UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PROFMAT

SABRINA SUSAN LUCENA CRUZ

# Equações de Recorrência e Aplicações

**Combinatória, Probabilidade, Teoria dos Números e Matemática Financeira**

Orientador: Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva

Natal/RN - 2021

SABRINA SUSAN LUCENA CRUZ

# Equações de Recorrência e Aplicações

## Combinatória, Probabilidade, Teoria dos Números e Matemática Financeira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Profº. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva.

Natal/RN - 2021

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Cruz, Sabrina Susan Lucena.
Equações de recorrência e aplicações: combinatória, probabilidade, teoria dos números e matemática financeira / Sabrina Susan Lucena Cruz. - 2021.
87f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós - Graduação em Matemática - Rede Nacional. Natal, 2021.
Orientador: Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva.

1. Matemática - Dissertação. 2. Matemática discreta - Dissertação. 3. Relações - Dissertação. 4. Recorrência - Dissertação. 5. Raciocínio recursivo - Dissertação. I. Silva, Carlos Alexandre Gomes da. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 51

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

Dissertação de Mestrado sob o título Equações de recorrência e Aplicações apresentada por Sabrina Susan Lucena Cruz e aceito pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, sendo aprovado por todos os membros da banca examinadora abaixo especificada:

---

Prof°. Dr°. Carlos Alexandre Gomes da Silva
Orientador
UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

---

Profª. Drª. Débora Borges Ferreira
Examinador Interno
UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

---

Prof°. Dr°. Luis Enrique Ramirez
Examinador externo
UFABC - Universidade Federal do ABC.

Natal/RN - 2021

A você Liviah, que me inspira e me deixa a cada dia mais forte.

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, amigos e familiares por ter contribuído para que eu pudesse chegar até aqui.

Agradeço de uma forma muito especial a minha filha Liviah por todo carinho, cumplicidade e força para enfrentar os momentos mais difíceis.

A minha amiga de PROFMAT - UFRN Mônica Sena por toda parceria, cumplicidade e horas de estudo.

A professora Wguineuma Pereira Avelino Cardoso (IFESP) pela inspiração e incentivo.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFRN, em especial Prof. Dra. Gabriella Lucheze por todo apoio e ensinamentos nesses 24 meses de curso.

A CAPES pela bolsa de estudos concedida.

Por fim, agradeço ao meu orientador Prof°. Dr°. Carlos Alexandre Gomes da Silva pelas orientações, disponibilidade, contribuições e apoio fundamental durante a construção deste trabalho.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é fazer uma reflexão e apresentar um estudo sobre recorrências numéricas, o que vem a ser uma relação de recorrência, apresentação dos principais resultados relacionados a esse tema dando uma atenção especial ao caso das recorrências lineares de primeira e segunda ordem que se mostram como ferramentas bastante adequadas e eficientes para resolver diversos problemas em que o raciocínio recursivo está presente. Apresentamos ainda uma coletânea de problemas presentes em livros didáticos e Olimpíadas de Matemática no qual o uso dessa ferramenta e o raciocínio recursivo são imprescindíveis para a resolução dos problemas apresentados e que muitos deles podem ser adequados à Matemática ensinada ao nível do Ensino Médio.

**PALAVRAS-CHAVE:** Matemática discreta, relações, recorrências, raciocínio recursivo.

# Abstract

The objective of this work is to present a study on numerical recurrences, which became to be a recurrence relation, presentation of the main results related to this subject, giving special attention to the case of linear first and second order recurrences that are shown as quite useful tools. Adequate and efficient to solve several problems in which recursive reasoning is present. We also present a collection of problems present in textbooks and Math Competitions in which the use of this tool and recursive reasoning are essential for solving the problems presented and that many of them can be adapted to Mathematics taught at the level of high school.

**KEYWORDS :** Discrete Mathematics, recurrence, relations, recursive reasoning

# Sumário

# Capítulo 1

# As Origens do Raciocínio Recorrente

## 1.1 Introdução

Apesar de ser uma técnica bastante poderosa para resolver muitos problemas de cunho prático, o raciocício recorrente ainda não é amplamente divulgado no ensino fundamental e médio. Pensando nisso, este trabalho é endereçado principalmente para professores que estejam buscando novas ferramentas para a resolução problemas presentes em livros didáticos, seja da Educação Básica ou Ensino Superior cuja resolução utilize o Racíocinio Recorrente. Acreditamos que fazendo ”boas escolhas” podemos apresentar e ao mesmo tempo mostrar o alcance desse tipo de abordagem nestes níveis de ensino. Além disso, o raciocínio recursivo é computacionalmente muito viável de ser implementado em softwares comuns, como por exemplo nas planilhas eletrônicas usuais encontradas nos computadores, tablets e smarphones, fazendo com que esse tema seja muito rico para a sala de aula, dada a sua larga aplicabilidade. No Capítulo 1, introduziremos a ideia do raciocínio recorrente e ainda, de modo intuitivo, o que vem a ser uma recorrência do ponto de vista matemático. Além disso, mostraremos um breve histórico dos problemas que deram origem ao raciocício recorrente como uma importante ferramenta para resolver problemas dentro da matemática e em áreas afins. O Capítulo 2 é destinado as Sequências Numéricas e Recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem, nele estão as demonstrações de Teoremas e Proposições que embasam o assunto abordado. Já no Capítulo 3, foi feita uma coletânea de problemas presentes em livros didáticos e Olimpíadas de Matemática abordando quatro temas da Matemática (Combinatória, Probabilidade, Teoria dos

Números e Matemática Financeira), sendo todos abordados através da ferramenta aqui apresentada.

Antes de começar um histórico sobre raciocinio recorrente vamos fornecer a ideia intuitiva do que seria uma recorrência. De modo primitivo, podemos entender uma lei de recorrência para uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como sendo uma regra que relaciona o valor de $a_n$ com o termo imediatamente anterior ou com alguns dos termos anteriores dessa mesma sequência que são definidos previamente (uma abordagem será feita no Capítulo 2). Por exemplo, se considerarmos a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ para todo $n$, dizemos que a sequência está definida pela lei de recorrência acima descrita, visto que todos os seus termos estão univocamente definidos por essa regra. O primeiros termos da sequência acima definida estão listados a seguir:

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}, \ldots).$$

Em muitas ocasiões as leis de recorrência que definem certas sequências dependem não apenas do termo imediatamente anterior ao que queremos determinar e sim de dois ou mais termos (essa dependência irá gerar o conceito de ordem da recorrência que definiremos futuramente). Assim, por exemplo, a lei

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 2, & \text{se } n = 2 \\ 3a_{n-2} + 5a_{n-1}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

define a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 13, \ldots)$. Apesar dessa ideia de definir uma sequência a partir de uma lei de recorrência ser frequente, é bastante comum vê-la apresentada em muitos textos de modo puramente abstrato, sem levar em consideração que ela teve origem em muitos problemas reais (do cotidiano) ao longo dos tempos. Neste capítulo vamos revisitar alguns desses problemas para podermos entender melhor as origens do chamado *pensamento recursivo*.

Em algum momento, os homens perceberam padrões e começaram a fazer conexões para contar e ordenar o mundo em volta deles. Foi no rio Nilo, cerca de $3000$ a.C. que surgiu um dos primeiros sinais da matemática que conhecemos hoje. Por ser local perfeito para agricultura os egípcios começaram a observar a cheia do rio Nilo para garantir dessa forma a época correta de semear, crescer e colher. Sendo assim, a cheia do Rio foi utilizada como marco para o início de cada ano. Eles observaram que a cheia do rio ocorria logo depois que a estrela Sírus se levantava ao leste um pouco antes do sol. A partir disso, os egípcios começaram a contar quantos dias havia entre cada fase da lua ou quantos dias havia entre duas cheias do Nilo. Eles perceberam então que esse fato acontecia a cada $365$ dias e montaram dessa forma o que conhecemos como calendário solar, composto por $12$ meses, com $30$ dias cada mês e mais $5$ dias de festa dedicada aos deuses. Esse período foi dividido em três estações de quatro meses e cada uma se referindo a uma época do plantio (semear, crescer e colher). Esse é um dos primeiros registros de sequência numérica que se tem conhecimento. (BOYER, 1974)

Um outro problema egípcio que também aborda sequência é a lenda do Olho de Hórus. A lenda relata que durante uma batalha o deus Hórus teve o seu olho esquerdo arrancado pelo inimigo e dividido em seis partes que foram representadas de acordo com a sequência $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}\right)$ . (QUESNEL, A et al. O Egito: Mitos e Lendas. Editora: Ática, 1993).

Observe que os termos dessa sequência podem ser obtidos recursivamente pois:

| Partes | Fração de cada parte |
|---|---|
| $a_1$ | $\frac{1}{2}$ |
| $a_2$ | $a_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ |
| $a_3$ | $a_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ |
| $a_4$ | $a_3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ |
| $a_5$ | $a_4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$ |
| $a_6$ | $a_5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$ |

cujos valores sugerem a lei de recorrência $a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$, onde $1 \leq n \leq 6$.

Agora, vamos visitar alguns problemas clássicos em que o raciocínio recursivo se mostra como uma ferramenta bastante adequada e eficiente para atacá-los.

### 1.1.1 Método Babilônico para a Extração de Raízes Quadradas

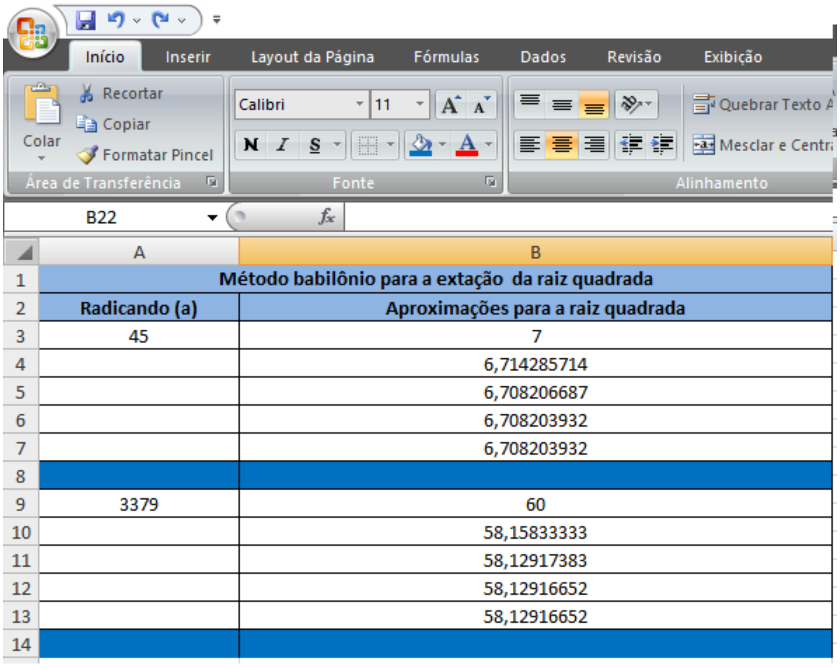
Ainda na antiguidade, surgiu um dos exemplos mais pioneiros que se tem notícia do uso de um raciocínio recursivo para se definir os termos de uma sequência numérica; o método para obter valores aproximados de $\sqrt{a}$, onde $a \in \mathbb{R}^+$, é conhecido como *Método dos Babilônios para aproximação das raízes quadradas*, também conhecido como *Método de Heron*, em homenagem ao matemático grego Heron de Alexandria, visto que ele foi o primeiro a dar uma descrição explicíta do mesmo.

Séculos mais tarde, esse mesmo método foi rigorosamente demonstrado a partir do chamado Método de Newton, estabelecido no século XVI. A ideia básica desse método é dar uma primeira aproximação ("chute inicial") e formar uma sequência numérica que convirja para o valor $\sqrt{a}$. De modo mais preciso, definir uma sequência numérica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. Para isso, começamos com uma "chute inicial" $x_1 = b > 0$ para a $\sqrt{a}$ e em seguida calculamos a média aritmética entre $x_1$ e $\frac{a}{x_1}$ e assim sucessivamente, gerando sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$x_1 = b > 0, \text{ e } x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

O exemplo a seguir ilustra a aplicação desse método:

**Exemplo 1.1.1.** *A tabela abaixo foi gerada no Excel e contém dois exemplos da aplicação do Método Babilônico para extração de raízes quadradas, o primeiro para obter $\sqrt{45}$ e o segundo para obter $\sqrt{3379}$.*




| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Método babilônio para a extação da raiz quadrada | |
| 2 | Radicando (a) | Aproximações para a raiz quadrada |
| 3 | 45 | 7 |
| 4 | | 6,714285714 |
| 5 | | 6,708206687 |
| 6 | | 6,708203932 |
| 7 | | 6,708203932 |
| 8 | | |
| 9 | 3379 | 60 |
| 10 | | 58,15833333 |
| 11 | | 58,12917383 |
| 12 | | 58,12916652 |
| 13 | | 58,12916652 |
| 14 | | |

*Para obter valores aproximados para* $\sqrt{45}$ *demos um "chute inicial"* $x_1 = 7$ *e em seguida usamos a lei de recorrência*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \text{ com } n \geq 1$$

*para obter os demais termos da sequência* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. *Vejamos:*

$$n = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(7 + \frac{45}{7}\right) \approx 6,714285714$$

$$n = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(6,714285714 + \frac{45}{6,714285714}\right) \approx 6,708206687$$

$$n = 3 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(6,708206687 + \frac{45}{6,708206687}\right) \approx 6,708203932$$

$$n = 4 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(6,708203932 + \frac{45}{6,708203932}\right) \approx 6,708203932$$

*Perceba que para* $n = 4$ *o método revela a mesma aproximação obtida para* $n = 3$

*(com $9$ casas decimais). Um procedimento completamente análogo foi realizado para obter 58,12916652 como uma aproximação de $\sqrt{3379}$. Além disso, esses dois exemplos sugerem a grande rapidez apresentada pela convergência do método.*

Ao final desta seção vamos utilizar o chamado *Método de Newton*, para obter uma explicação precisa de onde vem a lei $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ descrita no *Método dos Babilônios para aproximação das raízes quadradas*. Entretanto os babilônios antigos não conheciam o *Método de Newton* que surgiu centenas de anos após os babilônios estabelecerem o método. Nesse ponto é natural perguntar como ou pelo menos em que se basearam o babilônios para chegar à recorrência $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$? Uma possível explicação é que tenham utilizado o simples fato que se $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$ então $x < \frac{x+y}{2} < y$. De fato, suponhamos que queremos determinar $\sqrt{a}$, com $a \in \mathbb{R}^+$. Se $x_n \in \mathbb{R}^+$ é uma dada aproximação de $\sqrt{a}$ tal que $x_n < \sqrt{a}$, segue que

$$x_n < \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{x_n} > \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{a}{x_n} > \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

ou seja,

$$x_n < \sqrt{a} < \frac{a}{x_n}$$

De modo completamente análogo, se fosse $x_n > \sqrt{a}$, teríamos,

$$x_n > \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{x_n} < \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{a}{x_n} < \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

nesse caso,

$$\frac{a}{x_n} < \sqrt{a} < x_n$$

ou seja, em qualquer dos dois casos, temos que $\sqrt{a}$ está entre $x_n$ e $\frac{a}{x_n}$. Por outro lado, $\frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ é um número entre $x_n$ e $\frac{a}{x_n}$.

Ora, como $\sqrt{a}$ também é um número entre $x_n$ e $\frac{a}{x_n}$ é razoável tomar $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ para ser uma aproximação da $\sqrt{a}$. Esse raciocínio não é, de fato uma prova, mas apenas um argumento de plausibilidade de se tomar a sequência $x_1, x_2, x_3, \cdots$ , dada pela recorrência $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ como uma sequência que deve convergir para $\sqrt{a}$.

Uma maneira de mostrar que essa sequência é convergente é a seguinte: vamos mostrar que ela não é crescente (monótona) e limitada inferiormente, segue que existe o $\lim_{n\to\infty} x_n$ (há um famoso teorema de Análise Matemática que garante que toda sequência monótona e limidada tem limite) (ÁVILA,2006). De fato, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, segue que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \geq \sqrt{x_n \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$.
Por outro lado, $x_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow x_n^2 \geq a \Rightarrow \frac{a}{x_n^2} \leq 1$. Assim,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leq \frac{x_n}{2}(1+1) = \frac{x_n}{2}.2 = x_n$$

ou seja, $x_{n+1} \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que revela que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e limitada inferiormente e portanto, existe o limite $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$. Por outro lado, quando uma sequência é convergente qualquer subsequência converge para o mesmo limite que a sequência. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ = & \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim_{n\to\infty} x_n}\right) \end{aligned}$$

prova que $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{x_n}$ existe e $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, segue que

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) \Rightarrow 2\ell = \ell + \frac{a}{\ell} \Rightarrow 2\ell^2 = \ell^2 + a \Rightarrow \ell = \sqrt{a}.$$

Por outro lado, um algoritmo bastante eficiente para obter uma raiz de uma equação $f(x) = 0$, onde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, é o chamado *Método de Newton*.

**Definição 1.1.1** (Método de Newton)**.** *Se $x_1$ é uma aproximação inicial ("um chute") para uma raiz da equação $f(x) = 0$, a sequência $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ de números reais obtidos pela fórmula iterativa*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

*tem como limite uma raiz da equação* $f(x) = 0$.

