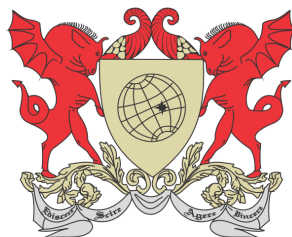


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



EDILSON PINTO DA FONSECA

# CIRCUNFERÊNCIAS EM TRIÂNGULOS

**FLORESTAL – MINAS GERAIS**  
**2021**

**EDILSON PINTO DA FONSECA**

**CIRCUNFERÊNCIAS EM TRIÂNGULOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal**

T

F676c Fonseca, Edilson Pinto da, 1972-  
2021 Circunferências em triângulos / Edilson Pinto da Fonseca. –  
Florestal, MG, 2021.  
101 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 101.

1. Geometria plana. 2. Circunferências e triângulos.  
3. Matemática. I. Universidade Federal de Viçosa. Instituto de  
Ciências Exatas e Tecnológicas. Instituto de Ciências Exatas e  
Tecnológicas. II. Título.

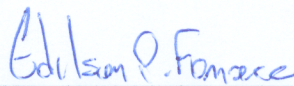
**EDILSON PINTO DA FONSECA**

**CIRCUNFERÊNCIAS EM TRIÂNGULOS**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

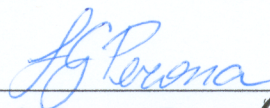
APROVADA: 23 de fevereiro de 2021.

Assentimento:



---

Edilson Pinto da Fonseca  
Autor



---

Luiz Gustavo Perona Araújo  
Orientador

# Agradecimentos

---

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# Resumo

---

FONSECA, Edilson Pinto da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2021. **Circunferências em Triângulos**. Orientador: Luiz Gustavo Perona Araújo.

Esta pesquisa teve como objetivo conhecer as circunferências relevantes associadas a um triângulo e suas propriedades geométricas, elaborado a partir de pesquisa bibliográfica e uso do software Geogebra. Inicialmente é apresentado um conjunto de fundamentos acerca da circunferência e algumas definições e teoremas básicos da geometria plana. Ao longo do capítulo 2 e 3, são apresentadas as circunferências associadas ao triângulo e interessantes propriedades geométricas, teoremas e suas respectivas demonstrações. Por último, e não menos importante, é apresentada uma proposta pedagógica de ensino da geometria, aplicável aos anos finais do Ensino Fundamental ou ao Ensino Médio, com o objetivo de se fazer conhecer as circunferências associadas ao triângulo, para isso desenvolvendo no Geogebra a construção destas circunferências a partir de um triângulo e seus elementos, e observando as propriedades mais relevantes.

**Palavras-chave:** Geometria plana. Circunferências e triângulos. Matemática.

# Abstract

---

FONSECA, Edilson Pinto da, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2021.  
**Circunferences in Triangles.** Adviser: Luiz Gustavo Perona Araújo.

This research aimed to know the relevant circumferences associated with a triangle and its geometric properties, elaborated from bibliographic research and use of the Geogebra software. Initially, a set of fundamentals about the circumference and some basic definitions and theorems of plane geometry are presented. Throughout chapters 2 and 3, the circumferences associated with the triangle and interesting geometric properties, theorems and their respective demonstrations are presented. Finally, and no less important, a pedagogical proposal for teaching geometry is presented, applicable to the final years of elementary school or high school, with the objective of making known the circumferences associated with the triangle, for this reason, developing in Geogebra the construction of these circumferences from a triangle and its elements, and observing the most relevant properties.

**Keywords:** Plain geometry. Circunferences and triangles. Math.

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Circunferências</b>	<b>10</b>
2.1	O Teorema da Interseção Reta-circunferência . . . . .	11
2.2	Arcos de circunferência . . . . .	15
2.3	Pontos Notáveis de um Triângulo . . . . .	22
2.3.1	Baricentro . . . . .	22
2.3.2	Circuncentro . . . . .	28
2.3.3	Ortocentro . . . . .	29
2.3.4	Incentro . . . . .	30
2.4	A Reta de Euler . . . . .	32
2.5	A Circunferência de Nove Pontos . . . . .	33
2.6	O Teorema das Duas Circunferências . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Circunferências em triângulos</b>	<b>39</b>
3.1	Divisão de Segmentos . . . . .	39
3.1.1	Divisão Proporcional de um Segmento . . . . .	39
3.1.2	Divisão Harmônica . . . . .	40
3.2	Bissetriz . . . . .	44
3.3	A Circunferência de Apolônio . . . . .	50
3.4	Centros Tritangentes . . . . .	53
3.5	Raios Tritangentes . . . . .	64
3.6	Pontos de Tangência . . . . .	82
3.7	Circunferências Associadas a um Triângulo . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Proposta de Atividades</b>	<b>89</b>
4.1	Aprendendo na Prática . . . . .	89
4.1.1	Conhecendo a circunferência e seus elementos . . . . .	89
4.1.2	Velocidades média: periférica e angular . . . . .	91
4.2	Circunferências em Triângulos utilizando o Geogebra . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>99</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>101</b>



# Introdução

---

Sob o pretexto de aguçar o interesse do leitor acerca deste conteúdo - apesar de ele, por si só, ser capaz de despertar nos amantes da Matemática e da Geometria, no mínimo, uma incontestável curiosidade; é narrada a seguir um episódio fictício, porém possível de acontecer, pensando em tempos de aulas presenciais:

*Em um determinado ano letivo, uma escola de ensino primário, como era de tradição, participava com um grupo de seus estudantes de uma feira de ciências e outras culturas acadêmicas.*

*Dois forasteiros, ambos estudantes universitários, após terem combinado uma rápida parada, visitavam a feira pela conveniência de ser caminho para sua cidade e passavam por uma banca onde se apresentava um grupo daquela escola. Um deles parou por curiosidade, pois percebeu que tratava-se de um desafio ao ver um aglomerado de alunos e visitantes rabiscando em uma lousa.*

*Um dos integrantes do grupo o convidou para tentar o primeiro desafio, sem saber que aquele visitante era estudante universitário, e propôs que ele esboçasse na lousa duas circunferências distintas a partir de dois pontos dados. O visitante com a maior naturalidade o fez, tomando um dos pontos como centro e o outro como limitador do raio, depois alternou o sentido dos pontos.*

*O segundo desafio, no entanto, tinha por base três pontos colineares e a pergunta era “quantas circunferências seria possível esboçar”. O visitante, mais uma vez, respondeu com destreza: “se o ponto interno for médio, cinco. Senão, seis.”*

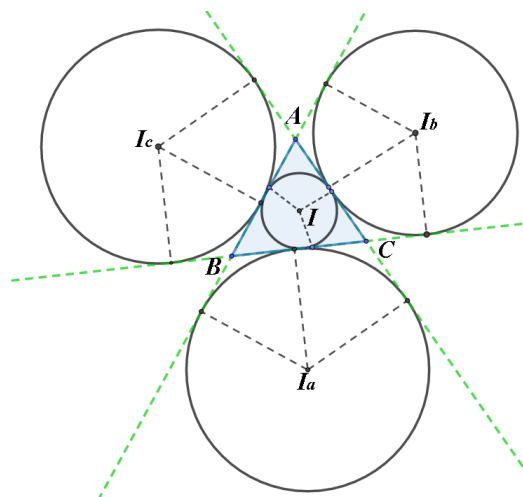
*Ao perceber que o visitante tinha conhecimento sobre o assunto, o apresentador se voltou ao visitante e o desafiou a representar 12 circunferências a partir de 3 pontos esboçados convenientemente na lousa. O visitante desta vez hesitou em responder de súbito e parou para pensar. Depois de alguns minutos, perguntou ao apresentador se era realmente possível. A resposta foi afirmativa e acrescentou que, dependendo da construção, seriam 15 circunferências.*

*O visitante já pedia ao desafiante que revelasse a resposta pois não fazia ideia do que dizer. Antes de ter sua curiosidade satisfeita, foi interrompido por seu colega que o apressava para ir embora, pois teriam que partir.*

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre circunferências no plano, suas propriedades e teoremas relacionados, como o teorema da interseção da reta-circunferência, o teorema das duas circunferências, os pontos notáveis de um triângulo, a reta de Euler.

Ao todo são 82 propriedades, agrupadas de acordo com um importante elemento que as fundamentam, quase todas acompanhadas de ilustração, o que auxilia numa melhor compreensão por parte do leitor.

Como aprofundamento neste tópico, é apresentado um estudo sobre circunferências associadas a um triângulo: a circunferência de nove pontos e a circunferência de Apolônio, comumente conhecida como o Círculo de Apolônio. O círculo de Apolônio é um lugar geométrico cuja existência é determinada por um segmento e um ponto em seu interior. No entanto, este ponto interior não deve dividir o segmento na razão 1. Assim, associado a cada lado de um triângulo pode haver uma circunferência, isto é, um círculo de Apolônio, seja o triângulo escaleno, isósceles ou equilátero; logo somam até três círculos distintos. Além destes, existem a circunferência circunscrita e as circunferências tritangentes: a circunferência inscrita e as três a circunferências ex-inscritas.



**Figura 1.1:** As a circunferências tritangentes

Ainda assim, existem outras seis circunferências associadas ao triângulo, pois tomando centros tritangentes dois a dois, obtemos segmentos que são diâmetros de duas circunferências distintas e associadas ao triângulo.

Portanto, contam-se até 15 (quinze) círculos associados a um triângulo. Todas estas circunferências possuem centros bem definidos em pontos cuja localização depende somente da existência de um triângulo.

Posteriormente é apresentado um projeto de ensino a ser aplicado em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental ou de turmas do Ensino Médio. Neste projeto, os estudantes terão a oportunidade de estudar a circunferência e seus elementos como: comprimento, raio e área a partir do sistema de tração de uma bicicleta desenvolvendo a noção de transmissão mecânica de movimento além de outros conceitos importantes como proporcionalidade, diferentes unidades de medida, velocidade periférica e velocidade angular. Também conceitos de paralelismo e de perpendicularidade. Os

alunos devem ser orientados na utilização de régua e compasso em algumas construções básicas e, posteriormente, o desenvolvimento das construções terá continuidade na sala de informática, onde utilizarão o software Geogebra que é um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo; e foi desenvolvido para aprendizagem e ensino da matemática nas escolas, por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores ([2]).

A aplicação de tal projeto depende da disponibilidade de recursos tecnológicos adequados nas escolas. Se os estudantes não estiverem habituados a utilizar tecnologias a favor desta aprendizagem, tais hábitos devem ser implantados em sua rotina acadêmica. No desenvolver deste trabalho fica clara a necessária e vantajosa utilização destas tecnologias, especialmente no que se refere à geometria básica, sendo capaz de criar a possibilidade de desenvolver novas habilidades nos estudantes considerados de baixo rendimento, como a de potencializar o desenvolvimento daqueles que apresentam melhor desempenho na matemática. Neste sentido, fica aberta a questão da importância de tais recursos estarem disponibilizados nas escolas básicas, de modo realmente funcional.

## Circunferências

---

Neste capítulo, faremos um estudo das propriedades e conceitos básicos das circunferências no plano: teoremas, ângulos centrais, ângulos inscritos, comprimento, área, diâmetro, arcos, posições relativas com uma reta, com outra circunferência e tangências. Caso o leitor não esteja habituado às propriedades básicas da geometria plana, especificamente dos triângulos, recomenda-se consultar [4] sobre o assunto.

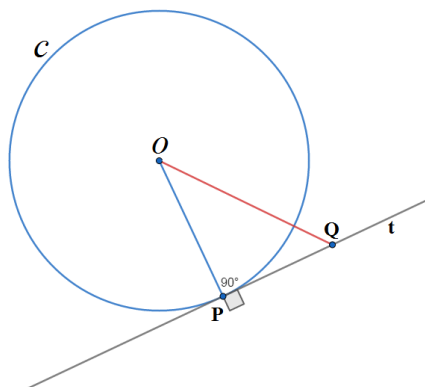
**Definição 2.1:** Dados um ponto  $O$  e um número real positivo  $r$ , a circunferência de centro em  $O$  e raio  $r$ , denotada por  $\Gamma(O, r)$ , é o conjunto de todos os pontos  $X$  tais que a distância entre os pontos  $X$  e  $O$  é igual ao raio  $r$ .

**Definição 2.2:** Dizemos que uma reta  $t$  é *tangente* à circunferência  $\Gamma$ , ou ainda, que a reta  $t$  e a circunferência  $\Gamma$  são *tangentes* se  $t$  e  $\Gamma$  possuem exatamente um ponto em comum. Se  $P$  é tal ponto, então  $P$  é o *ponto de tangência* ([4]).

**Definição 2.3:** Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos. O conjunto dos pontos  $A, X, B$  tais que  $X$  são os pontos entre  $A$  e  $B$  contidos na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , define um segmento de reta denotado por  $\overline{AB}$  e os pontos  $A$  e  $B$  são as *extremidades do segmento*  $\overline{AB}$ . A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é definida como a *medida* ou o *comprimento* do segmento  $\overline{AB}$  denotado por  $AB$ .

**Proposição 2.1:** Seja  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$ , e  $P$  um ponto em  $\Gamma$ . Se  $t$  é uma reta que contém  $P$  e  $t$  é perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{OP}$ , então  $t$  e  $\Gamma$  são tangentes.

Para mostrar que a reta  $t$  tem único ponto em comum com a circunferência  $\Gamma$ , considere um ponto  $Q$  na reta  $t$ , diferente do ponto  $P$ . O triângulo  $\triangle OPQ$  é retângulo em  $P$ , portanto  $OQ > OP = r$  ( $r$  é raio da circunferência),  $Q$  não pertence à circunferência e  $P$  é o único ponto comum.



**Figura 2.1:**  $P$  é ponto de tangência entre  $t$  e  $\Gamma$ .

**Definição 2.4:** Dizemos que uma reta  $m$  é *secante* à circunferência  $\Gamma$ , ou ainda, que a reta  $m$  e a circunferência  $\Gamma$  são *secantes* se  $t$  e  $\Gamma$  possuem exatamente dois pontos em comum. Se  $Q$  e  $Q'$  são tais pontos, então o segmento  $\overline{QQ'}$  é uma *corda* de  $\Gamma$ .

**Definição 2.5:** Dizemos que uma corda  $\overline{QQ'}$  é *diâmetro* da circunferência  $\Gamma$  se o centro  $O$  está no interior do segmento  $\overline{QQ'}$ . Neste caso,  $QO = OQ' = r$  e o diâmetro tem medida igual a  $2r$ .

## 2.1 O Teorema da Interseção Reta-circunferência

Considere em um plano uma circunferência e uma reta. O teorema a seguir determina a posição relativa e se existem pontos comuns entre elas.

**Teorema 2.2:** (Teorema Fundamental das Circunferências) Sejam  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$ , e  $t$  uma reta dadas. Sejam  $O'$  o pé da perpendicular de  $O$  sobre a reta  $t$ . Pode ocorrer apenas uma das três:

- (1) Todo ponto da reta  $t$  é exterior da circunferência  $\Gamma$ .
- (2) O ponto  $O'$  é ponto de tangência entre  $t$  e  $\Gamma$  e é único.
- (3) O ponto  $O'$  é interior à circunferência e existem exatamente dois pontos de interseção entre  $t$  e  $\Gamma$ , que equidistam de  $O'$ .

*Demonstração.* Na comparação entre  $OO'$  com  $r$  pode ocorrer:  $OO' > r$ ,  $OO' = r$  ou  $OO' < r$ .

Suponha que  $OO' > r$ . Neste caso,  $O'$  é exterior de  $\Gamma$ . Seja  $Q$  um ponto na reta  $t$ , diferente de  $O'$ . Como o triângulo  $\triangle OO'Q$  é retângulo em  $O'$ , tem-se que  $OQ > OO' > r$ . Portanto ocorre (1).

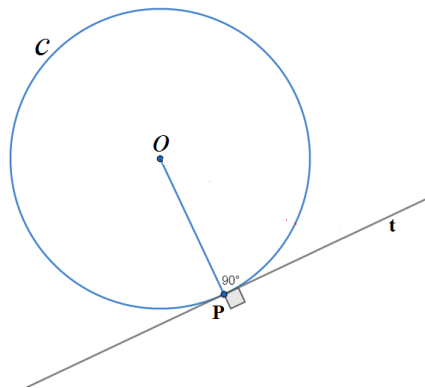
Suponha agora que  $OO' = r$ . Pela proposição (2.1) ocorre (2).

Por outro lado, se  $OO' < r$  e  $OO' > 0$ ,  $O'$  é ponto interior da circunferência  $\Gamma$ . Existe um segmento  $\overline{QQ'}$  na reta  $t$  que é corda na circunferência  $\Gamma$ , isto é, os pontos  $Q$  e  $Q'$  são pontos da circunferência. Portanto,  $OQ = OQ' = r$  e o triângulo  $\triangle QOQ'$  é

isósceles de base  $\overline{QQ'}$ . Já que  $O'$  é pé da perpendicular do vértice  $O$  na base  $\overline{QQ'}$ ,  $O'$  é ponto médio, logo,  $Q$  e  $Q'$  são equidistantes do ponto  $O'$ . Suponha, por absurdo, que exista um terceiro ponto de interseção  $K$ , entre a reta  $t$  e a circunferência  $\Gamma$ , diferente de  $Q$  e de  $Q'$ . Se  $K$  está no interior de  $\overline{QQ'}$ , tem-se  $OK < OQ = OQ' = r$ , então  $K$  é ponto interior de  $\Gamma$ , que seria absurdo. Se  $K$  está no exterior de  $\overline{QQ'}$ , tem-se  $OK > OQ = OQ' = r$ , então  $K$  é ponto exterior de  $\Gamma$ , que seria igualmente absurdo. Por outro lado, se  $OO' = 0$ , então  $O \equiv O'$  e  $QQ'$  é diâmetro de  $\Gamma$ . Portanto, ocorre (3).  $\square$

**Corolário 2.3:** Se uma reta  $t$  é tangente à circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  em um ponto  $P$ , então  $t$  é perpendicular ao raio  $\overline{OP}$ .

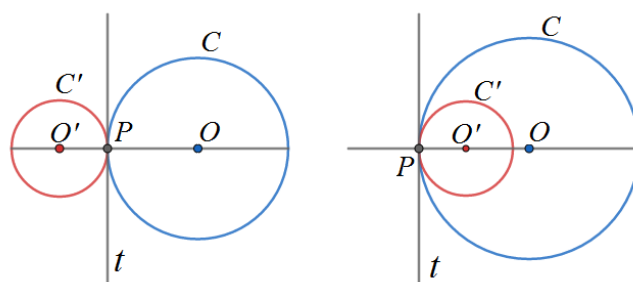
O Corolário 2.3 é uma recíproca da Proposição 2.1 e garantido pela condição (2) do Teorema 2.2.



**Figura 2.2:**  $t$  é tangente de  $C$  no ponto  $P$ , logo  $t$  é perpendicular a  $\overline{OP}$ .

**Definição 2.6:** Duas circunferências distintas são *tangentes* se possuem um, e apenas um, ponto em comum. Tal ponto é o ponto de tangência entre elas.

Sejam  $C$  e  $C'$  tais circunferências e seja  $P$  o único ponto de tangência. Se  $t$  é a reta tangente à circunferência  $C$  passando por  $P$ , então  $t$  também tangencia  $C'$ . A tangência entre duas circunferências pode acontecer de forma *externa* ou *interna*, respectivamente, caso seus centros estejam em lados opostos ou do mesmo lado em relação à reta  $t$ .



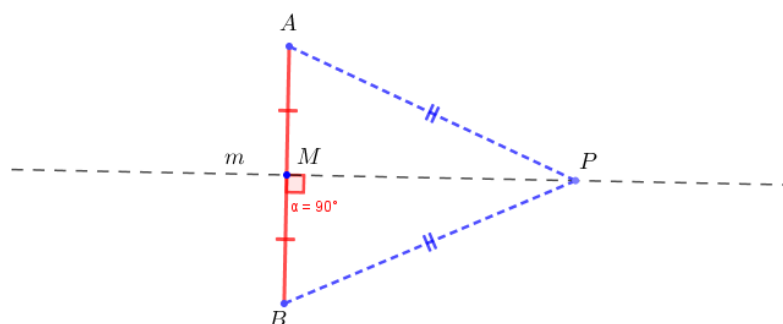
**Figura 2.3:** Pela ilustração, à esquerda ocorre tangência externa e, à direita, interna.

A reta que contém os centros  $O$  e  $O'$  também contém  $P$ , pois pelo Corolário (2.3),  $\overline{OP}$  e  $\overline{PO'}$  são perpendiculares à reta  $t$ .

**Teorema 2.4:** A mediatriz de um segmento  $\overline{AB}$  é o conjunto de todos os pontos equidistantes dos extremos  $A$  e  $B$ .

Em outras palavras,  $P$  é um ponto da mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  se, e somente se,  $P$  é equidistante dos extremos  $A$  e  $B$ .

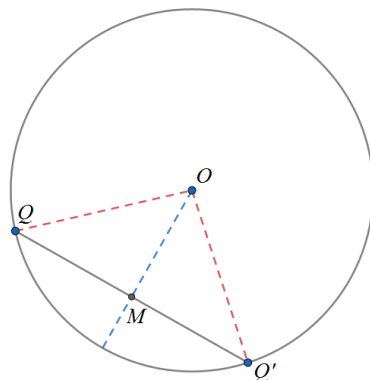
*Demonstração.* Sejam  $m$  a mediatriz de  $\overline{AB}$  e  $P$  um ponto em  $m$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$  e, por definição de ponto médio,  $AM = MB$ . Se  $P$  coincide com  $M$ , então  $A$ ,  $P$  e  $B$  são colineares e  $PA = PB$ . Se  $P$  não coincide com  $M$ , temos os triângulos  $\triangle PMA$  e  $\triangle PMB$ , tais que  $AM = MB$ ,  $\overline{PM}$  é lado comum e  $\widehat{PMA} \equiv \widehat{PMB} = 90^\circ$ . Pelo caso Lado Ângulo Lado - L. A. L., tais triângulos são congruentes e, portanto,  $PA = PB$ .



**Figura 2.4:**  $m$  é mediatriz do segmento  $\overline{AB}$  e  $P$  pertence a  $m$ .

Por outro lado, seja  $P$  um ponto equidistante dos extremos  $A$  e  $B$ . Se  $P$  pertence ao segmento  $\overline{AB}$ , então  $P$  é ponto médio, portanto pertence à mediatriz. Se não, os pontos  $P$ ,  $A$  e  $B$  definem um triângulo tal que  $PA = PB$ , logo  $\triangle APB$  é triângulo isósceles de base  $\overline{AB}$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$ , logo  $AM = MB$ . Comparando os triângulos  $\triangle PMA$  e  $\triangle PMB$ , tem-se que  $\overline{PM}$  é lado comum e pelo caso Lado Lado Lado - L. L. L., tais triângulos são congruentes. Assim,  $\widehat{PMA} \equiv \widehat{PMB} = 90^\circ$ . Portanto, a reta  $\overline{MP}$  é a mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ .  $\square$

**Teorema 2.5:** Seja  $\overline{QQ'}$  uma corda da circunferência  $\Gamma$  e  $M$  seu ponto médio. Se uma reta  $t$  passa pelo centro  $O$  e por  $M$ , então  $t$  é perpendicular a corda  $\overline{QQ'}$ . Equivalentemente, a mediatriz de qualquer corda passa pelo centro da circunferência.



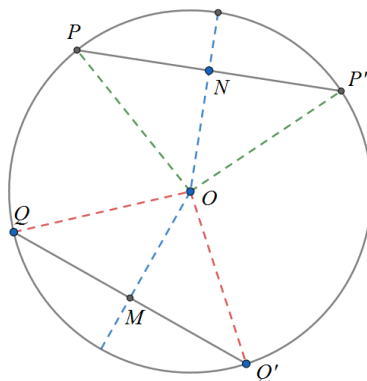
**Figura 2.5:**  $\overline{MO}$  é mediatriz da corda  $\overline{QQ'}$ .

*Demonstração.* Conforme é provado no Teorema 2.4, mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades. Como o triângulo  $\triangle OQQ'$  é isósceles de base  $\overline{QQ'}$ , o vértice  $O$  pertence à mediatriz da base  $\overline{QQ'}$ , passando por  $M$ , logo  $\overline{OM}$  é perpendicular à corda  $\overline{QQ'}$ . Por outro lado, a mediatriz de  $\overline{QQ'}$ , passa pelo ponto médio  $M$ . Sendo  $QO = OQ' = r$ , logo  $O$  pertence à mediatriz.  $\square$

**Teorema 2.6 (Teorema da Intersecção Reta-Circunferência):** Se uma reta intersecciona o interior de uma circunferência, então intersecciona a circunferência em dois pontos.

O Teorema (2.6) é garantido pela condição (3) do Teorema Fundamental das Circunferências (Teorema 2.2).

**Teorema 2.7:** Sejam  $\overline{QQ'}$  e  $\overline{PP'}$  duas cordas em uma mesma circunferência  $\Gamma$  ou em duas circunferências de raios congruentes. Tais cordas são congruentes se, e somente se, equidistam dos centros das respectivas circunferências.



**Figura 2.6:** Congruência entre duas cordas.

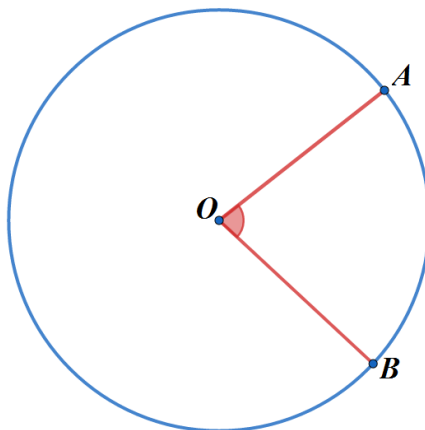


*Demonstração.* Suponha que sejam congruentes as cordas  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$ . Como  $OP = OP' = OQ = OQ' = r$ , tem-se que os triângulos  $\triangle OQQ'$  e  $\triangle OPP'$  são congruentes (caso Lado-Lado-Lado), portanto  $OM = ON$ .

Reciprocamente, se  $OM = ON$ , como os triângulos  $\triangle OQQ'$  e  $\triangle OPP'$  são isósceles de mesma altura, tendo seus lados  $OP = OP' = OQ = OQ' = r$ , as bases  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$  são congruentes.  $\square$

## 2.2 Arcos de circunferência

**Definição 2.7:** Dados uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$ , e os pontos  $A$  e  $B$ , distintos, da circunferência, chama-se *ângulo central* o ângulo  $A\hat{O}B$ .



**Figura 2.7:** Ângulo central  $A\hat{O}B$ .

Um ângulo central define dois arcos, tais que o conjunto dos pontos da circunferência situados internamente ao ângulo central, é o *arco menor*; e o conjunto dos pontos situados externamente ao ângulo central, é o *arco maior*.

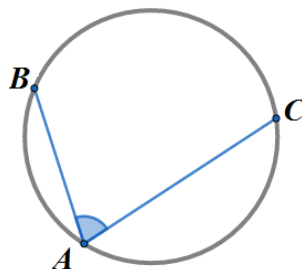
Se o ângulo central medir  $180^\circ$  graus, dizemos que o arco  $\widehat{AB}$  em qualquer hemisfério é *semicircunferência* e o segmento  $\overline{AB}$  é diâmetro.

De todo modo, uma semicircunferência, um arco menor ou um arco maior determinam simplesmente um *arco da circunferência* e os pontos  $A$  e  $B$  são *extremidades* do arco. Sendo  $X$  um ponto interior a um arco de circunferência, denotamos por  $\widehat{AXB}$  tal arco.

**Definição 2.8:** Um ângulo cujo vértice é a extremidade comum de duas cordas distintas é um *ângulo inscrito na circunferência*. Se em um destes ângulos os extremos não comuns são diâmetro, então este ângulo é *ângulo inscrito na semicircunferência*.

Seja  $B\hat{A}C$  um ângulo inscrito em uma circunferência que contém os pontos  $B$  e  $C$ .

Esses pontos definem dois arcos. O arco que não contém o ponto  $A$  é chamado de *arco correspondente* ao ângulo inscrito dado. O ângulo correspondente está *inscrito* nesse arco.



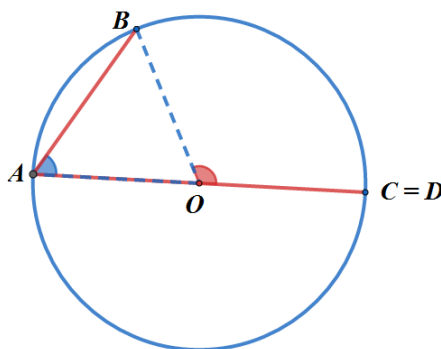
**Figura 2.8:** O arco  $\widehat{BC}$  que não contém  $A$ , é correspondente do ângulo  $B\hat{A}C$  e este ângulo está inscrito no arco  $\widehat{BC}$ .

**Definição 2.9:** A medida de um arco, denotado por  $m(\widehat{AXB})$ , é a medida do ângulo central correspondente  $m(A\hat{X}B)$  se for arco menor;  $180^\circ$ , se o arco  $\widehat{AXB}$  for semicircunferência; ou  $m(\widehat{AXB}) = 360^\circ - m(A\hat{X}B)$  se for arco maior.

**Teorema 2.8:** A medida do ângulo inscrito na circunferência é a metade da medida do seu arco correspondente.

*Demonstração.* Considere um ângulo  $B\hat{A}C$ , inscrito em uma circunferência  $\Gamma$ , em que  $B$  e  $C$  são extremidades de um arco  $\widehat{BC}$  e  $O$  é centro da circunferência. Deseja-se mostrar que  $m(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}m(B\hat{O}C)$ .

Suponha, primeiramente, que  $C = D$  e que  $\overline{AC}$  é diâmetro.



**Figura 2.9:** caso 1: uma das cordas é diâmetro.

Note que  $B\hat{O}C$  é ângulo externo do triângulo  $\triangle BAO$ , logo,

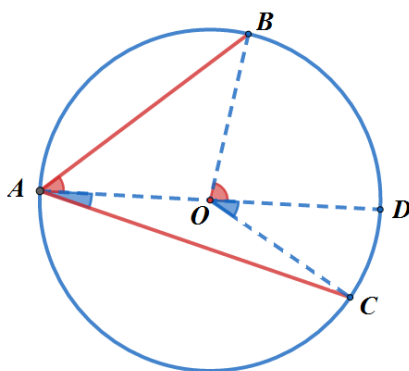
$$m(B\hat{O}C) = m(B\hat{A}O) + m(A\hat{B}O)^1.$$

<sup>1</sup>Considera-se que o leitor conheça O Teorema do Ângulo Externo em triângulos (referência [4])

Note também que este triângulo é isósceles, pois  $\overline{AO} \equiv \overline{OB}$ . Assim,

$$m(\widehat{BAO}) = m(\widehat{ABO}) \text{ e } m(\widehat{BOC}) = 2 \cdot m(\widehat{BAO}).$$

Suponha agora que nem  $\overline{AB}$  nem  $\overline{AC}$  são diâmetro, além disso, estão em hemisférios opostos.



