polígono é *regular*. Obviamente, todo polígono regular é equilátero mas a recíproca não é verdadeira.

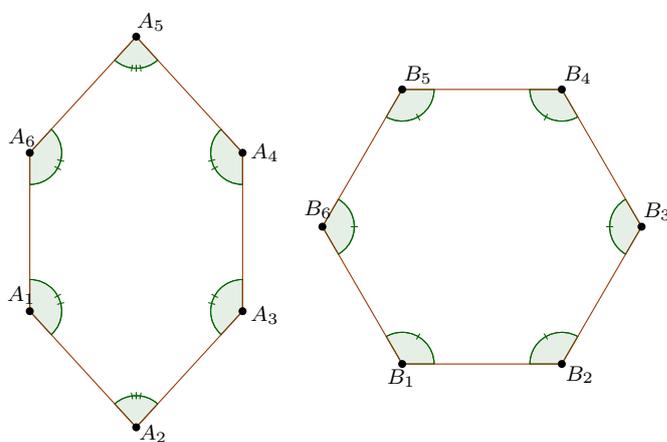


Figura 1.6: Hexágonos Equilátero (esq.) e Regular (dir.).

Os polígonos são nomeados de acordo com o número de lados e vértices que possuem. Como vemos em [14], o polígono $A_1A_2\dots A_n$ é chamado n -ágono. Alguns,

no entanto, recebem nomes especiais. Vejamos na Figura 1.7 alguns polígonos e seus respectivos nomes. Por conveniência, exibimos polígonos regulares.

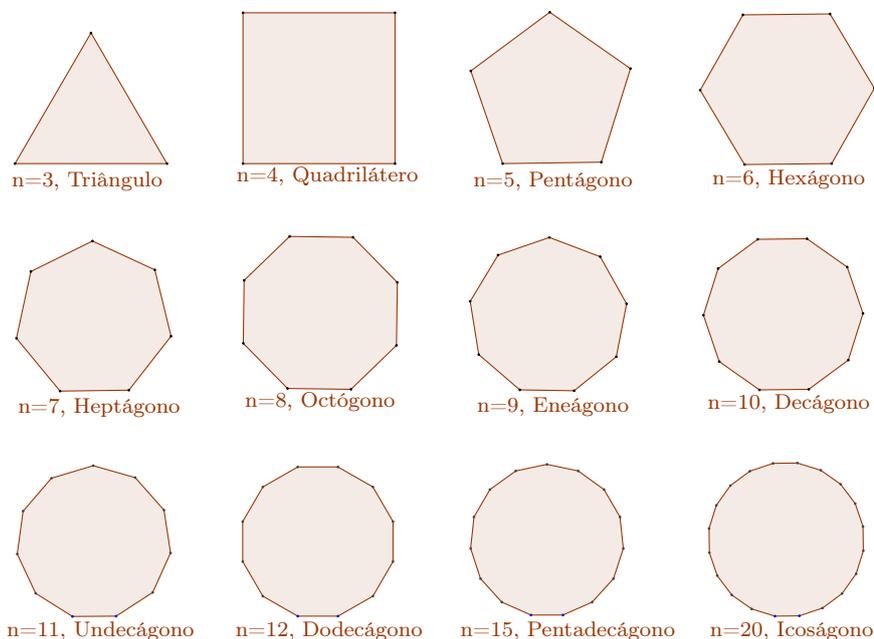


Figura 1.7: Nomenclatura de alguns polígonos de n lados.

1.2.1 Triângulos

Devido a sua utilização posterior, faz-se necessário tratarmos especificamente de alguns polígonos. O primeiro deles: triângulo. Porém, nem todas as propriedades desse polígono serão tratadas, pois isso tiraria o foco do trabalho principal.

Três pontos não colineares em um plano formam um triângulo.

De [14, Definição 1.10], considerando as dimensões dos lados, denominamos escaleno um triângulo que não possui dois lados com a mesma medida, isósceles se possui ao menos dois lados com medidas iguais e equilátero se as medidas de seus três lados são iguais como os triângulos ABC , DEF e GHI da Figura 1.8 respectivamente.

Os triângulos também podem ser classificados de acordo com as medidas de seus ângulos internos. Chamamos de *triângulo retângulo* aquele que tem um ângulo reto, *triângulo acutângulo* aquele cujos ângulos internos são agudos e *triângulo obtusângulo* aquele que tem um ângulo interno obtuso.

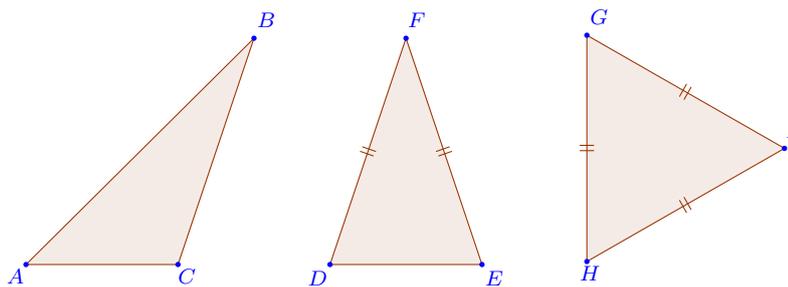


Figura 1.8: Triângulo escaleno (esq.), isósceles (centro) e equilátero (dir.).

Congruência de triângulos

Dizemos que dois segmentos AB e CD são *congruentes* se $\overline{AB} = \overline{CD}$ e que dois ângulos \widehat{A} e \widehat{B} são *congruentes* se possuem a mesma medida (ver [1, Definição 4.1]). Assim, como BARBOSA 1995, usaremos “=” para representar congruência.

Em [1, Definição 4.2] temos:

Definição 1.2 *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Daí, sendo ABC e $A_1B_1C_1$ triângulos congruentes e se a correspondência de congruência é de modo que A equivale a A_1 , B equivale a B_1 e C equivale a C_1 , então valem as relações seguintes:

$$\begin{aligned} AB &= A_1B_1 & AC &= A_1C_1 & BC &= B_1C_1 \\ \widehat{ABC} &= \widehat{A_1B_1C_1} & \widehat{CAB} &= \widehat{C_1A_1B_1} & \widehat{BCA} &= \widehat{B_1C_1A_1} \end{aligned}$$

NETO 2013, sobre a congruência de triângulos, diz que: *dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.*

Na Figura 1.9, partindo de um dos triângulos, podemos obter os outros por meio de transformações isométricas. Exemplos: se rotacionarmos o triângulo ABC em torno de um dos vértices e o transladarmos, podemos fazê-lo coincidir com o triângulo $A_1B_1C_1$ e, se refletirmos o triângulo $A_1B_1C_1$ usando o lado B_1C_1 como eixo de simetria e, em seguida, transladarmos esse triângulo movendo-o para a direita, podemos fazê-lo coincidir com o triângulo $A_2B_2C_2$.

Representamos a congruência entre os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ por

$$ABC \equiv A_1B_1C_1.$$

Na Figura 1.9 $ABC \equiv A_1B_1C_1 \equiv A_2B_2C_2$.

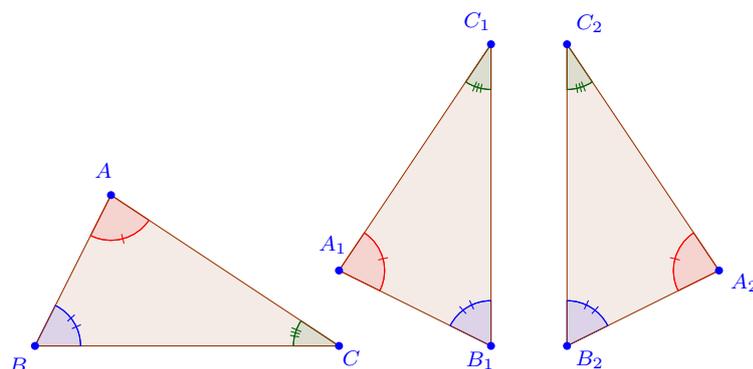


Figura 1.9: Três triângulos congruentes entre si.

Convém salientar que todo triângulo é congruente a si mesmo (**Propriedade Reflexiva**). Além disso, NETO 2013 [14], cita duas propriedades importantes sobre a congruência de triângulos que surgem da definição:

- **Simetria:** Se um triângulo ABC é congruente a um triângulo $A_1B_1C_1$ a recíproca é verdadeira.
- **Transitividade:** Se ABC é congruente a $A_1B_1C_1$ e $A_1B_1C_1$ é congruente a $A_2B_2C_2$, então ABC é congruente de $A_2B_2C_2$.

Casos de Congruência de Triângulos:

Citamos a seguir os principais casos de congruência de triângulos (ver [14, Axiomas 2.3, 2.5 e 2.7]):

- **Caso LAL (Lado-Ângulo-Lado):** Se um ângulo de um triângulo e seus lados adjacentes forem respectivamente iguais a um ângulo e os lados adjacentes deste em outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. Na Figura 1.10 $AC = A_1C_1$, $\widehat{CAB} = \widehat{C_1A_1B_1}$ e $AB = A_1B_1$, portanto $ABC \equiv A_1B_1C_1$.

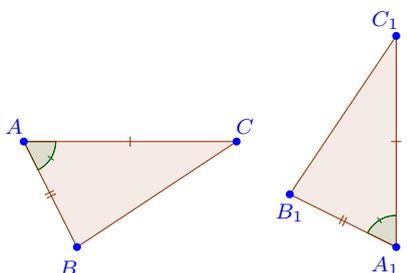


Figura 1.10: Congruência - Caso LAL

- **Caso ALA (Ângulo-Lado-Ângulo):** Se em um triângulo dois ângulos e o lado entre eles são respectivamente iguais a dois ângulos e o lado entre eles de outro triângulo, então esses dois triângulos são congruentes. Na Figura 1.11 $\widehat{ABC} = \widehat{A_1B_1C_1}$, $AB = A_1B_1$ e $\widehat{CAB} = \widehat{C_1A_1B_1}$, logo $ABC \equiv A_1B_1C_1$.

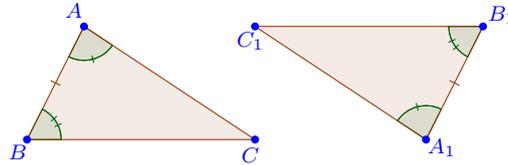


Figura 1.11: Congruência - Caso ALA

- **Caso LLL (Lado-Lado-Lado):** Se os três lados de um triângulo são congruentes aos respectivos lados de outro triângulo, esses triângulos são congruentes. Na Figura 1.12 $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ e $BC = B_1C_1$, logo $ABC \equiv A_1B_1C_1$.

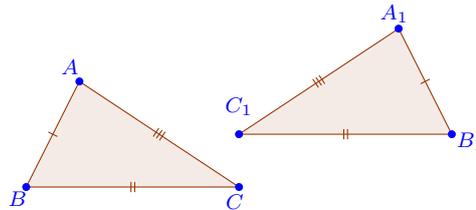


Figura 1.12: Congruência - Caso LLL

Semelhança de triângulos

Em NETO (2013), vemos que, se entre o triângulo ABC , com lados de medidas a, b e c pertencentes aos reais, e o triângulo $A_1B_1C_1$, conforme a Figura 1.13, há uma correspondência de vértices de modo que $A \leftrightarrow A_1$, $B \leftrightarrow B_1$ e $C \leftrightarrow C_1$, $\widehat{ABC} = \widehat{A_1B_1C_1}$, $\widehat{CAB} = \widehat{C_1A_1B_1}$ e $\widehat{BCA} = \widehat{B_1C_1A_1}$ e existe um real positivo k tal que $A_1B_1 = k \cdot c$, $B_1C_1 = k \cdot a$ e $C_1A_1 = k \cdot b$, então esses dois triângulos são semelhantes.

O número k é denominado de razão de semelhança entre $A_1B_1C_1$ e ABC , assim:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{CA}} = k.$$

Convém destacar que a razão de semelhança entre ABC e $A_1B_1C_1$ é dada por

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C_1A_1}} = \frac{1}{k}.$$

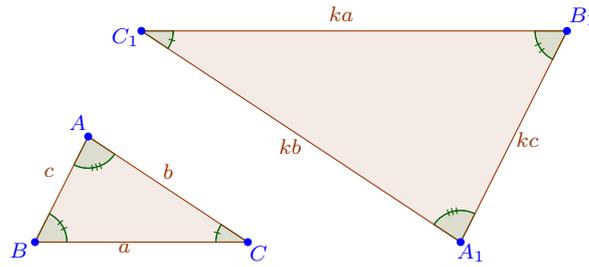


Figura 1.13: Triângulos semelhantes.

A semelhança entre dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$, com a correspondência de vértices na ordem da escrita, pode ser denotada por $ABC \sim A_1B_1C_1$.

Assim como na congruência, NETO 2013 (Veja [14, Proposições 4.6, 4.7 e 4.8]) destaca casos de semelhança entre triângulos citados respectivamente a seguir:

- **Caso LLL (Lado-Lado-Lado):** Sejam dois triângulos no plano, ABC e $A_1B_1C_1$, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C_1A_1}}.$$

Então $ABC \sim A_1B_1C_1$, com a correspondência de vértices na ordem da escrita. Em particular, os ângulos internos dos vértices correspondentes são iguais.

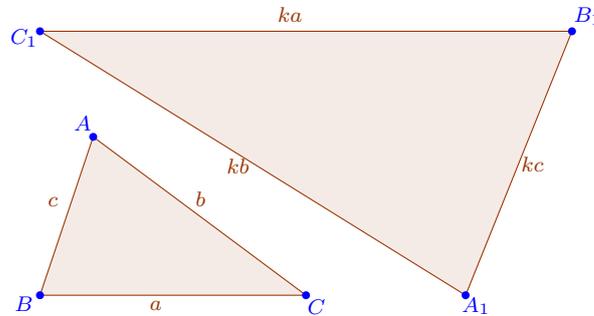


Figura 1.14: Triângulos semelhantes - caso LLL.

- **Caso LAL (Lado-Ângulo-Lado):** Sejam dois triângulos no plano, ABC e $A_1B_1C_1$, de modo que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = k \text{ e } \widehat{B} = \widehat{B_1}.$$

Então $ABC \sim A_1B_1C_1$, com a correspondência de vértices na ordem da escrita.

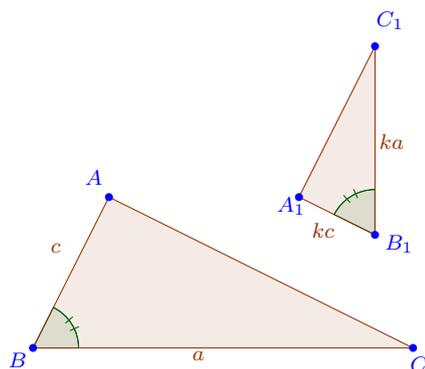


Figura 1.15: Triângulos semelhantes - caso LAL.

- **Caso AA (Ângulo-Ângulo):** Sejam dois triângulos no plano ABC e $A_1B_1C_1$, de modo que

$$\widehat{A} = \widehat{A_1} \text{ e } \widehat{B} = \widehat{B_1}.$$

Então $ABC \sim A_1B_1C_1$.

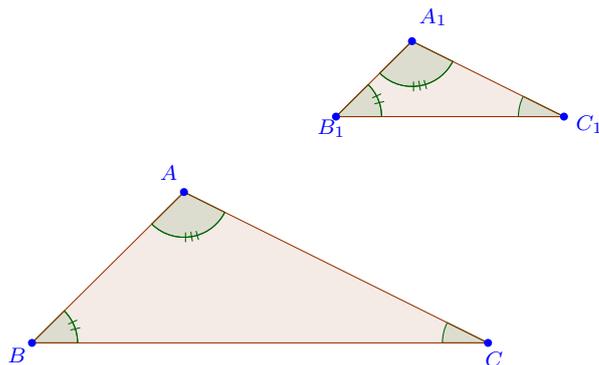


Figura 1.16: Triângulos semelhantes - caso AA.

Como consequência dos casos de semelhança de triângulos citados anteriormente, NETO 2013 (ver [14, Proposição 4.9]) estabelece as relações métricas em triângulos retângulos conforme transcreve-se a seguir:

Proposição 1.1 *Seja ABC , conforme a Figura 1.17, um triângulo retângulo em A , com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$.*

Se H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$ e $\overline{AH} = h$, temos:

(a) $ah = bc$.

$$(b) \quad am = b^2 \quad e \quad an = c^2.$$

$$(c) \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

$$(d) \quad mn = h^2.$$

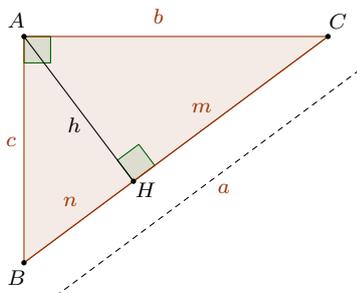


Figura 1.17: Triângulo retângulo ABC .

O item (c) da proposição acima é conhecido como **Teorema de Pitágoras**. Posteriormente será apresentada uma demonstração para o mesmo usando, dentre outras, as ideias de áreas.

Lei dos Cossenos e Lei dos Senos

Outras duas ferramentas matemáticas importantes na determinação das medidas de lados e ângulos de triângulos são a *lei dos cossenos* e a *lei dos senos*.

A lei dos cossenos relaciona as medidas dos três lados de um triângulo e o cosseno de um dos seus ângulos (ver [14, Proposição 6.21]), da seguinte forma:

Proposição 1.2 *Seja ABC um triângulo, então:*

$$\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\widehat{BCA}).$$

De forma análoga ao citado acima, podemos isolar os demais lados ABC .

A lei dos senos estabelece a igualdade das razões entre cada lado do triângulo e o seno do ângulo oposto a esse lado. Além disso, essa razão é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao referido triângulo. Veja a proposição a seguir cuja demonstração se encontra em ([14, Proposição 6.25]).

Proposição 1.3 *Dado um triângulo ABC , tem-se:*

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\widehat{BCA})} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen}(\widehat{CAB})} = \frac{\overline{CA}}{\text{sen}(\widehat{ABC})}.$$

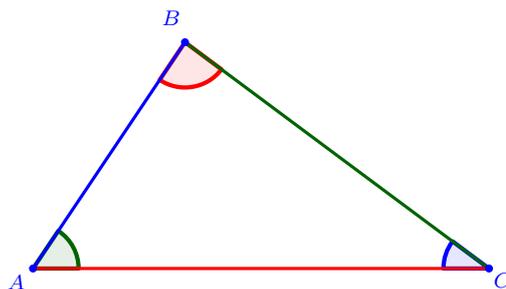


Figura 1.18: Relação lado-ângulo oposto em ABC por cores.