Esse método, pode ser usado, por exemplo, para justificar a fórmula de recorrência do nosso exemplo inicial sobre o método babilônio de extração de raízes quadradas. De fato, dado $a > 0$, se usarmos a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - a$, segue que $f'(x) = 2x$. Assim,

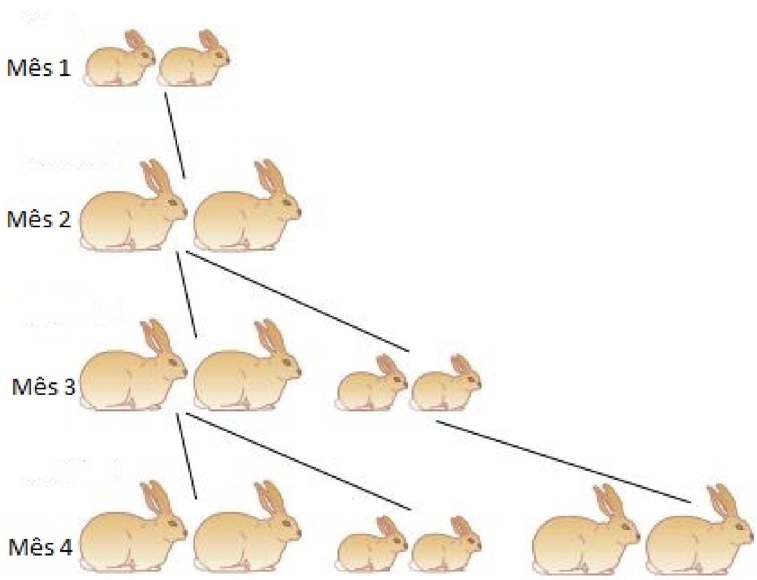
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

## 1.2 Alguns Exemplos Clássicos

### 1.2.1 A Reprodução de Coelhos e a Sequência de Fibonacci

Um outro problema bastante clássico sobre raciocínios recorrentes é um problema que foi proposto no famoso livro *Liber Abaci*. Nesse livro de $1202$ $d.C$, Leonardo Fibonacci (mais conhecido como Pizza) propõe o seguinte problema sobre o número de indivíduos de uma população de coelhos a partir de um primeiro casal:

*Um homem põe um casal de coelhos com um mês de idade num certo espaço que é completamente fechado por um muro. Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, supondo que a cada mês cada casal de coelhos gera um novo casal de coelhos que se reproduz a partir do segundo mês de idade.*




Assumindo que nenhum dos coelhos morra naquele período, segue que um primeiro casal de coelhos nascerá ao fim do primeiro mês. Assim ao final do primeiro mês teremos um casal de coelhos adultos e outro casal de filhotes. Durante o segundo mês o primeiro casal produz mais um casal de coelhos, resultando que ao final do segundo mês existirão dois casais adultos (o original e o casal da primeira geração) e um casal de filhotes (que nasceram do casal original). Um mês mais tarde, o casal original e o primeiro casal que nasceu (que agora é adulto) reproduzem cada um mais um casal de coelhos, resultando pois, em três casais adultos e dois casais de filhotes, seguindo esse raciocínio a polulação de coelhos evolui de acordo com a tabela a seguir:

| Mês | Pares adultos | Pares jovens | Total de pares |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |
| 5 | 3 | 2 | 5 |
| 6 | 5 | 3 | 8 |
| 7 | 8 | 5 | 13 |
| 8 | 13 | 8 | 21 |
| 9 | 21 | 13 | 34 |
| 10 | 34 | 21 | 55 |
| 11 | 55 | 34 | 89 |
| 12 | 89 | 55 | 144 |
| 13 | 144 | 89 | 233 |
| 14 | 233 | 144 | 377 |

$Tabela\ 1.1 : Pares\ de\ coelhos$

Observando a última coluna da tabela acima podemos ver que o número total de pares da população de coelhos é dada por

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \cdots$$

essa sequência é conhecida como *sequência de Fibonacci*. Note que nessa sequência cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores a ele. Apenas por conveniência, vamos acrescentar um termo $0$ no início dessa sequência e representando por $f_n$ o seu $n$-ésimo termo, segue que

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1 \text{ e } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ para } n \geq 1.$$

Nesse ponto é natural perguntar como poderíamos obter $f_n$ em função de $n$, ou seja, qual seria uma fórmula fechada para o $n$-ésimo termo da sequência de Fibonacci? Essa pergunta foi respondida rigorosamente pela primeira vez pelo matemático francês J.M. Binet em $1843$, embora o resultado já fosse conhecido por Euler, Daniel Bernoulli e

Moivre, cerca de $100$ anos antes. A fórmula é

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

A fórmula é surpreendente pois todos os termos da sequência de Fibonacci são inteiros, o que torna a fórmula totalmente não intuitiva. Para deduzi-la pode seguir o seguinte caminho apresentado em [4]:

Se $\alpha$ e $\beta$ (suponhamos que $\alpha > \beta$) são as raízes da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$, segue que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim,

$$\alpha + \beta = 1, \;\; \alpha - \beta = \sqrt{5} \;\text{ e }\; \alpha\beta = -1.$$

Além disso,

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \;\text{ e }\; \beta^2 = \beta + 1.$$

Multiplicando a primeira igualdade por $\alpha^n$ e a segunda por $\beta^n$, obtemos:

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \;\text{ e }\; \beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$$

Subtraindo membro a membro essas iguadades, obtemos:

$$\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha^n - \beta^n,$$

dividindo essa última igualdade por $\alpha - \beta$, segue que:

$$\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Por fim, definindo $u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, segue que:

$$u_0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0 \; e$$

$$u_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$$

Além disso, para todo inteiro $n \geq 0$ temos que:

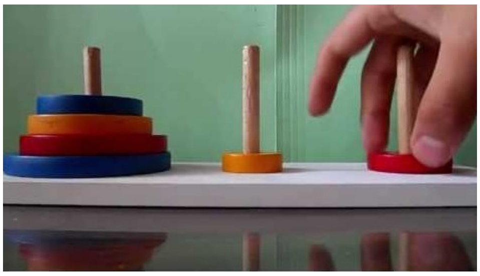
$$\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \Rightarrow u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

o que revela que a sequência $(u_n)_{n\geq 0}$ é a sequência de Fibonacci, ou seja $f_n = u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ para todo inteiro $n \geq 0$. Ora, como $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, segue que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \;\; n \geq 0.$$

### 1.2.2 A Torre de Hanói

Esse jogo foi idealizado e publicado pelo matemático francês Edouard Lucas, em $1882$. Você provavelmente já conhece esse jogo, pois trata-se de um jogo bastante popular que pode ser facilmente fabricado ou ainda encontrado em lojas de brinquedos de madeira. O jogo é formado por n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base onde estão fincadas três hastes. Numa das hastes, estão enfiados os discos, de modo que nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor, conforme ilustra figura a seguir:



$Figura\ 1.1 : Jogo\, Torre\ de\ Hanói$

O jogo consiste em transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, a regra anterior seja observada. A pergunda é: qual o número mínimo de movimentos necessários para a transferência dos discos de uma haste para outra, respeitando as regras expostas? A resposta é dada pela fórmula fechada

$$x_n = 2^n - 1.$$

### 1.2.3 A Pizza e o Queijo de Steiner

(A PIZZA DE STEINER) O grande geômetra alemão Jacob Steiner $(1796 - 1863)$ propôs e resolveu, em $1826$, o seguinte problema: Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com $n$ cortes retos? Pensando o plano como se fosse uma grande pizza, temos uma explicação para o nome do problema. A fórmula fechada que resolve esse problema é

$$R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

(O QUEIJO DE STEINER) Para fazer a sua pizza, Steiner teve que cortar, primeiro, o queijo. Imaginando que o espaço é um enorme queijo, qual é o número máximo de pedaços que poderíamos obter ao cortá-lo por $n$ planos? Temos como resposta a fórmula fechada

$$q_n = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$$

No Capítulo 2 usaremos a Teoria das Recorrências Lineares para solucionar esses problemas.

## 1.3 Sistemas de Amortização

### 1.3.1 SAC- Sistema de Amortização Constante

Uma outra situação em que está presente o raciocínio recursivo é no chamado SAC - Sistema de Amortização Constante, extremamente utilizado pelas instituições financeiras para financiamentos imobiliários. Nesse sistema, a cada unidade de tempo (geralmente mês) é abatida da dívida uma parcela constante que vem acompanhada de juros sobre o saldo devedor daquele instante. Para ilustrar esse método de financiamento, vejamos um exemplo.

**Exemplo 1.3.1.** *Carlos tomou um empréstimo na Caixa Econômica Federal no valor de* $R\$120.000,00$ *para ser pago em* $12$ *parcelas mensais (1 ano) com uma taxa de juros mensal de* $1,0\%$*. Quais os valores das parcelas desse financiamento se a amortização é feita pelo SAC?*

**Solução:** A primeira coisa a ser feita é divivir o valor do empréstimo pelo número de parcelas:

$$\frac{120.000,00}{12} = 10.000,00$$

O valor da primeira parcela será então $R\$10.000,00$ acrescida de juros de $1\%$ sobre a dívida (que no dia do pagamento da $1^a$ parcela ainda é de $R\$120.000,00$), ou seja,

$$P_1 = 10.000,00 + 0,01 \times 120.000,00 = 10.000,00 + 1.200,00 = 11.200,00.$$

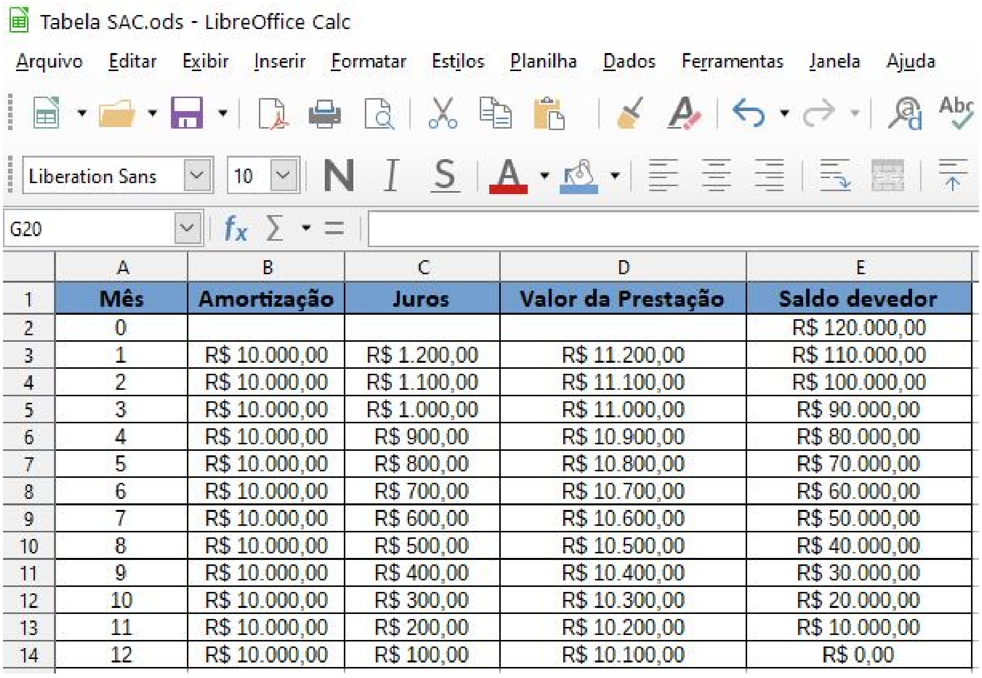
Ao pagar a primeira parcela, o saldo devedor passa a ser $120.000,00 - 10.000,00 = 110.000,00$. Dessa forma. o valor da $2^a$ parcela será $R\$10.000,00$ acrescidos dos juros de $1\%$ sobre o saldo devedor, ou seja,

$$P_2 = 10.000,00 + 0,01 \times 110.000,00 = 11.100,00.$$

Seguindo esse mesmo raciocínio, as demais parcelas podem ser calculadas. Para finalizar o financiamento, o valor da $12^a$ parcela seria constituído dos $R\$10.000,00$ acrecidos dos juros sobre o saldo devedor, que nesse momento será de $R\$10.000,00$, visto que já terão sido pagas $11$ parcelas cada uma correspondendo uma amortização de $R\$10.000,00$ sobre o saldo devedor inicial que era de $R\$120.000,00$, ou seja, o saldo devedor será igual a $120.000,00 - 11 \times 10.000,00 = 10.000,00$. Diante do exposto, o valor da última prestação será

$$P_{12} = 10.000,00 + 0,01 \times 10.000,00 = 10.100,00.$$

Os valores correspondentes a esse financiamento estão resumidos na tabela a seguir (feita com o aplicativo CALC do LIBREOFFICE):




| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Mês | Amortização | Juros | Valor da Prestação | Saldo devedor |
| 2 | 0 | | | | R$ 120.000,00 |
| 3 | 1 | R$ 10.000,00 | R$ 1.200,00 | R$ 11.200,00 | R$ 110.000,00 |
| 4 | 2 | R$ 10.000,00 | R$ 1.100,00 | R$ 11.100,00 | R$ 100.000,00 |
| 5 | 3 | R$ 10.000,00 | R$ 1.000,00 | R$ 11.000,00 | R$ 90.000,00 |
| 6 | 4 | R$ 10.000,00 | R$ 900,00 | R$ 10.900,00 | R$ 80.000,00 |
| 7 | 5 | R$ 10.000,00 | R$ 800,00 | R$ 10.800,00 | R$ 70.000,00 |
| 8 | 6 | R$ 10.000,00 | R$ 700,00 | R$ 10.700,00 | R$ 60.000,00 |
| 9 | 7 | R$ 10.000,00 | R$ 600,00 | R$ 10.600,00 | R$ 50.000,00 |
| 10 | 8 | R$ 10.000,00 | R$ 500,00 | R$ 10.500,00 | R$ 40.000,00 |
| 11 | 9 | R$ 10.000,00 | R$ 400,00 | R$ 10.400,00 | R$ 30.000,00 |
| 12 | 10 | R$ 10.000,00 | R$ 300,00 | R$ 10.300,00 | R$ 20.000,00 |
| 13 | 11 | R$ 10.000,00 | R$ 200,00 | R$ 10.200,00 | R$ 10.000,00 |
| 14 | 12 | R$ 10.000,00 | R$ 100,00 | R$ 10.100,00 | R$ 0,00 |

No caso geral, supondo que a dívida inicial de um financiamento SAC seja $D_0$, por um período de $n$ meses sujeito a uma taxa mensal $i$, os valores da amortização, do saldo devedor, dos juros e da prestação num mês $k$, onde $1 \leq k \leq n$ são dados, respectivamente, pelas fórmulas de recorrência:

$$A_k = \frac{D_0}{n}, \quad D_k = D_0 - k\frac{D_0}{n}, \quad J_k = iD_{k-1}, \text{ e } P_k = A_k + J_k.$$

Na primeira delas, o valor da amortização (constante) mensal é simplesmente o valor inicial da dívida dividida pelo número de meses do financiamento. Na segunda, o valor na dívida no mês $k$ é o valor inicial da dívida $D_0$ subtraído das amortizações realizadas nos $k$ primeiros meses, ou seja, $k\frac{D_0}{n}$. Na terceira, os juros de cada mês correspondem a $i\%$ do saldo devedor do mês anterior, e por fim na última fórmula, o valor da prestação no mês $k$ é constituído pela soma da amortização e dos juros correspondentes daquele mês.

### 1.3.2 Sistema Francês - Tabela Price

Boa parte dos financiamentos realizados no mercado financeiro são regidos pelo chamado Sistema Francês, ou Tabela Price. Nesse sistema, ao contrário do sistema SAC que descrevemos na subseção anterior, as prestações são constantes ao longo do tempo. Antes de estabelecermos as relações de recorrência que governam esse sistema de financiamento, vamos analisar um exemplo para que possamos nos familiarizar com as ideias.

**Exemplo 1.3.2.** *Tereza financiou uma máquina para a sua indústria têxtil no valor de $R\$120.000,00$ em $12$ prestações iguais mensais, com uma taxa de juros de $1\%$ ao mês. Qual o valor (fixo) das parcelas desse financiamento?*

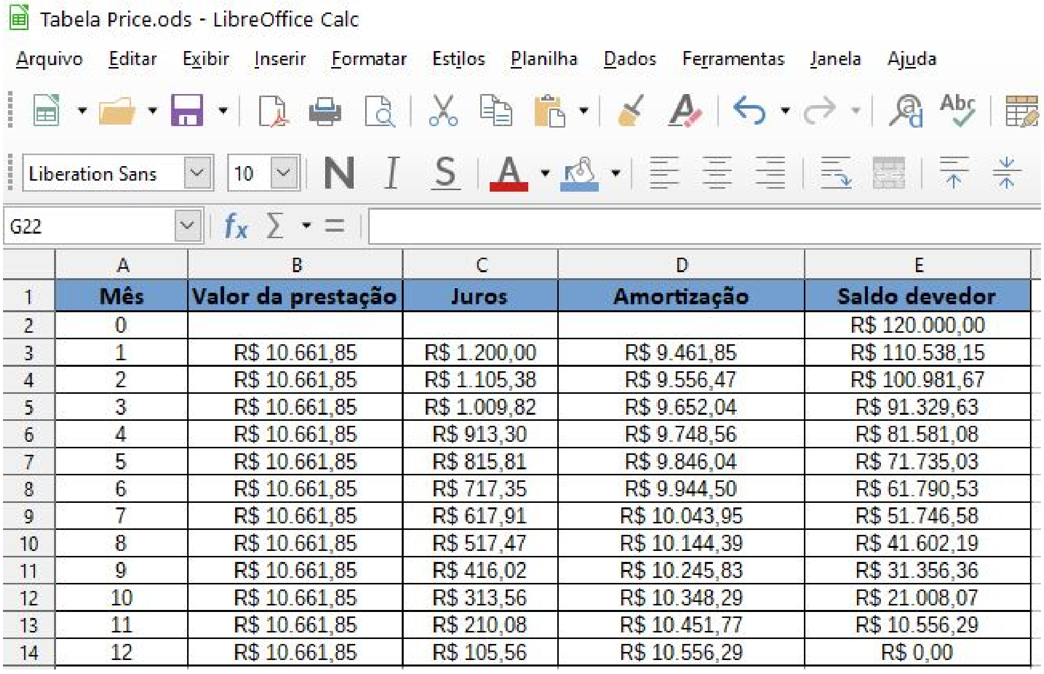
**Solução:** Suponhamos que a prestação constante correspondente a esse financiamento seja $P$. A taxa de juros associada ao financiamento é $1\%$ (cujo fator de correção é $1,01$). Para determinarmos o valor da prestação, basta ”deslocarmos” todas as prestações para o dia da compra (instante $0$), ou seja, o valor da $1^a$ prestação no instante $0$ seria $\frac{P}{1,01}$, da $2^a$ prestação no mesmo instante seria $\frac{P}{1,01^2}$ e da mesma forma para as demais prestações, até o valor da $12^a$ prestação no mesmo instante $0$ seria $\frac{P}{1,01^{12}}$. Mas ocorre que a soma dos valores dessas $12$ prestações no instante $0$ deve corresponder exatamente a $R\$120.000,00$ que é o preço da máquina no dia em que o financiamento foi firmado, ou seja,

$$\frac{P}{1,01} + \frac{P}{1,01^2} + \ldots + \frac{P}{1,01^{12}} = 120.000 \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,01^2} + \ldots + \frac{1}{1,01^{12}}\right) = 120.000 \Rightarrow$$

$$P\frac{1,01^{-1}(1,01^{-12}-1)}{1,01^{-1}-1} \Rightarrow P = \frac{1,01^{-1}-1}{1,01^{-1}(1,01^{-12}-1)} \approx 10.661,85.$$