**Figura 2.10:** Caso 2: as cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  não passam pelo centro e estão em lados opostos em relação ao diâmetro  $\overline{AD}$ .

Olhando para o diâmetro  $\overline{AD}$ , pelo caso anterior,

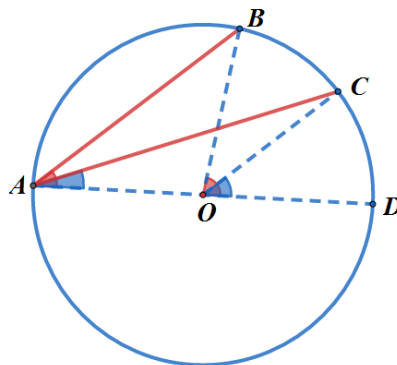
$$m(\widehat{BAO}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BOD}).$$

Do mesmo modo,

$$m(\widehat{CAO}) = \frac{1}{2} m(\widehat{COD}).$$

Somando estas duas igualdades, tem-se o resultado esperado.

Finalmente, suponha que nem  $\overline{AB}$  nem  $\overline{AC}$  são diâmetro, além disso, estão em um mesmo hemisfério.



**Figura 2.11:** Caso 3: as cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  não passam pelo centro e estão em mesmo lado em relação ao diâmetro  $\overline{AD}$ .

Na representação acima, os pontos aparecem na ordem: A, B, C e D. No entanto, poderiam aparecer A, C, B e D, mas a demonstração seria análoga.

Olhando para o diâmetro  $\overline{AD}$ , pelo caso anterior,

$$m(\widehat{BAO}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BOD}).$$

Do mesmo modo,

$$m(\widehat{CAO}) = \frac{1}{2}m(\widehat{COD}).$$

Porém,

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAO}) - m(\widehat{CAO})$$

e

$$m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{BOD}) - m(\widehat{COD}).$$

Fazendo as substituições adequadamente,

$$m(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BOD}) - \frac{1}{2}m(\widehat{COD}).$$

Daí,

$$m(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \left[ m(\widehat{BOD}) - m(\widehat{COD}) \right].$$

Portanto

$$m(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \left[ m(\widehat{BOC}) \right].$$

□

**Corolário 2.9:** Ângulos inscritos em uma semicircunferência são retos.

De fato, o arco correspondente, neste caso, é o da semicircunferência, que mede  $180^\circ$  e pelo Teorema 2.8, o ângulo inscrito mede  $90^\circ$ .

**Corolário 2.10:** Ângulos inscritos em um mesmo arco são congruentes.

A validade deste Corolário é facilmente percebida ao tomarmos um arco  $\widehat{AB}$  e dois pontos  $C$  e  $C'$  tais que os ângulos  $\widehat{ACB}$  e  $\widehat{AC'B}$  estejam inscritos nele. Pelo Teorema 2.8 temos que:

$$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AC'B}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AB}).$$

**Definição 2.10:** Em uma mesma circunferência ou em circunferências congruentes, dois arcos são congruentes se tem a mesma medida.

**Teorema 2.11:** Em uma mesma circunferência ou em circunferências congruentes, duas cordas são congruentes se, e somente se, são congruentes os arcos menores correspondentes.

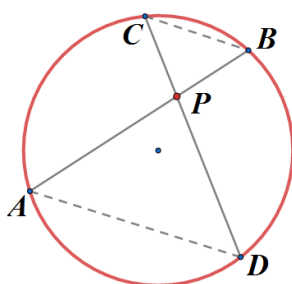
*Demonstração.* Considere em uma circunferência  $\Gamma$ , centro em  $O$  e os menores arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$  definidos, respectivamente, pelas cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ .

Suponha inicialmente que as cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  sejam congruentes. Temos que  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são as bases dos triângulos  $\triangle AOB$  e  $\triangle COD$ , ambos congruentes pelo caso

Lado-Lado-Lado. (se achar necessário, reveja o Teorema 2.7). Assim temos que os ângulos centrais destes arcos são congruentes, conseqüentemente, os arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$  possuem mesma medida.

Por outro lado, se os arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$  são congruentes, possuem ângulos centrais congruentes, tais que os raios  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  e  $DO$  definem os triângulos isósceles cujas bases são as cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , de sorte que tais triângulos são congruentes. Portanto,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  possuem a mesma medida.  $\square$

**Teorema 2.12:** (Teorema das cordas) Se, em uma circunferência  $\Gamma$ , duas cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  se encontram no ponto  $P$ , tem-se:  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .



**Figura 2.12:** O teorema das cordas.

*Demonstração.* Sejam as cordas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  que se intersectam no ponto  $P$ , conforme Figura 2.12. Traçando os segmentos  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$  tem-se que os ângulos  $\widehat{CPB}$  e  $\widehat{APD}$  são congruentes, pois são opostos pelo vértice. Além disso os ângulos  $\widehat{BAD}$  e  $\widehat{BCD}$  estão inscritos em um mesmo arco, logo, são congruentes. Do mesmo modo,  $\widehat{CBA}$  e  $\widehat{CDA}$  são congruentes, caso Ângulo-Ângulo-Ângulo. Portanto  $\triangle CPB \cong \triangle APD$  e por esta semelhança (),  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .  $\square$

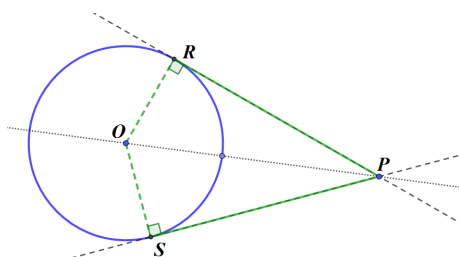
**Definição 2.11:** Dada uma reta  $\overrightarrow{PR}$ , tangente a uma circunferência  $C$  no ponto  $R$ , o segmento  $\overline{PR}$  é chamado *segmento tangente* desde  $P$  até a circunferência e a semirreta  $\overrightarrow{RP}$  é chamada *semirreta tangente* à circunferência em  $R$ .

**Teorema 2.13:** Em uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$ , se dado um ponto  $P$  exterior a  $\Gamma$ , temos duas, e somente duas, retas contendo  $P$  e tangentes à circunferência  $\Gamma$ .

*Demonstração.* Seja  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e  $P$  um ponto exterior de  $\Gamma$ . A reta  $\overline{OP}$  divide  $\Gamma$  em duas semicircunferências. Tomemos o ponto  $R$  em uma das semicircunferências tal que o ângulo  $\widehat{ORP}$  seja reto. Isto é possível pela definição de circunferência, logo tal ponto existe. Deste modo a reta  $\overrightarrow{RP}$  é tangente à circunferência em  $R$ .

Tomando um ponto  $S$  na outra semicircunferência, de modo análogo, temos que a reta  $\overrightarrow{SP}$  é tangente à circunferência em  $S$ .

Deste modo, todos os pontos da circunferência, exceto os pontos  $R$  e  $S$  estão no interior de um setor angular entre as retas  $\overrightarrow{RP}$  e  $\overrightarrow{SP}$ . Isto descarta a possibilidade de coexistir outra reta tangente, pois quaisquer outras retas em  $P$  definirão uma corda na circunferência  $\Gamma$  ou não possuirão ponto em comum com ela. Portanto, existem dois, e apenas dois, segmentos tangentes desde  $P$  até a circunferência.  $\square$

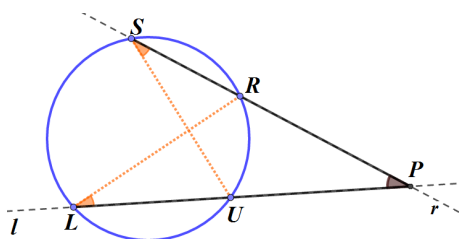


**Figura 2.13:**  $\overline{RP}$  e  $\overline{RS}$  são segmentos tangentes à circunferência.

**Teorema 2.14:** Os dois segmentos tangentes à uma circunferência desde um mesmo ponto exterior dado são congruentes e formam ângulos congruentes com a reta que une o ponto exterior e o centro da circunferência.

*Demonstração.* Considere a Figura 2.13. Pelo Corolário 2.3, os triângulos  $\triangle ORP$  e  $\triangle OSP$  são retângulos em  $R$  e em  $S$ , além disso,  $OR = OS$  e a hipotenusa  $\overline{OP}$  é lado comum, logo eles são congruentes pelo caso Lado-Lado-Ângulo. Portanto,  $\widehat{OPS} \equiv \widehat{OPR}$  e  $\overline{RP} \equiv \overline{SP}$ .  $\square$

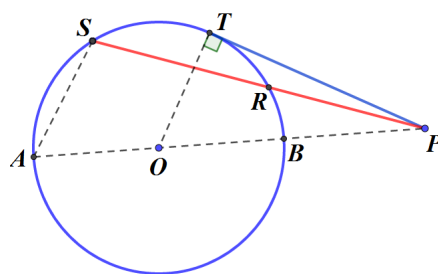
**Teorema 2.15:** Dadas uma circunferência  $\Gamma$  e um ponto exterior  $P$ . Sejam  $r$  e  $l$  retas secantes passando por  $P$  e que interseccionam  $\Gamma$  nos pontos  $R$  e  $S$  e nos pontos  $U$  e  $L$  respectivamente. Seja  $t$  uma reta que passa por  $P$  e é tangente a  $\Gamma$  no ponto  $T$ . Então valem as igualdades  $PR \cdot PS = PU \cdot PL = (PT)^2$ .



**Figura 2.14:** As retas  $r$  e  $l$  são secantes à circunferência, passando respectivamente nos pontos  $S$  e  $R$ , e nos pontos  $L$  e  $U$ .

Olhando para os triângulos  $\triangle SPU$  e  $\triangle LPR$ ,  $\widehat{RPU}$  (Figura 2.14) é ângulo comum. Como  $\widehat{RSU}$  e  $\widehat{RLU}$  estão inscritos no arco  $\widehat{RU}$ , tem-se que  $\widehat{RSU} \equiv \widehat{RLU}$ , logo esses triângulos são semelhantes (caso Ângulo-Ângulo-Ângulo). Daí, a primeira igualdade:

$$SP \cdot RP = LP \cdot UP. \quad (2.1)$$



**Figura 2.15:** Potência do ponto.

Vamos verificar a validade da igualdade:  $PR \cdot PS = PU \cdot PL = (PT)^2$  (Figura 2.15).

Dados os pontos  $A$  e  $B$  na circunferência e o ponto  $P$ , colineares, e  $P$  é exterior à circunferência. Seja  $O$  o centro da circunferência e  $\overline{AB}$  o diâmetro cujo prolongamento contém  $P$ . Seja  $\overline{TP}$  o segmento tangente à circunferência em  $T$ .

Pela Proposição 2.1, o triângulo  $\triangle OTP$  é retângulo em  $T$ , daí, aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se que

$$TP^2 = OP^2 - OT^2.$$

Note que  $OB = OT$ , logo,

$$TP^2 = OP^2 - OB^2,$$

além disso,  $OP = OB + BP$ , daí,

$$\begin{aligned} TP^2 &= (OB + BP)^2 - OB^2 \\ &= OB^2 + 2 \cdot OB \cdot BP + BP^2 - OB^2, \end{aligned}$$

obtendo-se a relação:

$$TP^2 = 2 \cdot OB \cdot BP + BP^2. \quad (2.2)$$

Mas  $AP = AO + OB + BP$  e  $AO = OB$ . Logo,  $AP = 2 \cdot OB + BP$ , e aplicando a equação (2.1), temos:

$$AP \cdot BP = SP \cdot RP.$$

Substituindo  $AP$ , vem:

$$(2 \cdot OB + BP) \cdot BP = SP \cdot RP,$$

e, aplicando a relação (2.2) tem-se:

$$2 \cdot OB \cdot BP + BP^2 = TP^2 = SP \cdot RP.$$

O Teorema 2.15 é um caso degenerado do Teorema das Cordas (Teorema 2.12), e nos garante que as igualdades acima existem desde que sejam dadas a circunferência e o ponto exterior  $P$ . O produto  $PR \cdot PS = PT^2$  é constante e é chamado potência do ponto  $P$  em relação à circunferência. Considerando o Teorema de Pitágoras é possível escrever essa potência em função do raio da circunferência e da distância entre o ponto exterior e o seu centro.

**Definição 2.12:** Um polígono é *inscritível* se tem os seus vértices pertencentes a uma circunferência. Neste caso, dizemos que o polígono está inscrito nessa circunferência, ou que tal circunferência é a circunferência circunscrita ao polígono.

**Definição 2.13:** Um polígono é *circunscritível* se seus lados são tangentes a uma mesma circunferência. Neste caso dizemos que o polígono está circunscrito à circunferência e tal circunferência é a circunferência inscrita no polígono.

## 2.3 Pontos Notáveis de um Triângulo

**Definição 2.14:** O baricentro, o circuncentro, o ortocentro e o incentro são chamados pontos notáveis de um triângulo.

A seguir, são apresentados os quatro pontos notáveis citados na definição acima.

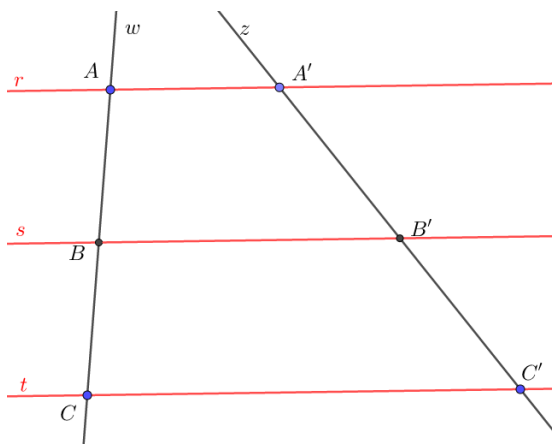
### 2.3.1 Baricentro

**Definição 2.15:** Dado um triângulo de lados  $a = BC$ ,  $b = AC$  e  $c = AB$  e seus respectivos pontos médios:  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$ , chamam-se *medianas* os segmentos definidos pelos pontos médios de um lado do triângulo e seu vértice oposto, denotadas por  $m_a = \overline{AM_a}$ ,  $m_b = \overline{BM_b}$  e  $m_c = \overline{CM_c}$ .

O Teorema 2.16 é necessário para as demonstrações dos Teoremas 2.17 e 2.18.

**Teorema 2.16:** Se três ou mais retas paralelas determinam segmentos congruentes em uma transversal então determinam segmentos congruentes em qualquer outra transversal.

*Demonstração.* Sejam as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  paralelas entre si e sejam  $w$  e  $z$  duas transversais. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os pontos de interseção da reta  $w$ , respectivamente, com as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , tais que  $AB = BC$ . Definamos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  como os pontos de interseção da reta  $z$ , respectivamente, com as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ , conforme a Figura 2.16:

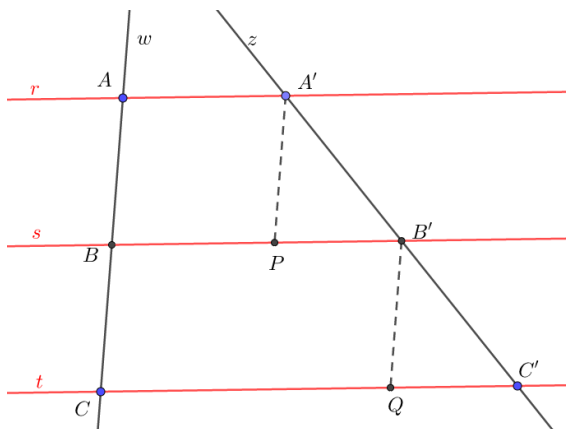


**Figura 2.16:** Teorema 2.16, temos  $AB = BC$ .



Queremos mostrar que, se  $AB = BC$ , então  $A'B' = B'C'$ .

A partir do ponto  $A'$ , tracemos um segmento paralelo ao segmento  $\overline{AB}$ , que toca em  $\overline{BB'}$  no ponto  $P$ . A partir do ponto  $B'$  tracemos um segmento paralelo ao segmento  $\overline{BC}$  que toca o segmento  $\overline{CC'}$  no ponto  $Q$ .



**Figura 2.17:** Teorema 2.16.

Deste modo temos que  $AB = A'P$  e  $BC = B'Q$ , pois  $AA'PB$  e  $BB'QC$  são paralelogramos. Logo temos  $A'P = B'Q$ , portanto a razão entre eles é igual a 1.

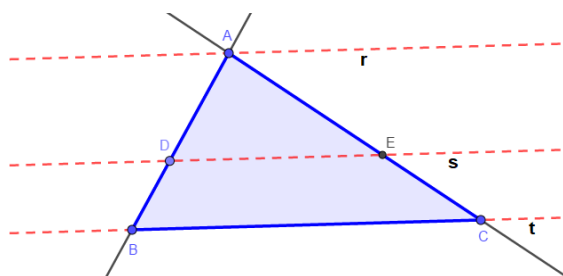
Observando os triângulos  $\triangle A'PB'$  e  $\triangle B'QC'$ , temos que seus ângulos correspondentes são congruentes, logo são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo-ângulo. Uma vez que a razão de proporcionalidade entre eles é igual a 1, esses triângulos são congruentes.

Portanto temos  $A'B' = B'C'$ . □

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade (2.17) enunciado a seguir, em seu conceito geral, trata de retas paralelas com transversais, no entanto neste contexto, considera-se sua aplicação em um triângulo.

**Teorema 2.17:** (*Teorema Fundamental da Proporcionalidade*) Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados em pontos distintos, então ela os divide na mesma razão.

Medir um segmento significa comparar o comprimento deste com o comprimento de um outro, tomado como unidade. O resultado desta comparação é um número real. Neste sentido, consideremos inicialmente caso em que  $\frac{AB}{AD}$  é um número racional, e finalmente,  $\frac{AB}{AD}$  é um número irracional. Para ambos casos, considere a Figura 2.18 abaixo:



**Figura 2.18:** Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

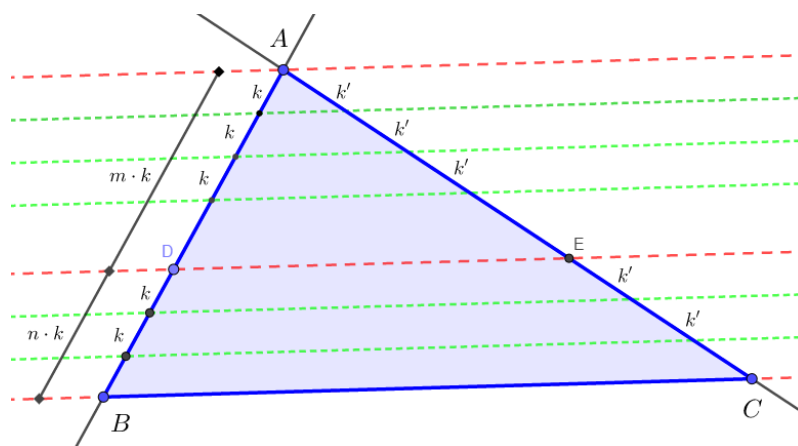
Nesta figura, sejam as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  paralelas entre si e  $t$  é a reta suporte do lado  $\overline{BC}$  do triângulo. Queremos mostrar que

$$\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC}.$$

*Demonstração.* **1º caso:**  $\frac{AB}{AD}$  é um número racional.

Neste caso temos que estes segmentos tem medidas racionais, logo existe um segmento de comprimento  $k$  que cabe exatamente um número inteiro de vezes, respectivamente  $m$  e  $n$ , nos segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{DB}$ . Assim temos que  $AD = mk$  e  $DB = nk$ .

Agora, tracemos retas paralelas à reta  $t$  que passam pelos extremos dos segmentos de comprimento  $k$ , até que encontrem o lado  $\overline{AC}$  e, aplicando o Teorema 2.16, seja  $k'$  o comprimento dos segmentos definidos por estas paralelas sobre o lado  $\overline{AC}$ .



**Figura 2.19:** Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Portanto, temos que  $AE = mk'$  e  $EC = nk'$ . Podemos concluir que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC}.$$

**2º caso:**  $\frac{AB}{AD}$  é um número irracional.

Podemos imaginar, sem prejuízo na generalização, que o segmento  $\overline{DB}$  tenha sido

dividido em  $n$  partes congruentes, tais que o comprimento seja um número  $k$ . Assim temos:

$$DB = n \cdot k \quad (2.3)$$

Traçando retas paralelas ao lado  $\overline{BC}$  a partir dos extremos destes segmentos, e aplicando o Teorema 2.16, temos que  $\overline{EC}$  se divide em  $n$  segmentos congruentes, e seja  $k'$  o comprimento deles. Assim temos:

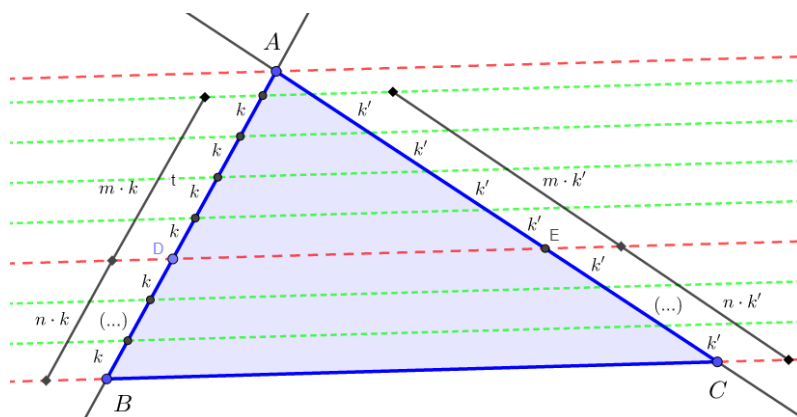
$$EC = n \cdot k' \quad (2.4)$$

Agora, traçando segmentos de comprimento  $k$ , a partir do ponto  $D$  e em direção ao ponto  $A$ , temos que tais segmentos cabem um número inteiro  $m$  de vezes no segmento  $\overline{AD}$  e tal que:

$$m \cdot k < AD < (m + 1) \cdot k, \quad (2.5)$$

e após traçarmos retas paralelas ao lado  $\overline{BC}$  passando por seus extremos, temos, pelo Teorema 2.16,  $m$  segmentos em  $\overline{AE}$ , tais que:

$$m \cdot k' < AE < (m + 1) \cdot k'. \quad (2.6)$$



**Figura 2.20:** Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

A partir das equações (2.3) e (2.5), temos que a razão  $\frac{AD}{DB}$  é um número tal que

$$\frac{m}{n} < \frac{AD}{DB} < \frac{(m+1)}{n}.$$

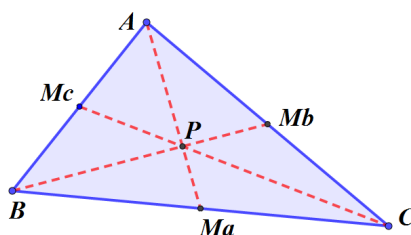
Analogamente, a partir das equações (2.4) e (2.6), temos que a razão  $\frac{AE}{EC}$  é um número tal que

$$\frac{m}{n} < \frac{AE}{EC} < \frac{(m+1)}{n}.$$

Finalmente, temos que  $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$  e podemos tomar um valor  $n$  suficiente-

mente grande para que  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , ou seja,  $\frac{1}{n}$  será tão pequeno quanto se deseje, o que permite concluir que  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ . Portanto, temos  $\frac{AD}{AE} = \frac{DB}{EC}$ .  $\square$

**Teorema 2.18:** As medianas de um triângulo são concorrentes em um ponto que dista de cada vértice dois terços da distância deste vértice ao ponto médio do lado oposto.



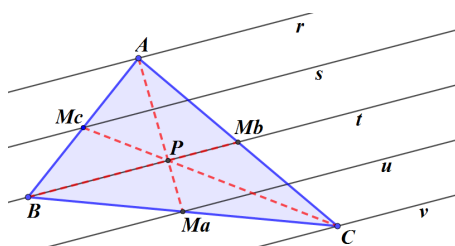
**Figura 2.21:** As medianas  $\overline{AM_a}$ ,  $\overline{BM_b}$  e  $\overline{CM_c}$  concorrem em um ponto  $P$ .

*Demonstração.* Consideremos o triângulo  $\triangle ABC$  e os respectivos pontos médios:  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$ . Consideremos também as retas  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  e  $v$ , todas paralelas entre si.

Inicialmente, seja  $t$  a reta suporte da mediana  $\overline{BM_b}$ . Além disso,  $r$ ,  $s$ ,  $u$  e  $v$  passam respectivamente pelos pontos:  $A$ ,  $M_c$ ,  $M_a$  e  $C$ .

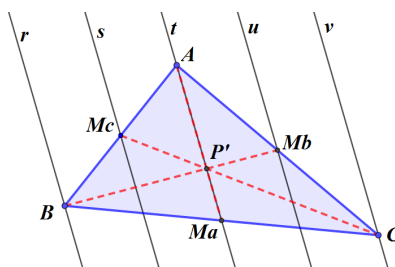
Temos que  $\overline{AM_b} \equiv \overline{M_bC}$  pois  $M_b$  é ponto médio do lado  $\overline{AC}$ , e seja  $P$  o ponto de interseção entre as medianas  $\overline{AM_a}$  e  $\overline{CM_c}$ . Tal ponto existe, pois elas não podem ser paralelas.

Observando os triângulos  $\triangle ABM_b$  e  $\triangle ABP$ , temos pelo Teorema 2.16 que a reta  $s$  divide os segmentos  $\overline{AM_b}$  e  $\overline{AP}$  em duas partes congruentes cada um, pois  $M_c$  é ponto médio do lado  $\overline{AB}$ . Analogamente, temos que a reta  $u$  divide os segmentos  $\overline{M_bC}$  e  $\overline{CP}$  em duas partes congruentes cada um, pois  $M_a$  é ponto médio de  $\overline{BC}$ . Deste modo, temos que as quatro partes obtidas entre as retas paralelas sobre o lado  $\overline{AC}$  são congruentes, conseqüentemente, as três partes obtidas na divisão da mediana  $\overline{AM_a}$  e da mediana  $\overline{CM_c}$  também são. Em outras palavras, sendo  $P$  o ponto de interseção entre essas medianas, temos que  $P$  divide cada uma das medianas  $\overline{AM_a}$  e  $\overline{CM_c}$  na proporção  $\frac{2}{3}$ , ou seja,  $AP = \frac{2}{3}AM_a$  e  $CP = \frac{2}{3}CM_c$ .



**Figura 2.22:** As retas  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  e  $v$  dividem medianas  $\overline{AM_a}$  e  $\overline{CM_c}$  na proporção de  $\frac{2}{3}$ .

Analogamente, tomando a reta  $t$  contendo a mediana  $\overline{AM_a}$ , se  $P'$  é o ponto de interseção entre as medianas  $\overline{BM_b}$  e  $\overline{CM_c}$ , obtemos que  $BP' = \frac{2}{3}BM_b$  e  $CP' = \frac{2}{3}CM_c$ .



**Figura 2.23:** As medianas  $\overline{BM_b}$  e  $\overline{CM_c}$  concorrem em um ponto  $P'$ .

Uma vez que  $CP = \frac{2}{3}CM_c$  e  $CP' = \frac{2}{3}CM_c$ , temos que  $P = P'$ .

Portanto, as medianas concorrem em um único ponto e tal ponto as divide na razão 2 : 3.  $\square$

**Definição 2.16:** O ponto em que as medianas são concorrentes chama-se *baricentro* do triângulo.

O Teorema (2.19) enunciado a seguir será necessário na demonstração do Corolário 3.44 e é consequência do Teorema de Stewart, apresentado em [1] (pág. 152), particularmente quando o segmento em questão é uma mediana.

**Teorema 2.19 (Teorema das Medianas):** O dobro do quadrado da mediana  $m$  de um triângulo  $\triangle ABC$  é igual à soma dos quadrados dos dois lados envolvidos menos a metade do quadrado do lado referente à mesma mediana, ou seja:

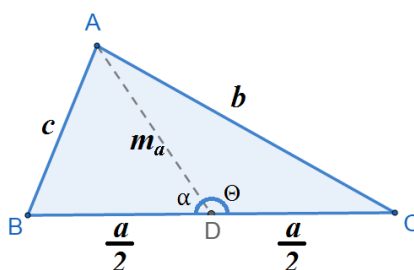
$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são a medida dos lados do triângulo e  $m_a$  é a mediana considerada [1].

A demonstração a seguir utiliza a *Lei dos Cossenos* (consulte [3], pág. 229) e o fato de que

$$\cos\alpha + \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \alpha + \theta = 180^\circ.$$

*Demonstração.* Seja um triângulo  $\triangle ABC$ , de lados cujas medidas são  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , com mediana  $m_a = \overline{AD}$ , conforme Figura 2.24:



**Figura 2.24:** Teorema das medianas .

Se  $\alpha = \widehat{ADB}$  e  $\theta = \widehat{ADC}$  temos que  $\alpha + \theta = 180^\circ$ .

Aplicando a *Lei dos cossenos* nos triângulos  $\triangle ADB$  e  $\triangle ADC$ , tem-se:

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - m_a \cdot a \cdot \cos\alpha$$

e

$$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - m_a \cdot a \cdot \cos\theta.$$

Somando as equações membro a membro, temos:

$$a^2 + b^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} - m_a \cdot a(\cos\alpha + \cos\theta).$$

Assim  $a^2 + b^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$ .

Finalmente,  $2m_a^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}$ . □

### 2.3.2 Circuncentro

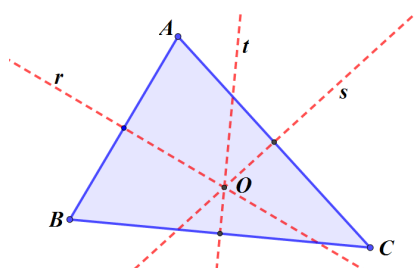
**Definição 2.17:** A *mediatriz* de um segmento  $\overline{AB}$  é a reta perpendicular a este segmento, passando pelo ponto médio do mesmo.

Todo segmento tem exatamente um ponto médio, e pelo ponto médio passa exatamente uma reta perpendicular. Assim, a mediatriz é única (princípio da unicidade).

Os lados de um triângulo são também segmentos e, com isso, podemos associar a cada um deles suas mediatrizes.

**Teorema 2.20:** As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes em um ponto equidistante dos três vértices do triângulo.

*Demonstração.* Seja um triângulo  $\triangle ABC$  e sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  as mediatrizes, respectivamente, dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ . Tomando tais retas duas a duas, a posição relativa entre elas é de concorrência.



**Figura 2.25:** As mediatrizes  $r$  e  $s$  concorrem em um ponto  $O$ .

De fato, se as retas  $r$  e  $s$ , por exemplo, fossem paralelas, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  do triângulo seriam colineares e o triângulo  $\triangle ABC$  não estaria definido. Se as retas  $r$

e  $s$  fossem coincidentes, por um mesmo ponto médio estariam duas mediatrizes, contrariando o princípio da unicidade das mediatrizes. Portanto elas concorrem em um ponto  $O$ . Escolhendo outras duas dessas retas, o resultado é análogo.

Pelo Teorema 2.4, como  $O$  está na mediatriz de  $\overline{AC}$ , tem-se  $OA = OC$ , e como  $O$  está na mediatriz de  $\overline{AB}$ , tem-se  $OB = OA$ . Portanto,  $OA = OB = OC$ .