Algumas relações trigonométricas

Ainda sob o intuito de fundamentar futuros resultados, é importante citarmos:

A relação trigonométrica fundamental ([11, Página 108]). Seja ABC um triângulo qualquer no plano e $\widehat{\beta}$ a medida de um de seus ângulos internos. Então temos:

$$\cos^2 \widehat{\beta} + \sen^2 \widehat{\beta} = 1. \quad (1.1)$$

As fórmulas de adição. De acordo com Elon Lages, estas são fórmulas clássicas e exprimem $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sen(\alpha + \beta)$ em termos de $\cos\alpha$, $\sen\alpha$, $\cos\beta$ e $\sen\beta$. Aqui citaremos apenas algumas destas relações que podem ser vistas, juntamente com suas demonstrações, em ([11, Página 199]). São elas:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sen\alpha \cdot \sen\beta,$$

de onde se obtém

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sen\alpha \cdot \sen\beta.$$

Além de

$$\sen(\alpha + \beta) = \sen\alpha \cdot \cos\beta + \sen\beta \cdot \cos\alpha, \quad (1.2)$$

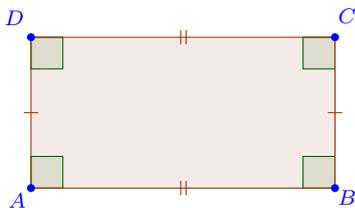
de onde resulta

$$\sen(\alpha - \beta) = \sen\alpha \cdot \cos\beta - \sen\beta \cdot \cos\alpha.$$

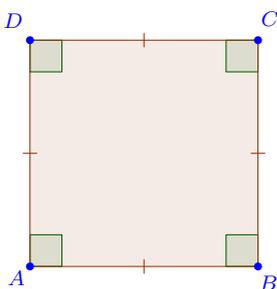
1.2.2 Quadriláteros

Dentre os polígonos com quatro lados, há a necessidade de destacarmos dois que serão importantes nas etapas seguintes deste trabalho.

O primeiro deles é o *Retângulo* quadrilátero que possui quatro ângulos retos (ver Figura 1.19).

Figura 1.19: Retângulo $ABCD$.

O outro quadrilátero a ser destacado é o *Quadrado* que é um retângulo cujos lados possuem medidas iguais, como na Figura 1.20.

Figura 1.20: Quadrado $ABCD$.

1.2.3 Área de um polígono:

Chamamos de *área de um polígono* um número positivo que associamos à região delimitada pelos lados desse polígono e quantifica essa região. Na construção do conceito de área, ELON LAGES 1991 [12], compara a área de uma figura plana (aqui aplicamos aos polígonos) a um número equivalente a quantas unidades de área cabem nessa figura. Sendo a área fundamental o espaço ocupado por um quadrado de lado 1 unidade de medida.

Representamos a área de um polígono, escrevendo seus vértices entre parênteses. Assim, $(A_1A_2\dots A_n)$, representa a área da região delimitada pelo polígono $A_1A_2\dots A_n$.

ELON LAGES (veja [12, Pág. 21]) cita 3 propriedades da área que importam ser citadas:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais;
2. A área de um quadrado de lado $1cm$ é igual a $1cm^2$;

1.2. POLÍGONOS

3. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos então a área do polígono é a soma das áreas dos polígonos menores.

Vejam os seguintes fórmulas que podem associar medidas de alguns dos polígonos mais conhecidos às suas áreas. Estas podem ser melhor analisadas em [14, Proposições 5.1, 5.2 e 5.2], respectivamente.

- A área de um quadrado $ABCD$ de lado a é a^2 .
- A área de um retângulo $ABCD$ de lados a e b é $a \cdot b$.
- A área de um triângulo ABC de lados a , b e c e alturas relativas a esses lados, respectivamente, h_a , h_b e h_c é dada por $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$.

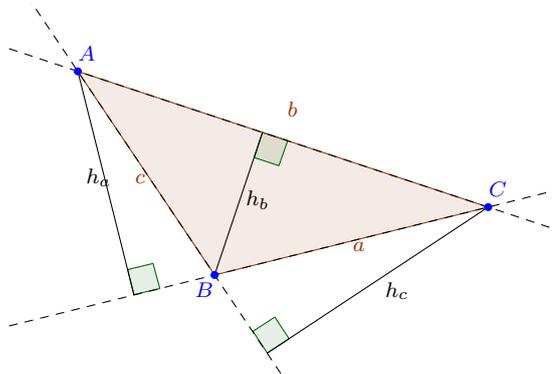


Figura 1.21: Área de um triângulo: (ABC) .

- *Área de triângulo equilátero.* O cálculo da área desse triângulo pode normalmente ser feito como o de um triângulo qualquer. Mas temos uma fórmula matemática que deriva da anterior e pode ser utilizada diretamente quando sabemos apenas a medida de seus lados. Vejamos:

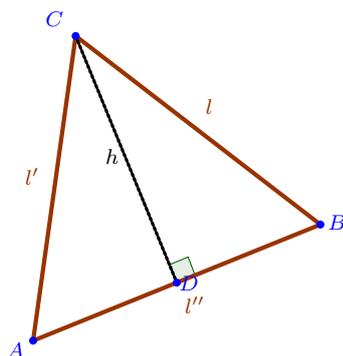
Seja ABC um triângulo equilátero de lado l , conforme a Figura 1.22, onde D é a projeção ortogonal de C em AB , e, conseqüentemente, onde h é a altura em relação ao lado AB .

Note que $\widehat{CDA} = \widehat{CDB} = 90^\circ$ e, $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$, pois ABC é equilátero. Logo, pela soma dos ângulos internos de um triângulo,

$$\widehat{DAC} + \widehat{CDA} + \widehat{ACD} = 180^\circ = \widehat{DBC} + \widehat{CDB} + \widehat{BCD}$$

daí,

$$\widehat{ACD} = \widehat{BCD}.$$

Figura 1.22: Triângulo Equilátero: (ABC) .

Assim, pelo caso AAA de semelhança de triângulos, temos $DAC \sim DBC$. E, como $\overline{AC} = \overline{BC}$ e CD é comum a DAC e DBC , pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $DAC \equiv DBC$. E daí $\overline{AD} = \overline{DB} = l/2$. Usando o Teorema de Pitágoras em BDC , obtemos

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 \Rightarrow l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2,$$

donde

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando em ABC a fórmula da área de triângulos quaisquer vista no item anterior, temos:

$$(ABC) = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Então a área de triângulos equiláteros quando conhecemos a medida l de seus lados é igual a $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

O estudo do cálculo da área de triângulos, é muito importante. Principalmente se considerarmos que qualquer polígono convexo de n lados pode ser dividido em $n - 2$ triângulos e que, como já fora citado, se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

Uma demonstração do Teorema de Pitágoras usando áreas de polígonos

Atualmente há registro de centenas de demonstrações do Teorema de Pitágoras. Algumas delas baseiam-se no estudo das áreas dos polígonos, outras na semelhança

e propriedades de triângulos, entre outras. A seguir temos uma demonstração que utiliza algumas das ideias tratadas até agora. ela foi inspirada na prova 4 de um total de 122 apresentadas no site “Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles” (veja [3]) e encontra-se, de forma animada, em um vídeo disponibilizado via Youtube em [15]. Vejamos a demonstração:

Teorema 1.1 Teorema de Pitágoras. *Dado um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c , temos que a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida de hipotenusa.*

Demonstração: Partindo do triângulo ABC , consideramos o quadrado $ADEF$ de lados medindo $b + c$, conforme Figura 1.23(a).

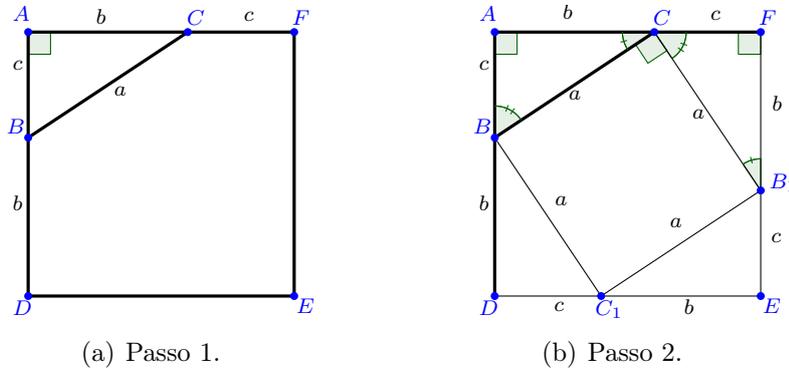


Figura 1.23: Teorema de Pitágoras.

Marquemos em EF o ponto B_1 de modo que $\overline{FB_1} = b$ e $\overline{B_1E} = c$, e o ponto C_1 em DE de modo que $\overline{EC_1} = b$ e $\overline{C_1D} = c$. Conforme a Figura 1.23(b). Assim, pelo caso LAL de congruência de triângulos:

$$ABC \cong FCB_1 \cong CB_1C_1 \cong DC_1B$$

e

$$\overline{BC} = \overline{CB_1} = \overline{B_1C_1} = \overline{C_1B} = a$$

ou seja, BCB_1C_1 é equilátero. Por outro lado, temos que \widehat{ACF} é um ângulo raso e daí

$$180^\circ = \widehat{ACF} = \widehat{ACB} + \widehat{CB_1C} + \widehat{C_1CF}.$$

Pela soma dos ângulos internos de um triângulo, temos

$$\widehat{B_1CF} + \widehat{CFB_1} + \widehat{FB_1C} = 180^\circ.$$

Como

$$\widehat{ACB} = \widehat{FB_1C} \text{ e } \widehat{CB_1A} = \widehat{B_1CF},$$

graças a congruência $ABC \equiv FCB_1$, segue que

$$\widehat{BCB_1} = \widehat{CFB_1} = 90^\circ.$$

Portanto, BCB_1C_1 é um quadrado de lado a .

Observando as áreas dos polígonos da Figura ??, facilmente percebemos que

$$(ADEF) = (ACB) + (FB_1C) + (EB_1C_1) + (DC_1B) + (BCB_1C_1)$$

ou seja,

$$(b+c)^2 = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + a^2$$

ou ainda,

$$b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c = 2 \cdot b \cdot c + a^2$$

o que nos dá

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Conclui-se assim a demonstração do teorema. ■

Sem a necessidade de outros conceitos básicos, aqui concluímos esse capítulo.

Capítulo 2

Imersão de polígonos em \mathbb{Z}^2

Esse capítulo é dedicado a tratar da imersão de polígonos no \mathbb{Z}^2 , com foco nos polígonos regulares. Foi inspirado em um vídeo (ver [17]) postado no Canal do Youtube Mathologer. Um problema apresentado no vídeo por Burkard Polster é: "Quantos quadrados distintos podemos formar usando como vértices os pontos que aparecem na Figura 2.1?".

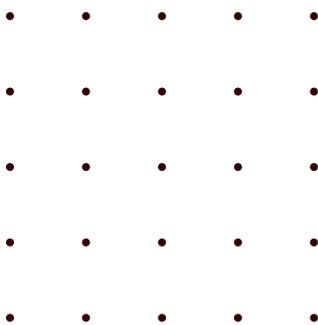


Figura 2.1: Quantos quadrados podemos fazer?

De acordo com Polster, esse problema, o qual será tratado posteriormente nesse trabalho, é um convite ao erro. Mas nos faz pensar em outras possibilidades tais como: Quantos quadrados poderíamos formar se tivéssemos mais linhas e colunas de pontos? Podemos formar outros polígonos regulares nas mesmas condições?

Assim chegamos ao foco desse capítulo. E pretendemos mostrar que os quadrados são os únicos polígonos regulares que podem ser imersos na malha \mathbb{Z}^2 .

Como de praxe, iniciamos com algumas definições.

2.1 Definições preliminares

De acordo com DELGADO [6], um **sistema de eixos ortogonais** em um plano π é um par de eixos OX e OY que se intersectam perpendicularmente em uma origem comum e possuem unidade de medida de igual comprimento. A escolha de um sistema de eixos ortogonais permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano π e os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$. Assim fazemos uma correspondência entre o ponto $A \in \pi$ e o par ordenado (x, y) , no qual x é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OX , passando por A e y é a coordenada da perpendicular ao eixo OY passando por A (ver Figura 2.2). Reciprocamente, localizamos o ponto A na intersecção da perpendicular ao eixo OX que passa pelo ponto de coordenada x desse eixo com a perpendicular ao eixo OY que passa pelo ponto de coordenada y desse eixo. De agora por diante, chamaremos o plano com esse sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 .

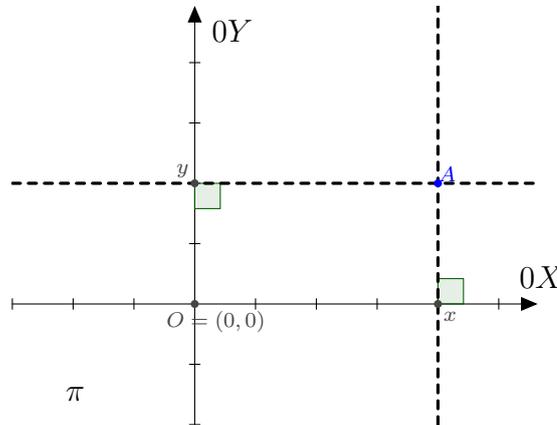


Figura 2.2: Sistema \mathbb{R}^2 no plano π .

Quando as coordenadas de um ponto pertencente a \mathbb{R}^2 forem números inteiros, diremos que esse ponto pertence a $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Ou seja, se

$$A = (a, b) \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{Z}, \text{ então } A \in \mathbb{Z}^2.$$

Conforme podemos ver na Figura 2.3(a), as retas perpendiculares aos eixos OX e OY formam uma malha quadriculada e os pontos de intersecção de duas quaisquer dessas retas possui coordenadas inteiras. Essa é a malha \mathbb{Z}^2 .

Quando os dois pontos da extremidade de um segmento pertencem a \mathbb{Z}^2 , dizemos que esse segmento está imerso em \mathbb{Z}^2 . Semelhantemente, quando todos os vértices de um polígono pertencerem a \mathbb{Z}^2 , dizemos que esse polígono está imerso em \mathbb{Z}^2 (ver Figura 2.3(b)).

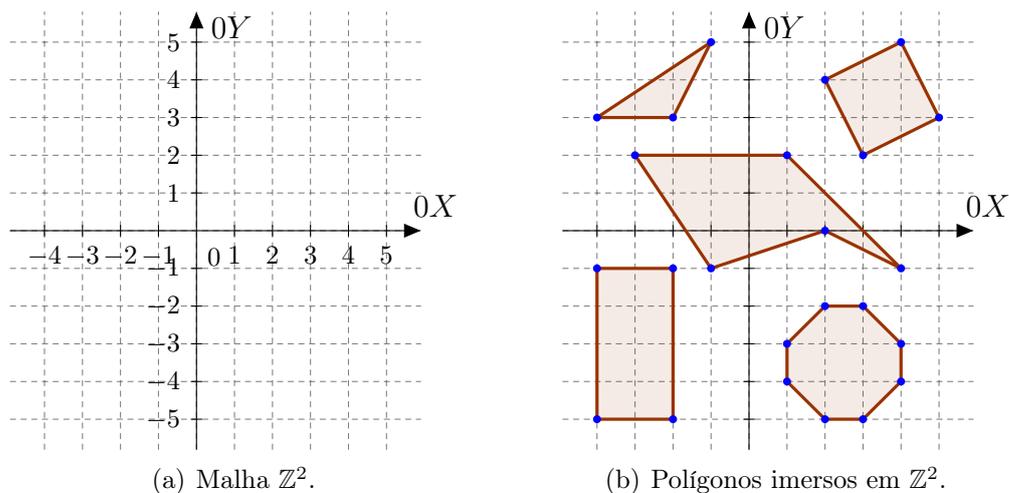


Figura 2.3:

Lema 2.1 *Ao rotacionarmos 90° um segmento imerso em \mathbb{Z}^2 em torno de um de seus vértices, o vértice deslocado também pertence a \mathbb{Z}^2 .*

Demonstração: Dividiremos, didaticamente, essa prova em 3 casos:

Caso 1: Segmento horizontal ou vertical.

Tratemos do segmento horizontal sabendo que o segmento vertical é análogo. Sejam $A = (x_A, y)$ e $B = (x_B, y)$ com x_A, x_B e $y \in \mathbb{Z}$. Neste caso, sem perda de generalidade, usemos $x_A < x_B$. Ao rotacionarmos 90° no sentido anti-horário o segmento AB em torno do ponto A , encontramos o ponto $B' = (x_A, y')$ (ver Figura 2.4). Como as coordenadas de A e B são inteiras temos

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |x_B - x_A| = x_B - x_A \in \mathbb{Z}.$$

Como

$$\overline{AB} = \overline{AB'} \text{ e } \overline{AB'} = y' - y,$$

segue que

$$y' = \overline{AB} + y \in \mathbb{Z}.$$

Consequentemente, $B' \in \mathbb{Z}^2$.

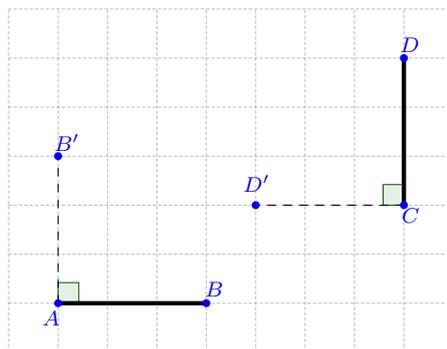


Figura 2.4: Rotação de segmentos horizontal e vertical.

Caso 2: Segmentos oblíquos tais que a ordenada do vértice de maior abscissa é maior.

Tomemos os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_B, y_A) \in \mathbb{Z}^2$ conforme Figura 2.5.

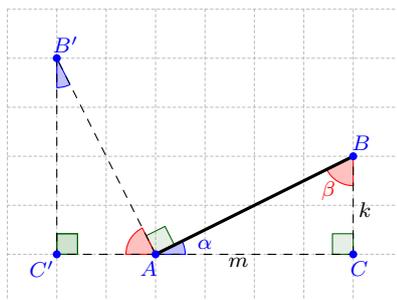


Figura 2.5: Rotação do segmento AB.

