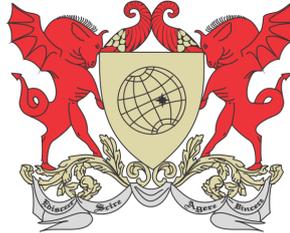


UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



MÁRCIA LOPES FERREIRA

MODELAGEM MATEMÁTICA EM DINÂMICA DA  
POPULAÇÃO COMO UMA ESTRATÉGIA NO  
ENSINO DA MATEMÁTICA

FLORESTAL – MINAS GERAIS  
2021

**MÁRCIA LOPES FERREIRA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA EM DINÂMICA DA  
POPULAÇÃO COMO UMA ESTRATÉGIA NO ENSINO DA  
MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Mehran Sabeti

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal  
de Viçosa - Campus Florestal**

T

F345  
2021  
Ferreira, Márcia Lopes, 1987-  
Modelagem matemática em dinâmica da população como  
uma estratégia no ensino da matemática / Márcia Lopes Ferreira.  
– Florestal, MG, 2021.  
111 f. : il. ; 29 cm.

Inclui anexo.

Orientador: Mehran Sabeti.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 108-111.

1. Modelagem matemática. 2. Modelos epidemiológicos.  
3. Educação básica. 4. Matemática. I. Universidade Federal de  
Viçosa. Departamento de Ciências Exatas e Tecnologias.  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.  
II. Título.

511.8

**MÁRCIA LOPES FERREIRA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA EM DINÂMICA DA  
POPULAÇÃO COMO UMA ESTRATÉGIA NO ENSINO DA  
MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de fevereiro de 2021.

Assentimento:



---

Márcia Lopes Ferreira  
Autora



---

Mehran Sabeti  
Orientador

# Dedicatória

---

Dedico esse trabalho a minha avó Sandra de Souza Alves (*in memoriam*), ela foi e sempre será a minha maior fonte de inspiração para a realização dos meus estudos.

# Agradecimentos

---

Agradeço a Deus por conceder-me a oportunidade de concretizar este sonho, aos meus pais, familiares e amigos por cuidarem de mim através de suas intensas orações. Também agradeço a meus professores por professarem a fé de ensinar com tamanha dedicação e sabedoria, em especial gostaria de mencionar o meu orientador professor e doutor Mehran Sabeti por exemplificar com sua própria vida o significado das palavras, persistência, luta, gratidão e humildade. Aos meus colegas de estudo que estiveram ao meu lado durante a realização deste curso, foram palavras, sorrisos e olhares que jamais serão esquecidos, transmitiram em todo tempo as mensagens de comunicações de nossas almas. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

# Biografia

---

Márcia Lopes Ferreira nasceu no dia 28 de janeiro de 1987, em Belo Horizonte-MG. Possui graduação em Matemática pela FAPAM - Faculdade de Pará de Minas (2008), Pós-graduação em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (2012). Atualmente é professora efetiva no Estado de Minas Gerais no Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais (CTPM/MG), unidade Bom Despacho e no Centro de Educação Continuada de Jovens e Adultos.

# Resumo

---

FERREIRA, Márcia Lopes, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2021. **Modelagem Matemática em Dinâmica da População como uma estratégia no Ensino da Matemática.** Orientador: Mehran Sabeti.

A modelagem matemática consiste na representação do estudo de fenômenos de ordem natural ou de objetos por meio de uma linguagem lógica e racional. Os modelos epidemiológicos são construções matemáticas representativas do estudo da propagação de doenças em determinadas populações. Este trabalho foi elaborado com o objetivo de relacionar a Matemática e suas tecnologias ao estudo da dinâmica populacional em modelos epidemiológicos e enfatizar a utilidade do ensino da Matemática na Educação Básica. O estudo dos modelos epidemiológicos clássicos foi realizado com a representação dos modelos em tempo discreto e contínuo por meio de fluxogramas, equações matemáticas, construções gráficas e simulações de situações hipotéticas com a utilização de recursos computacionais. A pesquisa aponta para a importância da Epidemiologia Matemática e da construção dos modelos epidemiológicos para o enfrentamento de doenças, tais como, a COVID-19 uma vez que, por meio deles ações e decisões são tomadas e o levantamento de informações geram previsões de ocorrências futuras relativas a propagação da doença. O desenvolvimento da pesquisa ocorreu com a criação de um projeto de iniciação científica na Educação Básica e a realização de diversas palestras com a finalidade de divulgar e ampliar o conhecimento científico e o ensino da Matemática em sala de aula.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Modelos Epidemiológicos. Matemática. Ensino. Educação Básica.

# Abstract

---

FERREIRA, Márcia Lopes, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2021. **Mathematical Modeling in Population Dynamics as a Strategy in Teaching Mathematics**. Adviser: Mehran Sabeti.

Mathematical modeling consists of representing the study of natural phenomena or objects through a logical and levelheaded language. Epidemic models are mathematical constructions which depict the study of an illnesses spreading in certain population. This work was established with objective of relating Mathematics and its technologies to the study of population dynamics in epidemic models and highlight the usefulness of teaching Mathematics in Basic Education. The study from classic epidemic models occurred with a representation of models in discrete and continuous time by means of flowcharts, mathematical equations, graphic constructions and simulations of hypotheses using computational resources. However, the research points to the importance of Mathematical Epidemiology and the construction of epidemic models for coping with disease, such as COVID-19 since, through their actions and agreements are taken and gathering of information generate future occurrences concerning the spread of the condition. The development of the research occurs with the creation of a scientific initiation project in Basics Education and the realization of several lectures in order disseminate and make an application of scientific knowledge and teaching Mathematics in classrooms.

**Keywords:** Mathematical Modeling. Epidemic Models. Mathematics.Teaching. Basic education.

# Lista de Símbolos

---

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

$\beta$  taxa de incidência padrão ou taxa de transmissão.

$\beta_0$  probabilidade de infecção para cada contato.

$\varphi_T$  taxa de contato.

$\gamma$  taxa de recuperação.

$\gamma^{-1}$  tempo de recuperação.

$S$  número (proporção) de indivíduos suscetíveis à uma doença em determinada população.

$E$  número (proporção) de indivíduos expostos à uma doença em determinada população.

$I$  número (proporção) de indivíduos infectados com uma doença em determinada população.

$R$  número (proporção) de indivíduos recuperados após o período infeccioso causado por uma doença em determinada população.

$N$  população (proporção) total de indivíduos no modelo em tempo contínuo.

$T_n$  população (proporção) total de indivíduos no modelo em tempo discreto.

$\mathcal{R}_0$  razão de reprodutibilidade básica.

$b$  taxa de natalidade.

$\mu$  taxa de mortalidade.

$\lambda$  taxa de transmissão.

$\delta$  taxa de saída do classe dos expostos e entrada na classe dos infecciosos .

$n$  tempo no modelo discreto.

$t$  tempo no modelo contínuo.

# Lista de Figuras

---

2.1	Secção áurea. . . . .	18
2.2	Método de Euler . . . . .	26
2.3	Método de Euler Melhorado . . . . .	27
2.4	Método de Runge Kutta . . . . .	28
2.5	Métodos de Numéricos . . . . .	32
2.6	Métodos Numéricos: Ampliação gráfica. . . . .	32
3.1	Distribuição dos casos de Cólera, no centro de Londres (1854) . . . . .	34
3.2	Exemplo: Comparação de termos: Incidência x Prevalência . . . . .	36
3.3	Procedimentos da Modelagem Matemática . . . . .	38
3.4	Fluxograma de representação dos Modelos Matemáticos . . . . .	39
3.5	Propagação do surto epidemiológico, Fonte: GeoGebra. . . . .	45
3.6	Variações do Número de Reprodutibilidade Basal . . . . .	45
4.1	Representação compartimental do Modelo SI . . . . .	46
4.2	Representação compartimental do Modelo SIS . . . . .	47
4.3	Representação compartimental do Modelo SIR . . . . .	47
4.4	Representação compartimental do Modelo SEIR . . . . .	47
4.5	Modelo Compartimental SI com Dinâmica Vital . . . . .	49
4.6	Modelo Compartimental SIS com Dinâmica Vital . . . . .	52
4.7	Modelo Compartimental SIR com Dinâmica Vital . . . . .	55
4.8	Modelo Compartimental SEIR com Dinâmica Vital . . . . .	58
5.1	Propagação do Vírus da AIDS . . . . .	72
5.2	Propagação do Vírus da Meningite Menengocócica . . . . .	75
5.3	Propagação do Vírus da Gripe de Hong Kong . . . . .	76
5.4	Propagação do Vírus da COVID-19 . . . . .	79
5.5	Fluxograma do Modelo SEIAHR . . . . .	80
5.6	Fluxograma do Modelo SEIR (+CAQH) . . . . .	82
6.1	Cronograma do Projeto Científico . . . . .	86
6.2	Semana 01: Epidemiologia . . . . .	87
6.3	Semana 02: Epidemiologia Matemática . . . . .	88
6.4	Semana 03: COVID-19 . . . . .	89

6.5	Semana 04: Análise de Dados: COVID-19 . . . . .	90
6.6	Semana 05: Produção Audiovisual . . . . .	91
6.7	Semana 06: COVID-19: Um olhar médico . . . . .	92
6.8	Análise de Dados Reais da COVID-19 . . . . .	94
6.9	Simulite: Simulação dinâmica de propagação da COVID-19 . . . . .	96
6.10	Calculadora Epidêmica . . . . .	96
A.1	Análise de Dados: Contextualização . . . . .	101
A.2	COVID-19. Visgraf/Coronaviz (IMPA) . . . . .	102
A.3	Razões e Proporção . . . . .	103
A.4	Expressões Algébricas . . . . .	103
A.5	Sequências e Progressões . . . . .	104
A.6	Progressão Geométrica . . . . .	104
A.7	Recorrência . . . . .	105
A.8	Propagação do vírus da gripe nas crianças . . . . .	107

# Lista de Tabelas

---

2.1	Métodos Numéricos . . . . .	31
5.1	Análise de dados reais do COVID-19 I Incidência e Prevalência . . . . .	70
5.2	Análise de dados reais do COVID-19 II Letalidade e Mortalidade . . . . .	71
5.3	Análise de Dados: Propagação do Vírus da AIDS . . . . .	73
5.4	Propagação do Vírus da Meningite Meningocócica . . . . .	74
5.5	Análise de Dados: Vírus da Gripe de Hong Kong . . . . .	76
5.6	Análise de Dados: Vírus da COVID-19 . . . . .	78

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Equações de diferenças e equações diferenciais</b>	<b>17</b>
2.1	Equação de diferenças	17
2.1.1	Equação de diferenças lineares	18
2.1.2	Classificação das equações de diferenças lineares	19
2.1.3	Sistema de equações de diferenças	21
2.1.4	Equações de diferenças não-lineares (primeira ordem)	22
2.2	Equações diferenciais	23
2.2.1	Resolução de equações diferenciais	24
2.2.2	Aproximações numéricas	25
<b>3</b>	<b>Epidemiologia e Modelagem matemática</b>	<b>33</b>
3.1	O que é Epidemiologia?	33
3.1.1	Medidas em Saúde Pública	34
3.1.2	Incidência e Prevalência	35
3.1.3	Letalidade e Mortalidade	36
3.1.4	Intervenções para o controle de doenças	37
3.2	Modelagem matemática	38
3.3	Modelos epidemiológicos	41
3.3.1	Conceitos biológicos	43
3.3.2	Reprodutibilidade basal	44
<b>4</b>	<b>Modelos epidemiológicos</b>	<b>46</b>
4.1	Caracterização dos Modelos epidemiológicos clássicos	46
4.2	Pressupostos: Considerações iniciais	48
4.3	Modelo epidemiológicos em tempo discreto	49
4.3.1	O Modelo SI com dinâmica vital em tempo discreto	49
4.3.2	O Modelo SIS com dinâmica vital em tempo discreto	52
4.3.3	O Modelo SIR com dinâmica vital em tempo discreto	55
4.3.4	O Modelo SEIR com dinâmica vital em tempo discreto	58
4.4	Modelos epidemiológicos em tempo contínuo	60
4.4.1	O Modelo SI com dinâmica vital em tempo contínuo	60

4.4.2	O Modelo SIS com dinâmica vital em tempo contínuo . . . . .	62
4.4.3	O Modelo SIR com dinâmica vital em tempo contínuo . . . . .	64
4.4.4	O Modelo SEIR com dinâmica vital em tempo contínuo . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Modelagem matemática e estratégias para o ensino</b>	<b>69</b>
5.1	Aplicações práticas para a sala de aula . . . . .	69
5.1.1	Palestra - Testei positivo, e agora? . . . . .	69
5.2	Proposta de situações hipotéticas e simulações dos modelos epidemio- lógicos . . . . .	71
5.2.1	Uma situação-problema para o Modelo SI . . . . .	72
5.2.2	Uma situação-problema para o Modelo SIS . . . . .	73
5.2.3	Uma situação-problema para o Modelo SIR . . . . .	75
5.2.4	Uma situação-problema para o Modelo SEIR . . . . .	77
5.3	Modelos Epidemiológicos e a COVID-19 . . . . .	79
5.3.1	Modelo SEIR estendido, SEIAHR . . . . .	79
5.3.2	Modelo SEIR (+CAQH) . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Projeto Científico</b>	<b>85</b>
6.1	Descrição de objetivos: . . . . .	85
6.2	Semana 01: Epidemiologia . . . . .	87
6.3	Semana 02: Epidemiologia Matemática . . . . .	88
6.4	Semana 03: COVID-19 . . . . .	89
6.5	Semana 04: Análise de Dados: COVID-19 . . . . .	90
6.6	Semana 05: Festival de Vídeo e Ampla divulgação do Projeto . . . . .	91
6.7	Semana 06: COVID-19: um olhar médico . . . . .	92
6.8	Análise de dados reais para a COVID-19 . . . . .	93
6.9	Recursos Dinâmicos . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Plano de Aula para o Ensino Médio: Modelo SIS por recorrência</b>	<b>99</b>
A.1	Plano de Aula: Modelo SIS por recorrência . . . . .	99
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>108</b>

# Introdução

---

*“A educação inspirada nos princípios da liberdade e solidariedade humana tem por fim o preparo do indivíduo e da sociedade para o domínio dos recursos científicos e tecnológicos que lhes permitem utilizar as possibilidades e vencer as dificuldades do meio”[8].*

*(Lei 4024-20/12/61)*

Inúmeros são os desafios impostos aos seres humanos para garantir a sobrevivência da espécie humana. As situações que colocam em risco a vida destes indivíduos são diversas e adversas, tais como ataque de predadores, produção de alimentos, crescimento populacional, condições climáticas, guerras e doenças.

O desenvolvimento do conhecimento científico contribuiu para gerar a construção de técnicas e instrumentos de combates a estas situações e possibilitar a melhor adaptação e sobrevivência dos seres humanos. A ampliação do conhecimento entre as diversas áreas do saber e o estudo das doenças, suas características e distribuição foram organizados e sistematizados ao longo dos anos, o que produziu a origem da ciência epidemiológica.

As observações sobre causas, fatores e origens das grandes epidemias e a busca por soluções para minimizar os efeitos da propagação das doenças contagiosas causadas por agentes infecciosos, por meio de estudos quantitativos e métodos científicos para a prevenção e o controle das doenças fizeram com que surgisse através da junção das áreas de Matemática, Biologia e das Ciências Médicas a Biomatemática que em seus ramos de estudo desenvolveu a Epidemiologia Matemática com o objetivo de proporcionar contribuições significativas para as ciências médicas, sociais e biológicas.

As formulações matemáticas construídas através de modelos compartimentais clássicos constituem estratégias para otimizar e direcionar medidas em saúde pública eficientes para reduzir a quantidade média da transmissão de doenças entre indivíduos suscetíveis e infectados presentes em uma população fechada e introduzir estratégias de controle variadas de acordo com o tipo da doença e a relação parasita-hospedeiro. Por meio dos modelos matemáticos construídos em linguagem específica é possível compreender a dinâmica de propagação das doenças, dos valores limites e das taxas de transmissão associadas a infecção.

A elaboração deste trabalho consiste em discorrer sobre a relação e utilidade da Matemática quando aplicada a situações reais ocorridas em nossa sociedade e gerar novos sentidos para o estudo dos conteúdos de Matemática na Educação Básica. Relacionar o estudo da matemática aos temas atuais e a diversas áreas científicas através do momento histórico da pandemia do Novo Coronavírus. Além disso, possibilitar aos estudantes e professores uma melhor compreensão sobre a Matemática ao propor que o conhecimento representa uma forma eficaz de prevenção e preservação da humanidade.

O texto desta pesquisa está organizado da seguinte maneira: no primeiro capítulo uma breve introdução para despertar o interesse do leitor e abordar a estrutura do texto em relação aos conceitos relevantes descritos nesta dissertação. No segundo capítulo são apresentados os conteúdos matemáticos necessários para a interpretação dos modelos, taxas de transmissão, parâmetros e variáveis envolvidos na elaboração dos modelos matemáticos.

O terceiro capítulo apresenta a definição e origem do termo “Epidemiologia” bem como seu contexto histórico. Além disso, descreve seus pesquisadores precursores a consolidação e institucionalização da disciplina nos centros universitários e a apresentação das principais taxas e medidas em saúde pública efetivas para o controle das doenças. O capítulo ainda aborda o conceito de Modelagem Matemática: seus processos e passos para a construção dos modelos epidemiológicos [19].

No quarto capítulo os modelos são apresentados em tempo discreto e contínuo através de fluxogramas, sistemas de equações, taxas de propagação da doença, ilustrações gráficas do esboço das curvas do modelo epidemiológicos. Os modelos epidemiológicos em tempo discreto foram abordados a partir do estudo da tese de doutorado do Professor Mehran Sabeti, “Modelo Epidêmico Discreto SIR com Estrutura Etária e Aplicação de Vacinação em Pulsos e Constante”[31]. Os modelos epidemiológicos em tempo contínuo foram abordados a partir do livro *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*, de Matt J. Keeling e Pejman Rohani, [18]. No estudo dos modelos em tempo discreto e também nos modelos em tempo contínuo há a apresentação dos respectivos sistemas de equações representativos da dinâmica populacional entre as classes compartimentais, os principais conceitos biológicos, pontos de equilíbrio e taxas de variações presentes em cada representação.

No quinto capítulo são apresentadas as ações elaboradas pela professora Márcia Lopes Ferreira. Estas práticas foram realizadas na unidade do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais em Bom Despacho. A aplicação das atividades de modelagem matemática em dinâmica da população são abordadas como estratégias eficazes no ensino da Matemática. Elas possibilitam o aprofundamento e a aplicação das definições e conceitos relacionados aos conteúdos escolares estudados pelos alunos e destacam a importância da aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

A apresentação do projeto de iniciação científica segue registrada no sexto capítulo por meio dos relatos da aplicação do projeto científico. A finalidade deste é formar um grupo de pesquisa científica e possibilitar a formação de um elo entre a educação básica e o ensino superior.

---

Espera-se que ao ler esta pesquisa alunos, professores, estudantes e profissionais das diversas áreas do saber consigam relacionar os conteúdos da disciplina de Matemática a fatos e contextos externos ao ambiente escolar e visualizem a importância e necessidade deste aprendizado para suas vidas.

# Equações de diferenças e equações diferenciais

---

Neste capítulo serão descritos os seguintes conceitos: equações de diferenças e equações diferenciais, as classificações e os principais métodos de resolução destas equações.

## 2.1 Equação de diferenças

As equações de diferenças ou equações de recorrência <sup>1</sup> são equações de variações discretas, representam uma relação funcional equacionada em termos das características das alterações dos valores das variáveis atribuídos em tempo discreto. A variação do tempo em um conjunto de valores é dita discreta quando existe uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto e um subconjunto dos números naturais [4].

**Definição 2.1:** Uma equação de diferenças de ordem  $m$  é uma equação do tipo

$$y_{n+1} = f(n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

sendo  $f$  uma função.

A solução da equação de diferenças 2.1 é uma sequência de números reais  $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$ , que verifica a equação para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Consiste em uma expressão que apresenta o valor de uma variável em um estágio  $n$  em função de  $n$  e dos valores dos estágios iniciais (condições iniciais).

O conjunto de todas as soluções é chamado de solução geral da equação, que apresenta um certo número de parâmetros que podem ser determinados a partir de condições iniciais, dando lugar à solução particular [5].

Ainda, pode-se mencionar, como exemplo de emprego das equações de diferenças, a sequência de Fibonacci, definida como:

---

<sup>1</sup>Recorrência: Sequência definida recursivamente por uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1} \quad \text{com} \quad y_0 = 1 \quad \text{e} \quad y_1 = 1, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

A sequência numérica foi originada do seguinte problema: “Quantos coelhos haverá em um ano, começando com um só casal, se em cada mês cada casal adulto gera um novo casal, o qual se tornará produtivo em dois meses?”[7].

Os primeiros nove termos da sequência de Fibonacci são exibidos abaixo:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

onde  $y_n$  é o número de casais adultos no estágio  $n$  com  $n \in \mathbb{N}$ .

Uma outra sequência pode ser formada através dos quocientes de termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Esta nova sequência converge para o valor  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  denominado número áureo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Propriedades importantes foram observadas através da sequência de Fibonacci, a exemplo, a razão da seção áurea, relacionada com a divisão de um segmento  $\overline{AB}$ , obedecendo a seguinte proporção:

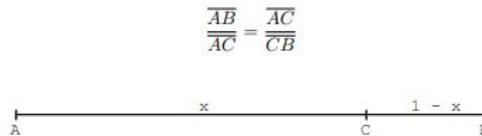


Figura 2.1: Seção áurea.

Considerando  $\overline{AB} = 1$  (unidade de medida) e  $\overline{AC} = x$ , tem-se que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 = 1-x,$$

cuja solução positiva é a seção áurea (o inverso do número áureo).

### 2.1.1 Equação de diferenças lineares

**Definição 2.2:** Uma equação de diferenças linear de ordem  $m$  é uma equação do tipo

$$y_{n+1} = f(n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

onde  $f$  é uma função linear nas variáveis  $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}$ .

Mais especificamente, uma equação de diferenças linear é uma equação da forma:

$$f(n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}) = y_n - \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} y_{n-i} + g(n) = 0, \quad (2.4)$$

com  $\alpha_{n,i}$  constantes,  $m < n$  e  $m$  condições iniciais.

Nesse caso, a equação é dita homogênea se para todo  $n$  natural, tem-se que,

$$g(n) = 0,$$

assim,

$$y_n - \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} y_{n-i} + g(n) = 0 \Rightarrow y_n = \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i} y_{n-i},$$

portanto,

$$y_n = \alpha_{n,1} y_{n-1} + \alpha_{n,2} y_{n-2} + \alpha_{n,3} y_{n-3} + \cdots + \alpha_{n,m} y_{n-m}.$$

Considere a Equação 2.5, de acordo com a definição 2.2 ela representa um exemplo de equação de diferença linear não homogênea:

$$(n + 2)y_{n+1} - 3y_n = n^2 + 2. \quad (2.5)$$

Neste caso, dado  $y_0 = 0$ , como valor inicial da sucessão, o processo recursivo permite encontrar a solução da equação de diferença 2.5:

$$n = 0 \Rightarrow 2y_1 - 3y_0 = 2 \Rightarrow y_1 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow 3y_2 - 3y_1 = 3 \Rightarrow y_2 = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow 4y_3 - 3y_2 = 6 \Rightarrow y_3 = 3$$

A partir de  $y_0 = 0$ , obtém-se  $y_n = n$ , solução particular da Equação 2.5.

A solução geral da Equação 2.5 é dada por:

$$y_n = n + y_0 \frac{3^n}{(n + 1)!} \quad (2.6)$$

Para verificar a veracidade da solução, pode-se substituir a Equação 2.6 na Equação de diferenças 2.5, onde se comprova a identidade.

$$(n + 2)y_{n+1} - 3y_n = (n + 2) \cdot \left[ (n + 1) + y_0 \frac{3^{n+1}}{(n + 2)!} \right] - 3 \left[ n + y_0 \frac{3^n}{(n + 1)!} \right] = n^2 + 2.$$

### 2.1.2 Classificação das equações de diferenças lineares

#### Equação de primeira ordem, $m = 1$

Uma equação geral de diferenças, de primeira ordem é da forma:

$$y_n - \sum_{i=1}^1 \alpha_{n,i} y_{n-i} + g(n) = y_n - \alpha_{n,1} y_{n-1} + g(n) = 0, \quad (2.7)$$

com  $\alpha_{n,i}$  constantes e apenas uma condição inicial.

Caso ( $\alpha_{n,i} = \alpha_i$ ) a equação possui coeficientes constantes e será assim expressa:

$$\begin{aligned} f(n, y_n, y_{n-1}) &= y_n - \alpha_{n,1}y_{n-1} + g(n) \\ &= y_n - \alpha_1y_{n-1} + g(n) = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

No caso homogêneo:

$$g(n) = 0 \quad \text{e} \quad y_n = \alpha_1y_{n-1}.$$

Considere a seguinte equação de diferenças linear de primeira ordem com coeficientes constantes homogênea:

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1}, \\ y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.9}$$

O processo recursivo fornece:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow y_1 = \alpha y_0 \\ n = 2 &\Rightarrow y_2 = \alpha y_1 \Rightarrow y_2 = \alpha^2 y_0 \\ n = 3 &\Rightarrow y_3 = \alpha y_2 \Rightarrow y_3 = \alpha^3 y_0 \\ &\vdots \\ n = n &\Rightarrow y_n = \alpha y_{n-1} = \alpha^n y_0 \text{ e portanto,} \end{aligned}$$

$$y_n = \alpha^n y_0,$$

o resultado é a solução da Equação 2.9, satisfazendo a condição  $y_0$  dada.

Uma estratégia alternativa para resolver a Equação 2.9 é supor que exista uma solução geral dada por  $y_n = k\lambda^n$ , que ao ser substituída permite obter:

$$k\lambda^n = \alpha k\lambda^{n-1} \Leftrightarrow k\lambda^{n-1}[\lambda - \alpha] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0, \\ \text{ou} \\ \lambda = \alpha. \end{cases}$$

Desde que, para  $n = 0$  deve-se ter  $y_0 = k\lambda^0$ , então  $k = y_0$ . Logo,

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{se } y_0 = 0, \\ \alpha^n y_0 & \text{se } y_0 \neq 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

### Equação de segunda ordem, $m = 2$

Uma equação geral de diferenças, de segunda ordem é da forma:

$$y_n - \sum_{i=1}^2 \alpha_{n,i}y_{n-i} + g(n) = y_n - \alpha_{n,1}y_{n-1} - \alpha_{n,2}y_{n-2} + g(n) = 0, \tag{2.11}$$

com  $\alpha_{n,i}$  constantes e duas condições iniciais.

Caso a equação possua coeficientes constantes, ou seja, ( $\alpha_{n,i} = \alpha_i$ ),  $i \in \{1,2\}$ . Pode ser expressa por:

$$y_n - \alpha_{n,1}y_{n-1} - \alpha_{n,2}y_{n-2} + g(n) = y_n - \alpha_1y_{n-1} - \alpha_2y_{n-2} + g(n) = 0 \quad (2.12)$$

no caso homogêneo:

$$g(n) = 0 \quad \text{e} \quad y_n = \alpha_1y_{n-1} + \alpha_2y_{n-2}.$$

representa uma equação de diferenças linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes.

### 2.1.3 Sistema de equações de diferenças

Uma equação linear de segunda ordem

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0,$$

pode ser transformada em um sistema de 2 equações de primeira ordem ao realizar a seguinte mudança de variáveis  $z_n = y_{n+1}$  :

$$\begin{cases} y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = -az_n - by_n. \end{cases} \quad (2.13)$$

Suponha o seguinte sistema linear de ordem 2, equivalente ao sistema anterior 2.13, mas que representa um caso geral:

$$\begin{cases} y_{n+1} = a_{11}y_n + a_{12}z_n, \\ z_{n+1} = a_{21}y_n + a_{22}z_n. \end{cases} \quad (2.14)$$

Considere a primeira equação do sistema 2.14,

$$y_{n+1} = a_{11}y_n + a_{12}z_n, \quad (2.15)$$

ao isolar a variável  $z_n$  na Equação 2.15, obtém-se

$$z_n = \frac{y_{n+1} - a_{11}y_n}{a_{12}} \quad (2.16)$$

ainda em relação a primeira equação do sistema 2.14,

$$y_{n+1} = a_{11}y_n + a_{12}z_n,$$

tem-se que o próximo termo em função de  $n$ , será definido por:

$$y_{n+2} = a_{11}y_{n+1} + a_{12}z_{n+1}, \quad (2.17)$$

ao isolar a variável  $z_{n+1}$  na equação 2.17, obtém-se,

$$z_{n+1} = \frac{y_{n+2} - a_{11}y_{n+1}}{a_{12}}, \quad (2.18)$$

ao substituir  $z_n$  valor obtido na Equação 2.16 e  $z_{n+1}$  valor obtido na Equação 2.18, na segunda equação do sistema 2.14,

$$z_{n+1} = a_{21}y_n + a_{22}z_n \Rightarrow \frac{y_{n+2} - a_{11}y_{n+1}}{a_{12}} = a_{21}y_n + a_{22} \cdot \left( \frac{y_{n+1} - a_{11}y_n}{a_{12}} \right),$$

ao multiplicar os dois membros da igualdade por  $a_{12}$ , observa-se que o sistema pode ser convertido na seguinte equação linear de segunda ordem,

$$y_{n+2} - (a_{11} + a_{22})y_{n+1} + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})y_n = 0.$$

### 2.1.4 Equações de diferenças não-lineares (primeira ordem)

Uma equação de diferenças não linear de ordem  $m$  é uma fórmula de recorrência do tipo

$$y_{n+1} = f(n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}) \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.19)$$

onde  $f$  é uma função não-linear nas variáveis  $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}$ .