Assim, é possível traçar uma circunferência de centro em  $O$ , de raio  $r = OA = OB = OC$ , que passa pelos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ .  $\square$

**Corolário 2.21:** Existe uma única circunferência que passa por três pontos não colineares (a). Todo triângulo é inscritível (b).

**Definição 2.18:** O ponto de encontro das mediatrizes, que é o centro da circunferência circunscrita a um triângulo, é chamado *circuncentro* desse triângulo.

### 2.3.3 Ortocentro

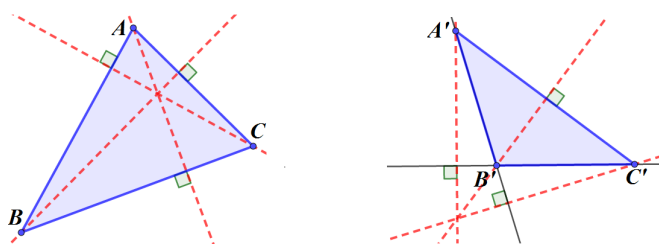
Todo triângulo possui exatamente três alturas relativas. No contexto desta seção, a palavra *altura* será definida com a seguinte denotação:

**Definição 2.19:** Dado um triângulo  $\triangle ABC$  e seja  $H_a$  o pé da perpendicular baixada a partir do vértice  $A$  sobre o lado  $\overline{BC}$ , oposto a ele, ou sobre a reta  $\overleftrightarrow{BC}$ . O segmento  $\overline{AH_a}$  é chamado de *altura* relativa ao lado  $\overline{BC}$  ou ao vértice  $A$ .

Por outro lado, a palavra *altura* pode indicar:

- (1) um número, que é o comprimento do segmento perpendicular;
- (2) a reta que contém o segmento perpendicular.

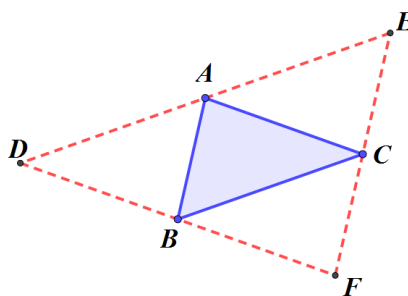
No conceito (2), as alturas concorrem em um único ponto.



**Figura 2.26:** As alturas concorrem em um ponto. À esquerda, em um ponto interior do triângulo, à direita, em um ponto exterior.

**Teorema 2.22:** As três alturas de um triângulo são concorrentes.

*Demonstração.* Seja um triângulo  $\triangle ABC$  e  $\overline{AH_a}$  a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ . Sejam os pontos  $D, E$  e  $F$ , tais que  $\overline{DE}$  e  $\overline{BC}$ ,  $\overline{DF}$  e  $\overline{AC}$ , e  $\overline{EF}$  e  $\overline{AB}$  são pares de segmentos paralelos, conforme ilustração:



**Figura 2.27:**  $\overline{DE}$  e  $\overline{BC}$ ,  $\overline{DF}$  e  $\overline{AC}$ , e  $\overline{EF}$  e  $\overline{AB}$  são paralelos.

Note que ocorrem os paralelogramos  $ADBC$ ,  $ABCE$  e  $ABFC$ . Logo podemos escrever as igualdades:  $AC = DB = BF$ ,  $DA = AE = BC$  e  $AB = EC = CF$ . Neste sentido,  $A$  é ponto médio de  $\overline{DE}$ , assim como  $C$  é de  $\overline{EF}$  e  $B$  é de  $\overline{DF}$ .

Tomando a altura relativa ao vértice  $A$ , uma vez que  $A$  é ponto médio, tem-se que esta altura é mediatriz do lado  $\overline{DE}$ . Analogamente a altura relativa ao vértice  $B$  e a altura relativa ao vértice  $C$  são, respectivamente, mediatrizes dos lados  $\overline{DF}$  e  $\overline{EF}$ . Deste modo, as alturas do triângulo  $\triangle ABC$  correspondem respectivamente às mediatrizes do triângulo  $\triangle DEF$ . Pelo Teorema 2.20, elas concorrem em um único ponto.  $\square$

**Definição 2.20:** O ponto de encontro das três alturas é chamado de *ortocentro* do triângulo.

### 2.3.4 Incentro

Nesta seção, o conceito de bissetriz fica restrito a um segmento associado a um vértice do triângulo. Na seção 3.2 apresentam-se outras propriedades sobre as bissetrizes, estendendo esses conceitos ao ângulo entre duas retas.

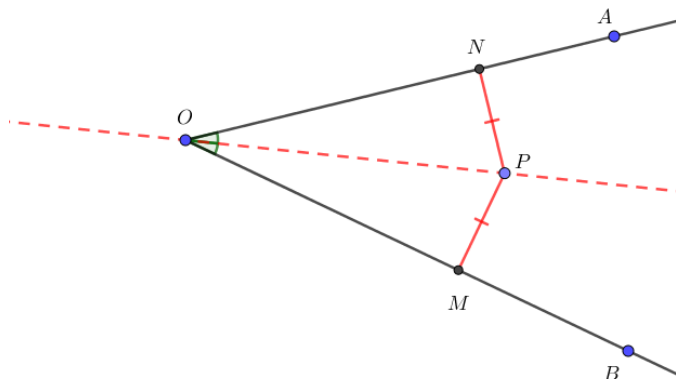
**Definição 2.21:** Uma semirreta  $\overrightarrow{OC}$  é uma bissetriz de um ângulo  $A\hat{O}B$  se  $C$  está no interior de  $A\hat{O}B$  e  $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$ .

**Lema 2.23:** A bissetriz de um ângulo, exceto sua origem, é o conjunto dos pontos do interior do ângulo equidistantes dos lados do ângulo.

*Demonstração.* Seja o ângulo  $A\hat{O}B$  e  $P$  um ponto em sua bissetriz. Temos que  $m(A\hat{O}P) = m(B\hat{O}P)$ . Sejam  $N$  e  $M$ , respectivamente, os pés das perpendiculares



do ponto  $P$  sobre as semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ . Temos que  $m(\widehat{OPN}) = m(\widehat{OPM}) = 90^\circ$ . Com isso, os triângulos  $\triangle OPN$  e  $\triangle OPM$  são congruentes, pelo caso lado, ângulo e ângulo oposto, pois  $\overline{OP}$  é lado comum. Assim, temos que  $PN = PM$ .



**Figura 2.28:** O ponto  $P$  está na bissetriz do ângulo  $A\widehat{O}B$ .

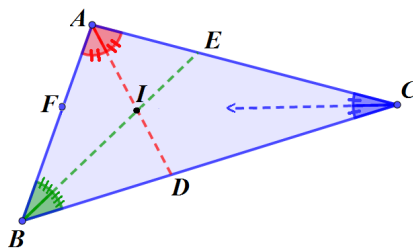
Por outro lado, seja  $P$  um ponto no interior do ângulo  $A\widehat{O}B$ , e  $N$  e  $M$ , respectivamente, os pés das perpendiculares do ponto  $P$  nas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  tais que  $PN = PM$ . Temos que  $\overline{OP}$  é hipotenusa comum nos triângulos  $\triangle OPN$  e  $\triangle OPM$ . Pelo caso CH (cateto, hipotenusa), esses triângulos são congruentes, logo  $m(\widehat{NOP}) = m(\widehat{MOP})$ . Portanto,  $\overline{OP}$  está na bissetriz do ângulo  $A\widehat{O}B$ .  $\square$

**Definição 2.22:** Uma bissetriz de um triângulo é um segmento da bissetriz de cada ângulo do triângulo, compreendido entre o vértice correspondente e o lado oposto.

Todo triângulo, no conceito que associa uma bissetriz a um vértice (Definição 2.22), possui três bissetrizes.

**Teorema 2.24:** As bissetrizes dos ângulos de um triângulo são concorrentes em um ponto equidistante dos três lados do triângulo.

*Demonstração.* Considere um triângulo  $\triangle ABC$  e suas bissetrizes. Tomando-as duas a duas, não faz sentido ocorrer paralelismo ou coincidência, logo elas são concorrentes. Vamos considerar as bissetrizes do vértice  $A = \overline{AD}$ , do vértice  $B = \overline{BE}$  e do vértice  $C = \overline{CF}$ , e seja  $I$  o ponto onde as primeiras concorrem.



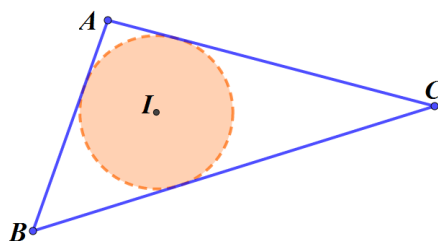
**Figura 2.29:** As bissetrizes concorrem em um único ponto.

Como  $I$  está na bissetriz  $\overline{AD}$  (Figura 2.29),  $I$  equidista de  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , mas  $I$  também está na bissetriz  $\overline{BE}$ , logo também equidista de  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ . Assim, as distâncias  $IE$ ,  $ID$  e  $IF$  do ponto  $I$  até os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , são iguais; portanto  $I$  está na interseção das três bissetrizes e é equidistante dos três lados do triângulo.  $\square$

Em consequência, vem o seguinte corolário:

**Corolário 2.25:**

- (a) Existe uma única circunferência que tangencia os três lados de um triângulo.
- (b) Todo triângulo é circunscritível.



**Figura 2.30:** Circunferência inscrita de centro  $I$ .

**Definição 2.23:** O ponto de encontro das bissetrizes, que é também o centro da circunferência inscrita a um triângulo, é chamado *incentro* do triângulo.

## 2.4 A Reta de Euler

Nesta seção estudaremos a Reta de Euler que, apesar de não estabelecer uma relação direta com circunferências associadas a um triângulo, precede o estudo da Circunferência de Nove Pontos, apresentada na seção 2.5.

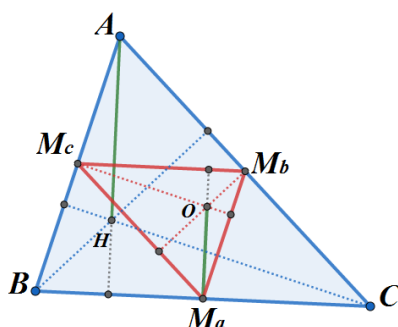
**Definição 2.24:** Em um triângulo  $\triangle ABC$ , chama-se *triângulo medial* o triângulo formado pelos pontos médios dos lados.

**Teorema 2.26:** O ortocentro  $H$ , o baricentro  $G$  e o circuncentro  $O$  de um triângulo são colineares (a). Além disso, o baricentro divide o segmento cujas extremidades são o circuncentro e o ortocentro (b), na razão 2:1 (c).

O Teorema (2.26) traz três afirmações: a colinearidade, a posição de  $G$  entre os pontos  $O$  e  $H$ , não necessariamente nesta ordem; e a razão entre as distâncias entre eles. A Reta de Euler é justamente a reta que contém estes pontos.

*Demonstração.* Considere um triângulo  $\triangle ABC$ , a altura relativa ao vértice  $A$ , o ortocentro  $H$  e o circuncentro  $O$ . Considere também  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  os pontos médios,

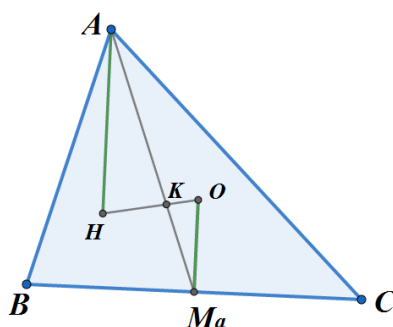
respectivamente, dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  e o triângulo definido por eles (triângulo medial).



**Figura 2.31:** O ortocentro do triângulo medial coincide com o circuncentro do triângulo  $ABC$ .

Observemos que as alturas do triângulo medial coincidem com as mediatrizes do triângulo  $\triangle ABC$ , logo o ortocentro do triângulo medial coincide com o circuncentro do triângulo  $\triangle ABC$ . Além disso, como os lados do triângulo medial são base média do triângulo  $\triangle ABC$ , tais triângulos são semelhantes pelo caso lado-lado-lado e a razão entre eles é de  $2 : 1$ . Logo a razão entre  $AH$  e  $OM_a$  é também  $2 : 1$ , e ainda, tais segmentos são paralelos, pois  $\overline{AH}$  está na altura relativa ao vértice  $A$  e  $\overline{OM_a}$  está na mediatriz relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

Agora, acrescentemos a mediana  $\overline{AM_a}$  e um segmento  $\overline{HO}$  e seja  $K$  o ponto onde eles concorrem, e tem-se dois triângulos semelhantes:  $\triangle AHK$  e  $\triangle M_aOK$ , pelo caso ângulo-ângulo, cuja razão de semelhança é  $2 : 1$ , como mostrado na figura abaixo:



**Figura 2.32:** O triângulos  $\triangle AHK$  e  $\triangle M_aOK$  são semelhantes.

Sendo assim, o ponto  $K$  está entre os ponto  $H$  e  $O$ ; a razão entre os segmentos  $\overline{HK}$  e  $\overline{KO}$  é de  $2 : 1$ , ou seja,  $\overline{AK}$  corresponde a  $\frac{2}{3}$  da mediana  $\overline{AM_a}$ . Nestes termos, pelo Teorema 2.18, o ponto  $K$  representa o baricentro do triângulo  $\triangle ABC$ .  $\square$

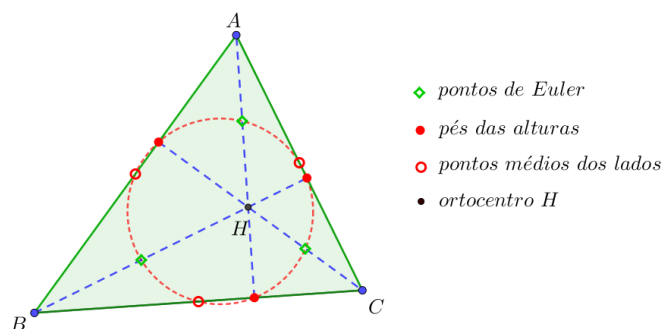
## 2.5 A Circunferência de Nove Pontos

A Circunferência de Nove Pontos apresentada nesta seção é notável por conter pontos distintos como os pontos médios dos lados do triângulo, os pés das alturas e por outros três, conforme a definição 2.25:

**Definição 2.25:** Os pontos médios entre o ortocentro e cada vértice do triângulo, são chamados de *pontos de Euler* de um triângulo.

Os três pontos de Euler determinam o *triângulo de Euler* de um dado triângulo.

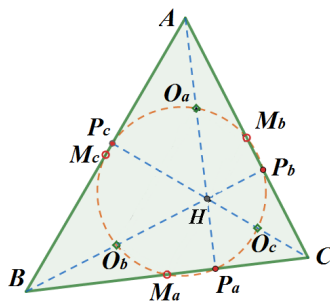
**Teorema 2.27:** Em um triângulo, os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos de Euler estão em uma mesma circunferência.



**Figura 2.33:** Circunferência de nove pontos.

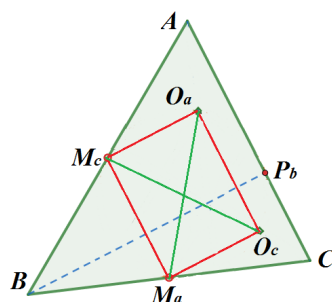
A partir da Figura 2.33, e de alterações convenientes, pretende-se mostrar que os pontos ilustrados estão em uma mesma circunferência, exceto o ortocentro  $H$ .

*Demonstração.* Inicialmente, sejam  $O_a$ ,  $O_b$  e  $O_c$  os pontos de Euler, relativos aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente. Sejam  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  os pontos médios, respectivamente, dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ . Finalmente, sejam  $P_a$ ,  $P_b$  e  $P_c$  os pés das alturas relativas, respectivamente, aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , além disso,  $H$  é o ortocentro, conforme ilustrado abaixo:



**Figura 2.34:** Representação dos nove pontos.

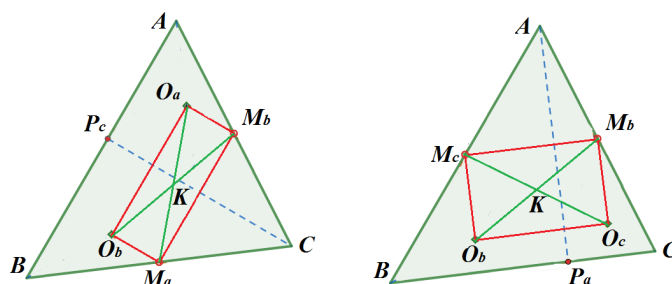
Verifique que os segmentos  $M_aM_c$  e  $O_aO_c$  são paralelos, pois seus extremos são pontos médios em dois triângulos:  $\triangle ABC$  e  $\triangle AHC$  que compartilham o lado  $\overline{AC}$ . Além disso, são base média desses triângulos e  $M_aM_c = O_aO_c = \frac{1}{2} \times AC$ . Analogamente,  $M_cO_a = M_aO_c = \frac{1}{2} \times BH$ . Portanto, esses pontos definem o paralelogramo  $M_cM_aO_cO_a$ .



**Figura 2.35:** O paralelogramo  $M_cM_aO_cO_a$  é um retângulo.

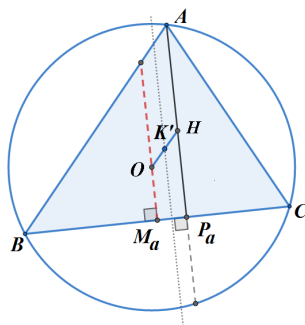
Além disso,  $\overline{M_cO_a}$  e  $\overline{O_aO_c}$  são perpendiculares entre si, pois são paralelos, respectivamente, à altura  $\overline{BP_b}$  e ao lado  $\overline{AC}$ . Desta forma, o paralelogramo  $M_cM_aO_cO_a$  é um retângulo, portanto suas diagonais são congruentes.

Por outro lado, e na mesma linha de raciocínio, os quadriláteros:  $O_aO_bM_aM_b$  e  $M_bM_cO_bO_c$  também são retângulos. Se  $K$  é o ponto médio em uma das diagonais de qualquer desses retângulos, é também dos demais, pois se tomarmos esses retângulos dois a dois, percebemos uma diagonal em comum.



**Figura 2.36:** Os paralelogramos  $O_aO_bM_aM_b$  e  $M_bM_cO_bO_c$  são também retângulos.

Deste modo pode-se afirmar que os pontos  $O_a, O_b, O_c, M_a, M_b$  e  $M_c$  estão em uma mesma circunferência de centro em  $K$ , pois as diagonais de um retângulo são congruentes. Resta verificar que os pés das alturas  $P_a, P_b$  e  $P_c$  também estão.



**Figura 2.37:** Os pés das alturas  $P_a, P_b$  e  $P_c$  também estão na circunferência de centro  $K$ .

No triângulo acima,  $H$  é o Ortocentro,  $O$  o circuncentro e  $K'$  é o ponto médio

de  $\overline{HO}$ , logo  $B\widehat{M}_aO$  e  $A\widehat{P}_aC$  são retos e  $\overline{OM}_a$  e  $\overline{HP}_a$  são paralelos. Suponha uma reta paralela a  $\overline{HP}_a$  que passe em  $K'$ : como  $K'$  é ponto médio de  $\overline{HO}$ , pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade (Teorema 2.17), tal reta divide igualmente  $\overline{M}_aP_a$  e é mediatriz deste segmento, assim  $K'$  equidista de  $M_a$  e  $P_a$ .

Analogamente se aplica aos pontos  $M_b$  e  $P_b$ , e  $M_c$  e  $P_c$ . Portanto os pontos médios  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  e os pés das alturas  $P_a$ ,  $P_b$  e  $P_c$  estão em uma mesma circunferência assim como os pontos de Euler, e  $K' = K$ , que é o centro da circunferência de nove pontos.  $\square$

## 2.6 O Teorema das Duas Circunferências

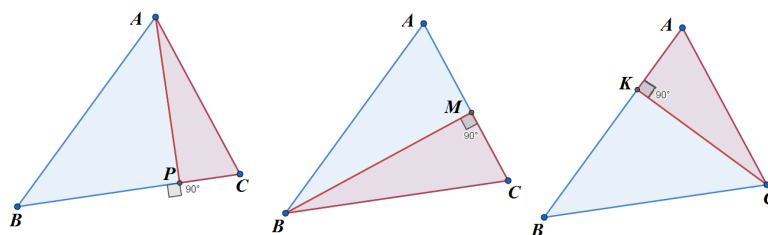
O Teorema das Duas Circunferências estabelece que a ocorrência de pontos comuns entre elas depende unicamente do comprimento de seus raios. Podemos, porém, associar a tal teorema a condição de existência de um triângulo, como segue no Lema 2.28:

**Lema 2.28:** (Condição de existência de um triângulo) Dados segmentos  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  de comprimento, respectivamente,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , existe um triângulo de lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  se, e somente se, a soma da medida de dois lados for maior que a medida do terceiro lado.

Para demonstrar este lema, consideremos, separadamente, um triângulo  $\triangle ABC$  nas formas: retângulo, acutângulo e obtusângulo.

*Demonstração.* Suponha um triângulo  $\triangle ABC$  retângulo em  $A$  e seja  $P$  o pé da altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ , sem perda de generalidade. Assim  $BC > AB$  e  $BC > AC$ , conseqüentemente,  $BC + AB > AC$  e  $BC + AC > AB$ . Por outro lado,  $AB > BP$  e  $AC > PC$ . Somando as desigualdades membro a membro, tem-se  $AB + AC > BP + PC = BC$ .

Suponha agora um triângulo  $\triangle ABC$  acutângulo e sejam  $P$  o pé da altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ ,  $K$  o pé da altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ , e  $M$  o pé da altura relativa ao lado  $\overline{AC}$ .



**Figura 2.38:** No triângulo  $\triangle ABC$  cada altura determina dois triângulos retângulos.

Assim os lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  tornam-se hipotenusa de algum triângulo retângulo, tal que:

(1)  $AB > AM$  e  $BC > MC$ . Somando estas desigualdades membro a membro, tem-se  $AB + BC > AM + MC \Leftrightarrow AB + BC > AC \Leftrightarrow c + a > b$ .

(2)  $AB > BP$  e  $AC > PC$ . Somando estas desigualdades membro a membro, tem-se  $AB + AC > BP + PC \Leftrightarrow AB + AC > BC \Leftrightarrow c + b > a$ .

(3)  $BC > BK$  e  $AC > KA$ . Somando estas desigualdades membro a membro, tem-se  $BC + AC > BK + KA \Leftrightarrow BC + AC > AB \Leftrightarrow a + b > c$ .

Finalmente, para o caso de triângulo  $\triangle ABC$  ser obtusângulo em  $A$ , sem perda de generalidade, a demonstração é idêntica ao do triângulo retângulo.

Por outro lado, dados 3 segmentos de comprimentos  $a = AB$ ,  $b = CD$  e  $c = EF$ , tais que a soma de comprimentos de 2 deles é maior do que o comprimento do terceiro. Temos:  $c + b > a$ ,  $a + b > c$  e  $c + a > b$ .

Sem perda de generalidade, seja  $a > b$  e  $a > c$  e suponha, por absurdo, que não seja possível compor um triângulo com estes segmentos.

Se dispusermos os segmentos  $\overline{cd}$  e  $\overline{ef}$  sobre  $\overline{AB}$  de modo que  $C$  coincida com  $A$  e  $F$  coincida com  $B$ , teremos:

$$CD + DE + EF = AB \Rightarrow CD + EF < AB \Rightarrow b + c < a$$

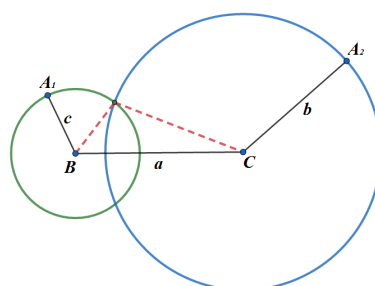
que é uma contradição.

□

Sendo assim, pode ser enunciado o teorema que segue:

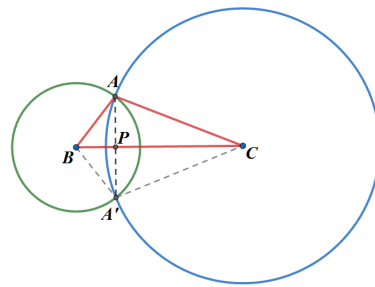
**Teorema 2.29:** (Teorema das Duas Circunferências) Sejam dadas duas circunferências de raios  $b$  e  $c$ , respectivamente, onde  $a$  é a distância entre seus centros, respectivamente,  $B$  e  $C$ . Se  $|a - b| < c < a + b$ , então as duas circunferências interseccionam-se em dois pontos, um em cada lado da reta que contém os centros.

*Demonstração.* Observe que a condição  $|a - b| < c < a + b$  equivale às desigualdades  $a + b > c$ ,  $a + c > b$  e  $b + c > a$ , logo, pelo Lema 2.28, existe um triângulo  $\triangle ABC$  cujos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  medem, respectivamente,  $a$ ,  $b$  e  $c$ .



**Figura 2.39:** Teorema das Duas Circunferências.

Entretanto, se o vértice  $A$  é um ponto de interseção entre as circunferências, seja  $A'$  seu simétrico em relação ao lado  $\overline{BC}$ , e seja  $P$  o ponto médio de  $\overline{AA'}$  (Figura 2.40).



**Figura 2.40:** Teorema das duas Circunferências.

Como  $A$  e  $A'$  são simétricos os triângulos  $\triangle APB$  e  $\triangle A'PB$  são retângulos em  $P$ . Além disso,  $AP = A'P$  e  $\overline{BP}$  é lado comum. Logo, pelo caso lado, ângulo, lado (L. A. L.), esses triângulos são congruentes, portanto,  $AB = A'B$  e  $A'$  está na circunferência de centro  $B$ . Analogamente,  $A'$  está também na circunferência de centro  $C$ , e  $A'$  também é ponto de interseção entre elas.

Pelo Teorema 2.2 (c), os pontos  $A$  e  $A'$  são únicos. □



## Circunferências em triângulos

---

Até o momento foram apresentadas e associadas a um triângulo, a circunferência inscrita (Corolário 2.25), a circunferência circunscrita (Corolário 2.21) e a circunferência de nove pontos (Teorema 2.27). Neste capítulo serão apresentadas outras circunferências associadas ao triângulo, isto é, a Circunferência de Apolônio, as circunferências tritangentes (além da circunferência inscrita) e outras seis determinadas pelos lados do triângulo.

A fim de compreender profundamente as relações existentes entre os elementos de circunferências associadas a um dado triângulo, uma coleção de teoremas, corolários e propriedades são citados neste capítulo. Alguns tem sua validade demonstrada e outros não, por serem de verificação imediata, sem, no entanto, diminuir sua importância ou apreço.

Inicialmente é abordado o conceito de divisão de segmentos, onde é esclarecida a ideia de divisão proporcional de segmentos, tanto interna quanto externamente, e de divisão harmônica. Em seguida, é abordada a definição de bissetriz a partir de duas retas e são enunciados teoremas fundamentais para as seções que seguem. A partir daí, são apresentadas interessantes relações métricas que envolvem os principais elementos das circunferências tritangentes: os centros, os raios e os pontos de tangência.

### 3.1 Divisão de Segmentos

Nesta seção é abordado o conceito de divisão de segmentos, tanto interna quanto externa; a divisão harmônica de um segmento e a razão de proporcionalidade, a fim de facilitar o entendimento de certos teoremas enunciados na próxima seção. Além disso, são tratadas algumas relações entre as medidas dos segmentos envolvidos e a razão de proporcionalidade resultante desta divisão.

#### 3.1.1 Divisão Proporcional de um Segmento

Considere dois pontos  $A$  e  $B$  e o segmento formado por eles. Seja  $P$  um ponto no interior deste segmento. O ponto  $P$  divide internamente o segmento  $\overline{AB}$  em duas partes:  $\overline{AP}$  e  $\overline{PB}$ . A razão  $\frac{AP}{PB} = K$  é chamada de *razão de proporcionalidade* na divisão interna do segmento  $\overline{AB}$ .

No caso de  $K > 1$  o ponto  $P$  encontra-se mais próximo do extremo  $B$ . No caso de  $K < 1$  o ponto  $P$  encontra-se mais próximo do extremo  $A$ . No caso de  $K = 1$ ,  $P$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ .

Agora considere novamente dois pontos  $A$  e  $B$  e o segmento formado por eles. Seja  $Q$  um ponto externo a este segmento, porém na mesma reta  $\overleftrightarrow{AB}$ . O ponto  $Q$  divide externamente o segmento  $\overline{AB}$  em duas partes, compondo novos segmentos a considerar:  $\overline{AQ}$  e  $\overline{QB}$ . A razão  $\frac{AQ}{QB} = K'$  é chamada de *razão de proporcionalidade* na divisão externa do segmento  $\overline{AB}$  pelo ponto  $Q$ .

No caso de  $K' > 1$  o ponto  $Q$  encontra-se mais próximo do extremo  $B$ . Além disso, se  $K' = 2$ ,  $QB = AB$ . No caso de  $K' < 1$  o ponto  $Q$  encontra-se mais próximo do extremo  $A$ . Além disso, se  $K' = \frac{1}{2}$ ,  $AQ = AB$ . Note que  $K' = 1$  não ocorre pois o ponto  $Q$  é externo ao segmento  $\overline{AB}$ .

### 3.1.2 Divisão Harmônica

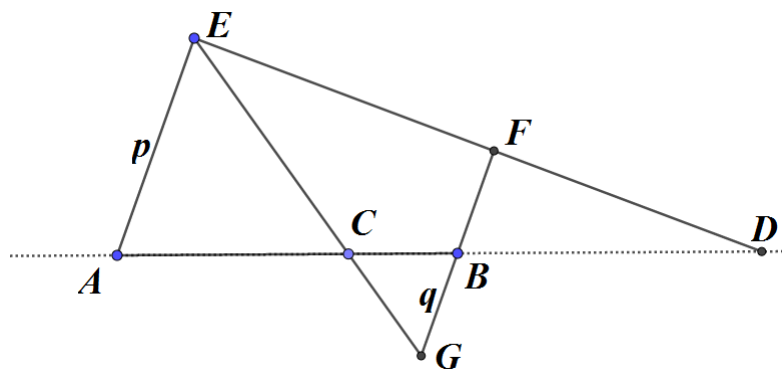
**Definição 3.1:** Seja  $\overline{AB}$  um segmento e  $P$  e  $Q$  pontos da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  tal que  $P$  divide internamente o segmento  $\overline{AB}$  e  $Q$  divide externamente o mesmo segmento. Dizemos que  $P$  e  $Q$  dividem *harmonicamente* o segmento  $\overline{AB}$  se ambas divisões ocorrem na mesma razão de proporcionalidade. Neste caso os pontos  $P$  e  $Q$  são *conjugados harmônicos* com relação aos pontos  $A$  e  $B$ .