Temos que ACB é retângulo em C . Tomemos $B\hat{A}C = \alpha$ e $C\hat{B}A = \beta$. Pode-se notar que $\alpha + \beta = 90^\circ$. Rotacionando 90° no sentido anti-horário o segmento AB em torno do ponto A encontramos o ponto $B' = (x_{B'}, y_{B'})$ de modo que $\overline{AB} = \overline{AB'}$. Tomemos ainda o ponto $C' = (x_{B'}, y_A)$. Assim, o triângulo $B'C'A$ é retângulo em C' . Como os pontos C, A e C' são colineares, temos que $C\hat{A}C' = 180^\circ$, ou seja,

$$180^\circ = C\hat{A}B + B\hat{A}B' + B'\hat{A}C' = \alpha + 90^\circ + B'\hat{A}C'.$$

Então

$$\alpha + B'\hat{A}C' = 90^\circ,$$

o que implica em

$$B'\hat{A}C' = \beta.$$

Daí, analisando $B'C'A$, temos:

$$180^\circ = C'\hat{B}'A + A\hat{C}'B' + B'\hat{A}C' = C'\hat{B}'A + 90^\circ + \beta$$

2.1. DEFINIÇÕES PRELIMINARES

logo

$$\widehat{C'B'A} = \alpha.$$

Assim, pelo caso ALA de congruência de triângulos, temos:

$$ACB \equiv B'C'A \Rightarrow \overline{AC} = \overline{B'C'} := m \text{ e } \overline{CB} = \overline{C'A} := k.$$

Convém salientar que k e $m \in \mathbb{Z}$, pois

$$y_A \text{ e } y_B \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad k = \overline{C, B} = y_B - y_A$$

e

$$x_A \text{ e } x_B \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad m = \overline{A, C} = x_B - x_A.$$

Observemos ainda que

$$k = \overline{A, C'} = x_A - x_{B'} \quad \Rightarrow \quad x_{B'} = x_A - x \in \mathbb{Z}$$

e

$$m = \overline{B', C'} = y_{B'} - y_A \quad \Rightarrow \quad y_{B'} - y_A + m \in \mathbb{Z}.$$

Concluimos então que $B' = (x_{B'}, y_{B'}) = (x_A - (y_B - y_A), y_A + (x_B - x_A)) \in \mathbb{Z}^2$.

Caso 3: Segmentos oblíquos onde a ordenada do vértice de maior abscissa é menor. Neste caso, considerando os pontos C e C' como na Figura 2.6, a prova é análoga à do Caso 2.

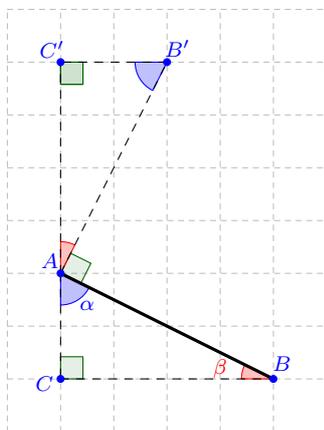


Figura 2.6: Rotação do segmentos AB.

Com isso encerramos a prova do lema. ■

Um fato facilmente notado é que, com base no Lema 2.1, podemos perceber que se rotacionarmos 90° a malha \mathbb{Z}^2 em torno de um de seus pontos, o formato da mesma não se altera. O próximo resultado trata de translação em \mathbb{R}^2 .

2.1. DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Definição 2.1 A translação de um segmento consiste no deslocamento de cada ponto deste segmento a uma distância fixa, paralelamente a uma direção fixada e no mesmo sentido. Indicando por x o deslocamento na direção horizontal e y o deslocamento na direção vertical, vemos que a translação de um ponto $C = (a, b)$ é o ponto $C' = (a + x, b + y)$, para todo $C \in AB$.

Lema 2.2 Se CD é a translação de um segmento AB imerso em \mathbb{Z}^2 e $C \in \mathbb{Z}^2$ então CD está imerso em \mathbb{Z}^2 .

Demonstração: Sejam $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2$ (Ver exemplo na Figura 2.7).

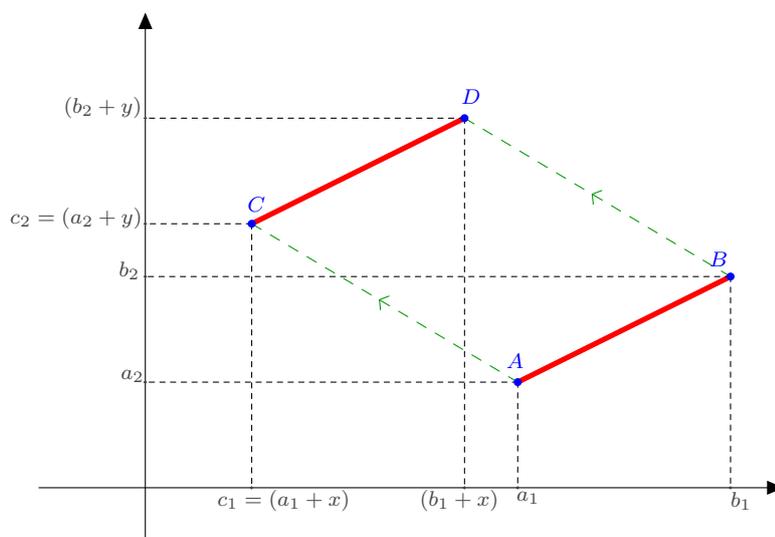


Figura 2.7: Translação do segmentos AB .

Como CD é obtido através de uma translação de AB , temos

$$C = A + P \text{ e } D = B + P \text{ onde } P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ é um vetor fixo.}$$

Como A e $C \in \mathbb{Z}^2$, temos

$$(x, y) = P = C - A = (c_1 - a_1, c_2 - a_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Daí, como $B \in \mathbb{Z}^2$, obtemos

$$D = B + P = (b_1, b_2) + (x, y) = (b_1 + x, b_2 + y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Portanto, os dois vértice do segmento CD estão em \mathbb{Z}^2 , ou seja, CD está imerso em \mathbb{Z}^2 . Concluindo essa demonstração

■

2.2 Imersão de polígonos regulares em \mathbb{Z}^2

Nessa seção pretende-se mostrar que os quadrados são os únicos polígonos regulares que podem ser imersos em \mathbb{Z}^2 . Trataremos dos triângulos, quadrados, pentágonos e, finalmente, faremos uma generalização para n-ângulos com $n \geq 5$.

2.2.1 Imersão de triângulos regulares em \mathbb{Z}^2

Nesta seção veremos que não existem triângulos regulares imersos em \mathbb{Z}^2 . Apresentamos duas demonstrações para esse resultado. A primeira prova é apresentada no Teorema 2.1, foi creditada a M. Edouard Lucas, reescrita por BEENSON (1992) e pode ser vista em [2, pág. 250]. Vejamos:

Teorema 2.1 *Um triângulo equilátero não pode ser imerso em \mathbb{Z}^2*

Demonstração: Suponhamos que existe um triângulo equilátero imerso em \mathbb{Z}^2 . Sem perda de generalidade, podemos supor que seus vértices são $A = (0, 0)$, $B = (a, b)$ e $C = (x, y)$ onde $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ e não tem fator comum. Veja Figura 2.8:

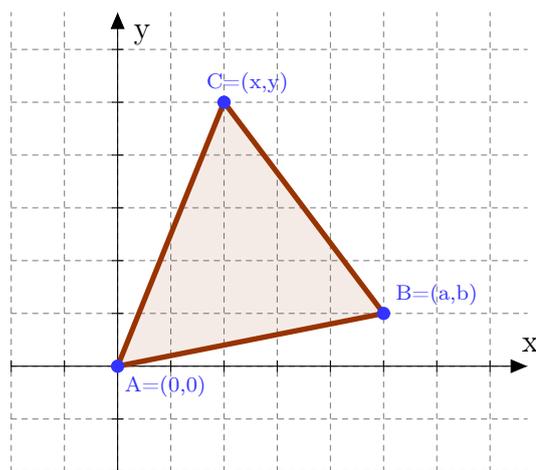


Figura 2.8: Triângulo imerso em \mathbb{Z}^2 .

Temos que:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= (a - 0)^2 + (b - 0)^2 = a^2 + b^2 \\ \overline{AC}^2 &= (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2 \\ \overline{BC}^2 &= (x - a)^2 + (y - b)^2 = x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \\ &\quad - 2(xa + by) + x^2 + y^2 + a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Como os três lados de ABC tem a mesma medida, segue que

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = -2(xa + by) + x^2 + y^2 + a^2 + b^2$$

e, portanto

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = 2(xa + by)$$

e

$$a^2 + b^2 + x^2 + y^2 = 4(xa + by) \equiv 0 \pmod{4}. \quad (2.1)$$

Além disso, como $\overline{AB} = \overline{BC}$, vemos que

$$x^2 + y^2 \equiv [(x - a)^2 + (y - b)^2] \pmod{4}. \quad (2.2)$$

Afirmação 2.1 *Se a equação (2.1) vale, então, $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ são ímpares.*

De fato, vejamos o que ocorreria se houvesse números pares entre eles.

A princípio verifiquemos para o caso de um desses números ser par. Para tanto, suponhamos, sem perda de generalidade, que a seja do tipo $2k + 1$, b seja do tipo $2m + 1$, x seja do tipo $2n + 1$ e y seja do tipo $2p$ para $k, m, n, p \in \mathbb{Z}$. Nessas condições teríamos:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + x^2 + y^2 &= (2k + 1)^2 + (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2p)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4p^2 \\ &= 4(k^2 + m^2 + n^2 + p^2 + k + m + n) + 3 \equiv 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$

De modo análogo (2.1) também não vale se dois ou três dos números $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ forem pares e, como já foi dito, estes não podem ter fator comum e, conseqüentemente não podem ser todos pares. Isso conclui a prova da afirmação.

Afirmação 2.2 *Se $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ são ímpares então (2.2) não vale.*

De fato, se a é do tipo $2k + 1$, b é do tipo $2m + 1$, x é do tipo $2n + 1$ e y é do tipo $2p + 1$ para $k, m, n, p \in \mathbb{Z}$, então temos:

$$x^2 + y^2 = (2n + 1)^2 + (2p + 1)^2 = 4(n^2 + n + p^2 + p) + 2 \equiv 2 \pmod{4}$$

e

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (2n - 2k)^2 + (2p - 2m)^2 = 4[(n - k)^2 + (p - m)^2] \equiv 0 \pmod{4}.$$

Assim, $x^2 + y^2$ e $(x - a)^2 + (y - b)^2$ deixam restos distintos quando divididos por 4, ou seja (2.2) não vale. Concluindo assim a prova dessa afirmação.

Visto que a existência de um triângulo equilátero imerso em \mathbb{Z}^2 implica na veracidade de (2.1) e (2.2) e acabamos de verificar que (2.1) implica que (2.2) não vale, concluímos que tal triângulo não pode existir. Concluindo a prova desse teorema. ■

FONSECA (2019) [9], tratando de operações matemáticas e cardinalidade nos conjuntos numéricos, em um estudo voltado a alunos do ensino médio, traz uma aplicação à geometria que contém outra prova para o Teorema 2.1. Este será o nosso guia para as próximas demonstrações.

2.2. IMERSÃO DE POLÍGONOS REGULARES EM \mathbb{Z}^2

Teorema 2.2 *Seja ABC um triângulo imerso em \mathbb{Z}^2 e l_1, l_2, l_3 as medidas de seus lados. Então a área de ABC é um número racional e, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, temos que l_i^2 é um número inteiro.*

Demonstração: Inicialmente vemos que se AB é um segmento imerso em \mathbb{Z}^2 , com $A = (x, y)$ e $B = (z, w)$, então

$$\overline{AB}^2 = (x - z)^2 + (y - w)^2 \in \mathbb{Z}.$$

Com isso vemos que l_1^2, l_2^2 e $l_3^2 \in \mathbb{Z}$. Para verificar que a área de qualquer triângulo imerso em \mathbb{Z}^2 é um número racional, vamos considerar um caso específico. Os outros são análogos.

Consideramos o triângulo ABC imerso em \mathbb{Z}^2 , com $A = (0, 0)$, $B = (a, b)$ e $C = (c, d)$ onde $0 < a < c$ e $0 < d < b$ (ver Figura 2.9). Podemos inscrever tal triângulo em um retângulo de vértices $A = (0, 0)$, $D = (0, b)$, $E = (c, b)$ e $F = (c, 0)$ com lados paralelos aos eixos do plano cartesiano.

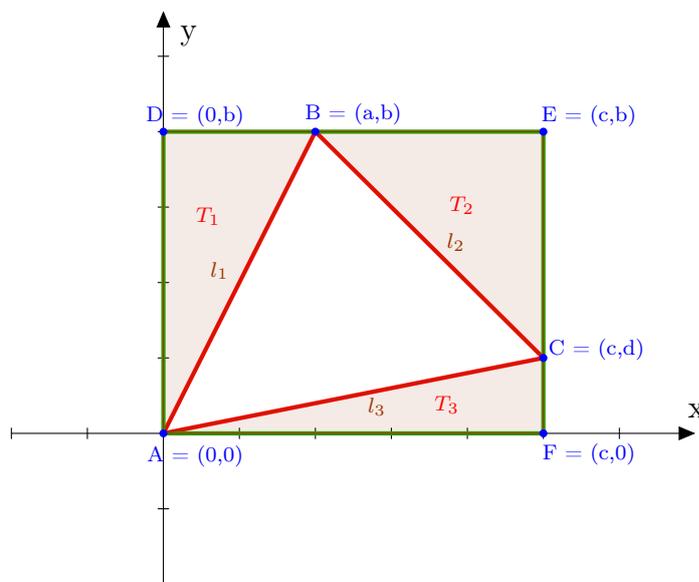


Figura 2.9: Triângulo inscrito em retângulo.

Temos ainda que:

$$(T_1) = \frac{(a \cdot b)}{2}, \quad (T_2) = \frac{(c - a) \cdot (b - d)}{2},$$

$$(T_3) = \frac{(c \cdot d)}{2} \quad \text{e} \quad (ADEF) = c \cdot b.$$

2.2. IMERSÃO DE POLÍGONOS REGULARES EM \mathbb{Z}^2

Logo, $(T_1), (T_2), (T_3), (ADEF) \in \mathbb{Q}$ e, como

$$(ABC) = (ADEF) - [(T_1) + (T_2) + (T_3)],$$

temos que $(ABC) \in \mathbb{Q}$, concluindo a demonstração neste caso em que $0 < a < c$ e $0 < d < c$.

Dado um triângulo qualquer imerso em \mathbb{Z}^2 , fazendo uma translação de modo que o vértice mais à esquerda (e mais abaixo no caso de segmento vertical) corresponda à origem, compondo com uma rotação de 90° no sentido anti-horário se necessário, obtemos um dos casos das figuras abaixo:

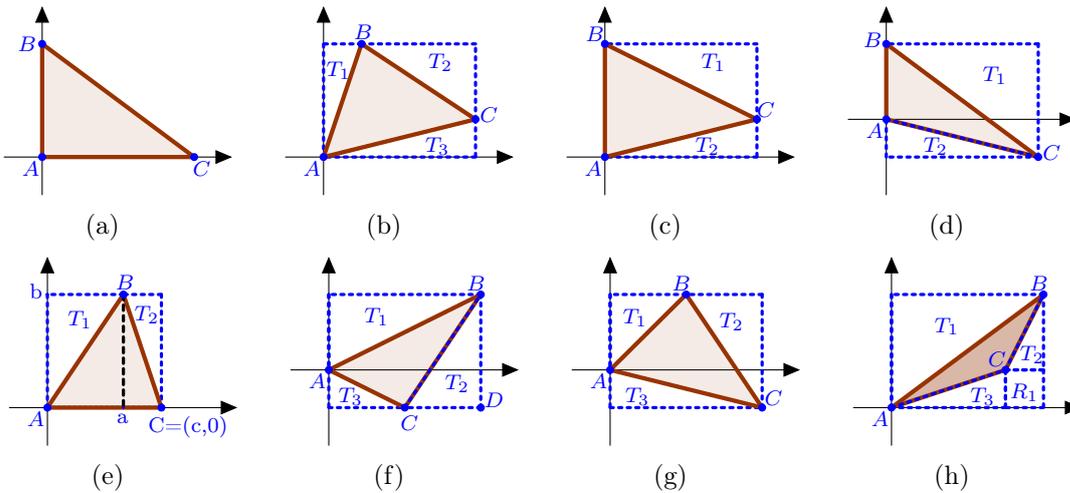


Figura 2.10:

Já vimos que os triângulos dados em 2.10(a) e 2.10(b) tem área racional. Usando um raciocínio análogo, vemos que a área é racional também nos outros casos, uma vez que as figuras envolvem áreas de retângulos de medidas inteiras e triângulos retângulos cujos catetos tem medidas inteiras. Como translações e rotações preservam área, concluímos essa demonstração. ■

Como já foi dito, temos uma segunda demonstração para o Teorema 2.1, vejamos:

Corolário 2.1 *Não existe um triângulo equilátero imerso em \mathbb{Z}^2 .*

Demonstração: Pelo Teorema 2.2, se tivéssemos um triângulo equilátero ABC de lados l em \mathbb{R}^2 com os vértices em \mathbb{Z}^2 , sua área seria um número racional e $l^2 \in \mathbb{Z}$. Lembrando que

$$(ABC) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4},$$

teríamos $\sqrt{3} \cdot l^2/4 \in \mathbb{Q}$, o que não é possível pelo fato de que $\sqrt{3}$ é irracional e o produto de um número racional por um irracional é irracional. ■

2.2.2 Imersão de quadrados em \mathbb{Z}^2

Tratando da imersão de n -ângulos regulares com $n > 3$ no \mathbb{Z}^2 vamos abordar o trabalho de Joel David Hamkins, [10], o qual afirma que não há polígonos regulares não degenerados em \mathbb{Z}^2 , exceto os quadrados.