A solução de 2.19 é uma expressão que relaciona  $y_n$  e  $y_0$  (caso inicial), para cada estágio  $n$ .

Uma maneira de analisar estas equações é por meio de pontos de equilíbrio. No contexto das equações de diferenças tem-se a estabilidade do processo quando não há variações do estágio  $n$  para o estágio  $n + 1$ , isto é, quando

$$y_{n+1} = y_n = y^*$$

tem-se um ponto de equilíbrio  $y^*$  quando

$$y^* = f(y^*)$$

isto é,  $y^*$  é um ponto fixo da função  $f$ .

Um exemplo clássico de equações de diferença não-lineares é o modelo logístico discreto, originado dos trabalho de pesquisa de R. M. May (1975- 1976), [25], baseado na dinâmica populacional de insetos e descritos através das seguintes equações.

$$y_{n+1} = f(y_n) = ry_n(1 - y_n), \quad \text{com } r > 0 \quad (2.20)$$

a equação possui os seguintes pontos de equilíbrio, definido pelos pontos fixos da função  $f$ ,

$$y^* = f(y^*) = ry^*(1 - y^*).$$

Note que, se  $y^* = 0$  a equação é satisfeita. Caso contrário, ao dividir os dois membros da equação por  $y^*$ , obtém-se:

$$1 = r(1 - y^*) \Rightarrow y^* = 1 - \frac{1}{r} = \frac{r - 1}{r},$$

assim,  $y_1^* = 0$  e  $y_2^* = \frac{r - 1}{r}$ , são os pontos fixos da função que descreve o modelo logístico.

A formulação das equações anteriores foram baseadas na seguinte afirmação: “A variação da população entre duas gerações sucessivas depende do crescimento específico da população e da competição entre seus elementos”[4].

$$P_{t+1} - P_t = aP_t - bP_t^2, \quad a > 0, \quad e \quad b > 0, \quad (2.21)$$

ou seja,

$$P_{t+1} = (a + 1)P_t \left( 1 - \frac{b}{a + 1}P_t \right), \quad (2.22)$$

onde, ao efetuar a seguinte mudança de variáveis em 2.22,

$$r = a + 1(\text{taxa de crescimento intraespecífica}) \quad e \quad N_t = \frac{b}{a + 1}P_t$$

obtem-se,

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t). \quad (2.23)$$

Portanto, a Equação 2.23 representa a equação logística 2.20, ambas representadas em tempo discreto.

## 2.2 Equações diferenciais

A Matemática possui instrumentos para contribuir no estudo, controle e enfrentamento das epidemias, os modelos matemáticos atribuem compreensão e predição por meio de simulações. Ainda, pode-se mencionar como exemplo prático de equação diferencial a seguinte situação:

**Exemplo 2.2.1:** Lei do resfriamento de Newton: A lei afirma que a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional a diferença entre a temperatura do meio e a temperatura do corpo [34].

Essa lei pode ser expressa como:

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T(t)) \quad (2.24)$$

Onde:

- $T(t)$  é a temperatura do corpo no instante  $t$ ;
- $T_m$  é a constante que corresponde à temperatura do meio;
- $k$  é uma constante de proporção que depende do corpo e do meio.

As equações diferenciais são importantes para a modelagem matemática de fenômenos físicos, biológicos, químicos, etc, quando são representados em termos de taxa de variação [32].

### 2.2.1 Resolução de equações diferenciais

Resolver uma equação diferencial significa encontrar uma função  $f$ , definida no intervalo  $I$ , que após ser substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade. Uma função  $x(t)$  é designada solução da equação diferencial  $x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$  em um intervalo  $I$  se:

- $x^{(n)}(t)$  existe em  $I$ .
- $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \forall t \in I$ .

Uma solução de uma equação diferencial é considerada uma solução geral se inclui todas as soluções da equação diferencial. Uma solução é dita particular se é uma solução obtida da solução geral, mediante condições dadas, chamadas condições iniciais ou condições de contorno [32].

**Exemplo 2.2.2:** Encontrar as soluções correspondentes à Equação 2.24:

Considere a equação:

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T(t)),$$

a solução dessa equação pode ser obtida ao integrar os dois lados da igualdade:

$$\int \frac{dT}{T_m - T(t)} = \int k dt.$$

Como o corpo está resfriando, admite-se que a temperatura do corpo é maior que a do meio ( $T(t) > T_m$ ). Resolver a equação diferencial acima implica em encontrar as duas integrais da igualdade e isolar o  $T$ .

**Solução:**

Para resolver a primeira integral utiliza-se o processo de mudança de variável, ao considerar que  $T_m - T(t) = u(t)$  e  $-dT = du$ , onde obtém-se:

$$\int \frac{dT}{T_m - T(t)} = \int \frac{-du}{u(t)} = -\ln |u(t)| + C_1 = -(\ln |T_m - T(t)|) + C_1.$$

Considere que,  $|T_m - T(t)| = T(t) - T_m$  pois  $T(t) > T_m$ , então:

$$-(\ln(T(t) - T_m)) + C_1 = \ln((T(t) - T_m)^{-1}) + C_1 = \ln\left(\frac{1}{(T(t) - T_m)}\right) + C_1$$

Ao resolver a segunda integral, obtém-se:

$$\int k dt = kt + C_2$$

Ao comparar as expressões obtidas:

$$\ln\left(\frac{1}{T(t) - T_m}\right) + C_1 = kt + C_2 \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{T(t) - T_m}\right) = kt + C_2 - C_1$$

Ao considerar  $C_2 - C_1 = C_0$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{T(t) - T_m}\right) = kt + C_0 &\Rightarrow \frac{1}{T(t) - T_m} = e^{kt+C_0} \Rightarrow \frac{1}{T(t) - T_m} = e^{kt} e^{C_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow T(t) - T_m = e^{-kt} e^{-C_0} \end{aligned}$$

Ao substituir  $e^{-C_0} = C$ , encontra-se a solução geral da Equação 2.24:

$$T(t) - T_m = Ce^{-kt} \Rightarrow T(t) = T_m + Ce^{-kt}$$

Cada valor atribuído à constante na solução geral representa uma curva no plano  $(x, t)$ . A solução geral representa uma família de curvas.

### 2.2.2 Aproximações numéricas

Os métodos de aproximações numéricas foram introduzidos por Leonhard Euler e consistem em gerar soluções aproximadas para a resolução das equações diferenciais por um processo de aproximação numérica que possibilita obter um valor aproximado de uma função  $y(x)$  em um dado ponto de seu domínio por meio de uma sequência finita de operações. A solução numérica não determina a expressão literal da função  $y(x)$ , mas uma solução aproximada do problema de valor inicial em um conjunto discreto de pontos [32].

A aproximação numérica é obtida através da criação de uma tabela que contém a relação de variação da variável dependente em vários valores assumidos da variável independente, ao invés de uma relação funcional, como na solução analítica.

#### Método numérico de Euler

O método de Euler representa um processo inicial para gerar compreensão sobre outros métodos mais complexos. Ele pode ser expresso pela seguinte Equação 2.25;

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \tag{2.25}$$

Para entender o método de Euler considere a seguinte aproximação para a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

onde  $x = x_1 = x_0 + h$ , e  $h$  é uma constante pequena denominada de passo.

O método utiliza a reta tangente à curva da solução do problema de valor inicial através de  $(x_0, y_0)$  para obter a aproximação desejada. A equação da reta tangente a

uma curva no ponto  $(x_0, y_0)$  é dada por

$$y(x) = y_0 + m(x - x_0),$$

onde  $m$  é a inclinação da curva em  $(x_0, y_0)$ , tem-se que  $m = f(x_0, y_0)$ , ou seja,

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \tag{2.26}$$

Ao substituir  $x = x_1$  na equação 2.26 obtém-se a aproximação de Euler para  $x_1$ :

$$y_1(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

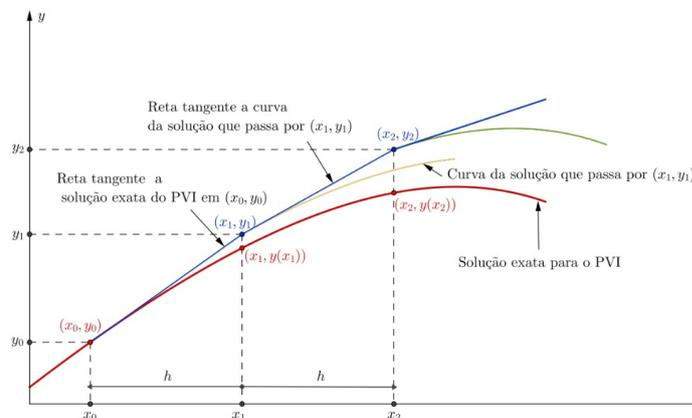
ou seja,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Ao se repetir por sucessivas vezes o Método de Euler para uma aproximação da solução da equação diferencial satisfazendo as condições iniciais por meio do ponto  $x_{n+1} = x_0 + nh$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) obtém-se,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.27}$$

A Figura 2.2 ilustra como obter a solução aproximada da solução exata do p.v.i, pelo Método de Euler.



**Figura 2.2:** Método de Euler. **Fonte:** Ramos, 2017[28].

### Metódo numérico de Euler melhorado ou Método de Heun

O método de Euler melhorado também pode ser denominado de método de Heun, em homenagem a Karl Heun (1859-1929), um matemático alemão conhecido pela equação diferencial de Heun, definida como:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left[ \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-a} \right] \frac{dw}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-a)} w = 0$$

O método criado por Heun é considerado preditor-corretor pois ele efetua o cálculo da solução numérica de um problema de um p.v.i. através da utilização de duas

fórmulas, que são usadas em conjunto: uma delas para predir o novo valor da variável, e a outra para corrigir a predição.

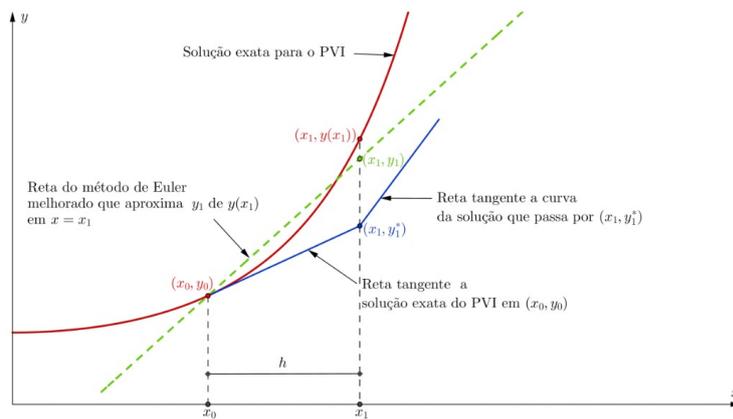
A ideia que o método traz é a de utilizar a fórmula do método de Euler para obter uma primeira aproximação para a solução  $y(x_{n+1})$  do problema do valor inicial e ao denotar esta aproximação por  $y_{n+1}^*$ , tem-se

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n).$$

O próximo passo para melhorar (ou corrigir) a aproximação consiste em aplicar mais uma vez o método de Euler mas utilizar as médias das inclinações das curvas das soluções através de  $(x_n, y_n)$  e  $y_{n+1}^*$ . Ou seja,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_n, y_{n+1}^*)].$$

A Figura 2.3 ilustra como obter a solução aproximada  $y_1$  pelo método de Euler melhorado.



**Figura 2.3:** Método de Euler Melhorado. **Fonte:** Ramos, 2017 [28].

Dessa forma, o método de Euler melhorado para encontrar soluções próximas da solução exata do problema de valor inicial nos pontos  $x_{n+1} = x_0 + nh$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) é

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_n, y_{n+1}^*)],$$

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

### Método numérico de Runge-Kutta

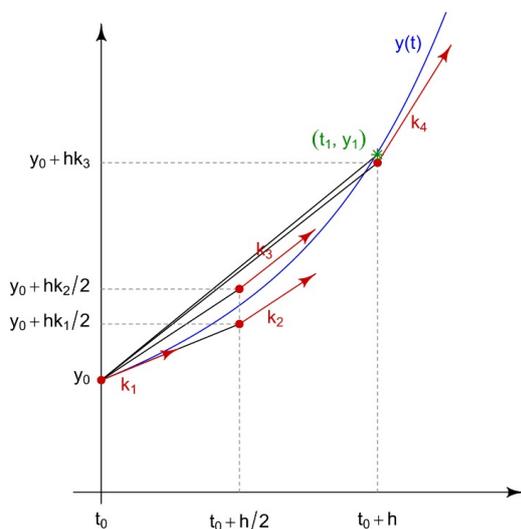
Os métodos de Runge-kutta são originados do Método de Euler, ao substituir a função inclinação na Equação 2.27 por uma média ponderada das inclinações ao longo do intervalo  $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ .

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^m b_i k_i, \tag{2.28}$$

onde os pesos  $b_i, i = 1, 2, \dots, m$  são constantes satisfazendo  $\sum_{i=1}^m b_i = 1$  e cada  $k_i, i = 1, 2, \dots, m$  é a função  $f$  avaliada em um ponto selecionado  $(t, y)$  tal que  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ . O número  $m$  é chamado de ordem do método. A média na equação não é formada de maneira aleatória, mas seus parâmetros são escolhidos comparando a Equação 2.28 com um polinômio de Taylor <sup>2</sup> conveniente de grau  $m$ .

Ao se considerar  $m = 1, b = 1$ , e  $k_1 = f(t_n, y_n)$  em 2.28, obtém-se o Método de Euler. Portanto, o Método de Euler é considerado o método de Runge-Kutta de primeira ordem.

O Método de Runge Kutta de quarta ordem ( $m = 4$ ) é conhecido como método clássico de Runge-Kutta. A Figura 2.4 ilustra como obter a solução aproximada  $y_1$  pelo método de quarta ordem.



**Figura 2.4:** Método de Runge-Kutta. **Fonte:** Runge-Kutta methods.

Para entender o Método de Runge-Kutta de quarta ordem considere a seguinte aproximação do problema de valor inicial.

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

O Método utiliza as Equações 2.28 e 2.29

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.29}$$

$$t_{n+1} = t_n + h \tag{2.30}$$

<sup>2</sup>Polinômio de grau  $m$  que melhor se aproxima de uma dada função ao redor de um ponto  $P$  no interior de seu domínio

onde  $y_{n+1}$  é aproximação numérica através do método de Runge-Kutta de quarta ordem de  $y(t_{n+1})$ , e

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3).$$

Então, o próximo valor ( $y_{n+1}$ ) é determinado pelo valor de ( $y_n$ ) somado com o produto do tamanho do intervalo ( $h$ ) e uma inclinação estimada. A inclinação é uma média ponderada de quatro incrementos, sendo que cada um deles é o produto do tamanho do intervalo  $h$ , e uma inclinação estimada e especificada pela função  $f$  no segundo membro da equação diferencial. Na média das quatro inclinações, um peso maior é dado às inclinações do ponto médio.

- $k_1$  é a inclinação no início do intervalo, usando  $y$  (Método de Euler);
- $k_2$  é a inclinação no ponto médio do intervalo, usando  $y$  e  $k_1$ ;
- $k_3$  é novamente a inclinação no ponto médio, mas agora usando  $y$  e  $k_2$ ;
- $k_4$  é a inclinação no final do intervalo, usando  $y$  e  $k_3$ .

Ainda, pode-se mencionar, como exemplo de emprego do Método de Euler, Método de Heun e Método de Runge-kutta a seguinte situação problema:

**Exemplo 2.2.3:** Encontre uma aproximação numérica de  $y(1)$ , usando o passo  $h = 0,1$  em que  $y$  é solução do problema de valor inicial abaixo:

$$\begin{cases} y' = yt, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (2.31)$$

Note que a solução analítica dessa equação diferencial é dada por:

$$y = ke^{\frac{t^2}{2}}$$

E que como  $y(0) = 1$ , tem-se que:

$$1 = ke^{\frac{0^2}{2}} = ke^0 = k$$

E portanto:

$$y(t) = e^{\frac{t^2}{2}},$$

$$y(1) = e^{\frac{1}{2}} \approx 1,6487212707.$$

Como a equação é  $y' = yt$ , tem-se que a função associada à equação é:

$$f(t,y) = yt$$

Primeiramente, calcula-se alguns valores manualmente.

**Método de Euler:**

Calculando  $(t_1, y_1)$ :

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1;$$

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot f(0,1) = 1 + 0,1 \cdot 0 \cdot 1 = 1 + 0 = 1.$$

Logo:

$$(t_1, y_1) = (0,1; 1) \tag{2.32}$$

Considerando o uso do símbolo “;”(ponto e vírgula) no lugar da “,”(vírgula) na Equação 2.32 e em todas as demais que fazem uso de números escritos na forma decimal para evitar ambiguidade de notação.

Calculando  $(t_2, y_2)$ :

$$t_2 = t_1 + h = 0,1 + 0,1 = 0,2$$

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + 0,1 \cdot 0,1 \cdot 1 = 1 + 0,01 = 1,01, \text{ logo:}$$

$$(t_2, y_2) = (0,2; 1,01)$$

Outros valores foram obtidos com auxílio de um computador.

**Método de Heun:**

Calculando  $(t_1, y_1)$ :

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1;$$

$$y_1^* = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot f(0; 1) = 1 + 0,1 \cdot 0 \cdot 1 = 1 + 0 = 1;$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, y_0) + f(t_0, y_1^*)) = 1 + 0,05(0 + 0) = 1, \text{ logo:}$$

$$(t_1, y_1) = (0,1; 1).$$

Calculando  $(t_2, y_2)$ :

$$t_2 = t_1 + h = 0,1 + 0,1 = 0,2;$$

$$y_2^* = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + 0,1 \cdot 0,1 \cdot 1 = 1 + 0,01 = 1,01;$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(f(t_1, y_1) + f(t_1, y_2^*)) = 1 + 0,05(0,1 \cdot 1 + 0,11,01) = 1 + 0,01005 = 1,01005,$$

logo:

$$(t_2, y_2) = (0,2; 1,01005)$$

Outros valores foram obtidos com auxílio de um computador.

**Método de Runge-Kutta:**

Calculando  $(t_1, y_1)$ :

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0,1 = 0,1;$$

$$k_1 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) = 0 \cdot 1 = 0;$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f\left(0 + 0,05; 1 + 0,05 \cdot 0\right) = f(0,05; 1) = 0,05 \cdot 1 = 0,05;$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f\left(0 + 0,05; 1 + 0,05 \cdot 0,05\right) = f(0,05; 1 + 0,05 \cdot 0,05) = f(0,05; 1,0025) = 0,05 \cdot 1,0025 = 0,050125;$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + hk_3) = f(0 + 0,1; 1 + 0,1 \cdot 0,050125) = f(0,1; 1,0050125) = 0,10050125;$$

Portanto,

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) =$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{60}(0 + 2 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,050125 + 0,10050125) =$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{60}(0,1 + 0,10025 + 0,10050125) = 1 + \frac{1}{60}(0,30075125)$$

$$y_1 \approx 1 + 0,00501252083333 = 1,00501252083333.$$

logo:

$$(t_1, y_1) \approx (0,1; 1,00501252083333).$$

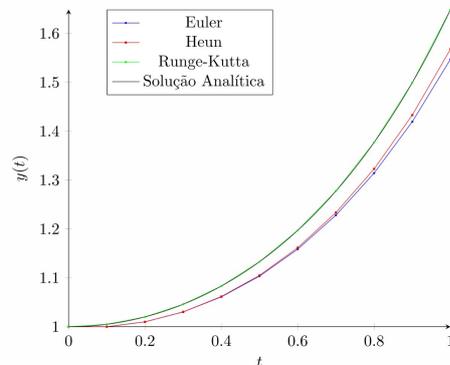
Outros valores foram obtidos com auxílio de um computador. Segue abaixo uma tabela com esses valores.

**Tabela 2.1:** Métodos Numéricos

Tempo	Euler	Heun	Runge-Kutta	Solução Analítica
0,0	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000	1,0000000000
0,1	1,0000000000	1,0000000000	1,0050125208	1,0050125208
0,2	1,0100000000	1,0100500000	1,0202013398	1,0202013400
0,3	1,0302000000	1,0304530100	1,0460278589	1,0460278599
0,4	1,0611060000	1,0618303042	1,0832870648	1,0832870677
0,5	1,1035502400	1,1051529806	1,1331484461	1,1331484531
0,6	1,1587277520	1,1617920708	1,1972173474	1,1972173631
0,7	1,2282514171	1,2335908208	1,2776212795	1,2776213132
0,8	1,3142290163	1,3229644758	1,3771276949	1,3771277643
0,9	1,4193673376	1,4330351201	1,4993023624	1,4993025001
1,0	1,5471103980	1,5678120732	1,6487210071	1,6487212707

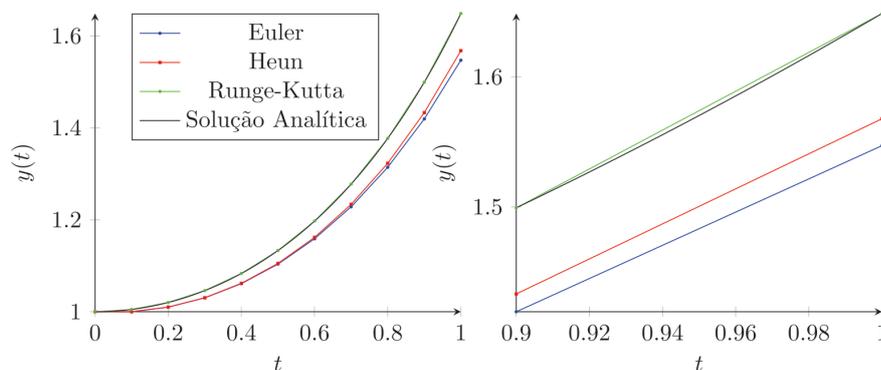
A Tabela 2.1 e a Figura 2.5 representam as soluções por meio dos Método

Numéricos do problema proposto na Equação 2.31. Na Figura 2.5 o eixo  $x$  representa os valores compreendidos no intervalo  $[0,1]$ , e no eixo  $y$  são apresentados os passos correspondentes a  $h = 0,1$ .



**Figura 2.5:** Métodos Numéricos. Fonte: Elaborado pela autora.

Note que o método de Euler é mais simples que os demais: ele representa uma introdução às técnicas numéricas. Os outros métodos foram desenvolvidos e aperfeiçoados a partir dele. A aproximação numérica através do método de Runge-Kutta é o que mais se aproxima da solução exata do problema de valor inicial proposto na Equação. Neste caso, a aproximação é tão boa que os dois gráficos chegam quase a se sobreporem. É possível visualizar a diferença ao modificar a escala gráfica como representado na Figura 2.6.



**Figura 2.6:** Métodos Numéricos: Ampliação gráfica. Fonte: Elaborado pela autora.

A maior parte dos modelos matemáticos não possuem solução analítica. Obter as aproximações numéricas com o auxílio de ferramentas computacionais, torna-se uma ferramenta útil para realizar cálculos trabalhosos. A computação gráfica é, portanto, uma das áreas da computação que possibilitam representar informações através de construções gráficas. As equações são transformadas em códigos que aliados às técnicas e métodos computacionais armazenam e manipulam com facilidade um grande número de dados.

# Epidemiologia e Modelagem Matemática e Modelos Epidemiológicos

---

Nesse capítulo será definido o que é Epidemiologia, o objeto de estudo desta ciência e os principais conceitos relativos às medidas em saúde pública originados dos estudos sobre a ocorrência e distribuição das doenças. O conceito de modelagem matemática, a definição do termo “modelo” e a descrição dos principais modelos epidemiológicos existentes também serão apresentados.

## 3.1 O que é Epidemiologia?

A palavra “Epidemiologia” é de origem grega, constituída por três termos que unificados transmitem o significado relevante desta palavra. O prefixo *epi* significa sobre, acima; o radical *demós* se refere ao povo; o sufixo *logos* é oriundo do termo grego *legein* e está associado a ideia de estudo, palavra, discurso, reunir e organizar. A junção destes termos resume o conceito da palavra Epidemiologia “ciência do que se abate sobre o povo”[29].

Investigar os diversos modos de prevenção, controle e erradicação das doenças são os principais pontos de estudo da Epidemiologia e objetiva caracterizar o processo saúde-doença, sua distribuição e os fatores determinantes destas ocorrências nos grupos humanos, portanto, o alvo de estudo desta ciência é a população humana [6].

O conceito de doença está relacionado às alterações ocorridas no organismo em virtude da falta ou do excesso de reações a estímulos internos e externos das estruturas responsáveis pelas funções vitais. O mal funcionamento dos sistemas interligados e responsáveis pelas funções vitais pode produzir modificações nas estruturas e no funcionamento dos órgãos, sistemas ou organismos. O pensar a doença requer a análise de suas várias dimensões que se interligam a questões diversas, tais como o modo de transmissão das doenças, o cotidiano, hábitos e modos de vida, das pessoas e os processos de organização das políticas públicas, que objetivam contribuir para a melhoria da qualidade de vida das pessoas e elevar os níveis de saúde das coletividades humanas [29].

O nascimento histórico dos estudos epidemiológicos acontece com Hipócrates ao realizar observações dos fatores ambientais e a ocorrência das doenças. Considerado



indispensáveis para as atividades epidemiológicas. Esses parâmetros são denominados indicadores de saúde, eles descrevem e representam as situações existentes ou avaliam o cumprimento dos objetivos estabelecidos por organizações mundiais, propõem metas e mudanças destas ao longo do tempo, e são utilizados para prever tendências futuras [29].

Os resultados obtidos por esses indicadores de saúde são operacionais epidemiológicos e expressam informações precisas da ocorrência de doenças em um determinado lugar em dado momento, por exemplo, o número de casos da COVID-19 no Brasil, no primeiro semestre do ano de 2020.

### 3.1.2 Incidência e Prevalência

A incidência e a prevalência são medidas que indicam o número de ocorrências de uma doença em um determinado intervalo de tempo. A incidência registra o número de casos novos, e transmite a ideia da intensidade com a qual ocorre a doença em uma população. A prevalência aponta para o número total de casos novos e velhos. Estas medidas se relacionam ao estudo de uma doença em um determinado período de tempo em uma população específica [6].

O aumento do número de novos casos da doença (taxa de incidência) provoca o aumento imediato do número de casos totais da doença (taxa de prevalência), para reduzi-la, os indivíduos devem ser removidos da classe ou compartimento dos doentes ou infecciosos, sendo que essa remoção ocorre quando os indivíduos se recuperam da doença ou em caso contrário quando o quadro clínico dos pacientes evolui para óbito.

A Figura 3.2 ilustra as principais diferenças entre as taxas de incidência e prevalência. A representação se baseia em um tanque onde o número de casos da doença é armazenado, o fluxo de entrada é relativo a ocorrência de novos casos, o fluxo interno indica a prevalência ou quantidade total de casos da doença na população. A retirada deste fluxo faz referência ao período de transição do número de casos de pessoas doentes para as classes dos removidos ou recuperados.

A **taxa de incidência** ( $I$ ), é calculada da seguinte forma:

$$I = \frac{\text{Número de novos casos de uma doença}}{\text{Soma total de pessoas expostas ao risco de adquirir a doença}} (\times 10^n). \quad (3.1)$$

O rápido surgimento de novos casos de uma doença é determinado pela taxa de incidência como descrito na Equação 3.1. Para calcular esta medida pode-se efetuar a razão entre o número de novos casos e a população de indivíduos suscetíveis a doença. Para que a razão não perca o padrão de comparação em relação à população, uma vez que o resultado obtido é um número decimal, multiplica-se o resultado encontrado por uma potência de base dez que representa uma base referencial da população ( $10^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ). O registro da ocorrência dos novos casos é realizado em relação ao tempo (dia, mês, ano, etc). A taxa de incidência também é considerada como taxa de ataque por significar a manifestação inicial da doença [29].