Dados três pontos colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$ , deseja-se obter o *conjugado harmônico*  $D$  do ponto  $C$  com relação aos pontos  $A$  e  $B$ , ou equivalentemente, os pontos  $C$  e  $D$  tais que dividem o segmento  $\overline{AB}$  interna e externamente na mesma proporção, ou ainda, os pontos  $C$  e  $D$  tais que dividem harmonicamente o segmento  $\overline{AB}$  e que valha a relação:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

Em tais condições, os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são ditos *segmentos harmônicos*.

Considere um segmento  $\overline{AB}$  que contém um ponto  $C$  em seu interior, tal que  $C$  não é ponto médio de  $\overline{AB}$ . É possível encontrar um ponto  $D$  exterior de  $\overline{AB}$  que é o conjugado harmônico de  $C$  com relação aos pontos  $A$  e  $B$ .



**Figura 3.1:** Os pontos  $C$  e  $D$  dividem harmonicamente o segmento  $\overline{AB}$ .

Seja  $E$  um ponto arbitrário, mas não colinear com  $\overline{AB}$ , e seja  $p = AE$ . Tomemos  $\overline{GF}$  um segmento de uma reta  $\overleftrightarrow{GF}$ , paralela a  $\overline{AE}$ , que contém  $B$ . O ponto  $G$  é definido pela interseção de  $\overleftrightarrow{EC}$  com  $\overleftrightarrow{BF}$ . Além disso, o ponto  $F$  é definido de modo que  $BG = BF = q$ . Seja  $D$  a interseção entre  $\overleftrightarrow{EF}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$ . Nestas condições, tem-se dois pares de triângulos semelhantes:  $\triangle AEC \simeq \triangle BGC$  e  $\triangle AED \simeq \triangle BFD$ , ambas semelhanças pelo caso ângulo-ângulo.

Devido a estas semelhanças, temos  $\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{BG}$  e  $\frac{AE}{BF} = \frac{AD}{BD}$ . Mas  $BG = BF$ .

$$\text{Portanto, } \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}.$$

Observação: Seja  $p : q$  a razão de proporcionalidade. Se  $p > q$ , temos  $AC > CB$  e  $AD > DB$ , de modo que o ponto médio  $M$  de  $\overline{AB}$  fica fora do segmento  $\overline{CD}$ . A mesma posição relativa dos pontos  $M, C, D$  prevalece, se  $p < q$ , isto é, o ponto médio  $M$  de  $\overline{AB}$  continua fora do segmento  $\overline{CD}$ . Se  $p = q$ , o ponto  $C$  coincide com  $M$ , e não há ponto de divisão externo, pois  $\overline{EF}$  é paralelo a  $\overline{AB}$ .

**Teorema 3.1:** Se os pontos  $C$  e  $D$  dividem o segmento  $\overline{AB}$  interna e externamente na razão  $p : q$ , os pontos  $B$  e  $A$  dividem o segmento  $\overline{DC}$  interna e externamente na razão

$$(p + q) : (p - q).$$

*Demonstração.* Pela figura 3.1 tem-se  $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{p}{q}$ .

$$\text{Dessa forma, } \frac{AC}{BC} = \frac{p}{q} \text{ e } \frac{AD}{BD} = \frac{p}{q}.$$

$$\text{Assim, } \frac{(AC + BC)}{BC} = \frac{(p + q)}{q} \text{ e } \frac{(AD - BD)}{BD} = \frac{(p - q)}{q}.$$

Substituindo  $(AC + BC)$  e  $(AD - BD)$  por  $AB$ , tem-se:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{(p + q)}{q} \text{ e } \frac{AB}{BD} = \frac{(p - q)}{q}.$$

$$\text{Logo, } AB = \frac{(p + q)}{q} \times BC \text{ e } AB = \frac{(p - q)}{q} \times BD.$$

$$\text{Portanto } \frac{BD}{BC} = \frac{(p - q)}{(p + q)}.$$

$$\text{Por outro lado, tem-se } \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{p}{q}$$

$$\text{Dessa forma } \frac{AC}{BC} = \frac{p}{q} \text{ e } \frac{AD}{BD} = \frac{p}{q}.$$

$$\text{Assim } \frac{AC}{(AC + BC)} = \frac{p}{(p + q)} \text{ e } \frac{AD}{(AD - BD)} = \frac{p}{(p - q)}.$$

Substituindo  $(AC + BC)$  e  $(AD - BD)$  por  $AB$ , tem-se:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{p}{(p + q)} \text{ e } \frac{AD}{AB} = \frac{p}{(p - q)}.$$

$$\text{Dessa forma } AB = \frac{(p + q)}{p} \times AC \text{ e } AB = \frac{(p - q)}{p} \times AD.$$

$$\text{Logo } \frac{AD}{AC} = \frac{(p + q)}{(p - q)}.$$

□

**Corolário 3.2:** Se  $AB = a$  e  $CD = b$ , temos  $b = \frac{2apq}{(p^2 - q^2)}$ .

*Demonstração.* De fato, tem-se:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{p}{(p-q)}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{p}{(p+q)}, \quad CD = AD - AC;$$

daí, fazendo as substituições devidamente,

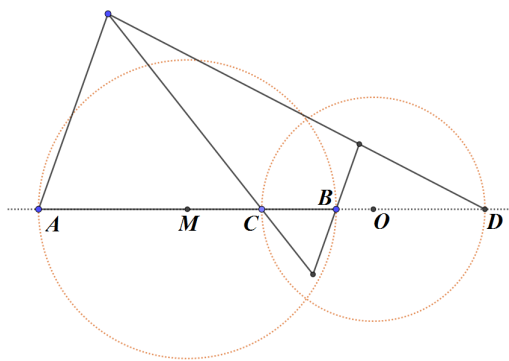
$$\begin{aligned} CD = b &= AD - AC \\ &= \frac{p}{(p-q)} \cdot a - \frac{p}{(p+q)} \cdot a \\ &= \frac{pa(p+q) - pa(p-q)}{(p^2 - q^2)} \\ &= \frac{pa[p+q - (p-q)]}{(p^2 - q^2)} \\ &= \frac{pa[p+q - p+q]}{(p^2 - q^2)} \\ &= \frac{pa[2q]}{(p^2 - q^2)} \\ &= \frac{2apq}{(p^2 - q^2)}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.3:** Sejam os pontos  $A, B, C$  e  $D$  colineares e harmônicos. O pé das perpendiculares baixadas sobre uma reta qualquer, a partir destes pontos, também são pontos harmônicos.

De fato, as perpendiculares são quatro retas paralelas; logo pelo Teorema Fundamental de Proporcionalidade (2.17), os segmentos determinados por seus pés são proporcionais aos segmentos correspondentes, portanto são pontos harmônicos.

**Teorema 3.4:** Se os pontos  $C, D$  dividem o segmento  $\overline{AB}$  harmonicamente na razão  $p : q$ , o ponto médio  $O$  do segmento  $\overline{CD}$  divide o segmento  $\overline{AB}$  externamente na razão  $p^2 : q^2$ .



**Figura 3.2:** O ponto  $O$  é externo e divide  $AB$  na razão  $\frac{AO}{BO} = \frac{p^2}{q^2}$ .

*Demonstração.* Deseja-se mostrar que o ponto  $O$  divide  $AB$  na razão  $\frac{AO}{BO} = \frac{p^2}{q^2}$ .

Temos:

$$AO = \frac{1}{2}CD + AC, \quad BO = \frac{1}{2}CD - BC.$$

Substituindo  $CD = \frac{2apq}{(p^2 - q^2)}$ ,  $AC = \frac{pa}{(p + q)}$ ,  $BC = a - AC$ , conforme o Teorema 3.1 e Corolário 3.2, obtem-se:

$$AO = \frac{ap^2}{(p^2 - q^2)}, \quad BO = \frac{aq^2}{(p^2 - q^2)};$$

daí a relação:

$$\frac{AO}{BO} = \frac{p^2}{q^2}.$$

□

**Corolário 3.5:** Seguindo as notações do Corolário 3.2, temos:

$$OA \cdot OB = OC^2.$$

*Demonstração.* Note que  $OC = \frac{CD}{2}$ . Daí,

$$\begin{aligned} OA \cdot OB &= \frac{ap^2}{(p^2 - q^2)} \cdot \frac{aq^2}{(p^2 - q^2)} = \frac{a^2 \cdot p^2 \cdot q^2}{(p^2 - q^2)^2} \\ &= \left[ \frac{a \cdot p \cdot q}{(p^2 - q^2)} \right]^2 = \left[ \frac{2}{2} \cdot \frac{a \cdot p \cdot q}{(p^2 - q^2)} \right]^2 \\ &= \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot a \cdot p \cdot q}{(p^2 - q^2)} \right]^2 = \left[ \frac{1}{2} \cdot CD \right]^2 \\ &= [OC]^2. \end{aligned}$$

□

Antes de irmos ao próximo teorema, observemos que  $M$  e  $O$  são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ . Logo:

$$\begin{aligned}
 MO &= AO - AM = AO - \frac{1}{2}AB \\
 &= \frac{ap^2}{(p^2 - q^2)} - \frac{1}{2}a \\
 &= \frac{2ap^2 - a(p^2 - q^2)}{2(p^2 - q^2)} \\
 &= \frac{a(p^2 + q^2)}{2(p^2 - q^2)}.
 \end{aligned}$$

**Teorema 3.6:** A soma dos quadrados de dois segmentos harmônicos é igual a quatro vezes o quadrado da distância entre os pontos médios desses segmentos, ou seja:

$$AB^2 + CD^2 = 4MO^2.$$

*Demonstração.* Temos:

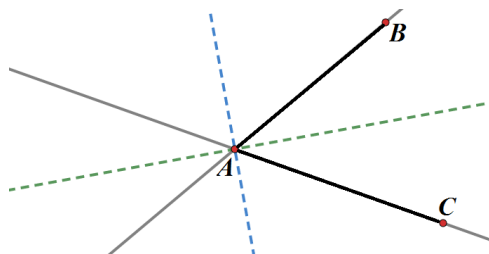
$$\begin{aligned}
 AB^2 + CD^2 &= a^2 + \left[ \frac{2apq}{(p^2 - q^2)} \right]^2 \\
 &= a^2 + \frac{4a^2 p^2 q^2}{(p^2 - q^2)^2} \\
 &= \frac{a^2(p^2 - q^2)^2 + 4a^2 p^2 q^2}{(p^2 - q^2)^2} \\
 &= \frac{a^2 \left( (p^2)^2 - 2 \cdot p^2 \cdot q^2 + (q^2)^2 \right) + 4a^2 p^2 q^2}{(p^2 - q^2)^2} \\
 &= \frac{a^2(p^2)^2 - a^2 2 \cdot p^2 \cdot q^2 + a^2(q^2)^2 + 4a^2 p^2 q^2}{(p^2 - q^2)^2} \\
 &= \frac{a^2(p^2)^2 + 2a^2 \cdot p^2 \cdot q^2 + a^2(q^2)^2}{(p^2 - q^2)^2} \\
 &= \frac{a^2 \left[ (p^2)^2 + 2 \cdot p^2 \cdot q^2 + (q^2)^2 \right]}{(p^2 - q^2)^2} \\
 &= \frac{a^2(p^2 + q^2)^2}{(p^2 - q^2)^2} \\
 &= \left[ \frac{a(p^2 + q^2)}{(p^2 - q^2)} \right]^2 \\
 &= [2MO]^2 = 4MO^2.
 \end{aligned}$$

□

### 3.2 Bissetriz

Nesta seção, o conceito de bissetriz estende-se à bisseção de um ângulo formado entre duas retas, sejam elas as que contém os lados de um triângulo.

**Definição 3.2:** Dados os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , são bissetrizes dos ângulos entre as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  os conjuntos de todos os pontos  $R$  equidistantes destas retas. Esses conjuntos de pontos constituem duas retas que passam pelo ponto  $A$  e divide o ângulo entre as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  em dois setores de mesma abertura.



**Figura 3.3:** As bissetrizes na intersecção de duas retas.

**Lema 3.7:** Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , cada um dos vértices possui exatamente duas bissetrizes, perpendiculares entre si.

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  o ângulo interno de um vértice do triângulo e seja  $\beta$  o ângulo externo do mesmo vértice. Sabe-se que

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Traçando as bissetrizes deste ângulo tem-se:

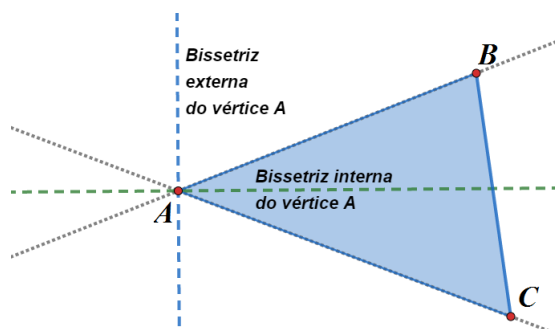
$$2 \times \frac{\alpha}{2} + 2 \times \frac{\beta}{2} = 180^\circ.$$

Daí,

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ.$$

□

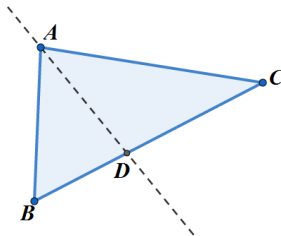
Considere o vértice  $A$  e as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  que contém os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente. A bissetriz localizada entre estes lados é chamada de *interna*, enquanto a outra é chamada de *externa*.



**Figura 3.4:** As bissetrizes em um vértice do triângulo.

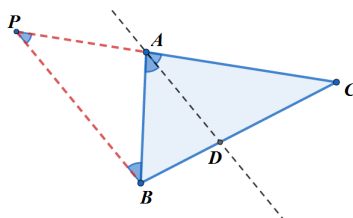
**Teorema 3.8:** (Teorema das Bissetrizes Internas) Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.

Dado o triângulo abaixo, considerando o vértice  $A$  e sua bissetriz interna  $AD$ , o teorema diz que:  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .



**Figura 3.5:**  $AD$  é bissetriz interna do vértice  $A$ .

*Demonstração.* Para demonstrar este teorema, tomemos um prolongamento do lado  $\overline{AC}$ , neste sentido, até o ponto  $P$ , tal que  $\overline{PB}$  seja paralelo à bissetriz  $\overline{AD}$ :

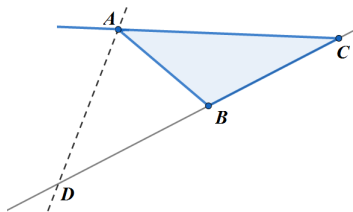


**Figura 3.6:**  $\overline{PB}$  é paralelo a  $\overline{AD}$ .

Observe que  $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$  pois  $\overline{AD}$  é bissetriz. Além disso,  $\widehat{PBA} \equiv \widehat{BAD}$  pois são ângulos alternos internos e  $\widehat{BPA} \equiv \widehat{CAD}$  pois são ângulos correspondentes entre duas retas paralelas e uma transversal. Logo  $\widehat{PBA} \equiv \widehat{BPA}$  e conclui-se que  $PA = AB$ . Aplicando o Teorema Fundamental de Proporcionalidade (2.17), tem-se:  $\frac{BD}{DC} = \frac{PA}{AC}$ , mas  $PA = AB$ , portanto  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .  $\square$

**Teorema 3.9:** (Teorema das Bissetrizes Externas) Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo externo divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes.

Seja o triângulo  $\triangle ABC$  e  $\overline{AD}$  é bissetriz externa do vértice  $A$ , sendo que o ponto  $D$  está no prolongamento do lado  $\overline{BC}$  que é oposto ao vértice  $A$ , como mostrado abaixo. O teorema diz que  $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ .



**Figura 3.7:**  $\overline{AD}$  é bissetriz externa do vértice  $A$ .



*Demonstração.* Seja  $Q$  um ponto em  $\overline{AC}$  tal que  $\overline{BQ}$  é paralelo à bissetriz  $\overline{AD}$  (veja figura 3.8). Os ângulos  $D\hat{A}B$  e  $A\hat{B}Q$  são congruentes pois são ângulos alternos internos. O ângulo formado pelo prolongamento do lado  $\overline{CA}$ , neste sentido, com a bissetriz  $\overline{AD}$  é congruente ao ângulo  $A\hat{Q}B$  pois são ângulos correspondentes nas paralelas  $\overline{AD}$  e  $\overline{BQ}$ . Porém, o mesmo ângulo formado pelo prolongamento do lado  $\overline{CA}$  com a bissetriz  $\overline{AD}$  é também congruente ao ângulo  $D\hat{A}B$  pois  $\overline{AD}$  é bissetriz externa. Logo  $A\hat{B}Q \equiv A\hat{Q}B$  e  $AQ = AB$ .

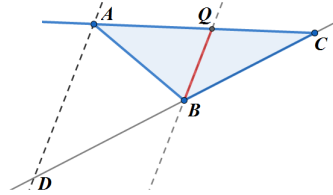


Figura 3.8:  $BQ$  é paralelo a  $AD$ .

Pelo Teorema Fundamental de Proporcionalidade (2.17),  $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AQ}$ , portanto  $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ . □

**Teorema 3.10:** Dado um triângulo, o ângulo formado por duas bissetrizes internas (externas) é igual ao ângulo reto somado à metade (menos a metade) do terceiro ângulo no triângulo.

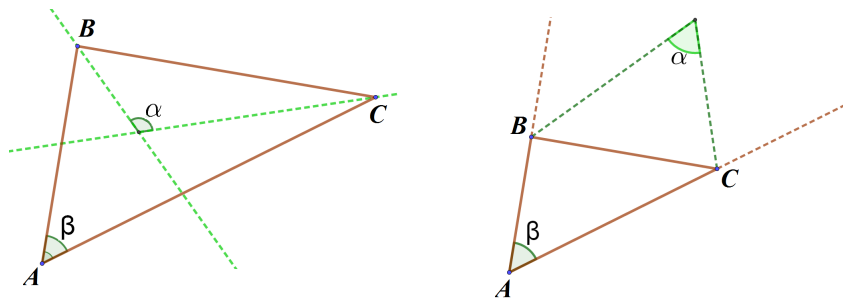


Figura 3.9: Ângulo formado por duas bissetrizes internas:  $\alpha = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$  e  
externas:  $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$

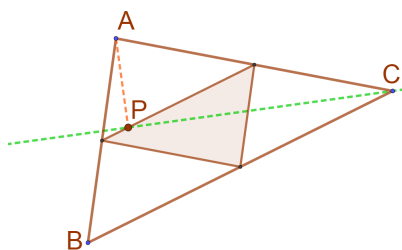
*Demonstração.* Em um triângulo  $\triangle ABC$  seja  $\alpha$  o ângulo formado por duas bissetrizes internas e seja  $\beta$  o terceiro ângulo, conforme a figura 3.9 (esquerda).

Basta tomar  $\alpha = 180^\circ - \frac{1}{2}med(B) - \frac{1}{2}med(C)$  e usar  $med(B) + med(C) = 180^\circ - \beta$ .

Em um triângulo  $\triangle ABC$  seja  $\alpha$  o ângulo formado por duas bissetrizes externas e seja  $\beta$  o terceiro ângulo, conforme a figura 3.9 (direita).

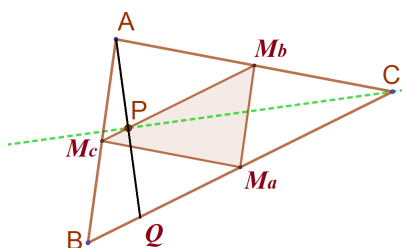
Basta observar que  $\alpha = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{med(B)}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{med(C)}{2}\right)$ . □

**Teorema 3.11:** O pé da perpendicular de um vértice de um triângulo sobre a bissetriz interna de um segundo vértice localiza-se no lado do triângulo medial, oposto ao primeiro vértice considerado.



**Figura 3.10:** Localização do pé da perpendicular de um dos vértices sobre uma das bissetrizes internas.

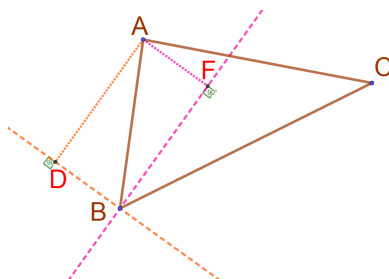
*Demonstração.* Se  $P$  é o pé da perpendicular do vértice  $A$  sobre a bissetriz  $\overline{CP}$  (Figura 3.11) emitida a partir do vértice  $C$ , e  $Q$  é a interseção de  $\overline{AP}$  com o lado  $\overline{BC}$ , os dois triângulos retângulos  $\triangle APC$ ,  $\triangle QPC$  são congruentes (caso ALA) e o ponto  $P$  é ponto médio de  $\overline{AQ}$ . Uma vez que  $\overline{M_cP}$  é base média do triângulo  $\triangle ABQ$  e é, portanto, paralelo à  $\overline{BQ}$ , temos que  $P$  está na base média  $\overline{M_cM_b}$  do triângulo  $\triangle ABC$ .



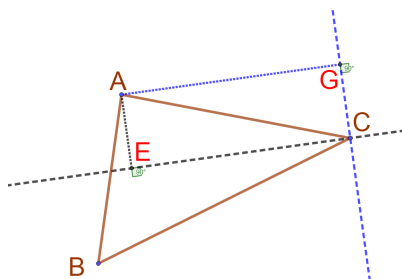
**Figura 3.11:** O ponto  $P$  está na base média  $M_cM_b$

□

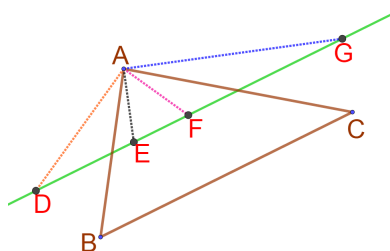
**Corolário 3.12:** Tomando um dos vértices do triângulo, e tomando as bissetrizes internas e as bissetrizes externas dos outros dois ângulos, os pés das quatro perpendiculares do primeiro vértice sobre as quatro bissetrizes dos outros dois ângulos são colineares.



**Figura 3.12:**  $D$  e  $F$  são, respectivamente, pé das perpendiculares do vértice  $A$  sobre as bissetrizes externa e interna do vértice  $B$ .



**Figura 3.13:**  $G$  e  $E$  são, respectivamente, pé das perpendiculares do vértice  $A$  sobre as bissetrizes externa e interna do vértice  $C$ .

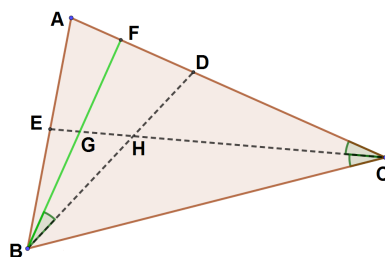


**Figura 3.14:** Os quatro pés de perpendiculares  $D$ ,  $E$ ,  $F$  e  $G$  são colineares.

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.11 os pontos  $E$  e  $F$  estão na base média paralela ao lado  $\overline{BC}$ . Note que  $\overline{BF}$  é bissetriz interna de  $B$  e  $\overline{BD}$  é bissetriz externa de  $B$  logo, pelo Lema 3.7, são perpendiculares. Temos que  $\overline{DA}$  é perpendicular a  $\overline{BD}$  e  $\overline{AF}$  é perpendicular a  $\overline{BF}$ , logo  $\overline{AF}$  é paralelo a  $\overline{BD}$  e  $\overline{BF}$  é paralelo a  $\overline{DA}$ . O quadrilátero  $AFBD$  é um retângulo de diagonais  $\overline{AB}$  e  $\overline{DF}$ . Como  $\overline{DF}$  divide  $\overline{AB}$  em seu ponto médio e  $F$  está na base média referente ao lado  $\overline{BC}$ , então  $D$  também está na base média. Analogamente  $\overline{EG}$  está na mesma base média, portanto,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  e  $G$  são colineares.  $\square$

**Teorema 3.13:** Em um triângulo, o maior entre dois ângulos tem a bissetriz interna de menor medida.

*Demonstração.* Em um triângulo  $\triangle ABC$ , seja o ângulo  $\hat{B}$  maior que o ângulo  $\hat{C}$  e seja  $\overline{BD}$  e  $\overline{CE}$  as bissetrizes internas destes ângulos.



**Figura 3.15:** Em dois ângulos internos de um triângulo, o maior deles tem a bissetriz mais curta.

No segmento  $\overline{AD}$  tomemos o ponto  $F$  tal que  $F\widehat{B}D \equiv A\widehat{C}E \equiv E\widehat{C}B$ , isto é possível pois  $\widehat{B} > \widehat{C}$ . Sejam  $H$  e  $G$  as interseções dos segmentos  $\overline{BD}$  e  $\overline{BF}$  com a bissetriz  $\overline{CE}$ . Os dois triângulos  $\triangle FBD$  e  $\triangle FGC$  são semelhantes, pois eles são equiângulos, note que eles compartilham o ângulo  $B\widehat{F}C$ . Assim,

$$\frac{BF}{CF} = \frac{BD}{CG} \quad (3.1)$$

Agora, o triângulo  $\triangle BFC$  ainda tem um ângulo menor no vértice  $C$  do que tem em  $B$ ; assim  $BF < CF$ , e entretanto, pela equação (3.1), temos  $BD < CG < CE$  e, portanto,  $\overline{BD}$  é a bissetriz de medida menor.  $\square$

**Corolário 3.14:** Se duas bissetrizes internas de um triângulo são de mesma medida, o triângulo é isósceles.

De fato, pelo Teorema 3.15, se entre dois ângulos internos de um triângulo não há o maior, então não pode haver a bissetriz de medida mais curta.

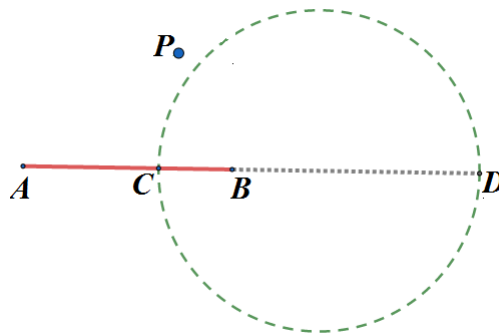
### 3.3 A Circunferência de Apolônio

A Circunferência de Apolônio é o *lugar geométrico*<sup>1</sup> dos pontos cuja razão das distâncias entre ele e dois pontos fixos é constante ([3]). Ela está diretamente ligada à divisão harmônica de um segmento (veja Seção 3.1.2).

**Teorema 3.15:** Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos e seja  $K > 0$  ( $K \neq 1$ ). O lugar geométrico dos pontos  $P$  tais que  $\frac{AP}{BP} = K$  é a circunferência de diâmetro  $\overline{CD}$  em que  $C$  e  $D$  dividem, respectivamente, o segmento  $\overline{AB}$ , interna e externamente, na razão  $K$ .

A circunferência citada no Teorema 3.15 é conhecida como *Circunferência de Apolônio* e é denotada por  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(A, B, K)$ .

Note que, se  $K = 1$ , teríamos que  $AP = BP$  e pelo Teorema 2.4,  $P$  seria ponto da mediatriz de  $\overline{AB}$  e não de uma circunferência.



**Figura 3.16:**  $C$  e  $D$  são conjugados harmônicos de  $\overline{AB}$ .

<sup>1</sup>Lugar Geométrico é um conjunto de pontos que satisfazem uma propriedade geométrica.

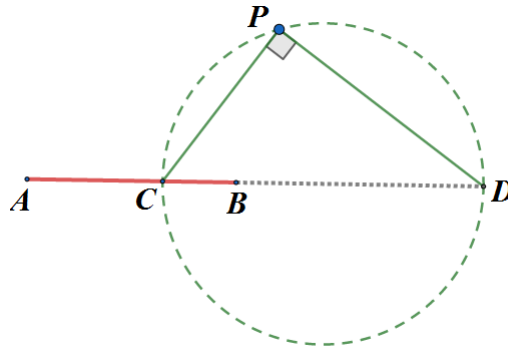
*Demonstração.* Observemos que  $C, D \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(A, B, K)$ . Sejam  $A$  e  $B$  tais pontos fixos e consideremos o segmento  $\overline{AB}$  e os pontos  $C$  e  $D$ , colineares, tais que  $C$  divide o segmento  $\overline{AB}$  internamente, e  $D$  o divide externamente, em uma razão real  $K$  ( $K > 0$  e  $K \neq 1$ ). Portanto,  $C$  não é ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , e  $C$  e  $D$  são conjugados harmônicos em relação ao mesmo. Deste modo, temos que  $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = K$ , e  $C$  e  $D$  são pontos desse lugar geométrico.

Primeiramente, seja  $P$  um ponto no mesmo lugar geométrico, mas diferente de  $C$  e de  $D$ , tal que  $\frac{AP}{BP} = K$ . Necessariamente  $P$  não pertence à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , pois  $C$  e  $D$  são conjugados, logo são únicos. Queremos verificar que o ponto  $P$  pertence à circunferência de diâmetro  $\overline{CD}$ .

De fato, temos que  $\frac{AP}{BP} = K = \frac{AC}{BC}$ . Pelo Teorema da Bissetriz Interna (3.8),  $\overline{PC}$  é bissetriz interna do ângulo  $\widehat{APB}$ .

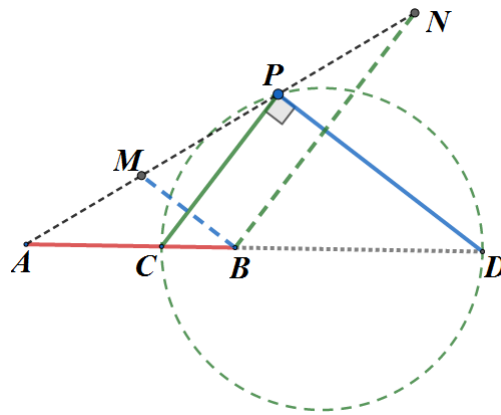
Sabemos também que  $\frac{AP}{BP} = K = \frac{AD}{BD}$ . Pelo Teorema da Bissetriz Externa (3.9)  $\overline{PD}$  é bissetriz externa do ângulo  $\widehat{APB}$ . Sendo assim o ângulo  $\widehat{CPD}$  é reto e  $P$  pertence a uma circunferência de diâmetro  $\overline{CD}$  (veja Corolário 2.9).

Agora, por outro lado, suponha que  $P$  seja um ponto na circunferência de diâmetro  $\overline{CD}$ . Queremos verificar que o ponto  $P \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(A, B, K)$ , ou seja,  $K = \frac{AP}{BP}$ .



**Figura 3.17:**  $P$  é ponto na circunferência de diâmetro  $\overline{CD}$ .

Considere os pontos  $M$  e  $N$  tais que  $M$  está entre  $A$  e  $P$ , e  $\overline{BM}$  é paralelo a  $\overline{DP}$ ; e  $N$  está no prolongamento do segmento  $\overline{AP}$ , no sentido de  $P$ , de modo que  $\overline{BN}$  seja paralelo a  $\overline{CP}$ , como ilustrado abaixo:



**Figura 3.18:**  $\overline{BN}$  é paralelo a  $\overline{CP}$  e  $\overline{BM}$  é paralelo a  $\overline{DP}$ .

Aplicando o Teorema Fundamental de Proporcionalidade (2.17), e olhando para o triângulo  $\triangle ABN$  e o segmento  $\overline{CP}$ , temos  $\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{PN}$ , logo  $\frac{AP}{PN} = K$ . Além disso, pelo mesmo Teorema e desta vez olhando o triângulo  $\triangle APD$  e para o segmento  $\overline{MB}$ , temos  $\frac{AD}{BD} = \frac{AP}{MP}$ , logo  $\frac{AP}{MP} = K$ .