Os valores das prestações, juros, amortizações e saldo devedor referentes a essa transação estão resumidos na tabela abaixo:




| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Mês | Valor da prestação | Juros | Amortização | Saldo devedor |
| 2 | 0 | | | | R$ 120.000,00 |
| 3 | 1 | R$ 10.661,85 | R$ 1.200,00 | R$ 9.461,85 | R$ 110.538,15 |
| 4 | 2 | R$ 10.661,85 | R$ 1.105,38 | R$ 9.556,47 | R$ 100.981,67 |
| 5 | 3 | R$ 10.661,85 | R$ 1.009,82 | R$ 9.652,04 | R$ 91.329,63 |
| 6 | 4 | R$ 10.661,85 | R$ 913,30 | R$ 9.748,56 | R$ 81.581,08 |
| 7 | 5 | R$ 10.661,85 | R$ 815,81 | R$ 9.846,04 | R$ 71.735,03 |
| 8 | 6 | R$ 10.661,85 | R$ 717,35 | R$ 9.944,50 | R$ 61.790,53 |
| 9 | 7 | R$ 10.661,85 | R$ 617,91 | R$ 10.043,95 | R$ 51.746,58 |
| 10 | 8 | R$ 10.661,85 | R$ 517,47 | R$ 10.144,39 | R$ 41.602,19 |
| 11 | 9 | R$ 10.661,85 | R$ 416,02 | R$ 10.245,83 | R$ 31.356,36 |
| 12 | 10 | R$ 10.661,85 | R$ 313,56 | R$ 10.348,29 | R$ 21.008,07 |
| 13 | 11 | R$ 10.661,85 | R$ 210,08 | R$ 10.451,77 | R$ 10.556,29 |
| 14 | 12 | R$ 10.661,85 | R$ 105,56 | R$ 10.556,29 | R$ 0,00 |

No caso geral, supondo que uma pessoa adquira uma dívida $D_0$ por um período de $n$ meses (no Sistema Price), sujeita a uma taxa mensal $i$, os valores da prestação $P_k$, do saldo devedor $D_k$, de juros e da amortização no mês $k$, com $1 \leq k \leq n$ são dados pelas seguintes leis de recorrência:

$$\begin{aligned} P_k &= \tfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} D_0, \\ D_k &= \tfrac{1-(1+i)^{-(n+k)}}{1-(1+i)^{-n}} D_0, \\ J_k &= i D_{k-1} \;\; e \\ A_k &= P_k - J_k. \end{aligned}$$

De fato, para calcularmos o valor $P_k = P$ (fixo) das prestações, basta deslocarmos todas as prestações para o instante $0$ (instante em que a dívida foi adquirida). Para isso, como o fator de correção é igual a $1+i$, os valores das $n$ prestações no instante $0$ são:

$$\frac{P}{(1+i)^1}, \frac{P}{(1+i)^2}, \ldots, \frac{P}{(1+i)^n}.$$

A soma desses valores deve corresponder ao valor inicial da dívida, ou seja,

$$\frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^n} = D_0 \Rightarrow$$

$$P\left[\frac{(1+i)^{-1}((1+i)^{-n}-1)}{(1+i)^{-1}-1}\right] D_0 \Rightarrow P = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} D_0.$$

O valor $D_k$ da dívida no mês $k$, com $1 \leq k \leq n$, é dado por

$$D_k = \frac{P}{(1+i)^1} + \frac{P}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^{n-k}},$$

usando a expressão que acabamos de deduzir para $P$, segue que $D_k = \frac{1-(1+i)^{-(n+k)}}{1-(1+i)^{-n}} D_0$. Por fim, os juros a cada mês são cobrados sobre o saldo devedor do mês anterior, ou seja , $J_k = iD_{k-1}$ e a amortização a cada mês é a diferença entre o valor da prestação paga e o juros correspondente àquele mês, ou seja, $A_k = P_k - J_k$.

# Capítulo 2

# Sequências Numéricas e Recorrências

## 2.1 Introdução

Neste capítulo iremos definir de modo mais preciso o que vem a ser uma relação de recorrência, apresentando os principais resultados relacionados a esse tema e dando uma atenção especial ao caso das recorrências lineares, que se mostram como ferramentas bastante adequadas e eficientes para resolver diversos problemas em que o raciocínio recursivo está presente.

## 2.2 Sequências Numéricas

**Definição 2.2.1** (Sequências)**.** *Uma sequência numérica é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tomando valores no conjunto dos números reais tal que $f(n) = x_n$.*

Costumamos representar uma sequência dispondo seus termos entre parênteses, isto é,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots).$$

Neste trabalho estamos particularmente interessados nas chamadas sequências recorrentes, isto é, aquelas que são definidas por uma lei de recorrência e certas condições especiais. Neste ponto vamos definir de um modo mais preciso essas ideias.

## 2.3 Sequências Recorrentes

Nesta seção vamos trabalhar com as chamadas sequências recorrentes, isto é, sequências que são definidas a partir dos valores de alguns dos seus temos iniciais acompanhados de uma relação entre eles, que permite determinar os demais termos da sequência a partir dos termos iniciais fixados. As sequências recursivas são uma ferramenta matemática bastante poderosa para resolver problemas de matemática discreta e problemas de muitas outras áreas tais como engenharia, computação, biologia, estatística, entre outras.

Iniciaremos, propondo um exemplo de contagem de enunciado muito simples, cujos métodos tradicionais da análise combinatória se mostram ineficientes para resolvê-lo, motivando então a necessidade de uma nova ferramenta mais adequada para atacá-lo.

**Exemplo 2.3.1.** *Quantas são as sequências de $n$ termos, todos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a $0$?*

Apesar da simplicidade do seu enunciado, as técnicas usuais da análise combinatória, mostram-se ineficientes para se chegar a uma solução. Isso torna-se mais evidente quando olhamos para a resposta desse problema:

$$\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\left(1-\sqrt{3}\right)^n,$$

que é completamente não intuitiva. Não devemos esperar que os métodos tradicionais da análise combinatória (arranjos, combinações, permutações...) nos leve à essa resposta. No final da nossa discussão vamos retomar à resolução desse exemplo.

Diante do exposto, é clara a necessidade de estudarmos outras ferramentas que sejam eficientes para tratar problemas como o proposto no exemplo acima. Essas ferramentas são as chamadas recorrências lineares, que através de uma teoria simples e elegante nos leva à solução de problemas desse tipo, entre muitos outros dentro da matemática e nas áreas afins.

Uma outra situação onde as recorrências são utilizadas é na definição de certas operações e expressões, como por exemplo, na potenciação (com exponente natural ou na definição de fatorial de um inteiro não negativo, como ilustramos a seguir.

**Definição 2.3.1** (Sequências Recorrentes). *Uma sequência $x_1, ..., x_n \ldots$ é denominada sequência recorrente quando cada um de seus termos é dado em função de termos anteriores. Sendo assim, dado um inteiro positivo $k$, uma sequência recorrente de ordem $k$ é uma sequência no qual cada termo é determinado como uma função dos $k$ termos imediatamente anteriores a ele;*

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \ldots, x_{n+1}, x_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

*Além disso, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência recorrente linear de ordem $k$ (onde $k$ é um inteiro positivo) se existem constantes (reais ou complexas) $C_1, C_2, ..., C_k$ e uma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, tais que:*

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} C_j x_{n+k-j} = C_1 x_{n+k-1} + C_2 x_{n+k-2} + ... + C_k x_k + \varphi(n), \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Essas sequências são determinadas pelos seus $k$ primeiros termos $x_1, x_2, ..., x_k$.*

Como exemplos, vamos retomar os problemas da pizza e do queijo de Steiner, mencionados no Capítulo 1.

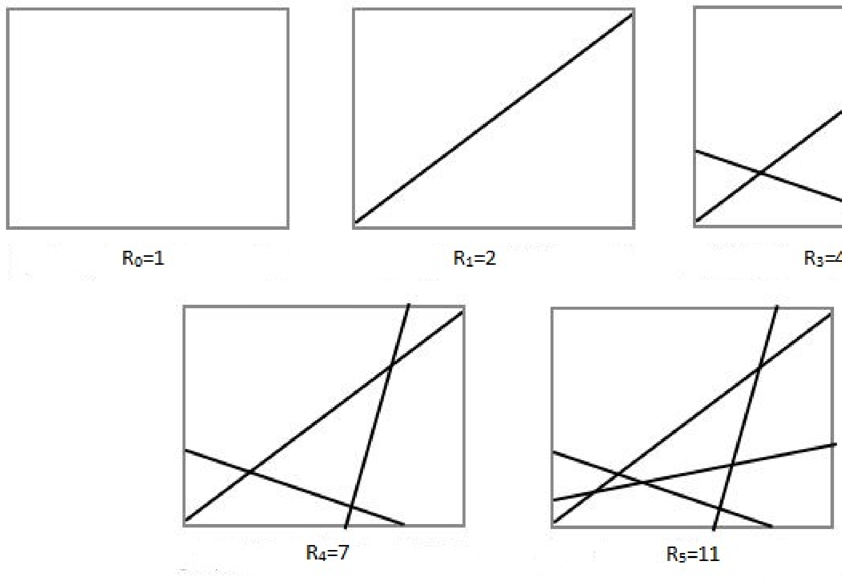
**Exemplo 2.3.2.** *Dados $a \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos*

$$a^n = \begin{cases} 1, \ \textit{se } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1}, \ \textit{se } n > 1. \end{cases}$$

*No caso do fatorial de um número inteiro não negativo,*

$$n! = \begin{cases} 1, \ \textit{se } n = 0 \\ n(n-1)!, \ \textit{se } n > 1. \end{cases}$$

**Exemplo 2.3.3** (O Problema da Pizza de Steiner). *Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com $n$ cortes retos? Pensando o plano como se fosse uma grande pizza, temos uma explicação para o nome do problema. A figura a seguir ilustra o início do processo.*




*Denotando o número máximo de pedaços obtidos a partir de $n$ cortes por $R_n$, mostre que:*

$$R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

**Solução:** Seja $R_n$ o número máximo de regiões em que $n$ retas dividem um plano (o número de regiões é máximo quando não temos retas paralelas nem três retas passando por um mesmo ponto). Imagine a situação em que há $n-1$ retas dividindo o plano em $R_{n-1}$ regiões. Ao adicionarmos uma nova reta a essa configuração (nesse caso o plano está dividido em $R_{n-1}$ regiões), essa nova reta intersecta cada uma das $n-1$ retas já existentes em exatamente um ponto, gerando então $n-1$ pontos de interseção. A inclusão dessa nova reta incrementa o número de regiões em $n$, ou seja, $R_n = R_{n-1} + n$ (que é uma recorrência linear de primeira ordem). Dessa forma,

$$\begin{aligned}
&R_1 = 2\\
&R_2 = R_1 + 2\\
&R_3 = R_2 + 3\\
&\vdots\\
&R_{n-1} = R_{n-2} + (n-1)\\
&R_n = R_{n-1} + n.
\end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima, segue que:

$$R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n = 2 + R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1} + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow R_n =& 2+2+3+\ldots+n\\ =& 1+(1+2+3+\ldots+n)=1+\frac{n(n+1)}{2}\\ =& \frac{n(n+1)}{2}+1.\end{aligned}$$

**Exemplo 2.3.4.** *(*O QUEIJO DE STEINER*) Para fazer a sua pizza, Steiner teve que cortar, primeiro, o queijo. imaginando que o espaço é um enorme queijo, qual é o número máximo de pedaços que poderíamos obter ao cortá-lo por $n$ planos?*

**Solução:** Nesse caso tridimensional o problema é um pouquinho mais delicado, mas segue a mesma linha de raciocínio do problema da pizza de Steiner. Suponhamos que $P_n$ seja o número máximo de regiões em que o espaço tridimensional pode ser dividido por $n$ planos, vamos mostrar que:

$$P_{n+1}=P_n+R_n,\ n\in\mathbb{N},$$

onde $R_n=1+\frac{n(n+1)}{2}$ é a solução do problema da pizza de Steiner.

De fato, suponha que já existam $n$ planos dividindo o espaço tridimensional em $P_n$ regiões. Agora suponha que adicionemos um novo plano, isto é, um $n+1$-ésimo plano sem que intersecte uma reta que seja comum a dois planos já existentes ou que seja paralelo a qualquer um dos planos já existentes. Dessa forma cada um dos $n$ planos já existentes irá intersectar o novo plano em $n$ retas que dividem o novo plano em $R_n$ regiões. Mas isso significa que o novo plano corta exatamente $R_n$ das $P_n$ regiões já existentes (dividindo cada uma delas em duas regiões). Isso cria $R_n$ novas regiões do espaço tridimensional, fazendo que hajam $P_n+R_n$ regiões nesse momento, ou seja, $P_{n+1}=P_n+R_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{cases}P_1=2\\ P_2=P_1+R_1\\ P_3=P_2+R_2\\ \vdots\\ P_n=P_{n-1}+R_{n-1}\end{cases}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima, segue que:

$$
\begin{aligned}
P_n =& 2 + R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1} \\
=& 2 + \sum_{k=1}^{n-1} R_k \\
=& 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ 1 + \frac{k(k+1)}{2} \right] \\
=& 2 + (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k \right] \\
=& 2 + (n-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k \\
=& 2 + (n-1) + \frac{1}{2}\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} \\
=& \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.
\end{aligned}
$$

**Observação 2.3.1.** *Em 1826, Jacob Steiner analisou esse problema até o caso tridimensional que acabamos de mostrar. Em 1840, Ludwig Schlafli imaginou um "queijo" $d$-dimensional e provou que nesse caso o número máximo de regiões em que o espaço $d$-dimensional ficaria dividido por $n$ hiperplanos de dimensão $d-1$ é dado por:*

$$f_d(n) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{d}.$$

**Exemplo 2.3.5** (Permutações caóticas)**.** *Resolva a recorrência*

$$x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}), \ \textit{para } n \geq 2, \ \textit{com } x_0 = 1 \textit{ e } x_1 = 0.$$

**Solução:** Podemos reescrever a lei de recorrência da seguinte forma:

$$x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}) \Rightarrow x_n = nx_{n-1} - x_{n-1} + (n-1)x_{n-2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_n - nx_{n-1}}_{=a_n} = -(\underbrace{x_{n-1} - (n-1)x_{n-2}}_{a_{n-1}}) \Rightarrow a_n = -(a_{n-1}), \ \forall n \geq 2.$$

Ora, como $x_0 = 1$ e $x_1 = 0$, segue que

$$a_1 = x_1 - 1.x_0 = 0 - 1.1 = -1.$$

Por outro lado, como $a_n = -a_{n-1}$ para todo inteiro $n \geq 2$, segue que:

$$a_1 = -1, a_2 = -a_1 = -(-1) = 1, \ldots, a_n = (-1)^n.$$

Assim,

$$a_n = x_n - nx_{n-1} \Rightarrow x_n - nx_{n-1} = (-1)^n.$$

Agora dividindo a expressão $x_n - nx_{n-1} = (-1)^n$ por $n!$, segue que:

$$\frac{x_n}{n!} - \frac{nx_{n-1}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow \frac{x_n}{n!} - \frac{nx_{n-1}}{n(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow \frac{x_n}{n!} - \frac{x_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

definindo $b_n = \frac{x_n}{n!}$, podemos escrever

$$\frac{x_n}{n!} - \frac{x_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \Rightarrow b_n = b_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Assim,

$$\begin{cases} b_2 = b_1 + \frac{(-1)^2}{2!} \\ b_3 = b_2 + \frac{(-1)^3}{3!} \\ \vdots \\ b_n = b_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima, obtemos:

$$b_2 + b_3 + \ldots + b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} b_n =& b_1 + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \\ =& \frac{x_1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \\ =& \frac{0}{1!} + \frac{1^2}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \\ =& \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Por fim, como $b_n = \frac{x_n}{n!}$, segue que:

$$\frac{x_n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$
$$\Rightarrow x_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Como $\frac{1}{0!} = \frac{1}{1!} = 1$, podemos escrever:

$$x_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Da análise combinatória, sabemos que essa expressão é justamente o número de permutações caóticas de $n$ elementos distintos, ou seja, $x_n = D_n$ para todo inteiro $n \geq 1$.

Nesse ponto surge naturalmente a seguinte questão: dada sequência de números reais $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por uma equação de recorrência

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \ldots, x_{n+1}, x_n),$$

onde $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função, como obter uma fórmula explícita para o $x_n$, em função do $n$? Essa é a principal questão que vamos tratar nas próximas seções.

## 2.4 Recorrências Lineares

Como mencionamos anteriormente, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência recorrente linear de ordem $k$ (onde $k$ é um inteiro positivo) se existem constantes (reais ou complexas) $C_1, C_2, ..., C_k$ e uma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto f(n)$, tais que:

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^{k} C_j x_{n+k-j} = C_1 x_{n+k-1} + C_2 x_{n+k-2} + ... + C_k x_k + \varphi(n) \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nesta seção vamos mostrar a teoria básica das sequências recorrentes lineares de primeira e segunda ordens e algumas aplicações dessa teoria.

### 2.4.1 Recorrências Lineares de $1^a$ ordem

**Definição 2.4.1.** *Uma recorrência de primeira ordem que expressa $x_{n+1}$ em função de $x_n$ é dita linear quando a função que relaciona cada termo aos anteriores é uma função de primeiro grau. Além disso, para que uma recorrência seja caracterizada como primeira ordem, cada termo da sequência deve ser obtido a partir do termo imediatamente anterior a ele ou seja, $x_n$ em função de $x_{n-1}$.*

**Definição 2.4.2.** *Uma recorrência linear de primeira ordem pode ser ainda classificada como recorrência linear homogênea de primeira ordem ( recorrências do tipo $x_{n+1} = f(n)x_n$) com $f(n)$ e $x_n$ não nulos ou ainda como recorrência linear não - homogênea de primeira ordem (recorrências de tipo $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$) com $f(n)$ e $g(n)$ não nulos).*

Ao resolver uma equação de recorrência encontramos uma fórmula fechada ou seja, encontramos uma expressão que fornece cada termo a partir de n e não necessariamente a partir de termos anteriores. Essa expressão é denominada solução da recorrência.

**Proposição 1.** *Se $x_{n+1} = g(n)x_n$ é uma recorrência linear de primeira ordem, onde $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ é uma função qualquer, e todos os termos da sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ são não nulos, então*

$$x_n = \prod_{i=1}^{n-1} g(i)x_1.$$

**Demonstração:** De fato,

$$\begin{aligned} x_2 &= g(1)x_1 \\ x_3 &= g(2)x_2 \\ x_4 &= g(3)x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= g(n-1)x_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades anteriores, obtemos:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = g(1) \cdot g(2) \cdot g(3) \cdot \ldots \cdot g(n-1) \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}.$$

Ora, como estamos supondo que todos os termos da sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ são não nulos, segue que

$$\begin{aligned} x_n =& g(1)\cdot g(2)\cdot g(3)\cdot \ldots \cdot g(n-1)\cdot x_1 \\ =& \prod_{i=1}^{n-1} g(i)x_1. \end{aligned}$$

**Observação 2.4.1.** *De modo completamente análogo, se $x_{n+1} = x_n + g(n)$, onde $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ é uma função qualquer, podemos concluir que*

$$x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(i).$$

*De fato,*

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + g(1) \\ x_3 &= x_2 + g(2) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + g(n-1). \end{aligned}$$

*Adicionando, membro a membro as igualdades acima, segue que*

$$\begin{aligned} x_n =& x_1 + g(1) + g(2) + \ldots + g(n-1) \\ =& x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(i) \end{aligned}$$

**Exemplo 2.4.1.** *Resolva a recorrência $x_{n+1} = x_n + 3^n, \;\; x_1 = 1$.*

**Solução:** Pela observação anterior, segue que

$$\begin{aligned} x_n =& x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(i), \text{ com } g(i) = 3^i \\ =& 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1}) \\ =& \frac{1(3^n - 1)}{3-1} \\ =& \frac{1}{2}(3^n - 1). \end{aligned}$$

A seguir mostraremos um teorema que revela que qualquer recorrência linear não homogênea de primeira ordem pode ser transformada numa da forma $x_{n+1} = x_n + g(n)$, cuja solução geral é $x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(i)$, como vimos acima.