A taxa de prevalência descrita na Equação 3.2 tem o significado exemplificado



**Figura 3.2:** Incidência x Prevalência. **Fonte:** Adaptada de Rouqueyrol [29].

pelo próprio termo que a nomeia: a prevalência indica o quanto uma doença persiste em permanecer em uma determinada região, ou em classes específicas da população. Para calcular a taxa de prevalência efetua-se a razão entre a soma de casos novos e velhos de uma doença, pelo número de indivíduos da população. O resultado obtido é multiplicado por uma potência de base dez, que é utilizada como referencial da população. A taxa é utilizada para o estudo das doenças crônicas, tais como, o diabetes, o colesterol alto e a hipertensão, doenças de lento desenvolvimento e longa duração [6].

A **taxa de prevalência** ( $P$ ) de uma doença é calculada como segue:

$$P = \frac{\text{Número de casos conhecidos de uma doença}}{\text{população}} (\times 10^n). \quad (3.2)$$

A vulnerabilidade à doença em determinada classe etária ou social, entre outros aspectos, representa parte das informações importantes que são desconsideradas ao efetuar o cálculo da taxa de prevalência.

### 3.1.3 Letalidade e Mortalidade

Para estudar as doenças e estabelecer a relação delas com a população é preciso medir a ocorrência da doença por meio da contagem do número de óbitos. Essas informações são fornecidas pelos coeficientes de letalidade e mortalidade, e estes índices indicam a probabilidade ou risco de qualquer pessoa da população vir a morrer em decorrência de uma determinada doença.

O índice que indica a gravidade da doença e quantifica o potencial que a doença possui para causar mortes é definido pela letalidade  $L(\%)$ . Para obter a letalidade, deve-se calcular a razão entre o número de óbitos resultados de uma determinada doença e o número de casos de pessoas contaminadas por esta doença na população,

conforme a equação.

A **taxa de letalidade** é calculada da seguinte forma:

$$L(\%) = \frac{\text{Número de mortes de uma doença em certo período}}{\text{Número de doentes por uma doença no mesmo período}} \times 100. \quad (3.3)$$

Para indicar a gravidade da doença e a porcentagem das pessoas infectadas que foram a óbito, utiliza-se a Equação 3.3. Para isto, é preciso considerar a razão entre o número de pessoas que vieram a óbito com o diagnóstico confirmado da doença e o número de indivíduos que contraíram a doença entre a população total de suscetíveis da população [29].

A taxa de mortalidade por causa permite analisar o número de óbitos originados pela doença em relação à população exposta ao risco.

A **taxa de mortalidade por causa** é calculada da seguinte forma:

$$\text{Taxa de Mortalidade} = \frac{\text{N}^\circ \text{ de óbitos de uma doença em certo período}}{\text{população total no período}} (\times 10^n). \quad (3.4)$$

Para calcular a taxa de mortalidade descrita na Equação 3.4, efetua-se a razão entre o número de óbitos confirmados pela doença e o número total de pessoas da população em estudo, o resultado da razão é multiplicado por uma potência de base  $10^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , que representa a base referencial da população.

É necessário especificar a diferença entre os índices de letalidade e mortalidade, pois embora ambos sejam proporções matemáticas, elas se diferem uma vez que, a letalidade se refere a porcentagens de pessoas infectadas que já foram a óbito. Já a gravidade da doença é expressa pela taxa de mortalidade, pois esta apresenta o número de óbitos da doença em relação à população total de indivíduos em estudo. As duas taxas desconsideram características de riscos de morte específicos em relação a idade, raça, classe social, sexo e outros aspectos [6].

### 3.1.4 Intervenções para o controle de doenças

Para compreender o que são as medidas de controle e a importância de se prever o comportamento da doença por meio de um modelo matemático, tem-se que compreender alguns termos específicos que definem as principais ações públicas para o controle da doença. Entre essas ações é possível destacar: o isolamento, a quarentena, o distanciamento social, e a contenção da comunidade. Em casos específicos quando as causas ou o agente infeccioso de uma doença com potencial pandêmico não são conhecidas e não há produção de remédios, vacinas ou antivirais, existem medidas tradicionais eficientes para o controlar ou erradicar a doença. O objetivo principal das medidas de saúde é impedir a propagação da doença entre seres humanos para cessar sua transmissão da doença [38].

Entre as principais medidas de saúde, está o isolamento, separação de um caso clínico de outras pessoas durante o período de transmissão da doença, a fim de evitar que os suscetíveis sejam infectados, em certos casos, o isolamento pode ser domiciliar ou hospitalar. A quarentena, consiste na restrição das atividades de indivíduos

expostos à doença durante o período máximo de incubação <sup>1</sup>, a fim de evitar a propagação da doença, o monitoramento dos possíveis casos no decorrer do tempo possibilitará a identificação de casos assintomáticos que venham a evoluir para casos sintomáticos [38].

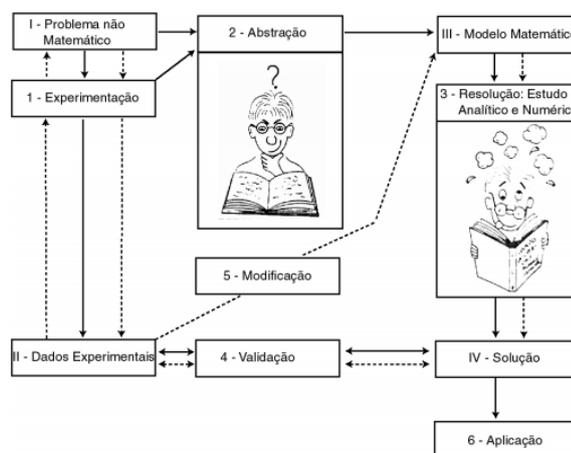
As medidas restritivas são eficazes para evitar a transmissão das doenças entre elas existe também o distanciamento social. Este, consiste em aplicar ações para diminuir o número de contatos entre indivíduos de uma determinada população e objetiva diminuir o número de aglomerações e interações entre pessoas de uma comunidade.

A contenção da comunidade é uma medida que abrange o fechamento de escolas, prédios, escritórios públicos e o cancelamento de reuniões ou eventos, medida útil em locais onde já há a notificação de casos de transmissão comunitária da doença, representa um protocolo de emergência que se destina a prevenir a mobilidade de pessoas, esta medida deve ser iniciada por alguma pessoa em condição de autoridade e exige o bloqueio ou suspensão de diversas atividades [38].

## 3.2 Modelagem matemática

Modelagem Matemática é um processo dinâmico, uma forma de abstração e generalização, de realidades. As principais características da atividade de Modelagem Matemática baseiam-se na resolução de uma situação problema. Consiste em um processo investigativo que interliga conhecimentos matemáticos e não matemáticos representados através de linguagem lógica e racional para a construção do modelo [1].

A Figura 3.3 ilustra os principais passos da atividade de construção do modelo matemático que compreendem os processos de observar um problema não matemático, abstrair este problema, encontrar as possíveis soluções através de estudos analíticos e numéricos, validação, modificação e aplicação do modelo. [4].



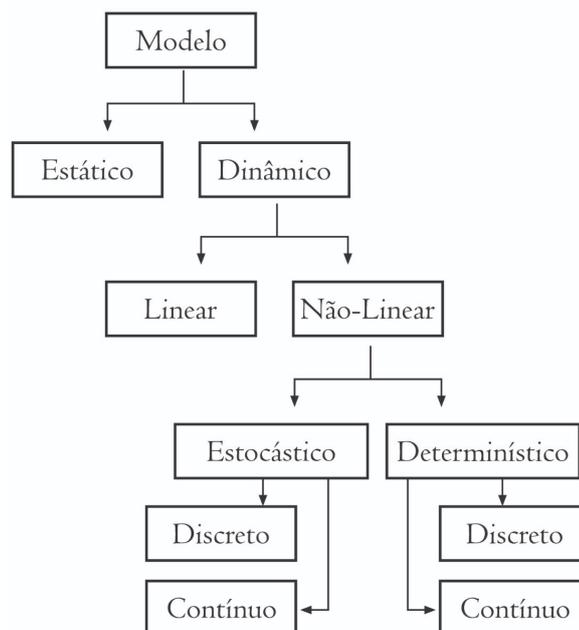
**Figura 3.3:** Procedimentos da Modelagem Matemática. Fonte: Bassanezi, 2002 [4].

<sup>1</sup>Incubação: “É o período entre a exposição de um agente infeccioso e o aparecimento dos sintomas da doença”

O termo modelo é originado do latim, e significa medida geral. Em suas raízes etimológicas, ele é caracterizado como a representação de alguma coisa, ou um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema. O modelo pode ser caracterizado como um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma objeto ou situação real, é a representação de uma porção de um fenômeno ou objeto na tentativa de explicar, entender, agir ou formalizar através de um sistema artificial [1].

Quantidades que influenciam em algum processo dinâmico são denominadas variáveis, parâmetros ou constantes. Os parâmetros são medidas auxiliares, as variáveis são grandezas que se modificam durante o processo, e as constantes são valores fixos [4].

A Figura 3.4 ilustra características e critérios utilizados para a construção dos modelos matemáticos apresentados nesta pesquisa, que podem assim serem classificados como modelos dinâmicos, não lineares, determinísticos, nos tempos discreto e contínuo.



**Figura 3.4:** Fluxograma de representação dos Modelos Matemáticos. Fonte: Elaborado pela autora.

Diferentes configurações e classificações podem ocorrer de acordo com a formulação do modelo. Aspectos relativos a natureza do fenômeno e situação analisada influenciam diretamente na escolha das diversas construções possíveis. A classificação do modelo está relacionada com o tipo de matemática a ser utilizada para demonstrar a dinâmica do fenômeno em estudo. A listagem abaixo aponta para alguns caminhos e escolhas características da atividade de modelagem matemática.

• **DINÂMICO ou ESTÁTICO:**

Modelos dinâmicos relacionam mudanças no estado do sistema ao longo do tempo. A formulação de modelos dinâmicos, em geral, envolve dois tipos de variáveis: dependentes e independentes, onde a variável independente é geralmente o tempo. Sistemas reais apresentam relações que podem mudar com o tempo, por exemplo, sistemas sujeitos a vazamentos como em amortecedores, sistemas sujeitos a envelhecimento como em estruturas, oxidação em circuitos elétricos [15].

Modelos Estáticos são empregados onde não se utiliza a variação do tempo para descrever o sistema. Quando se expressa a relação entre entradas e saídas de um sistema pela equação  $y = g(u)$  e, considera-se que esta relação é válida para todos os instantes de tempo, então o sistema é invariante no tempo ou estacionário, estes modelos apresentam correspondência biunívoca entre as variáveis da formulação e as variáveis físicas do sistema caracterizado [15].

Matematicamente, as relações entre entrada(s)-saída(s) em sistemas estáticos são expressas por equações algébricas, ao passo que em sistemas dinâmicos, por equações diferenciais.

• **LINEAR ou NÃO-LINEAR:**

De acordo com as características das equações que descrevem o modelo é possível classificá-lo como linear ou não-linear. Diz-se que  $f : V \rightarrow W$ , função entre dois espaços vetoriais é linear sobre  $\mathcal{R}$  se:

- i.  $\forall x, y \in V \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$
- ii.  $\forall x \in V \forall a \in \mathcal{R} \quad f(ax) = af(x)$

Caso a função  $f$ , não satisfaça as condições anteriores será classificada como não-linear [15].

• **DETERMINÍSTICO ou ESTOCÁSTICO:**

Modelos Determinísticos são aqueles nos quais o conjunto de estados ou variáveis são unicamente determinados pelos parâmetros do modelo e do estado inicial das variáveis, envolvem alta complexidade, grande número de variáveis. A aceleração clássica como vista no Ensino Médio definida por meio da lei  $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$  é um exemplo de modelo determinístico, a variável  $a$  é uma constante e não depende de fatores probabilísticos. Os modelos epidemiológicos determinísticos utilizam equações diferenciais para descrever a evolução do número de infetados ( $I$ ) e de suscetíveis ( $S$ ) de serem infetados em uma determinada população. O modelo predador-presa, também conhecido por Lotka-Volterra, pode ser considerado como o primeiro modelo epidemiológico determinístico [15].

Os Modelos Estocásticos são caracterizados por apresentarem aleatoriedade e por suas variáveis serem descritas por distribuições de probabilidade, entre outros exemplos se incluem o comportamento de partículas sujeitas a impactos aleatórios, som de tiros em válvulas de vácuo, difusão molecular, queda radioativa, variações na

qualidade dos produtos de uma fábrica, mutações genéticas, variação na atividade de bolsa de valores. O primeiro modelo estocástico foi o modelo conhecido como modelo de cadeia binomial [15].

- **DISCRETO ou CONTÍNUO:**

Modelos discretos tratam o tempo como se este fosse constituído por partes distintas, ou discretas. Geralmente estes modelos transformam uma sequência de entrada  $s(n)$  em uma sequência de saída  $y(n)$ , para resolvê-los utilizam-se equações de diferenças e fórmulas recursivas, tem-se como exemplo de modelo matemático em tempo discreto os problemas advindos da Ciência da computação, tais como, a construção de algoritmos computacionais [4].

Os modelos contínuos incorporam o tempo ou estado dos sistemas através do estudo das variações instantâneas das quantidades presentes e consideradas essenciais ao modelo e utilizam equações diferenciais como método de resolução, como exemplo, pode-se mencionar o crescimento de populações, circuitos eletrônicos, reações químicas, modelos econométricos.

A formulação matemática, assim como a interpretação de um fenômeno, depende da escolha que se faz em relação à continuidade ou não das variáveis observadas. No modelo discreto as taxas de variações são apresentadas em um intervalo finito e no Modelo Contínuo as taxas são instantâneas [5].

### 3.3 Modelos epidemiológicos

O estudo das doenças com a utilização dos métodos de contagem e processos matemáticos no desenvolvimento de pesquisas e investigações são realizados por meio da criação dos modelos matemáticos. Estes modelos em colaboração interdisciplinar com as demais áreas da saúde e com os recursos tecnológicos contribuem para o progresso da Epidemiologia Matemática. O processo de investigação da propagação da doença através da linguagem matemática é interligado a conhecimentos de Ciências Biológicas e os resultados são apresentados por meio da Biomatemática<sup>2</sup> ou biologia matemática e teórica [20].

A doença foi definida anteriormente como estado de perturbação ou alteração das estruturas ou sistemas corporais são classificadas de acordo com a forma com que elas são transmitidas. Quando a transmissão ocorre entre indivíduos as doenças são classificadas como infecciosas, caso contrário, quando as doenças são desenvolvidas ao longo da vida útil de um indivíduo sem a ocorrência do contato entre indivíduos infectados e/ou infecciosos as doenças são consideradas como não-infecciosas. O agente causador da doença infecciosa pode ser um microparasita (vírus, bactérias, fungos e muitos protozoários) ou macroparasita (a maioria são vermes), a forma como a transmissão ocorre é categorizada como direta quando o processo infeccioso ocorre por contato entre indivíduos ou por transmissão indireta, quando o agente etiológico passa parte do seu ciclo de vida fora do hospedeiro. [18].

---

<sup>2</sup>Biomatemática: “é a disciplina que combina os usos simultâneos das ciências biomédicas e da matemática”[20]

Em 1906, W.H. Hamer e Sir Ronald Ross desenvolveram as primeiras pesquisas sobre a transmissão de doenças infecciosas representadas a partir dos modelos matemáticos, nestes estudos o processo investigativo consistiu em analisar a dinâmica da epidemia e a relação entre o número de indivíduos não infectados e a taxa de contato entre os suscetíveis e infectados, ao considerar que a taxa de transmissão da doença é proporcional ao produto da densidade de indivíduos suscetíveis e infectados [33].

A Epidemiologia Matemática como disciplina de estudo foi consolidada após a Gripe Espanhola (1918-1920) que infectou um quarto da população mundial. As bases sólidas de estudos e pesquisas realizadas anteriormente por pesquisadores, tais como Anderson Mckendric e Willian Kermack, caracterizaram a disciplina a partir de pesquisas científicas que relacionam a matemática ao estudo das doenças infecciosas [31].

Os modelos matemáticos criados por Kermack e Mckendrick, no início do século XX relacionam a dinâmica da transmissão da doença a sistemas de equações. Estes modelos são simples, incluem compartimentos que abordam questões biológicas e geram entendimento sobre a dinâmica da doença e o seu controle.

A população é dividida em compartimentos assim nomeados:

- Suscetíveis ( $S$ ): indivíduos sádios, livres da doença;
- Expostos ( $E$ ): indivíduos que já estão infectados mas não transmitem a doença;
- Infectados ( $I$ ): indivíduos que foram infectados e são transmissores da doença;
- Recuperados ( $R$ ): indivíduos que saíram do período infeccioso e possuem imunização permanente a doença.

O fluxo das pessoas é alterado entre os compartimentos em uma ordem que caracteriza o processo da doença epidemiológica [19].

Modelos compartimentais são obtidos de equações de diferenças e fórmulas recursivas advindas da análise das equações do sistema de equações em tempo discreto ou através de equações diferenciais ordinárias, uma importante ferramenta de aplicação das teorias de Cálculo. O modelo representa um problema real onde as mudanças compartimentais futuras dependem de como os valores presentes variam (taxa de variação). Os sistemas de equações diferenciais relacionam as informações relevantes para a análise do problema real a ser modelado. O estudo de cada uma das grandezas envolvidas na elaboração do sistema é categorizado em compartimentos ou classes que representam informações hierarquizadas de menor ordem que também podem ser chamados de subsistemas ou compartimentos [36].

A disseminação da doença é representada por implementação de valores numéricos, taxas futuras de propagação que definem numericamente alguns parâmetros epidemiológicos, tais como, o número de infectados ou a duração da doença. A análise destes modelos pode ser reveladora para o posicionamento dos representantes governamentais que podem através deles proporem medidas de saúde coletiva que objetivem controlar uma epidemia. As classes compartimentais, de acordo com o

tempo sofrem variações em relação a quantidade de indivíduos, suscetíveis, infectados e recuperados [38].

Para utilizar um modelo matemático é necessário observar o processo epidemiológico, ou seja, conhecer as principais características da doença a ser investigada. Existem modelos clássicos em epidemiologia matemática, outros modelos são advindos destes mas com a inserção de outros parâmetros. Os modelos permitem melhorar o controle, analisar, otimizar o uso de recursos de controle, reduzir as taxas de transmissão entre indivíduos suscetíveis e infectados ou até mesmo erradicar a doença. As observações características das doenças permitem a reformulação dos modelos para que estes caracterizem o processo de propagação da doença [15].

### 3.3.1 Conceitos biológicos

As doenças infecciosas são resultantes de uma infecção, processo onde o organismo humano ou animal sofre penetração de um agente infeccioso. Toda doença contagiosa é infecciosa, ou seja, transmissível, o agente infeccioso pode migrar do indivíduo infectado para o indivíduo sadio. A doença infecciosa assume a forma manifesta quando o indivíduo infectado apresenta os sintomas característicos da doença já a forma inaparente ocorre quando os sintomas clínicos não são manifestos, neste caso, o indivíduo portador da doença também é um agente transmissor [29].

O agente infeccioso causador da doença apresenta características específicas importantes em relação a interação com o hospedeiro. Entre elas pode-se destacar: infectividade, patogenicidade, virulência, dose infectante, poder invasivo e imunogenicidade. A capacidade do agente infeccioso infectar outra pessoa através do processo de transmissão está relacionada ao modo de contato entre as pessoas em determinada região e a outros fatores diversos. Define-se por taxa de contato ( $\varphi_T$ ), o número de vezes onde um indivíduo infectado entra em contato com outros indivíduos [29].

A taxa de recuperação ( $\gamma$ ) compreende o intervalo entre o período infeccioso e as reações do organismo ao produzir anticorpos que combatem o agente infeccioso e o anulam no organismo do hospedeiro. O inverso da taxa de recuperação  $\gamma^{-1}$  representa o tempo de recuperação do indivíduo, após esse período o indivíduo se torna imune a doença.

A taxa de formação de novos casos ou incidência formulada por uma lei matemática em relação as interações ocorridas no modelo compartimental, é indicada por:

$$\frac{\beta_0 \cdot \varphi_T \cdot S(n) \cdot I(n)}{T(n)}. \quad (3.5)$$

Na equação 3.5,  $\beta_0$  representa a probabilidade de infecção para cada contato,  $\varphi_T$  é a taxa de contato entre indivíduos suscetíveis e infectados em uma determinada população  $T$  em um período de tempo  $n$ .

Quando a taxa de contato é proporcional a população total,  $\varphi_T = kT$ , a equação 3.5, que indica a incidência pode ser reescrita como

$$\lambda S(n)I(n).$$

Onde,  $\lambda = \beta_0 k$  é chamada de transmissão.

Quando a taxa de contato é constante, isto é  $\varphi_T = k'$ , a incidência 3.5 será reescrita como

$$\frac{\beta S(n)I(n)}{T(n)}.$$

Onde,  $\beta = \beta_0 k'$  chamada incidência padrão.

### 3.3.2 Reprodutibilidade basal

**Definição 3.1:** Reprodutibilidade Basal ( $\mathcal{R}_0$ ) : Número médio de formação de novos casos da doença gerados por um único indivíduo infectado durante o seu período infeccioso. O valor de  $\mathcal{R}_0$  para modelos compartimentais será estimado através da seguinte aproximação [21].

$$\mathcal{R}_0 \propto \begin{pmatrix} \text{a probabilidade} \\ \text{de infecção} \\ \text{dado o contato entre} \\ \text{um indivíduo infectado} \\ \text{e um suscetível} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{taxa média} \\ \text{de contato entre} \\ \text{um indivíduo} \\ \text{infectado} \\ \text{e um suscetível} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{duração do período} \\ \text{infeccioso,} \\ \text{inverso da} \\ \text{taxa de} \\ \text{recuperação} \end{pmatrix}.$$

O número de reprodutibilidade basal representa um parâmetro limite ou valor limiar, foi introduzido por Kermarck e McKendrick em estudos sobre os fatores que estão associados a transmissão das doenças infecciosas em seres humanos [21].

No software GeoGebra, foram criadas várias animações como a ilustrada na Figura 3.5 para exemplificar o conceito do número de Reprodutibilidade Basal. A animação representa de maneira dinâmica o processo de propagação da doença ao introduzir um indivíduo infectado em uma população de suscetíveis. O conceito pode ser aplicado em sala de aula para alunos que ainda cursam o ensino fundamental, pois, embora represente um modelo de crescimento exponencial, requer para a sua compreensão que o aluno domine as habilidades referentes a processos multiplicativos e consiga interpretar a situação ilustrada [30].

Historicamente, a taxa de reprodutibilidade basal foi utilizada com o objetivo de gerar compreensão sobre o processo de propagação de doenças com potenciais pandêmicos, tais como a síndrome respiratória aguda, a malária e outras doenças [18].

As variações de  $\mathcal{R}_0$ , utilizadas como padrões de controle, consistem em analisar numericamente este valor e perceber as suas alterações por meio dos seguintes critérios:

- Se  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , então existe um padrão de controle ou equilíbrio que indica a redução do número de novos casos da doença em que os indivíduos infectados não serão substituídos e a doença não se espalhará.
- Se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , o número de infectados aumentará e a epidemia poderá se propagar.

De acordo com o número de reprodutibilidade basal é possível verificar a variação do número de indivíduos infectados em relação a uma doença qualquer. A Figura

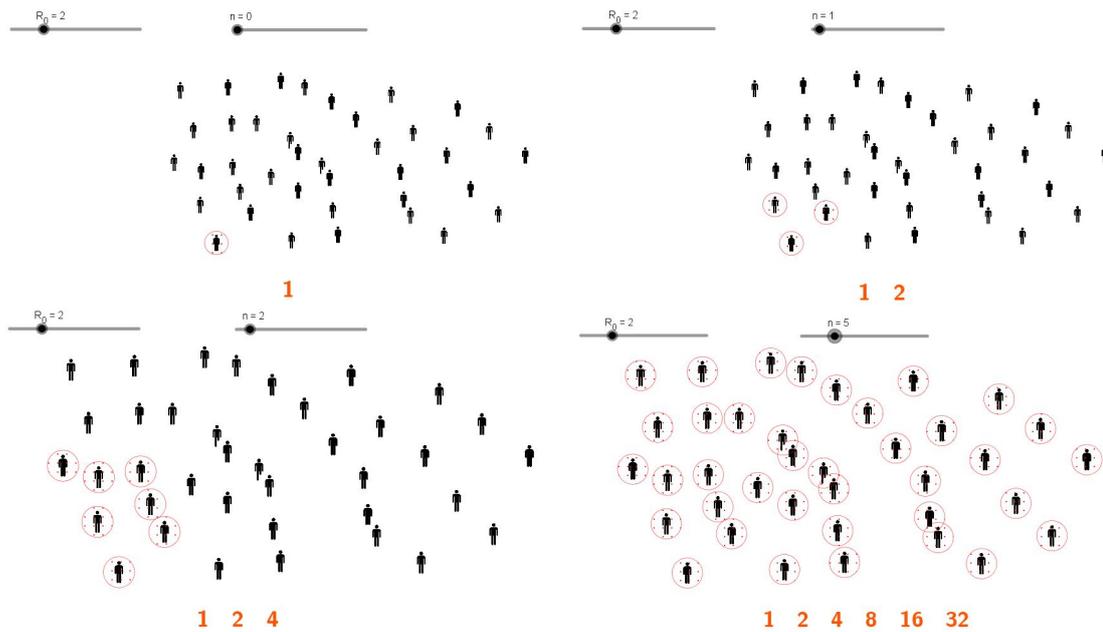


Figura 3.5: Propagação do surto epidemiológico, Fonte: GeoGebra.

3.6 ilustra a oscilação da curva do número de infectados de acordo com a variação do número de reprodutibilidade basal.

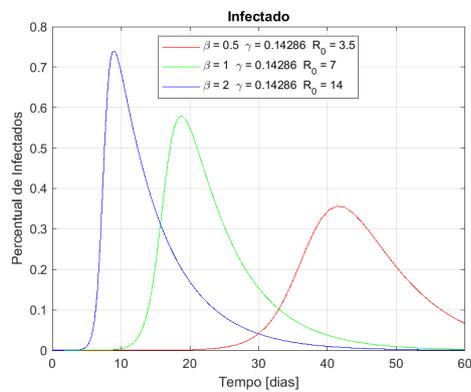


Figura 3.6: Variações do Número de Reprodutibilidade Basal. Fonte: Elaborado pela autora.

Para efetuar o cálculo de  $\mathcal{R}_0$ , faz-se necessário limitar a complexidade do problema.

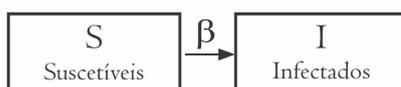
# Modelos epidemiológicos em tempo discreto e em tempo contínuo

---

Neste capítulo serão descritos os principais modelos epidemiológicos. As hipóteses e pressupostos estabelecidos para a construção do modelo matemático. Estes modelos serão apresentados através de fluxogramas, ilustrações gráficas e sistemas de equações.

## 4.1 Caracterização dos Modelos epidemiológicos clássicos

### Modelo SI (Suscetível-Infectado)

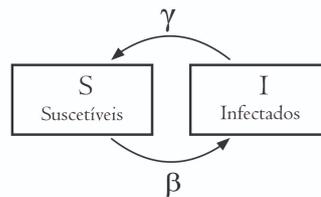


**Figura 4.1:** Representação compartimental do Modelo SI. Fonte: Elaborado pela autora.

O modelo SI (Suscetível- Infetado) é caracterizado por dois compartimentos como ilustrado na Figura 4.1, onde os indivíduos da população são organizados e classificados como suscetíveis ou infectados, após ser infectado pelo agente causador da doença o indivíduo não mais retornará para o compartimento dos suscetíveis, pois será permanentemente infectado. Este modelo é utilizado para representar doenças incuráveis como o HIV [18].

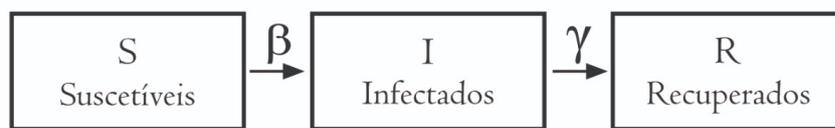
### Modelo SIS (Suscetível-Infetado-Suscetível)

O modelo SIS (Suscetível-Infetado-Suscetível) apesar de apresentar dois compartimentos como ilustrado na Figura 4.2, representa doenças nas quais após o indivíduo ser infectado poderá contrair a doença novamente. A exemplo, as que são sexualmente transmissíveis, como a Gonorréia [18].