Sem a necessidade de provas escritas, percebemos que podemos facilmente encontrar pontos com coordenadas inteiras que formam os vértices de um quadrado e concluímos que esses podem ser imersos em \mathbb{Z}^2 . Observe a Figura 2.11:

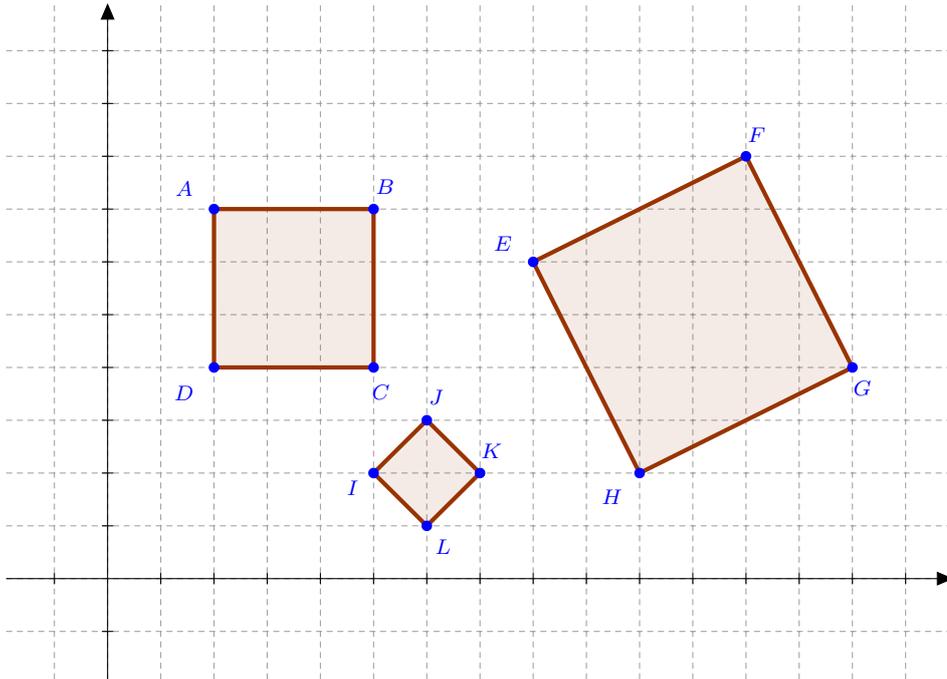


Figura 2.11: Quadrados imersos em \mathbb{Z}^2 .

2.2.3 Imersão de pentágonos regulares em \mathbb{Z}^2

Mostrar que quadrados podem ser inscritos em \mathbb{Z}^2 pode ser provado simplesmente escolhendo pontos na malha que formem quadrados. O mesmo não ocorre com os n -ângulos com mais de 4 lados.

Para provar que os pentágonos regulares não podem ser inscritos em \mathbb{Z}^2 , consideremos no plano um pentágono regular com vértices de A_1 a A_5 , dispostos no sentido anti-horário, e lados de medida l conforme a Figura 2.12(a). Rotacionando o segmento A_1A_2 90° no sentido horário em torno de A_2 encontramos ponto B_1 . E ao repetir esse procedimento nos segmentos subsequentes do pentágono encontramos os pontos B_2, B_3, B_4 e B_5 conforme a Figura 2.12(b). Com tais pontos formamos o pentágono com vértices de B_1 a B_5 e lados de medida l'_1 até l'_5 .

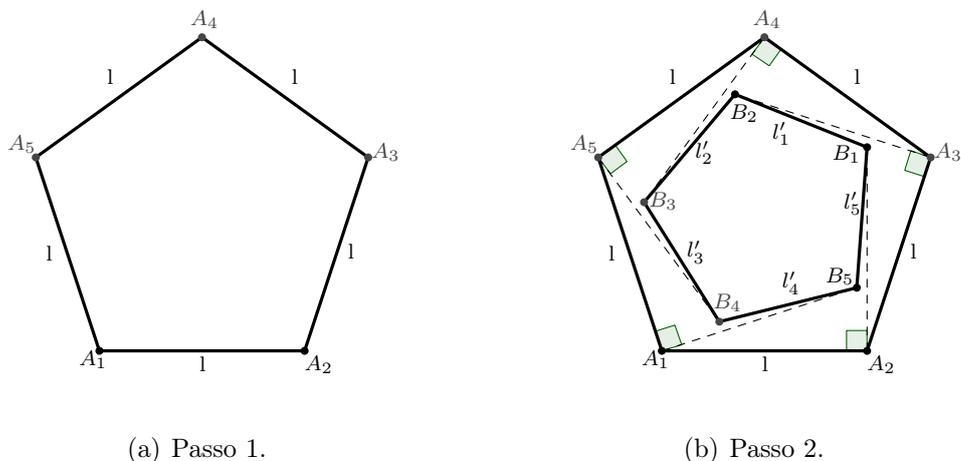


Figura 2.12: Construção do pentágono $B_1B_2\dots B_n$ regular.

Lema 2.3 Usando as notações acima pretendemos mostrar que:

- a) O pentágono $B_1B_2B_3B_4B_5$ é regular;
- b) A razão entre l' e l é constante e independe da medida de l .

Demonstração:a) Inicialmente mostraremos que $B_1B_2B_3B_4B_5$ é equilátero. Sendo $A_1A_2A_3A_4A_5$ um pentágono regular, pela soma dos ângulos internos dos polígonos temos:

$$A_5\widehat{A}_1A_2 = A_1\widehat{A}_2A_3 = A_2\widehat{A}_3A_4 = A_3\widehat{A}_4A_5 = A_4\widehat{A}_5A_1 = \frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ.$$

Como

$$A_5\widehat{A}_1B_5 = A_1\widehat{A}_2B_1 = A_2\widehat{A}_3B_2 = A_3\widehat{A}_4B_3 = A_4\widehat{A}_5B_4 = 90^\circ$$

temos que:

$$B_5\widehat{A}_1A_2 = B_1\widehat{A}_2A_3 = B_2\widehat{A}_3A_4 = B_3\widehat{A}_4A_5 = B_4\widehat{A}_5A_1 = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ.$$

Além disso,

$$\overline{A_1B_5} = \overline{A_2B_1} = \overline{A_3B_2} = \overline{A_4B_3} = \overline{A_5B_4} = l.$$

Portanto, usando o caso LAL de congruência de triângulos, temos:

$$B_5A_1A_2 \equiv B_1A_2A_3 \equiv B_2A_3A_4 \equiv B_3A_4A_5 \equiv B_4A_5A_1.$$

Consequentemente

$$\overline{A_1B_4} = \overline{A_2B_5} = \overline{A_3B_1} = \overline{A_4B_2} = \overline{A_5B_3} := r.$$

2.2. IMERSÃO DE POLÍGONOS REGULARES EM \mathbb{Z}^2

Observemos ainda que $B_5A_1A_2$ é isósceles de base B_5A_2 , pois $A_1B_5 = A_1A_2$ logo:

$$A_2\widehat{B}_5A_1 = A_1\widehat{A}_2B_5 = \frac{180^\circ - 18^\circ}{2} = 81^\circ$$

e

$$B_4\widehat{A}_1B_5 = A_5\widehat{A}_1A_2 - A_5\widehat{A}_1B_4 - B_5\widehat{A}_1A_2 = 108^\circ - 81^\circ - 18^\circ = 9^\circ$$

Como consequência, usando o caso LAL de congruência de triângulos, temos que

$$B_4A_1B_5 \equiv B_5A_2B_1 \equiv B_1A_3B_2 \equiv B_2A_4B_3 \equiv B_3A_5B_4$$

logo:

$$\overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \overline{B_3B_4} = \overline{B_4B_5} = \overline{B_5B_1} = l'$$

e $B_1B_2B_3B_4B_5$ é equilátero.

Agora tratemos dos ângulos internos de $B_1B_2B_3B_4B_5$. Observando os ângulos em torno dos vértices B_1 e B_2 , temos:

$$A_2\widehat{B}_1A_3 + A_3\widehat{B}_1B_2 + B_2\widehat{B}_1B_5 + B_5\widehat{B}_1A_2 = 360^\circ = A_3\widehat{B}_2A_4 + A_4\widehat{B}_2B_3 + B_3\widehat{B}_2B_1 + B_1\widehat{B}_2A_3.$$

Mas, pela congruência dos triângulos obtida na primeira parte desse item, segue que:

$$A_2\widehat{B}_1A_3 = A_3\widehat{B}_2A_4, \quad A_3\widehat{B}_1B_2 = A_4\widehat{B}_2B_3 \quad \text{e} \quad B_5\widehat{B}_1A_2 = B_1\widehat{B}_2A_3.$$

Portanto

$$B_2\widehat{B}_1B_5 = B_3\widehat{B}_2B_1.$$

Fazendo a mesma análise com os ângulos em torno dos demais vértices de $B_1B_2B_3B_4B_5$ podemos verificar que:

$$B_2\widehat{B}_1B_5 = B_3\widehat{B}_2B_1 = B_4\widehat{B}_3B_2 = B_5\widehat{B}_4B_3 = B_1\widehat{B}_5B_4.$$

Como $B_1B_2B_3B_4B_5$ é equilátero e seus ângulos internos são congruentes, concluímos que é regular. Provamos assim o item a).

b) Já sabemos que o pentágono $B_1B_2B_3B_4B_5$ é regular. No triângulo $A_1A_5B_4$, temos $A_1\widehat{A}_5B_4 = 18^\circ$ e $B_4\widehat{A}_1A_5 = A_5\widehat{B}_4A_1 = 81^\circ$, com $l = \overline{A_1A_5}$ e $r = \overline{A_1B_4}$, conforme visto na Figura 2.13.

Pela lei dos senos, temos que

$$\frac{l}{\text{sen}(81^\circ)} = \frac{r}{\text{sen}(18^\circ)}.$$

De onde

$$r = \frac{\text{sen}(18^\circ)}{\text{sen}(81^\circ)} \cdot l. \quad (2.3)$$

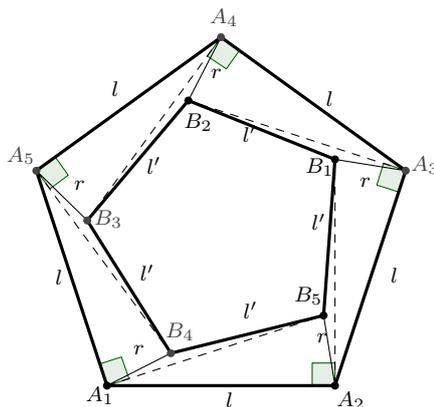


Figura 2.13: O Pentágono $B_1B_2B_3B_4B_5$ é regular.

Como, pelo caso LAL de congruência de triângulos, $A_1A_5B_4 \equiv A_5A_4B_3$, segue que $\overline{A_1B_4} = \overline{A_5B_3} = r$. Usando a lei dos cossenos em $A_5B_4B_3$, denotando $B_3B_4 = l'$, temos:

$$\begin{aligned} (l')^2 &= (\overline{B_4B_3})^2 = (\overline{A_5B_4})^2 + (\overline{B_3A_5})^2 - 2 \cdot \overline{A_5B_4} \cdot \overline{B_3A_5} \cdot \cos(\widehat{B_3A_5B_4}) \\ &= l^2 + r^2 - 2 \cdot l \cdot r \cdot \cos(9^\circ). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Substituindo (2.3) em (2.4), temos:

$$(l')^2 = l^2 + \left(\frac{\text{sen}(18^\circ)}{\text{sen}(81^\circ)} \right)^2 \cdot l^2 - 2 \cdot l^2 \cdot \frac{\text{sen}(18^\circ)}{\text{sen}(81^\circ)} \cdot \cos(9^\circ) := k \cdot l^2,$$

onde

$$k = 1 + \left(\frac{\text{sen}(18^\circ)}{\text{sen}(81^\circ)} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\text{sen}(18^\circ)}{\text{sen}(81^\circ)} \cdot \cos 9^\circ \cong 0,48$$

é uma constante independente de l , de modo que

$$\frac{l'}{l} = \sqrt{k} \cong 0,69.$$

Isso conclui a prova do lema. ■

HAMKINS (2016) [10], inspirado em uma imagem de Vaughn Climenhaga usada para provar que não existem hexágonos imersos em \mathbb{Z}^2 publicada em Proof without words no MathOverflow, propôs os próximos resultados. Vamos nos concentrar nos pentágonos regulares e posteriormente, nos n -ágonos regulares.

Teorema 2.3 Não há pentágonos regulares imersos em \mathbb{Z}^2 .

Demonstração: Suponhamos que existisse um pentágono regular imerso em \mathbb{Z}^2 . Como a malha quadriculada não varia com rotações de 90° sobre um de seus pontos (veja Lema 2.1), se traçarmos segmentos perpendiculares a cada lado do polígono e com o mesmo comprimento destes, partindo dos mesmos vértices, encontraremos outros 5 pontos na malha quadriculada que, por rotação, formam outro pentágono proporcionalmente menor (conforme Lema 2.3) com lado $l' = \lambda \cdot l$ onde $0 < \lambda < 1$. Ao repetirmos o processo com esse pentágono menor, encontraremos outro pentágono proporcionalmente menor ao segundo com lado $l'' = \lambda \cdot l' = \lambda^2 \cdot l$, e assim por diante (ver Figura 2.14). Assim, se houver um pentágono regular imerso em \mathbb{Z}^2 , em algum momento, a medida do lado do pentágono encontrado será menor que 1 que é a medida mínima dos espaços da malha quadriculada de \mathbb{Z}^2 . Logo não é possível que um pentágono regular seja imerso em \mathbb{Z}^2 .

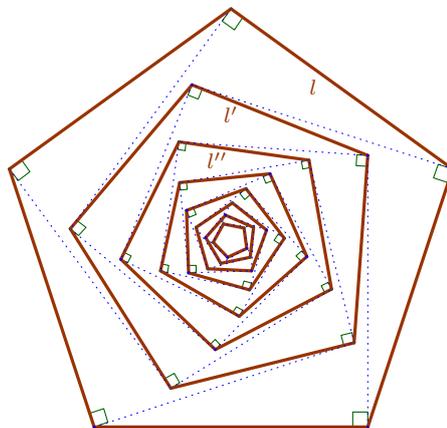


Figura 2.14: Reduções sucessivas de pentágono.

Concluimos a demonstração desse teorema. ■

2.2.4 Imersão de n-ângulos regulares, com $n > 5$, em \mathbb{Z}^2

Nessa seção, pretende-se generalizar o resultado obtido com os pentágonos para os polígonos regulares com mais de 5 lados. Para tanto, precisamos mostrar, assim como fizemos com os pentágonos, que podemos, a partir de polígonos regulares com mais de 6 lados, formar outros polígonos que sejam reduções dos originais contendo lados menores, porém na mesma quantidade.

Consideremos no plano um n-ângulo regular com vértices de A_1 a A_n , dispostos no sentido anti-horário, e lados de medida l conforme a Figura 2.15(a). Rotacionando 90° o segmento A_1A_2 no sentido horário em torno de A_2 encontramos ponto B_1 . E

2.2. IMERSÃO DE POLÍGONOS REGULARES EM \mathbb{Z}^2

ao repetir esse procedimento nos segmentos subsequentes do n -ágono encontramos os pontos B_2, B_3, \dots, B_{n-1} e B_n conforme a Figura 2.15(b). Com tais pontos formamos o n -ágono com vértices de B_1 a B_n e lados de medida l'_1 até l'_n .

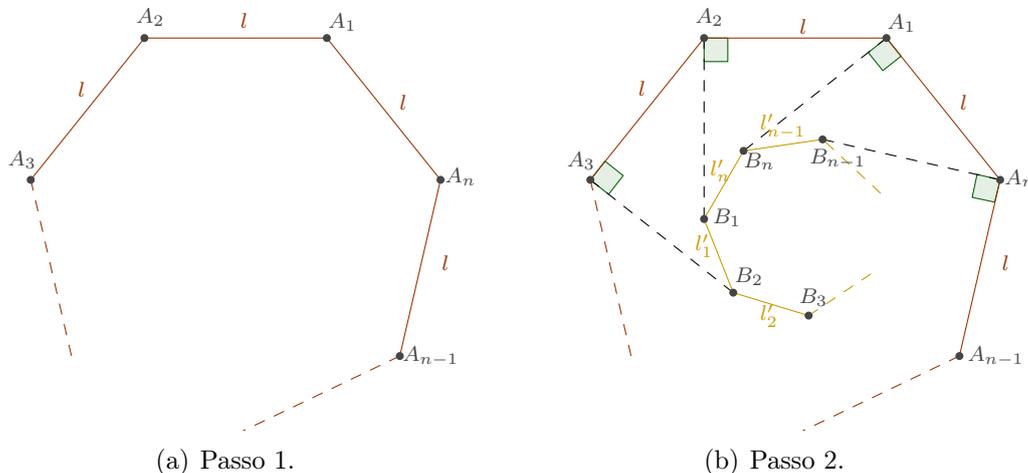


Figura 2.15: Redução de um n -ágono regular.

Lema 2.4 Usando as notações acima podemos mostrar que:

- a) O n -ágono $B_1B_2\dots B_n$ é regular;
- b) A razão entre l' e l é constante e independente de l .

Demonstração: a) Inicialmente mostraremos que $B_1B_2\dots B_n$ é equilátero. Sendo $A_1A_2\dots A_n$ um pentágono regular, pela soma dos ângulos internos dos polígonos temos:

$$\widehat{A_1A_2A_3} = \widehat{A_2A_3A_4} = \dots = \widehat{A_{n-1}A_nA_1} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} := \alpha,$$

de onde

$$\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Como

$$\widehat{A_1A_2B_1} = \widehat{A_2A_3B_2} = \dots = \widehat{A_{n-1}A_nB_{n-1}} = \widehat{A_nA_1B_n} = 90^\circ$$

temos que:

$$\widehat{B_nA_1A_2} = \widehat{B_1A_2A_3} = \dots = \widehat{B_{n-1}A_nA_1} := \beta = \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Além disso,

$$\overline{A_1B_n} = \overline{A_2B_1} = \dots = \overline{A_nB_{n-1}} = l.$$

2.2. IMERSÃO DE POLÍGONOS REGULARES EM \mathbb{Z}^2

Portanto, usando o caso LAL de congruência de triângulos, temos:

$$B_n A_1 A_2 \equiv B_1 A_2 A_3 \equiv \dots \equiv B_{n-1} A_n A_1.$$

Consequentemente

$$\overline{A_1 B_{n-1}} = \overline{A_2 B_n} = \overline{A_3 B_1} = \dots = \overline{A_n B_{n-2}} := r.$$

Observemos ainda que $B_n A_1 A_2$ é isósceles de base $B_n A_2$, pois $\overline{A_1 B_n} = \overline{A_1 A_2}$ logo:

$$A_2 \widehat{B}_n A_1 = A_1 \widehat{A}_2 B_n := \theta = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 45^\circ + \frac{180^\circ}{n}$$

e

$$B_n \widehat{A}_2 B_1 := \omega = 90^\circ - \theta = 45^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

Como consequência, usando o caso lado ângulo lado de congruência de triângulos, temos que

$$B_n A_2 B_1 \equiv B_1 A_3 B_2 \equiv \dots \equiv B_{n-1} A_1 B_n$$

logo:

$$\overline{B_1 B_2} = \overline{B_2 B_3} = \dots = \overline{B_n B_1} := l'$$

e $B_1 B_2 \dots B_n$ é equilátero.