**Teorema 1.** *Se $a_n$ é uma solução não-nula de $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$, transforma a recorrência*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \textit{ em } y_{n+1} = y_n + \varphi(n), \textit{ onde } \varphi(n) = \frac{h(n)}{a_n \cdot g(n)}.$$

**Demonstração:** Com efeito, substituindo $x_n = a_n y_n$ em $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$, obtemos:

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Ocorre que $a_{n+1} = g(n)a_n$, pois $a_n$ é uma solução não-nula de $x_{n+1} = g(n)x_n$. Portanto,

$$\begin{cases} a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n) \\ a_{n+1} = g(n)a_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$$
$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{a_n \cdot g(n)}.$$

Fazendo $\frac{h(n)}{a_n \cdot g(n)} = \varphi(n)$, segue que $y_{n+1} = y_n + \varphi(n),$ onde $\varphi(n) = \frac{h(n)}{a_n \cdot g(n)}$. A partir daí podemos usando o mesmo método do Exemplo 2.4.1 podemos obter uma fórmula explítica para $y_n$ e por fim, usando a relação $x_n = a_n y_n$ podemos determinar uma fórmula explícita para $x_n$.

Para fixar as ideias desenvolvidas no teorema acima, observe atentamente o exemplo a seguir:

**Exemplo 2.4.2.** *Resolva a recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 1,\ x_1 = 3.$*

**Solução:** Considerando a recorrência homogênea $x_{n+1} = 3x_n$, pela Proposição 1, segue que $a_n = 3^{n-1}$ é uma solução dessa recorrência homogênea. Pelo Teorema 1, fazendo a substituição $x_n = a_n y_n = 3^{n-1} y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 1$ em $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3^n}$. Ora, como $x_1 = 3^{1-1} y_1$ e $x_1 = 3$, segue que $y_1 = 3$. Assim,

$$\begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = \frac{1}{3} \\ y_3 - y_2 = \frac{1}{3^2} \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}. \end{cases}$$

Adicionando membro a membro essas igualdades segue que

$$\begin{aligned} y_n =& 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} \\ =& 3 + \frac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} \\ =& \frac{5 + 3^{n-1}}{2}. \end{aligned}$$

Por fim, como $x_n = 3^{n-1}.y_n$, segue que $x_n = \frac{5.3^{n-1} + 3^{n-2}}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como um outro exemplo vamos retomar o famoso problema da Torre de Hanoi, proposto no Capítulo 1.

**Exemplo 2.4.3** (A Torre de Hanoi)**.** *O jogo consiste em transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, a regra acima seja observada. Mostre, por indução, que o número mínimo de movimentos necessários para a transferência dos discos de uma haste para outra, respeitando as regras expostas, é* $x_n = 2^n - 1$.

$Figura\ 2 : Jogo\ Torre\ de\ Hanói$

**Solução:** Para facilitar o entendimento chamemos as hastes de $A$, $B$ e $C$. Agora consideremos que a haste $A$ está com $n+1$ discos. Além disso, suponhamos que queremos mover os discos, por exemplo, para a haste $C$. Suponhamos que os discos tenham sido numerados de cima para baixo: $1, 2, \ldots, n+1$. O menor disco é o $1$, e o maior é o $n+1$. Para remover o disco $n+1$ é preciso tirar todos de cima, ou seja, tirar todos os $n$ discos que estão acima dele, lembrando-se que queremos mover os discos todos para a haste $C$, e que o disco $n+1$ é o que deve ficar mais embaixo nesta haste. Então é necessário colocar os outros $n$ discos na haste $B$, ou seja, devemos mover os $n$ discos menores, de $A$ para $B$ um de cada vez respeitando as regras. Feito isso removemos o disco $n+1$ para a haste $C$. Agora, para mover os $n$ discos para $C$, só é possível se for repetindo o jogo, de modo a passar todos os discos (um a um) de $B$ para $C$.

Podemos observar que teremos que fazer o jogo com $n$ discos duas vezes: primeiro movemos os $n$ discos menores de $A$ para $B$ (usando $C$ como intermediário). Esse procedimento deixa o disco $n+1$ livre para ser movimentado. Movemos então o disco $n+1$ para $C$. Agora jogamos com os $n$ discos menores mais uma vez: de $B$

para $C$, usando a torre $A$ como intermediária e com isso empilhamos todos em $C$ sem violar as regras. Vamos então verificar qual é o número mínimo de movimentos. Para facilitar, vamos dizer que o número mínimo de movimentos necessários para completar o jogo de $n+1$ discos é $x_{n+1}$. Como não há como chegar ao disco $n+1$ sem mover os $n$ de cima, o número de movimentos que fizemos para isso é $x_n$. Como movemos os $n$ menores para a haste $B$, a haste $C$ está livre, logo podemos mover o disco $n+1$ para $C$, ou seja, o número de movimentos desde o começo do jogo é de $x_n + 1$. Neste ponto ainda falta mover os $n$ discos menores de $B$ para $C$, para ficarem em cima do disco $n+1$. O número mínimo de movimentos para fazer isto é, por hipótese, $x_n$. Diante do exposto, o número mínimo de movimentos para transferirmos os $n+1$ discos da torre $A$ para a torre $C$ obdece a igualdade:

$$x_{n+1} = (x_n + 1) + x_n \Rightarrow x_{n+1} = 2x_n + 1.$$

Além disso, perceba que $x_1 = 1$ (com apenas um disco, apenas um único movimento é necessário para passar esse disco de $A$ para $C$). Por outro lado, considerando a recorrência homogênea $x_{n+1} = 2x_n$, pela Proposição 1, segue que

$$x_n = \prod_{i=1}^{n-1} 2a_1 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{(n-1) \text{ fatores}}.1 = 2^{n-1}.$$

Pelo Teorema 1, segue que a mudança de variáveis $x_n = 2^{n-1}y_n$, transforma a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$ em

$$y_{n+1} = y_n + \varphi(n), \text{ onde } \varphi(n) = \frac{1}{2^{n-1}.2} = \frac{1}{2^n}.$$

Mas,

$$x_n = 2^{n-1}y_n \Rightarrow x_1 = 2^0 y_1 \Rightarrow 1 = 1 \cdot y_1 \Rightarrow y_1 = 1.$$

Por fim, pela Observação 2.4.1, a solução da recorrência acima é dada por

$$\begin{aligned} y_n =& y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^n} \\ =& 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ =& \frac{1\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \\ =& 2(1 - 2^{-n}). \end{aligned}$$

Por fim,

$$x_n = 2^{n-1} y_n \Rightarrow x_n = 2^n(1 - 2^{-n}) \Rightarrow x_n = 2^n - 1.$$

### 2.4.2 Recorrências Lineares de $2^a$ ordem

Agora trataremos do caso particular das recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Nesse caso, a recorrência é da forma

$$a_n = c_1(n)a_{n-1} + c_2(n)a_{n-2} + f(n),$$

onde $c_1, c_2, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ são funções constantes.

Para começar trabalharemos especificamente com o caso homogêneo, isto é, o caso em que $f(n) \equiv 0$. Nesse caso podemos escrever recorrência da seguinte forma:

$$a_n = c_1(n)xa_{n-1} + c_2(n)a_{n-2} + \underbrace{f(n)}_{\equiv 0} \Rightarrow a_n - c_1(n)a_{n-1} - c_2(n)a_{n-2} = 0.$$

Sendo $c_1$ e $c_2$ funções constantes, existem números reais $p$ e $q$ tais que $-c_1(n) = p$ e $-c_2(n) = q$, o que nos permite escrever

$$a_n - c_1(n)xa_{n-1} - c_2(n)a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0.$$

Uma primeira tentativa para determinar soluções para recorrências do tipo $a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0$ é procurar soluções do tipo $a_n = r^n$, onde $r$ é uma constante real.

Se considerarmos que $a_n = r^n$ é uma solução da recorrência $a_n + pa_{n-1} + qa_n n - 2 = 0$, segue que

$$r^n + pr^{n-1} + qr^{n-2} = 0 \Rightarrow r^{n-2}(r^2 + pr + q) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r^{n-2} = 0 \\ ou \\ r^2 + pr + q = 0 \end{cases}.$$

No primeiro caso, $r^{n-2} = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow a_n = r^n = 0^n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. No segundo caso, $r^2 + pr + q = 0$, o que revela que $r$ é uma raiz da equação quadrática $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Mas será que vale a recíproca? Isto é, se $r$ é uma raiz da equação quadrática $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ então $a_n = r^n$ é uma solução da recorrência $a_n + pa_{n-1} + qa_n n - 2 = 0$? Essas são as únicas soluções dessa recorrência? Os teoremas a seguir irão esclarecer essas e outras questões relacionadas com esse tipo de recorrência.

**Teorema 2.** *Se as raízes da equação $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ são $\lambda_1$ e $\lambda_2$, (reais e distintas) então*

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

*é solução da recorrência linear homogênea de segunda ordem $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, quaisquer que sejam as constantes $C_1$ e $C_2$.*

**Demonstração:** De fato, substituindo $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ em $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n$, obtemos:

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n =& C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + p(C_1\lambda_1^{n-1} + C_2\lambda_2^{n-1}) + q(C_1\lambda_1^{n-2} + C_2\lambda_2^{n-2}) \\ =& C_1\lambda_1^{n-2}(\underbrace{\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q}_{=0}) + C_1\lambda_2^{n-2}(\underbrace{\lambda_2^2 + p\lambda_2 + q}_{=0}) \\ =& C_1\lambda_1^{n-2} \cdot 0 + C_1\lambda_2^{n-2} \cdot 0 \\ =& 0. \end{aligned}$$

Mas será que há outras soluções que não sejam do tipo $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$? O teorema a seguir esclarece essa questão.

**Teorema 3.** *Se $p$ e $q$ são números reais distintos e não nulos, então todas as soluções da recorrência linear homogênea de segunda ordem $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ são da forma*

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$

*em que $C_1$ e $C_2$ são constantes e $\lambda_1$ , $\lambda_2$ são as raízes reais da equação $\lambda^2+p\lambda+q = 0$, onde $p^2 - 4q > 0$. (Essa equação é dita a* **equação característica** *da recorrência).*

**Definição 2.4.3.** *Equação Característica: É uma equação de 2º grau associada a uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes na forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, com $q \neq 0$. (MORGADO, 2013)*

**Demonstração:** De fato, se $(y_n)_{n\geq 1}$ é uma solução da relação de recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, com $p, q \neq 0$, segue que

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

Considere a sequência $(z_n)_{n\geq 1}$, definida por $z_n = y_n - (C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n)$. Mostraremos que $z_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\begin{aligned}
z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = \ & y_{n+2} - (C_1\lambda_1^{n+2} + C_2\lambda_2^{n+2}) + p\left[y_{n+1} - (C_1\lambda_1^{n+1} + C_2\lambda_2^{n+1})\right] \\
& + q\left[y_n - (C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n)\right] \\
= \ & (\underbrace{y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n}_{=0}) - C_1\lambda_1^n(\underbrace{\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q}_{=0}) \\
& - C_2\lambda_2^n(\underbrace{\lambda_2^2 + p\lambda_2 + q}_{=0}) \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

Ademais, $z_1 = y_1 - (C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n)$ e $z_2 = y_2 - (C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n)$. Vamos mostrar que existem constantes $C_1$ e $C_2$ tais que $z_1 = z_2 = 0$. Com efeito,

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - (C_1\lambda_1^1 + C_2\lambda_2^1) = 0 \\ y_2 - (C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1\lambda_1^1 + C_2\lambda_2^1 = y_1 \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = y_2 \end{cases}.$$

Ora, como $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são não nulos (pois são as raízes da equação quadrárica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, com $q \neq 0$), e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, podemos resolver o sistema acima para obter:

$$C_1 = \frac{\lambda_2^2 y_1 - \lambda_2 y_2}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} \text{ e } C_2 = \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_1^2 y_1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Com essas contantes, temos que $z_1 = z_2 = 0$. Como $z_{n+2}+pz_{n+1}+qz_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, segue que $z_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$z_n = y_n - (C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Exemplo 2.4.4.** *Resolva a recorrência* $a_{n+2} + 5a_{n+1} - 6a_n = 0$.

**Solução:** A equação característica dessa recorrência é $\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$. As raízes dessa equação são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Pelo teorema anterior, segue que as soluções da recorrência são as sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ tais que $a_n = C_1.2^n + C_2.3^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, onde $C_1$ e $C_2$ são constantes reais.

**Observação 2.4.2.** *Numa recorrência linear homogênea de segunda ordem, se foram dados os valores dos dois primeiros termos da sequência* $(a_n)_{n\geq 1}$ *que deve satisfazer a recorrência, podemos obter os valores explícitos das constantes* $C_1$ *e* $C_2$*. Se no exemplo anterior, além da recorrência tivéssemos as condições* $a_1 = 5$ *e* $a_2 = 13$*, teríamos o seguinte sistema*

$$\begin{cases} C_1.2^1 + C_2.3^1 = 5 \\ C_2.2^2 + C_2.3^2 = 13 \end{cases} \quad \Rightarrow C_1 = 1 \text{ e } C_2 = 1.$$

**Observação 2.4.3.** *Tudo que dissemos no Teorema 2 continua a valer, mesmo que as raízes* $\lambda_1$ *e* $\lambda_2$ *da equação característica* $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ *sejam números complexos (que, nesse caso, são conjugados, visto que os coeficientes da equação característica são números reais). Todas as soluções são, como vimos, da forma* $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$*. Escrevendo* $\lambda_1$ *e* $\lambda_2$ *na forma trigonométrica, segue que:*

$$\lambda_1 = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),\ \text{e}\ \lambda_2 = \rho(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

*Nesse caso,*

$$\lambda_1^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)),\ \text{e}\ \lambda_2 = \rho^n(\cos(n\theta) - i\,\mathrm{sen}(n\theta)).$$

*Portanto,*

$$\begin{aligned} a_n =& C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \\ =& C_1\rho^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)) + C_2\rho^n(\cos(n\theta) - i\,\mathrm{sen}(n\theta)) \\ =& \rho^n\left[(C_1 + C_2)\cos(n\theta) + i(C_1 - C_2)\,\mathrm{sen}(n\theta)\right] \\ =& \rho^n\left[C_1'\cos(n\theta) + C_2'\,\mathrm{sen}(n\theta)\right] \end{aligned}$$

*onde $C_1' = C_1 + C_2$ e $C_2' = i(C_1 - C_2)$ são constantes. Nessas condições a solução geral da recorrência é dada por*

$$a_n = \rho^n\left[C_1'\cos(n\theta) + C_2'\,\mathrm{sen}(n\theta)\right].$$

**Exemplo 2.4.5.** *Resolva a recorrência $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$.*

**Solução:** Nesse caso a equação característica é $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ cujas raízes são

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \lambda_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esses dois números complexos têm o mesmo módulo $\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$. Os seus argumentos (principais) são $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. (podemos tomar qualquer um desses dois valores!). Nesse caso a solução geral da recorrência é

$$\begin{aligned} a_n =& \rho^n\left[C_1\cos(n\theta) + C_2\,\mathrm{sen}(n\theta)\right] \\ =& 1^n\left[C_1\cos(n\frac{\pi}{3}) + C_2\,\mathrm{sen}(n\frac{\pi}{3})\right] \\ =& C_1\cos\frac{n\pi}{3} + C_2\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{3}. \end{aligned}$$

Note que não faria diferença se tomássemos $\theta = -\frac{\pi}{3}$, pois teríamos

$$\begin{aligned} a_n =& 1^n\left[C_1'\cos(-n\frac{\pi}{3}) + C_2\,\mathrm{sen}(-n\frac{\pi}{3})\right] \\ =& C_1\cos(n\frac{\pi}{3}) + (-C_2)\,\mathrm{sen}(n\frac{\pi}{3}) \\ =& C_1\cos\frac{n\pi}{3} + C_2'\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{3} \end{aligned}$$

mudaria apenas o valor da constante $C_2$, mas o conjunto de valores descritos por essa nova fórmula seria igual ao conjunto dos valores descritos pela primeira fórmula.

Por fim, vamos tratar o caso em que as raízes da equação característica da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, com $p$ e $q$ reais não nulos, possui apenas uma raiz real (raiz dupla), isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

**Teorema 4.** *Se a equação característica da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, com $p$ e $q$ são números reais não nulos, possui apenas uma raiz real $\lambda$, então $a_n = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n$, com $C_1$ e $C_2$ constantes reais é solução da dessa recorrência.*

**Demonstração:** De fato, a equação característica da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ é $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Ora, se essa equação tem apenas uma raiz real, seque que essa raiz é $\lambda = -\frac{p}{2}$. Nesse caso, substituindo $a_n = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n$ na recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, obtem-se:

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n =& C_1\lambda^{n+2} + C_2 n\lambda^{n+2} + p(C_1\lambda^{n+1} + C_2 n\lambda^{n+1}) \\ &+ q(C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n) \\ =& C_1\lambda_n(\underbrace{\lambda^2 + p\lambda + q}_{=0}) + C_2 n\lambda_n(\underbrace{\lambda^2 + p\lambda + q}_{=0}) + C_2\lambda^n\lambda(\underbrace{2\lambda + p}_{=0}) \\ =& 0 \end{aligned}$$

Mas será que todas as soluções dessa recorrência são desse tipo? O teorema a seguir revela que sim!