**Figura 4.2:** Representação compartimental do Modelo SIS. Fonte: Elaborado pela autora.

**Modelo SIR (Suscetível-Infetado-Recuperado)**



**Figura 4.3:** Representação compartimental do Modelo SIR. Fonte: Elaborado pela autora.

O modelo SIR (Suscetível-Infetado-Recuperado) apresenta três compartimentos conforme ilustrado na Figura 4.3, ele representa doenças onde toda a população inicialmente é considerada suscetível, mas o indivíduo após ser infectado vai contrair imunidade permanente, uma doença que pode assim ser caracterizada é a Rubéola [18].

**Modelo SEIR (Suscetível-Exposto-Infetado-Recuperado)**



**Figura 4.4:** Representação compartimental do Modelo SEIR. Fonte: Elaborado pela autora.

O Modelo SEIR (Suscetível-Exposto-Infetado-Recuperado) apresenta um compartimento adicional conforme ilustrado na Figura 4.4 denominado de classe dos expostos, composta por indivíduos já infectados mas que ainda não são transmissores da doença por estarem em um período chamado de período de latência <sup>1</sup>[26].

Existem múltiplas possibilidades de estender os modelos até aqui já apresentados, é possível considerar outros fatores relativos a dinâmica da epidemia, tais como, sexo, predisposição à doença, classe social, faixa etária e outros tipos de heterogeneidade [31].

<sup>1</sup>Período de Latência: o indivíduo já está infectado mas não possui reações clínicas, ainda não é capaz de transmitir a doença.

## 4.2 Pressupostos: Considerações iniciais

Para a construção dos modelos epidemiológicos com dinâmica vital considera-se as seguintes hipóteses:

- Os fluxos de nascimento  $b$  e mortalidade  $\mu$  serão considerados entre as classes compartimentais. Os recém-nascidos serão introduzidos na classe dos suscetíveis, uma vez que, ao nascerem não é transmitida a imunidade à doença da mãe para o feto. A taxa de mortalidade é incorporada a todas as classes (suscetível, infectado, recuperado). No entanto, a ocorrência do óbito sofre variações causais, uma vez que pode advir de outros fatores não relativos a doença em estudo.
- A população se mantém constante no período da infecção, ou seja, a taxa de natalidade é igual a taxa de mortalidade.
- Os indivíduos suscetíveis terão a mesma chance de contrair a infecção (interação homogênea).
- Os movimentos de emigração e imigração não serão considerados.
- Taxas constantes (transmissão, removidos).
- Com dinâmica vital, ou seja, na população estudada são considerados os nascimentos e as mortes.
- População com alta taxa de mobilidade, onde as chances de contato entre indivíduo infectado e suscetível possuem as mesmas probabilidades de ocorrerem, todos os indivíduos apresentam a mesma probabilidade de serem infectados pela doença.

Outras hipóteses serão consideradas de acordo com o modelo compartimental que representa a dinâmica do processo biológico, características da doença, formas de transmissão, especificidades do agente infeccioso e interação parasita-hospedeiro.

A formulação de um modelo matemático está relacionada à continuidade das variáveis em estudo. Há situações que podem ser representadas em termos de variáveis contínuas ou através de um conjunto finito de dados analisados em um período qualquer. Na construção de modelos epidemiológicos, em tempo discreto, é possível fazer com que haja o ajuste dos dados para que se aproximem dos modelos teóricos, pois eles são recolhidos em unidade de tempo não contínuo [3].

A variável “ $x$ ” é considerada contínua ao assumir valores reais, quando a variável “ $x$ ” não for contínua será denominada discreta e assumirá valores em um conjunto discreto [4].

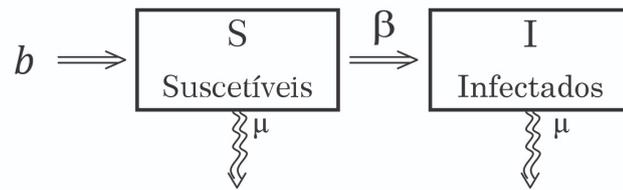
### 4.3 Modelo epidemiológicos em tempo discreto

A dinâmica dos modelos epidemiológicos em tempo discreto é dada por equações de diferenças. A população é constante e distribuída entre as classes dos sistemas epidemiológicos, as taxas de transição entre as classes são constantes e a análise da propagação da doença considera a transição dos indivíduos entre as classes e não atenta para os processos que ocorrem dentro das classes compartimentais.

É importante ressaltar que o desenvolvimento e as notações dos modelos epidemiológicos em tempo discreto SI, SIS, SIR e SEIR que apresentado neste trabalho foram baseadas na sequência desenvolvida em detalhes na tese de doutorado de Mehran Sabeti, “Modelo Epidêmico Discreto SIR com Estrutura Etária e Aplicação de Vacinação em Pulsos e Constante”[31].

#### 4.3.1 O Modelo SI com dinâmica vital em tempo discreto

O modelo compartimental Suscetível-Infetado com dinâmica vital em tempo discreto pode ser assim representado por meio da Figura 4.5



**Figura 4.5:** Modelo Compartimental SI com Dinâmica Vital. Fonte: Elaborado pela autora.

Segue abaixo a Equação 4.1 que descreve o Modelo SI em tempo discreto definido em função das equações do número de suscetíveis e dos infectados e suas variações no tempo ( $n$ ) e ( $n + 1$ ).

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T_n - \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu S_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n \end{cases} \quad (4.1)$$

Onde:

$T_n$ : população total no tempo  $n$ .

$S_n$ : número de suscetíveis no tempo  $n$ .

$I_n$ : número de infectados no tempo  $n$ .

$b, \mu$ : taxa de natalidade e mortalidade ( $b = \mu$ ).

$\beta$ : taxa de incidência.

Para comprovar que a população definida como  $T_n = S_n + I_n$  é constante, hipótese estabelecida na construção do modelo, garantida pela afirmação de que a taxa de natalidade é igual a taxa de mortalidade ( $\mu$ ), deve-se somar as duas equações do sistema, onde obtém-se:

$$T_{n+1} = S_n + \mu T_n - \mu S_n + I_n - \mu I_n = T_n$$

$$T_{n+1} = T_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a população no tempo  $(n + 1)$  é igual a população no tempo  $(n)$ , ou seja,  $T_{n+1} = T_n$ , o que garante que a população é constante, invariante no tempo. Essa condição também é assumida para os próximos modelos e a demonstração é análoga.

**Proposição 4.1:** O número de reprodutibilidade basal no Modelo SI (Suscetível-Infetado) será representado pela seguinte equação 4.2.

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu}. \quad (4.2)$$

**Demonstração:**

Suponha o momento inicial de propagação do surto epidemiológico tem-se o crescimento do número de infectados, onde  $I_{n+1} - I_n > 0$ . Considere a segunda equação do sistema do Modelo SI, expresso no Sistema de Equações 4.1.

$$I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n > 0.$$

assim,

$$\frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n > 0.$$

como  $I_n > 0$ ,

$$\frac{\beta S_n}{T_n \mu} > 1.$$

No início da epidemia, quase todos os indivíduos são suscetíveis. Pode-se tomar  $\frac{S_n}{T_n} \simeq 1$ , obtém-se a seguinte desigualdade,

$$\frac{\beta}{\mu} > 1.$$

Tem-se que  $\beta$  representa a probabilidade de que no encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados ocorra a transmissão da infecção. Este fator está multiplicado pelo inverso da taxa de mortalidade  $\mu$  que indica o período médio de tempo que um indivíduo permanece no compartimento dos infectados. Logo, a razão  $\frac{\beta}{\mu}$ , pode ser estimada como o número de reprodutibilidade basal, ou seja, ela representa o número de casos secundários gerados a partir de um caso infeccioso inserido em uma determinada população. Portanto,

$$\frac{\beta}{\mu} = \mathcal{R}_0 > 1,$$

como  $\mathcal{R}_0 > 1$ . Tem-se que, o número de infectados aumentará e a epidemia poderá se propagar.

O número crítico de indivíduos suscetíveis para que ocorra a epidemia é expresso pela seguinte desigualdade,

$$\frac{S_n}{T_n} > \frac{\mu}{\beta} \Rightarrow S_n > \frac{S_n}{T_n} > \frac{\mu}{\beta} \Rightarrow S_n > \frac{\mu}{\beta} \Rightarrow S_n > \frac{1}{\mathcal{R}_0},$$

portanto, se o número de indivíduos suscetíveis da população em um tempo  $n$  estiver acima do valor crítico definido como o inverso do número de reprodutibilidade basal tem-se que a taxa de crescimento da população de indivíduos infectados será crescente.

Caso no momento inicial de propagação da doença  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ , tem-se que  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  o que possivelmente indica a redução do número de casos da doença como um possível apontamento de que a doença não se espalhará.

### Pontos de Equilíbrio

As soluções do sistema de equações 4.1 onde as variáveis  $S$  e  $I$ , não dependem do tempo são denominadas pontos de equilíbrio do sistema, ou seja, o tempo não mais provoca mudança no número de infectados e suscetíveis que se tornarão constantes. Um ponto de equilíbrio característico de uma população livre de doenças é identificado pelo fato de que não são introduzidos indivíduos infectados na população e o número de indivíduos suscetíveis corresponderá ao total de indivíduos da população. No caso contrário, o ponto de equilíbrio é definido pela constância no número de indivíduos suscetíveis e infectados ao longo do tempo, definido na Equação 4.3 [31]:

$$S_{n+1} = S_n = S \quad \text{e} \quad I_{n+1} = I_n = I. \quad (4.3)$$

Ao substituir 4.3 nas equações do sistema 4.1 obtém-se:

$$\begin{cases} \mu T - \frac{\beta SI}{T} - \mu S = 0 \\ \frac{\beta SI}{T} - \mu I = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

A seguinte proposição definirá os pontos de equilíbrio ou soluções  $(S, I)$  do sistema equações 4.1.

**Proposição 4.2:** Se  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  o sistema 4.4 admite um ponto de equilíbrio chamado de equilíbrio livre de doença dado por  $E_0 = (T, 0)$ . Caso contrário, o sistema admite dois pontos de equilíbrio livre de doença  $E_0$  e equilíbrio endêmico dado por:

$$E_1 = \left( \frac{T}{\mathcal{R}_0}, \frac{T(\mathcal{R}_0 - 1)}{\mathcal{R}_0} \right).$$

**Demonstração:**

Ao analisar a segunda Equação referente ao número de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio, tem-se que:

$$\frac{\beta SI}{T} - \mu I = 0 \Rightarrow I \left( \frac{\beta S}{T} - \mu \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} I = 0, \text{ ou,} \\ \frac{\beta S}{T} - \mu = 0 \Rightarrow S = \frac{\mu T}{\beta} = \frac{T}{\mathcal{R}_0}. \end{cases}$$

No caso onde  $I = 0$ ,  $S = T$ . Logo,  $E_0 = (T, 0)$  é um ponto de equilíbrio considerado como livre de doenças, pois não há a introdução de indivíduos infectados na população. Caso contrário,  $S = \frac{T}{\mathcal{R}_0}$ , pode-se afirmar através da expressão  $T = S + I$  da população total que o número de infectados poderá ser assim definido:

$$I = T - S \Rightarrow I = T - \frac{T}{\mathcal{R}_0} \Rightarrow I = T \left( \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0} \right)$$

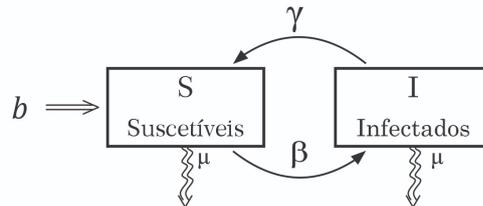
logo,  $E_1 = \left( \frac{T}{\mathcal{R}_0}, \frac{T(\mathcal{R}_0 - 1)}{\mathcal{R}_0} \right)$  representa um outro ponto de equilíbrio, denominado de equilíbrio endêmico para o sistema de equações do Modelo SI.

Em relação ao número de reprodutibilidade basal, tem-se que:

- Se  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , tem-se apenas o ponto de equilíbrio  $E_0$ , pois  $E_1$  será negativo e não terá representação biológica.
- Se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , tem-se dois pontos de equilíbrio  $E_0$  e  $E_1$ .

### 4.3.2 O Modelo SIS com dinâmica vital em tempo discreto

O modelo compartimental Suscetível-Infetado-Suscetível com dinâmica vital em tempo discreto pode ser assim representado por meio da Figura 4.6.



**Figura 4.6:** Modelo Compartimental SIS com Dinâmica Vital. Fonte: Elaborado pela autora.

A Equação 4.5 que descreve o Modelo SIS em tempo discreto definido em função das equações do número de suscetíveis e dos infectados e as respectivas variações nos tempos  $(n)$  e  $(n + 1)$ .

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T_n - \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu S_n + \gamma I_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n \end{cases} \quad (4.5)$$

Onde:

$T_n$ : população total no tempo  $n$ .

$S_n$ : número de suscetíveis no tempo  $n$ .

$I_n$ : número de infectados no tempo  $n$ .

$b, \mu$ : taxa de natalidade e mortalidade ( $b = \mu$ ).

$\beta$ : taxa de incidência.

$\gamma$ : taxa de recuperação.

**Proposição 4.3:** O número de reprodutibilidade basal no Modelo SIS (Suscetível-Infectado-Suscetível) será representado pela Equação 4.6.

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}. \quad (4.6)$$

**Demonstração:**

Suponha o momento inicial de propagação do surto epidemiológico tem-se o crescimento do número de infectados, onde  $I_{n+1} - I_n > 0$ . Considere a segunda equação do sistema do Modelo SIS, expresso no Sistema de Equações 4.5.

$$I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n > 0.$$

Assim,

$$\frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n > 0.$$

Como  $I_n > 0$ , tem-se:

$$\frac{\beta S_n}{T_n} > \mu + \gamma \Rightarrow \frac{\beta S_n}{T_n(\mu + \gamma)} > 1.$$

No início da epidemia, quase todos os indivíduos da população são suscetíveis. Fazendo  $\frac{S_n}{T_n} \simeq 1$ , encontra-se a seguinte desigualdade.

$$\frac{\beta}{(\mu + \gamma)} > 1$$

Como no caso anterior, tem-se que  $\beta$  representa a probabilidade de que no encontro entre indivíduos suscetíveis e infectados ocorra a transmissão da infecção. Este fator multiplicado pelo inverso da soma  $\mu + \beta$  que indica o período de tempo médio que um indivíduo permanece no compartimento dos infectados. A razão  $\frac{\beta}{(\mu + \gamma)}$  pode ser estimada como o número de reprodutibilidade basal. Portanto,

$$\frac{\beta}{\mu + \gamma} = \mathcal{R}_0 > 1,$$

sendo assim, o número de infectados aumentará e a epidemia poderá se propagar.

O número crítico de indivíduos suscetíveis para que ocorra a epidemia é expresso pela seguinte desigualdade,

$$\frac{S_n}{T_n} > \frac{\mu + \gamma}{\beta} \Rightarrow S_n > \frac{S_n}{T_n} > \frac{\mu + \gamma}{\beta} \Rightarrow S_n > \frac{\mu + \gamma}{\beta} \Rightarrow S_n > \frac{1}{\mathcal{R}_0},$$

portanto, se o número de indivíduos suscetíveis da população em um tempo  $n$  estiver acima do valor crítico definido como o inverso do número de reprodutibilidade basal tem-se que a taxa de crescimento da população de indivíduos infectados será crescente.

Caso no momento inicial de propagação da doença  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ , tem-se que  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  ao indicar a redução do número de casos da doença como um possível indicador de que a doença não se espalhará.

### Pontos de Equilíbrio

Para encontrar o ponto de equilíbrio do sistema de Equações 4.5, considera-se  $S_{n+1} = S_n = S$  e  $I_{n+1} = I_n = I$ , como ponto de equilíbrio e atribuir estes valores ao sistema de equações onde tem-se:

$$\begin{cases} \mu T - \frac{\beta SI}{T} - \mu S + \gamma I = 0 \\ \frac{\beta SI}{T} - \mu I - \gamma I = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

A seguinte proposição definirá os pontos de equilíbrio ou soluções  $(S, I)$  do sistema Equações 4.5.

**Proposição 4.4:** Se  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  o sistema 4.7 admite um ponto de equilíbrio chamado de equilíbrio livre de doença dado por  $E_0 = (T, 0)$ . Caso contrário o sistema admite dois pontos de equilíbrio livre de doença  $E_0$  e equilíbrio endêmico dado por:

$$E_1 = \left( \frac{T}{\mathcal{R}_0}, \frac{T(\mathcal{R}_0 - 1)}{\mathcal{R}_0} \right).$$

### Demonstração:

Ao analisar a segunda equação referente ao número de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio, tem-se que:

$$I \left( \frac{\beta S}{T} - \mu - \gamma \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} I = 0, \text{ ou,} \\ \frac{\beta S}{T} - \mu - \gamma = 0 \Rightarrow S = \frac{T(\mu + \gamma)}{\beta} = \frac{T}{\mathcal{R}_0}. \end{cases}$$

No caso onde  $I = 0$ ,  $S = T$ . Logo,  $E_0 = (T, 0)$  é um ponto de equilíbrio considerado como livre de doenças, pois não há a introdução de indivíduos infectados na população. Caso contrário,  $S = \frac{T}{\mathcal{R}_0}$ , pode-se afirmar através da expressão  $T = S + I$  da população total que o número de infectados poderá ser assim definido:

$$I = T - S \Rightarrow I = T - \frac{T}{\mathcal{R}_0} \Rightarrow I = T \left( \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0} \right)$$

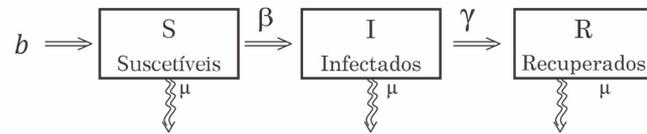
logo,  $E_1 = \left( \frac{T}{\mathcal{R}_0}, \frac{T(\mathcal{R}_0 - 1)}{\mathcal{R}_0} \right)$  representa um outro ponto de equilíbrio, denominado de equilíbrio endêmico para o sistema de equações do Modelo SIS.

Em relação ao número de reprodutibilidade basal, tem-se que:

- Se  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , tem-se apenas o ponto de equilíbrio  $E_0$ , pois  $E_1$  será negativo e não terá representação biológica.
- Se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , tem-se dois pontos de equilíbrio  $E_0$  e  $E_1$ .

### 4.3.3 O Modelo SIR com dinâmica vital em tempo discreto

O modelo compartimental Suscetível-Infetado-Recuperado com dinâmica vital em tempo discreto pode ser assim representado por meio da Figura 4.7.



**Figura 4.7:** Modelo Compartimental SIR com Dinâmica Vital. Fonte: Elaborado pela autora.

A Equação 4.8 que descreve o Modelo SIR em tempo discreto definido em função das equações do número de suscetíveis, infectados e dos recuperados e as respectivas variações nos tempos  $(n)e(n + 1)$ .

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T_n - \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu S_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases} \quad (4.8)$$

Onde:

$T_n$ : população total no tempo  $n$ .

$S_n$ : número de suscetíveis no tempo  $n$ .

$I_n$ : número de infectados no tempo  $n$ .

$R_n$ : número de recuperados no tempo  $n$ .

$b, \mu$ : taxa de natalidade e mortalidade ( $b = \mu$ ).

$\beta$ : taxa de incidência.

$\gamma$ : taxa de recuperação.

**Proposição 4.5:** O número de reprodutibilidade basal no Modelo SIR (Suscetível-Infetado-Recuperado) será representado pela Equação 4.9.

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}. \quad (4.9)$$

**Demonstração:**

Suponha o momento inicial de propagação do surto epidemiológico tem-se o crescimento do número de infectados, onde  $I_{n+1} - I_n > 0$ . Considere a segunda equação do sistema do Modelo SIR, expresso no Sistema de Equações 4.8.

$$I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n > 0.$$

assim,

$$\frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n > 0$$

Como  $I_n > 0$ ,

$$\frac{\beta S_n}{T_n} > \mu + \gamma \Rightarrow \frac{\beta S_n}{T_n(\mu + \gamma)} > 1.$$

No início de uma epidemia, quase todos os indivíduos são suscetíveis. Ao tomar  $\frac{S_n}{T_n} \simeq 1$ , obtém-se a seguinte desigualdade,

$$\frac{\beta}{\mu + \gamma} > 1.$$

Como definido anteriormente, a razão  $\frac{\beta}{\mu + \gamma}$  pode ser estimada como o número de reprodutibilidade basal. Portanto,

$$\frac{\beta}{\mu + \gamma} = \mathcal{R}_0 > 1,$$

sendo assim, o número de infectados aumentará e a epidemia poderá se propagar.

O número crítico de indivíduos suscetíveis para que ocorra a epidemia e expresso pela seguinte desigualdade,

$$\frac{S_n}{T_n} > \frac{\mu + \gamma}{\beta} \Rightarrow S_n > \frac{S_n}{T_n} > \frac{\mu + \gamma}{\beta} \Rightarrow S_n > \frac{\mu + \gamma}{\beta} \Rightarrow S_n > \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

portanto, se o número de indivíduos suscetíveis da população em um tempo  $n$  estiver acima do valor crítico definido como o inverso do número de reprodutibilidade basal tem se que a taxa de crescimento da população de indivíduos infectados será crescente.

Caso no momento inicial de propagação da doença  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ , tem-se que  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  indica que a redução do número de casos da doença como um possível apontamento de que a doença não se espalhará.

A população total é constante, logo, deve-se considerar  $R = T - S - I$  e eliminar a terceira equação do sistema de modo que a reescrita do sistema, possibilitará encontrar os pontos de equilíbrio.

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T_n - \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu S_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n \end{cases} \quad (4.10)$$

### Pontos de Equilíbrio

Para encontrar o ponto de equilíbrio do sistema de equações 4.11 e as coordenadas  $(S, I)$  que representam as soluções considere  $S_{n+1} = S_n = S, I_{n+1} = I_n = I$  e  $R_{n+1} = R_n = R$ , como ponto de equilíbrio e atribuir estes valores ao sistema de equações onde obtém-se:

$$\begin{cases} \mu T - \frac{\beta SI}{T} - \mu S = 0 \\ \frac{\beta SI}{T} - \mu I - \gamma I = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

A seguinte proposição definirá os pontos de equilíbrio ou soluções  $(S, I)$  do sistema Equações 4.8.

**Proposição 4.6:** Se  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  o sistema 4.11 admite um ponto de equilíbrio chamado de equilíbrio livre de doença dado por  $E_0 = (T, 0)$ . Caso contrário o sistema admite dois pontos de equilíbrio livre de doença  $E_0$  e equilíbrio endêmico dado por:

$$E_1 = \left( \frac{T}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mu}{\gamma + \mu} \left( \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0} \right) T \right).$$

### Demonstração:

Ao analisar a segunda equação referente ao número de indivíduos infectados no ponto de equilíbrio, tem-se que:

$$I \left( \frac{\beta S}{T} - \mu - \gamma \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} I = 0, \text{ ou,} \\ \frac{\beta S}{T} - \mu - \gamma = 0 \Rightarrow S = \frac{T(\mu + \gamma)}{\beta} = \frac{T}{\mathcal{R}_0}. \end{cases}$$

No caso onde  $I = 0, S = T$ . Logo,  $E_0 = (T, 0)$  é um ponto de equilíbrio considerado como livre de doenças, pois não há introdução de indivíduos infectados na população. Caso contrário,  $S = \frac{T}{\mathcal{R}_0}$ , e ao somar as duas equações do sistema 4.11, pode-se afirmar através da expressão resultante que o número de infectados poderá ser assim definido:

$$\mu T - \mu S - \mu I - \gamma I = 0 \Rightarrow I = \frac{\mu}{\mu + \gamma} (T - S) \Rightarrow I = \frac{\mu}{\gamma + \mu} \left( \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0} \right) T$$

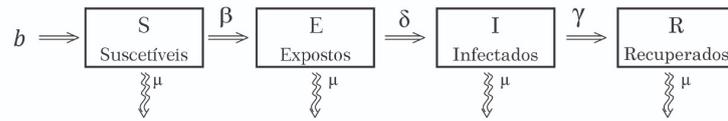
logo,  $E_1 = \left( \frac{T}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mu}{\gamma + \mu} \left( \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0} \right) T \right)$  representa um outro ponto de equilíbrio, denominado de equilíbrio endêmico para o sistema de equações do Modelo SIR.

Em relação ao número de reprodutibilidade basal, tem-se que:

- Se  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , tem-se apenas o ponto de equilíbrio  $E_0$ , pois  $E_1$  será negativo e não terá representação biológica.
- Se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , tem-se dois pontos de equilíbrio  $E_0$  e  $E_1$ .

### 4.3.4 O Modelo SEIR com dinâmica vital em tempo discreto

O modelo compartimental Suscetível-Exposto-Infetado-Recuperado com dinâmica vital em tempo discreto pode ser assim representado por meio da Figura 4.8.



**Figura 4.8:** Modelo Compartimental SEIR com Dinâmica Vital. Fonte: Elaborado pela autora.

A Equação 4.12 descreve o Modelo SEIR em tempo discreto definido em função das equações do número de suscetíveis, expostos, infectados e dos recuperados e as respectivas variações no tempo  $(n)e(n + 1)$ .

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T_n - \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu S_n \\ E_{n+1} = E_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu E_n - \delta E_n \\ I_{n+1} = I_n + \delta E_n - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases} \quad (4.12)$$

Onde:

$T_n$ : população total no tempo  $n$ .

$S_n$ : número de suscetíveis no tempo  $n$ .

$E_n$ : número de expostos no tempo  $n$ .

$I_n$ : número de infectados no tempo  $n$ .

$R_n$ : número de recuperados no tempo  $n$ .

$b, \mu$ : taxa de natalidade e mortalidade ( $b = \mu$ ).

$\beta$ : taxa de incidência.

$\delta$ : taxa de progressão de exposição a infeccioso.

$\gamma$ : taxa de recuperação.

O sistema de Equações do Modelo SEIR apresenta duas equações que se relacionam com o número de infectados, a equação propriamente dita do número de infectados e a equação do número de indivíduos expostos. O número básico de reprodução será calculado através da matriz de próxima geração <sup>2</sup> (Next generation matrix) [21].

<sup>2</sup>Matriz de próxima geração (Next generation matrix): Matriz associada ao modelo matemático da doença, método algébrico para o cálculo de  $\mathcal{R}_0$

**Definição 4.7:** O número de reprodutibilidade basal no Modelo SEIR (Suscetível-Exposto-Infetado-Recuperado) será representado pela seguinte equação 4.13.

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\delta\beta}{(\mu + \delta) \cdot (\mu + \gamma)} \quad (4.13)$$

A população total é constante, logo, deve-se considerar  $T = S + E + I + R$ , logo pode-se considerar  $R = T - S - E - I$  e eliminar a quarta equação do sistema de modo que a reescrita do sistema possibilitará encontrar os pontos de equilíbrio.

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T_n - \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu S_n \\ E_{n+1} = E_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu E_n - \delta E_n \\ I_{n+1} = I_n + \delta E_n - \mu I_n - \gamma I_n \end{cases} \quad (4.14)$$

### Pontos de Equilíbrio

Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema de equações 4.14 e as coordenadas  $(S, E, I)$  que representam as soluções do sistema deve-se considerar  $S_{n+1} = S_n = S$ ,  $E_{n+1} = E_n = E$ ,  $I_{n+1} = I_n = I$  e  $R_n = R_{n+1} = R$  como ponto de equilíbrio e atribuir estes valores ao sistema de equações, obtém-se:

$$\begin{cases} \mu T - \frac{\beta S I}{T} - \mu S = 0 \\ \frac{\beta S I}{T} - \mu E - \delta E = 0 \\ \delta E - \mu I - \gamma I = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

A seguinte proposição definirá os pontos de equilíbrio ou soluções  $(S, E, I)$  do sistema equações 4.14.