Agora tratemos dos ângulos internos de $B_1 B_2 \dots B_n$. Observando os ângulos em torno dos vértices B_n e B_1 , temos:

$$A_1 \widehat{B}_n A_2 + A_2 \widehat{B}_n B_1 + B_1 \widehat{B}_n B_{n-1} + B_{n-1} \widehat{B}_n A_1 = 360^\circ$$

e

$$A_2 \widehat{B}_1 A_3 + A_3 \widehat{B}_1 B_2 + B_2 \widehat{B}_1 B_n + B_n \widehat{B}_1 A_2 = 360^\circ.$$

Mas, pela congruência dos triângulos obtida na primeira parte desse item, segue que:

$$A_1 \widehat{B}_n A_2 = A_2 \widehat{B}_1 A_3, \quad A_2 \widehat{B}_n B_1 = A_3 \widehat{B}_1 B_2 \quad \text{e} \quad B_{n-1} \widehat{B}_n A_1 = B_n \widehat{B}_1 A_2.$$

Portanto

$$B_1 \widehat{B}_n B_{n-1} \equiv B_2 \widehat{B}_1 B_n.$$

Fazendo a mesma análise com os ângulos em torno dos demais vértices de $B_1 B_2 \dots B_n$ podemos verificar que:

$$B_n \widehat{B}_1 B_2 \equiv B_1 \widehat{B}_2 B_3 \equiv \dots \equiv B_{n-1} \widehat{B}_n B_1.$$

Como $B_1 B_2 \dots B_n$ é equilátero e seus ângulos internos são congruentes, concluímos que é regular. Provamos assim o item a).

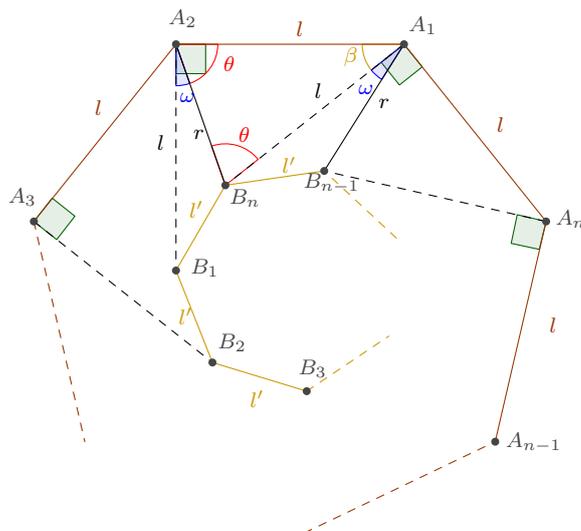


Figura 2.16: N-ângonos regulares.

b) Já sabemos que o n-ângono $B_1B_2\dots B_n$ é regular. No triângulo $B_nA_2A_1$, temos $A_2\widehat{A}_1B_n = \beta$ e $B_n\widehat{A}_2A_1 = A_1\widehat{B}_nA_2 = \theta$, com $l = \overline{A_1A_2} = \overline{A_1B_n}$ e $r = \overline{A_2B_n}$, conforme visto na Figura 2.16. Pela lei dos senos, temos que

$$\frac{l}{\text{sen}(\theta)} = \frac{r}{\text{sen}(\beta)},$$

daí

$$r = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\theta)} \cdot l. \quad (2.5)$$

Como, pelo caso LAL de congruência de triângulos, $A_2A_1B_n \equiv A_1A_nB_{n-1}$, segue que $\overline{A_2B_n} = \overline{A_1B_{n-1}} = r$.

Usando a lei dos cossenos em $A_1B_nB_{n-1}$, denotando $\overline{B_{n-1}B_n} = l'$, temos:

$$\begin{aligned} (l')^2 &= (\overline{B_{n-1}B_n})^2 = (\overline{A_1B_n})^2 + (\overline{B_{n-1}A_1})^2 - 2 \cdot \overline{A_1B_n} \cdot \overline{B_{n-1}A_1} \cdot \cos(B_{n-1}\widehat{A}_1B_n) \\ &= l^2 + r^2 - 2 \cdot l \cdot r \cdot \cos(\omega). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) em (2.6), temos:

$$(l')^2 = l^2 + \left(\frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\theta)} \right)^2 \cdot l^2 - 2 \cdot l^2 \cdot \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\theta)} \cdot \cos(\omega) := k \cdot l^2,$$

onde

$$k = 1 + \left(\frac{\text{sen} \left(90^\circ - \frac{360^\circ}{n} \right)}{\text{sen} \left(45^\circ + \frac{180^\circ}{n} \right)} \right)^2 - 2 \cdot \frac{\text{sen} \left(90^\circ - \frac{360^\circ}{n} \right)}{\text{sen} \left(45^\circ + \frac{180^\circ}{n} \right)} \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right).$$

Note que k é uma constante que independe de l . Além disso, como veremos na observação abaixo, $0 < k < 1$ para todo $n \geq 5$. Isso conclui a prova do lema. ■

Observação: A constante k dada no lema anterior satisfaz $0 < k < 1$ para todo número natural $n \geq 5$. Para isso usamos a relação trigonométrica fundamental e o seno da soma de dois ângulos tratados no Capítulo 1 deste trabalho. Vejamos. Chamemos $a = 45^\circ$ e $b = 180^\circ/n$. Note que $0 < b < a$ para todo $n \geq 5$. Assim, temos:

$$k = 1 + \left[\frac{\text{sen}(2(a-b))}{\text{sen}(a+b)} \right]^2 - 2 \cdot \frac{\text{sen}(2(a-b))}{\text{sen}(a+b)} \cdot \cos(a-b).$$

Observemos primeiramente que:

$$\begin{aligned} k < 1 &\Leftrightarrow \frac{\text{sen}(2(a-b))}{\text{sen}(a+b)} < 2\cos(a-b) \\ &\Leftrightarrow \text{sen}(2(a-b)) < 2\text{sen}(a+b) \cdot \cos(a-b). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Lembremos que pela fórmula da adição (1.2) tem-se

$$\text{sen}(2(a-b)) = \text{sen}[(a-b) + (b-a)] = 2 \cdot \text{sen}(a-b) \cdot \cos(a-b).$$

Como $a > b > 0$, temos $0 < a-b < a < a+b < 90^\circ$ e sabemos que $\text{sen}(x)$ é crescente em $(0^\circ, 90^\circ)$. Daí $\text{sen}(a-b) < \text{sen}(a+b)$, e segue que a desigualdade do lado direito de (2.7) é válida. Portanto $k < 1$. Por outro lado, usando a relação fundamental (1.1), vemos que

$$\begin{aligned} k &= 1 - \cos^2(a-b) + \left[\frac{\text{sen}(2(a-b))}{\text{sen}(a+b)} - 2\cos(a-b) \right]^2 \\ &= \text{sen}^2(a-b) + \left[\frac{\text{sen}(2(a-b))}{\text{sen}(a+b)} - 2\cos(a-b) \right]^2 > 0, \end{aligned}$$

pois estamos somando números não negativos e, como $a-b \in (0^\circ, 90^\circ)$, temos $\text{sen}(a-b) \neq 0$. Portanto, $0 < k < 1$, para todo $n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}$.

Os resultados obtidos em Lema 2.4, complementam a prova do Teorema 2.3, mostrando que esse Teorema se aplica a todos os polígonos regulares com mais de 4 lados. E como os triângulos regulares também não podem ser imersos em \mathbb{Z}^2 , concluímos também que os quadrados são os únicos polígonos regulares que podem ser imersos em \mathbb{Z}^2 .

2.3 Imersão de polígonos regulares em \mathbb{Z}^k

Essa seção é como um bônus e foi colocada aqui para aguçar a curiosidade de alguns. Não faz parte do foco desse trabalho e destina-se a mencionar dois resultados sobre o tema. Um destes é apresentado por POLSTER (2020) sobre a imersão de polígonos regulares em \mathbb{Z}^3 (ver [17]). Nele Polster mostra que os únicos polígonos regulares que podem ser construídos usando como vértices os pontos da malha quadriculada \mathbb{Z}^3 são, triângulo, quadrado e hexágono (ver, respectivamente, Figuras 2.18, 2.19 e 2.20). Na Figura 2.17 representamos uma parte de medida $3 \times 3 \times 3$ dessa malha que é infinita. Os pontos azuis representam as intersecções das retas perpendiculares aos eixos x , y e z os quais são perpendiculares entre si e representam o espaço. As linhas tracejadas e o plano cinza, tem por objetivo facilitar a visualização da profundidade.

Outro resultado que vale a pena mencionar é dado por BEESON (1992) que cita duas provas para um mesmo teorema que diz:

Teorema 2.4 *Suponha que um n -ágono regular possa ser imerso em \mathbb{Z}^k para algum $k \in \mathbb{N}$, então $n = 3, 4$ ou 6 .*

As provas citadas por Beeson foram feitas por I. J. Schoenberg em 1937 e W. Scherrer em 1946. Ao leitor interessado, esses resultados podem ser encontrados em (Ver [2, Pág. 225 e 251]).

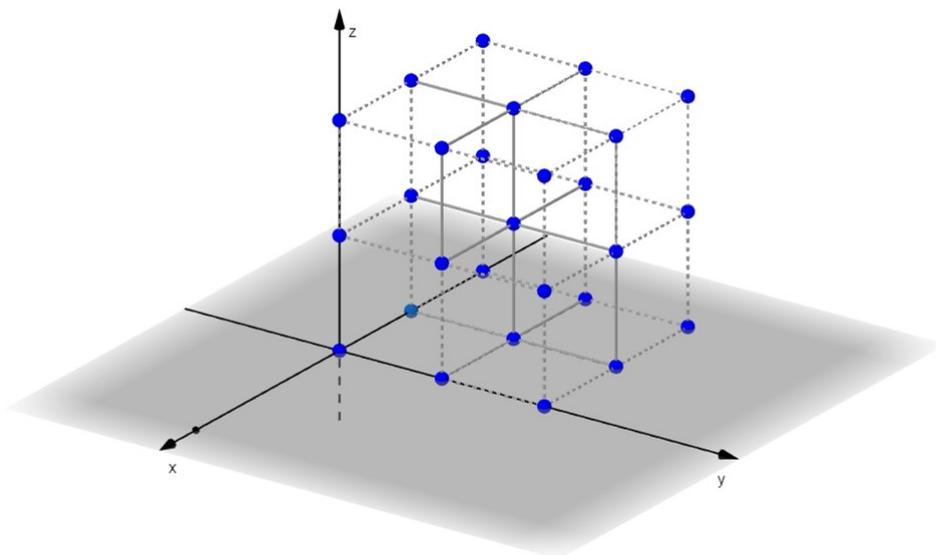


Figura 2.17: Malha \mathbb{Z}^3 .

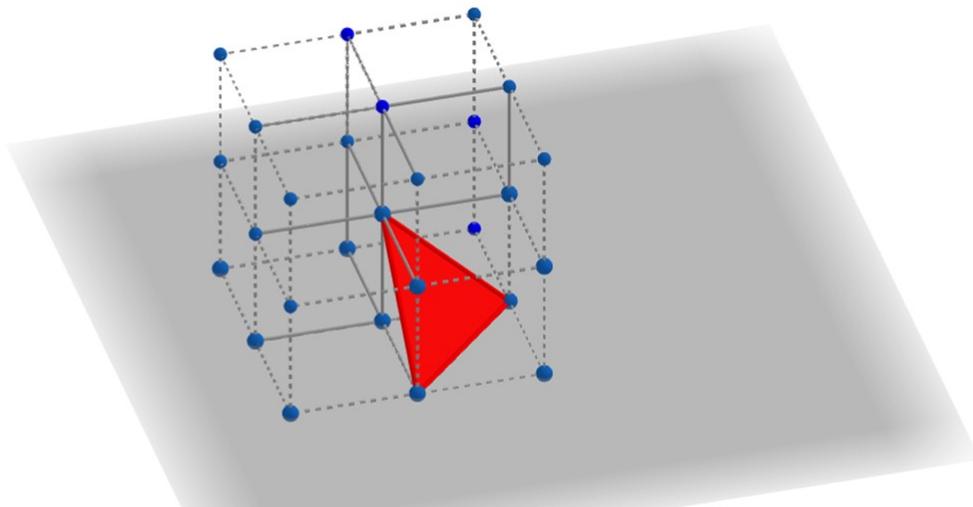


Figura 2.18: Triângulo em \mathbb{Z}^3 .

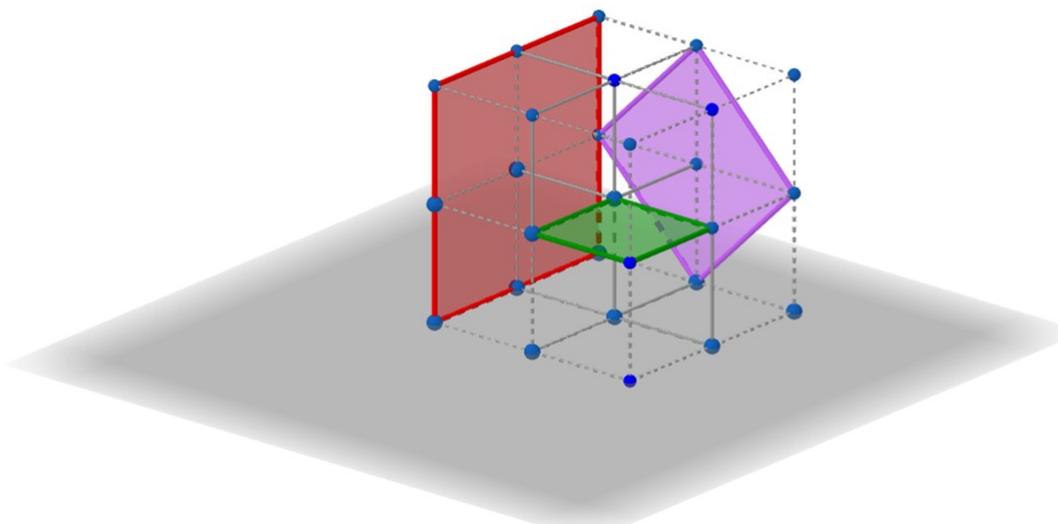


Figura 2.19: Quadrados em \mathbb{Z}^3 .

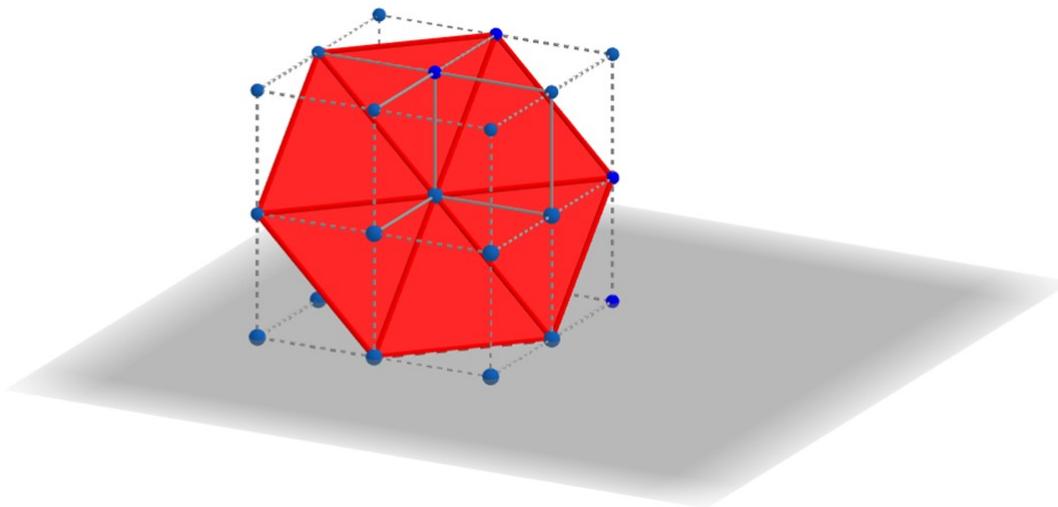


Figura 2.20: Hexágono em \mathbb{Z}^3 .

Assim concluímos esse capítulo.

Capítulo 3

Área de polígonos imersos em \mathbb{Z}^2 - Teorema de Pick

No Capítulo 2 vimos que não há polígonos regulares imersos em \mathbb{Z}^2 exceto os quadrados. Antes de citarmos os resultados que discutiremos neste capítulo, gostaríamos de citar um resultado exposto por BEESON (1992) o qual pode aguçar a curiosidade dos leitores. Trata-se de uma condição para a imersão de triângulos em \mathbb{Z}^n para $n \geq 2$. Ele diz que, para que um triângulo possa ser imerso em \mathbb{Z}^n é necessário que o quadrado da tangente de cada um de seus ângulos seja um número racional (ver [2, Proposição 2 e Lema 3]).

Este capítulo trata do cálculo da área dos polígonos simples imersos em \mathbb{Z}^2 por meio do Teorema de Pick. Este que é o teorema mais lembrado do austríaco Georg Alexander Pick que nasceu em 10 de agosto de 1859, em Viena, e cujo trabalho no campo da Matemática abordou tópicos como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculo de Integrais e Geometria. Os resultados aqui demonstrados são baseados nos resultados apresentados por Elon Lages Lima e podem ser melhor apreciados no seu livro “Meu professor de matemática e outras histórias” (veja [13]).

Inicialmente tratamos dos triângulos fundamentais e do fato que todos eles tem a mesma área. Seguimos mostrando que qualquer polígono simples imerso em \mathbb{Z}^2 pode ser decomposto em um número determinado de triângulos fundamentais relacionado ao número de pontos da malha \mathbb{Z}^2 pertencentes aos lados e presentes no interior do polígono. Concluímos com a demonstração do Teorema de Pick.