Daí,

$$K = \frac{AP}{MP} = \frac{AP}{NP} \Rightarrow MP = NP. \quad (3.2)$$

Devido ao paralelismo entre  $\overline{BM}$  e  $\overline{DP}$ , e entre  $\overline{NB}$  e  $\overline{CP}$ , notamos que  $M\hat{B}N \equiv C\hat{P}D = 90^\circ$ ; e pelo Corolário 2.9 temos que  $\overline{MN}$  é diâmetro de uma semicircunferência que contém  $B$ . Além disso, como  $MP = NP$ , temos que  $P$  é ponto médio de  $\overline{MN}$ , logo  $P$  é centro da semicircunferência e  $PM = PN = PB$ . Pela equação 3.2 temos:

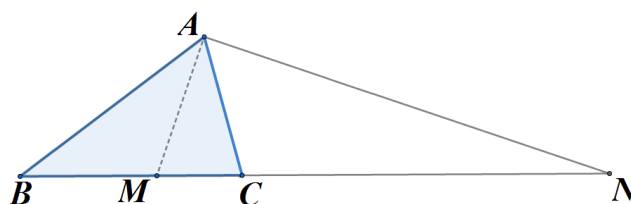
$$K = \frac{AP}{BP}.$$

□

Portanto, a Circunferência de Apolônio são pontos que possuem a propriedade citada no início desta seção e é definida a partir da fixação dos conjugados harmônicos de um dado segmento, desde que a razão seja diferente de 1. Agora pode ser enunciado o seguinte Teorema (3.16):

**Teorema 3.16:** Em um triângulo escaleno, se  $M$  e  $N$  são conjugados harmônicos de um dos seus lados e  $M$  é o pé da bissetriz interna relativa a este lado, então o vértice desta bissetriz está em uma, e somente uma, Circunferência de Apolônio.

*Demonstração.* Considere o triângulo  $\triangle ABC$ , seu lado  $\overline{BC}$ , sua bissetriz  $\overline{AM}$  e o ponto  $N$  na reta  $\overline{BC}$ , tal que  $M$  e  $N$  são conjugados harmônicos do lado  $\overline{BC}$ . Deseja-se mostrar que existe uma única circunferência de Apolônio associada ao lado  $\overline{BC}$  do triângulo.



**Figura 3.19:**  $M$  e  $N$  são conjugados harmônicos do lado  $\overline{BC}$ .

Pelo Teorema da bissetriz interna, temos  $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CM}$ .

Pela Definição 3.1 (conjugados harmônicos) temos  $\frac{BM}{CM} = \frac{BN}{CN}$ .

Logo temos que  $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{CN}$  e, pelo Teorema da Bissetriz Externa (3.9),  $\overline{AN}$  é bissetriz externa.

Assim  $\overline{AN}$  e  $\overline{AM}$  são perpendiculares e  $\overline{MN}$  é diâmetro de uma semicircunferência que contém o vértice  $A$ . Finalmente,

$$\frac{BM}{CM} = \frac{BN}{CN} = \frac{AB}{AC},$$

mostra que a circunferência de diâmetro  $\overline{MN}$  é circunferência de Apolônio.

Agora, suponha que exista outra circunferência de Apolônio que contenha o vértice  $A$  e possua diâmetro  $\overline{MN'}$ . Como  $\overline{MN'}$  está na reta  $\overline{BC}$  e  $M$  pode possuir apenas um conjugado em relação aos pontos  $B$  e  $C$ , temos que  $N' = N$ .

□

Deste modo, um triângulo escaleno está associado a três circunferências de Apolônio, tais que passam por um vértice e pelo pé da bissetriz relativa a este vértice.

**Corolário 3.17:** Em um triângulo:

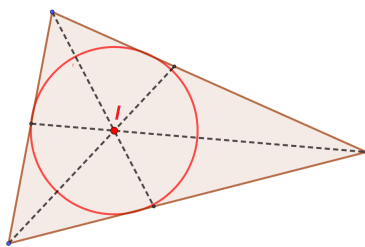
- (a) Isósceles a base não possui círculo de Apolônio associado.
- (b) Equilátero, não há círculo de Apolônio associado.

*Demonstração.* Observe que na base de um triângulo isósceles e nos lados de um triângulo equilátero o ponto médio coincide com o pé da bissetriz. Neste caso a divisão ocorre na razão 1, portanto não há formação de círculo, isto é, as bissetrizes externas ficam paralelas aos lados opostos e o ponto conjugado de cada pé de bissetriz não é determinado.

□

### 3.4 Centros Tritangentes

Vimos na Seção 2.3 que as três bissetrizes internas dos ângulos de um triângulo encontram-se em um ponto  $I$ , o incentro do triângulo.

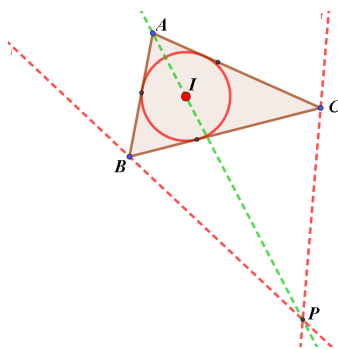


**Figura 3.20:** As bissetrizes internas de um triângulo encontram-se no incentro  $I$ .

O Teorema (3.18) a seguir enuncia outros pontos notáveis em um triângulo.

**Teorema 3.18:** As bissetrizes externas de dois ângulos de um triângulo se encontram na bissetriz interna do terceiro ângulo.

*Demonstração.* Consideremos no triângulo  $\triangle ABC$  o vértice  $A$ . Seja  $P$  o ponto de interseção entre as bissetrizes externas dos ângulos  $B$  e  $C$ . É fato que elas se encontram, pois são perpendiculares às respectivas bissetrizes internas. Conforme a Definição 3.2 (sobre bissetrizes),  $P$  é equidistante às retas suporte  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , consequentemente, aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  pois está na bissetriz externa do ângulo  $B$ . Do mesmo modo,  $P$  é equidistante às retas suporte  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , consequentemente, aos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  pois está na bissetriz externa do ângulo  $C$ . Logo  $P$  equidista das retas suporte  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ , consequentemente, dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , portanto  $P$  está na bissetriz interna do ângulo  $A$ .  $\square$



**Figura 3.21:** As bissetrizes externas de dois ângulos encontram-se na bissetriz interna do terceiro ângulo.

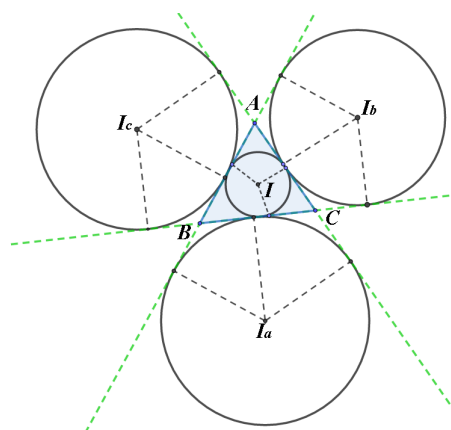
Deste ponto em diante, o ponto de interseção referido no Teorema 3.18 é identificado como  $I_a$ , pois localiza-se na bissetriz interna relativa ao vértice  $A$ , e é citado na definição a seguir:

**Definição 3.3:** (a) O ponto  $I_a$  da bissetriz interna  $AI_a$  do triângulo  $\triangle ABC$  é chamado de *ex-incentro* do triângulo em relação ao vértice  $A$  ou o *ex-incentro* de  $A$ .



- (b) O ponto  $P$  representado na Figura 3.21 é equidistante dos três lados do triângulo  $\triangle ABC$  e é, portanto, o centro de uma circunferência ex-inscrita ( $I_a$ ) tocando o lado  $\overline{BC}$  do triângulo  $\triangle ABC$  nos pontos  $X_a$  e o prolongamento dos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente nos pontos  $Y_a$  e  $Z_a$ . A circunferência ( $I_a$ ) e seu centro  $I_a$  podem ser mencionados como relativos ao lado  $\overline{BC}$ , ou ao vértice  $A$  ou ao ângulo  $\hat{A}$ .

Os dois pontos análogos  $I_b$ ,  $I_c$  e as duas circunferências análogas ( $I_b$ ), ( $I_c$ ) são relativos aos outros dois vértices (respectivamente)  $B$ ,  $C$  ou aos outros dois lados  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$ .



**Figura 3.22:** Os centros tritangentes e as circunferências tritangentes.

A circunferência inscrita ( $I$ ) e as três circunferências ex-inscritas ( $I_a$ ), ( $I_b$ ), ( $I_c$ ) são algumas vezes referidas como as quatro *circunferências tritangentes* do triângulo  $\triangle ABC$ , e seus centros, como os quatro *centros tritangentes* do triângulo.

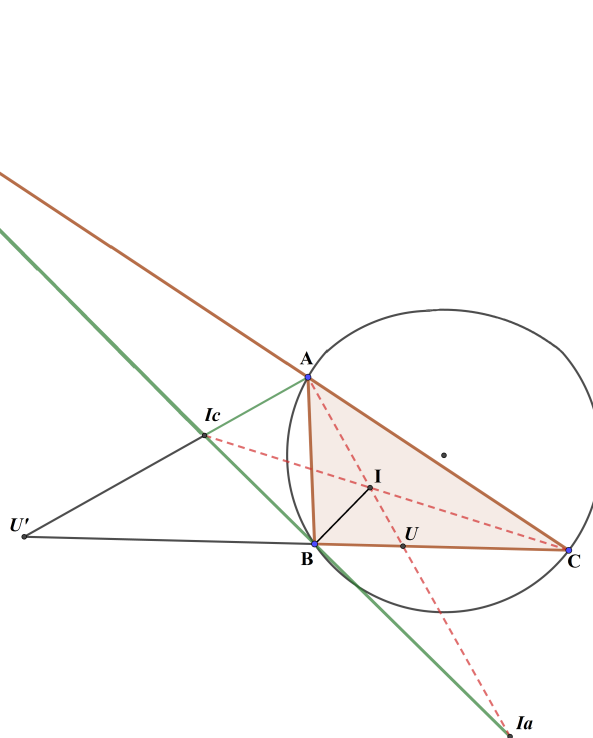
**Corolário 3.19:** Os quatro centros tritangentes de um triângulo estão em seis retas: as bissetrizes (internas e externas) dos ângulos do triângulo. Cada centro tritangente fica em três retas (01 bissetriz interna de um vértice e duas externas dos outros dois vértices), e em cada reta há dois centros tritangentes.

O tamanho da bissetriz de um triângulo deve ser entendido nos termos da Definição 2.22, e no caso da bissetriz externa, é medida entre o vértice e a interseção com o prolongamento do lado oposto a ele.

O Teorema 3.20 diz que os centros tritangentes, tomados dois a dois, definem um segmento harmônico relativo à bissetriz onde estão inseridos, isto é, são conjugados harmônicos desta bissetriz.

**Teorema 3.20:** Dois centros tritangentes dividem, harmonicamente, a bissetriz na qual eles estão localizados.

Na Figura 3.23 é possível visualizar a bissetriz interna  $\overline{AU}$  do vértice  $A$  e a bissetriz externa do vértice  $B$ , que passa por  $I_c$  e termina em um ponto  $E$ , definido na interseção com o lado  $\overline{AC}$ .



**Figura 3.23:** Divisão harmônica do segmento  $\overline{AU}$ .

*Demonstração.* Primeiramente verifiquemos a validade do teorema para as bissetrizes internas.

Na bissetriz interna do vértice  $A$ , seja  $U$  o ponto de interseção do segmento  $\overline{AI_a}$  com o lado  $\overline{BC}$ . Deseja-se mostrar que as interseções  $I, I_a$  dividem harmonicamente o segmento  $\overline{AU}$  que é base no triângulo  $\triangle BAU$ , ou seja:  $\frac{IA}{IU} = \frac{I_aA}{I_aU}$  (veja Figura 3.23).

Aplicando o Teorema das Bissetrizes Internas (Teorema 3.8) sobre o triângulo  $\triangle BAU$  tem-se:

$$\frac{IA}{IU} = \frac{AB}{BU}$$

Aplicando o Teorema das Bissetrizes Externas (Teorema 3.9) sobre o mesmo triângulo, tem-se:

$$\frac{AI_a}{UI_a} = \frac{AB}{BU}.$$

Portanto, vale a relação:

$$\frac{IA}{IU} = \frac{I_aA}{I_aU}.$$

Analogamente, vale para as outras bissetrizes internas.

Agora, verifiquemos para as bissetrizes externas.

Considere  $E$  o ponto de interseção do lado  $\overline{AC}$  com a bissetriz  $\overline{I_cI_a}$ . Deseja-se mostrar que estes centros dividem a bissetriz  $\overline{BE}$  harmonicamente, ou seja,  $\frac{BI_a}{BI_c} = \frac{EI_a}{EI_c}$ .

No triângulo  $\triangle BAE$ ,  $\overline{AI_c}$  é bissetriz interna e  $\overline{AI_a}$  é bissetriz externa.

Pelo Teorema das Bissetrizes Internas, tem-se:

$$\frac{BI_c}{EI_c} = \frac{AB}{EA}.$$

Pelo Teorema das Bissetrizes Externas, tem-se:

$$\frac{BI_a}{EI_a} = \frac{AB}{EA}.$$

Logo,

$$\frac{BI_a}{EI_a} = \frac{BI_c}{EI_c} \Leftrightarrow \frac{BI_a}{BI_c} = \frac{EI_a}{EI_c},$$

o que equivale a dizer que os pontos  $I_a$  e  $I_c$  são harmônicos em relação à bissetriz  $\overline{BE}$ .  $\square$

**Teorema 3.21:** Em um triângulo, um centro tritangente situado em uma bissetriz interna (externa) divide essa bissetriz na proporção da soma (diferença) dos lados que formam o ângulo considerado para o lado oposto a esse ângulo (veja figura 3.23).

Em outras palavras, em um triângulo, fixado um vértice, o incentro divide a bissetriz interna na proporção da soma dos lados adjacentes para o lado oposto. Já na bissetriz externa, o centro tritangente a divide na proporção da diferença dos lados adjacentes para o lado oposto.

*Demonstração.* No triângulo  $\triangle ABC$  (Figura 3.23) sejam seus lados  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{BC} = a$  e  $\overline{AC} = b$ . Além disso, seja  $U'$  o ponto de interseção entre  $\overline{AI_c}$  e o lado  $\overline{BC}$ . Deseja-se verificar a validade da relação  $\frac{AI}{IU} = \frac{(b+c)}{a}$  para as bissetrizes internas e  $\frac{AI_c}{U'I_c} = \frac{(b-c)}{a}$  para as bissetrizes externas.

No triângulo  $\triangle ABC$ , pelo Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$$\frac{BU}{UC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

Aplicando uma propriedade das proporções, tem-se  $\frac{BU}{BU+UC} = \frac{c}{b+c}$  e substituindo  $BU+UC$  por  $a$ , tem-se:

$$\frac{BU}{a} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow BU = \frac{ac}{b+c}. \quad (3.3)$$

Pelo Teorema da Bissetriz Externa, tem-se:

$$\frac{BU'}{CU'} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

Aplicando uma propriedade das proporções  $\frac{BU'}{CU'-BU'} = \frac{c}{b-c}$  e substituindo  $CU'-BU'$  por  $a$  tem-se:

$$\frac{BU'}{a} = \frac{c}{b-c} \Rightarrow BU' = \frac{ac}{b-c}. \quad (3.4)$$

Já nos triângulos  $\triangle BAU$  e  $\triangle BAU'$ , pelo Teorema da Bissetriz Interna, tem-se:

$$\frac{AI}{IU} = \frac{c}{BU} \quad \text{e} \quad \frac{AI_c}{U'I_c} = \frac{c}{BU'}.$$

Por (3.3) e (3.4), substituindo  $BU$  e  $BU'$ , respectivamente, tem-se:

$$\frac{AI}{IU} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{(b+c)}{a}$$

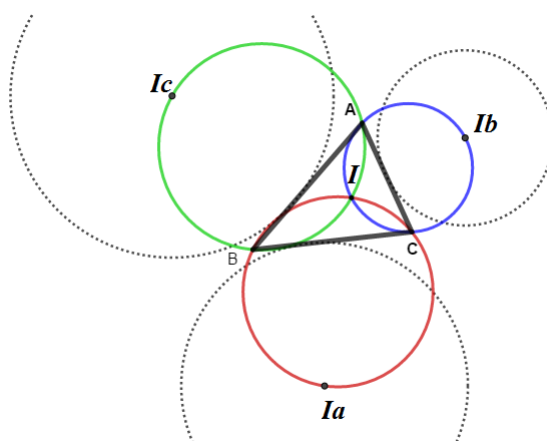
e

$$\frac{AI_c}{U'I_c} = \frac{c}{\frac{ac}{b-c}} = \frac{(b-c)}{a}.$$

□

**Teorema 3.22:** Dois centros tritangentes de um triângulo são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência que passa pelos dois vértices do triângulo que não são colineares com os centros considerados.

O Teorema enunciado (3.22) está ilustrado nas figuras 3.24 e 3.26. Podemos observar a existência de seis circunferências nas quais os lados do triângulo são cordas e os centros tritangentes, tomados dois a dois, constituem diâmetro. Além disso, também será provado que o centro de tais circunferências está na circunferência circunscrita.

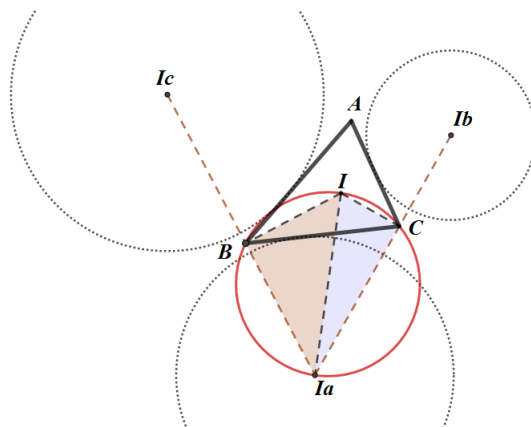


**Figura 3.24:** O incentro  $I$  é diâmetro com os centros ex-inscritos  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$ .

*Demonstração.* Considere o incentro  $I$  e o centro ex-inscrito  $I_a$  (Figura 3.25). Precisamos mostrar que os vértices  $B$  e  $C$  são extremos de uma corda em uma circunferência cujo diâmetro é o segmento  $II_a$ .

As bissetrizes  $\overline{BI}$  (interna de  $B$ ) e  $\overline{BI_a}$  (externa de  $B$ ),  $\overline{CI}$  (interna de  $C$ ) e  $\overline{CI_a}$  (externa de  $C$ ) são perpendiculares entre si; conseqüentemente o triângulo  $\triangle IBI_a$  é retângulo em  $B$ , logo está inscrito em uma circunferência de diâmetro  $II_a$ . O

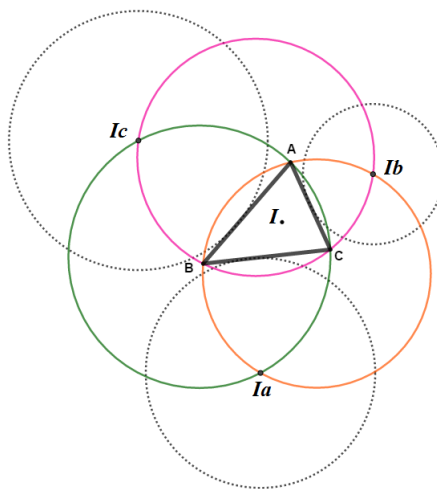
mesmo vale para o triângulo  $\triangle ICI_a$ , que é retângulo em  $C$ , logo está inscrito na mesma circunferência.



**Figura 3.25:** Nos triângulos  $\triangle IBI_a$  e  $\triangle ICI_a$  o lado  $\overline{II_a}$  é diâmetro.

Em relação aos diâmetros  $II_b$  e  $II_c$ , a demonstração é análoga.

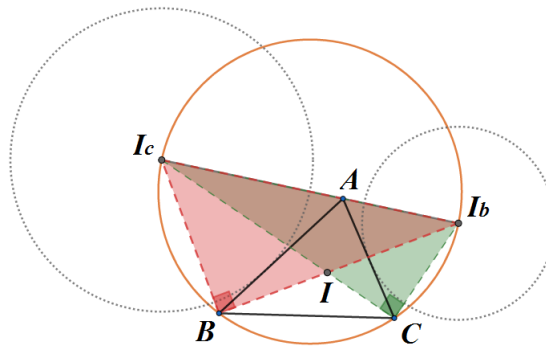
A seguir são considerados os segmentos  $\overline{I_aI_b}$ ,  $\overline{I_aI_c}$  e  $\overline{I_bI_c}$  (Figura 3.26). Afirma-se que estes segmentos são diâmetros de circunferências que satisfazem ao Teorema 3.22.



**Figura 3.26:** Dois dos centros ex-inscritos  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  são entre si, um diâmetro.

Verifiquemos que o segmento  $I_bI_c$  é diâmetro de uma circunferência que contém os vértices  $B$  e  $C$ .

Considere os dois centros ex-inscritos:  $I_b$  e  $I_c$ . As bissetrizes  $BI_b$  e  $BI_c$ ,  $CI_b$  e  $CI_c$ , são perpendiculares entre si. Daí os triângulos  $\triangle I_cBI_b$  e  $\triangle I_cCI_b$  são retângulos, respectivamente, em  $B$  e em  $C$ . Portanto,  $I_bI_c$  é diâmetro (ver Corolário 2.9) de uma circunferência que contém os vértices  $B$  e  $C$ .



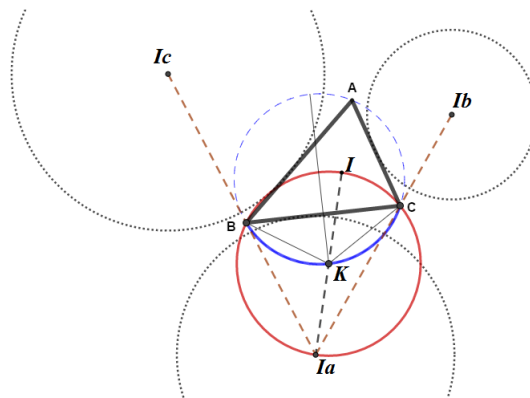
**Figura 3.27:** Os dois centros ex-inscritos  $I_b, I_c$  formam um diâmetro em uma circunferência que contém  $B$  e  $C$ .

□

**Corolário 3.23:** O centro de tais circunferências está na circunferência circunscrita do triângulo.

*Demonstração.* Para o caso da circunferência cujo diâmetro é definido por um centro de circunferência ex-inscrita e o incentro:

Considere a circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$  (Figura 3.28). A mediatriz do lado  $\overline{BC}$  intersecta o segmento  $\overline{II_a}$  em seu ponto médio, digamos:  $K$ , que também é centro da circunferência  $(II_a)$ . Por consequência do Teorema 2.5, a mesma mediatriz intersecta o arco  $\widehat{BC}$ , oposto ao ângulo  $A$ , em seu ponto médio, digamos  $Q$ . O diâmetro  $\overline{II_a}$ , por estar na bissetriz interna do vértice  $A$ , também o intersecta no mesmo ponto. Sendo assim,  $QB = QC$ , logo  $Q$  também é centro da circunferência, portanto  $K = Q$  que está no círculo circunscrito.



**Figura 3.28:**  $K$  é o centro do círculo  $II_a$ .

Para o caso da circunferência cujo diâmetro é definido por dois centros de circunferência ex-inscrita:

Note que a mediatriz de qualquer corda passa pelo ponto médio de todos os diâmetros (Teorema 2.5), logo a mediatriz do lado  $\overline{BC}$  passa pelo diâmetro  $\overline{I_bI_c}$  em seu ponto médio, digamos,  $K'$ . A mesma mediatriz passa pelo ponto médio do arco  $\widehat{BC}$  da circunferência circunscrita que contém o vértice  $A$ , digamos:  $Q'$ , que

também está na bissetriz externa de  $A$ . Por outro lado, temos  $BK' = CK'$  e  $BQ' = CQ'$ , com  $Q'$  e  $K'$  na mesma mediatriz. Assim, os pontos  $K'$  e  $Q'$  coincidem. Portanto o centro desta circunferência ( $I_bI_c$ ) é o ponto médio  $K'$ , e  $K'$  está na circunferência circunscrita do triângulo  $\triangle ABC$ .

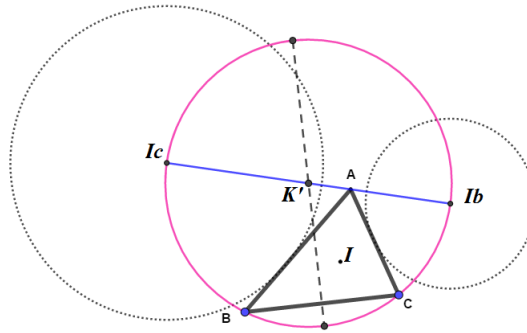


Figura 3.29:  $K'$  é o centro do diâmetro  $I_bI_c$ .

□

Os pontos  $K$  e  $K'$  são as extremidades do diâmetro da circunferência circunscrita do triângulo  $\triangle ABC$ , perpendicular ao lado  $\overline{BC}$ . Note que  $K$  é ponto médio do arco  $\widehat{BC}$  que não contém o vértice  $A$ , e  $K'$  é ponto médio do arco  $\widehat{BC}$  que contém  $A$ , além disso, ambos estão na mediatriz do lado  $\overline{BC}$ .

Se forem construídos os diâmetros  $LL'$ ,  $MM'$  da circunferência circunscrita, analogamente ao segmento  $\overline{KK'}$ , isto é, perpendiculares, respectivamente, aos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , podem desempenhar cada um o mesmo papel que  $\overline{KK'}$  (Figura 3.30).

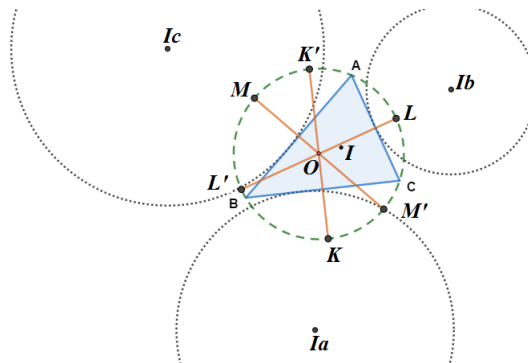
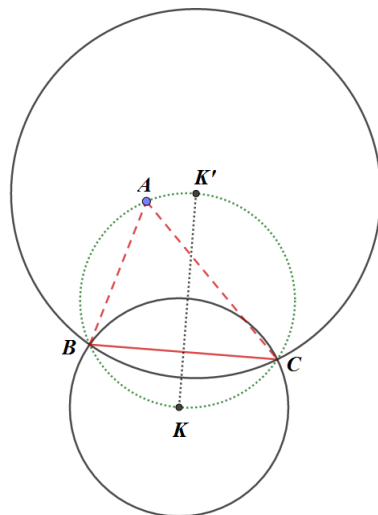


Figura 3.30:  $LL'$  e  $MM'$ , assim como  $KK'$  são diâmetros da circunferência circunscrita.

**Teorema 3.24:** Os quatro centros tritangentes  $I, I_a, I_b$  e  $I_c$  de um triângulo  $\triangle ABC$  estão em seis circunferências que passam por um par de vértices do triângulo e têm como centro os pontos médios dos arcos definidos por estes vértices, em sua circunferência circunscrita.

**Teorema 3.25:** Se um triângulo variável tem uma base fixa e uma circunferência circunscrita fixa, os centros tritangentes do triângulo descrevem duas circunferências

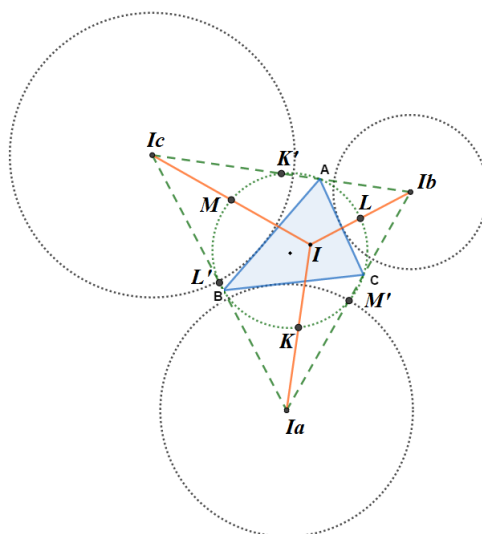
passando pelos dois vértices fixos e tendo como centro as extremidades do diâmetro perpendicular ao lado fixo.



**Figura 3.31:** Os círculos de centro:  $K$  e  $K'$  existem, independentemente da posição do vértice  $A$ , no circuncírculo.

Se a circunferência circunscrita do triângulo  $\triangle ABC$  e o lado  $\overline{BC}$  forem dados, as circunferências  $(II_a)$  (Figura 3.28) e  $(I_bI_c)$  (Figura 3.29) são determinadas, independentemente da posição do vértice  $A$  na circunferência circunscrita.

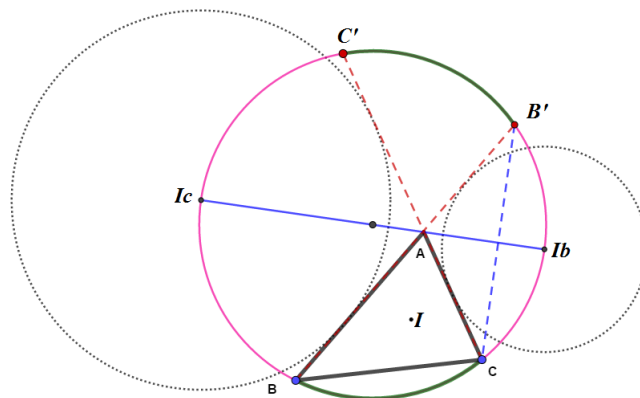
**Corolário 3.26:** Os pontos médios  $K, K', M, M', L, L'$ , dos seis segmentos determinados pelos quatro centros tritangentes  $\overline{II_a}, \overline{I_bI_c}, \overline{II_c}, \overline{I_bI_a}, \overline{II_b}$  e  $\overline{I_aI_c}$  de um triângulo estão na circunferência circunscrita do triângulo.



**Figura 3.32:** Os pontos médios  $K, K', M, M', L, L'$  pertencem ao circuncentro.



**Teorema 3.27:** O produto das distâncias de dois centros tritangentes de um triângulo, medidas a partir do vértice colinear com eles, é igual ao produto dos dois lados adjacentes ao vértice.



**Figura 3.33:** Vale a relação:  $I_c A \cdot A I_b = AB \cdot AC$ .

O Teorema 3.27 vale para os diâmetros formados por dois centros tritangentes, sejam eles dois centros ex-inscritos ou sejam um centro ex-inscrito e o incentro.