**Proposição 4.8:** Se  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  o sistema admite um ponto de equilíbrio chamado de equilíbrio livre de doença dado por  $E_0 = (T, 0, 0)$ . Caso contrário o sistema admite dois pontos de equilíbrio livre de doença  $E_0$  e equilíbrio endêmico dado por:

$$E_1 = (S, E, I) = \left( \frac{T}{\mathcal{R}_0}, \frac{(\mu T) \cdot (\mu + \gamma)}{\beta \delta} \cdot (\mathcal{R}_0 - 1), \frac{\mu T}{\beta} \cdot (\mathcal{R}_0 - 1) \right).$$

### Demonstração:

Ao isolar a variável  $E$  na terceira Equação do sistema 4.15, obtém-se:

$$\delta E - \mu I - \gamma I = 0 \Rightarrow E = I \frac{\mu + \gamma}{\delta}.$$

Ao substituir o valor obtido para a variável  $E$  na segunda expressão do sistema, pode-se analisar os pontos de equilíbrio do sistema 4.15 para o modelo SEIR, ou seja,

$$I \left( \frac{\beta S}{T} - \mu \frac{(\mu + \gamma)}{\delta} - \delta \frac{(\mu + \delta)}{\delta} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} I = 0, \text{ ou,} \\ S = \frac{T(\mu + \gamma)(\mu + \delta)}{\beta \delta} = \frac{T}{\mathcal{R}_0}. \end{cases}$$

No caso onde  $I = 0$ ,  $S = T$ . Logo,  $E_0 = (T, 0)$  é um ponto de equilíbrio considerado como livre de doenças, pois não há introdução de indivíduos infectados na população. Caso contrário,  $S = \frac{T}{\mathcal{R}_0}$ , e ao isolar a variável  $I$  na primeira equação do sistema se encontra o número de indivíduos infectados, ou seja:

$$I = \frac{\mu T(T - S)}{\beta S} = \frac{\mu T \cdot \left(T - \frac{T}{\mathcal{R}_0}\right)}{\beta \cdot \left(\frac{T}{\mathcal{R}_0}\right)} = \frac{\mu T}{\beta} (\mathcal{R}_0 - 1).$$

O número de indivíduos expostos em função o número de indivíduos infectados poderá ser assim expresso:

$$E = I \frac{\mu + \gamma}{\delta} \Rightarrow E = \frac{\mu T}{\beta} (\mathcal{R}_0 - 1) \frac{\mu + \gamma}{\delta} \Rightarrow E = \frac{(\mu T) \cdot (\mu + \gamma)}{\beta \delta} \cdot (\mathcal{R}_0 - 1),$$

assim,  $E_1 = (S, E, I) = \left(\frac{T}{\mathcal{R}_0}, \frac{(\mu T) \cdot (\mu + \gamma)}{\beta \delta} \cdot (\mathcal{R}_0 - 1), \frac{\mu T}{\beta} (\mathcal{R}_0 - 1)\right)$  representa um outro ponto de equilíbrio, denominado de equilíbrio endêmico para o sistema de equações do Modelo SIR.

Em relação ao número de reprodutibilidade basal, tem-se que:

- Se  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , tem-se apenas o ponto de equilíbrio  $E_0$ , pois  $E_1$  será negativo e não terá representação biológica.
- Se  $\mathcal{R}_0 > 1$ , tem-se dois pontos de equilíbrio  $E_0$  e  $E_1$ .

## 4.4 Modelos epidemiológicos em tempo contínuo

A dinâmica da epidemia em modelos epidemiológicos em tempo contínuo é dada por equações diferenciais. A população é constante e distribuída entre as classes dos sistema epidemiológico, as taxas de transição entre as classes são constantes e a análise da propagação da doença considera a transição dos indivíduos entre as classes e não atenta para os processos que ocorrem dentro das classes compartimentais [18].

### 4.4.1 O Modelo SI com dinâmica vital em tempo contínuo

O Modelo Suscetível-Infectado é representado através do seguinte sistema não linear composto pelas seguintes equações diferenciais ordinárias [18].

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S, \tag{4.16}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \mu I. \tag{4.17}$$

Onde:

- $\beta$ : é a frequência do contato (taxa de contatos, taxa de transmissão).

- $\mu$ : taxa de natalidade e mortalidade.
- $N$ : tamanho fixo da população.
- $S(t)$ : número de indivíduos suscetíveis no tempo  $t$ .
- $I(t)$ : número de indivíduos infectados (casos de doenças) no tempo  $t$ .
- $t$ : tempo.

Para modelar a propagação da epidemia em uma população ( $N$ ) em função do tempo ( $t$ ), deve-se considerar esta população ( $N$ ) como o somatório dos tipos de indivíduos considerados na descrição da dinâmica do modelo.

$$N = S(t) + I(t).$$

O tamanho da população não se altera ao longo do tempo,

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0.$$

Ao dividir as Equações 4.16 e 4.17 por  $N$ , tem-se:

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s, \quad (4.18)$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \mu i. \quad (4.19)$$

Dessa forma o tamanho da população se encontra normalizado, ou seja,  $N=1$  e a classe dos suscetíveis pode ser determinada por  $s = 1 - i$ .

O número de reprodutibilidade básica é definido ao assumir que a taxa de nascimentos fixos equivale a taxa de mortalidade para que a população seja constante, e pode ser assim expresso [18]:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu} > 1.$$

O sistema de equações está em equilíbrio quando  $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$ . Neste caso e nos casos apresentados a seguir, considera-se  $N$  como a fração relativa à porcentagem total da população, logo  $N = 1$ . Assim, o ponto de equilíbrio livre de doença ser pode ser assim representado  $(S^*, I^*) = (1, 0)$ . Para calcular o equilíbrio endêmico se deve partir de observações relativas à Equação do número de infectados 4.19

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \mu i$$

$$\beta si - \mu i = 0.$$

Ao colocar a variável  $I$  em evidência, obtém-se que,

$$i(\beta s - \mu) = 0.$$

Onde a condição é satisfeita se, e somente se,  $i = 0$  ou  $s = \frac{\mu}{\beta} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ .

Considere a equação do número de suscetíveis no modelo SI representado na Equação 4.18

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s$$

$$\mu - \beta si - \mu s = 0 \Rightarrow i = 1 - \frac{\mu}{\beta}$$

$$i = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

O equilíbrio endêmico é dado por,

$$(S^*, I^*) = \left( \frac{1}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0} \right).$$

#### 4.4.2 O Modelo SIS com dinâmica vital em tempo contínuo

O Modelo Suscetível-Infetado-Suscetível é representado através do seguinte sistema não linear composto pelas seguintes equações diferenciais ordinárias, deve-se considerar, no entanto, que após o período infeccioso o indivíduo adquira uma imunidade temporária, ou seja se recupere e depois retorne para a classe dos suscetíveis.

$$\frac{dS}{dt} = \mu N + \gamma I - \frac{\beta SI}{N} - \mu S, \quad (4.20)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I - \mu I. \quad (4.21)$$

Onde:

- $\beta$ : é a frequência do contato (taxa de contatos, taxa de transmissão).
- $\gamma$ : taxa de recuperação.
- $\mu$ : taxa de natalidade e mortalidade.
- $N$ : tamanho fixo da população.
- $S(t)$ : número de indivíduos suscetíveis no tempo  $t$ .
- $I(t)$ : número de indivíduos infectados (casos de doenças) no tempo  $t$ .
- $t$ : Tempo.

Para modelar a propagação da epidemia em uma população ( $N$ ) em função do tempo ( $t$ ), considera-se a população ( $N$ ) como o somatório dos tipos de indivíduos considerados na descrição da dinâmica do modelo.

$$N = S(t) + I(t).$$

Condições iniciais:

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 \geq 0.$$

O tamanho da população não se altera ao longo do tempo

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0.$$

Ao dividir as Equações 4.20 e 4.21 por N, tem-se:

$$\frac{ds}{dt} = \mu + \gamma i - \beta si - \mu s, \tag{4.22}$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i - \mu i. \tag{4.23}$$

Dessa forma o tamanho da população se encontra normalizado, ou seja,  $N=1$  e a classe dos suscetíveis pode ser determinada por  $s = 1 - i$ .

O número de reprodutibilidade básica é definido como [18]:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}.$$

O sistema de equações está em equilíbrio quando  $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$ . O estado de equilíbrio livre de doença onde não há infectados e toda a população é suscetível à doença pode ser assim representado  $(S^*, I^*) = (1, 0)$ . Para calcular o equilíbrio endêmico se deve partir de observações relativas à Equação do número de infectados 4.23

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i - \mu i$$

$$\beta si - \gamma i - \mu i = 0.$$

Ao colocar a variável  $i$  em evidência, obtém-se que,

$$i(\beta s - \gamma - \mu) = 0.$$

Onde a condição é satisfeita se, e somente se,  $i = 0$  ou  $s = \frac{\gamma + \mu}{\beta} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ .

Assim no modelo SIS com dinâmica vital o equilíbrio endêmico é caracterizado pela fração de suscetíveis da população como o inverso de  $\mathcal{R}_0$ . Portanto, tem-se que quando  $I \neq 0, S = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ .

Como o número de infectados no modelo SIS, no momento de propagação da infecção é positivo, tem-se que  $i > 0$ , onde,  $1 = s + i$

$$s + i = 1 \Rightarrow i = 1 - s \Rightarrow i = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

O equilíbrio endêmico é dado por [22, 14],

$$(S^*, I^*) = \left( \frac{1}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0} \right).$$

No modelo SIS a imunidade não é vitalícia e os indivíduos da população após se recuperarem podem ser novamente infectados pela doença.

### 4.4.3 O Modelo SIR com dinâmica vital em tempo contínuo

O Modelo Suscetível-Infetado-Recuperado é representado por meio do seguinte sistema não linear composto pelas seguintes equações diferenciais ordinárias.

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S, \quad (4.24)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I - \mu I, \quad (4.25)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R. \quad (4.26)$$

Onde:

- $\beta$ : é a frequência do contato (taxa de contatos, taxa de transmissão).
- $\gamma$ : taxa de recuperação.
- $N$ : tamanho fixo da população.
- $S(t)$ : número de indivíduos suscetíveis no tempo  $t$ .
- $I(t)$ : número de indivíduos infectados (casos de doenças) no tempo  $t$ .
- $R(t)$ : número de indivíduos removidos no tempo  $t$ .
- $t$ : Tempo.

Para modelar a propagação da epidemia em uma população ( $N$ ) em função do tempo ( $t$ ), considera-se a população ( $N$ ) como o somatório dos tipos de indivíduos considerados na descrição da dinâmica do modelo.

$$N = S(t) + I(t) + R(t).$$

Condições iniciais:

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 \geq 0, R(0) = 0.$$

O tamanho da população não se altera ao longo do tempo

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0.$$

Ao dividir as Equações 4.24,4.25 e 4.26 por N, tem-se:

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta is - \mu s, \quad (4.27)$$

$$\frac{di}{dt} = \beta is - \gamma i - \mu i, \quad (4.28)$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r. \quad (4.29)$$

Dessa forma o tamanho da população se encontra normalizado, ou seja,  $N=1$  e a classe dos suscetíveis pode ser determinada por  $r = 1 - i - s$ .

O número de reprodutibilidade básica é definido como [18]:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}.$$

O sistema de equações está em equilíbrio quando  $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$ . O estado de equilíbrio livre de doença ocorre quando não há infectados e toda a população é suscetível à doença, pode ser assim representado,  $(S^*, I^*, R^*) = (1, 0, 0)$ . Para calcular o equilíbrio endêmico se deve partir de observações relativas à Equação do número de infectados 4.28

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i - \mu i,$$

$$\beta si - \gamma i - \mu i = 0.$$

Ao colocar a variável  $I$  em evidência, obtém-se que

$$i(\beta s - (\gamma + \mu)) = 0.$$

Onde a condição é satisfeita se, e somente se,  $i = 0$  ou  $s = \frac{\gamma + \mu}{\beta} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ .

Assim no modelo SIR com dinâmica vital o equilíbrio endêmico é caracterizado pela fração de suscetíveis da população como o inverso de  $\mathcal{R}_0$ . Portanto, tem-se que quando  $i \neq 0$ ,  $s = \frac{1}{\mathcal{R}_0}$ .

Considere a equação do número de suscetíveis no modelo SIR 4.27

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s,$$

$$\mu - \beta si - \mu s = 0 \Rightarrow \mu - \beta \frac{1}{\mathcal{R}_0} i - \mu \frac{1}{\mathcal{R}_0} = 0,$$

$$i = \frac{\mu}{\beta} \cdot (\mathcal{R}_0 - 1).$$

Tem-se que o número de infectados no modelo SIR, no momento de propagação da infecção é positivo, ou seja,  $i > 0$  e  $\mathcal{R}_0 > 1$ , onde,  $s + i + r = 1$

$$s + i + r = 1 \Rightarrow r = 1 - s - i \Rightarrow r = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{\mu}{\beta} \cdot (\mathcal{R}_0 - 1).$$

O equilíbrio endêmico é dado por,

$$(S^*, I^*, R^*) = \left( \frac{1}{\mathcal{R}_0}, \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1), 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) \right).$$

No modelo SIR a imunidade e vitalícia e os indivíduos da população após se recuperarem não mais serão infectados pela doença.

#### 4.4.4 O Modelo SEIR com dinâmica vital em tempo contínuo

O Modelo Suscetível-Exposto-Infected-Recuperado é representado por meio do seguinte sistema não linear composto pelas seguintes equações diferenciais ordinárias.

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S, \quad (4.30)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \mu E - \delta E, \quad (4.31)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \mu I - \gamma I, \quad (4.32)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R. \quad (4.33)$$

Onde:

- $\beta$ : é a frequência do contato (taxa de contatos, taxa de transmissão).
- $\gamma$ : taxa de recuperação.
- $\delta$ : taxa de progressão de exposto a infeccioso.
- $N$ : tamanho fixo da população.
- $S(t)$ : número de indivíduos suscetíveis no tempo  $t$ .
- $E(t)$ : número de indivíduos expostos no tempo  $t$ .
- $I(t)$ : número de indivíduos infectados (casos de doenças) no tempo  $t$ .
- $R(t)$ : número de indivíduos removidos no tempo  $t$ .
- $t$ : tempo.

Para modelar a propagação da epidemia numa população ( $N$ ) em função do tempo ( $t$ ), considera-se a população ( $N$ ) como o somatório dos tipos de indivíduos considerados na descrição da dinâmica do modelo.

$$N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t).$$

Condições iniciais:

$$S(0) = S_0 > 0, I(0) = I_0 \geq, E(0) = E_0 \geq 0, R(0) = 0.$$

O tamanho da população não se altera ao longo do tempo

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0.$$

Ao dividir as Equações 4.30,4.31, 4.32 e 4.33 por N, tem-se:

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta is - \mu s, \tag{4.34}$$

$$\frac{de}{dt} = \beta si - \mu e - \delta e, \tag{4.35}$$

$$\frac{di}{dt} = \delta e - \mu i - \gamma i, \tag{4.36}$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r. \tag{4.37}$$

Dessa forma o tamanho da população se encontra normalizado, ou seja, N=1 e a classe dos suscetíveis pode ser determinada por  $r = 1 - e - i - s$ .

O número de reprodutibilidade básica é definido como [18]:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\delta}{(\mu + \gamma)(\mu + \delta)}.$$

A diferença, no entanto, por ser mínima, pode ser considerada desprezível e faz com que o número de reprodutibilidade basal, novamente seja expresso por

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma}.$$

O sistema de equações está em equilíbrio quando  $\frac{dS}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$ . O estado de equilíbrio livre de doença onde não há infectados e toda a população é suscetível à doença pode ser assim representado  $(S^*, E^*, I^*, R^*) = (1, 0, 0, 0)$ . Caso contrário, no equilíbrio endêmico, tem-se que o número de infectados no modelo SEIR, no momento de propagação da infecção é positivo, ou seja,  $I > 0$  e  $\mathcal{R}_0 > 1$  e de maneira proporcional  $s + e + i + r = 1$ .

Considere a terceira equação do sistema 4.36

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = \delta e - (\mu - \gamma)i &\Rightarrow \delta e - (\mu - \gamma)i = 0 \Rightarrow \delta e = i(\mu + \gamma), \\ e = i \frac{(\mu + \gamma)}{\delta}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Considere a segunda Equação do sistema 4.35

$$\frac{de}{dt} = \beta si - (\mu - \delta)e \Rightarrow \beta si - (\mu - \delta)e = 0 \Rightarrow \beta si = (\mu + \delta)e. \quad (4.39)$$

Ao substituir 4.38, na equação 4.39, obtém-se que,

$$\begin{aligned} \beta si &= (\mu + \delta)i \frac{(\mu + \gamma)}{\delta} \Rightarrow \beta s = \frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta}, \\ S &= \frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\beta \delta} = \frac{1}{\mathcal{R}_0}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Assim no modelo SEIR com dinâmica vital, tem-se que no ponto de equilíbrio endêmico a fração de suscetíveis da população pode ser definida como o inverso de  $\mathcal{R}_0$ .

Considere também a primeira equação do sistema, Equação 4.34

$$\frac{ds}{dt} = \mu - (\beta i + \mu)s,$$

$$\mu - (\beta i + \mu)s = 0 \Rightarrow \mu - (\beta i + \mu) \frac{1}{\mathcal{R}_0} = 0 \Rightarrow (\beta i + \mu) \frac{1}{\mathcal{R}_0} = \mu \Rightarrow \beta i = \mu(\mathcal{R}_0 - 1),$$

$$i = \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1). \quad (4.41)$$

Ao retornar a Equação 4.38, que representa o número de expostos e substituir o valor da variável  $i$ , encontrado na equação 4.41, obtém-se que,

$$e = i \frac{\mu + \gamma}{\delta} \Rightarrow e = \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1) \frac{\mu + \gamma}{\delta} = \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\beta \delta}(\mathcal{R}_0 - 1). \quad (4.42)$$

O equilíbrio endêmico é dado por:

$$S^* = \frac{1}{\mathcal{R}_0} \quad E^* = \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\beta \delta}(\mathcal{R}_0 - 1) \quad I^* = \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1).$$

Assim como  $s + e + i + r = 1$  tem-se que  $r = 1 - s - e - i$ . Portanto,

$$R^* = 1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0} - \frac{\mu(\mu + \gamma)}{\beta \delta}(\mathcal{R}_0 - 1) - \frac{\mu}{\beta}(\mathcal{R}_0 - 1).$$

# Modelagem Matemática em dinâmica da População como estratégia para o ensino da matemática

---

Neste capítulo, será apresentado um conjunto de ações elaboradas e desenvolvidas com o objetivo de propor que a Modelagem matemática em dinâmica da população seja utilizada como uma ferramenta estratégica para o ensino da Matemática.

## 5.1 Aplicações práticas para a sala de aula

As rápidas mudanças ocorridas no cenário mundial, em decorrência do enfrentamento da pandemia do novo Coronavírus trouxeram consigo novas oportunidades para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. As atividades desenvolvidas a partir desta pesquisa tiveram como objetivo utilizar a Matemática e suas tecnologias para desenvolver ações e relacionar o contexto atual com o ensino dos conteúdos escolares.

As práticas foram elaboradas pela professora Márcia Lopes Ferreira para serem utilizadas em projeto com os alunos do ensino médio do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais, na unidade de Bom Despacho.

### 5.1.1 Palestra - Testei positivo, e agora?

Como parte integrante deste projeto, o primeiro evento realizado foi uma palestra com o tema “COVID-19: Testei positivo, e agora?”. A partir do tema, foram apresentados os seguintes conceitos: formas de transmissão, medidas de prevenção, principais taxas e índices de controle da doença. Segue o registro dos principais assuntos apresentados.

A doença COVID-19, causada pelo coronavírus denominado SARS-CoV-2, com registro inicial de ocorrência em Wuhan na China em dezembro de 2019, alastrou-se rapidamente pelo mundo. No Brasil, o primeiro caso registrado ocorreu em 26 de fevereiro de 2020. De acordo com as informações disponibilizadas pelo Ministério da Saúde, até 22 de outubro de 2020, o Brasil contou com um total de 5.323.630

brasileiros com diagnóstico confirmado da COVID-19, dos quais 388.435 (7,3 %) ainda estavam infectados, 4.779.295 (89,8%) estavam curados e 155.900 (2,9%) foram a óbito. O número de novos casos em 22 de outubro foi de 24.858. A contagem do número de casos constitui um recurso importante para a interpretação da ocorrência epidemiológica e para que as decisões governamentais sejam propostas [27, 10].

### Incidência e Prevalência

A partir das definições anteriores de incidência 3.1 e prevalência 3.2 é possível estimar as razões destas grandezas aplicadas aos dados fornecidos pelo Ministério da Saúde, no dia 22 de outubro de 2020 em relação aos números de casos da COVID-19. É importante destacar que estas taxas aplicadas em apenas um dia não refletem a realidade do agravo da situação, mas representam de maneira prática a utilização destas taxas por meio de cálculos operacionais matemáticos.

Para o cálculo da incidência basta tomar a razão entre o número de novos casos da doença e o número de indivíduos em risco. Para o cálculo da prevalência, por sua vez, é necessário calcular a razão entre o número de casos confirmados de COVID-19 em um determinado dia dividido pela população brasileira.

**Tabela 5.1:** Análise de dados reais do COVID-19 I  
Incidência e Prevalência

Medida	Incidência	Prevalência
Definição	$\frac{\text{Novos casos COVID-19}}{\text{População em risco}}$	$\frac{\text{Casos da COVID-19}}{\text{População}}$
Estudo de Caso	$\frac{24.858}{204.676.370^*}$	$\frac{5.323.630}{210.000.000}$
Resultados	12,1/100.000	2,53%

**Fonte:** covid.saude.gov.br . Dados do Ministério da Saúde

(\*) Do número de indivíduos da população brasileira (210.000.000) foram retirados os casos já confirmados (5.323.630) em 22 de outubro de 2020.

### Letalidade e Mortalidade

As taxas de letalidade 3.3 e mortalidade 3.4 em relação a COVID-19 e aos dados fornecidos no dia 22 de outubro de 2020, também são apresentadas na tabela abaixo 5.2:

**Tabela 5.2:** Análise de dados reais do COVID-19 II  
Letalidade e Mortalidade

Medida	Letalidade	Mortalidade por causa
Definição	$\frac{\text{N}^\circ \text{ de Mortes da COVID-19}}{\text{N}^\circ \text{ de doentes da COVID-19}}$	$\frac{\text{N}^\circ \text{ de óbitos da COVID-19}}{\text{População total}}$
Estudo de Caso	$\frac{155.900}{5.323.630} \times 100$	$\frac{155.900}{210.000.000}$
Resultados	2,93%	74,2/100.000

**Fonte:** covid.saude.gov.br . Dados do Ministério da Saúde

## 5.2 Proposta de situações hipotéticas e simulações dos modelos epidemiológicos

Com o objetivo de explanar alguns conceitos aos alunos, público alvo do projeto, aulas expositivas e interativas foram realizadas. Entre as atividades elaboradas, foram ofertados momentos para explicar aos alunos os seguintes conceitos: equações de diferenças, modelagem matemática e modelos epidemiológicos. Eles receberam orientações para a construção e análise de tabelas e gráficos referentes aos conceitos estudados. Para realização dessas atividades, foram utilizadas as ferramentas computacionais do Excel. Os parâmetros inicialmente utilizados foram baseados em pesquisas e artigos acadêmicos e modificados durante a realização da atividade construída pelos alunos.

Em continuação do projeto, foi solicitado aos alunos que pesquisassem sobre as doenças que poderiam ser relacionadas aos modelos estudados anteriormente. O contato com o mundo das tecnologias e pesquisa, bem como o pensamento computacional dos alunos foram estimulados. A utilização de recursos computacionais é citada na Base Nacional Comum Curricular como fator integrante do processo de ensino aprendizagem da Matemática para o ensino médio:

*“... a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. [9] ”*

As seguintes situações de estudo foram construídas e elaboradas pelos alunos através da introdução e modificação de parâmetros e taxas utilizadas nas equações dos modelos epidemiológicos.

### 5.2.1 Uma situação-problema para o Modelo SI

A sigla HIV, traduzida para o português, significa vírus da imunodeficiência humana. Este é o vírus causador da doença AIDS que, por sua vez, é definida como a síndrome da imunodeficiência adquirida. A doença ataca o sistema imunológico responsável por defender o organismo de doenças; assim, o sistema defensivo é incapaz de combater o vírus da AIDS denominado então, de HIV. A transmissão deste vírus ocorre por meio do contato com secreções fisiológicas através de práticas de relações sexuais, compartilhamento de agulhas ou instrumentos contaminados com sangue, transmissão materna, transfusões sanguíneas ou transplantes de órgãos [35].

O modelo compartimental “SI” representa a epidemia da AIDS, pois a doença não possui imunização para os indivíduos infectados. Estes indivíduos serão retirados deste compartimento apenas pelo fator mortalidade. Supondo que, em certo município, haja uma população constante e equivalente a 1.000 habitantes e que, nesta população, foram introduzidos 52 indivíduos infectados. Para avaliar a propagação do surto da Aids nessa população, pode-se utilizar os seguintes parâmetros para a disseminação da doença: taxa de incidência  $\beta = 0,79$ , taxa de natalidade e taxa mortalidade  $\mu = 0,1$ . Deste modo, pode-se avaliar esta propagação, após 20 anos do começo da disseminação da doença.

Através das equações 4.1, presentes na elaboração do Modelo SI foram construídas a Figura 5.1 e a tabela 5.3 a seguir, que demonstra a dinâmica do número de indivíduos suscetíveis e infectadas.

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T_n - \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu S_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n \end{cases}$$

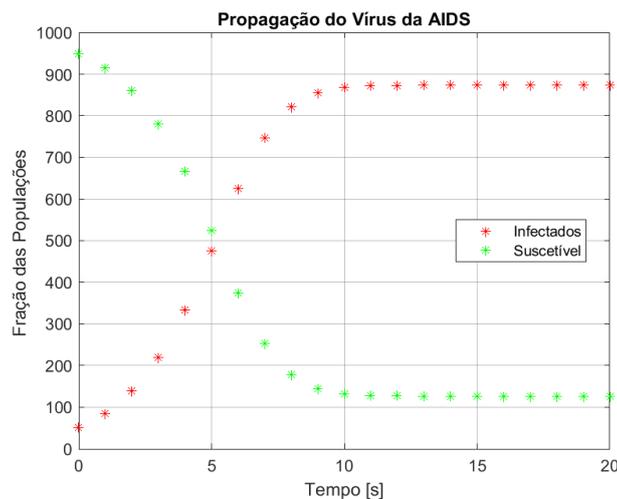


Figura 5.1: Propagação do Vírus da AIDS. Fonte: Elaborado pela autora.

Os dados apresentados na tabela 5.3 e no gráfico 5.1 apontam para a decréscimo do número de indivíduos suscetíveis e o rápido aumento do número de indivíduos infectados. Os fatores que proporcionam este aumento são a ausência de medidas

**Tabela 5.3:** Análise de Dados: Propagação do Vírus da AIDS

n	SUSCETÍVEIS	INFECTADOS
0	≈ 948	≈ 052
1	≈ 914	≈ 086
2	≈ 861	≈ 139
3	≈ 780	≈ 220
4	≈ 667	≈ 333
5	≈ 525	≈ 475
6	≈ 375	≈ 625
7	≈ 252	≈ 748
8	≈ 178	≈ 822
9	≈ 145	≈ 855
10	≈ 132	≈ 868
11	≈ 128	≈ 872
12	≈ 127	≈ 873
13	≈ 127	≈ 873
14	≈ 127	≈ 873
15	≈ 127	≈ 873
16	≈ 127	≈ 873
17	≈ 127	≈ 873
18	≈ 127	≈ 873
19	≈ 127	≈ 873
20	≈ 127	≈ 873

de controle, campanhas de vacinação ou outras medidas restritivas de contenção populacional. O pico epidêmico é registrado no 12º dia, onde se obtém 873 indivíduos contaminados pela doença. Este dia também representa o ponto de equilíbrio endêmico desta situação problema, para  $S_n = 127$ ,  $12 \leq n \leq 20$  e conseqüentemente  $I_n = 1000 - 127 = 873$ , no período de 20 anos.

### 5.2.2 Uma situação-problema para o Modelo SIS

A meningite é uma doença que atinge o sistema nervoso e produz um processo inflamatório que envolve o cérebro e a medula espinhal das pessoas. Geralmente, é ocasionada por vírus e bactérias. A meningite meningocócica é transmitida através das vias respiratórias e a propagação desta doença ocorre através do contato entre indivíduos suscetíveis e infectados. Existem aproximadamente treze grupos de bactérias causadoras desta doença, portanto, a vacinação não é eficaz e não há garantia de imunidade para todas as possíveis ocorrências da doença. A evolução do quadro clínico é rápida e um diagnóstico tardio conduz ao óbito do indivíduo infectado [12].

O modelo epidemiológico “SIS” representa a propagação da doença meningite: uma vez imunizado, o indivíduo infectado poderá novamente ser infectado pela doença. Supondo que, em certo município, haja uma população constante equivalente a 1.000 mil habitantes e que, nesta população, foram introduzidos 20 indivíduos infectados.