3.1 Triângulos e paralelogramos fundamentais

Chamamos de *triângulo fundamental* aquele imerso em \mathbb{Z}^2 e que não possui algum ponto de \mathbb{Z}^2 , além dos vértices, pertencentes a um de seus lados ou em seu interior. Na Figura 3.1 apenas I e II são triângulos fundamentais. Chamamos de *paralelogramo fundamental* aqueles cujos quatro vértices são os únicos dos seus pontos pertencentes a \mathbb{Z}^2 , como V e VI na Figura 3.1.

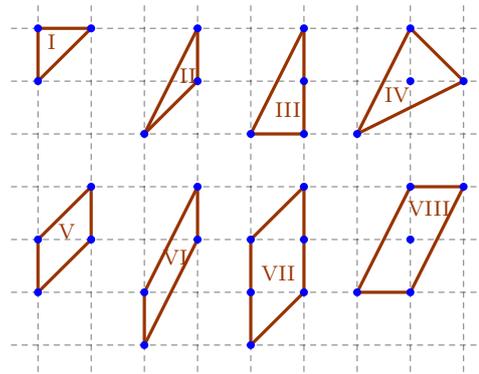


Figura 3.1: Triângulos e paralelogramos fundamentais e não-fundamentais.

Construção de paralelogramos fundamentais

Partindo de um triângulo fundamental ABC , se traçarmos uma reta paralela ao lado AB passando por C e uma paralela ao lado AC passando por B , estas se encontrarão num ponto D de modo que $ABDC$ seja um paralelogramo. Então o resultado a seguir vale.

Lema 3.1 *Se ABC é um triângulo fundamental $ABDC$ é um paralelogramo fundamental.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo fundamental imerso em \mathbb{Z}^2 , de modo que $A = (0, 0)$, $B = (m, n)$ e $C = (s, t)$. Para formarmos o paralelogramo $ABDC$ é necessário que $D = (m + s, n + t)$ (ver Figura 3.2).

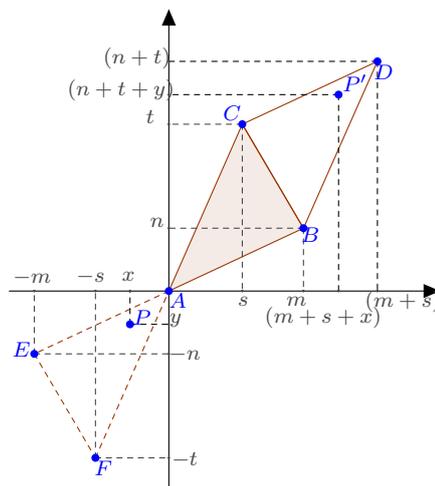


Figura 3.2: Construção de paralelogramo fundamental.

3.1. TRIÂNGULOS E PARALELOGRAMOS FUNDAMENTAIS

Trocando-se os sinais das coordenadas de cada ponto de ABC , obtemos o triângulo AEF de coordenadas $A = (0, 0)$, $E = (-m, -n)$ e $F = (-s, -t)$. AEF é fundamental pois não possui outro ponto, além dos vértices, com coordenadas inteiras. O triângulo DCB é formado pelos pontos $P' = (x + m + s, y + n + t)$, onde x e y são as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ do triângulo AEF . Se P tem coordenadas inteiras P' também tem. Como AEF é fundamental DEB também é. Então os únicos pontos de \mathbb{Z}^2 em $ABDC$ são os vértices. Logo, $ABDC$ é um paralelogramo fundamental. Finalizando essa demonstração. ■

Como consequência do resultado acima, a região compreendida entre as retas paralelas que passam pelos lados de $ABDC$ (ver Figura 3.3 onde $r = \overrightarrow{AB}$, $s = \overrightarrow{CD}$, $t = \overrightarrow{AC}$ e $u = \overrightarrow{BD}$) é uma reunião de paralelogramos justapostos, congruentes a $ABDC$ (como exemplos veja de J_1 a J_{10} na Figura 3.3).

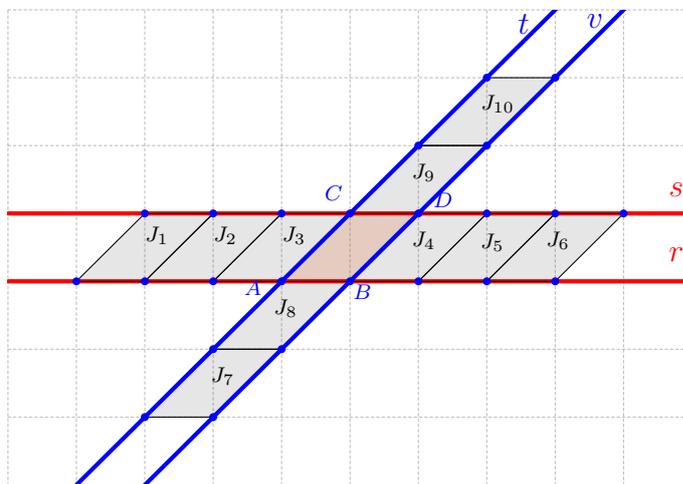


Figura 3.3: Paralelogramos fundamentais justapostos.

Cada um desses paralelogramos é fundamental porque resulta da soma de inteiros fixados à abscissa e à ordenada de cada um dos pontos de $ABDC$.

Construção de triângulos fundamentais

Lema 3.2 *Considere um segmento AB imerso em \mathbb{Z}^2 , sem outros pontos de \mathbb{Z}^2 exceto os extremos, e r a reta que passa por esses dois pontos.*

- i) *Existem duas retas, s e t , paralelas a r , uma de cada lado, cuja distância até r é a menor possível dentre as retas paralelas a r que possuem pontos de \mathbb{Z}^2 .*

3.1. TRIÂNGULOS E PARALELOGRAMOS FUNDAMENTAIS

ii) Seja $P \in \mathbb{Z}^2$ tal que $P \notin r$. O triângulo ABP é fundamental se, e somente se, $P \in s \cup t$.

Demonstração: i) Fazendo uma translação caso seja necessário, podemos supor que $A = (0,0)$ e $B = (m,n)$. Note que, se $m = 0$ então as retas verticais s e t de equações $x = -1$ e $x = 1$, respectivamente, são as retas paralelas a r que passam por pontos de \mathbb{Z}^2 mais próximas de r . Para $m \neq 0$, observamos que m e n são primos entre si. Caso não o fossem, haveria um número $d > 1$ de modo que o ponto $P := (m/d, n/d)$ teria coordenadas inteiras e pertenceria ao segmento AB (ver Figura 3.4).

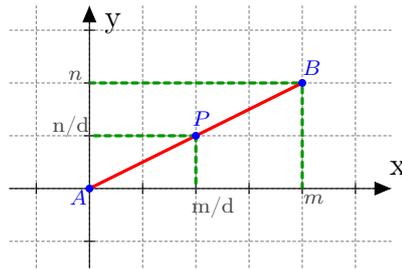


Figura 3.4:

Sabemos que qualquer reta paralela a r tem o mesmo coeficiente angular, n/m que r . Seja l uma dessas retas, com equação $y = (n/m)x + a$, onde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Se l passa em algum ponto $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ então

$$v = \frac{n}{m}u + a \Leftrightarrow a = v - \frac{n}{m}u. \quad (3.1)$$

Como m, n, u e $v \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$, temos $|mv - nu| \geq 1$ e daí

$$|a| \geq \frac{1}{|m|}. \quad (3.2)$$

Lembrando que m e n são primos entre si, segue do Teorema de Bezout (ver caso particular em [13, Lema da página 107]) existem α e $\beta \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\beta \cdot m - \alpha \cdot n = 1 \quad \text{e} \quad (-\beta) \cdot m - (-\alpha) \cdot n = -1.$$

Sejam s e t as retas de equações

$$y = \frac{n}{m} \cdot x + \frac{1}{m} \quad \text{e} \quad y = \frac{n}{m} \cdot x - \frac{1}{m},$$

respectivamente. Pela escolha de α e β , segue de (3.1) que s passa por $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ e t passa por $(-\alpha, -\beta) \in \mathbb{Z}^2$. Além disso, segue de (3.2) que estas são as retas paralelas a r mais próximas de r , que passam por pontos de \mathbb{Z}^2 . Veja Figura 3.5.

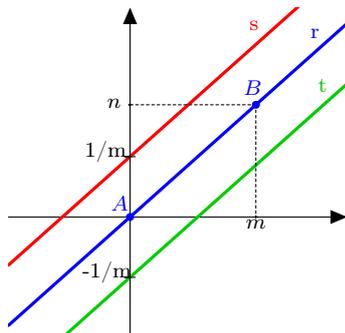


Figura 3.5: Retas paralelas r , s e t .

ii) Suponhamos que $P \in s$. Entre r e s não há pontos que pertençam a \mathbb{Z}^2 , pois se houvesse, s não seria a reta mais próxima de r nessa condição. Assim, nos segmentos AP e BP não há pontos pertencentes a \mathbb{Z}^2 além de A , B e P . Como, por hipótese, não há pontos de \mathbb{Z}^2 entre A e B , concluímos que ABP é um triângulo fundamental pois seus vértices pertencem a \mathbb{Z}^2 e não há ponto em seu interior ou nos seus lados que pertençam a \mathbb{Z}^2 . Se $P \in t$ o resultado é análogo. Reciprocamente, suponha que ABP é um triângulo fundamental, com $A = (0, 0)$ e $B = (m, n)$.

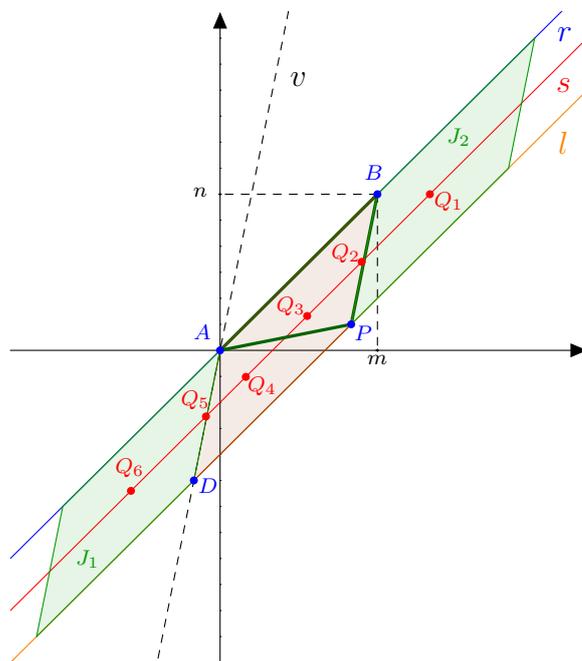


Figura 3.6: Retas paralelas r , s e l .

Seja l a reta que passa por P e é paralela à reta $r = \overleftrightarrow{AB}$. Precisamos mostrar que $l = s$ ou $l = t$. Se não o fosse, uma das retas, s ou t , estaria entre l e r e daí existiria

um ponto $Q \in \mathbb{Z}^2$ entre l e r . Se Q estiver no interior ou nos lados do triângulo ABP , temos uma contradição, pois ABP é fundamental. Resta analisar o caso em que Q está fora do triângulo ABP (Em 3.6 temos de Q_1 a Q_6 exemplos de possíveis localizações de Q) Traçando por A a reta v paralela à \overleftrightarrow{PB} e tomando D o ponto de interseção dessa reta com l temos o paralelogramo $ABPD$. Uma vez que ABP é fundamental, segue do Lema 3.1 que, $ABPD$ é um paralelogramo fundamental. Fazendo a justaposição de paralelogramos congruentes a $ABPD$ (como J_1 e J_2 na Figura 3.6), todos fundamentais, entre as retas l e r , algum destes conteria o ponto $Q \in \mathbb{Z}^2$, o que é uma contradição. Portanto l é s ou t , o que conclui a prova de **ii**) e a demonstração deste lema. ■

O teorema seguinte traz um importante resultado para a futura demonstração do Teorema de Pick. Veja.

Teorema 3.1 *A área de um triângulo fundamental é igual a $1/2$ u.a.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo fundamental onde $A = (0, 0)$ e $B = (m, n)$ e r a reta que passa por esses dois pontos. Como vimos na prova do Lema 3.2, já que AB não contém pontos de \mathbb{Z}^2 , exceto A e B , m e n são primos entre si. Agora tratemos do valor da área de ABC em dois casos:

1º Caso: $m \neq 0$. Neste caso, a reta que passa pelos pontos A e B tem coeficiente angular igual a n/m . Seja $t = (n/m) \cdot x + a$ a reta paralela a r que passa pelo ponto C e $E = (0, a)$ o ponto onde t intercepta o eixo das ordenadas. Todos os triângulos que tem por base o segmento AB cujo terceiro vértice localiza-se na reta t possuem a mesma área. Afinal, a base de todos é AB e a altura em relação a essa base é a distância entre r e t . Assim, Considerando AE como base de ABE , temos

$$(ABC) = (ABE) = \frac{|a| \cdot |m|}{2}.$$

Como vimos no Lema 3.2, t é uma das retas paralelas a r , que contém pontos de \mathbb{Z}^2 mais próximas de r e $|a| = 1/|m|$. Então

$$(ABC) = \frac{|a| \cdot |m|}{2} = \frac{1}{|m|} \cdot |m| = \frac{1}{2}.$$

2º Caso: $m = 0$. Se $m = 0$ então $n = \pm 1$, pois se $n \geq |1|$, entre o ponto $A = (0, 0)$ e o ponto $B = (0, n)$ haveria um ou mais pontos na malha \mathbb{Z}^2 e ABC não seria fundamental. Ou seja $B = (0, 1)$ ou $B = (0, -1)$ representados, respectivamente, pelos pontos B_1 e B_2 na Figura 3.7 e a base AB de ABC mede $1u.m.$.

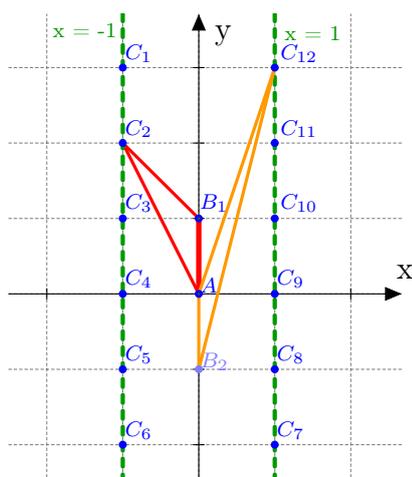


Figura 3.7: Exemplos de posições dos vértices de ABC .

Além disso, o ponto C pertence a reta $x = 1$ ou $x = -1$ que são as retas que possuem pontos da malha \mathbb{Z}^2 , são paralelas ao eixo das ordenadas e se encontram a menor distância desse eixo. Isso faz com que não hajam pontos de \mathbb{Z}^2 no interior de ABC ou nos segmentos AC e BC , além dos extremos desses segmentos. Assim, qualquer posição possível para o ponto C nessas retas, a altura de ABC em relação à base AB será igual a $1u.m.$ Possíveis posições do ponto C são representadas pelos pontos de C_1 a C_{12} na Figura 3.7. Assim, como ABC tem base AB medindo $1u.m.$ e altura em relação a essa base medindo $1u.m.$, temos:

$$(ABC) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como em ambos os casos as áreas de ABC são iguais a $1/2$ concluímos que essa é a área dos triângulos fundamentais. ■

3.2 Decomposição de polígonos em triângulos

Nesta seção vamos tratar com polígonos simples. Nela damos mais um passo para demonstração do Teorema de Pick. Trata da decomposição de polígonos em triângulos justapostos, ou seja, que possuem um lado em comum.

Teorema 3.2 *Todo polígono simples de n lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos justapostos cujos vértices são os mesmos do polígono dado.*

Demonstração: Tratando dos polígonos convexos. Seja $A_1A_2\dots A_n$ um polígono convexo de n lados e, conseqüentemente, n vértices, conforme a Figura 3.8. A partir

3.2. DECOMPOSIÇÃO DE POLÍGONOS EM TRIÂNGULOS

de qualquer dos vértices desse polígono podemos traçar $n - 3$ diagonais, pois um vértice só não forma diagonais consigo mesmo e com os dois vértices que com ele formam seus lados adjacentes. Cada uma dessas diagonais pertence a dois triângulos adjacentes, formando assim $n - 2$ triângulos adjacentes (T_1 a T_{n-2} na Figura 3.8) no polígono dado.

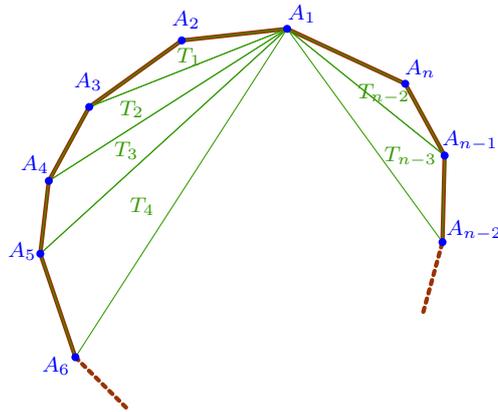


Figura 3.8: Decomposição de polígono convexo de n lados em $n - 2$ triângulos.

Essa demonstração, no entanto, não funciona para os polígonos não convexos. Nesse caso, haveria algum vértice a partir do qual não poderíamos traçar diagonais aos demais sem que essa cruzasse os lados do polígono, conforme podemos ver na Figura 3.9 onde a diagonal A_1A_4 corta o lado A_2A_3 do n -ágono não convexo.

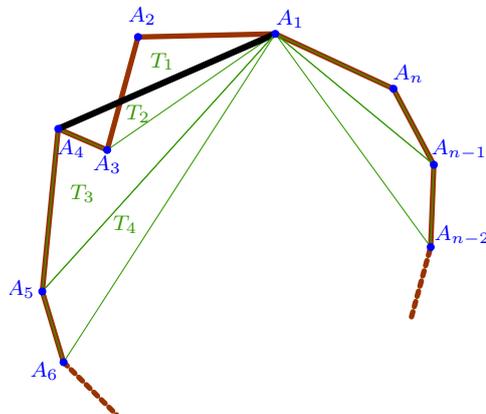


Figura 3.9: Diagonais de polígono não convexo de n lados.