**Teorema 5.** *Se a equação característica da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, com $p$ e $q$ reais não nulos, possui apenas uma raiz real $\lambda$, então todas as soluções dessa recorrância são da forma $a_n = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n$, com $C_1$ e $C_2$ constantes reais.*

**Demonstração:** Com efeito, se $y_n$ é uma solução qualquer da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ e $\lambda$ é a única solução da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, o sistema

$$\begin{cases} C_1\lambda^1 + C_2\lambda^1 = y_1 \\ C_1\lambda^2 + C_2 2\lambda^2 = y_2 \end{cases}$$

possui solução única, a saber $C_1 = 2\frac{y_1}{\lambda} - \frac{y_2}{\lambda^2}$ e $C_2 = \frac{y_2 - ry_1}{\lambda^2}$ (note que $\lambda \neq 0$ pois $q \neq 0$, visto que a recorrência é de segunda ordem). Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $z_n = y_n - C_1\lambda^n - C_2 n\lambda^n$. Vamos mostrar que $z_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Adicionando membro a membro as igualdades a seguir

$$\begin{cases} z_{n+2} = y_{n+2} - C_1\lambda^{n+2} - C_2(n+2)\lambda^{n+2} \\ pz_{n+1} = py_{n+1} - pC_1\lambda^{n+1} - C_2(n+1)p\lambda^{n+1} \\ qz_n = qy_n - qC_1\lambda^n - qC_2 n\lambda^n \end{cases}$$

segue-se que

$$\begin{aligned} z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n =& (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - C_1\lambda^n(\lambda^2 + p\lambda + q) + \\ & - C_2 n\lambda^n(\lambda^2 + p\lambda + q) - C_2\lambda^{n+1}(2\lambda + p). \end{aligned}$$

Perceba que $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, pois cada uma das quatro parcelas é nula, de fato: desde que $y_n$ é uma solução da recorrência $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, tem-se que $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$; as parcelas $C_1\lambda^n(\lambda^2 + p\lambda + q)$ e $C_2 n\lambda^n(\lambda^2 + p\lambda + q)$ também são nulas, pois $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, dado que estamos supondo que $\lambda$ é a única raiz da equação característica $r^2 + pr + q = 0$; e a última parcela também é nula, pois $2\lambda + p = 0$.

Por fim,

$$C_1\lambda^1 + C_2\lambda^1 = y_1 \Rightarrow z_1 = y_1 - (C_1\lambda + C_2\lambda) = 0$$

$$C_1\lambda^2 + 2C_2\lambda^2 = y_2 \Rightarrow z_2 = y_2 - (C_1\lambda^2 + 2C_2\lambda^2) = 0$$

Ora, se $z_1 = z_2 = 0$ e $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $z_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ou seja, $y_n - C_1\lambda^n - C_2 n\lambda^n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, o que equivale a dizer que:

$$y_n = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neste ponto vamos utilizar a teoria das recorrências lineares de $2^a$ ordem para tal fim.

**Exemplo 2.4.6.** *Usando a teoria das recorrências lineares de segunda ordem, deduza a famosa* Fórmula de Binet *para o $n$-ésimo termo da sequência de Fibonacci, isto é,* *se $(f_n)_{n\geq 0}$ é definida por*

$$f_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ se } n \geq 2 \end{cases},$$

*então:*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

**Solução:** A equação característica é dada por $r^2 = r + 1$, ou seja, $r^2 - r - 1 = 0$ desse modo, suas raízes serão:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

De acordo com a teoria vista anteriormente temos que:

$$\begin{aligned} f_n =& C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \\ =& C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Para determinar as constantes $C_1$ e $C_2$, vamos usar o fato de que $f_0 = 0$ e $f_1 = 1$ obtendo assim o sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, encontramos $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Agora vamos resolver o Exemplo (2.3.1) que citamos no início deste capítulo.

**Exemplo 2.4.7.** *Quantas são as sequências de $n$ termos, todos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a $0$?*

**Solução:** Seja $x_n$ a quantidade de sequências de $n$ termos, todos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a $0$. Note que $x_1 = 3$, pois com apenas um termo qualquer sequência não terá dois termos consecutivos iguais a $0$, visto que com um termo só temos três opções, a saber: $(0), (1)$ ou $(2)$, que são sequências com apenas um termo e em nenhuma delas há dois termos consecutivos iguais a $0$. No caso em que $n = 2$, isto é sequências com dois termos, temos as seguintes possibilidades para que a sequência não possua dois termos consecutivos iguais a $0$:

$$(0, 1); (0, 2); (1, 0), (1, 1); (1, 2); (2, 0); (2, 1) \text{ e } (2, 2),$$

o que revela que $x_2 = 8$. Agora consideremos uma sequência com $n \geq 3$ termos. Temos duas possibilidades, a saber:

- O primeiro termo da sequência é igual a $0$. Nesse caso, o segundo termo da sequência não pode ser igual a $0$ (já que estamos interessados nas sequências em que não há dois 0's consecutivos. Dessa forma existem duas possibilidades para o segundo termo da sequência (pode ser igual a $1$ ou $2$). Uma vez colocado o segundo termo da sequência ainda existem $n - 2$ termos a serem colocados, que ainda devem respeitar a condição de não apresentarem dois 0'sconsecutivos, mas isso pode ser feito de $x_{n-2}$ modos distintos. Pelo princípio fundamental da contagem, existem $2.x_{n-2}$ sequências desse tipo.

- O primeiro termo da sequência não é igual a $0$. Nesse caso, existem $2$ possibilidades para o primeiro termo (pode ser igual a $1$ ou $2$). Uma vez preenchido o primeir termo, ainda precisamos preencher os $n-1$ termos restantes da sequência, o que pode ser feito de de $x_{n-1}$ modos distintos. Pelo princípio fundamental da contagem, existem $2.x_{n-1}$ sequências desse tipo.

Diante do exposto, tem-se que $x_1 = 3, x_2 = 8$ e $x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}$ para $n \geq 3$. Ora, como essa lei de recorrência é linear de segunda ordem, podemos utilizar a teoria apresentada neste capítulo para exibir uma solução explícita para ela. Com efeito, neste caso, a equação característica da equação de recorrência linear de segunda ordem $x_n - 2x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$ é $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$, cujas raízes são:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3} \ \text{ e } \ \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}.$$

Então, pelo Teorema (3), segue que existem constantes $C_1$ e $C_2$ tais que

$$\begin{aligned} x_n =& C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \\ =& C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n \end{aligned}$$

Por fim, como $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$, segue que

$$\begin{cases} C_1(1+\sqrt{3})^1 + C_2(1-\sqrt{3})^1 = 3 \\ C_1(1+\sqrt{3})^2 + C_2(1-\sqrt{3})^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6} \\ C_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Portanto, para todo $n \geq 3$, tem-se que:

$$\begin{aligned} x_n =& C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n \\ =& \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\left(1-\sqrt{3}\right)^n. \end{aligned}$$

Para finalizar este capítulo e a teoria básica das recorrências lineares de segunda ordem apresentaremos o teorema a seguir, segundo o qual a solução geral de uma recorrência linear de segunda ordem não homogênea é a soma de uma solução particular com a solução geral da recorrência homogênea associada a ela.

**Teorema 6.** *Se $a_n$ é uma solução particular da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então a sua solução geral é dada por $x_n = a_n + y_n$, onde $y_n$ é a solução geral da recorrência homogênea associada, isto é, $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$.*

**Demonstração:** Incialmente vamos mostrar que de fato, $x_n = a_n + y_n$ é uma solução. Vejamos:

$$\begin{aligned} x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n =& (a_{n+2} + y_{n+2}) + p(a_{n+1} + y_{n+1}) + q(a_n + y_n) \\ =& \underbrace{a_{n+2} + pa_{n+1} + ax_n}_{=f(n)} + \underbrace{y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n}_{=0} \\ =& f(n). \end{aligned}$$

Agora vamos demonstrar que toda solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$ é da forma $x_n = a_n + y_n$, onde $a_n$ é uma solução particular da mesma recorrência e $y_n$ é uma solução da recorrência homogênea associada. De fato, se $x_n$ é a solução geral e $a_n$ é uma solução particular da recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = f(n)$,vamos mostrar que $y_n = x_n - a_n$ é uma solução da recorrência homogênea associada.

$$\begin{aligned}(x_{n+2}-a_{n+2})+p(x_{n+1}-a_{n+1})+q(x_n-a_n) =& \underbrace{(x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n)}_{=f(n)}\\ &-\underbrace{(a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n)}_{=f(n)}\\ =&f(n)-f(n)\\ =&0.\end{aligned}$$

Portanto, $y_n = x_n - a_n$ é solução da equação geral da recorrência homogênea $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = 0$. Então

$$y_n = x_n - a_n \Rightarrow x_n = a_n + y_n$$

é a solução geral da recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = f(n)$.

**Exemplo 2.4.8.** *Resolva a recorrência $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n^2$, com as condições iniciais $x_1 = 28$ e $x_2 = 34$.*

**Solução:** A recorrência homogêna associada é $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0$ cuja equação característica é $r^2 - 5r + 6 = 0$ que tem como raízes os números reais $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Diante do exposto, a solução geral da equação homogêna é $y_n = C_1.2^n+C_2.3^n$. Pelo teorema anterior, sabemos que a solução geral da recorrência $x_n-5x_{n-1}+6x_{n-2} = 2n^2$ é da forma $x_n = a_n+y_n$, onde $a_n$ é uma solução particular dessa recorrência e $y_n$ é a solução geral da recorrência homogênea que já encontramos. Para determinar uma solução particular da recorrência $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n^2$, podemos raciocinar da seguinte forma: ora, como no segundo membro aparece o polinômio do segundo grau $f(n) = 2n^2$, podemos procurar uma solução particular do mesmo tipo, isto é, $a_n = An^2 + Bn + C$. Sendo $a_n$ uma solução particular da recorrência $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 2n^2$, segue que:

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2n^2$$

$$\Rightarrow (An^2+Bn+C)-5(A(n-1)^2+B(n-1)+C)+6(A(n-2)^2+B(n-2)+C) = 2n^2$$

$$\Rightarrow 2An^2+(-14A+2B)n+(19A-7B+2C) = 2n^2 \Rightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ -14A+2B = 0 \\ 19A-7B+2C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 1, B = 7, C = 15 \Rightarrow a_n = n^2 + 7n + 15.$$

Por fim,

$$x_n = y_n + a_n \Rightarrow x_n = C_1.2^n + C_2.3^n + n^2 + 7n + 15.$$

Mas ocorre que

$$x_1 = 28 \text{ e } x_2 = 34 \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 + 3C_2 + 23 = 28 \\ 4C_1 + 9C_2 + 33 = 34 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 7 \text{ e } C_2 = -3.$$

então a solução geral da recorrência é $x_n = 7.2^n - 3.3^n + n^2 + 7n + 15$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Devido o nosso caráter introdutório e interesse em oferecer um texto acessível para um primeiro contato com o assunto ao nível médio, focamos principalmente nas recorrências lineares de primeira e segunda ordens. A teoria disponível é muito mais vasta não apenas a extensão natural dos resultados que apresentamos aqui para o caso linear de ordens mais altas, mas também o uso de outras técnicas e ferramentas para os casos não lineares. O assunto é riquíssimo em teoria e aplicações. Para um maior aprofundamento sugerimos os excelentes textos [6] e [12].

# Capítulo 3

# Aplicações

Nesse capítulo final vamos exibir uma coletânea de problemas envolvendo quatro temas da Matemática, a saber: Combinatória, Probabilidade, Teoria dos Números e Matemática Financeira. A intenção aqui é mostrar apenas a "ponta do iceberg"do alcance e do porder do raciocínio recursivo. Alguns deles são problemas cujas soluções sem o uso do raciocínio recursivo podem ser bastante difíceis.

## 3.1 Combinatória

**Exemplo 3.1.1.** *Seja $Q_n$ a quantidade de subconjuntos de um conjunto finito com $n$ elementos. Mostre que $Q_n = 2.Q_{n-1}$, conclua a partir daí que um conjunto finito com $n$ elementos possui $2^n$ subconjuntos.*

**Solução:** Sejam $A_n = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ e $Q_n$ = quantidade de subconjuntos de $A$. Assim, $A_{n-1} = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}$ possui $Q_{n-1}$ subconjuntos, a saber:

$$X_1, X_2, \cdots, X_{Q_{n-1}}.$$

Ora, como $A_n = A_{n-1} \cup \{a_n\}$ $segue,$ $\mathrm{A}_{n-1} \subset A_n$ e que $X_1, X_2, \cdots, X_{Q_{n-1}}$ são subconjuntos de $A_n$. Note que os demais subconjuntos de $A_n$ são aqueles que tem $a_n$ como elemento.

Esses subconjuntos podem ser obtidos de $X_1, X_2, \cdots, X_{Q_{n-1}}$ fazendo um a um união com o conjunto $\{a_n\}$, ou seja, os conjuntos de $A_n$ que não são subconjuntos $A_{n-1}$ são os $Q_{n-1}$ conjuntos:

$$X_1 \cup \{a_n\}, X_2 \cup \{a_n\}, \cdots, X_{Qn-1} \cup \{a_n\}.$$

Diante do exposto, a quantidade $Q_n$ de subconjuntos de $A_n$ é dada por:

$$Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} = 2Q_{n-1}.$$

Assim:

$$\begin{cases} Q_2 = 2Q_1 \\ Q_3 = 2Q_2 \\ \vdots \\ Q_n = 2Q_{n-1} \end{cases}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades acima, segue que:
$Q_2 \,.\, Q_3. \cdots .\, Q_{n-1} \,.\, Q_n = 2^{n-1}.\, Q_1 \,.\, Q_2. \cdots .\, Q_n \Rightarrow Q_n = 2^{n-1}.\, Q_1$
Mas, $Q_1 = 2$, visto que o conjunto $A_1 = \{a_1\}$ possui dois subconjuntos, a saber, $\emptyset$ e $\{a_1\}$. Ora, como $Q_n = 2^{n-1}.\, Q_1$ e $Q_1 = 2$ tem-se que:

$$Q_n = 2^{n-1}.\, Q_1 = 2^{n-1}.\, 2 = 2^n, \forall\, n \geq 0.$$

**Exemplo 3.1.2.** *De quantas formas distintas $n$ pessoas que estão sentadas em $n$ cadeiras numa fileira de um teatro podem regressar para a mesma fileira após o intervalo do espetáculo, respeitando-se a condição de que cada pessoa sente-se na mesma cadeira que estava antes ou numa cadeira que seja vizinha à cadeira que estava antes.*

**Solução:** Seja $a_n$ o número de maneiras distintas de $n$ pessoas que estão sentadas em $n$ cadeiras numa fileira de um teatro regressarem para a mesma fileira após o intervalo do espetáculo, respeitando-se a condição de que cada pessoa sente-se na mesma cadeira que estava antes ou numa cadeira que seja vizinha à cadeira que estava antes.

Note que $a_1 = 1$, pois havendo apenas uma pessoa e uma cadeira, a pessoa necessariamente regressaria para a sua cadeira de origem, já que a cadeira é, neste caso, única. Além disso, $a_2 = 2$, visto que no caso de duas pessoas e duas cadeiras há 2 situações possíveis: a primeira é que cada uma das duas pessoas regressem ao seu lugar de origem; a outra é que essas duas pessoas troquem de lugar entre si. Consideremos então a situação em que temos $n+2$ pessoas e $n+2$ cadeiras. Podemos particionar as possíveis configurações em dois tipos, a saber:

- As configurações em que a pessoa 1 regressa para a sua cadeira original. Nesse caso ainda teremos que arrumar $n+1$ pessoas satisfazendo as condições impostas pelo enunciado, o que pode ser feito de $a_{n+1}$ modos distintos.

- As configurações em que a pessoa 1 não regressa ao seu lugar. Nesse caso, a pessoa 1 necessariamente terá que sentar na cadeira que era originalmente da pessoa 2 (pois essa é a única cadeira vizinha da cadeira que era originalmente ocupara pela pessoa 1). Já a pessoa 2 também necessariamente terá que ocupar a cadeira que era originalmente ocupada pela pessoa 1, pois nenhuma das demais pessoas têm a cadeira originalmente ocupada pela pessoa 1 como cadeira vizinha. Diante do exposto, segue que as pessoas 1 e 2 trocaram de lugar, restando ainda $n$ cadeiras para serem ocupadas por $n$ pessoas, que respeitando as condições impostas pelo enunciado, o que pode ser feito de $a_n$ maneiras distintas.

Diante do exposto o número total de configurações distintas que respeitam as condições impostas pelo enunciado é $a_{n+1} + a_n$. Portanto, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, para todo inteiro $n \geq 1$. Ora, como $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$, segue que $a_n = f_{n+1}$, ou seja, o $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci).

$$a_n = f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

**Exemplo 3.1.3.** *Em um jogo, em cada etapa João pode fazer* 1 *ou* 2 *pontos. De quantos modos ele pode totalizar* $n$ *pontos?*

**Solução:** Seja $a_n$ a quantidade de modos distintos de João fazer $n$ pontos. Ora, como em cada etapa João faz 1 ou 2 pontos segue que:

- $a_1 = 1$

- $a_2 = 2$ (pode ser $1 + 1$ ou simplesmente 2).

Para que João obtenha $n+2$ pontos existem 2 possibilidades, a saber:

1. Marcar 1 ponto na primeira etapa e $n+1$ pontos nas etapas seguintes, o que pode ser feito de $a_{n+1}$ modos distintos;

2. Marcar 2 pontos na primeira etapa e $n$ pontos nas etapas seguintes, o que pode ser feito de $a_n$ modos distintos.

Diante do exposto segue que,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \;\Rightarrow\; a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0.$$

A equação característica associada a essa recorrência é $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$ cujas raízes são

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, a aquação geral da recorrência é:

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \;=\; C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Usando o fato que $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$ podemos determinar $C_1 = -\,C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Então,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

ou seja, $a_n = f_n$ ($n$-ésimo número de Fibonacci).

## 3.2 Probabilidade

**Exemplo 3.2.1.** *A cada ano $\frac{1}{3}$ dos habitantes de uma cidade $A$ mudam-se para uma cidade $B$ e os $\frac{2}{3}$ restantes permanecem em $A$. Por outro lado, a cada ano $\frac{1}{4}$ dos habitantes da cidade $B$ mudam-se para a cidade $A$ e os $\frac{3}{4}$ restantes permanecem na cidade $B$. Considere que o fato de um habitante ter se mudado de uma cidade para outra num determinado ano não influência em nada a sua mudança ou permanência numa dada cidade no ano seguinte. Inicialmente Marina mora na cidade $A$. Seja $P_n$*

*a probabilidade de que após $n$ anos Marina esteja morando na cidade $A$. (Note que ela pode ter permanecido em $A$ ao longo dos anos ou pode ter mudado de cidade várias vezes ao longo dos $n$ anos). Mostre que* $\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{3}{7}$.