Para avaliar a propagação da Meningite nessa população, pode-se utilizar os seguintes parâmetros para a disseminação da doença: taxa de incidência  $\beta = 0,8$ , taxa de recuperação  $\gamma = 0.2$ , taxa de natalidade e mortalidade  $\mu = 0,1$ . Assim, pode-se avaliar esta propagação, após 20 dias do começo da disseminação da doença.

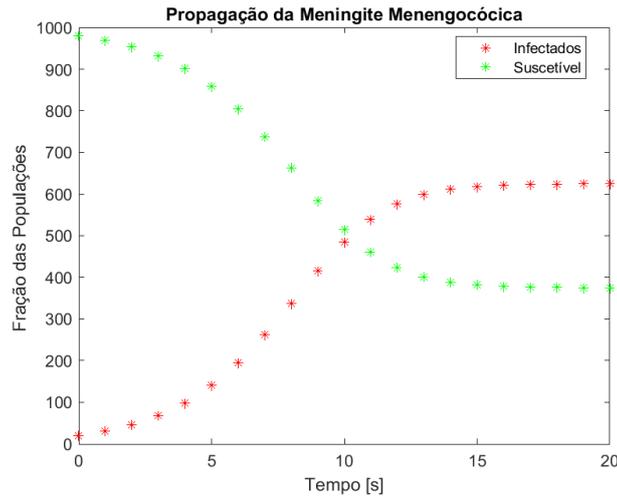
Através das equações 4.5, presentes na elaboração do Modelo SIS foram construídas a tabela 5.4 e a Figura 5.2 a seguir, que demonstram a dinâmica do número de indivíduos suscetíveis e infectados.

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T_n - \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu S_n + \gamma I_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n \end{cases}$$

**Tabela 5.4:** Propagação do Vírus da Meningite Meningocócica

n	SUSCETÍVEIS	INFECTADOS
0	≈ 980	≈ 020
1	≈ 968	≈ 032
2	≈ 953	≈ 047
3	≈ 932	≈ 068
4	≈ 901	≈ 099
5	≈ 860	≈ 140
6	≈ 805	≈ 195
7	≈ 738	≈ 262
8	≈ 662	≈ 338
9	≈ 585	≈ 415
10	≈ 515	≈ 485
11	≈ 461	≈ 539
12	≈ 424	≈ 576
13	≈ 401	≈ 599
14	≈ 389	≈ 611
15	≈ 382	≈ 618
16	≈ 379	≈ 621
17	≈ 377	≈ 623
18	≈ 376	≈ 624
19	≈ 375	≈ 625
20	≈ 375	≈ 625

Os dados apresentados na tabela 5.4 e no gráfico 5.2 apontam para o decréscimo do número de indivíduos suscetíveis e o aumento número de indivíduos infectados, os fatores que proporcionam este rápido aumento são a ausência de medidas de controle, campanhas de vacinação ou outras medidas restritivas de contenção populacional. O pico epidêmico é registrado no 19° dia, onde se obtém 625 indivíduos contaminados pela doença. Este dia também representa o ponto de equilíbrio endêmico desta situação problema, para  $S_n = 375$ ,  $19 \leq n \leq 20$  e conseqüentemente  $I_n = 1000 - 375 = 625$ , no período de 20 dias.



**Figura 5.2:** Propagação do Vírus da Meningite Menengocócica. Fonte: Elaborado pela autora.

### 5.2.3 Uma situação-problema para o Modelo SIR

O vírus da Influenza A, subtipo H3N2, é uma variedade do vírus da gripe, responsável pela pandemia da Gripe de Hong Kong em 1968 e causou muitas mortes nos Estados Unidos. A transmissão do vírus acontece através de secreções respiratórias como gotículas de saliva, após a pessoa contaminada tossir [11].

O modelo “SIR” representa a dinâmica de propagação da doença Influenza A: uma vez recuperado, o indivíduo não poderá novamente se infectar pela mesma cepa causadora da infecção; logo, o indivíduo será imunizado permanentemente. Supondo que, em certo município, haja uma população constante e equivalente a 1.000 habitantes e que, nesta população, foram introduzidos 10 indivíduos infectados. Para avaliar a propagação do surto do vírus da gripe de Hong Kong nessa população, pode-se utilizar os seguintes parâmetros para a disseminação da doença: taxa de incidência  $\beta = 0,8$ , taxa de recuperação  $\gamma = 0.2$ , taxa de mortalidade e natalidade  $\mu = 0,01$ . Desta forma, pode-se avaliar esta propagação, após 20 dias do começo da disseminação da doença.

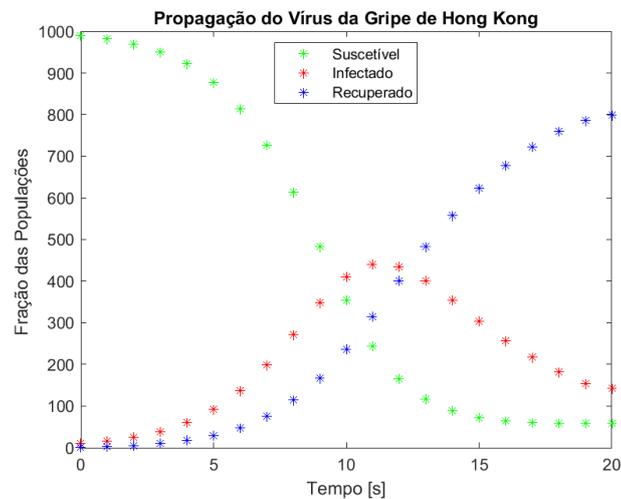
Através das equações 4.8, presentes na elaboração do Modelo SIR foram construídas a tabela 5.5 e a Figura 5.3 a seguir, que demonstram a dinâmica do número de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados.

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T_n - \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu S_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases}$$

Os dados apresentados na tabela 5.5 e no gráfico 5.3 apontam para o decréscimo do número de indivíduos suscetíveis e o aumento número de indivíduos infectados e recuperados, os fatores que proporcionam este rápido aumento são a ausência de medidas de controle, campanhas de vacinação ou outras medidas restritivas de

**Tabela 5.5:** Análise de Dados: Vírus da Gripe de Hong Kong

n	SUSCETÍVEIS	INFECTADOS	RECUPERADOS
0	≈ 990	≈ 10	≈ 000
1	≈ 982	≈ 16	≈ 002
2	≈ 970	≈ 25	≈ 005
3	≈ 951	≈ 39	≈ 010
4	≈ 921	≈ 61	≈ 018
5	≈ 878	≈ 92	≈ 030
6	≈ 814	≈ 138	≈ 048
7	≈ 726	≈ 199	≈ 075
8	≈ 613	≈ 273	≈ 114
9	≈ 484	≈ 349	≈ 167
10	≈ 353	≈ 411	≈ 236
11	≈ 244	≈ 441	≈ 315
12	≈ 166	≈ 434	≈ 400
13	≈ 116	≈ 401	≈ 483
14	≈ 088	≈ 354	≈ 558
15	≈ 072	≈ 304	≈ 624
16	≈ 064	≈ 258	≈ 678
17	≈ 060	≈ 217	≈ 723
18	≈ 059	≈ 182	≈ 759
19	≈ 058	≈ 143	≈ 799
20	≈ 058	≈ 131	≈ 811



**Figura 5.3:** Propagação do Vírus da Gripe de Hong Kong. Fonte: Elaborado pela autora.

contenção populacional. O pico epidêmico é registrado no 11° dia, onde se obtém 441 indivíduos contaminados pela doença; o ponto de equilíbrio endêmico desta situação problema acontece entre o décimo e décimo primeiro dia após a propagação da doença, quando  $S_n = 262$ ,  $10 \leq n \leq 11$ , no período observado de 20 dias.

### 5.2.4 Uma situação-problema para o Modelo SEIR

Pesquisadores do Imperial College utilizaram o modelo epidemiológico SEIR para estimar a evolução da epidemia de COVID-19 em vários países. O vírus SARS-CoV-2, causador da doença infecciosa COVID-19 é da família de vírus coronavírus, encontrados em espécies diferentes de animais, incluindo camelos, gado, gatos e morcegos. Os sintomas da COVID-19 podem variar de um simples resfriado a uma síndrome gripal, ou evoluir para uma pneumonia severa [10].

O modelo “SEIR” representa a dinâmica de propagação do vírus causador da doença COVID-19, o qual apresenta um período de latência até que o indivíduo infectado manifeste os sinais da infecção. Supondo que, em certo município, haja uma população constante e equivalente a 1.000 habitantes e que, nesta população, foram introduzidos 10 indivíduos infectados. Nessa população, pode-se utilizar os seguintes parâmetros para a disseminação da doença: taxa de incidência  $\beta = 1,3$ , taxa de exposição  $\delta = 0,333\dots$ , taxa de recuperação  $\gamma = 0,142857$ , taxa de mortalidade e natalidade  $\mu = 0,001$ . Dessa forma, pode-se avaliar esta propagação, após 30 dias do começo da disseminação da doença.

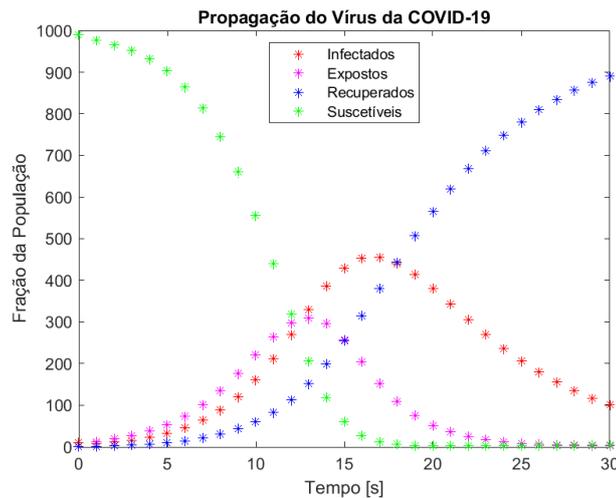
Através das equações 4.12, presentes na elaboração do Modelo SEIR foram construídas a tabela 5.6 e a Figura 5.4 a seguir, que demonstram a dinâmica do número de indivíduos suscetíveis, expostos, infectados e recuperados.

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T_n - \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu S_n \\ E_{n+1} = E_n + \frac{\beta S_n I_n}{T_n} - \mu E_n - \delta E_n \\ I_{n+1} = I_n + \delta E_n - \mu I_n - \gamma I_n \\ R_{n+1} = R_n + \gamma I_n - \mu R_n \end{cases}$$

Os dados apresentados na tabela 5.6 e no gráfico 5.3 apontam para o decréscimo do número de indivíduos suscetíveis e o aumento número de indivíduos expostos, infectados e recuperados, os fatores que proporcionam este rápido aumento são a ausência de medidas de controle, campanhas de vacinação ou outras medidas restritivas de contenção populacional. O pico epidêmico é registrado no 15° dia, onde se obtém aproximadamente 685 indivíduos contaminados pela doença contabilizados entre os indivíduos expostos e infectados, o ponto de equilíbrio endêmico desta situação problema acontece quando,  $14 < n < 15$  entre os dias relativos ao pico epidêmico, no período de 30 dias.

**Tabela 5.6:** Análise de Dados: Vírus da COVID-19

n	SUSCETÍVEIS	EXPOSTOS	INFECTADOS	RECUPERADOS
0	≈ 990	≈ 000	≈ 010	≈ 000
1	≈ 977	≈ 013	≈ 009	≈ 001
2	≈ 966	≈ 019	≈ 012	≈ 003
3	≈ 952	≈ 028	≈ 016	≈ 004
4	≈ 931	≈ 039	≈ 023	≈ 007
5	≈ 903	≈ 054	≈ 033	≈ 010
6	≈ 865	≈ 074	≈ 046	≈ 015
7	≈ 814	≈ 101	≈ 064	≈ 021
8	≈ 746	≈ 135	≈ 089	≈ 030
9	≈ 660	≈ 176	≈ 121	≈ 043
10	≈ 557	≈ 221	≈ 162	≈ 060
11	≈ 439	≈ 265	≈ 213	≈ 083
12	≈ 318	≈ 298	≈ 270	≈ 114
13	≈ 207	≈ 310	≈ 331	≈ 152
14	≈ 119	≈ 295	≈ 387	≈ 199
15	≈ 060	≈ 257	≈ 429	≈ 254
16	≈ 028	≈ 204	≈ 453	≈ 315
17	≈ 012	≈ 152	≈ 456	≈ 380
18	≈ 006	≈ 109	≈ 441	≈ 444
19	≈ 003	≈ 076	≈ 414	≈ 507
20	≈ 003	≈ 052	≈ 379	≈ 566
21	≈ 003	≈ 036	≈ 342	≈ 619
22	≈ 002	≈ 025	≈ 305	≈ 668
23	≈ 002	≈ 018	≈ 270	≈ 710
24	≈ 003	≈ 012	≈ 237	≈ 748
25	≈ 003	≈ 009	≈ 207	≈ 781
26	≈ 003	≈ 007	≈ 180	≈ 810
27	≈ 003	≈ 005	≈ 157	≈ 835
28	≈ 004	≈ 004	≈ 136	≈ 856
29	≈ 004	≈ 003	≈ 118	≈ 875
30	≈ 004	≈ 003	≈ 102	≈ 891



**Figura 5.4:** Propagação do Vírus da COVID-19. Fonte: Elaborado pela autora.

### 5.3 Modelos Epidemiológicos e a COVID-19

As ações e práticas foram intensificadas e novas propostas foram elaboradas. A próxima ação consistiu em orientar e direcionar os alunos no estudo de pesquisas e artigos científicos sobre a dinâmica de propagação da COVID-19 através de modelos epidemiológicos. Os artigos pesquisados foram analisados e são apresentados a seguir:

#### 5.3.1 Modelo SEIR estendido, SEIAHR

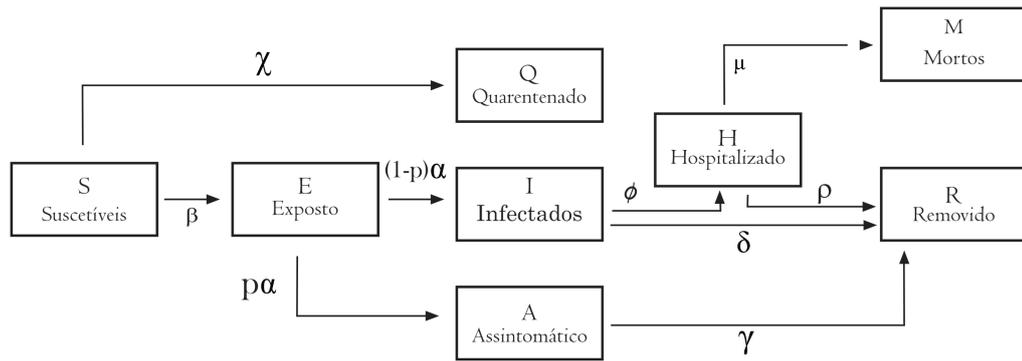
O artigo “Modeling the Post-Containment Elimination of Transmission of COVID-19”, [13], produzido por um grupo de pesquisadores da FGV (Fundação Getúlio Vargas), publicado em abril de 2020, aplica o modelo SEIR estendido para explicar a dinâmica de propagação da doença COVID-19 e contempla os aspectos biológicos e as repostas imunológicas dos indivíduos infectados características da doença e acrescenta compartimentos que representam a dinâmica da população mediante os efeitos dos processos de restrição e contenção dos movimentos populacionais por meio dos compartimentos dos assintomáticos (pessoas infectadas e infectantes que não apresentam os sintomas da doença) e hospitalizados (pessoas infectadas mas não infectantes por estarem em processo de tratamento da doença) [13].

O fluxograma representa a ilustração característica do modelo SEIAHR (Suscetível-Exposto-Infectado-Assintomático-Hospitalizado-Recuperado) para a propagação da doença COVID-19. Embora pertença a ilustração, o modelo não inclui a classe compartimental dos quarentenados e mortos.

O modelo é representado pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda[(1 - \chi)S] \tag{5.1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \lambda[(1 - \chi)S] - \alpha E \tag{5.2}$$



**Figura 5.5:** Fluxograma do Modelo SEIAHR, propagação da COVID-19.  
 Fonte: Elaborado pela autora.

$$\frac{dI}{dt} = (1 - p)\alpha E - \delta I - \phi I \tag{5.3}$$

$$\frac{dA}{dt} = p\alpha E - \gamma A \tag{5.4}$$

$$\frac{dH}{dt} = \phi I - (\rho + \mu)H \tag{5.5}$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I + \rho H + \gamma A \tag{5.6}$$

Onde:

- $\beta$ : taxa de transmissão.
- $\lambda = \beta(I + A)$ : força da infecção.
- $\chi$ : taxa de quarentena.
- $\alpha$ : taxa de incubação.
- $p$ : fração dos assintomáticos.
- $\delta$ : taxa de recuperação hospitalar.
- $\phi$ : taxa de hospitalização.
- $\gamma$ : taxa de recuperação.
- $\rho$ : taxa de recuperação dos indivíduos hospitalizados.
- $\mu$ : taxa de mortalidade.
- $S(t)$  : número de indivíduos suscetíveis no tempo  $t$  .
- $E(t)$  : número de indivíduos expostos no tempo  $t$  .
- $I(t)$  : número de indivíduos infectados no tempo  $t$  .
- $A(t)$  : número de indivíduos assintomáticos no tempo  $t$  .
- $H(t)$  : número de indivíduos hospitalizados no tempo  $t$  .
- $R(t)$  : número de indivíduos recuperados no tempo  $t$  .

As variáveis  $S, E, I, A, H, R$  representam as frações da população apresentadas nos compartimentos em relação ao tempo  $t$ , que proporcionalmente equivalem à  $S(t) + E(t) + I(t) + A(t) + H(t) + R(t) = 1$ . O número básico de reprodução do

modelo SEIAHR é definido por meio da matriz de próxima geração e representado pela seguinte expressão:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta(1 - \chi)(p(\phi + \delta)) + ((1 - p)\gamma)}{\gamma(\delta + \phi)} \quad (5.7)$$

O modelo SEIAHR demonstra por meio das diversas simulações e comparações com os dados reais que é possível obter informações relevantes para o controle dos valores que definem a diminuição do número de casos infecciosos da epidemia; representa também apontamentos possíveis para a tomada de decisões públicas de caráter emergenciais. Após a validação do modelo, o artigo relata que os países que conseguiram reduzir o número de casos da doença o fizeram por meio da imposição de fortes medidas de isolamento e distanciamento social. Destaca ainda que, é inevitável o aparecimento de novos casos da doença, o que é considerado pelos especialistas como uma segunda onda da doença. Esta surge após o relaxamento das medidas de contenção ocorridos por meio de fatores tais como: o retorno a atividades econômicas e sociais, a rotinas de trabalho, a reabertura de escolas e a utilização dos transportes públicos. Como uma de suas contribuições principais, o artigo consiste em variar as taxas e observar o impacto dos parâmetros de propagação da doença mediante a retomada das atividades sociais [13].

### 5.3.2 Modelo SEIR (+CAQH)

Em um outro artigo, produzido por um grupo de pesquisadores da UFRN, intitulado “COVID-19 pandemics modeling with SEIR (+CAQH), social distancing, and age stratification. The effect of vertical confinement and release in Brazil”, [23], publicado em abril de 2020, tem-se a construção de um novo modelo para representar a propagação da COVID-19, especificamente no Brasil. O modelo objetiva realizar simulações para prever que o número de casos da doença esteja sempre abaixo da capacidade limite prevista de atendimentos do sistema único de saúde e consiste na transformação do modelo clássico SEIR em um modelo SEIR estendido, com o inclusão dos compartimentos dos indivíduos confinados, assintomáticos, quarentenados e hospitalizados, além de dividir a população em nove grupos de diferentes faixas etárias [23].

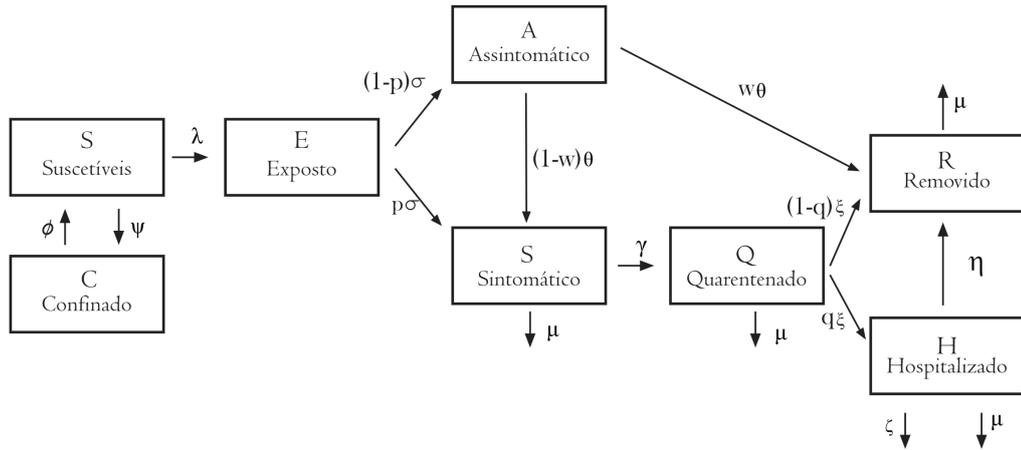
O fluxograma representa a ilustração característica do modelo SEIR +CAHQ: Suscetível-Confinado-Exposto-Assintomático-Infectedo-Quarentenado-Hospitalizado-Recuperado para a propagação da doença COVID-19.

O modelo SEIR (+CAQH), é representado pelas seguintes equações diferenciais não lineares acopladas, que descrevem o fluxo da população entre os compartimentos:

$$\frac{dS_i}{dt} = -\lambda(t)S_i - \psi_i(t)S_i + \phi_i(t)C_i, \quad (5.8)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \psi_i(t)S_i - \phi_i(t)C_i, \quad (5.9)$$

$$\frac{dE_i}{dt} = \lambda(t)S_i - \sigma E_i, \quad (5.10)$$



**Figura 5.6:** Fluxograma do Modelo SEIR (+CAQH) , COVID-19. Fonte: Elaborado pela autora.

$$\frac{dA_i}{dt} = (1 - p)\sigma E_i - \theta A_i, \quad (5.11)$$

$$\frac{dI_i}{dt} = p\sigma E_i - (\gamma + \xi)I_i + (1 - \omega)\theta A_i, \quad (5.12)$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \gamma I_i - \xi Q_i, \quad (5.13)$$

$$\frac{dH_i}{dt} = q_i \xi I_i - \eta H_i, \quad (5.14)$$

$$\frac{dR_i}{dt} = \omega \theta A_i + (1 - q_i) \xi I_i + \eta H_i. \quad (5.15)$$

Onde:

$\beta$ : taxa de infecção relativa ao número reprodutivo da doença ao longo do tempo  $t$ .  
 $\phi$ : taxa de transmissão do confinamento (isolamento social) para o compartimento dos indivíduos suscetíveis (relaxamento das medidas protetivas).

$\lambda$ : força da infecção.

$\Psi$ : taxa de transmissão dos indivíduos suscetíveis para o confinamento (isolamento social: rigidez das medidas protetivas).

$p$ : fração de indivíduos sintomáticos da população.

$1 - p$ : fração de indivíduos assintomáticos da população.

$\sigma$ : taxa de remoção do compartimento dos expostos.

$\theta$ : taxa de remoção do compartimento dos assintomáticos.

$\gamma$ : taxa de atenuação dos infecciosos pelo fator quarentena .

$\xi$ : taxa de remoção do compartimento dos quarentenados.

$\omega$ : fração da população assintomática que se recupera.

$1 - \omega$ : fração da população assintomática que se torna sintomática (infectada).

$\eta$ : taxa de remoção dos indivíduos hospitalizados para removidos.

$q$ : fração dos quarentenados que são hospitalizados.

$1 - q$ : fração dos indivíduos quarentenados que não são hospitalizados (recuperados).

$\zeta$ : taxa que representa o número de indivíduos hospitalizados que precisam ser encaminhados para unidades de tratamento intensivo .

$\mu$ : taxa de mortalidade.

$S(t)$  : número de indivíduos suscetíveis no tempo  $t$ .

$C(t)$  : número de indivíduos confinados (distanciamento social) no tempo  $t$ .

$E(t)$  : número de indivíduos expostos no tempo  $t$ .

$A(t)$  : número de indivíduos assintomáticos (infectado e transmissor da doença) no tempo  $t$ .

$I(t)$  : número de indivíduos sintomáticos (infectado e transmissor da doença) no tempo  $t$ .

$Q(t)$  : número de indivíduos quarentenados (infectado mas não transmissor da doença) no tempo  $t$ .

$H(t)$  : número de indivíduos hospitalizados (infectado mas não transmissor da doença) no tempo  $t$ .

$R(t)$  : número de indivíduos recuperados no tempo  $t$ .

A população foi dividida por categorias de idade (variações, 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50, 50-60, 60-70, 70-80 e acima de 80 anos), para cada compartimento  $X$ , as subcategorias de idade somam  $X = \sum_i X_i$  e a população total é assim representada  $S + C + E + A + I + Q + H + R = N$ , com a população total definida por  $N = \sum_i N_i$ , onde  $N_i =$  população em cada faixa etária.

A força de infecção ou formação de novos casos da doença é proporcional ao número de indivíduos infectados presentes na população no tempo  $t$  e pode ser expressa por:

$$\lambda(t) = \beta(t)\mathcal{I}, \quad (5.16)$$

Com  $\mathcal{I}$ , expressando o número médio de indivíduos infectados

$$\mathcal{I} = \sum_i \frac{(I_i + A_i)}{N_i} \quad (5.17)$$

Na equação 5.16, tem-se que  $\beta$ , está relacionado ao número reprodutivo da doença ao longo do tempo  $t$  e pode ser assim expresso:

$$\mathcal{R}(t) = \frac{\beta(t)}{\gamma} \quad (5.18)$$

A pesquisa apresentada no artigo objetiva analisar e desenvolver estratégias para controle da COVID-19 no Brasil ao associar o isolamento social por critérios específicos de acordo com a idade e outros fatores que classificam os indivíduos como pertencentes ao grupo de risco a sobrecarga no atendimento oferecido pelo sistema único de saúde. O destaque apresentado como dificultador para validação do modelo consiste no desafio enfrentado por países de baixa renda com relação a subnotificação de casos , ausência de testagem massiva da população e diferentes estratégias adotadas

por cada uma das regiões (estados) da unidade federativa para efetivar o isolamento social. O confinamento vertical é observado como uma estratégia ineficaz, uma vez que, este tipo específico de confinamento não impossibilitará o contato entre indivíduos suscetíveis e infecciosos. Entre outros apontamentos a pesquisa solicita as autoridades brasileiras posicionamento de intensificação das medidas de controle.

Observações e apontamentos importantes foram destacados:

- Os modelos epidemiológicos foram modificados e novas classes compartimentais foram acrescentadas para exemplificar o estudo de situações reais.
- o modelo representativo da propagação da doença é construído mediante fatores imprevisíveis e os argumentos assumem a função preditiva para a tomada de iniciativas (que direcionarão as ações de controle e erradicação da doença) relacionadas as políticas públicas e a saúde coletiva [37].
- No enfrentamento da pandemia da COVID-19 existem aspectos desconhecidos, tais como, a biologia do vírus, a imunização permanente dos indivíduos infectados, a proporção da população de infectados que serão assintomáticos e transmissores da doença, entre outras incertezas relativas a própria doença[37].

## Projeto Científico

---

Neste capítulo, são apresentadas ações e práticas relativas à formação de um grupo de iniciação científica e pesquisa em Matemática.

### 6.1 Descrição de objetivos:

Para atender ao objetivo proposto no PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) para o trabalho de conclusão de curso, que é produzir temas pertinentes ao currículo de matemática na Educação Básica com impacto na sala de aula, foi criado pela professora Márcia Lopes o projeto científico. O grupo de estudos realizou diversas ações para relacionar a Matemática aos fenômenos da atualidade e estudar a relação da Matemática com a pandemia do COVID-19.

O projeto reuniu um grupo de profissionais e estudantes do CTPM/MG (Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais, em Bom Despacho), e contou com a participação de diversos professores universitários e outros profissionais que se disponibilizaram a compartilhar o conhecimento científico com a Educação Básica, conforme o cronograma, ilustrado na Figura 6.1.

Em um primeiro momento, o grupo de alunos do projeto científico se reunia para distribuição de materiais para leitura e ampliação do conhecimento teórico relativo ao tema apresentado para pesquisa. Após, a culminância do projeto ocorria com as palestras oficiais ministradas por professores universitários, onde os professores explicavam os temas previamente programados e apresentavam a contextualização do saber produzido em pesquisas científicas e a aplicação destes nas situações atuais, em nossas comunidades e a influência destes saberes em nossas práticas diárias. Para finalizar os alunos produziam relatórios sobre o tema estudado.