Contudo, suponhamos, por absurdo, que o teorema não seja verdadeiro para todos os polígonos não convexos. E seja n o menor número de lados para o qual um polígono não convexo P não possa ser decomposto conforme o teorema. Tomemos um sistema de coordenadas cartesianas no plano de modo que nenhum lado do

3.2. DECOMPOSIÇÃO DE POLÍGONOS EM TRIÂNGULOS

polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Consideremos B o vértice de P com maior abscissa, não temos outro ponto de P com abscissa igual a B pois não há em P lados paralelos ao eixo das ordenadas. Sejam A e C os vértices que formam os lados de P adjacentes a B .

Caso 1: No triângulo ABC existem outros vértices de P , conforme exemplo na Figura 3.10. Destes, seja F o vértice mais próximo de B . A diagonal BF divide P em dois polígonos P' e P'' com n' e n'' lados, respectivamente.

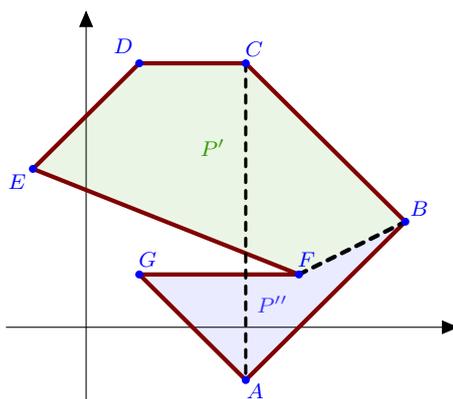


Figura 3.10: Decomposição de n -ágono não convexo em $n - 2$ triângulos - Parte 1.

Observemos ainda que n' e n'' são maiores ou iguais a 3 e que $n' + n'' = n + 2$ o que nos mostra que ambos são menores do que n . E, como isso ocorre, o teorema se aplica a P' e P'' que podem ser decompostos, respectivamente, em $n' - 2$ e $n'' - 2$ triângulos. Mas somando as decomposições de triângulos de P' e P'' temos:

$$(n' - 2) + (n'' - 2) = n' + n'' - 4 = (n + 2) - 4 = n - 2$$

Assim, teríamos uma decomposição de P em $n - 2$ triângulos justapostos contrariando nossa hipótese.

Caso 2: Em ABC não existem outros vértices de P , como o exemplo da Figura 3.11. Neste caso, o segmento AC divide P em dois polígonos. O próprio triângulo ABC e o polígono P' o qual possui $n - 1$ lados e, por possuir número de lados menor que n submete-se ao enunciado no teorema e pode ser decomposto em $n - 3$ triângulos. Juntado à decomposição de P' o triângulo ABC , encontramos que P seria decomposto em $n - 3 + 1 = n - 2$ triângulos, o que é uma contradição.

Completamos assim a prova do teorema. ■

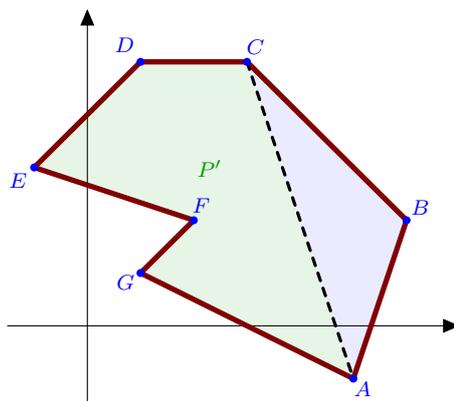


Figura 3.11: Decomposição de n -ágono não convexo em $n - 2$ triângulos - Parte 2.

3.2.1 Decomposição de polígonos em triângulos fundamentais

Seguindo ainda um caminho para demonstração do Teorema de Pick, temos abaixo um importante passo, que trata da decomposição de polígonos imersos em \mathbb{Z}^2 em triângulos fundamentais. Vejamos.

Teorema 3.3 *Todo polígono simples imerso em \mathbb{Z}^2 pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais justapostos.*

Demonstração: No Teorema 3.2 já vimos que qualquer polígono simples imerso em \mathbb{Z}^2 pode ser decomposto em triângulos justapostos cujos vértices também estão em \mathbb{Z}^2 . Portanto, basta mostrarmos que qualquer triângulo imerso em \mathbb{Z}^2 pode ser decomposto em triângulos fundamentais para provar esse teorema. Consideremos dois casos.

Caso 1: Triângulos nos quais há pontos de \mathbb{Z}^2 no seu interior. Para expressar melhor as ideias aqui tratadas tomemos como exemplo a Figura 3.12. Dado um triângulo ABC em \mathbb{Z}^2 (parte (a) da figura), seja D um dos pontos em seu interior. Ao traçarmos segmentos ligando o ponto D aos vértices de ABC (ver parte (b) da figura) decomponemos ABC em três outros triângulos: ABD , ACD e BCD . Convém salientar que se ABC possui n pontos da malha, em seu interior ou nos seus lados, os triângulos nos quais foi decomposto possuem individualmente uma quantidade menor de pontos da malha. Caso ainda exista algum ponto da malha no interior de algum dos triângulos formados na decomposição de ABC , como o ponto E da Figura (parte (c) da Figura) por exemplo, repetimos o passo anterior traçando segmentos ligando esse ponto aos vértices do triângulo no qual está inserido, decompondo esse triângulo (ABD) em três outros que possuem uma quantidade ainda menor de pontos da malha. Sucedemos dessa forma quantas vezes forem necessárias até que restem apenas triângulos fundamentais justapostos.

3.2. DECOMPOSIÇÃO DE POLÍGONOS EM TRIÂNGULOS

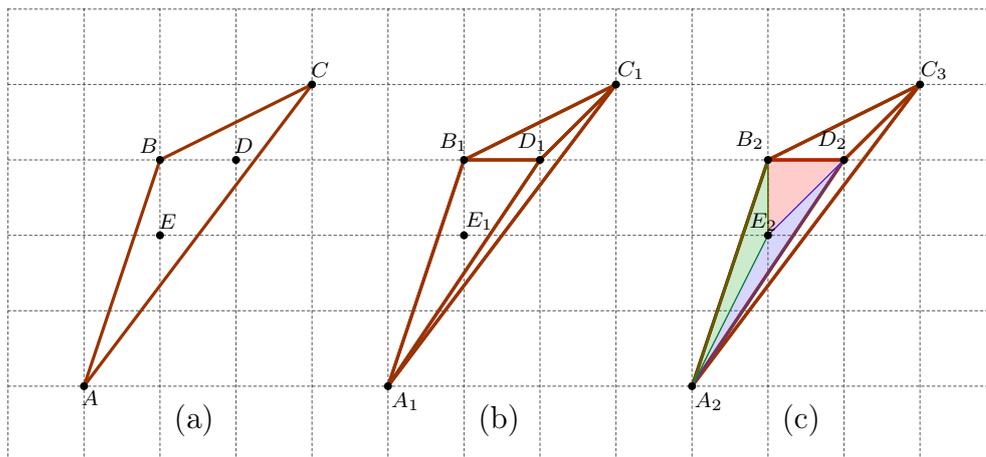


Figura 3.12: Decomposição de triângulo em triângulos fundamentais.

Caso 2: Triângulos que possuem pontos da malha, além dos vértices, em algum de seus lados. Basta traçarmos segmentos ligando esses pontos de um dos lados do triângulo ao vértice oposto a esse lado. Vejamos, dado um triângulo ABC , (conforme o exemplo da Figura 3.13), sejam D e E pontos da malha pertencentes ao lado BC (parte (a) da figura). Ao traçarmos os segmentos AD e AE , decomponemos ABC em três triângulos que possuem número menor de pontos na malha do que o triângulo ABC (parte (b) da Figura). Caso surjam pontos no interior de algum dos triângulos formados, devemos proceder como no *Caso 1*. E, se ainda existirem pontos em algum dos lados de algum triângulo formado, (como o ponto F na parte (c) da figura), ligamos estes ao vértice oposto ao lado em que se encontra (em nosso caso, vértice D), assim como no início desse caso. Se necessário, repetimos os processos até que todos os triângulos estejam decompostos em triângulos fundamentais.

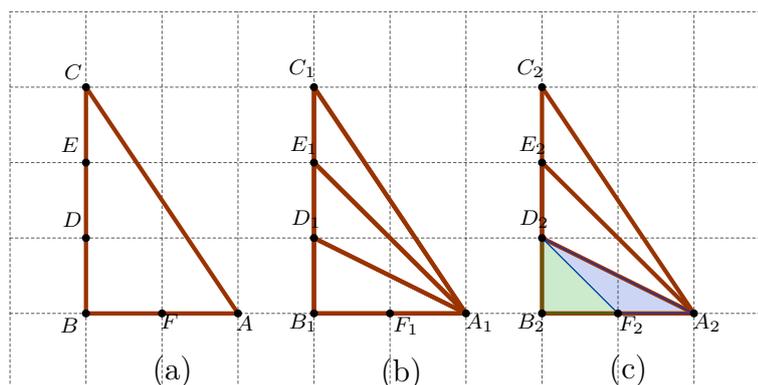


Figura 3.13: Decomposição de triângulo em triângulos fundamentais.

Concluimos assim a demonstração desse teorema. ■

3.3 Demonstração do Teorema de Pick

Nesta seção temos a demonstração deste resultado que é o foco principal do capítulo.

Teorema 3.4 (Teorema de Pick) *A área de um polígono simples imerso em \mathbb{Z}^2 é dada pela expressão*

$$\frac{L}{2} + I - 1,$$

onde L é a quantidade de pontos da malha situados sobre os lados do polígono, incluindo os vértices, e I é a quantidade de pontos de \mathbb{Z}^2 existentes no seu interior.

Demonstração: Já mostramos que qualquer polígono simples P imerso em \mathbb{Z}^2 pode ser decomposto em triângulos fundamentais (Ver Teorema 3.3) e que a área de um triângulo fundamental é $1/2$ (ver Teorema 3.1). Assim, sendo T o número de triângulos fundamentais formados com os pontos de \mathbb{Z}^2 de P , a área de P pode ser expressa por: $T/2$. Então, para provar o teorema de Pick, falta mostrar que $T = L + 2 \cdot I - 2$.

Seja S a soma dos ângulos internos dos T triângulos fundamentais que compõem P . Temos que $S = T \cdot 180^\circ$. Por outro lado, S é igual a soma de todos os ângulos formados a partir de cada ponto de \mathbb{Z}^2 em P .

Chamemos L' o número de pontos de \mathbb{Z}^2 que são vértices de P (pontos em vermelho na Figura 3.14) e L'' o número de pontos de \mathbb{Z}^2 localizados nos lados de P que não são vértices (pontos em azul na Figura 3.14). Assim $L = L' + L''$. Chamemos S_L a soma dos ângulos internos de P formados pelos pontos de \mathbb{Z}^2 localizados nos lados de P . Temos $S_L = S_{L'} + S_{L''}$, onde $S_{L'}$ é a soma dos ângulos internos de P (pois seus vértices são os vértices de P) e $S_{L''}$ a soma dos ângulos internos a P cujos vértices são pontos de \mathbb{Z}^2 localizados nos lados de P que não são vértices de P . Pela soma dos ângulos internos de um polígono, temos $S_{L'} = (L' - 2)180^\circ$ e, como cada ponto no lado de P que não é vértice, forma um ângulo interno raso, $S_{L''} = L'' \cdot 180^\circ$. Assim,

$$S_L = S_{L'} + S_{L''} = (L' - 2)180^\circ + L'' \cdot 180^\circ = (L - 2) \cdot 180^\circ.$$

Chamemos agora, S_I a soma dos ângulos formados em cada ponto de \mathbb{Z}^2 interno a P (pontos na cor preta na Figura 3.14). Notadamente os ângulos formados sem sobreposição em torno de cada um desses pontos somam 360° . Assim

$$S_I = I \cdot 360^\circ$$

Portanto,

$$S = S_L + S_I = (L - 2) \cdot 180^\circ + I \cdot 360^\circ.$$

Ou seja,

$$T \cdot 180^\circ = (L - 2) \cdot 180^\circ + I \cdot 360^\circ.$$

3.3. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PICK

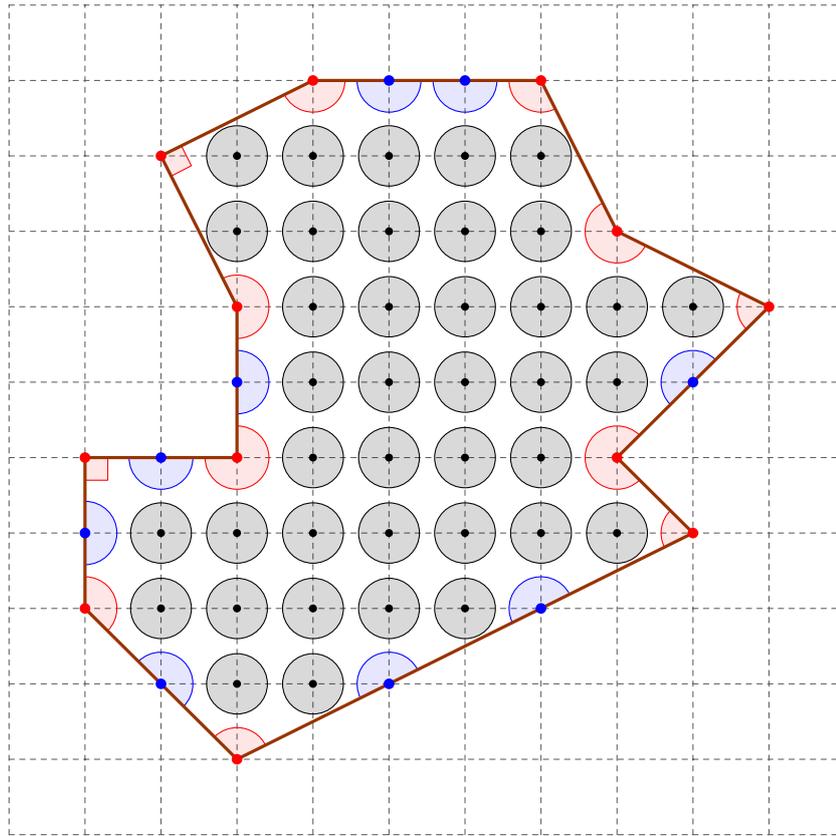


Figura 3.14: Pontos de \mathbb{Z}^2 no polígono P e seus ângulos.

Logo,

$$T = L + 2 \cdot I - 2,$$

como queríamos provar. ■

Concluída a prova do Teorema de Pick, encerramos este capítulo. No capítulo seguinte faremos algumas aplicações deste resultado.

Capítulo 4

Aplicações

Neste que é o capítulo final desse TCC, tratamos de uma solução para o problema citado no Capítulo 2 sobre a quantidade de quadrados imersos na malha quadriculada de medida $n \times n$ pontos, bem como questões ligadas ao Ensino Básico e de acesso a universidades envolvendo o cálculo de áreas de polígonos simples em \mathbb{Z}^2 nas quais o Teorema de Pick pode ser aplicado.

4.1 Problema motivador do Capítulo 2

“Quantos quadrados distintos podemos formar usando como vértices os pontos que aparecem na Figura 4.1?”

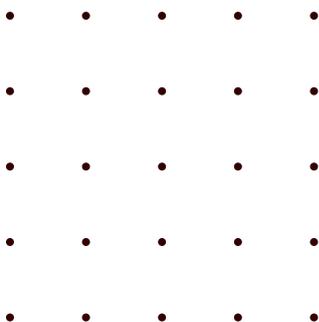


Figura 4.1: Malha pontilhada.

Uma solução: Essa solução foi dada pela simples contagem dos quadrados que podem ser formados nessa malha. E, como já foi dito, de acordo com Polster (ver [17]), é um convite ao erro. Alguns dirão de imediato que são 16 quadrados, pensando nas regiões 2×2 da malha como os indicados na Figura 4.2 (a). Um grande número

4.1. PROBLEMA MOTIVADOR DO CAPÍTULO 2

de pessoas iria um pouco além e acrescentaria à contagem anterior os quadrados formados nas regiões 3×3 , 4×4 e 5×5 da malha, como na Figura 4.2 (b), (c) e (d).

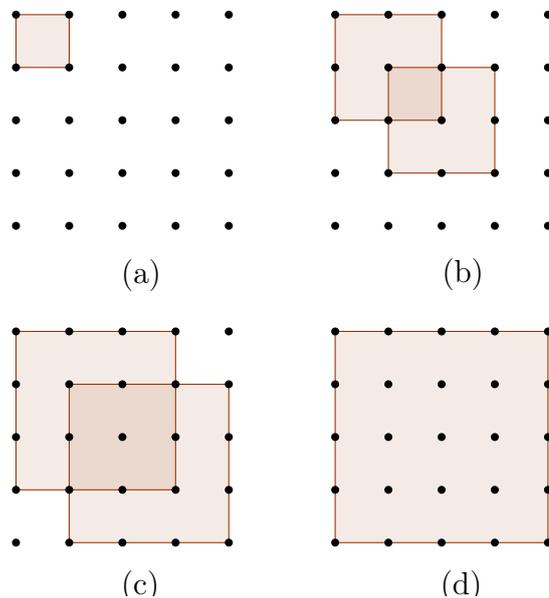


Figura 4.2: Quadrados na malha.

O resultado dessas pessoas deve ser 30. Veja:

Espaços da Malha (em pontos)	Quantidade
2×2	16
3×3	9
4×4	4
5×5	1
Total	30

Certamente, as pessoas que pensaram nas respostas acima, não conseguiram perceber que nas regiões 3×3 , 4×4 e 5×5 da malha, pode-se formar quadrados com lados oblíquos como os indicados na Figura 4.3.

Assim, o número de quadrados que podemos formar na malha 5×5 dada é 50. Veja:

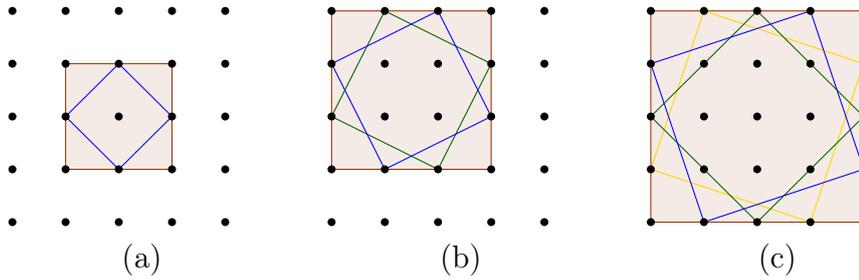


Figura 4.3: Quadrados na malha.