*Demonstração.* Inicialmente, considere a situação proposta na Figura 3.33 e os centros ex-inscritos  $I_b$  e  $I_c$  colineares ao vértice  $A$ . Deseja-se mostrar que  $I_c A \cdot A I_b = AB \cdot AC$ .

Seja  $B'$  e  $C'$  as interseções da circunferência  $(I_b I_c)$  com as retas, respectivamente,  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ . Pelo Teorema das Cordas (Teorema 2.12), temos:

$$AC' \cdot AC = AB \cdot AB'$$

e

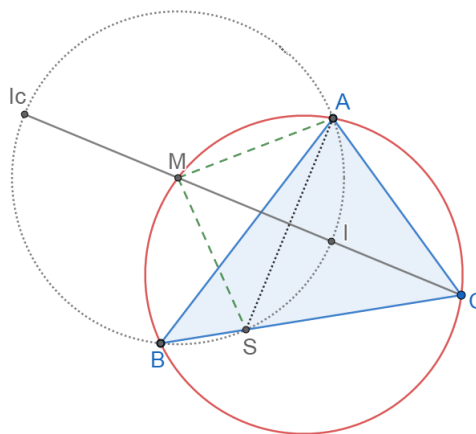
$$I_c A \cdot A I_b = AB \cdot AB'$$

O vértice  $A$  está sobre um diâmetro e os ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{C'AB'}$  são opostos pelo vértice, assim os arcos  $\widehat{BC}$  e  $\widehat{B'C'}$  são congruentes (Teorema 2.11), logo os ângulos  $\widehat{C'CB'}$  e  $\widehat{BB'C}$ , inscritos na circunferência, são congruentes. Dessa forma, o triângulo  $\triangle B'AC$  é isósceles de base  $\overline{B'C}$ , portanto,  $AB' = AC$ . Substituindo na segunda igualdade, tem-se:

$$I_c A \cdot A I_b = AB \cdot AC.$$

Agora considere o centro ex-inscrito  $I_c$ , o incentro  $I$  e o vértice  $C$ , que são colineares (Figura 3.34). Deseja-se mostrar a relação:

$$CI \cdot C I_c = AC \cdot BC.$$



**Figura 3.34:** Vale a relação:  $II_c.I_cC = AC.BC$ .

Seja a circunferência  $(M)$  e seu diâmetro  $\overline{II_c}$ , e  $S$  a interseção desta circunferência com o lado  $\overline{BC}$ . Temos que  $I_c\widehat{AI} \equiv I_c\widehat{SI} = 90^\circ$  pois estão inscritos na circunferência, e  $\overline{MA} \equiv \overline{MS}$  pois são raios da circunferência, logo  $\overline{I_cA} \equiv \overline{I_cS}$ , e assim os triângulos  $\triangle I_cAI$  e  $\triangle I_cSI$  são congruentes. Desta forma  $AI = IS$  e  $\overline{I_cC}$  é mediatriz da corda  $\overline{AS}$ , portanto  $AC = SC$ .

Aplicando o Teorema 2.15 (Potência do ponto) nos segmentos  $\overline{I_cC}$  e  $\overline{BC}$ , temos  $CI.CI_c = CS.BC$ . Como  $AC = SC$  temos a relação esperada.

Da mesma forma vale para os outros pares de centros tritangentes.  $\square$

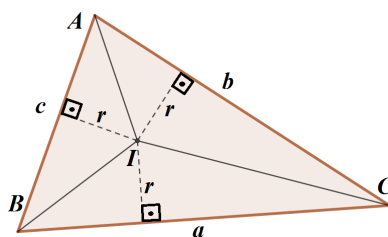
### 3.5 Raios Tritangentes

**Notação:** Salvo indicação em contrário, o *raio da circunferência inscrita* (ou, simplesmente, o *inraio* de um triângulo) será denotado por  $r$ , e os *raios das circunferências ex-inscritas* (ou, mais brevemente, o *exraio* dos vértices  $A, B, C$ ) do triângulo  $\triangle ABC$  por  $r_a, r_b, r_c$ , respectivamente. Os quatro raios serão referidos como *raios tritangentes* do triângulo  $\triangle ABC$ .

O teorema a seguir relaciona o inraio  $r$  de um triângulo  $\triangle ABC$ , sua área  $(ABC)$  e o semiperímetro  $p$ .

**Teorema 3.28:** Seja  $(ABC)$  a área do triângulo  $\triangle ABC$  em que  $a = BC, b = AC$  e  $c = AB$ . Seja  $2p = a + b + c$  seu perímetro. O inraio  $r$  de um triângulo é igual à área  $(ABC)$  dividida pelo semiperímetro  $p$ .

*Demonstração.* Se  $(ABC)$  é a área do triângulo  $\triangle ABC$ , verificaremos que  $(ABC) = pr$ . Temos:



**Figura 3.35:** O inraio  $r$  é altura dos três triângulos de bases  $a$ ,  $b$  e  $c$

$$(ABC) = \text{área}(ABI) + \text{área}(BCI) + \text{área}(CAI)$$

Note que os três triângulos tem altura igual ao inraio  $r$ . Daí:

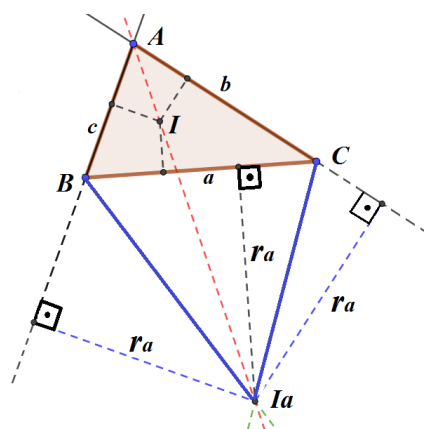
$$(ABC) = \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb$$

Deixando  $r$  em evidência, chegamos a igualdade:

$$(ABC) = \frac{1}{2}r(a + b + c) = pr.$$

□

**Teorema 3.29:** Seja  $(ABC)$  a área do triângulo  $\triangle ABC$  em que  $a = BC$ ,  $b = AC$  e  $c = AB$ . Seja  $2p = a + b + c$  seu perímetro. Um exraio  $r_a$  de um triângulo  $\triangle ABC$  é igual à área  $(ABC)$  dividida pela diferença entre  $p$  e o lado  $a$ .



**Figura 3.36:**  $r_a$  é altura dos três triângulos de base  $a$ ,  $b$  e  $c$

Deseja-se mostrar que  $r_a = \frac{(ABC)}{(p-a)}$ . Para os exraios  $r_b$  e  $r_c$  é análogo.

*Demonstração.* Se  $(ABC)$  é a área do triângulo  $\triangle ABC$ , então:

$$(ABC) = \text{área}(ABI_a) + \text{área}(ACI_a) - \text{área}(BCI_a).$$

Como  $r_a$  é altura dos três triângulos de base  $a$ ,  $b$  e  $c$ , tem-se:

$$(ABC) = \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a$$

e deixando  $\frac{1}{2}r_a$  em evidência, e substituindo  $b + c$  por  $2p - a$ , temos:

$$\begin{aligned} (ABC) &= \frac{1}{2}r_a(b + c - a) \\ &= \frac{1}{2}r_a(2p - a - a) \\ &= r_a(p - a). \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.30:** O produto dos quatro raios tritangentes de um triângulo é igual ao quadrado de sua área, ou seja,  $r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = (ABC)^2$ .

*Demonstração.* Temos que a área  $(ABC)$  de um triângulo pode ser calculada por:

$$(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados e  $p$  é o semiperímetro do triângulo  $ABC$ . Tal fórmula é conhecida como *Fórmula de Heron* e sua demonstração pode ser encontrada no artigo: “*Pitágoras, Heron, Brahmagupta...*” ([5]).

Tomando o produto entre os raios tritangentes, e aplicando o Teorema 3.29 e a *Fórmula de Heron*, temos:

$$\begin{aligned} r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c &= \frac{(ABC)}{p} \cdot \frac{(ABC)}{(p-a)} \cdot \frac{(ABC)}{(p-b)} \cdot \frac{(ABC)}{(p-c)} \\ &= \frac{(ABC)^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \frac{(ABC)^4}{(ABC)^2} = (ABC)^2. \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.31:** O inverso do inraio é igual à soma dos inversos dos três exraios do triângulo, ou seja,

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

*Demonstração.* Aplicando os resultados obtidos no Teorema 3.29, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{(p-a)}{(ABC)} + \frac{(p-b)}{(ABC)} + \frac{(p-c)}{(ABC)} \\ &= \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{(ABC)} \\ &= \frac{3p - (a+b+c)}{(ABC)} \\ &= \frac{3p - (2p)}{(ABC)} = \frac{p}{(ABC)} \\ &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.32:** O inverso do inraio de um triângulo  $\triangle ABC$  é igual a soma dos inversos das alturas do triângulo dado, ou seja,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

em que  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$  são suas alturas.

*Demonstração.* Seja um triângulo  $\triangle ABC$  e suas alturas  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$ . Tem-se:

$$\begin{aligned} 2S &= 2pr = ah_a = bh_b = ch_c \\ &= \frac{2p}{\frac{1}{r}} = \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} \end{aligned}$$

e, por propriedade das proporções,

$$= \frac{2p}{\frac{1}{r}} = \frac{(a+b+c)}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}}.$$

Uma vez que  $2p = (a+b+c)$ , temos:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

□

**Corolário 3.33:** A soma dos inversos dos exraios de um triângulo é igual à soma dos inversos das alturas.

*Demonstração.* Como já foi mostrado no Corolário 3.31,

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

mas pelo Teorema 3.32

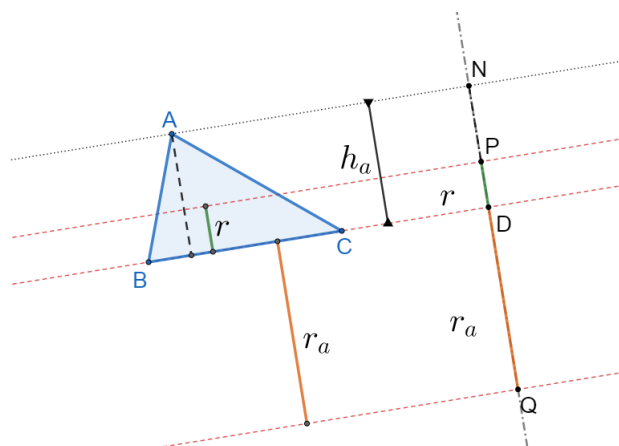
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

Portanto,

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

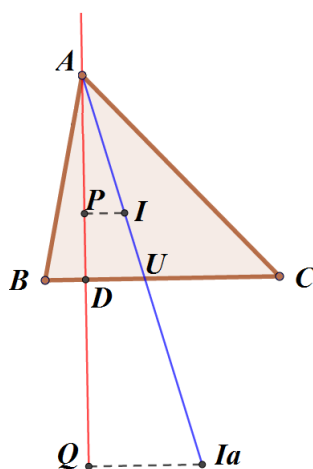
□

**Teorema 3.34:** Dados um triângulo  $\triangle ABC$ , seu inraio  $r$  e seu exraio  $r_a$  (ou  $r_b$  ou  $r_c$ ), relativo ao lado  $a$  (ou  $b$  ou  $c$ ). Se em uma reta arbitrária os segmentos  $PD = r$ ,  $DQ = r_a$  (ou  $DQ = r_b$  ou  $DQ = r_c$ ) são transportados em sentidos opostos, e é construído  $N$  o conjugado harmônico de  $D$  em relação a  $P$  e a  $Q$ , então o segmento  $\overline{ND}$  é congruente à altura  $h_a$  (ou  $h_b$  ou  $h_c$ ) do triângulo.



**Figura 3.37:**  $r$  e  $r_a$  foram transportados em sentidos opostos.

O Teorema 3.34 sugere que, em um triângulo  $\triangle ABC$ , uma altura  $\overline{AD}$ , relativa ao vértice  $A$ , é dividida harmonicamente pelos pontos  $P$  (interno de  $\overline{AD}$ ) e  $Q$  (externo de  $\overline{AD}$ ) desde que  $PD = r$  e  $DQ = r_a$ , veja Figura 3.38:



**Figura 3.38:**  $A$ ,  $P$ ,  $D$  e  $Q$  são pontos harmônicos.

*Demonstração.* Como mostrado no Teorema 3.20, dois centros tritangentes dividem

harmonicamente a bissetriz interna de um ângulo. Pelo Teorema 3.3 os pontos  $A, P, D$  e  $Q$  são harmônicos, tais que  $\frac{QD}{DP} = \frac{QA}{PA} = \frac{p}{q}$ .  $\square$

**Corolário 3.35:** Em um triângulo  $\triangle ABC$  em que  $a = BC, b = AC$  e  $c = AB$ , a altura  $h_a$  se relaciona com o inraio  $r$  e o exraio  $r_a$  relativo ao lado  $a$ , pela fórmula:

$$h_a = \frac{2rr_a}{(r_a - r)}.$$

Com este corolário é possível determinar a altura de um triângulo  $\triangle ABC$  relativa a um lado  $a$  se forem conhecidos o inraio e o exraio relativo ao mesmo lado.

*Demonstração.* O ponto  $D$  obviamente divide o segmento  $\overline{QP}$  internamente na razão  $\frac{QD}{DP} = \frac{r_a}{r}$  (Figura 3.38); daí, usando o Corolário 3.2, observando que neste corolário,  $a$  representa o segmento dividido e  $b$  representa o segmento dos pontos divisores; e tomando  $AD = b = h_a, \frac{r_a}{r} = \frac{p}{q}$  e  $PQ = a = (r_a + r)$ , temos:

$$h_a = \frac{2(r_a + r)r_ar}{(r_a^2 - r^2)} = \frac{2rr_a}{(r_a - r)}.$$

As relações para as alturas  $h_b$  e  $h_c$  são análogas.  $\square$

O mesmo resultado também é obtido se forem utilizados os Teoremas 3.29 e 3.30:

$$2S = ah_a = 2pr \quad \text{e} \quad 2S = ah_a = 2(p - a)r_a;$$

nos dois casos, tomando a segunda igualdade e substituindo  $p$ :

$$a(h_a - r) = (b + c)r, \quad \text{e} \quad a(h_a + r_a) = (b + c)r_a,$$

e dividindo, destas, a primeira pela segunda equação, membro a membro obtemos:

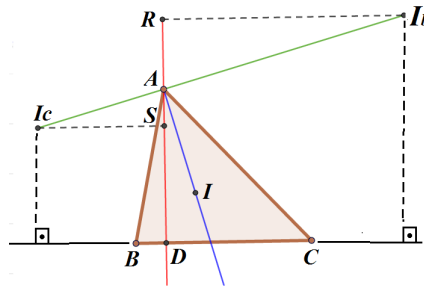
$$\frac{(h_a - r)}{(h_a + r_a)} = \frac{r}{r_a}.$$

Finalmente, isolando  $h_a$ , obtemos  $h_a = \frac{2rr_a}{(r_a - r)}$ .

**Nota:** Os pontos  $P$  e  $Q$  dividem a altura  $AD$  interna e externamente na razão (Teorema 3.1):

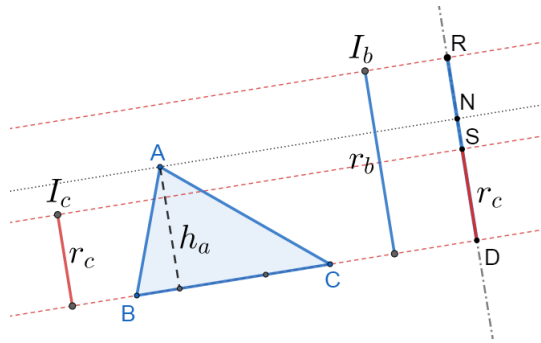
$$\frac{(r_a - r)}{(r_a + r)}.$$

**Teorema 3.36:** Se em uma reta arbitrária os segmentos  $DR = r_b, DS = r_c$  são dispostos, no mesmo sentido, e é construído o conjugado harmônico  $A$  de  $D$  em relação a  $R$  e  $S$ , o segmento  $AD$  é igual à altura  $h_a$  de um triângulo  $\triangle ABC$ .



**Figura 3.39:**  $R, A, S$  e  $D$  são pontos harmônicos.

*Demonstração.* Suponha um ponto  $N$  construído conforme anunciado, ou seja,  $N$  é conjugado harmônico de  $D$  em relação a  $R$  e  $S$  (Figura 3.40). É necessário verificar que  $\overline{A'D} = h_a$



**Figura 3.40:**  $N$  é conjugado harmônico de  $D$  em relação à  $R$  e  $S$ .

Pelo Teorema 3.20 os pontos  $I_b$  e  $I_c$  dividem harmonicamente a bissetriz externa que contém  $\overline{AI_c}$ , sendo  $A$  o vértice de um triângulo (Figura 3.40).

Os pés  $R$  e  $S$  das perpendiculares dos pontos  $I_b$  e  $I_c$  sobre a reta  $\overleftrightarrow{AD}$  dividem o segmento  $\overline{AD}$  harmonicamente (Teorema 3.3) de modo que  $A$  é o conjugado harmônico de  $D$ , portanto,  $\overline{ND} \equiv \overline{AD} = h_a$ .

□

**Corolário 3.37:** A altura  $h_a$  de um triângulo  $\triangle ABC$  se relaciona com os exraios  $r_b$  e  $r_c$  pela fórmula:

$$h_a = \frac{2r_b r_c}{(r_b + r_c)}$$

As fórmulas para  $h_b$  e  $h_c$  são análogas.

Com este corolário, desde que sejam conhecidos dois exraios relativos a dois lados do triângulo, é possível calcular a altura do triângulo relativa ao terceiro lado (Figura 3.39).

*Demonstração.* O ponto  $D$  obviamente divide o segmento  $RS = r_b - r_c$  externamente na razão  $\frac{RD}{SD} = \frac{r_b}{r_c}$ ; daí, usando o Corolário 3.2 e tomando  $ND = b = h_a$ ,  $RS = a =$



$(r_b - r_c), \frac{r_b}{r_c} = \frac{p}{q}$  ( $p$  está para  $r_b$  assim como  $q$  está para  $r_c$ ) tem-se:

$$h_a = \frac{2(r_b - r_c)r_b r_c}{(r_b^2 - r_c^2)} = \frac{2r_b r_c}{(r_b + r_c)}.$$

Outro modo de obter este resultado é pelo Teorema 3.29:

$$2S = ah_a = (a + c - b)r_b \quad \text{e} \quad 2S = ah_a = (a + b - c)r_c;$$

consequentemente:

$$a(h_a - r_b) = (c - b)r_b, \quad \text{e} \quad a(r_c - h_a) = (c - b)r_c,$$

e dividindo as equações membro a membro:  $\frac{(h_a - r_b)}{(r_c - h_a)} = \frac{r_b}{r_c}$ .

Isolando  $h_a$ , obtemos:

$$h_a = \frac{2r_b r_c}{(r_b + r_c)}.$$

□

**Nota:** Pelo Teorema 3.1 os pontos  $S, R$  dividem a altura  $\overline{AD}$  interna e externamente na razão  $\frac{(r_b - r_c)}{(r_b + r_c)}$ .

Considere agora um triângulo  $\triangle ABC$  e sua circunferência circunscrita de centro  $O$  e raio  $R$ .

Seja  $A'$  o ponto médio do lado  $\overline{BC}$  e sejam  $X, X_a, X_b$  e  $X_c$  os pés das perpendiculares dos centros tritangentes, respectivamente,  $I, I_a, I_b, I_c$ , sobre o lado  $\overline{BC}$ . Seja  $\overline{IJ}$  um segmento paralelo ao lado  $\overline{BC}$ , a partir do centro  $I$  e que intersecta tanto o diâmetro  $\overline{KK'}$  no ponto  $K''$ , quanto o prolongamento de  $\overline{I_a X_a}$ , produzindo  $J$ .

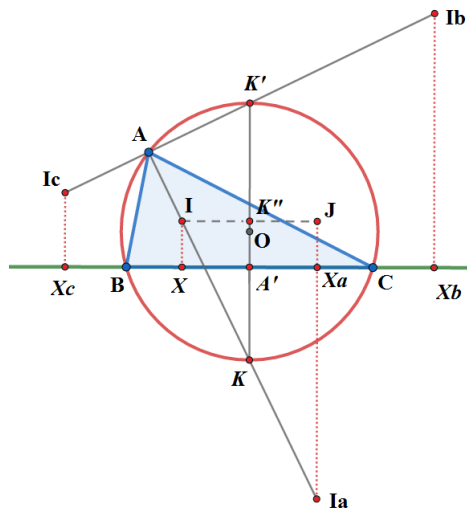


Figura 3.41: Triângulo  $\triangle ABC$  e sua circunferência circunscrita

**Teorema 3.38:** Em um triângulo  $\triangle ABC$ , conhecidos o raio  $R$  da circunferência circunscrita e o lado  $a$  (ou respectivamente:  $b, c$ ), obtemos  $(r_a - r)$  (ou respectivamente  $(r_b - r), (r_c - r)$ ), ou seja,

$$(r_a - r) = 2 \left[ R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \right]$$

O Teorema (3.38) relaciona um lado  $a$  do triângulo, o raio da circunferência circunscrita, e a diferença entre o exraio relativo ao lado  $a$  e o inraio, e para os demais lados é análogo.

*Demonstração.* Considere o lado  $\overline{BC}$  e  $BC = a$ , além disso, suponha que sejam conhecidas as medidas  $R$  e  $a$ . Deseja-se verificar que a diferença  $(r_a - r)$  pode ser obtida.

Sendo o ponto  $K$  o ponto médio do lado  $\overline{I_a I_a}$  (Teorema 3.22) do triângulo  $\triangle I J I_a$ , temos:

$$A'K + A'K'' = KK'' = \frac{1}{2} I_a J = \frac{1}{2} (I_a X_a + X_a J),$$

mas

$$A'K'' = X_a J = r \quad \text{e} \quad I_a X_a = r_a;$$

então:  $A'K = \frac{1}{2}(r_a - r)$ .

Por outro lado, observando na Figura 3.41,  $A'K$  pode ser determinado ao aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $\triangle A'O C$ , dando-nos:  $(OC)^2 = (A'O)^2 + (A'C)^2$ , em que  $A'O = R - A'K$ , daí,  $A'K = R - A'O$ . Além disto,  $A'C = \frac{a}{2}$  e  $OC = R$ .

Fazendo as devidas substituições, obtemos a relação:

$$A'K = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Além disso,

$$(r_a - r) = 2A'K.$$

Portanto, quando  $R$  e  $a$  são dados, o segmento  $A'K$  é determinado, então tem-se os parâmetros:  $R, a, (r_a - r)$ .  $\square$

O Teorema 3.39 é semelhante ao Teorema 3.38, no entanto a relação está para a soma de dois exraios em vez de a diferença entre o inraio e um exraio.

**Teorema 3.39:** Em um triângulo  $\triangle ABC$ , conhecidos o raio  $R$  da circunferência circunscrita e a medida do lado  $a$  (ou respectivamente:  $b, c$ ), obtemos  $(r_b + r_c)$  (ou respectivamente:  $(r_a + r_c), (r_a + r_b)$ ).

*Demonstração.* Considere em um triângulo o lado  $\overline{BC}$  cuja medida é  $a$ . Conhecido o raio  $R$  da circunferência circunscrita, deseja-se mostrar que é possível determinar a soma dos exraios relativos aos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ .

Observe na Figura 3.41 que o ponto  $K'$  é o ponto médio do lado  $\overline{I_b I_c}$  do trapézio  $I_b I_c X_c X_b$ , conforme mostrado no Teorema 3.22, daí tem-se:

$$A'K' = \frac{1}{2}(I_b X_b + I_c X_c) = \frac{1}{2}(r_b + r_c).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A'K' &= K'K - A'K \\ &= 2R - \left[ R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \right] \\ &= R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}. \end{aligned}$$

Além disso,  $(r_b + r_c) = 2A'K'$ . Assim tem-se os parâmetros:  $R$ ,  $a$ ,  $(r_b + r_c)$ .  $\square$

Resultados análogos são obtidos considerando os lados  $b = \overline{AC}$ ,  $c = \overline{AB}$  do triângulo e o circundiâmetro perpendicular a esses lados.

**Corolário 3.40:** A soma dos exraios de um triângulo é igual ao inraio aumentado quatro vezes o raio da circunferência circunscrita, ou seja,

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

Este corolário é uma consequência direta dos Teoremas 3.38 e 3.39.

*Demonstração.* Note na Figura 3.41 que  $KK' = 2R = A'K + A'K'$ . Substituindo nesta equação as relações mostradas nos teoremas citados, temos:

$$2R = \frac{(r_a - r)}{2} + \frac{(r_b + r_c)}{2} = \frac{(r_a - r + r_b + r_c)}{2},$$

daí,

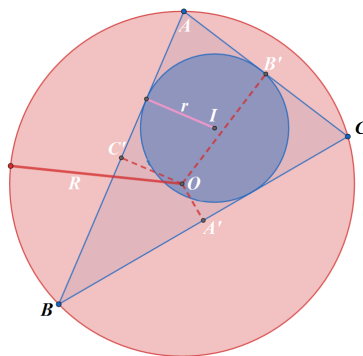
$$4R + r = r_a + r_b + r_c.$$

$\square$

A seguir é apresentado o *Teorema de Carnot*, que relaciona as distâncias do circuncentro aos lados do triângulo, o inraio e o raio da circunferência circunscrita.

**Teorema 3.41 (Carnot):** A soma das distâncias do circuncentro aos lados de um triângulo é igual ao raio da circunferência circunscrita somado ao inraio.

O Teorema (3.41) diz que  $OA' + OB' + OC' = R + r$  em que  $OA'$ ,  $OB'$  e  $OC'$  são as distâncias do circuncentro  $O$  aos lados, respectivamente,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ ;  $R$  é o raio da circunferência circunscrita, e  $r$  é o inraio. Observe na figura abaixo:



**Figura 3.42:** Teorema de Carnot

*Demonstração.* Verifique na Figura 3.41 que:

$$OA' = OK - A'K.$$

Usando um resultado do Teorema 3.38, tem-se:

$$OA' = R - \frac{1}{2}(r_a - r).$$

Analogamente,  $OB' = R - \frac{1}{2}(r_b - r)$  e  $OC' = R - \frac{1}{2}(r_c - r)$ .

Somando estas equações membro a membro, temos:

$$OA' + OB' + OC' = 3R - \frac{1}{2}(r_a - r) - \frac{1}{2}(r_b - r) - \frac{1}{2}(r_c - r).$$

Consequentemente,

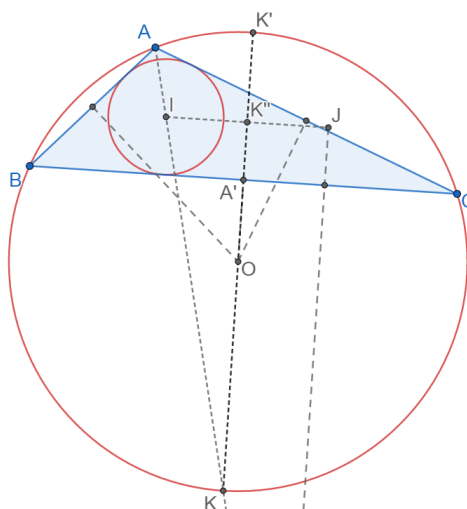
$$OA' + OB' + OC' = 3R - \frac{1}{2}[r_a + r_b + r_c - 3r].$$

Usando o Corolário 3.40:

$$\begin{aligned} OA' + OB' + OC' &= 3R - \frac{1}{2}[4R + r - 3r] \\ &= 3R - \frac{1}{2}[4R - 2r] \\ &= 3R - (2R - r) \\ &= R + r. \end{aligned}$$

□

**Observação:** No caso de um triângulo obtusângulo, a distância do circuncentro ao lado oposto do ângulo obtuso deve ser tomada negativamente, pois o centro da circunferência circunscrita está na região externa ao triângulo. A explicação para este fato é dada a seguir:



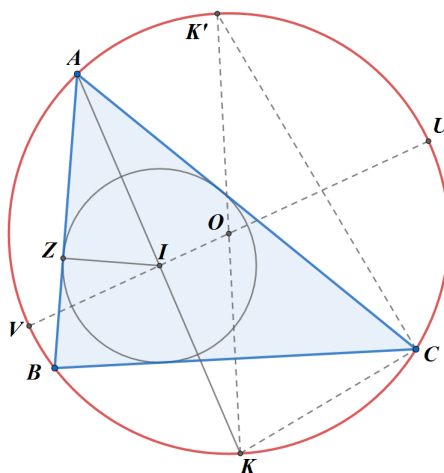
**Figura 3.43:** Teorema de Carnot para triângulos obtusângulos.

De fato, suponha um triângulo obtusângulo no vértice  $A$ . Observe pela Figura 3.43 que o circuncentro encontra-se fora do triângulo. Assim, temos:

$$\begin{aligned} OA' &= A'K - OK \\ \Rightarrow OA' &= -(OK - A'k) \\ \Rightarrow -OA' &= R - A'k \\ \Rightarrow -OA' &= R - \frac{1}{2}(r_a - r) \end{aligned}$$

Portanto, a distância entre o circuncentro e o lado oposto ao ângulo obtusângulo deve ser tomada negativamente.

**Teorema 3.42 (Euler):** A distância  $d$  entre o circuncentro e o incentro de um triângulo é dada pela relação:  $d^2 = R(R - 2r)$ , onde  $R$  e  $r$  são o raio da circunferência circunscrita e o raio da inscrita, respectivamente.



**Figura 3.44:** Teorema de Euler

*Demonstração.* Sendo  $O$  o circuncentro do triângulo  $\triangle ABC$ , e  $I$  seu incentro, a extensão de  $\overline{AI}$  intersecta a circunferência em  $K$ . Como  $\overline{AI}$  é bissetriz interna do vértice  $A$ ,  $K$  é o ponto médio do arco  $\widehat{BC}$ . Tomando o segmento  $\overline{KO}$  e estendendo-o para atravessar a circunferência circunscrita, determina-se o ponto  $K'$ . Assim,  $2R = KK'$  é diâmetro da circunferência circunscrita do triângulo  $\triangle ABC$ .

Seja  $Z$  o pé da perpendicular do incentro  $I$  sobre o lado  $\overline{AB}$ , então  $IZ = r$ . Vamos verificar que o triângulo  $\triangle AZI$  é semelhante ao triângulo  $\triangle KCK'$ . Note que  $\widehat{ZAI} \equiv \widehat{IAC}$  pois  $\overline{AK}$  é bissetriz interna. Note que  $\widehat{AZI} = \widehat{KCK'} = 90^\circ$ , a primeira igualdade se dá por construção e a segunda pelo fato de  $KK'$  ser diâmetro. Daí, a semelhança. Portanto,

$$\frac{IZ}{KC} = \frac{AI}{KK'};$$

e conseqüentemente,  $IZ \cdot KK' = AI \cdot KC$ .

Substituindo  $IZ$  por  $r$  e  $KK'$  por  $2R$ , tem-se  $2Rr = AI \cdot KC$ . Como  $K$  é o centro (veja Teorema 3.22 e Figura 3.28) de uma circunferência que passa pelo incentro  $I$  e pelos vértices  $B$  e  $C$ ,  $KC = BK = IK$  e  $2Rr = AI \cdot IK$ .