**Solução:** Seja o evento $A_n :=$\{Marina mora na cidade $A$ após $n$ mudanças\} com $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) \quad &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) + \mathbb{P}(A_n^c)\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n^c) \\ &= p_n \cdot \tfrac{2}{3} + (1-p_n)\cdot \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Assim,

$$p_{n+1} = \frac{5}{12}p_n + \frac{1}{4}.$$

Seja $c$ tal que

$$p_{n+1} - c = \frac{5}{12}(p_n - c), \text{ em que } a_n := p_n - c.$$

Segue-se que

$$\frac{5}{12}p_n + \frac{1}{4} - c = \frac{5}{12}(p_n - c) \Rightarrow c = \frac{3}{7}.$$

Assim, com $p_1 = \frac{2}{3}$ tem-se $a_1 = p_1 - \frac{3}{7} = \frac{2}{3} - \frac{3}{7} = \frac{5}{21}$ e

$$a_n = \frac{5}{21}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \Rightarrow p_n = \frac{3}{7} + \frac{5}{21}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{7}.$$

**Exemplo 3.2.2.** *Considere duas moedas $A$ e $B$ tais que na moeda $A$ a probabilidade de sair CARA é $\frac{1}{4}$, enquanto que na meda $B$ a probabilidade de sair CARA é $\frac{1}{2}$. Escolhe-se uma dessas moedas ao caso e a arremessa. Se sair CARA essa mesma moeda será arremessada novamente, caso contrário será arremessada a outra moeda. Para cada inteiro positivo $n$, seja $p_n$ a probabilidade de que a moeda lançada no $n$-ésimo arremesso seja a moeda $A$.*

*(a)Mostre que* $p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n$.

*(b)A partir do item anterior, mostre que* $p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

*(c)Calcule* $\lim_{n\to\infty} p_n$.

*(d)Determine a probabilidade de obtermos uma CARA no $n$-ésimo lançamento.*

**Solução:** (a) Seja o evento $A_n$ :={A moeda lançada no arremesso $n$ seja "A"}. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n) + \mathbb{P}(A_n^c)\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n^c) \\ &= p_n \cdot \tfrac{1}{4} + (1 - p_n) \cdot \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n.$$

(b) Seja $c$ tal que

$$p_{n+1} - c = -\frac{1}{4}(p_n - c) \text{ com } a_n = p_n - c.$$

segue-se

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}p_n - c = -\frac{1}{4}(p_n - c) \Rightarrow c = \frac{2}{5}.$$

para $n = 1$ que $a_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

Assim,

$$a_n = a_1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$p_n - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

(c) Ora, como $p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, segue que

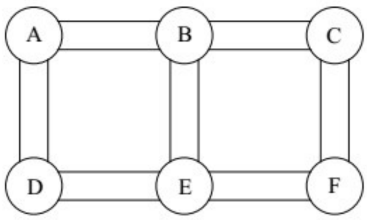
$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] = \frac{2}{5}.$$

(d) Seja $\mathbb{P}$ a probabilidade pedida do evento $E$ :={cara no n-ésimo lançamento}. Condicionando o evento de interessente na moeda escolhida, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_n &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(E|A_n) + \mathbb{P}(A_n^c)\mathbb{P}(E|A_n^c) \\ &= p_n \cdot \tfrac{1}{4} + (1 - p_n) \cdot \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

O que revela que $\mathbb{P} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

**Exemplo 3.2.3.** *(OBMU) Um rato, que ocupa inicialmente uma sala $A$, está treinado para que toda vez que um alarme toque ele mude de sala. Toda vez que ele ouve o som de alarme ele escolhe (com igual probabilidade) um dos túneis partindo da sala em que ele se encontra e vai para uma outra sala que se encontra na outra extremidade do túnel escolhido. Após o alarme ter soado $23$ vezes, qual a probabilidade de que o rato encontre-se na sala $B$?*




**Solução:** Seja o evento $M_n$ o rato está nos sítios $B$ ou $E$ após $n$ sinais dado que partiu do sítio $A$, com $p_n = \mathbb{P}(M_n)$. Pelo teorema da probabilidade total tem-se que

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \mathbb{P}(M_{n+1}) &= \mathbb{P}(M_n)\mathbb{P}(M_{n+1}|M_n) + \mathbb{P}(M_n^c)\mathbb{P}(M_{n+1}|M_n^c) \\ &= p_n \cdot \tfrac{1}{3} + (1 - p_n) \cdot \left(\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$p_{n+1} = -\frac{1}{6} \cdot p_n + \frac{1}{2}$$

Determinemos uma constante $c$ tal que possamos escrever a recorrência como uma Progressão Geométrica. Isto é,

$$p_{n+1} - c = -\frac{1}{6}\left(p_n - c\right), \text{ com } a_n := p_n - c \text{ e } p_1 = \frac{1}{2}.$$

resulta que

$$-\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}c + c = -\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{7}.$$

resulta que

$$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{1}{14},\ a_{23} = \frac{1}{14} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{22} \text{ e } p_{23} = a_{23} + \frac{3}{7} = \frac{1}{14} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{22} + \frac{3}{7}.$$

Note que nos instantes ímpares o rato não pode estar no sítio ”E”e a probabilidade pedida é

$$p_{23} = \frac{1}{14} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{22} + \frac{3}{7}.$$

**Exemplo 3.2.4.** *[17] Numa confraternização entre os $n$ funcionários de uma empresa, cada um deles leva um brinde para ser sorteado e cada um dos participantes recebe um único brinde no sorteio.*

$(a)$ *Qual a probabilidade de que ao serem aleatoriamente escolhidos os brindes, nenhum participante selecione o próprio brinde?*

$(b)$ *Qual a probabilidade de que todos recebam brindes de pessoas diferentes, dado que João e Pedro se recusam a receber presentes um do outro?*

**Solução:**

$(a)$ Consideremos as pessoas numeradas de $1$ a $n$, com o $i$-ésimo brinde pertencente a pessoa com número $i$. Seja $E$ o evento que nenhum dos participantes sorteie o seu próprio brinde. Calcularemos a probabilidade de $E$ condicionando na escolha de um participante qualquer, o de número 1 por exemplo, escolher ou não o seu próprio brinde. Seja $M$ o evento de que o participante de número 1 escolha o brinde de número 1, ademais consideremos para todo $i$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$ a notação $f(i) = j$ se o participante $i$ escolheu o brinde $j$. Temos:

$$E = E \cap (M \cup M^c) = (E \cap M) \cup (E \cap M^c).$$

Como os eventos $E \cap M$ e $E \cap M^c$ são disjuntos, segue-se que

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap M) + \mathbb{P}(E \cap M^c) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(E|M) + \mathbb{P}(M^c)\mathbb{P}(E|M^c). \tag{3.1}$$

Acontece que $E \cap M = \emptyset$, portanto da Equação (3.1), com $p_n := \mathbb{P}(E)$, segue-se que:

$$p_n = \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(M^c)\mathbb{P}(E|M^c). \tag{3.2}$$

Note que $M^c$ corresponde ao evento de que o participante $1$ não escolhe o brinde de número $1$, $f(1) \neq 1$, cuja probabilidade é

$$\mathbb{P}(M^c) = \mathbb{P}(f(1) \neq 1) = 1 - \mathbb{P}(f(1) = 1) = 1 - \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{n-1}{n}. \tag{3.3}$$

Calculemos $\mathbb{P}(E|M^c) = \mathbb{P}(E|f(1) \neq 1)$, isto é, a probabilidade que nenhum participante sorteie o seu próprio brinde dado que o participante $1$ sorteou um brinde diferente do seu. Consideremos então, sem perda de generalidade, que o participante $1$ escolheu o brinde $2$, $f(1) = 2$. Ou seja, temos agora os participantes $2, 3, ..., n-1, n$ e os presentes $1, 3, ..., n-1, n$. Há duas possibilidades, mutuamente exclusivas, de troca de brindes na qual nenhum dos participantes recebe o seu próprio brinde, ei-las: i) o participante $2$ sorteia o brinde $1$, $f(2) = 1$, ou ii) o participante $2$ sorteia um brinde diferente do brinde $1$, $f(2) \neq 1$:

i) O participante $2$ escolhe o brinde $1$, $f(2) = 1$, dado que $f(1) = 2$. Como já havíamos suposto que o participante $1$ escolheu o presente $2$, $f(1) = 2$, resta aos demais $n-2$ participantes $(3, ..., n)$ escolherem $n-2$ presentes diferentes $(3, ..., n)$. Segue-se que $\mathbb{P}(f(2) = 1|f(1) = 2) = \dfrac{1}{n-1}$ e $\mathbb{P}(f(i) \neq i|f(1) = 2, f(2) = 1) = p_{n-2}$ para todo $i \in \{3, 4, ..., n\}$. Assim, usando a relação $\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(A|B \cap C)$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(f(2)=1, f(i)\neq i|f(1)=2) &= \mathbb{P}(f(2)=1|f(1)=2)\cdot\\ &\quad \mathbb{P}(f(i)\neq i|f(2)=1, f(1)=2)\\ &= \frac{1}{n-1}\cdot p_{n-2}.\end{aligned}$$

ii) O participante 2 não escolhe o brinde 1, $f(2)\neq 1$, dado que $f(1)=2$. Como já havíamos suposto que o participante 1 escolheu o brinde 2, a fim de que nenhum participante (2,3,...n) escolha o brinde que comprou (1,3,...,n), devemos considerar o conjunto das funções bijetoras $f:\{2,3,...,n\}\rightarrow\{1,3,...,n\}$ tal que $f(2)\in\{3,4,...,n\}$ e para todo $i\geq 3$ $f(i)\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i,2\}$, ou seja, permutar caoticamente $n-1$ elementos, cuja probabilidade de termos tal configuração entre $n-1$ elementos é $p_{n-1}$.

$$\mathbb{P}(f(2)\neq 1, f(i)\neq i|f(1)=2)=p_{n-1}.$$

De (3.2) e (3.2) segue-se que

$$\mathbb{P}(E|M^c)=\frac{1}{n-1}\cdot p_{n-2}+p_{n-1}.$$

De (3.3) e (3.2) em (3.2) obtemos

$$\begin{aligned}p_n=\frac{n-1}{n}\left[\frac{1}{n-1}\cdot p_{n-2}+p_{n-1}\right] &= \frac{n-1}{n}p_{n-1}+\frac{1}{n}p_{n-2}\\ \Leftrightarrow p_n-p_{n-1} &= -\frac{1}{n}(p_{n-1}-p_{n-2}).\end{aligned}$$

De (3.2) para $n=3,4,\ldots$ e como $p_1=0$ e $p_2=\frac{1}{2}$, tem-se que

$$p_3 - p_2 = -\frac{p_2 - p_1}{3} = -\frac{1}{3}(p_2 - p_1) = -\frac{1}{3}\frac{1}{2} = -\frac{1}{3!} \Rightarrow p_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$
$$p_4 - p_3 = -\frac{p_3 - p_2}{4} = -\frac{1}{4}(p_3 - p_2) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{4!} \Rightarrow p_4 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

$$\vdots$$

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

$(b)$ Sejam os eventos: A:= todos recebem brindes de pessoas diferentes com João e Pedro não trocando presentes entre si, F:= todos os participantes trocam presentes entre si e nenhum escolhe o próprio presente, B:= todos recebem brindes de pessoas diferentes com Pedro recebendo brinde de João e o João não recebe o brinde de Pedro, C:= todos recebem brindes de pessoas diferentes com João recebendo brinde de Pedro e o Pedro não recebe o brinde de João e D:= todos recebem brindes de pessoas diferentes com João recebendo o brinde de Pedro e o Pedro recebendo o brinde de João.

Os eventos $B$, $C$ e $D$ são subconjuntos próprios de $F$, logo $(B \cup C \cup D) \subset F$, ademais

$$A = F \setminus (B \cup C \cup D) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(B \cup C \cup D)$$

Desde que os eventos $B$, $C$ e $D$ são disjuntos, tem-se que

$$\mathbb{P}(B \cup C \cup D) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D)$$

Do resultado obtido no item a) e de (3.2) e (3.2) tem-se que

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(D) = p_n - p_{n-1} - p_{n-1} - p_{n-2}.$$

**Exemplo 3.2.5.** *[17] (*PROBLEMA DA RUÍNA DO JOGADOR*) Dois jogadores $A$ e $B$ apostam em cada um dos resultados do lançamento de uma moeda cuja probabilidade* *de resultar a face cara em um lançamento é $p$, independentemente do lançamento considerado. Se o jogador $A$ ganha $1$ real de $B$ se aparecer cara, e este ganha $1$ real de $A$ se aparecer coroa, qual a probabilidade de $A$ terminar o jogo com todo o dinheiro, se ele começou com $i$ reais e $B$ com $N-i$ reais?*

**Solução:** Seja o evento $E_i = \{$o jogador A terminar o jogo com todo o dinheiro dado que ele começou com $i$ reais$\}$ e $p_i = \mathbb{P}(E_i)$. Assuma que $p_0 = 0$ e $p_N = 1$. Calcularemos $p_i = \mathbb{P}(E_i)$ condicionando no resultado do primeiro lançamento, $C$ ou $K$, se tal resultado for cara ou coroa, respectivamente.

$$\begin{aligned} p_i = \mathbb{P}(E_i) &= \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(E_i|C) + \mathbb{P}(K)\mathbb{P}(E_i|K) \\ &= p \cdot \mathbb{P}(E_i|C) + (1-p) \cdot \mathbb{P}(E_i|K). \end{aligned}$$

Acontece que se a primeira aposta resultar em cara (ou coroa), o jogo seguirá nas mesmas condições iniciais com o jogador A com $i+1$ (ou $i-1$) reais. Assim, $\mathbb{P}(E_i|C) = p_{i+1}$ e $\mathbb{P}(E_i|K) = p_{i-1}$. Portanto de (3.2), com $q = 1-p$, segue-se que

$$p_i = p \cdot p_{i+1} + q \cdot p_{i-1}, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., N-1\}.$$

Desde que $p + q = 1$, podemos reescrever a equação acima como:

$$(p+q) \cdot p_i = p \cdot p_{i+1} + q \cdot p_{i-1} \Leftrightarrow (p_{i+1} - p_i)p = q(p_i - p_{i-1}), \text{ e portanto,}$$

$$p_{i+1} - p_i = \frac{q}{p}(p_i - p_{i-1}).$$

Da condição de que $p_0 = 0$ e de (3.2), segue-se que para todo $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= \frac{q}{p}(p_1 - p_0) = \frac{q}{p}p_1 \\ p_3 - p_2 &= \frac{q}{p}(p_2 - p_1) = \frac{q}{p}\frac{q}{p}p_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^2 p_1 \\ &\vdots \\ p_i - p_{i-1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1 \end{aligned}$$

Das equações (3.2) resulta que

$$p_i - p_1 = p_1 \left[ \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} \right] \Rightarrow$$
$$p_i = p_1 \left[ 1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} \right].$$

Segue-se então de (3.2) que

$$p_i = \begin{cases} p_1 \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{\frac{q}{p} - 1} & \text{se} \quad q \neq p, \\ \\ ip_1 & \text{se} \quad q = p. \end{cases} \tag{3.4}$$

Usando a condição de $p_N = 1$ em (3.4)

$$p_1 = \begin{cases} \dfrac{\frac{q}{p} - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} & \text{se} \quad q \neq p \\ \\ \frac{1}{N} & \text{se} \quad q = p \end{cases} \tag{3.5}$$

De (3.5) em (3.4) segue-se finalmente que

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} & \text{se,} \quad q \neq p \\ \\ \frac{i}{N}, & \text{se} \quad q = p. \end{cases}$$

**Exemplo 3.2.6.** *[17] Seja $P_n$ a probabilidade de que em $n$ ensaios de Bernoulli, ocorra um número par de sucessos. Prove que* $P_n = \dfrac{1 + (1-2p)^n}{2}$.

**Solução:**

Seja o evento $A := \{\text{ocorrer um número par de sucessos}\}$. Se $n$ é par, então

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \binom{n}{0}p^0q^n + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}p^nq^0 \\ \mathbb{P}(A^c) &= \binom{n}{1}p^1q^{n-1} + \binom{n}{3}p^3q^{n-3} + \ldots + \binom{n}{n-1}p^{n-1}q^1\end{aligned} \tag{3.6}$$

Pelo Teorema Binomial segue-se que:

$$\begin{aligned}(q-p)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-p)^kq^{n-k} \\ &= \tbinom{n}{0}p^0q^n - \tbinom{n}{1}p^1q^{n-1} + \ldots - \tbinom{n}{n-1}qp^{n-1} + \tbinom{n}{n}q^0p^n \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A^c) = 2\mathbb{P}(A) - 1.\end{aligned}$$

De (3.2) segue-se que

$$P_n = \mathbb{P}(A) = \frac{(q-p)^n + 1}{2} = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}.$$

O caso $n$ ímpar segue de maneira análoga.

**Solução 2:** Calculemos $P_n$ condicionando no resultado do primeiro lançamento, para tanto seja o evento $C_1 =\{$o primeiro lançamento resulta em cara$\}$. Se $C_1$ ocorre, então precisamos de um número ímpar de caras nos $(n-1)$ lançamentos seguintes, a probabilidade deste evento é $1 - P_{n-1}$. Por outro lado, se $C_1^c$ ocorrer, então será necessário que ocorra um número par de caras nos $(n-1)$ lançamentos seguintes, cuja probabilidade é $P_{n-1}$. Pelo Teorema da Probabilidade Total tem-se que

$$P_n = p\,(1 - P_{n-1}) + (1-p)\,P_{n-1} = (1-2p)P_{n-1} + p, \text{ com } P_0 = 1$$

Sejam $a = 1 - 2p$ e $b = p$, então de (3.2) segue-se que:

$$\begin{aligned}P_1 &= aP_0 + b = a + b. \\ P_2 &= aP_1 + b = a(a+b) + b = a^2 + b(a+1). \\ P_3 &= aP_2 + b = a(a^2 + ab + b) + b = a^3 + b(a^2 + a + 1). \\ &\vdots \\ P_n &= a^n + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1).\end{aligned}$$

De $P_n$ dado em (3.2) segue-se que

$$P_n = a^n + b\left(\frac{a^{n-1}a - 1}{a-1}\right) = (1-2p)^n + p\left(\frac{(1-2p)^n - 1}{-2p}\right) = \frac{1+(1-2p)^n}{2}.$$

**Exemplo 3.2.7.** *(*O PROBLEMA DA ELEIÇÃO*) [10] Considere uma eleição em que há $n+m$ votantes com os candidatos $C_1$ e $C_2$ recebendo $n$ e $m$ votos, respectivamente, em que $n > m$. Seja $p_{n,m}$ a probabilidade de que $C_1$ está sempre a frente de $C_2$ na contagem dos votos.*

**Solução:** (a) Calcule $p_{n,1}$.

O total de apurações possíveis corresponde as permutações dos $n+1$ votos, nos quais $n$ deles são para o candidato $C_1$ e 1 para $C_2$, havendo portanto $\binom{n+1}{n}$. Para o candidato $C_1$ estar sempre em vantagem, os dois primeiros votos devem ser necessariamente para ele. Dado que $C_2$ obteve apenas 1 voto e os dois primeiros votos sendo de $C_1$, quaisquer uma das $\binom{n-2+1}{n-2}$ permutações dos $n-2$ votos restantes de $C_1$ e 1 voto de $C_2$ deixará o candidato $C_1$ sempre em vantagem. Assim,

$$p_{n,1} = \frac{\binom{n-2+1}{n-2}}{\binom{n+1}{n}} = \frac{\binom{n-2+1}{1}}{\binom{n+1}{1}} = \frac{n-1}{n+1}.$$

(b) Calcule $p_{n,2}$

$C_1$ permanecerá sempre em vantagem tendo $C_2$ obtido 2 votos se, e somente se, os dois primeiros votos são para $C_1$ e pelo menos um dos dois próximos votos também seja de $C_1$. Sejam $A$= {os dois primeiros votos são de $C_1$} e $B$= {$C_1$ tem ao menos um voto no terceiro de quatro votos apurados}. Assim,

$$p_{n,2} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A)\left(1 - \mathbb{P}(B^c|A)\right).$$

Os dois primeiros votos são para $C_1$ se, e somente se, dos $n$ votantes seguintes, $n-2$ votam em $C_1$ e outros dois em $C_2$. O evento $B^c|A$ ocorre se, e somente se, o terceiro e quarto votos são para $C_2$ e os demais $n-2$ votos são para $C_1$, dado que os dois primeiros votos são de $C_1$. Logo,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{n}{n-2}}{\binom{n+2}{n}} = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+2}{2}} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} \text{ e}$$
$$\mathbb{P}(B^c|A) = \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

De (3.2) em (3.2) segue-se que

$$\begin{aligned} p_{n,2} &= \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) = \frac{n^2-n-2}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{(n-2)(n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n-2}{n+2}. \end{aligned}$$

(c) Expresse $p_{n,m}$ em função de $p_{n-1,m}$ e $p_{n,m-1}$.
Seja $p_{n,m} = \mathbb{P}(F)$, em que $F$ $=\{C_1$ está sempre à frente de $C_2$ na contagem dos votos$\}$. Calcularemos $\mathbb{P}(F)$ pelo Teorema da Probabilidade Total a partir do condicionamento no evento $U := \{$ o último voto é para o candidato $C_1$ $\}$.