Espaços da Malha (em pontos)	Quantidade
2×2	16
3×3	18
4×4	12
5×5	4
Total	50

Evidentemente, a inquietação natural dos amantes da matemática não nos permite simplesmente aceitar que os quadriláteros formados nos espaços 3×3 , 4×4 e 5×5 da malha são quadrados. Então segue uma prova simples de que são quadrados e de quantos são.

Proposição 4.1 *Se $ABCD$ é um quadrado imerso em \mathbb{Z}^2 cujo lado possui n pontos de \mathbb{Z}^2 , incluindo os vértices, podemos formar uma quantidade $Q = n - 1$ quadrados usando apenas os pontos de \mathbb{Z}^2 localizados nos lados de $ABCD$.*

Demonstração: Seja o quadrado $ABCD$ conforme a afirmação acima. Se o número n de pontos de \mathbb{Z}^2 em um dos lados de $ABCD$ é 2 (o mínimo possível para se formar um quadrado em \mathbb{Z}^2), é fácil perceber que apenas um quadrado pode ser formado (ver Figura 4.2 (a)) obedecendo as condições descritas acima. Se o número n de pontos de \mathbb{Z}^2 em um dos lados de $ABCD$ é maior que 2, existe em cada lado de $ABCD$ a mesma quantidade de pontos com a mesma distância entre pontos consecutivos. Seja l a medida do lado de $ABCD$ e A_1 um ponto de \mathbb{Z}^2 localizado em AB . Seja $l' = \overline{AA_1}$. Sejam B_1, C_1 e D_1 pontos pertencentes aos lados BC, CD e DA , respectivamente, de modo que $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1}$. Usando o caso LAL de congruência de triângulos verifica-se que

$$D_1AA_1 \cong A_1BB_1 \cong B_1CC_1 \cong C_1DD_1.$$

E, usando a soma dos ângulos internos de um triângulo, verifica-se que $A_1B_1C_1D_1$ é um quadrado (veja a prova do Teorema de Pitágoras 1.1 para mais detalhes).

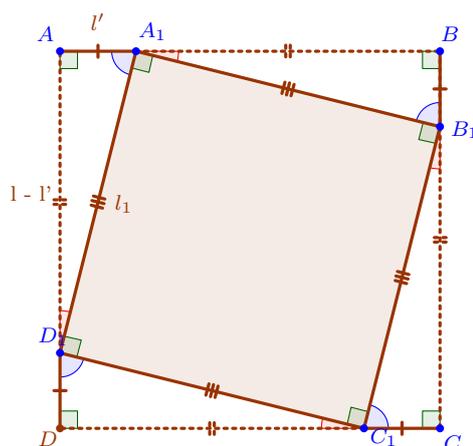


Figura 4.4: Quantos quadrados podemos fazer?

Assim, se $ABCD$ é um quadrado com vértices em \mathbb{Z}^2 e possui n pontos de \mathbb{Z}^2 pertencentes a um de seus lados (incluindo os vértices) podemos formar um quadrado com os vértices de $ABCD$ mais um quadrado para cada um dos $n - 2$ pontos entre A e B que não são vértices. Ou seja, o número Q de quadrados formados será:

$$Q = 1 + (n - 2) = n - 1,$$

como afirmamos. ■

Depois disso, uma pergunta que nos surge naturalmente é: *Qual o número total T de quadrados que podemos formar usando todos os pontos de \mathbb{Z}^2 de uma malha $n \times n$?*

Uma solução para essa questão pode ser dada se determinarmos a quantidade P de quadrados que possuem lados horizontais e verticais que podem ser formados com os pontos dessa malha e neles aplicarmos o resultado obtido na afirmação acima.

Para quantificar todos os quadrados que possuem lados horizontais e verticais, convém lembrar que, como a distância entre as linhas e colunas da malha é a mesma, ao transladarmos um quadrado na malha verticalmente ou horizontalmente encontraremos outro quadrado com as mesmas medidas do anterior.

Em uma malha com $n \times n$ pontos, podemos formar um quadrado com n pontos de lado. Chamemos esse quadrado de $Q1$. Ao diminuirmos a medida do lado do quadrado para $n - 1$ pontos, chamemos de $Q2$ os quadrados com essa medida, teremos uma linha e uma coluna de pontos na malha $n \times n$ não ocupados por $Q2$. Isso nos dá a possibilidade de transladarmos $Q2$ na malha $n \times n$ horizontalmente uma coluna (esquerda ou direita a depender da posição inicial) e verticalmente uma linha (para cima ou para baixo a depender da posição inicial). Assim $Q2$ pode ocupar 2×2 posições na malha $n \times n$ ou seja, numa malha $n \times n$ podemos formar 2×2 quadrados

nos quais cada lado tenha $n - 1$ pontos. Voltando um pouco e fazendo uma análise semelhante com $Q1$, percebemos que ele não pode ser transladado na malha $n \times n$ pois não há linhas ou colunas livres, ou seja o número de posições possíveis de $Q1$ na malha $n \times n$ é 1×1 . Se diminuirmos ainda mais a medida do lado do quadrado para $n - 2$, chamando de $Q3$ os quadrados com essas medidas, teremos na malha $n \times n$ duas colunas e duas linhas não ocupadas por $Q3$ e, analogamente ao que aconteceu com $Q2$, teremos 3×3 posições possíveis para $Q3$ na malha $n \times n$. Ou seja, para cada k pontos que diminuimos na quantidade de pontos que forma o lado do quadrado, formamos $(k + 1)^2$ quadrados cujos lados tem $(n - k)$ pontos. Assim, o número P de quadrados com vértices em pontos de \mathbb{Z}^2 que possuem lados horizontais e verticais e que podem ser formados numa malha de $n \times n$ pontos, pode ser dado por:

$$P = \sum_{k=0}^{n-2} (k + 1)^2.$$

Aqui $0 \leq k \leq n - 2$ pois são necessários ao menos 2 pontos laterais para formar um quadrado.

Entretanto, já vimos que o número de quadrados formados pelos pontos dos lados de um quadrado que tem n pontos em cada lado é $n - 1$. Portanto, se o lado de cada quadrado formado acima possui $n - k$ pontos de \mathbb{Z}^2 , em cada um deles podemos formar $n - k - 1$ quadrados usando os pontos de \mathbb{Z}^2 pertencentes a seus lados. Assim, T pode ser dado por:

$$T = \sum_{k=0}^{n-2} (k + 1)^2 \cdot (n - k - 1).$$

Apliquemos a fórmula no problema motivador do Capítulo 2: A malha, nesse problema, tem medidas 5×5 . Assim temos $n = 5$ e:

$$T = \sum_{k=0}^3 (k + 1)^2 \cdot (5 - k - 1) = 4 + 12 + 18 + 16 = 50.$$

4.2 Cálculo de áreas via Teorema de Pick

Nessa seção mostraremos a resolução, por meio do Teorema de Pick, de algumas questões extraídas de exames que vão desde a educação básica até concursos e vestibulares.

- **Questão 1. (ESMP-2018/2 - Veja [7])** Considere uma malha quadriculada cujas células são quadrados de lado 1. Segundo o Teorema de Pick, a área de um polígono simples cujos vértices são nós dessa malha, é igual ao número

4.2. CÁLCULO DE ÁREAS VIA TEOREMA DE PICK

de nós da malha que se encontram no interior do polígono mais metade do número de nós que se encontram sobre o perímetro do polígono, menos uma unidade.

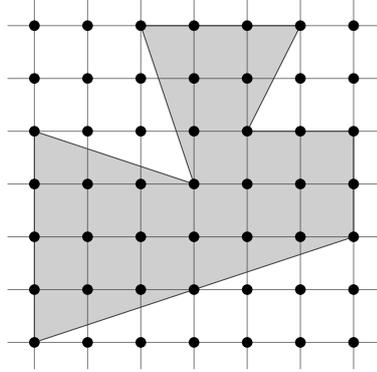


Figura 4.5: Imagem reproduzida pelo autor da dissertação fiel à original.

De acordo com esse teorema, a área do polígono representado na figura acima é igual a:

- a) 21
- b) 18
- c) 23
- d) 19
- e) 22

Solução Pelo teorema de Pick a área A do polígono em questão pode ser dada por

$$A = \frac{L}{2} + I - 1$$

onde L é a quantidade de pontos da malha situados nos lados do polígono e I é a quantidade de pontos da malha no interior do polígono. Assim, temos:

$$A = \frac{L}{2} + I - 1 = \frac{16}{2} + 14 - 1 = 21.$$

- **Questão 2. (OMEP-2017- Veja [4])** A área da figura azul é igual a soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?
 - a) 12
 - b) 22
 - c) 32
 - d) 64
 - e) 100

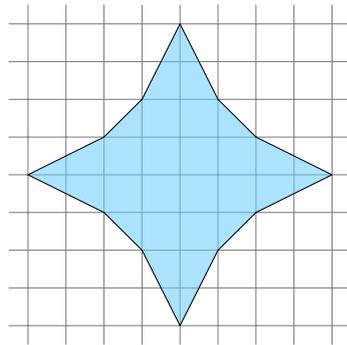


Figura 4.6: Imagem reproduzida pelo autor da dissertação fiel à original.

Solução Nessa questão cada quadrado da malha pode se considerado como uma unidade de área. Aplicando no polígono azul o Teorema de Pick, temos:

$$A = \frac{L}{2} + I - 1 = \frac{12}{2} + 17 - 1 = 22$$

Ou seja, a região azul possui 22 unidades de área equivalente a 22 quadrados da malha.

- **Questão 3. (UFRGS-2008 - Veja [18])** Na figura abaixo, a malha quadriculada é formada por quadrados de área 1. Os vértices do polígono sombreado coincidem com vértices de quadrados dessa malha.

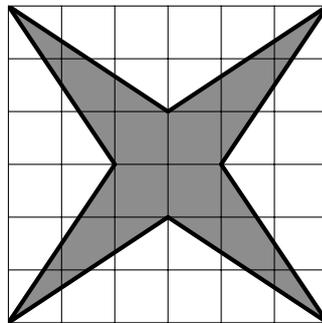


Figura 4.7: Imagem reproduzida pelo autor da dissertação fiel à original.

A área do polígono sombreado é:

- 10.
- 12.
- 13.
- 15.
- 16.

4.2. CÁLCULO DE ÁREAS VIA TEOREMA DE PICK

Solução Nessa questão cada quadrado da malha possui área 1 unidade de área. Aplicando no polígono sombreado o Teorema de Pick, temos:

$$A = \frac{L}{2} + I - 1 = \frac{8}{2} + 9 - 1 = 12.$$

- **Questão 4. (Revista SAEPE 2016 - Veja [16])** Sávio fez a redução do desenho de um cata-vento. O desenho original e sua redução estão representados na malha quadriculada abaixo

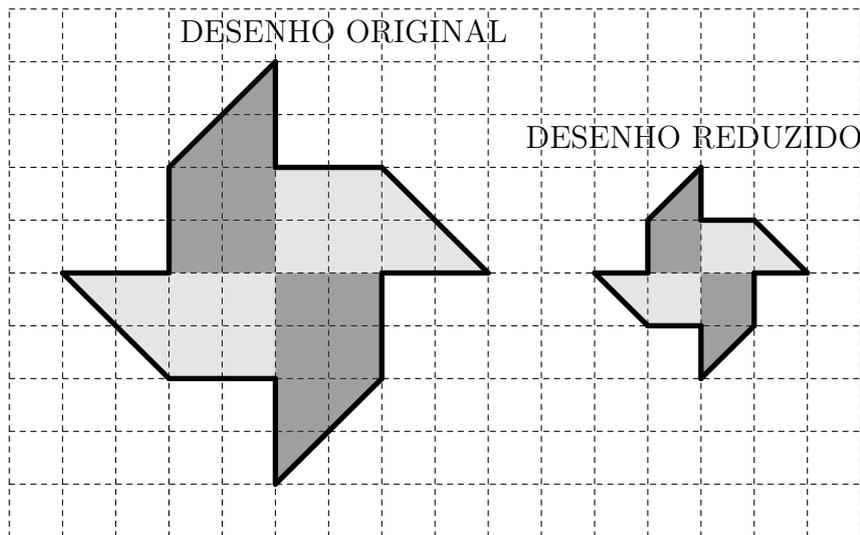


Figura 4.8: Imagem reproduzida pelo autor da dissertação fiel à original.

A área do desenho do catavento reduzido em relação ao original é:

- a) a metade
- b) a quarta parte
- c) o dobro
- d) o quádruplo

Solução Aplicaremos o Teorema de Pick nos dois sedenhos, temos:

Área do desenho original:

$$A_O = \frac{L}{2} + I - 1 = \frac{24}{2} + 13 - 1 = 24.$$

Área do desenho reduzido:

$$A_R = \frac{L}{2} + I - 1 = \frac{12}{2} + 1 - 1 = 6.$$

4.2. CÁLCULO DE ÁREAS VIA TEOREMA DE PICK

Ou seja, a área do desenho original e o quádruplo da área do desenho reduzido.

- **Questão 5.** (IBMECRJ-2013 - Veja [8]) O mosaico da figura adiante foi desenhado em papel quadriculado 1×1 . A razão entre a área da parte escura e a área da parte clara, na região compreendida pelo quadrado $ABCD$, é igual a:

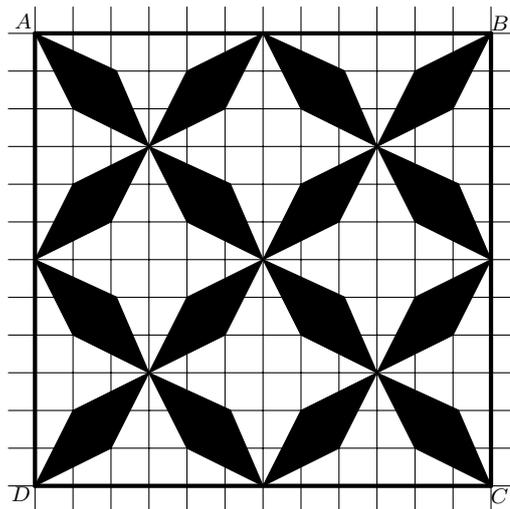


Figura 4.9: Imagem reproduzida pelo autor da dissertação fiel à original.

- a) $1/2$
- b) $1/3$
- c) $3/5$
- d) $5/7$
- e) $5/8$

Solução Podemos facilmente perceber que a parte escura da figura é composta por vários losangos de mesma medida e, conseqüentemente, mesma área. Assim, a área da parte escura equivale a área de um desses losangos multiplicada pela quantidade de losangos. A área da parte clara equivale a área total do quadrado $ABCD$ menos a área da parte escura. Para calcular a área de um losango, usemos o Teorema de Pick.

Área de um losango da imagem:

$$A_l = \frac{L}{2} + I - 1 = \frac{4}{2} + 2 - 1 = 3.$$

Área da parte escura:

$$A_E = 16 \cdot 3 = 48.$$

4.2. CÁLCULO DE ÁREAS VIA TEOREMA DE PICK

Área do quadrado $ABCD$:

$$A_Q = 12^2 = 144.$$

Área da parte clara:

$$A_C = A_Q - A_E = 144 - 48 = 96$$

Finalmente a razão entre a área da parte escura e a área da parte clara é

$$R = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}.$$

Assim concluímos esse capítulo.

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, João Lucas Marques *Geometria Euclidiana Plana*.1995. 4ª Ed. Secrac. Fortaleza.CE.
- [2] BEESON, Michael J. *Triangles with Vertices on Lattice Points*.The American Mathematical Monthly. Vol. 99, No. 3 (março, 1992) , pp. 243-252 (10 páginas). Publicado por: Taylor & Francis, Ltd. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2325060?seq=1>>.
- [3] BOGOMOLNY, Alexander. *Pythagorean Theorem*. Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. Acessado em 10/02/2021. Disponível em: <<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/>>.
- [4] BRASIL. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escola Públicas - OBMEP. Prova Nível 1, questão 2, 2017. Disponível em <<https://drive.google.com/file/d/1FLmHogjZxSMKA9HrQBHgPh7mUVGaeMVb/view>>, acessado em 29/04/21.
- [5] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- [6] DELGADO, Jorge, FRENSEL, Katia e CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria Analítica*, Coleção PROFMAT.2017. 2 Ed. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. RJ.
- [7] Escola Superior de Marketing e Propaganda - Vestibular 2018-2 - Prova 3, Quest 33, Pág.18. Disponível para download em <<https://vestibular.brasilecola.uol.com.br/baixar/42709/>>, cessado em 29/04/2021.
- [8] Faculdades IBMEC. Processo seletivo 2013.1. Prova de Matemática, questão 22, pág. 8. Disponível em: <https://www.academia.edu/9500888/PROVA_1_PROCESSO_SELETIVO_2013_1_FONTE_10_modelo_2>, acessado em 29/04/21.

- [9] FONSECA, J. D. M. *Teoria ingênua dos conjuntos numéricos*. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal.
- [10] HAMKINS, J D. There are no nondegenerate regular polygons in the integer lattice, except for squares. **Mathematics and philosophy of the infinite**, 2016. <<http://jdh.hamkins.org/no-regular-polygons-in-the-integer-lattice/>> Acessado em 24/11/2020.
- [11] LIMA, Elon Lages, *Números e funções reais*, Coleção PROFMAT. 2017. 1 Ed. 3ª Reimpressão, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. RJ.
- [12] LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro. RJ. 1991.
- [13] LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro. RJ. 1991.
- [14] NETO, Antônio Caminha Muniz, *Geometria*, Coleção PROFMAT. 2013. 1 Ed. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. RJ.
- [15] OLIVEIRA, Filipe Tiago de. *Teorema de Pitágoras - duas demonstrações animadas*. Canal FTOedu. 2018. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=sl9Jh2Uvx9s&t=1s>>.
- [16] PERNAMBUCO. Secretaria de Educação de Pernambuco. SAEPE – 2016/ Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. v. 1 (jan./dez. 2016), Juiz de Fora, 2016 – Anual. Conteúdo: Revista do Professor - Matemática. ISSN 1948-560X.
- [17] POLSTER, Burkard. *What does this prove? Some of the most gorgeous visual "shrink" proofs ever invented*. Mathologer. 2020. Disponível em <<https://youtu.be/sDfzCIWpS7Q>>.
- [18] Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS. Concurso Vestibular 2008, prova de matemática, questão 31. Disponível em: <<http://geniodamatematica.com.br/wp-content/uploads/2014/01/PROVA-MAT-2008.pdf>>.