Sejam  $V$  e  $U$  as interseções da circunferência circunscrita com a extensão de  $\overline{IO}$ . Pelo Teorema das Cordas (Teorema 2.12),  $AI \cdot IK = VI \cdot IU$ , e tomando

$$VI \cdot IU = (VO - IO) \cdot (UO + IO) = (R - d) \cdot (R + d),$$

temos:

$$2Rr = (R - d) \cdot (R + d)$$

$$\Leftrightarrow 2Rr = (R^2 - d^2)$$

$$\Leftrightarrow d^2 = (R^2 - 2Rr)$$

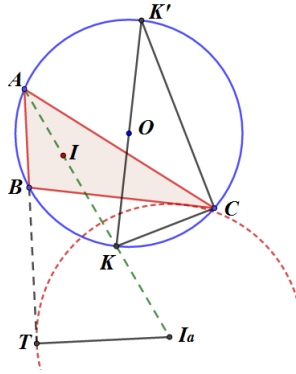
$$\Leftrightarrow d^2 = R(R - 2r).$$

□

O Teorema a seguir relaciona a distância entre o circuncentro e os demais centros tritangentes.

**Teorema 3.43:** As distâncias entre o circuncentro  $O$  e os centros ex-inscritos  $I_a, I_b, I_c$  do triângulo  $\triangle ABC$  são dadas pelas relações:

$$(OI_a)^2 = R(R + 2r_a), \quad (OI_b)^2 = R(R + 2r_b) \quad (OI_c)^2 = R(R + 2r_c)$$



**Figura 3.45:** Os triângulos  $\triangle AT I_a$  e  $\triangle K'CK$  são semelhantes

*Demonstração.* Consideremos o vértice  $A$  e o centro  $I_a$  da circunferência ex-inscrita (Figura 3.45). Deseja-se mostrar inicialmente que a distância entre  $I_a$  e o circuncentro  $O$  é dado por:

$$(OI_a)^2 = R(R + 2r_a).$$

Para as demais relações, a demonstração é análoga.

Seja  $T$  o pé da perpendicular do centro  $I_a$  sobre o lado  $\overline{AB}$ , os demais pontos recebem as mesmas atribuições que na Figura 3.44.

Como  $\overline{AK}$  é bissetriz interna,  $\widehat{TA}K} \equiv \widehat{KAC}$ , e  $\widehat{KAC} \equiv \widehat{KK'C}$  pois estão inscritos no arco  $\widehat{KC}$ . Logo  $\widehat{TA}K} \equiv \widehat{KK'C}$ . Além disso, os triângulos  $\triangle AT I_a$  e  $\triangle K'CK$  são retângulos, respectivamente em  $\widehat{AT}I_a$  e em  $\widehat{K'CK}$ . Portanto eles são semelhantes.

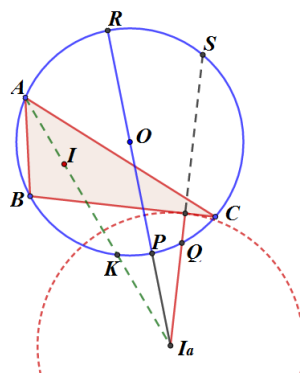
Desta semelhança temos:

$$\begin{aligned} \frac{TI_a}{KC} &= \frac{AI_a}{KK'} \Leftrightarrow TI_a \cdot KK' = KC \cdot AI_a \\ &\Leftrightarrow r_a \cdot 2R = KC \cdot AI_a. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.22, o segmento  $\overline{II_a}$  é diâmetro de uma circunferência de centro  $K$  e que contém o vértice  $C$ . Logo  $KC = KI_a$  e assim temos

$$r_a \cdot 2R = KI_a \cdot AI_a. \quad (3.5)$$

Agora, sejam  $R$  e  $P$  os extremos do diâmetro da circunferência circunscrita cuja extensão passa pelo centro ex-inscrito  $I_a$ . Seja  $\overline{SQ}$  uma corda perpendicular ao lado  $\overline{BC}$  cuja extensão passa pelo centro ex-inscrito  $I_a$ . Observe na Figura 3.46.



**Figura 3.46:** Aplicação da potência do ponto.

Aplicando o Teorema 2.15 (Potência do Ponto) sobre os segmentos  $AI_a$  e  $RI_a$ , e pela equação (3.5) temos:

$$KI_a \cdot AI_a = PI_a \cdot RI_a = 2Rr_a.$$

Note que

$$OI_a = RI_a - R \Rightarrow RI_a = OI_a + R$$

e

$$OI_a = PI_a + R \Rightarrow PI_a = OI_a - R.$$

Assim,

$$2Rr_a = PI_a \cdot RI_a = (OI_a - R)(OI_a + R) = (OI_a)^2 - R^2,$$

ou equivalente,

$$(OI_a)^2 = 2Rr_a + R^2 = R(R + 2r_a).$$

□

Estabelecidas as relações de distância entre o circuncentro e os centros ex-inscritos, o corolário seguinte relaciona as distâncias entre os centros tritangentes.

**Corolário 3.44:**

- (a) Distância entre o incentro um centro ex-inscrito: o quadrado desta distância é igual a quatro vezes o raio da circunferência circunscrita, multiplicado pela diferença entre o raio ex-inscrito considerado e o raio da circunferência inscrita, ou seja:

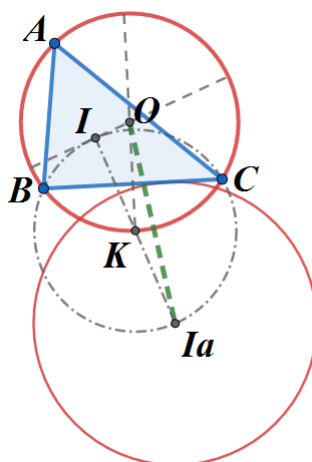
$$(II_a)^2 = 4R(r_a - r), \quad (II_b)^2 = 4R(r_b - r), \quad (II_c)^2 = 4R(r_c - r).$$

- (b) Distância entre dois centros ex-inscritos: o quadrado desta distância é igual a quatro vezes o raio circunscrito, multiplicado pela soma entre os raios ex-inscritos considerados, ou seja:

$$(I_b I_c)^2 = 4R(r_b + r_c), \quad (I_a I_b)^2 = 4R(r_a + r_b), \quad (I_a I_c)^2 = 4R(r_a + r_c).$$



Na demonstração do Corolário 3.44, usaremos a representação na figura 3.47 e o Teorema das Medianas (Teorema 2.19):



**Figura 3.47:** Relações entre o incentro e um centro ex-inscrito.

*Demonstração.* Inicialmente vamos verificar a relação entre o incentro  $I$  e o centro ex-inscrito  $I_a$ , ou seja,  $(II_a)^2 = 4R(r_a - r)$ .

Considere, o triângulo  $\triangle OII_a$  e sua mediana  $\overline{OK}$ . Pelo Teorema das Medianas, temos:

$$2(OK)^2 = (OI)^2 + (OI_a)^2 - \frac{(II_a)^2}{2}.$$

Tomando as relações:  $OI^2 = R(R - 2r)$  (veja o Teorema 3.42),  $OI_a^2 = R(R + 2r_a)$  (veja o Teorema 3.43) e  $OK = R$ ; e substituindo adequadamente, vem:

$$2R^2 = R(R - 2r) + R(R + 2r_a) - \frac{II_a^2}{2}$$

daí, multiplicando tudo por 2, vem:

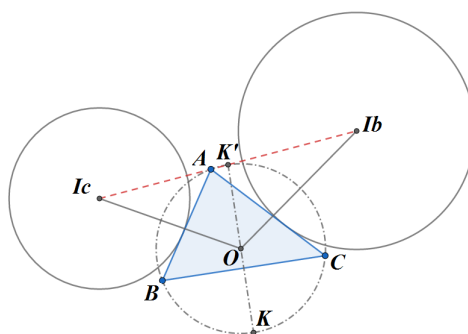
$$4R^2 = 2R(R - 2r) + 2R(R + 2r_a) - II_a^2 \Leftrightarrow II_a^2 = 2R^2 - 4Rr + 2R^2 + 4Rr_a - 4R^2,$$

e finalmente:

$$II_a^2 = -4Rr + 4Rr_a = 4R(r_a - r).$$

De modo semelhante obtém-se resultado análogo para  $II_b$  e  $II_c$ .

Agora considere o triângulo  $\triangle OI_bI_c$ , na Figura 3.48. Vamos verificar a relação entre os centros ex-inscritos  $I_b$  e  $I_c$ , ou seja,  $(I_bI_c)^2 = 4R(r_b - r_c)$ .



**Figura 3.48:** Relações entre dois centros ex-inscritos.

Aplicando o Teorema das Medianas, tem-se:

$$2(OK')^2 = (OI_b)^2 + (OI_c)^2 - \frac{(I_b I_c)^2}{2}.$$

Tomando as relações  $(OI_b)^2 = R(R + 2r_b)$ ,  $(OI_c)^2 = R(R + 2r_c)$  e  $OK' = R$ , temos:

$$\begin{aligned} 2R^2 &= R(R + 2r_b) + R(R + 2r_c) - \frac{(I_b I_c)^2}{2} \\ &= R^2 + 2Rr_b + R^2 + 2Rr_c - \frac{(I_b I_c)^2}{2} \end{aligned}$$

que nos dá:

$$\begin{aligned} \frac{(I_b I_c)^2}{2} &= 2Rr_b + 2Rr_c \\ \Rightarrow (I_b I_c)^2 &= 4Rr_b + 4Rr_c \\ &= 4R(r_b + r_c). \end{aligned}$$

De modo semelhante obtém-se resultado análogo para  $I_a I_b$  e  $I_a I_c$ . □

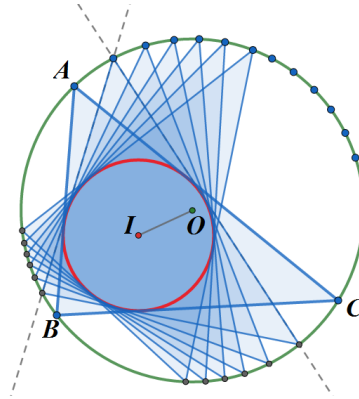
**Teorema 3.45:** Se a distância  $d$  entre os centros de duas circunferências dadas: uma de centro  $O$  e raio  $R$ ,  $(O, R)$ ; e outra de centro  $I$  e raio  $r$ ,  $(I, r)$  satisfaz a relação:

$$OI^2 = d^2 = R(R - 2r),$$

então um número infinito de triângulos pode ser circunscrito ao redor da circunferência  $(I, r)$ , que também devem ser inscritos na circunferência  $(O, R)$ .

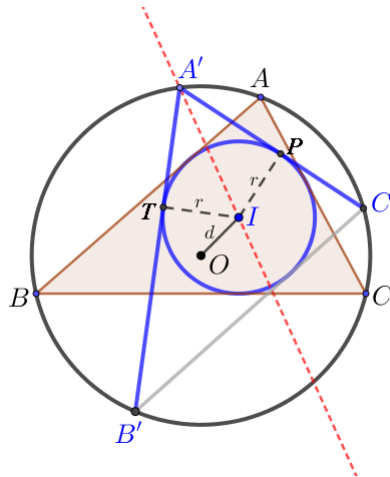
O Teorema (3.45) é conhecido como Teorema de Poncelet<sup>2</sup>. Ele supõe a existência de duas circunferências distintas tais que se aplica o Teorema de Euler (3.42). Ele não associa duas circunferências a um triângulo, mas revela a existência de infinitos triângulos associados a tais circunferências.

<sup>2</sup>Jean Victor Poncelet, matemático francês do século XIX ([3])



**Figura 3.49:** Na condição enunciada no Teorema 3.42 (Euler), existem infinitos triângulos inscritos/circunscritos.

*Demonstração.* Sejam as circunferências  $(I, r)$  e  $(O, R)$  tais que a distância  $d$  entre os centros  $I$  e  $O$  satisfaz a equação:  $d^2 = R(R - 2r)$ . O Teorema de Euler garante a existência de um triângulo  $\triangle ABC$  tal que tais circunferências são, respectivamente, a inscrita e a circunscrita.



**Figura 3.50:** Teorema de Poncelet.

Tomemos aleatoriamente um ponto  $A'$  na circunferência de centro  $O$ . A partir de  $A'$  é possível traçar dois segmentos tangentes à circunferência de centro  $I$ , tais que interceptam a circunferência de centro  $O$  nos pontos  $B'$  e  $C'$ . Sejam  $T$  e  $P$  os respectivos pontos de tangência. Pelo Teorema 2.14 os triângulos  $\triangle A'TI$  e  $\triangle A'PI$  são congruentes, logo  $\overline{A'I}$  é bissetriz do ângulo  $\widehat{B'A'C'}$ .

Temos que a circunferência  $(O, R)$  ainda é circunscrita ao triângulo  $\triangle A'B'C'$  pois contém seus vértices. Resta mostrar que a circunferência  $(I, r)$  está inscrita no mesmo triângulo, ou seja,  $\overline{B'C'}$  tangencia esta circunferência.

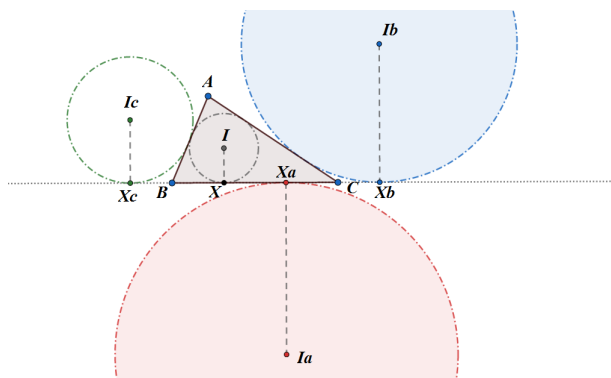
Suponha que a circunferência  $(I, r)$  não está inscrita no triângulo  $\triangle A'B'C'$ . Assim existe uma circunferência  $(I', r')$  inscrita no mesmo, tal que  $d^2 = R(R - 2r')$ , garantido pelo Teorema de Euler. Temos por hipótese que  $d^2 = R(R - 2r)$ , logo,  $r' = r$ .

Por outro lado temos que  $I$  está na bissetriz de  $A'$  de modo que  $IT = IP = r$ , assim  $I = I'$ , ou seja,  $(I', r') = (I, r)$ , o que é uma contradição.  $\square$

### 3.6 Pontos de Tangência

Nesta seção estudaremos as relações existentes entre os pontos de tangência entre um lado do triângulo, ou seu prolongamento, com as circunferências tritangentes, e os vértices do triângulo.

**Notação:** Salvo indicação em contrário, os pontos de tangência das quatro circunferências tritangentes ( $I$ ), ( $I_a$ ), ( $I_b$ ), ( $I_c$ ) do triângulo  $\triangle ABC$  com o lado  $\overline{BC}$  serão indicados, respectivamente, por  $X$ ,  $X_a$ ,  $X_b$ ,  $X_c$ . As letras  $Y$  e  $Z$  serão usadas para os lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente.



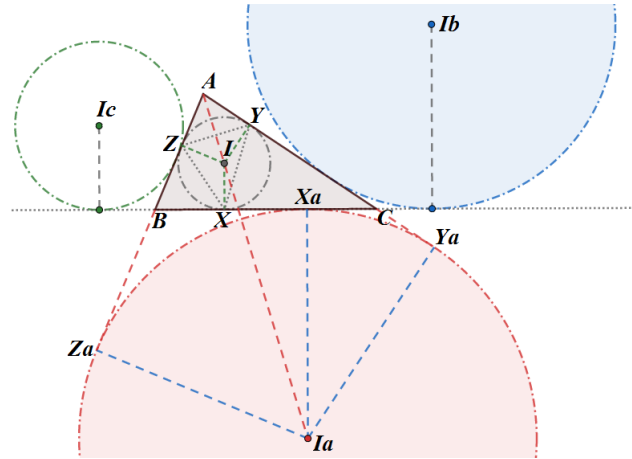
**Figura 3.51:** Os pontos de tangência dos círculos tritangentes ao lado  $BC$  do triângulo.

**Teorema 3.46:** Em um triângulo, a distância entre um vértice e o ponto de tangência da circunferência inscrita ( $I$ ,  $r$ ) com um lado adjacente ao mesmo vértice é igual à diferença entre o semiperímetro  $p$  e a medida do lado oposto.

Considere o triângulo  $\triangle ABC$ , o vértice  $A$  e seu lado oposto  $\overline{BC}$ , sendo  $BC = a$  e  $p = \frac{a+b+c}{2}$ . Mostraremos que:

$$AZ = AY = p - a.$$

A figura seguinte ilustra o teorema anterior (Teorema 3.46):



**Figura 3.52:**  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são pontos de tangência com a circunferência inscrita.

*Demonstração.* Para verificar estas igualdades, considere o vértice  $A$  e seu lado oposto  $BC = a$ . Este Teorema nos diz que  $AZ = AY = p - a$ . Além disso,  $2p = a + b + c = AB + BC + AC$ . A verificação para os demais lados é análoga.

Note que os triângulos  $\triangle AZI$  e  $\triangle AYI$  são congruentes, pois  $ZI = IY$  e  $AI$  é lado comum. Portanto,  $AZ = AY$ . Do mesmo modo,  $BZ = BX$  e  $CX = CY$ . Por outro lado,

$$AZ + AY = AB + AC - BZ - CY.$$

Substituindo  $BZ$  por  $BX$  e  $CY$  por  $CX$ , tem-se:

$$AZ + AY = AB + AC - BX - CX = AB + AC - (BX + CX).$$

Mas  $BX + CX = a$ , daí,

$$AZ + AY = AB + AC - a = AB + AC + BC - BC - a$$

$$AZ + AY = 2p - a - a = 2p - 2a.$$

Então,

$$AZ = AY = p - a.$$

Do mesmo modo,  $BZ = BX = p - b$  e  $CX = CY = p - c$ .

□

**Teorema 3.47:** A distância de um vértice de um triângulo ao ponto de tangência entre um lado adjacente com a circunferência ex-inscrita, relativa ao mesmo vértice, é igual ao semiperímetro do triângulo dado.

Com este teorema estabelecemos uma relação entre a distância de um vértice até o ponto de tangência de um lado adjacente com a circunferência ex-inscrita, relativa ao mesmo vértice, e o semiperímetro  $p$ .

*Demonstração.* Consideremos inicialmente o vértice  $A$  na Figura 3.52. É necessário mostrar que a distância  $AZ_a$  é igual à distância  $AY_a$  e ao semiperímetro  $p$ .

A igualdade entre as distâncias  $AZ_a$  e  $AY_a$  são imediatamente percebidas pois são segmentos tangentes à circunferência ex-inscrita ( $I_a$ ).

Por outro lado,  $BZ_a = BX_a$ , assim como  $CX_a = CY_a$ , pois são tangentes à mesma circunferência. Assim,

$$\begin{aligned} AZ_a + AY_a &= AB + BZ_a + AC + CY_a \\ &= AB + AC + BZ_a + CY_a \\ &= AB + AC + BX_a + CX_a \\ &= AB + AC + BC \\ &= 2p. \end{aligned}$$

Portanto,  $AZ_a = AY_a = p$ .

Analogamente,  $BX_b = BZ_b = CX_c = CY_c = p$ . □

Lembrando que  $AB = c$  e  $AC = b$ , segue o Corolário:

**Corolário 3.48:** Tomado um lado de um triângulo e a respectiva circunferência ex-inscrita, a distância entre um vértice e ponto de tangência referentes a este lado é igual a diferença entre o semiperímetro e o lado oposto a este vértice.

Este corolário resulta da aplicação do Teorema 3.47.

*Demonstração.* Considerando o lado  $\overline{BC}$  e aplicando o Teorema 3.47, tem-se:

$$BX_a = BZ_a = AZ_a - AB = p - c$$

e

$$CX_a = CY_a = AY_a - AC = p - b.$$

Considerando o lado  $\overline{AC}$  e aplicando o Teorema 3.47, tem-se:

$$CX_b = CY_b = BX_b - BC = p - a$$

e

$$AZ_b = AY_b = BZ_b - AB = p - c.$$

Considerando o lado  $\overline{AB}$  e aplicando o Teorema 3.47, tem-se:

$$AY_c = AZ_c = CY_c - AC = p - b$$

e

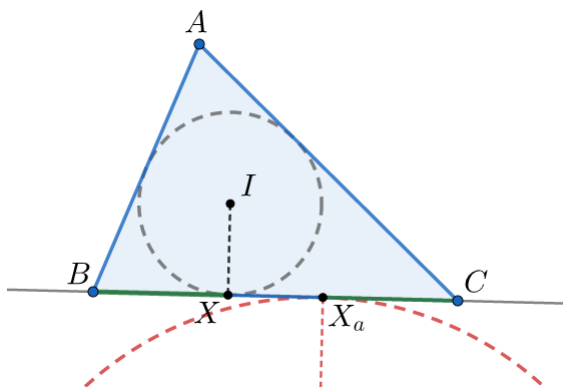
$$BX_c = BZ_c = CX_c - BC = p - a.$$

□

**Definição 3.4:** Dizemos que dois pontos no lado de um triângulo são *pontos isotômicos*, se estiverem equidistantes do ponto médio deste lado. Os segmentos que unem dois

pontos isotômicos ao vértice oposto ao lado considerado são chamados *segmentos isotômicos*.

**Teorema 3.49:** Os pontos de tangência de um lado de um triângulo com as circunferências inscrita e ex-inscrita relativas ao mesmo lado são dois pontos isotômicos.



**Figura 3.53:**  $X$  e  $X_a$  são pontos isotômicos.

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.46 e pelo corolário 3.48, temos:

$$BX = p - b \quad \text{e} \quad CX_a = p - b.$$

Portanto,  $X$  e  $X_a$  equidistam do ponto médio de  $\overline{BC}$ . Analogamente, vale para os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ .  $\square$

**Corolário 3.50:** A distância entre os dois pontos isotômicos a que se refere o Teorema 3.49 é igual a diferença positiva entre os outros dois lados.

Se tomarmos, por exemplo, os pontos isotômicos  $X$  e  $X_a$ , ilustrados na Figura 3.53, temos que  $XX_a = b - c$  se  $b - c > 0$  ou  $XX_a = c - b$  se  $b - c < 0$ . É interessante ressaltar que se  $b = c$  a distância  $XX_a = 0$  pois estes pontos coincidem com o ponto médio do lado  $BC$ .

*Demonstração.* Considere o lado  $\overline{BC}$  no triângulo e a aplicação do Teorema 3.49. Temos:

$$\begin{aligned} XX_a &= BC - BX - CX_a \\ &= a - 2(p - b) \\ &= a - 2p + 2b \\ &= a - (a + b + c) + 2b \\ &= b - c. \end{aligned}$$

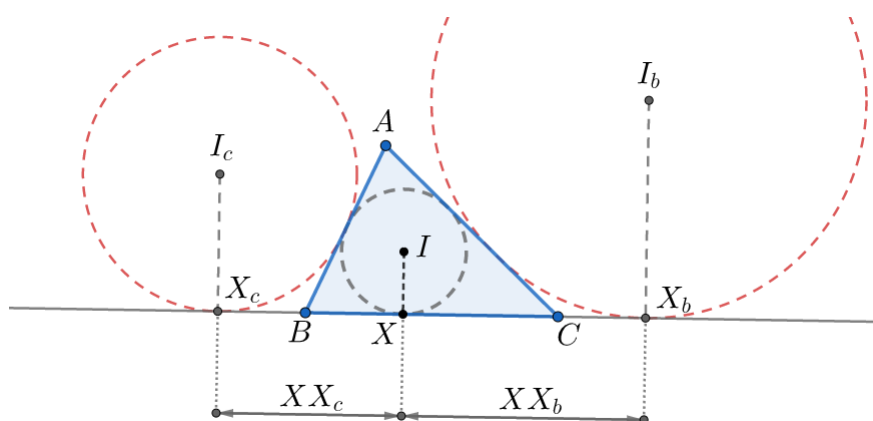
De modo semelhante:

$$YY_b = a - c \quad \text{e} \quad ZZ_c = a - b.$$

$\square$

**Teorema 3.51:** Considerando as circunferências inscrita e ex-inscrita, a distância entre os dois pontos de tangência, um deles em um lado do triângulo e outro em seu prolongamento, é igual ao lado que intersecta o segmento entre eles.

Este teorema refere-se à distância entre dois pontos de tangência tais que um deles é externo ao lado considerado. Sendo assim, é importante observar que, no caso de tomar o lado  $\overline{BC}$ , trata-se dos segmentos  $\overline{XX_c}$  e  $\overline{XX_b}$ .



**Figura 3.54:** Distâncias  $XX_c = AB$  e  $XX_b = AC$ .

*Demonstração.* A verificação pode ser feita se considerados um lado de cada vez. Pelos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ :

$$XX_c = XB + BX_c = p - b + p - a = 2p - (b + a) = c$$

e

$$YY_c = YA + AY_c = p - a + p - b = 2p - (a + b) = c.$$

Pelos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ :

$$ZZ_a = BZ + BZ_a = p - b + p - c = 2p - (b + c) = a$$

e

$$YY_a = YC + CY_a = p - c + p - b = 2p - (c + b) = a.$$

Pelos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ :

$$ZZ_b = ZA + AZ_b = p - a + p - c = 2p - (a + c) = b$$

e

$$XX_b = XC + CX_b = p - c + p - a = 2p - (c + a) = b.$$

□

**Teorema 3.52:** Os dois pontos de tangência de um lado do triângulo com as duas circunferências ex-inscritas, relativas aos outros dois lados são dois pontos isotômicos. A distância entre esses dois pontos de tangência é igual à soma dos outros dois lados.



Por este teorema, tomando a Figura 3.54, os pontos  $X_c$  e  $X_b$  são isotômicos, pois equidistam do ponto médio do lado  $\overline{BC}$ . Além disso, temos  $X_cX_b = AC + AB = b + c$ .

*Demonstração.* Considere o lado  $\overline{BC}$  e os pontos  $X_c$  e  $X_b$  de tangência deste lado com as duas circunferências exinscritas, relativas aos lados, respectivamente,  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  (Figura 3.54). Temos pelo Corolário 3.48:

$$BX_c = CX_c - CB = p - a$$

e

$$CX_b = BX_b - CB = p - a.$$

Logo

$$BX_c = CX_b$$

e eles são isotômicos.

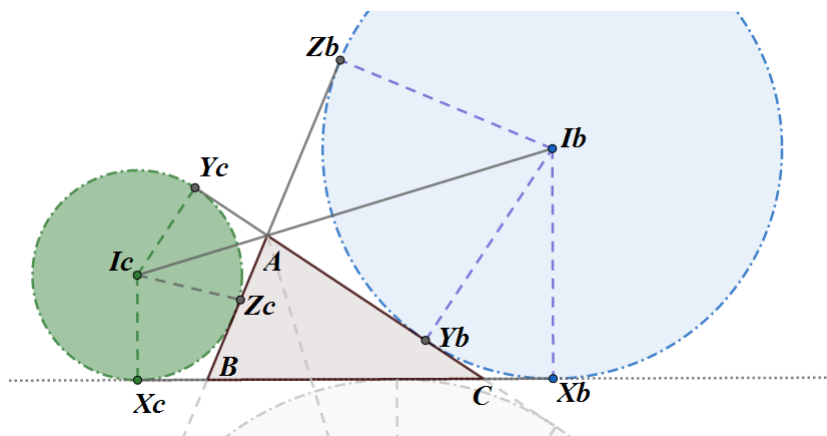
Agora, pelo mesmo corolário:

$$\begin{aligned} X_cX_b &= BX_c + BC + CX_b \\ &= p - a + a + p - a \\ &= 2p - a \\ &= b + c \end{aligned}$$

Considerando os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , o resultados  $Z_bZ_a = a + b$  e  $Y_aY_c = a + c$  são obtidos de modo análogo.  $\square$

**Teorema 3.53:** Tomando dois lados do triângulo e suas respectivas circunferências ex-inscritas, a distância entre os pontos de tangência em um lado é igual a distância entre os pontos de tangência no segundo lado. Além disso, tal distância equivale ao comprimento do terceiro lado.

A Figura 3.55 ilustra o Teorema (3.53) que sugere as igualdades  $Y_bY_c = Z_bZ_c = BC$ :



**Figura 3.55:** Teorema 3.53

*Demonstração.* Considere inicialmente os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  e suas circunferências ex-inscritas. Deseja-se mostrar que  $Y_bY_c = Z_bZ_c = a$ .

Note que

$$Y_b Y_c = CY_c - CY_b \quad \text{e} \quad Z_b Z_c = BZ_b - BZ_c.$$

Mas pelo Teorema 3.47 temos:

$$CY_c = BZ_b = p$$

e pelo Corolário 3.48 temos:

$$CY_b = BZ_c = (p - a),$$

portanto:

$$Y_b Y_c = Z_b Z_c = p - (p - a) = a.$$

□

Aqui se encerra o estudo de aprofundamento das circunferências associadas a um triângulo e suas relações de medida.

### 3.7 Circunferências Associadas a um Triângulo

Conforme foi exposto nas seções anteriores, podemos listar, de forma sucinta, as diversas circunferências apresentadas, não necessariamente na ordem que segue:

- A circunferência Circunscrita;
- A Circunferência Inscrita, que é uma circunferência tritangente;
- As três Circunferências Ex-inscritas, que também são tritangentes;
- Seis circunferências notáveis cujos diâmetros são definidos pelos centros tritangentes tomados dois a dois;
- A Circunferência de Nove Pontos, que contém os pontos médios dos lados do triângulo além dos pontos de Euler e os pés das alturas relativas;
- Por fim, a Circunferência de Apolônio, cujo diâmetro é definido pelo pé da bissetriz interna e seu conjugado externo ao lado do triângulo, se ele existir.

Contando que a Circunferência de Apolônio pode ocorrer ou não, isto é, ocorre três circunferências se o triângulo for escaleno, ocorre duas circunferências se o triângulo for isósceles ou não ocorre caso o mesmo seja equilátero; existem 12, 14 ou 15 circunferências associadas.

# Proposta de Atividades

---

Neste capítulo é apresentado uma proposta de ensino a ser aplicado em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental - podendo ser adequada para o ensino médio; acerca das circunferências associadas a um triângulo, dividida em duas partes.

Na primeira parte, pretendemos que os alunos conheçam a circunferência e seus elementos como: perímetro, raio, área. Para tal, é explorado o conhecimento prévio dos alunos em relação à bicicleta, quando são abordados outros conceitos importantes como: proporcionalidade, diferentes unidades de medida, velocidade periférica (ou velocidade tangencial) e velocidade angular.

Na segunda parte, as atividades estão voltadas para a representação das circunferências associadas ao triângulo, algumas já conhecidas e outras não, utilizando como principal recurso didático o software Geogebra.

Na aplicação destas atividades é presumido que os alunos tenham sido orientados na utilização de régua e compasso em algumas construções básicas e no desenvolvimento de tais construções pelo software.

Utilizando esta ferramenta digital, os estudantes devem estar aptos para construir retas paralelas, retas perpendiculares, triângulo a partir de três segmentos dados, os pontos notáveis de um triângulo, bissetrizes internas e externas, as mediatrizes, as alturas e as medianas, dando ênfase ao circuncentro e ao incentro.