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(F|U) + \mathbb{P}(U^c)\mathbb{P}(F|U^c).$$

O total de possíveis apurações é $\binom{n+m}{m}$, sendo que o total delas em que o último voto é para o candidato $C_1$ é $\binom{n-1+m}{n-1} = \binom{n-1+m}{m}$, pois basta permutarmos $n-1+m$ elementos em que $n-1$ são de um tipo, votos do candidato $C_1$, e $m$ de um outro tipo, votos de $C_2$. Assim,

$$\mathbb{P}(U) = \frac{\binom{n-1+m}{m}}{\binom{n+m}{m}} = \frac{n}{n+m} \qquad \mathbb{P}(F|U) = p_{n-1,m}$$
$$\mathbb{P}(F|U^c) = p_{n,m-1}.$$

De (3.2) em (3.2) com $\mathbb{P}(U^c) = 1 - \mathbb{P}(U)$, segue-se que

$$p_{n,m} = \frac{n}{n+m}p_{n-1,m} + \frac{m}{n+m}p_{n,m-1}.$$

(d) Determine $p_{n,m}$.

Por indução em $n+m$ a partir da recorrência dada em (3.2).

Dos itens a) e b) conjecturamos que para todo $j$ e $k \in \mathbb{N}$ com $j > k$

$$p_{j,k} = \frac{j-k}{j+k} \tag{3.7}$$

Se $j = 1$ e $k = 0$, então $p_{1,0} = 1 = \dfrac{1-0}{1+0}$ e verificamos (3.7) para $j + k = 1$.

Admitamos como hipótese de indução que (3.7) é válido $j + k = m + n - 1$ e mostremos que vale para $j+k = m+n$. De fato, por (3.2) e pela hipótese de indução tem-se que

$$\begin{aligned} p_{n,m} &= \frac{n}{n+m} p_{n-1,m} + \frac{m}{n+m} p_{n,m-1} \\ &= \frac{n}{n+m}\left(\frac{n-1-m}{n-1+m}\right) + \frac{m}{n+m}\left(\frac{n-m+1}{n+m-1}\right) \\ &= \frac{n^2-n-nm+nm-m^2+m}{(n+m)(n+m-1)} = \frac{(n-m)(n+m)-(n-m)}{(n+m)(n+m-1)} \\ &= \frac{n-m}{n+m}. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.2.8** (OBM). *José tem três pares de óculos, um magenta, um amarelo e um ciano. Todo dia de manhã ele escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca usar o mesmo que usou no dia anterior. Se dia primeiro de agosto ele usou o magenta, qual a probabilidade de que dia* $31$ *de agosto ele volte a usar o magenta?*

**Solução:** Sejam $m_n, a_n$ e $c_n$ as probabilidades de que no dia $n$ ele use óculos magenta, amarelo e ciano, respectivamente. Ora, como no dia $1$ de agosto temos certeza que José usou os óculos magenta, segue que a probabilidade de que no dia $1$ de agosto ele tenha usado os óculos magenta é igual a $1$ (e consequentemente a probabilidade de que ele tenha usado outros óculos é $0$), ou seja, $m_1 = 1, a_1 = 0$ e $c_1 = 0$.

Além disso, como a cada dia José escolhe ao acaso uma das cores que ele não usou no dia anterior, segue que ele escolhe cada uma das opções disponíveis para o dia com probabilidade $\frac{1}{2}$. Por exemplo, no dia 2 de agosto a probabilidade de que ele escolha os óculos magenta é $m_2 = 0$ (ele não pode usar a mesma cor do dia anterior), a probabilidade de que ele escolha os óculos amarelo é $a_2 = \frac{1}{2}$ e probabilidade de que ele escolha os óculos ciano é $c_2 = \frac{1}{2}$. De um modo geral, no dia $n + 1$ do mês de agosto existem três configurações possíveis, a saber:

- Para que no dia $n+1$ ele escolha os óculos magenta é preciso que no dia anterior (dia $n$) ele tenha usado óculos amarelo ou ciano. Mas a probabilidade de que no dia $n$ ele tenha usado óculos amarelo é $a_n$ e a probabilidade de que ele tenha usado óculos ciano é $c_n$. Assim, a probabilidade $m_{n+1}$ de que no dia $n + 1$ ele use os óculos magenta é a prabilidade de que no dia anterior (o dia $n$) ele tenha usado óculos amarelo ou ciano. Como no dia em que ele vai usar os óculos amarelo ou ciano ele escolhe um deles com probabilidade $\frac{1}{2}$, segue que:

$$m_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n.$$

- Para que no dia $n + 1$ ele escolha os óculos amarelo é preciso que no dia anterior (dia $n$) ele tenha usado óculos magenta ou ciano. Mas a probabilidade de que no dia $n$ ele tenha usado óculos magenta é $m_n$ e a probabilidade de que ele tenha usado óculos ciano é $c_n$. Assim, a probabilidade $a_{n+1}$ de que no dia $n+1$ ele use os óculos amarelo é a probabilidade de que no dia anterior (o dia $n$) ele tenha usado óculos magenta ou ciano. Como no dia em que ele vai usar os óculos magenta ou ciano ele escolhe um deles com probabilidade $\frac{1}{2}$, segue que:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}m_n + \frac{1}{2}c_n.$$

- Por fim, para que no dia $n + 1$ ele escolha os óculos ciano é preciso que no dia anterior (dia $n$) ele tenha usado óculos magenta ou amarelo. Mas a probabilidade de que no dia $n$ ele tenha usado óculos magenta é $m_n$ e a probabilidade de que ele tenha usado óculos amarelo é $a_n$. Assim, a probabilidade $c_{n+1}$ de que no dia $n + 1$ ele use os óculos ciano é a prabilidade de que no dia anterior (o dia $n$) ele tenha usado óculos magenta ou amarelo. Como no dia em que ele vai usar os óculos magenta ou amarelo ele escolhe um deles com probabilidade $\frac{1}{2}$, segue que:

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}m_n.$$

Ora, como $m_n + a_n + c_n = 1$, tem-se que;

$$\begin{cases} m_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}m_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}m_n \\ m_n + a_n + c_n = 1 \end{cases} \Rightarrow m_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2} = \frac{1 - m_n}{2} \Rightarrow m_{n+1} + \frac{1}{2}m_n = 1.$$

Resolvendo essa recorrencia,

$$m_n = \frac{1 - (-2)^{2-n}}{3}.$$

Portanto, em 31 de agosto a probabilidade de que ele volte a usar o magenta é igual a $m_{31} = \frac{1+2^{-29}}{3}$.

## 3.3 Teoria dos Números

**Exemplo 3.3.1.** *Suponha que a sequência $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ é definida por*

$$a_1 = 1, a_2 = 3 \;\; \textit{e} \;\; a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \;\; \textit{para} \;\; n \geq 3.$$

*Determine uma fórmula fechada para o $a_n$ para cada inteiro $n \geq 1$*

**Solução:** Podemos escrever $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ como a equação característica da recorrência. Resolvendo a equação característica, encontramos como raízes $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Como a solução da recorrência é dada por $a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ temos:
$a_n = C_1(1 + \sqrt{2})^n + C_2(1 - \sqrt{2})^n$. Mas, $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$ então:

$$\begin{cases} C_1(1 + \sqrt{2}) + C_2(1 - \sqrt{2}) = 1 \\ C_1(1 + \sqrt{2})^2 + C_2(1 - \sqrt{2})^2 = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, obtendo assim:

$$a_n = \frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n].$$

**Exemplo 3.3.2.** *Sendo $n$ um inteiro positivo, mostre que o número*

$$\frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^n$$

*é inteiro.*

**Solução:** Fazendo $\lambda_1 = (1-\sqrt{5})$ e $\lambda_2 = (1+\sqrt{5}) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 \ . \ \lambda_2 = -4 \end{cases}.$

Portanto, esses números são raízes da equação $\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$, que é a equação característica da recorrência $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 4a_n = 0 \ \Rightarrow$ $\mathrm{a}_{n+2} = 2a_{n+1} + 4a_n, \ \forall n \geq 1$.

A solução geral da recorrência é:

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \ = \ C_1(1-\sqrt{5})^n + C_2(1+\sqrt{5})^n.$$

Para que $a_n$ seja igual a expressão do enunciado é preciso que $C_1 = \frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ e $C_2 = \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ ou seja,

$$a_n = \frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^n \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^1 + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^1 = 0$$

$$a_2 = \frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^2 + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 0$$

Ora, como $a_1$ e $a_2 \in \mathbb{Z}$ *e* $\mathrm{a}_{n+2} = 2a_{n+1} + 4a_n \ \Rightarrow \ a_n \in \mathbb{Z}, \forall n$.

**Exemplo 3.3.3** (Números de Catalan)**.** *Seja $(C_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números reais definidos recursivamente por $C_0 = 1$ e $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$. Mostre que $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. (Esses números são chamados de* **Números de Catalan***, em homenagem ao Matemático Belga Eugene Catalan).*

**Solução:** Uma série de potências $f(z)$ é dita uma função geradora da sequência $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quando os seus coeficientes são exatamente os termos da sequência dada, i.e.,

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^i = C_0 + C_1 z^1 + C_2 z^2 + \dots \tag{3.8}$$

De (3.8) segue-se que

$$\begin{aligned}(f(z))^2 &= C_0C_0 + (C_1C_0 + C_0C_1)z + (c_2C_0 + C_1C_1 + C_0C_2)z^2 + \dots \\ &\overset{\text{(hipótese)}}{=} C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + \dots\end{aligned} \tag{3.9}$$

Multiplicando (3.9) por $z$ e adicionando $C_0$, obtém-se que

$$C_0 + z(f(z))^2 = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \dots \overset{(3.8)}{=} f(z), \tag{3.10}$$

e portanto, de (3.10) desde que $C_0 = 1$ e completando os quadrados segue-se que:

$$1 + z(f(z))^2 = f(z) \Rightarrow 4z^2(f(z))^2 - 4zf(z) + 4z = 0$$
$$\Rightarrow (2zf(z))^2 - 2(2zf(z)).1 + 1 - 1 + 4z = 0 \Rightarrow (2zf(z) - 1)^2 = 1 - 4z$$

$$\Rightarrow 2zf(z) = 1 + \sqrt{1-4z}\ (\star) \text{ ou } 2zf(z) = 1 - \sqrt{1-4z}, \tag{3.11}$$

e desde que $(\star)$ de (3.11) não satisfaz a condição $f(0) = a_0 = 1$, tem-se que

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z},\ \forall z \neq 0 \text{ e } f(0) = 1. \tag{3.12}$$

Usando o Teorema Binomial Generalizado, tem-se que:

$$\begin{aligned}(1-4z)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4z)^k \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1} 4z + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2.1}(4z)^2 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3.2.1}(4z)^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{1!}2^1 z - \frac{1}{2!}2^2 z^2 - \frac{3.1}{3!}2^3 z^3 - \frac{5.3.1}{4!}2^4 z^4 - \dots\end{aligned} \tag{3.13}$$

De (3.13) em (3.12) tem-se que

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \frac{1}{2!}2^1 z + \frac{3.1}{3!}2^2 z^2 + \frac{5.3.1}{4!}2^3 z^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2^1}{1!}\right) z^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{3.1.2^2}{2!}\right) z^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{5.3.1.2^3}{3!}\right) z^3 + \dots \end{aligned} \tag{3.14}$$

Note que $\forall K \in \mathbb{N}^*$

$$(2k)! = \prod_{j=1}^{k}(2j-1)2^k k! \Leftrightarrow \prod_{j=1}^{k}(2j-1)2^k = \frac{(2k)!}{k!} \tag{3.15}$$

Finalmente de (3.15) em (3.14) segue-se que

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2}\binom{2}{1}z^1 + \frac{1}{3}\binom{4}{2}z^2 + \frac{1}{4}\binom{6}{3}z^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}z^k. \tag{3.16}$$

De (3.16), (3.8) tem-se que $a_n$ é o $n$-ésimo número de Catalan, i.e., é dada por $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

**Exemplo 3.3.4.** *Se $m$ e $n$ são inteiros não negativos, mostre que o número*

$$S(n,m) = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}, \text{ chamado de Supercatalan,}$$

*é inteiro.*

*Sugestão: Mostre que $S(n+1,m) + S(n,m+1) = 4S(n,m)$ ou, equivalentemente,*

$$S(n+1,m) = 4S(n,m) - S(n,m+1).$$

*Como $S(0,m) = \binom{2m}{m}$ é inteiro, conclua que $S(n,m)$ é sempre inteiro.*

**Observação 3.3.1.** *Esse problema surgiu por volta de 1874 pelas mãos do matemático Belga Eugène Charles Catalan. (É curioso que até hoje não se tem notícia que alguém tenha demonstrado que esse número é inteiro por um argumento combinatório, isto é, propondo um problema de contagem, cuja resposta seja exatamente esse número).*

**Solução:**

$$S(n+1,m)=\frac{(2m)!\ \ (2(n+1))!}{m!(n+1)!(m+n+1)!}$$

$$S(n,m+1)=\frac{(2(m+1))!\ \ (2n)!}{(m+1)!\ \ n!\ \ (m+1+n)!}$$

Fazendo a soma membro a membro obtemos:

$$S(n{+}1,m){+}S(n,m{+}1)=\frac{1}{(m+n+1)!}\left(\frac{(2m)!\ \ (2(n+1))!}{m!(n+1)!}+\frac{(2(m+1))!(2n)!}{(m+1)!n!}\right)$$

$$=\frac{1}{(m+n+1)!}\left(\frac{(m+1).(2m)!+(2(n+1)!+(n+1).(2n)!(2(m+1))!}{(m+1)!.(n+1)!}\right)$$

$$=\frac{1}{(m+n+1).(m+n)!}\left(\frac{(m+1).(2m)!(2n+2).(2n+1).(2n)!+(n+1).(2n)!(2m+2).(2m+1).(2m)!}{(m+1)m!.(n+1)n!}\right)$$

$$=\frac{(2m)!(2n)!}{(m+n+1)(m+n)!n!m!}\left(\frac{(m+1)(2n+2)(2n+1)+(n+1)(2m+2)(2m+1)}{(n+1)(m+1)}\right)$$

Mas,

$$(m+1)\underbrace{(2n+2)}_{=2.(n+1)})(2n+1)+(n+1)\underbrace{(2m+2)}_{=2.(m+1)})(2m+1)=$$

$$(m+1)(n+1)(4n+2+4m+2)=(m+1)(n+1)\ 4.(m+n+1)$$

$$=\frac{(2m)!(2n)!}{(m+n+1)(m+n)!\ n!\ m!}.\left(\frac{4(m+1)(n+1)(m+n+1)}{(n+1)(m+1)}\right)$$

$$=4.\frac{(2m)!(2n)!}{(m+n)!\ m!\ n!}=4.S(n,m)$$

Ora, como $S(n+1,m)+S(n,m+1)=S(n,m)$, segue que $S(n+1,m)=4.S(n,m)-S(n,m+1)$. *Além disso,*

$$S(0,m) = \frac{0!(2m)!}{0!\,m!\,m!} = \frac{(2m)!}{m!\,m!} = \binom{2m}{m},$$

que é inteiro $\forall \ m \in \mathbb{N}$.

Usando a recorrência $S(n+1,m) = 4S(n,m) - S(n,m+1)$, e a indução sobre $n$, segue que:

$$S(1,m) = \underbrace{4S(0,m) - S(0,m+1)}_{\text{são inteiros}} \Rightarrow S(1,m) \text{ é inteiro.}$$

Suponha que $S(n-1,m) \in \mathbb{Z}$ , qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}$ (Hipótese de indução).