**PROJETO DE INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA: COVID-19**

**OBJETIVO:** FORMAÇÃO DE GRUPO DE ESTUDOS PARA AMPLIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E DESENVOLVIMENTO DE PESQUISA CIENTÍFICA, RELATÓRIOS DE PESQUISA, PRODUÇÃO DE VÍDEOS E EXPLORAÇÃO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS.

**ÁREAS DE INTERESSE:** MATEMÁTICA, FÍSICA, BIOLOGIA, INGLÊS, INFORMÁTICA, SISTEMAS DE INFORMAÇÃO, MEDICINA, ENGENHARIA, COMUNICAÇÃO E PROPAGANDA, JORNALISMO E PORTUGUÊS.

<b>PROJEÇÃO DE TRABALHO E PROGRAMAÇÃO (PLANEJAMENTO)</b>		
	<b>ASSUNTO</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b>
SEMANA 01 01/06 à 05/06	EPIDEMIOLOGIA	- O que é epidemiologia? - Quais as epidemias que já ocorreram no Brasil e no mundo? - Quais as ciências que estudam as Epidemias?
SEMANA 02 08/06 à 12/06	EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA	- O que é epidemiologia matemática? - Autores, propostas e conceitos.
SEMANA 03 15/06 à 19/06	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E O MODELO SIR	- O que é modelo matemático? - O que Equação Diferencial? - O que é o Modelo SIR?
SEMANA 04 22 à 26/06	COVID-19	- O que é o COVID-19, implicações, situação real no mundo e no Brasil? Obtenção de dados (nacionais e regionais, situação local).
SEMANA 05 29/06 à 03/07	MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO GRÁFICA  MODELAGEM MATEMÁTICA E O COVID-19	- O que é Modelagem Matemática? Como as ferramentas computacionais auxiliam no desenvolvimento de Modelos Matemáticos? - Quais as propostas de modelos e pesquisas para simulações da Epidemia do COVID-19.
SEMANA 06 06/07 à 10/07	INFORMAÇÕES SOBRE O FESTIVAL DE VÍDEOS  ELABORAÇÃO DE ROTEIRO E PROCURA DE RECURSOS PARA PRODUÇÃO DE VÍDEO  CRIAÇÃO DE MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DO PROJETO	- Inscrição, Leitura de Editais, buscar recursos e informações produção de vídeos.  - Apresentação de panfletos, cartazes, produção de vídeos, exploração de ferramentas computacionais e a representação Matemática da Epidemia.

Observação: Inserir observações e sugestões.

**Figura 6.1:** Distribuição da Atividades a cada Semana da programação do Projeto Científico. Fonte: Elaborado pela autora.

## 6.2 Semana 01: Epidemiologia

Para introduzir as atividades do projeto científico que ocorrem com o apoio e incentivo da direção administrativa e pedagógica do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais - Unidade Bom Despacho, sob orientação do coordenador de Pesquisas, Dr. Mehran Sabeti, para aplicação prática da dissertação acadêmica do curso PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) da professora Márcia Lopes Ferreira, foi realizada, com o apoio do elo técnico do colégio para a abertura de sala virtual, a palestra como o tema: “Epidemiologia”.

O evento foi ministrado pelo Doutor Marcus Tavares, especialista em saúde pública e enfermagem psiquiátrica, com Mestrado e Doutorado em saúde e enfermagem, na linha de pesquisa: “Epidemiologia, políticas e práticas de saúde das populações” pela Escola de Enfermagem da UFMG.



Figura 6.2: Semana 01: Epidemiologia

A Epidemiologia realiza a abordagem de doenças através dos métodos numéricos. O principal objetivo da palestra além de esclarecer os conceitos principais da ciência epidemiológica e os seus significados, foi mostrar a relação do estudo da matemática escolar para as várias áreas de formação acadêmica e estabelecer para os alunos a possibilidade de enfrentarem as suas dificuldades pessoais e intelectuais e se tornarem investigadores das realidades presentes no cotidiano e a relação destas com a produção do conhecimento científico.

### 6.3 Semana 02: Epidemiologia Matemática

Para dar continuidade ao projeto científico que relaciona a matemática à atualidades, especificamente a pandemia do novo coronavírus (COVID-19), o grupo de alunos e ex-alunos do Colégio Tiradentes de Bom Despacho, orientados pela professora Márcia Lopes, realizou mais um evento que contou com a participação do Doutor Mehran Sabeti. O tema abordado em palestra ministrada em sala virtual, organizada pelo elo técnico do colégio foi: “Epidemiologia Matemática”. O objetivo da palestra foi mostrar para a comunidade escolar a importância da matemática na solução de problemas complexos e a dinâmica dos modelos para o estudo de epidemias que surgem através da propagação de doenças infecciosas. O Modelo SIR (Suscetíveis, Infectados e Recuperados) foi explicado para os alunos, através de uma linguagem clara e objetiva, relacionando-o a conteúdos escolares da educação básicas (Matrizes e Sistemas Lineares).



Figura 6.3: Semana 02: Epidemiologia Matemática

A palestra contou com a presença do diretor administrativo Capitão PM Afonso Alves da Silva, Comandante do Colégio Tiradentes, da diretora pedagógica do CTPM, Professora Gisele Soares de Araújo e das seguintes autoridades: Palestrante - Doutor Mehran Sabeti (Professor Associado da Universidade Federal de Viçosa), Dr. Fernando Souza Bastos (Professor Adjunto da Universidade Federal de Viçosa), Dr. Newton Moreno Sanches (Professor de microbiologia e imunologia do Campus UFV Florestal), demais professores e colaboradores da unidade local, alunos do Ensino Médio e participantes do projeto de pesquisa.

## 6.4 Semana 03: COVID-19

O projeto científico, constituído por um grupo de alunos e ex-alunos do Colégio Tiradentes de Bom Despacho, sob a supervisão da Professora Márcia Lopes Ferreira (docente nesta instituição), com orientação do Doutor Mehran Sabeti (UFV/Florestal) e apoio da direção administrativa e pedagógica da Unidade CTPM, realizou mais uma atividade especial nesta última sexta-feira 26/06/2020.

O Doutor Newton Moreno Sanches (coordenador do curso de Ciências Biológicas da Universidade Federal de Viçosa, Campus Florestal), desenvolveu em uma sala virtual a palestra com o tema COVID-19. O professor descreveu as características do agente causador da doença, as suas implicações e especificidades em relação à atuação do vírus no corpo humano, descreveu a necessidade de nos protegermos e respeitarmos as normas de isolamento social, cientes das características deste momento histórico, sem uma maneira eficaz para o combate desta doença.



Figura 6.4: Semana 03: COVID-19

A palestra contou com a presença do diretor administrativo Capitão PM Afonso Alves da Silva, Comandante do Colégio Tiradentes, da diretora pedagógica do CTPM, Professora Gisele Soares de Araújo e das seguintes autoridades: Palestrante - Dr. Newton Moreno Sanches (Professor de microbiologia e imunologia do Campus UFV Florestal), Dr. Fernando Souza Bastos (Professor Adjunto da Universidade Federal de Viçosa), Doutor Mehran Sabeti (Professor Associado da Universidade Federal de Viçosa), demais professores e colaboradores da unidade local, alunos do Ensino Médio e participantes do projeto de pesquisa.

## 6.5 Semana 04: Análise de Dados: COVID-19

A presente popularização da visualização de dados em notícias jornalísticas, campanhas publicitárias, estudos científicos e relatórios criou a oportunidade de destacar a importância da matemática e do seu ensino, uma vez que, a matemática ao ser utilizada aliada a utilização de recursos computacionais, permite analisar, sintetizar e processar representações através de imagens.

Para tratar sobre este assunto, foi realizada através de uma sala virtual a palestra com o tema: “Análise de Dados:COVID-19”, a palestra ocorreu na sexta-feira 03/07/2020, e teve como colaborador o Professor e Doutor Fernando de Souza Bastos, que possui experiência na área de Probabilidade e Estatística, com destaque para Modelos de Regressão, Modelos de Seleção Amostral, Delineamento de Experimentos, Big Data, Programação em R, Criação de Relatórios Dinâmicos, Visualizações Gráficas, Educação Matemática e Estatística.

É em virtude das profundas mudanças ocorridas em função da pandemia do Novo Coronavírus e da possibilidade de lidar com estas alterações de maneira inteligente e obter aprendizado mediante a nova situação, que o evento foi realizado.



Figura 6.5: Semana 04: Análise de Dados: COVID-19

## 6.6 Semana 05: Festival de Vídeo e Ampla divulgação do Projeto

Matemática, arte, tecnologia e paixão, uma mistura eficiente e eficaz para modelar informações de maneira lógica e racional, selecionar estas e transformá-las em conhecimento com o objetivo de produzir vídeos para a divulgação das atividades desenvolvidas pelo projeto científico do Colégio Tiradentes da Polícia Militar de Minas Gerais, que relaciona à matemática a atualidade, frente ao combate da pandemia do Sars-CoV-2 (COVID-19).

Para tratar sobre este assunto, foi realizada através de uma sala virtual a palestra com o tema: “PRODUÇÃO AUDIOVISUAL”, a palestra ocorreu na sexta-feira 10/07/2020, e teve como colaborador Luiz Carlos Amaral, que dentre outras funções é bacharel em Artes Visuais com ênfase em Cinema de Animação pela Escola de Belas Artes da UFMG; autor de várias peças coreográficas apresentadas no circuito de encontros da Pastoral da Juventude; executou a direção, roteirização e edição de algumas peças curtas audiovisuais e alguns documentários; autor de dois documentários em longa-metragem: A Caminhada (o filme de sua vida até agora, como ele mesmo define) e Dentro do Nosso Coração (realizado com recursos da Lei Estadual de Incentivo à Cultura); um contador de histórias, sonhador e realizador/fazedor de sonhos e, acima de tudo, um grande, enorme, mentiroso. “As mentiras são apenas a realidade que não teve a sorte de acontecer”. Isso parece ser verdade.



Figura 6.6: Semana 05: Produção Audiovisual

## 6.7 Semana 06: COVID-19: um olhar médico

Para compreender melhor a diferença entre síndrome e doenças do sistema respiratório e as especificidades históricas do enfrentamento ao COVID-19, nada melhor do que obter relatos das rotinas diárias de um médico especialista e aprender com as indicações e prescrições deste sobre os cuidados pessoais efetivos para a nossa proteção, para isso foi desenvolvida em continuidade ao projeto científico, estabelecido no Colégio Tiradentes de Bom Despacho, uma palestra para tratar sobre este assunto, foi realizada através de uma sala virtual a palestra com o tema: “COVID-19: Um olhar médico”.

O evento ocorreu na sexta-feira 10/07/2020, e teve como colaborador o médico Jander Silva de Castro, formado na faculdade de medicina da UFMG em 1996, especialização em pneumologia pela Santa Casa de Misericórdia de BH (1998-1999) e titular da Sociedade Brasileira de Pneumologia. Atualmente o Doutor Jander atua no seguintes hospitais da região Centro-Oeste mineira, Hospital Santa Mônica, Hospital São Judas Tadeu em Divinópolis e em seu consultório médico particular.

Obter conhecimento sempre será a melhor maneira de nos protegermos de qualquer enfermidade.



Figura 6.7: Semana 06: COVID-19: Um olhar médico

## 6.8 Análise de dados reais para a COVID-19

Para modelar a dinâmica de propagação de uma doença pode-se utilizar os dados reais interligados ao uso recursos computacionais e representar graficamente a situação. Desta vez, a prática elaborada pela professora Márcia Lopes foi representar os dados e informações sobre a propagação da COVID-19 e divulgá-los para a comunidade. Segue a descrição dos novos conhecimentos adquiridos e das representações gráficas realizadas.

A família do vírus coronavírus, já identificada cientificamente por infectar animais domésticos e selvagens e causar em seres humanos resfriados comuns, pode sofrer mutações genéticas significativas. Os pacientes infectados pelo vírus desenvolvem desconforto respiratório agudo e alta probabilidade de internação em unidades de terapia intensiva, com evolução rápida para óbito [27].

A nomenclatura (SARS-CoV-2) é assim designada por representar a transmissão da infecção causada pelo coronavírus 2, ou pelo vírus da síndrome respiratória aguda, foi caracterizada com potencial pandêmico por apresentar um processo de rápida transmissão, comparado com uma taxa de crescimento exponencial <sup>1</sup> [10].

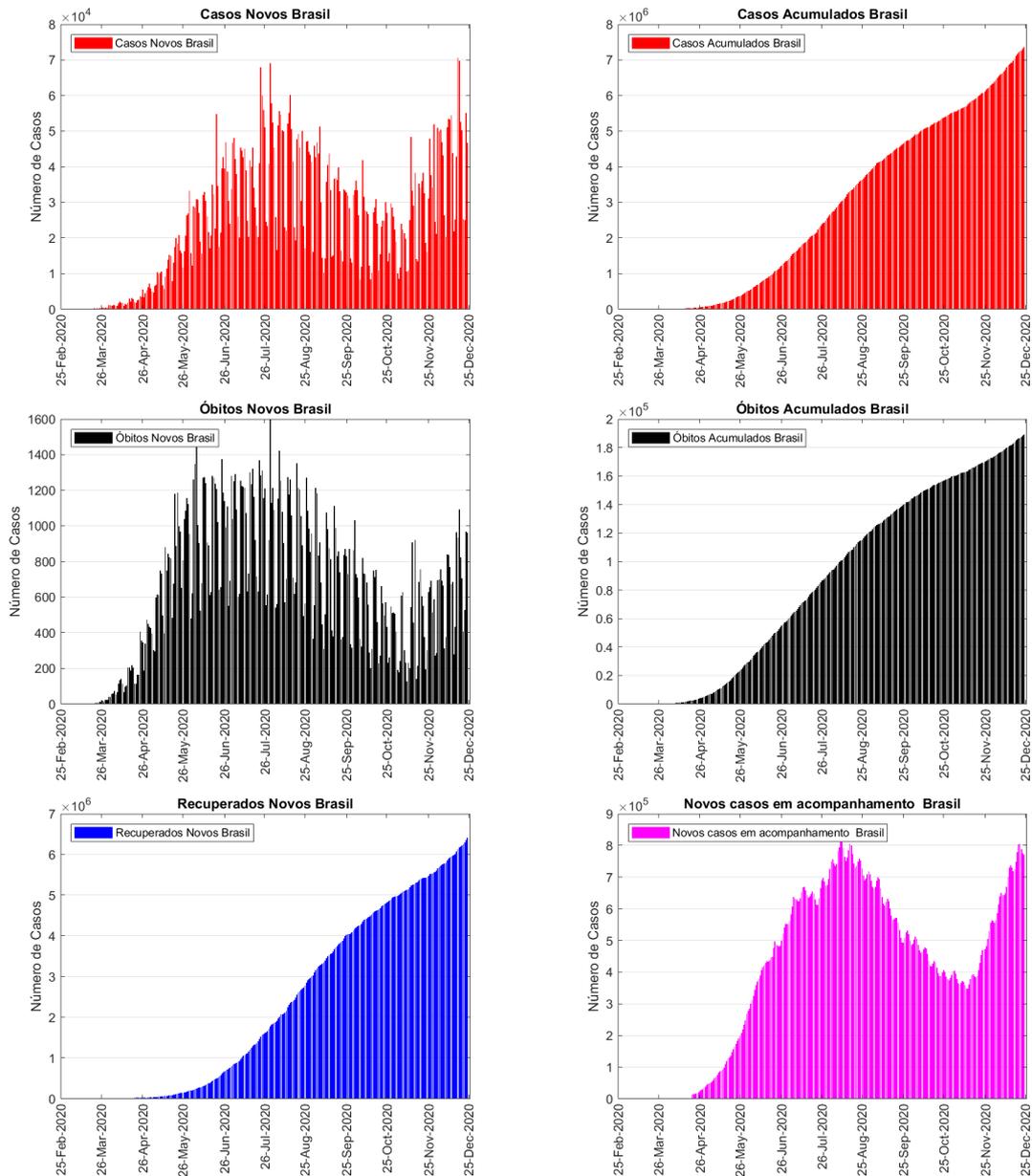
A principal forma de transmissão da doença ocorre por meio do contato com gotículas respiratórias originadas de pacientes sintomáticos ou assintomáticos e está relacionada a forma de interação entre os indivíduos ocorrendo de maneira comum a transmissão da doença em ambientes com aglomeração de pessoas, principalmente dentro de ambientes familiares. O vírus também possui a capacidade de estar presente em superfícies inanimadas, tais como, metal, vidro ou plástico e o contato com as superfícies contaminadas também representa uma forma de propagação da doença.

Muitos resultados teóricos são comprovados analiticamente, mas as ilustrações obtidas na Figura 6.8 são representações reais geradas por análise dos dados fornecidos pelo Ministério da Saúde e construídas a partir de recursos computacionais, estas representações serão utilizadas para entender como uma doença infecciosa se espalha na vida real [10].

Os gráficos foram gerados com a utilização do programa Matlab, tendo como fonte os dados fornecidos pelo Ministério da Saúde. Eles representam informações relativas ao número de novos casos da doença, o número acumulado de casos da doença, o número de óbitos, o número de recuperados e o número de indivíduos em acompanhamento por causa da doença COVID-19 no Brasil.

---

<sup>1</sup>Crescimento Exponencial: Representa a forma como uma quantidade aumenta com o tempo segundo uma função  $f(t)$ . Indica o aumento da quantidade de casos da doença em relação ao tempo.



**Figura 6.8:** Análise de Dados, Fonte: Fonte: Elaborado pela autora, dados do Ministério da Saúde [10]

## 6.9 Recursos Dinâmicos

Ao buscar novas formas de representar a propagação e o estudo das doenças através da matemática e do uso de recursos computacionais. A professora Márcia Lopes apresentou aos alunos e a comunidade em geral aplicativos dinâmicos que os permitiam visualizar, interpretar e manipular os dados em estudo relativos a propagação da COVID-19.

As construções e simulações geradas a partir de recursos computacionais ilustram a dinâmica de propagação da doença COVID-19. Nesta pesquisa são apontados dois modelos que se destacam como ferramentas para gerar a compreensão da dinâmica de propagação desta doença e a dinâmica populacional entre as classes compartimentais, um deles é denominado de Simulite, construído a partir do programa Matlab <sup>2</sup> e o outro é a Calculadora Epidêmica, construída por pesquisadores da USP. Ambos os modelos foram elaborados e possuem como base o modelo SEIR clássico.

### **Simulite: Uma simulação da dinâmica de propagação da COVID-19**

O modelo de simulação dinâmica formulado permite visualizar a propagação da doença para um conjunto de indivíduos em um local onde inicialmente as medidas de isolamento e contenção populacional são efetivas. A dinâmica da simulação ilustra por meio do espalhamento e encontro de indivíduos suscetíveis e infectados o aumento do número de casos da doença, os indivíduos são representados por bolinhas de diferentes cores, eles estão contidos em caixas separadas por barras que representam as medidas de contenção de movimentos populacionais, o relaxamento das medidas de contenção faz com que a doença se distribua em todas as comunidades. A partir das interações entre os indivíduos e paralelamente de acordo com a dinâmica da doença um gráfico é construído ao lado da caixa de simulações e ilustra as curvas do modelo matemático de disseminação da doença [24].

### **Calculadora epidêmica**

Um recurso importante para gerar compreensão sobre a dinâmica de propagação da doença de maneira interativa e prática é o uso da calculadora epidêmica desenvolvida por Gabriel Goh e outros colaboradores. A calculadora epidêmica está postada em uma página do github disponibilizada na internet. O modelo ilustra a dinâmica de transmissão da doença e acrescenta compartimentos específicos da propagação da COVID-19, incluindo taxas de mortalidade e dados sobre o número de hospitalizações, que se constituem como informações relevantes para identificar a proximidade da sobrecarga ou colapso dos sistemas de saúde, ao apontar para os números representativos da capacidade limite dos atendimentos hospitalares [16].

---

<sup>2</sup>Matlab ( Matrix Laboratory): Ambiente de programação de alto desempenho voltado para a resolução de problemas que podem ser expressos em notação matemática

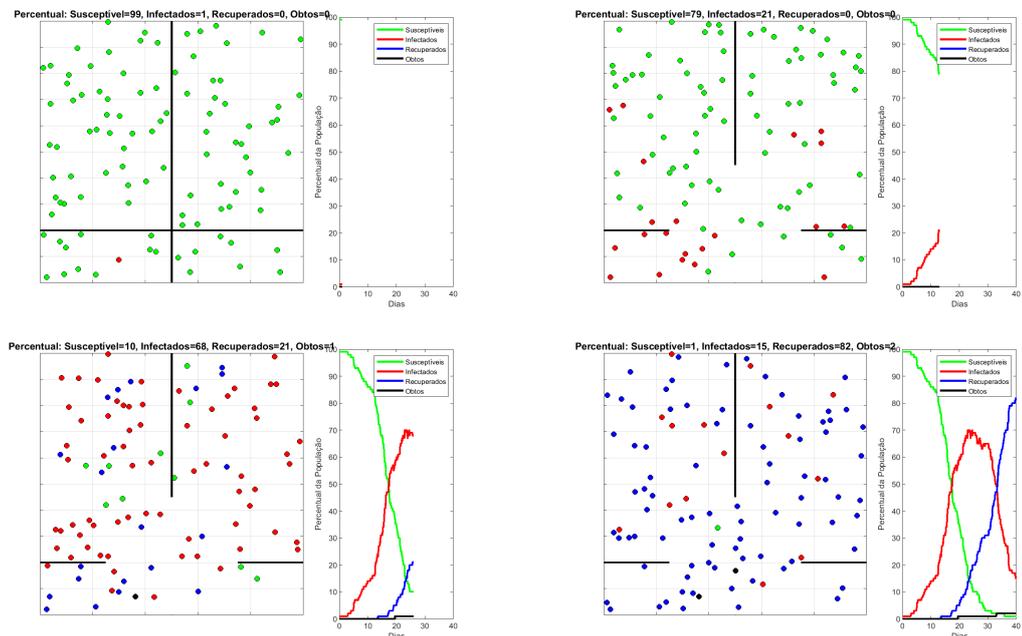


Figura 6.9: Simulação dinâmica de propagação da COVID-19. Fonte: Adaptada do programa Simulite [24].

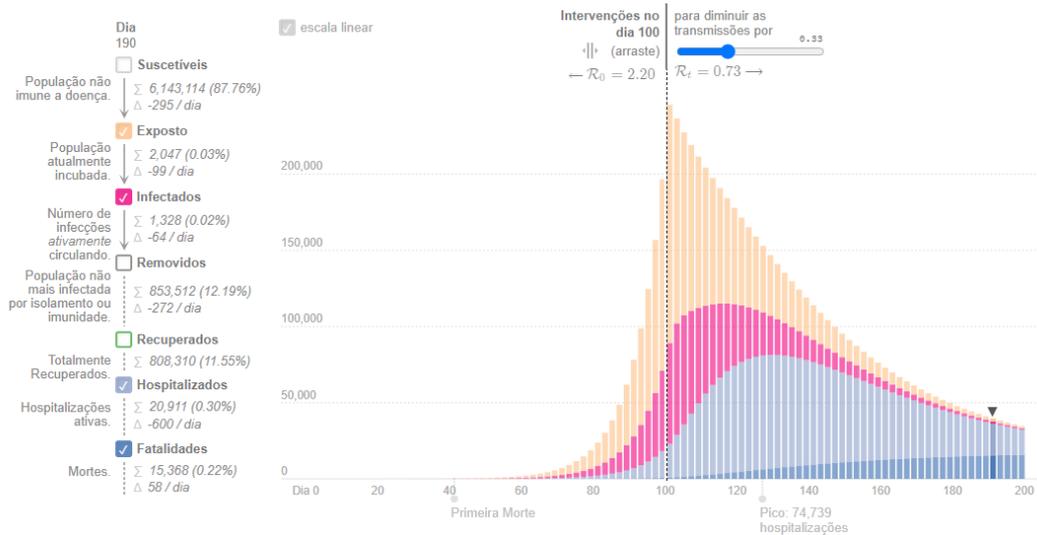


Figura 6.10: Calculadora Epidêmica. Fonte: Página Epidemic Calculator [16]

## Conclusões

---

Este trabalho de pesquisa foi proposto com a finalidade de contribuir com a compreensão da relevância do estudo da Matemática no Ensino Fundamental e Médio, de modo a demonstrar que as competências e habilidades desenvolvidas por meio do ensino e da aprendizagem de conteúdos matemáticos na Educação Básica possibilitam ao indivíduo obter ferramentas de compreensão e intervenção no ambiente em que este está inserido.

Para se vislumbrar a aplicação da Matemática em face à situação atual, visto ser uma ciência capaz de lidar com fatos reais do cotidiano, elegeu-se um estudo sobre os conceitos básicos em Epidemiologia relacionados ao ensino da Matemática na Educação Básica, e relacionou-se o conhecimento matemático a outras áreas de pesquisa e investigações científicas, tais como: as ciências médicas e biológicas, sendo aplicada a modelagem matemática como atividade estratégica para a aprendizagem de conteúdo

A modelagem matemática foi utilizada de modo a possibilitar o uso de tecnologias digitais em sala de aula para gerar as ilustrações dos modelos epidemiológicos. Estes modelos foram representados por meio de fluxogramas e do estudo das equações que interpretam e compreendem a dinâmica de propagação das doenças infecciosas.

Os modelos foram apresentados em tempo discreto e contínuo, para exemplificar que geralmente a coleta de dados ocorre por meio de medições regulares, os quais são descritos por equações matemáticas.

As equações podem ser relacionadas aos conteúdos que pertencem ao currículo da Matemática na Educação Básica. Contudo, por ensejo, o projeto de iniciação científica introduziu também conteúdos referentes ao Ensino Superior como o conceito de equações diferenciais, para despertar o interesse e o aprofundamento do conhecimento matemático para os alunos.

O projeto de iniciação científica e as palestras realizadas durante a produção desta pesquisa representaram um momento de debate entre o Ensino Superior e a Educação Básica e proporcionou aos alunos a obtenção de muitos conhecimentos e o desejo de se envolverem em outras pesquisas e investigações relacionadas à Matemática e as suas diversas aplicações, um momento de muito aprendizado. A utilização de situações hipotéticas de aplicação prática dos assuntos abordados nas equações

dos modelos epidemiológicos possibilitou a utilização de recursos computacionais dentro do contexto escolar, proposta presente, estabelecida por meio das diretrizes da BNCC.

O enfoque dado à representação de situações reais por meio da criação de modelos matemáticos se difere dos momentos anteriores de enfrentamento de doenças com caráter epidêmicos. A sociedade atual possui uma produção científica que permite encontrar explicações, tomar decisões, realizar previsões. Relacionar temas de pesquisas em Epidemiologia Matemática a conteúdos ensinados em sala de aula na Educação Básica representa uma estratégia para o ensino da Matemática.

Nesse sentido, apresentaram-se a análise de dados referentes à Pandemia da COVID-19, em que é possível observar modelos epidemiológicos, elaborados por pesquisadores brasileiros, sendo utilizados para realizar previsões e levantar apontamentos para a tomada de decisões políticas de reabertura de atividades comerciais e estudar sobre os limites de atendimento no sistema de saúde pública.

Sendo assim, reconhece-se que a iniciativa de se apresentar na Educação Básica o ensino da Matemática como uma atividade construída de maneira investigativa, a partir de problemas originados do cotidiano, ações humanas e ocorrências de fenômenos naturais, pode despertar o interesse dos alunos para o aprendizado dessa área de conhecimento e para a sua aplicação no dia a dia, de modo a confirmar a relevância do ensino dessa ciência.

# Plano de Aula para o Ensino Médio: Modelo SIS por recorrência

---

A revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática publicou o artigo: “A construção de um modelo discreto de propagação de uma doença para o ensino médio”, [2], escrito por Carlos Alberto Martins de Assis. O artigo propõe equações em tempo discreto para representar o modelo SIS (Suscetível-Infetado-Recuperado), com o objetivo de estimular a curiosidade e a aprendizagem dos alunos, através deste artigo foi elaborado o seguinte plano de Aula.

## A.1 Plano de Aula: Modelo SIS por recorrência

**Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio**

**Objetivos de aprendizagem:**

- Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
- Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

**Competências/Habilidades da BNCC:**

- **Competência Específica 1:**

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. Habilidades: EM13MAT101, EM13MAT104.

- **Competência Específica 3:**

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando

a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. Habilidades: EM13MAT304, EM13MAT310, EM13MAT313, EM13MAT314, EM13MAT315.

• **Competência Específica 4:**

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. Habilidades: EM13MAT405, EM13MAT406.

• **Competência Específica 5:**

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. Habilidades: EM13MAT508, EM13MAT509.