O professor pode adaptar o modo de ministrá-las de acordo com a realidade da turma induzindo-os na representação das circunferências associadas ao triângulo, incluindo as tritangentes, a Circunferência de Nove Pontos e a Circunferência de Apolônio.

## 4.1 Aprendendo na Prática

### 4.1.1 Conhecendo a circunferência e seus elementos

O objetivo da atividade abaixo foi de explorar os conhecimentos do aluno acerca da bicicleta e induzi-lo a relacionar a roda <sup>1</sup> à uma circunferência e, por intuição, associar as ideias de centro, raio, diâmetro e perímetro (comprimento da circunferência). Também foi explorada a conversão entre diferentes sistemas de medidas, além da obtenção do número  $\pi$ .

---

<sup>1</sup>Entenda por *roda da bicicleta* o conjunto das partes elementares: eixo, raios, aro e pneu.

É necessário que eles tenham acesso ao pátio para que manipulem suas bicicletas e realizem as medições propostas, sempre sob minha supervisão. Portanto, os alunos devem ser previamente orientados e aquele que puder, que vá para a escola de bicicleta em uma data combinada. Além disso, foram necessárias fitas métricas para as medições.

#### ATIVIDADE: OS ELEMENTOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

<b>Aplicabilidade:</b>	Anos finais do Ens. Fundamental, e Ensino Médio
<b>Tema:</b>	Relações Geométricas entre Figuras Planas
<b>Conteúdo:</b>	Circunferências
<b>Objetivo:</b>	Identificar circunferência, raio, diâmetro e perímetro.
<b>Materiais:</b>	Bicicleta, fita métrica, fita adesiva tipo crepe e calculadora.
<b>Avaliação:</b>	Participação e teste escrito.
<b>Duração:</b>	50 minutos

#### REALIZANDO MEDIÇÕES

- Utilizando uma fita métrica, verifique as seguintes medidas:
  - O diâmetro<sup>2</sup> externo da roda: Resp.: \_\_\_\_\_
  - O diâmetro<sup>3</sup> interno da roda: Resp.: \_\_\_\_\_
  - Os raios<sup>4</sup>: Resp.: \_\_\_\_\_
  - O raio da roda<sup>5</sup>: Resp.: \_\_\_\_\_
- Meça o perímetro da roda. Esta medida corresponde ao comprimento da circunferência. Para realizá-lo, cole uma fita adesiva em linha reta e em um solo plano, apoie a bicicleta com os pneus alinhados à fita e bem equilibrada, e marque no pneu e no solo o ponto de contato do pneu com o chão. Desloque a bicicleta sobre a fita até que a marcação feita no pneu volte a encontrar o chão e marque o ponto no solo. A medida entre as duas marcações no solo corresponde ao comprimento procurado.
 

A medida encontrada foi: \_\_\_\_\_.
- Use uma calculadora e divida o resultado encontrado no item 2 pelo valor do diâmetro da roda, considerando o pneu. Anote e compare o valor da sua divisão com o valor encontrado pelos outros colegas.
- Você reconhece este resultado? Como ele é conhecido?
 

Resp.: \_\_\_\_\_

*É esperado que os estudantes encontrem valores próximos de 3,1... e associem o resultado ao número  $\pi$ . Além disso, é conveniente verificar a possibilidade do cálculo*

<sup>2</sup>Considerando o pneu.

<sup>3</sup>Considerando o aro da roda.

<sup>4</sup>Considerando as hastes metálicas

<sup>5</sup>Distância do eixo ao aro da roda

*do perímetro, desde que seja conhecido o raio da roda. Incentive os estudantes a calcular o perímetro teórico para as diversas medidas encontradas.*

- Você já ouviu alguém se referir a bicicletas como *aro 14, aro 20, aro 24, aro 29, etc.* O número do aro faz referência ao diâmetro da roda, considerando o aro. Qual é o número do aro de sua bicicleta? Por que esse número não apareceu nas medições realizadas?

Resp.: \_\_\_\_\_

*Os estudantes devem perceber que a medida nominal do aro da bicicleta não está em centímetros, mas em outra unidade de medida: a polegada.*

- Polegada é uma unidade de medida do sistema inglês, que corresponde a 2,54 cm. Calcule o valor em centímetros da medida nominal dos aros citados no item anterior e compare com o diâmetro medido do aro de sua bicicleta. Existe uma correspondência exata ou aproximada? Explique com suas palavras por que existe esta diferença.

Resp.: \_\_\_\_\_

*É esperado que os estudantes utilizem proporção ou regra de três, e percebam que a forma de medir utilizada não oferece precisão, ou ao medir o diâmetro a ponta do eixo não permite que a fita métrica fique em linha reta.*

#### 4.1.2 Velocidades média: periférica e angular

O objetivo da atividade abaixo é de aprofundar nos conhecimentos trabalhados anteriormente, explorando a noção de proporcionalidade na construção de conceitos como velocidade média periférica e angular, também é explorada a conversão entre diferentes sistemas de medidas, além do cálculo de área de um círculo.

Nesta atividade os alunos permanecem em sala de aula, fazem uso de calculadora e de fita métrica. É sensato levar uma bicicleta para a sala.

##### **ATIVIDADE: CALCULANDO VELOCIDADES**

<b>Aplicabilidade:</b>	Anos finais do Ens. Fundamental, e Ensino Médio
<b>Tema:</b>	Expressões algébricas
<b>Conteúdo:</b>	Medidas de comprimento, de ângulos, de áreas de círculos e médias aritméticas.
<b>Objetivo:</b>	Calcular áreas circulares, velocidades médias.
<b>Materiais:</b>	Aferições anteriores e calculadora.
<b>Avaliação:</b>	Participação e teste escrito.
<b>Duração:</b>	50 minutos

##### **CALCULANDO VELOCIDADES**

- Tendo em mãos os resultados obtidos anteriormente e uma calculadora, responda:

Um ciclista que faz um trajeto equivalente a 100 voltas na roda da bicicleta, percorre quantos metros? Resp.: \_\_\_\_\_

Para o ciclista percorrer 1 km são necessárias quantas voltas na roda da bicicleta? Resp.: \_\_\_\_\_

*Os estudantes devem tomar a distância perimetral da roda da bicicleta, que equivale a uma volta completa da mesma. Nas duas questões, é aplicável a proporção.*

- *Velocidade média escalar* ou *linear* é a razão entre uma distância percorrida e o tempo necessário para percorrê-la. Se o ciclista percorrer 1 km em 5 minutos, responda:

Quantos metros ele percorreu, em média, por minuto?

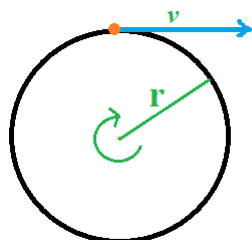
Resp.: \_\_\_\_\_

Quantos metros ele percorreu, em média, por segundo?

Resp.: \_\_\_\_\_

*É conveniente dizer sobre o sistema internacional de medidas - SI. Além disso, questione com os estudantes sobre as unidades de velocidades que eles já ouviram falar. É esperado que digam km/hora, por exemplo. É adequado propor que eles convertam a velocidade calculada do ciclista para a unidade km/hora.*

A *velocidade periférica* ou *tangencial* é a velocidade com que um ponto em uma trajetória circular uniforme se desloca, tendo sua trajetória mudada a cada instante, porém o seu módulo permanece constante.



**Figura 4.1:** O ponto que descreve uma trajetória circular uniforme muda sua direção a todo instante, mas o módulo da velocidade é constante.

*Velocidade média angular* é a razão entre uma quantidade de voltas, giros ou rotações de uma roda ou eixo e o tempo necessário para ocorrerem.

Se o ciclista percorrer 1 km em 5 minutos, responda:

Quantas voltas a roda da bicicleta realizou? E quantas rotações realizou, em média, por minuto?

R: \_\_\_\_\_

- Você já ouviu falar na sigla RPM? RPM significa *rotações por minuto*. Pesquise e descubra onde está presente esta nomenclatura.
- Reflita um pouco: um ciclista anda a uma velocidade média de 50 RPM em uma bicicleta aro 20, enquanto outro ciclista em uma bicicleta de aro 29 anda a 35 RPM. Qual a velocidade periférica de cada um?

R: \_\_\_\_\_

- Coloque a bicicleta sobre o solo, de rodas para cima e gire a mesma observando o vulto deixado pelos raios (hastes metálicas) da roda. Não é preciso ser gênio na matemática para perceber que a região ocupada pelos raios de uma roda aro 20, em movimento, é menor que a região ocupada pelos raios de uma roda aro 29, também em movimento. Considere o diâmetro da roda de sua bicicleta e calcule a medida da região interna da roda. Como é chamada essa medida?

R: \_\_\_\_\_

*Nesta oportunidade, introduzir o cálculo de área da circunferência. É comum os estudantes confundirem erroneamente “área” com “espaço”. Se julgar conveniente, comente que a área refere-se à superfícies (bidimensional) enquanto o espaço refere-se a volume (tridimensional).*

## 4.2 Circunferências em Triângulos utilizando o Geogebra

Nesta seção é pressuposto que o leitor conheça os conceitos básicos de geometria plana, além da utilização das ferramentas básicas disponíveis no software Geogebra.

Ao longo deste trabalho, foi mostrada a existência de certamente 12 e possivelmente 15 circunferências associadas a um triângulo. Possivelmente porque o Círculo de Apolônio (Seção 3.3) não existe se o pé da bissetriz interna coincidir com o ponto médio de um lado do triângulo, o que ocorre em um lado do triângulo isósceles e nos três lados do triângulo equilátero.

De acordo com a Definição 2.1, é suficiente e necessário verificar a existência de um ponto central e uma distância determinada para que exista uma circunferência bem definida. Este é o principal argumento utilizado nesta seção, ocorrendo também a referência aos respectivos teoremas e corolários que fundamentam as afirmativas.

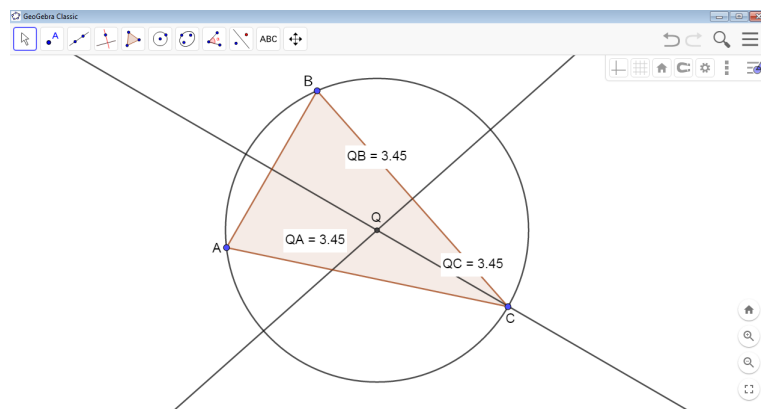
Nas ilustrações que seguem, o triângulo utilizado foi o escaleno e ele é citado como sendo um triângulo qualquer ou simplesmente um triângulo  $\triangle ABC$ , mas o princípio se estende aos triângulos isósceles e aos equiláteros.

A primeira circunferência ilustrada é a *circunferência circunscrita*, veja subseção 2.3.2.

Tome um triângulo qualquer e trace as mediatrizes em pelo menos dois lados do triângulo. Sabemos que a interseção destas mediatrizes é um ponto chamado de *Circuncentro*, denotado por  $O$ . Com centro neste ponto, tracemos a circunferência circunscrita ao triângulo.

Pela ferramenta de medir<sup>6</sup> do Geogebra podemos comprovar que as distâncias entre o circuncentro e cada um dos vértices é a mesma.

<sup>6</sup>Ferramenta de medição de distância, comprimento ou perímetro.

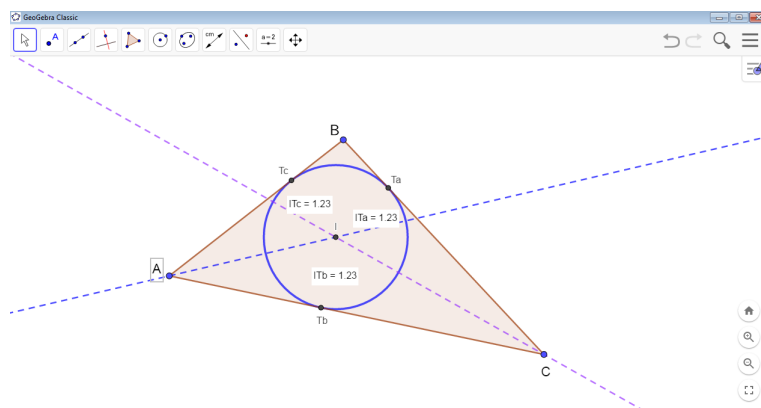


**Figura 4.2:** Circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$ :  $QA = QB = QC$ .

A segunda circunferência ilustrada é a *circunferência inscrita*, conforme apresentada na subseção 2.3.4.

Tome um triângulo qualquer e trace as bissetrizes internas em pelo menos dois vértices do triângulo. Sabemos que a interseção destas bissetrizes é um ponto chamado de *Incentro*, denotado por  $I$ . A partir deste ponto definimos os pés de perpendiculares  $T_a$ ,  $T_b$  e  $T_c$ , respectivamente, sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ . Por fim, tracemos a circunferência inscrita, com centro em  $I$  e que tangencia os três lados do triângulo nos pontos  $T_a$ ,  $T_b$  e  $T_c$ .

Usando também a ferramenta de medir do Geogebra podemos comprovar que as distâncias entre o incentro e cada um dos pontos de tangência é a mesma. Por possuir esta característica, a circunferência inscrita é uma circunferência tritangente.



**Figura 4.3:** Circunferência inscrita no triângulo  $\triangle ABC$ :  $IT_a = IT_b = IT_c$ .

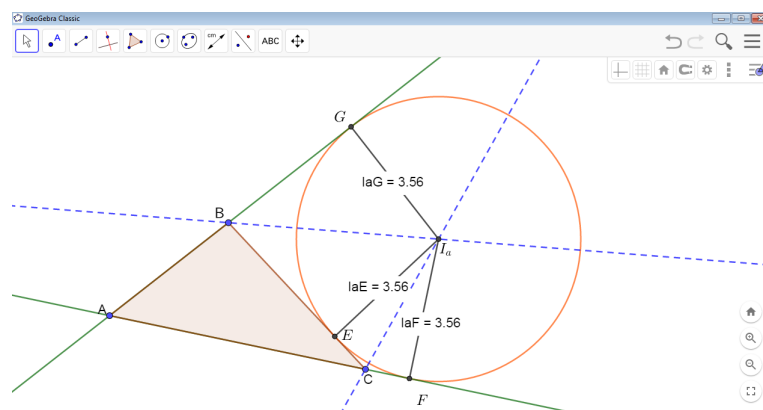
A seguir, vamos verificar em um triângulo a associação com outras três circunferências tritangentes, porém, localizadas no exterior do triângulo e, por este motivo, chamadas de circunferências ex-inscritas (consulte a Definição 3.3 (b), na Seção 3.4).

Tomemos um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer e dois de seus vértices, digamos  $B$  e  $C$ . Tracemos a partir deles as bissetrizes externas. É notável que as bissetrizes externas encontram-se em um ponto, denotado por  $I_a$ . Agora tracemos o prolongamento dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ . Determinemos o pé da perpendicular do ponto  $I_a$  sobre estes prolongamentos e também sobre o lado  $\overline{BC}$ , denotados, respectivamente, por  $E$ ,  $F$  e  $G$ .



Finalmente, tracemos a circunferência de centro  $I_a$  e raio definido pela distância entre  $I_a$  e qualquer um dos pés de perpendicular determinados.

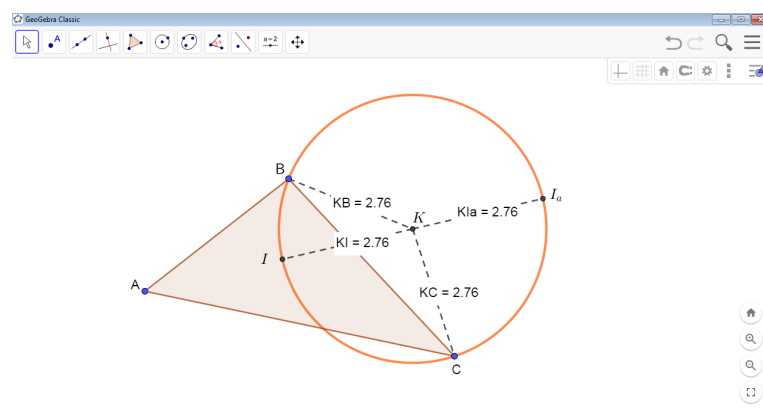
Usando a ferramenta de medição do software, é possível comprovar que as distâncias do ponto  $I_a$  até os pés de perpendicular  $E, F$  e  $G$  são iguais. Portanto, esta circunferência é tritangente, pois tangencia o lado  $\overline{BC}$  e os prolongamentos dos demais lados do triângulo. Analogamente é possível traçar as circunferências exinscritas relativas aos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ .



**Figura 4.4:** Circunferência ex-inscrita no triângulo  $\triangle ABC$ :  $I_aE = I_aF = I_aG$ .

Um triângulo qualquer  $\triangle ABC$  possui, associado a ele, outras três circunferências tais que contêm o incentro  $I$  e dois dos vértices. O centro destas circunferências é o ponto médio entre o incentro e um centro de uma circunferência ex-inscrita. Além disso, esse centro é ponto da circunferência circunscrita (veja Teorema 3.26).

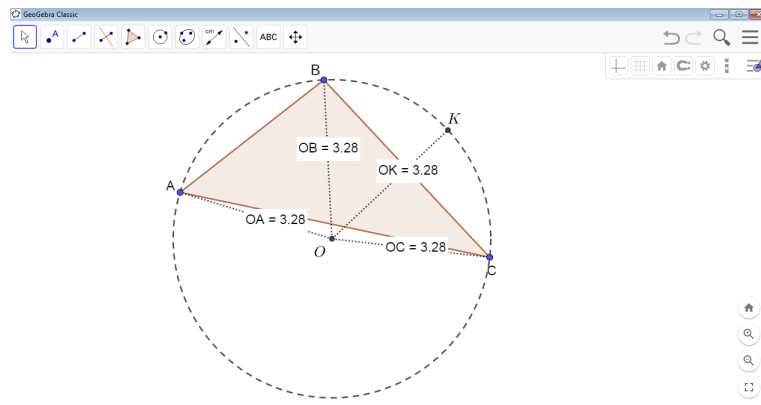
Tomemos o incentro  $I$  de um triângulo  $\triangle ABC$  e o centro  $I_a$  da circunferência ex-inscrita relativa ao lado  $\overline{BC}$ . Tracemos o ponto médio entre eles e chamemos de ponto  $K$ .



**Figura 4.5:** Circunferência ex-inscrita no triângulo  $\triangle ABC$ :  $KI_a = KB = KC = KI$ .

Utilizando a ferramenta de medição do Geogebra podemos confirmar que as distâncias  $KI, KB, KC$  e  $KI_a$  são iguais, portanto  $K$  é centro de uma circunferência que contém os pontos  $I, B, C$  e  $I_a$ .

No mesmo triângulo, determinemos o centro  $O$  da circunferência circunscrita. Com a mesma ferramenta de medição, podemos verificar que as distâncias  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  e  $OK$  são iguais, portanto  $K$  pertence à circunferência circunscrita.

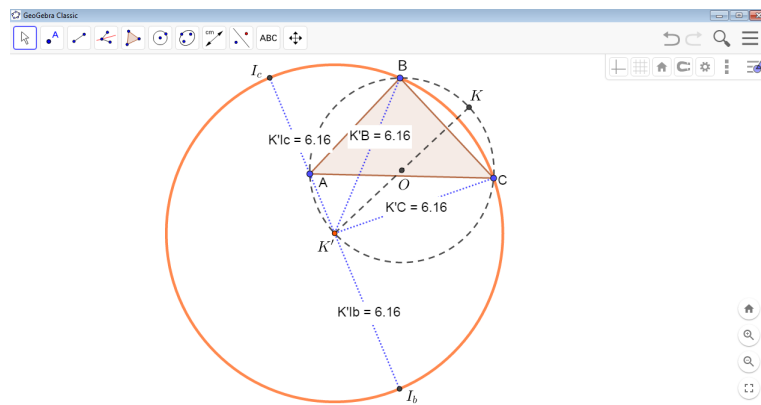


**Figura 4.6:** O centro  $K$  é ponto da circunferência circunscrita.

Analogamente podemos obter outras duas circunferências se tomarmos o incentro  $I$  juntamente com o centro  $I_b$  (ou o centro  $I_c$ ) da circunferência ex-inscrita relativa ao lado  $\overline{AC}$  (ou ao lado  $\overline{AB}$ ), determinando o ponto  $L$  (ou  $M$ ).

A partir dos pontos  $K$ ,  $L$  e  $M$ , podemos verificar a existência de outras três circunferências associadas ao mesmo triângulo  $\triangle ABC$ , tais que contenham dois dos vértices do triângulo e seus respectivos centros da circunferência ex-inscrita. Os centros destas circunferências são os pontos  $K'$ ,  $L'$  ou  $M'$  obtidos pela interseção da retas  $\overrightarrow{KO}$ ,  $\overrightarrow{LO}$  ou  $\overrightarrow{MO}$  com a circunferência circunscrita ao triângulo  $\triangle ABC$ , respectivamente. Além disso,  $K'$ ,  $L'$  e  $M'$  são pontos médios do segmento  $\overline{I_b I_c}$ ,  $\overline{I_a I_c}$  e  $\overline{I_a I_b}$ , respectivamente.

Tomemos o ponto  $K'$ . Utilizando a ferramenta de medição do Geogebra podemos verificar que as distâncias  $K'I_c$ ,  $K'I_b$ ,  $K'B$  e  $K'C$  são iguais, portanto  $K'$  é centro da circunferência que contém os pontos  $I_c$ ,  $I_b$ ,  $B$  e  $C$ . Também podemos perceber que o segmento  $\overline{I_c I_b}$  é um diâmetro, pois  $I_c$ ,  $K'$  e  $I_b$  são colineares - uma vez que estão na bissetriz externa do vértice  $A$ . Portanto,  $K'$  é ponto médio do segmento  $\overline{I_c I_b}$ .

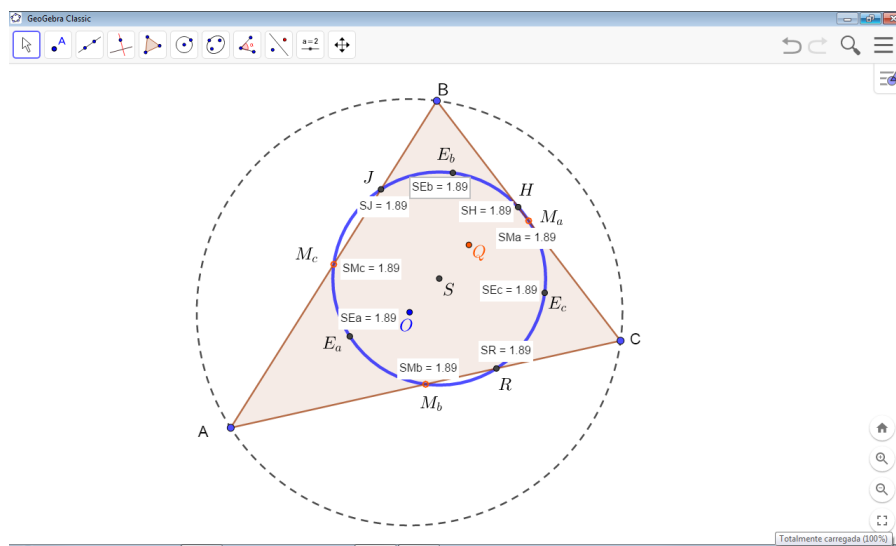


**Figura 4.7:** O ponto  $K'$  é centro da circunferência que contém os vértices  $B$  e  $C$ , além dos centros tritangentes  $I_b$  e  $I_c$ .

Analogamente as demais circunferências podem ser obtidas se tomarmos os pontos  $L'$  e  $M'$ .

Até o momento, contamos onze circunferências associadas ao triângulo  $\triangle ABC$ . A décima segunda circunferência, não que esta ordenação seja importante, é a Circunferência de Nove Pontos (Veja detalhes na Seção 2.5).

Tomemos um triângulo  $\triangle ABC$  qualquer, seu circuncentro  $O$  e seu ortocentro  $Q$ . Vamos determinar os pontos médios  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$ , respectivamente, dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ . Determinemos também os pés das alturas  $H$ ,  $R$  e  $J$ , relativos aos vértices, respectivamente,  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Os pontos médios entre o ortocentro e os vértices são chamados de pontos de Euler. Sejam  $E_a$ ,  $E_b$  e  $E_c$  tais pontos, relativos, respectivamente aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Por fim, vamos tomar  $S$  ponto médio entre  $Q$  e  $O$ .

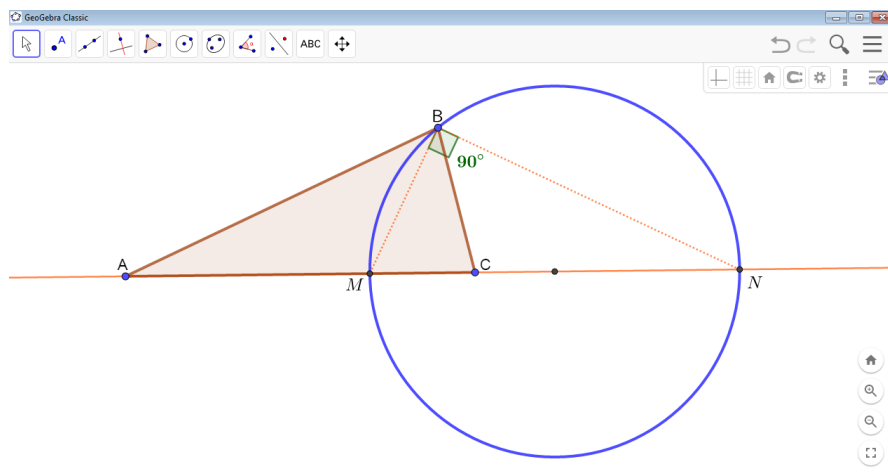


**Figura 4.8:** A circunferência de 9 pontos tem centro no ponto médio entre o Ortocentro e o Circuncentro.

Pelo Geogebra podemos verificar que as distâncias  $SE_a$ ,  $SE_b$ ,  $SE_c$ ,  $SM_a$ ,  $SM_b$ ,  $SM_c$ ,  $SH$ ,  $SR$  e  $SJ$  são iguais, portanto  $S$  é centro de uma circunferência que contém os nove pontos:  $E_a$ ,  $E_b$ ,  $E_c$ ,  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$ ,  $H$ ,  $R$  e  $J$ .

As próximas circunferências associadas ao triângulo têm sua existência dependente do seu tipo, ou melhor, se o triângulo é equilátero, isósceles ou escaleno. Tais circunferências são de Apolônio, conforme foram apresentadas na Seção 3.3 e esta observação é devida ao fato de que tal circunferência não existe se a razão de proporcionalidade for igual a 1 (Corolário 3.17), portanto consideremos o caso em que o triângulo  $\triangle ABC$  é escaleno.

Dessa forma, pelo vértice  $B$  determinemos  $M$ , o pé da bissetriz interna. Utilizando o Teorema 3.16 sobre o lado  $\overline{AC}$ , temos  $N$  o conjugado harmônico de  $M$ . Uma vez que  $\overline{MN}$  é diâmetro da circunferência de Apolônio, podemos verificar que o triângulo  $\triangle MBN$  é retângulo em  $B$ , portanto,  $B$  pertence à esta circunferência.



**Figura 4.9:** A circunferência de Apolônio, relativa ao lado  $\overline{AC}$ .

Analogamente podemos obter outras duas circunferências relativas aos demais vértices.

## Conclusão

---

Retomando ao desafio proposto na Introdução deste trabalho, apesar de a resposta não ser imediata, o leitor mais atento perceberia que o esperado seria esboçar um triângulo na lousa.

A associação de um triângulo a 12, 14 ou 15 circunferências bem definidas é um fato. Estudantes dos mais variados níveis não o sabem, não pela dificuldade que este estudo possa apresentar, mas pelo fato de que em sua maioria não desenvolveram ou não tiveram a oportunidade de conhecer os triângulos, as circunferências e tais relações entre eles e seus elementos fundamentais.

Algumas das circunferências são um tanto conhecidas no meio acadêmico, principalmente as circunferências circunscrita e inscrita. Em alguns casos, dependendo do nível de ensino da instituição, os estudantes chegam a conhecer a circunferência de nove pontos, até mesmo as circunferências ex-inscritas e em casos mais raros as circunferências definidas por dois centros tritangentes, ou as circunferências de Apolônio.

A interpretação geométrica da maioria destas circunferências é difícil de ser enxergada sem o recurso tecnológico, especialmente a circunferência de Apolônio, ainda mais se considerar que a existência desta circunferência depende da razão definida pela divisão harmônica de um segmento, fato que pode ser amenizado se tratado com o recurso de desenho dinâmico oferecido pelo Geogebra.

Pensando nas facilidades proporcionadas pelo software, a verificação das propriedades apresentadas nesta dissertação, particularmente naquelas que se referem a relações de distância, seja entre os centros das circunferências ou entre os pontos de tangência, ou entre estes e os vértices dos triângulos, em fim, torna-se mais clara, inclusive, na compreensão das demonstrações de teoremas.

A construção de tais circunferências no Geogebra não é difícil de ser assimilada por estudantes, mesmo de nível básico, devido aos recursos oferecidos pelo software e, por esse motivo, merece ser mais utilizado como ferramenta de ensino nas escolas, especialmente nas do setor público. Na contramão deste argumento, as condições de laboratórios de informática nas escolas públicas não favorecem o desenvolvimento de tais atividades, tais como poderiam acontecer, seja por motivo de baixo número de terminais de informática disponíveis, seja pela falta de outros recursos como in-

ternet disponível e com qualidade para atender a demanda, apesar de o Geogebra se permitir instalar na máquina e sua utilização não depender de internet. No entanto, o fato de os estudantes não conhecerem esta ferramenta e, em sua maioria, não estão habituados em informática básica, precisam dela para aprender além do necessário ao desenvolvimento da atividades e poder usufruir da tecnologia com mais autonomia e responsabilidade, principalmente se a escola estiver inserida no contexto do ensino baseado no protagonismo.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] N. Altshiller-Court. *College Geometry: an introduction to the modern geometry of the triangle and the circle*. Dover, 2007.
- [2] M. Hohenwarter, M. Borchers, and e. t. Ancsin. *GeoGebra*, 2017.
- [3] A. C. M. Neto. *Geometria*. Coleção Profmat. SBM, 1<sup>a</sup> ed. edition, 2013.
- [4] E. Q. F. Rezende and M. L. B. de Queiroz. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Editora da UNICAMP, 2012.
- [5] M. Vogt et al. Pitágoras, Heron, Brahmagupta - fórmulas; provas; áreas; aplicações. *online: <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96578>*, 2004.