Por fim, vamos mostrar que $S(n,m) \in \mathbb{Z}$. De fato,

$$S(n,m) = 4.\underbrace{S(n-1,m) - S(n-1,m+1)}_{\text{são inteiros}} \Rightarrow S(n,m) \ \in \mathbb{Z}.$$

**Exemplo 3.3.5.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ é par.*

**Solução:**

A ideia é mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ o número $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ é solução de uma recorrência em que todos os termos da sequência são números pares.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$. Note que:

$$\begin{cases} a_1 = (3+\sqrt{5})^1 + (3-\sqrt{5})^1 = 6 \\ a_2 = (3+\sqrt{5})^2 + (3-\sqrt{5})^2 = 28 \end{cases}$$

Por outro lado, definindo $\lambda_1 = (3+\sqrt{5})$ e $\lambda_2 = (3-\sqrt{5})$, segue que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 6 \\ \lambda_1.\lambda_2 = 4 \end{cases},$$

o que revela que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são as raízes da equação quadrárica $\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$. Mas, essa é a equação característica da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n = 0$, com $n \in \mathbb{N}$. Ocorre que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n = 0 \Rightarrow x_{n+2} = 6x_{n+1} - 4x_n \Rightarrow x_{n+2} = 2.(3x_{n+1} - 2x_n)$$

Perceba que se $x_1$ e $x_2$ forem pares, então a igualdade $x_{n+2} = 2.(3x_{n+1} - 2x_n)$ nos garantirá que $x_n$ será par para todo $n \in \mathbb{N}$. Então se conseguirmos fazer com que $a_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isso mostrará que $a_n$ é par para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas como fazer isso? Vejamos:

Ora, como $\lambda_1 = (3+\sqrt{5})$ e $\lambda_2 = (3-\sqrt{5})$ são as raízes da equação característica da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 4x_n = 0$, segue que a solução geral dessa recorrência é da forma

$$\begin{aligned} x_n =& C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \\ =& C_1(3+\sqrt{5})^n + C_2(3-\sqrt{5})^n. \end{aligned}$$

Ora, como $a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, para que $a_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ basta que $C_1 = 1$ e $C_2 = 1$.

Dessa forma, se tomarmos $C_1 = C_2 = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos que:

$$x_n = 1.(3+\sqrt{5})^n + 1.(3-\sqrt{5})^n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n.$$

Nesse caso, como os dois primeiros termos da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são $x_1 = 6$ e $x_2 = 28$, e $x_{n+2} = 2.(3x_{n+1} - 2x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos então garantir que $a_n = x_n$ é par para todo $n \in \mathbb{N}$.

## 3.4 Matemática Financeira

**Exemplo 3.4.1.** *Uma pessoa deposita inicialmente $R\$1.000,00$ numa poupança que rende $6\%$ ao ano, com juros computados mensalmente, e além disso ela deposita no primeiro dia de cada mês, a partir do mês seguinte ao depósito inicial, $R\$200,00$.*

$(a)$ *Para cada inteiro não negativo $n$, seja $A_n$ o montante acumulado na conta após $n$ meses. Para cada inteiro positivo $n$, determine uma relação entre $A_n$ e $A_{n-1}$.*

$(b)$ *Determine uma fórmula explícita para $A_n$, em função de $n$.*

$(c)$ *Quantos anos serão necessários para que o saldo presente na conta ultrapasse $R\$10.000,00$?*

**Solução:**

$(a)$ Vamos inicialmente calcular a taxa de juros mensal. Sabemos que:

$$(1+T_a)^{\frac{1}{12}} - 1 = T_m$$

onde, $T_a$ é a taxa anual e $T_m$ é a taxa mensal. Assim,

$$(1+0,06)^{\frac{1}{12}} - 1 = T_m$$

$$(1,06)^{\frac{1}{12}} - 1 = T_m$$

$$T_m \simeq 0,0049.$$

Utilizando o raciocínio recorrente observamos que:

$$A_1 = 1000$$

$$A_2 = A_1.1,0049 + 200$$

$$A_3 = A_2.1,0049 + 200$$

$$A_4 = A_3.1,0049 + 200$$

$$\vdots$$

$$A_{n-2} = A_{n-3}.1,0049 + 200$$

$$A_{n-1} = A_{n-2}.1,0049 + 200.$$

Dessa forma, encontramos assim a seguinte relação:

$$A_n = A_{n-1}.1,0049 + 200.$$

$(b)$

$$1,0049^{n-1}A_1 = 1000.1,0049^{n-1}$$

$$1,0049^{n-2}.A_2 = A_1.1,0049^{n-2} + 200.1,0049^{n-2}$$

$$1,0049^{n-3}.A_3 = A_2.1,0049^{n-2} + 200.1,0049^{n-3}$$

$$1,0049^{n-4}.A_4 = A_3.1,0049^{n-3} + 200.1,0049^{n-4}$$

$$\vdots$$

$$1,0049^2.A_{n-2} = A_{n-3}.1,0049^3 + 200.1,0049^2$$

$$1,0049.A_{n-1} = A_{n-2}.1,0049^2 + 200.1,0049^1$$

$$A_n = A_{n-1}.1,0049 + 200.1,0049^0.$$

Adicionando membro a membro e fazendo as simplificações necessárias obtemos:

$$A_n = 1000.1,0049^{n-1} + 200.(1,0049^{n-2} + 1,0049^{n-1} + ... + 1,0049^0).$$

Perceba que $(1,0049^{n-2}+1,0049^{n-1}+...+1,0049^0)$ é uma Progressão Geométrica de razão 1, 0049 portanto:

$$A_n = 1000.1,0049^{n-1} + 200.\left(\frac{1,0049^{n-1} - 1}{0,0049}\right).$$

$(c)$ Vamos utilizar $A_n = 1000.1,0049^{n-1} + 200.\left(\frac{1,0049^{n-1}-1}{0,0049}\right)$ para calcular o tempo necessário para que o saldo presente ultrapasse $10.000$ reais.

$$0,0049.10000 = 0,0049.1000.1,0049^{n-1} + 200.1,0049^{n-1} - 200$$

$$\Rightarrow 49 = 4,9.1,0049^{n-1} + 200.1,0049^{n-1} - 200 \Rightarrow 249 = (4,9 + 200).1,0049^{n-1}$$

$$\Rightarrow 249 = 204,9.1,0049^{n-1} \Rightarrow 1,21522 \cong 1,0049^{n-1} \Rightarrow n \simeq 41.$$

Logo o tempo necessário precisa ser superior a $41$ meses ou seja, $3,42$ anos.

**Exemplo 3.4.2.** *O salário de um trabalhador num mês $n$ é $S_n = a + bn$. Sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas aplicações financeiras. Atualmente, ele poupa (a cada mês) o mesmo que ele aplicou no mês anterior acrescido de $\frac{1}{p}$ de sua renda naquele mês e investe sua poupança a juros mensais de taxa $i$. Determine a renda desse trabalhador no mês $n$.*

**Solução:** Sejam $x_n, S_n$ e $y_n$ a renda, o salário e o montante das suas aplicações no mês $n.$ Ora, como sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas aplicações financeiras, segue que

$$x_{n+1} = S_{n+1} + iy_n.$$

Por outro lado, como ele poupa (a cada mês) o mesmo que ele aplicou no mês anterior acrescido de $\frac{1}{p}$ de sua renda naquele mês, segue que:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n.$$

Diante do exposto, temos o seguinte sistema de equações de recorrência:

$$\begin{cases} x_{n+1} = S_{n+1} + iy_n \\ y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n \end{cases}.$$

Da primeira equação, segue que $y_n = \frac{x_{n+1}-S_{n+1}}{i} \Rightarrow y_{n-1} = \frac{x_n - S_n}{i}$. Assim, da segunda equação

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n \Rightarrow \frac{x_{n+1} - S_{n+1}}{i} = \frac{x_n - S_n}{i} + \frac{1}{p}x_n$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - \left(1 + \frac{i}{p}\right) x_n = S_{n+1} - S_n \Rightarrow x_{n+1} - \left(1 + \frac{i}{p}\right) x_n = (a+b(n+1)-a+bn)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - \left(1 + \frac{i}{p}\right) x_n = b,$$

que é uma equação de recorrência linear não homogênea de primeira ordem. Considerando a equação de recorrência homogênea correspondente, ou seja, $x_{n+1} - \left(1 + \frac{i}{p}\right) x_n = 0$, pelo Teorema 1, segue que $a_n = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-1}$ é uma solução dessa equação de recorrência linear e homogênea.

Fazendo a mudança de variáveis $x_n = a_n z_n$ em $x_{n+1} - \left(1 + \frac{i}{p}\right) x_n = b$, segue que

$$z_n = z_{n-1} + \frac{b}{\left(1 + \frac{i}{p}\right)^{n-1}}.$$

Por outro lado, $x_0 = a$ (no mês $0$ a renda é $S_0 = a$). Assim,

$$x_n = a_n z_n \Rightarrow x_0 = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{0-1} z_0 \Rightarrow z_0 = \frac{a}{\left(1 + \frac{i}{p}\right)^{-1}} = a\left(1 + \frac{i}{p}\right).$$

Diante do exposto, fazendo $k = \left(1 + \frac{i}{p}\right)$ segue que:

$$\begin{aligned} z_0 &= a.k \\ z_1 &= z_0 + b \\ &\vdots \\ z_n &= z_{n-1} + \tfrac{k}{k^{n-1}} \end{aligned}$$

Adicionando, membro a membro, tem-se que:

$$z_n = ak + b \cdot \frac{1 - k^n}{k^{n-1}(1-k)}.$$

Ora, como $x + n = a_n z_n$, e $k = 1 + \frac{i}{p}$, finalmente tem-se que:

$$x_n = \left(a + \frac{pb}{i}\right)\left(1 + \frac{i}{p}\right) - \frac{pb}{i}.$$

**Exemplo 3.4.3.** *Em economia, utiliza - se recorrências para descrever o comportamento financeiro no tempo. Seja $X_n$ a renda num período $n$ e $C_n$ o consumo nesse mesmo período. Num modelo econômico, a renda em qualquer período é assumida como sendo a soma entre consumo e o investimento governamental $E$ (que é assumido constante em todos os períodos em que o modelo é aplicado). Além disso, o consumo é assumido como uma função afim da renda correspondente ao período anterior, isto é,*

$$X_n = C_n + E, \ \textit{onde } E \textit{ é o investimento governamental,}$$

$$C_n = c + mX_{n-1}, \ \textit{onde } c \textit{ e } m \textit{ são constantes reais.}$$

*Com base no modelo descrito acima responda os itens abaixo:*

$(a)$ *Mostre que* $X_n = (E + c)\left(\frac{m^n - 1}{m-1}\right) + mX_0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$

$(b)$ *Supondo que* $0 < m < 1$, *mostre que* $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \left(\dfrac{E+c}{1-m}\right) + mX_0$.

**Solução:**

$(a)$ Pelo enunciado,

$$\begin{cases} X_n = C_n + E \\ C_n = c + mX_{n-1} \end{cases} \Rightarrow X_n = mX_{n-1} + c + E.$$

Considerando a recorrência homogênea de primeira ordem $X_n = mX_{n-1}$, segue que:

$$\begin{cases} X_1 = mX_0 \\ X_2 = mX_1 \\ \vdots \\ X_n = mX_{n-1}. \end{cases}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades acima, obtemos $X_n = m^n X_0$. Fazendo a mudança de variáveis $X_{n-1} = m^n X_0 . Y_{n-1}$ na recorrência

$$X_n = mX_{n-1} + c + E,$$

segue que:

$$m^{n+1} X_0 Y_n = mm^n X_0 Y_{n-1} + c + E \Rightarrow Y_n = Y_{n-1} + \frac{c+E}{m^{n+1} X_0}.$$

Fazendo $n$ variar em $N$, segue que:

$$\begin{cases} Y_1 = Y_0 + \frac{c+E}{X_0}\frac{1}{m^2} \\ Y_2 = Y_1 + \frac{c+E}{X_0}\frac{1}{m^3} \\ \vdots \\ Y_n = Y_{n-1} + \frac{c+E}{X_0}\frac{1}{m^{n+1}} \end{cases}$$

Adicionando as igualdades acima, segue que:

$$\begin{aligned} Y_n =& Y_0 + \frac{c+E}{X_0}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\ldots+\frac{1}{m^3}\right) \\ =& Y_0 + \frac{c+E}{X_0}\left[\frac{\frac{1}{m^2}\left(\left(\frac{1}{m}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{m}-1}\right] \\ =& Y_0 + \frac{c+E}{m^{n+1}X_0}\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right). \end{aligned}$$

Lembrando que $X_{n-1} = m^n X_0.Y_{n-1}$, segue que $Y_n = \frac{X_n}{m^{n+1}X_0}$. Em particular, $Y_0 = \frac{X_0}{mX_0}$. Portanto,

$$\begin{aligned} Y_n = Y_0 + \frac{c+E}{m^{n+1}X_0}\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right) \\ \Rightarrow \frac{X_n}{m^{n+1}X_0} = \frac{X_0}{mX_0} + \frac{c+E}{m^{n+1}X_0}\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right) \\ \Rightarrow X_n = (E+c)\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right) + mX_0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar!

De fato, como $0 < m < 1$, segue que $\lim_{n\to\infty} m^n = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} X_n = & \lim_{n\to\infty}\left[(E+c)\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right)+mX_0\right] \\ =&(E+c)\left(\frac{0-1}{m-1}\right)+mX_0 \\ =&(E+c)\left(\frac{-1}{m-1}\right)+mX_0 \\ =&\left(\frac{E+c}{1-m}\right)+mX_0. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.4.4.** *Quando uma taxa de juros anual $i$ é computada $m$ vezes por ano, a taxa por período é igual a $\frac{i}{m}$. Por exemplo, se $3\% = 0,03$ é uma taxa anual computada quadrimestralmente, então a taxa paga por quadrimestre é de $\frac{0{,}03}{4} = 0,0075$. Para cada inteiro $k \geq 1$, seja $P_k$ o montante acumulado ao final do $k$-ésimo período. Assim, os juros acumulados durante o $k$-ésimo período é igual ao montante* *acumulado no período anterior, $P_{k-1}$ multiplicado pela taxa de juros correspondente ao $k$-ésimo período, ou seja,*

$$\textit{Juros adquirido no k-ésimo período} = P_{k-1}\left(\frac{i}{m}\right).$$

*Portanto, supondo uma taxa de juros $i$ computada $m$ vezes ao ano, segue que*

$$P_k = P_{k-1} + P_{k-1}\left(\frac{i}{m}\right) = P_{k-1}\left(1+\frac{i}{m}\right).$$

*De acordo com a modelagem acima, mostre que:*

$(a)$ $P_m = P_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$.

$(b)$ *Se* $i = 1,\ \lim\limits_{m\to\infty} P_0\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m = P_0.e\cdot$

**Solução:**

$(a)$ De fato, como $P_k = P_{k-1}\left(1+\frac{i}{m}\right)$, segue que:

$$\begin{aligned}
&P_1 = P_0\left(1+\tfrac{i}{m}\right)\\
&P_2 = P_1\left(1+\tfrac{i}{m}\right)\\
&\vdots\\
&P_m = P_{m-1}\left(1+\tfrac{i}{m}\right)
\end{aligned}$$

Multiplicando essas $m$ igualdades membro a membro, segue que:

$$P_1.P_2.\ldots.P_{m-1}.P_m = P_0.P_1.\ldots.P_{m-1}\underbrace{\left(1+\frac{i}{m}\right).\ldots.\left(1+\frac{i}{m}\right)}_{n\ \text{fatores}}$$

$$\Rightarrow P_m = P_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^m.$$

$(b)$ Se $i = 1$, segue que

$$P_m = P_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^m \Rightarrow P_m = P_0\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Lembrando que $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m = e$, segue que:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} P_0\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= P_0\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.\\
&= P_0.e.
\end{aligned}$$

# Conclusões

Ao escolher o tema de recorrências, tínhamos como pretenção trazer um assunto que não é tradicionalmente do Ensino Médio para o Ensino Médio, mostrando a teoria básica e vários exemplos que vão do nível mais simples (para aqueles que são iniciantes nesse conteúdo) aos exemplos mais elaborados (mais voltados aos professores). Para isso, fizemos um panorama geral que abordava desde os primeiros problemas que usavam o raciocínio recorrente passando pelos exemplos clássicos e, também, vários problemas de análise combinatória, probabilidade, teoria dos números e matemática financeira, que são resolvidos com o auxílio dessa poderosa ferramenta. Além disso, também mostramos através de alguns exemplos o quanto essa ferramenta é compatível com o uso de softwares, como por exemplo as planilhas eletrônicas (Excel ou Calc), o que pode ser bem estimulante aos professores e estudantes que estão tendo o primeiro contato com o assunto.

Durante a construção desse trabalho abordamos as recorrências lineares de $1^a$ e $2^a$ ordens e percebemos que as técnicas recursivas podem ser trabalhadas no Ensino Médio, tendo em vista que os alunos já possuem entendimento e conhecimento básico para utilizá-las, estimulando, dessa forma, novos conhecimentos, modelos e a descoberta de padrões.

Desse modo, esperamos que esse trabalho venha a contribuir para um primeiro contato com esse tema aos estudantes e também que possa incentivar a ampliação de conhecimentos daqueles que por acaso já tenham tido algum contato anterior com o assunto, exibindo novas técnicas para resolução de problemas de diversos ramos da matemática pura e aplicada. Por fim , sempre estivemos ao longo de todo o trabalho com a intenção de compilar num mesmo material uma gama de resultados e exemplos que para ter acesso seria necessária uma consulta em várias obras que tratam do assunto, além de oferecer uma linguagem mais simples o direta para um leitor iniciante no assunto, o que pode resultar, ao nosso ver uma economia de tempo e esforço para entrar no assunto e nas suas aplicações.

# Referências Bibliográficas


[1] ÁVILA, Geraldo **Análise Matemática para Licenciatura - 3ª edição**. Edgard Blucher, 2006.

[2] BARTLE, Robert G.; **Introduction to Real Analysis.** Willey, 2011.

[3] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Edgard Blucher, 1974.

[4] BURTON, David M. **Elementary number theory**. Tata McGraw-Hill Education, 2006.

[5] CAN, V.Q.B,Pohoată, C., **Old and New inequalities, Volume 2,** GIL Publishing House, 2008.

[6] CHARALAMBIDES, Charalambos A. **Enumerative combinatorics**. CRC Press, 2018.

[7] CVETKOVSKI, Zdravko; **Inequalities - Theorems, Techniques and Selected Problems.** editora Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

[8] DINIZ, I.C., CRUZ, J.R.**Probabilidade : exercícios comentados Vol I.** Livraria da Física USP, 2017.

[9] DOLCE, Osvaldo, POMPEO, J. Nocolau **Fundamentos de Matemática Elementar - vol 05**, Atual Editora, 1992.

[10] FELLER, William. **An introduction to probability theory and its applications**. Willey, 1957.

[11] GOMES, C. A. GOMES, J. M. **Tópicos de Matemática Elementar: Indução e Teoria Elementar dos Números, v.02.** Fortaleza: VestSeller, 2012.

[12] KOSHY, Thomas. **Discrete mathematics with applications**. Elsevier, 2004.

[13] LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P.,WAGNER, E., MORGADO, A. C., **A Matemática do Ensino Médio-Volume 2**, SBM, 1998.

[14] MORGADO, A.C., CARVALHO, P.C.P. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[15] QUESNEL, Alain **O Egito: Mitos e Lendas**. Ática, 1996.

[16] ROSEN, Kenneth H.**Discrete Mathematics Applications**. McGraw-Hill, 1999.

[17] ROSS, Sheldon. **Probabilidade: um curso moderno com aplicações**. Bookman Editora, 2009.