**Objetivos Específicos:**

- Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
- Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
- Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
- Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

**Conteúdos privilegiados:**

- Sequências
- Recorrências

**Conhecimentos Prévios:**

- Razão e Proporção.
- Expressões e Equações Algébricas.
- Progressão Aritmética (PA).
- Progressão Geométrica (PG).

**Recursos Necessários:**

- Plataforma adaptativas (sala de aula virtual),
- Lousa digital,
- Tablets, smartphones e notebooks,
- Livros digitais.
- Vídeo-aulas
- Materiais digitais de apoio.

### Tempo sugerido: 4 aulas

- **Primeira aula:** Apresentação da Situação Problema, retomada de conhecimentos prévios.
- **Segunda aula:** Apresentar o artigo e estudar as equações, definir o conceito de recorrência.
- **Terceira aula:** Utilizar as equações, efetuar os cálculos, construir tabelas para representação dos dados.
- **Quarta-aula:** Utilizar o laboratório de informática implementação de dados, representação gráfica e discussão de resultados.

### Contextualização

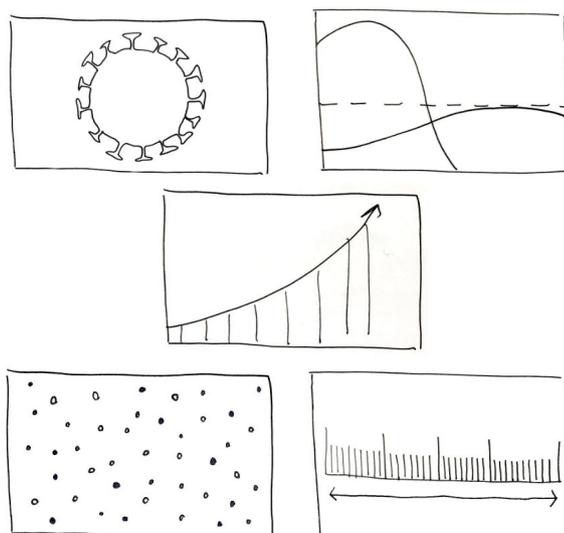
- Matemática e Atualidades

O professor irá propor um debate através da leitura e discussão de artigos, jornais, revistas e sites de pesquisa sobre doenças, epidemias. A figura A.1 faz referência ao site da Fundação Oswaldo Cruz (Fiocruz), uma instituição de destaque na produção e difusão do conhecimento científico com a finalidade de promover a saúde e o desenvolvimento social.



Figura A.1: Análise de Dados: Contextualização

Para relacionar o estudo da matemática ao enfrentamento de doenças, O Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), disponibilizou em suas páginas, o “CORONAVIZ”, site de divulgação e pesquisa (visualização gráfica) sobre a pandemia



**Figura A.2:** COVID-19. Fonte: Visgraf/Coronaviz (IMPA).

do COVID-19. O objetivo é fazer com que a informação a ser divulgada seja cientificamente contextualizada, para gerar compreensão e entendimento, ao possibilitar que os dados sejam desvendados, questionados e repercutidos com bases sólidas e fidedignas [37].

A Figura A.2 contém ilustrações relacionadas as diversas pesquisas que associam o estudo da matemática como um meio de interpretação da dinâmica de propagação da doença COVID-19. Entre elas é possível perceber imagens relacionadas a biologia do vírus, representações gráficas e dinâmicas geradas a partir dos modelos epidemiológicos.

### Apresentação da situação-problema:

“O vírus da gripe é muito comum em crianças. Sendo assim, suponha que em uma escola com 1000 crianças 2 estejam infectadas com o vírus. Para a gripe, o período infeccioso é tipicamente de 1 a 3 dias. Se considerarmos, por exemplo, igual a 2 dias, isso significa que a taxa de recuperação será  $\beta = \frac{1}{2}$  (por criança e por dia), mostrando com isso que em um dia metade das crianças com gripe se recuperaram. Avalie o surto de gripe nessa população fixa, passados 20 dias do começo da disseminação da doença.”

## Conhecimentos prévios

O Portal da Matemática, possui materiais teóricos que podem ser utilizados para possibilitar revisões básicas para o desenvolvimento da aula (requisitos prévios) [17].

### A noção de razão, proporção

#### 2 Razões no dia-a-dia

Em nosso cotidiano, é fácil deparar-mo-nos com medidas que refletem o conceito de razão. Um dos exemplos mais comuns é a velocidade. Quando dizemos que um carro está andando a uma velocidade constante de  $40\text{km/h}$ , isso significa que ele percorrerá  $40\text{km}$  em uma hora,  $80\text{km}$  em duas horas ou  $20\text{km}$  em meia hora, se mantiver essa velocidade sem parar.

#### Definição 1.1

Dizemos que duas razões com termos não-nulos,  $a : b$  e  $c : d$ , formam uma **proporção** quando as frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  forem equivalentes, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Representamos esta proporção como

$$a : b = c : d$$

e lemos “ $a$  está para  $b$  assim como  $c$  está para  $d$ ”.

Figura A.3: Razões e Proporção. Fonte: Portal da Matemática

## Expressões Algébricas

### 1 Expressões algébricas

Em muitas situações, é conveniente denotar um número real arbitrário por uma letra, com o objetivo de fazer operações com esse número, mesmo sem saber o seu valor. Por exemplo, se denotarmos um número real por  $x$ , então seu dobro será  $2x$ , seu triplo  $3x$ , sua metade  $\frac{1}{2}x$  e sua terça parte  $\frac{1}{3}x$ .

Ao longo deste módulo, denominaremos números reais arbitrários de **variáveis**, e os denotaremos por letras minúsculas do nosso alfabeto:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , etc. Uma **expressão algébrica** é o resultado de um número finito de operações (escolhidas dentre adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação) entre variáveis, sempre que os resultados de tais operações fizerem sentido no conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. As expressões algébricas serão denotadas por letras maiúsculas:  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , etc. São exemplos de expressões algébricas:

$$E = 3x^2 - \frac{5}{2}y^3 \text{ e } F = \frac{\sqrt[3]{a^2 + bc^3}}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Por vezes, escreveremos  $E(x, y)$  e  $F(a, b, c)$  para denotar as expressões algébricas acima. Mais geralmente, escrevemos  $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para denotar uma expressão algébrica nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Abaixo, listamos algumas situações que ilustram o uso de expressões algébricas.

**Exemplo 1.** O retângulo da figura abaixo tem lados de comprimentos  $x$  e  $y$ . Seu perímetro é dado pela expressão algébrica  $E = 2x + 2y$  e sua área é dada pela expressão  $A = xy$ .

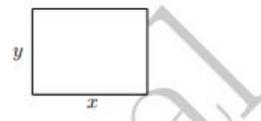


Figura A.4: Expressões Algébricas. Fonte: Portal da Matemática

## Conteúdos Privilegiados

### Sequências e Progressão Aritmética

#### 1 Sequências elementares e progressões aritméticas

Uma **sequência infinita** de números reais é uma lista ordenada infinita  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ , em que cada  $a_k \in \mathbb{R}$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$ . De outro modo, podemos definir uma sequência infinita de números reais como uma função  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotando  $a_k = a(k)$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ , temos que as duas definições dadas acima coincidem. Doravante, denotaremos uma sequência infinita qualquer de números reais por  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ou  $(a_k)_{k \geq 1}$ .

Uma **sequência finita** de números reais é uma lista ordenada finita  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Nesse caso,  $n$  é denominado o **número de termos** da sequência. Se denotamos por  $I_n$  o conjunto  $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , também podemos definir uma sequência finita de  $n$  termos reais como uma função  $a : I_n \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $a(k) = a_k$  para cada  $k \in I_n$ .

Em ambos os casos acima, cada um dos números reais  $a_k$  é um **termo** da sequência, por vezes denominado o **k-ésimo termo** (em alusão ao fato de que ele é o termo que ocupa a posição  $k$ ).

Uma sequência  $(a_k)_{k \geq 1}$  é dada por uma **fórmula posicional** se  $a_k$  for dado por uma fórmula em  $k$ . Vejamos dois exemplos.

**Exemplo 1.** A sequência infinita  $(1, 2, 3, \dots)$  dos números naturais satisfaz a fórmula posicional  $a_k = k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Uma **progressão aritmética**, ou abreviadamente **PA**, é qualquer sequência de números reais (finita ou infinita), dada por uma recorrência do tipo:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{k+1} = a_k + r, \forall k \geq 1. \end{cases}$$

onde  $a$  e  $r$  são números reais conhecidos. O número  $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots$  é denominado a **razão** da PA. Por exemplo, as sequências dos números naturais ímpares  $(1, 3, 5, \dots)$  e dos números naturais pares  $(0, 2, 4, \dots)$  são ambas PAs de razão igual a 2. A sequência dos múltiplos inteiros positivos de 3, isto é,  $(3, 6, 9, \dots)$ , é uma PA de razão 3. Mais geralmente, dado um número natural  $p$ , a sequência  $(p, 2p, 3p, \dots)$ , formada pelos múltiplos positivos de  $p$ , é uma PA de razão  $p$ .

Costumamos classificar uma PA  $(a_k)_{k \geq 1}$  como:

- (i) **Crescente**, se  $a_{k+1} > a_k, \forall k \geq 1$ .
- (ii) **Decrescente**, se  $a_{k+1} < a_k, \forall k \geq 1$ .
- (iii) **Constante**, se  $a_{k+1} = a_k, \forall k \geq 1$ .

Uma vez que a diferença  $a_{k+1} - a_k$  é sempre igual à razão  $r$ , concluímos imediatamente que a PA em questão é:

- (i) Crescente, se  $r > 0$ .
- (ii) Decrescente, se  $r < 0$ .
- (iii) Constante, se  $r = 0$ .

Figura A.5: Sequências e Progressões. Fonte: Portal da Matemática

### Progressão Geométrica

#### 1 Progressões geométricas

Continuando nosso estudo de sequências de números reais, apresentamos, neste material, uma classe particular importante, formada pelas **progressões geométricas**.

Uma **progressão geométrica**, ou abreviadamente **PG**, é qualquer sequência de números reais (finita ou infinita), dada por uma recorrência do tipo:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{k+1} = q \cdot a_k, \forall k \geq 1 \end{cases}$$

onde  $a$  e  $q$  são números reais dados. O número  $q$  é chamado **razão** da PG.

Observe que, se uma sequência  $(a_k)_{k \geq 1}$  tem todos os seus termos não nulos, então tal sequência é uma PG se, e só se,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots$$

Ademais, sendo esse o caso, o valor comum das igualdades acima é precisamente a razão da PG.

A título de exemplos, a sequência das potências de 2 com expoentes inteiros e não negativos,  $(1, 2, 4, \dots)$ , assim como a sequência das potências de  $\frac{1}{2}$  com expoentes inteiros e não negativos,  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$ , são PGs de razões respectivamente iguais a 2 e  $\frac{1}{2}$ .

Mais geralmente, dado um número real  $p$ , a sequência  $(1, p, p^2, \dots)$ , formada pelas potências de  $p$  com expoentes inteiros e não negativos, é uma PG de razão  $p$ . Realmente, basta observar que

$$\frac{p}{1} = \frac{p^2}{p} = \frac{p^3}{p^2} = \dots = \frac{p^{k+1}}{p^k} = \dots = p.$$

Costumamos classificar uma PG  $(a_k)_{k \geq 1}$  como:

- (i) **Estacionária**, se  $a_k = 0, \forall k > 1$  e  $a_1 \neq 0$ .
- (ii) **Constante**, se  $a_{k+1} = a_k, \forall k \geq 1$ .
- (iii) **Oscilante**, se cada termo tem sinal contrário ao sinal do termo imediatamente anterior.
- (iv) **Crescente**, se  $a_{k+1} > a_k, \forall k \geq 1$ .
- (v) **Decrescente**, se  $a_{k+1} < a_k, \forall k \geq 1$ .

Figura A.6: Progressão geométrica. Fonte: Portal da Matemática

## Recorrência

Uma (relação de) recorrência para uma sequência é uma expressão que nos permite calcular um termo da sequência em função de seus termos anteriores.

Vejam alguns exemplos.

**Exemplo 3.** Seja  $(T_n)_{n \geq 1}$  uma sequência tal que  $T_1 = 3$  e que satisfaz a relação

$$T_{n+1} = 2T_n + 1, \quad (1)$$

para todo  $n$  natural. Veja que o “+1” do lado esquerdo da equação está sendo somado ao  $n$  e não ao valor do termo  $T_n$ ; por outro lado, o “+1” do lado direito está sendo somado a  $2T_n$ . Isso quer dizer que cada termo da sequência, a partir do segundo (isto é, o termo  $T_{n+1}$ ), pode ser obtido multiplicando-se o termo anterior (isto é, o termo  $T_n$ ) por 2 e somando 1 ao resultado.

A recorrência, por si, não identifica unicamente a sequência  $T$ . Precisamos de um pontapé inicial, o qual é fornecido pelo valor escolhido para  $T_1$ . Em nosso caso, como sabemos que  $T_1 = 3$ , substituindo  $n = 1$  na relação (1) obtemos  $T_2 = 2 \cdot T_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ . Agora, substituindo  $n = 2$  na mesma relação, obtemos  $T_3 = 2T_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ . Em seguida, substituindo  $n = 3$ , temos  $T_4 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$ . Para  $n = 4$ , temos  $T_5 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$ . Assim, temos que  $T = (3, 7, 15, 31, 63, \dots)$ .

**Exemplo 4.** Considere a recorrência  $T_{n+1} = T_n + 2$ . Caso o valor de  $T_1$  seja igual a 1, obtemos a sequência dos números ímpares positivos:  $(1, 3, 5, 7, \dots)$ . Caso o valor de  $T_1$  seja igual a 2, obtemos a sequência dos números pares positivos:  $(2, 4, 6, 8, \dots)$ . Por outro lado, não é preciso que  $T_1$  seja inteiro. Por exemplo, se tivermos  $T_1 = \sqrt{2}$ , obtemos a sequência  $(\sqrt{2}, \sqrt{2} + 2, \sqrt{2} + 4, \sqrt{2} + 6, \dots)$ .

Figura A.7: Recorrência. Fonte: Portal da Matemática

## Apresentação do artigo e estudo das equações propostas para gerar o modelo matemático:

O funcionamento do modelo consiste na análise das variações ocorridas nas categorias do fenômeno, a exemplo, a variação do número de indivíduos suscetíveis e infectados representadas respectivamente pelas seguintes equações em relação ao tempo “ $n$ ” e “ $n + 1$ ” por  $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$  e  $\Delta I_n = I_{n+1} - I_n$ .

O número de novos casos da doença em relação ao tamanho da população é definido pela taxa de incidência ( $\beta$ ) descrita como:

$$\beta = \frac{\text{Número de Indivíduos Infectados}}{N} \quad (\text{A.1})$$

A origem do número de novos indivíduos infectados no tempo ( $n$ ) é dada por  $(\beta \cdot S_n)$  e o total de indivíduos infectados é expresso como  $\beta \cdot S_n \cdot I_n$  onde a interação entre indivíduos infectados e suscetíveis ocorre de maneira homogênea.

A taxa de recuperação ( $\gamma$ ) é expressa em função do número de indivíduos que foram à óbito em relação à população total acrescida do número de indivíduos que se recuperaram após o período infeccioso, sendo assim determinada:

$$\gamma = \frac{\text{número de óbitos}}{N} + \frac{\text{número de indivíduos recuperados}}{\text{número de indivíduos infectados}} \quad (\text{A.2})$$

A transição do compartimento dos infectados para o compartimento dos suscetíveis é definida pela equação  $(\gamma \cdot I_n)$ .

A variação dos suscetíveis está relacionada a dinâmica da doença e o movimento que ocorre entre as classes compartimentais, logo, retirar da classe dos suscetíveis os indivíduos infectados e acrescentar a esta classe os indivíduos recuperados que por não possuírem imunização permanente podem ser novamente infectados pela doença, essa equação pode ser assim representada.

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = -\beta \cdot S_n \cdot I_n + \gamma \cdot I_n \quad (\text{A.3})$$

Já a variação do compartimento dos indivíduos infectados ocorre com o acréscimo dado a formação do número de novos casos e sofre com a retirada dos indivíduos infecciosos que se recuperam e retornam para a classe dos suscetíveis.

$$\Delta I_n = I_{n+1} - I_n = \beta \cdot S_n \cdot I_n - \gamma \cdot I_n \quad (\text{A.4})$$

Portanto, o sistema de equações para representar a dinâmica da propagação da doença pode ser assim expresso:

$$\begin{cases} \Delta S_n = -\beta \cdot S_n \cdot I_n + \gamma \cdot I_n \\ \Delta I_n = \beta \cdot S_n \cdot I_n - \gamma \cdot I_n \end{cases}$$

Ao considerar a população total como a soma entre os indivíduos suscetíveis e infectados, temos que, a população total pode ser expressa como  $N = S_n + I_n$  e a fórmula de recorrência para representar o número de indivíduos suscetíveis pode ser obtida ao isolar  $I_n$  na equação  $N = S_n + I_n$  e substituir o novo valor de  $I_n$ , na equação A.3, onde obtém-se:

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = -\beta \cdot S_n \cdot I_n + \gamma \cdot I_n, \quad \text{com } I_n = N - S_n$$

$$S_{n+1} = S_n - \beta \cdot S_n \cdot (N - S_n) + \gamma \cdot (N - S_n)$$

$$S_{n+1} = \beta S_n^2 + S_n \cdot (1 - \beta \cdot N + \gamma) + \gamma \cdot N \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

### Aplicação:

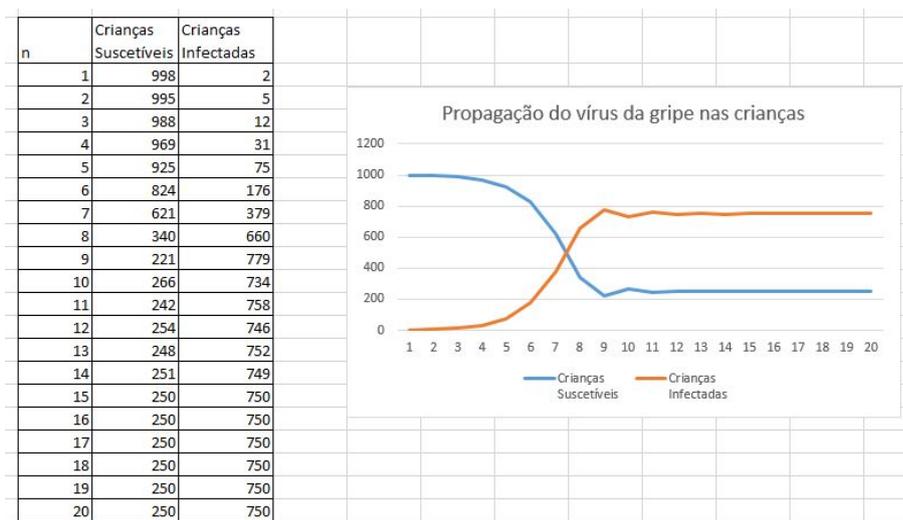
Construir os gráficos e tabelas baseados no estudo das equações constitui parte aplicativa do plano de aula onde o aluno terá contato com os cálculos e aplicações do modelo proposto através das equações recursivas.

Como nos casos anteriores a aplicação dos dados nas equações possibilita a construção de tabelas e gráficos que representam a ilustração da situação problema.

### Discussão de Resultados

As discussões ocorrem por meio da interpretação dos dados e resultados das equações, ao observar o comportamento das curvas que indicam o número de indivíduos infectados e suscetíveis, ao registrar o dia em que ocorre o maior número de infectados e a estabilidade das curvas após o momento do pico epidêmico, também considerado como, ponto de equilíbrio.

O professor deve neste momento incentivar a curiosidade dos alunos para o estudo de novas situações e modelos matemáticos que representem problemas do ambiente em que os alunos estão inseridos, ao propor, a modelagem matemática como uma forma de interpretar os fenômenos naturais de maneira clara e objetiva.



**Figura A.8:** Propagação do vírus da gripe nas crianças. Fonte: Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática. Fonte: Elaborado pela autora.

# Referências Bibliográficas

---

- [1] ALMEIDA, Lourdes Maria Werle D. ; SILVA, Karina Pessoa D. ; VERTUAN, Rodolfo: *Modelagem Matemática na educação básica*. 1<sup>a</sup>. Contexto, 2012. – 160 S. – ISBN 9788572446976
- [2] ASSIS, Carlos Alberto Martins D.: Um modelo matemático (discreto) de propagação de uma doença no Ensino Médio. In: *Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática* (2020)
- [3] BARTOLOMEU, Rabilde F M.: *Modelos Epidemiológicos SIR e SIS discretos*, Universidade da Beira Interior, Instituto de Ciências, Matemática para Professores, Diplomarbeit, 2018
- [4] BASSANEZI, Rodney C.: *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 4<sup>a</sup>. Contexto, 2002. – 390 S. – ISBN 9788572442077
- [5] BERTONE, Ana Maria A. ; BASSANEZI, Rodney C. ; JAFALICE, Rosana Sueli M.: *Modelagem Matemática*. Universidade Federal de Uberlândia, 2014. – 187 S
- [6] BONITA, Ruth ; BEAGLEHOLE, Robert ; KJELLSTROM, Tord: *Epidemiologia Básica*. 2<sup>a</sup>. Santos, 2010. – 213 S. – ISBN 9788572888394
- [7] BOYER, Carl B. ; MERZBACH, Uta C.: *História da matemática*. 3<sup>a</sup>. Blucher, 2012. – 508 S. – ISBN 9788521206415
- [8] BRASIL: LEI Nº 4.024, DE 20 DE DEZEMBRO DE 1961. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. In: *Diário Oficial da República Federativa do Brasil* (1961). – URL <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-4024-20-dezembro-1961-353722-publicacaooriginal-1-pl.html>. – Zugriffsdatum: 2021-01-20. – ISSN 1677-7042
- [9] BRASIL: Base Nacional Comum Curricular. In: *MEC* (1997). – URL <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. – Zugriffsdatum: 2020-01-20
- [10] BRASIL. MINISTÉRIO DA SAÚDE: *Coronavirus Brasil*. 2020. – URL <https://covid.saude.gov.br/>. – Zugriffsdatum: 2021-01-24

- [11] CAETANO, Marco Túlio P.: *Modelagem Matemática da Influenza A (H1N1)*, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Mestrado Profissional em Matemática, Diplomarbeit, 2010
- [12] CAVALCANTE, Ellyda Marcelle C.: Aplicação do Modelo SIS: Estudo de um surto de meningite meningocócica na cidade de Caruaru. In: *enegep* (2017)
- [13] COELHO, Flavio C. ; CARVALHO, Luiz M. ; LANA, Raquel M. ; CRUZ, Oswaldo G. ; BASTOS, Leonardo S. ; CODEÇO, Claudia T. ; GOMES, Marcelo F. ; VILLELA, Daniel: Modeling the Post-Containment Elimination of Transmission of COVID-19. In: *medRxiv* (2020)
- [14] DADLANI, Aresh ; AFOLABI, Richard O. ; JUNG, Hyoyoung ; SOHRABY, Khosrow ; KIM, Kiseon: Deterministic Models in Epidemiology: From Modeling to Implementation. In: *arXiv preprint: Populations and Evolution* (2020)
- [15] FARIAS, Ayrton V.: *Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática, Estatística e Física, Bacharelado em Matemática Aplicada, Diplomarbeit, 2017
- [16] GOH, Gabriel ; COLABORADORES: *Simulador de Epidemias*. 2020. – URL <https://ciis.fmrp.usp.br/covid19/epcalc/public/index.html>. – Zugriffsdatum: 2021-01-21
- [17] IMPA: *Portal da Matemática OBMEP*. 2021. – URL <https://portaldaoimpa.br/index.php/site/index?a=1>. – Zugriffsdatum: 2021-01-21
- [18] KEELING, Matt J. ; ROHANI, Pejman: *Modeling infectious diseases in humans and animals*. Princeton University Press, 2007. – 408 S. – ISBN 9780691116174
- [19] KERMACK, William O. ; MCKENDRICK, Anderson G.: Contributions to the mathematical theory of epidemics. II.—The problem of endemicity. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical and physical character* (1932)
- [20] LIMA, JJ Pedroso D. ; LIMA, João José Pedroso D. ; CARAMELO, Francisco José A. ; COUCEIRO, João M. ; CONCEIÇÃO REIS, Rosa da ; VEIGA, Francisco Alte D.: *Biomatemática: uma introdução para o curso de Medicina*. 2ª. Imprensa da Univ. de Coimbra, 2006
- [21] LONDONO, Sergio Luis M.: *Estimação do número de reprodução basal em modelos compartimentais*, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Estatística, Diplomarbeit, 2014

- [22] LUIZ, Mônica Helena R.: *Modelos matemáticos em epidemiologia*, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Mestrado Profissional em Matemática, Diplomarbeit, 2012
- [23] LYRA, Wladimir ; NASCIMENTO, Jose D. do ; BELKHIRIA, Jaber ; ALMEIDA, Leandro D. ; CHRISPIM, Pedro P. ; ANDRADE, Ion D.: COVID-19 pandemics modeling with SEIR (+ CAQH), social distancing, and age stratification. The effect of vertical confinement and release in Brazil. In: *medRxiv* (2020)
- [24] MATHWORKS: *MATLAB Online*. 2020. – URL <https://www.mathworks.com/products/matlab-online.html>. – Zugriffsdatum: 2021-01-21
- [25] MAY, Robert M.: Simple mathematical models with very complicated dynamics. In: *The Theory of Chaotic Attractors* (2004)
- [26] OLIVEIRA, Isabel Mesquita D.: *Modelos epidemiológicos SEIR*, Universidade do Porto, Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Dissertation, 2008
- [27] PIZZICHINI, Marcia Margaret M. ; PATINO, Cecilia M. ; CARVALHO, Juliana: Medidas de frequência: calculando prevalência e incidência na era do COVID-19. In: *Jornal Brasileiro de Pneumologia* (2020)
- [28] RAMOS, Manoel Wallace A.: *Métodos de Euler e Runge-Kutta: uma análise utilizando o Geogebra*, Universidade Federal da Paraíba, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática, Diplomarbeit, 2017
- [29] ROUQUAYROL, Maria Z. ; SILVA, Marcelo Gurgel Carlos D.: *Rouquayrol: Epidemiologia & Saúde*. 8ª. MedBook, 2017. – 744 S. – ISBN 9788583690290
- [30] RÍO, Laura D.: *GeoGebra*. 2020. – URL <https://www.geogebra.org/m/mrjkffn5>. – Zugriffsdatum: 2021-01-18
- [31] SABETI, Mehran: *Modelo Epidêmico Discreto SIR com estrutura etária e aplicação de vacinação em pulsos e constante*, Universidade Federal de Pernambuco, Dissertation, 2011
- [32] SANTOS, José Dias D. ; SILVA, Zanoni Carvalho D.: *Métodos Numéricos*. Universitária UFPE, 2006. – 224 S. – ISBN 978857315758
- [33] SILVA, Nicolly R.: *Modelos Epidemiológicos SIR, Contínuo com Estratégias de Vacinação como Método de Controle Epidêmico*. 2018
- [34] SILVA, Wilton Pereira D. ; PRECKER, Jurgen W. ; SILVA, Cleide M. ; SILVA, Diogo D. ; SILVA, Cleiton D.: Medida de calor específico e Lei de Resfriamento de Newton: um refinamento na análise dos dados experimentais. In: *Revista Brasileira de Ensino de Física* (2003)

- [35] SOUZA, Ana Marília D. ; BISOGNIN, Vanilde: Modelo matemático da evolução da Síndrome da Imunodeficiência Adquirida-AIDS em Santa Maria. In: *Disciplinarum Scientia| Naturais e Tecnológicas* (2014)
- [36] STEWART, James: *Cálculo*. 7<sup>a</sup>. Cengage, 2013. – 664 S. – ISBN 9788522112593
- [37] VISGRAF.IMPA: *Coronaviz: visualização em tempos de coronavírus*. 2020. – URL <https://www.visgrafimpa.br/coronaviz/>. – Zugriffsdatum: 2021-01-30
- [38] WILDER-SMITH, Annelies ; FREEDMAN, David O.: Isolation, quarantine, social distancing and community containment: pivotal role for old-style public health measures in the novel coronavirus (2019-nCoV) outbreak. In: *Journal of travel medicine* (2020)

**MÁRCIA LOPES FERREIRA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA EM DINÂMICA DA  
POPULAÇÃO COMO UMA ESTRATÉGIA NO ENSINO DA  
MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de fevereiro de 2021.

Assentimento:



---

Márcia Lopes Ferreira  
Autora



---

Mehran Sabeti  
Orientador