Universidade Federal de Viçosa
Dissertação de Mestrado

Eliane Aparecida Magalhães dos Santos

Lemas de Kaplansky, Problema de Lucas e Alguns Exemplos de Geometria Combinatória

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2021

ELIANE APARECIDA MAGALHÃES DOS SANTOS

LEMAS DE KAPLANSKY, PROBLEMA DE LUCAS E ALGUNS EXEMPLOS DE GEOMETRIA COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca

Coorientador: Luiz Gustavo Perona Araújo

FLORESTAL – MINAS GERAIS
2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal

T

Santos, Eliane Aparecida Magalhães dos, 1984-

S237l
2021

Lemas de Kaplansky, problema de Lucas e alguns exemplos de geometria combinatória / Eliane Aparecida Magalhães dos Santos. – Florestal, MG, 2021.
105 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.105.

1. Análise combinatória. 2. Lemas de Kaplansky. 3. Problema de Lucas. 4. Geometria combinatória. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

510

ELIANE APARECIDA MAGALHÃES DOS SANTOS

LEMAS DE KAPLANSKY, PROBLEMA DE LUCAS E ALGUNS EXEMPLOS DE GEOMETRIA COMBINATÓRIA

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 13 de maio de 2021.

Assentimento:

Eliane Aparecida Magalhães dos Santos

Eliane Aparecida Magalhães dos Santos
Autora

Luís Felipe Gonçalves Fonseca

Luís Felipe Gonçalves Fonseca
Orientador

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus, por me iluminar e dar forças para enfrentar todos os obstáculos.

À minha família, por acreditarem em mim. Isso me estimula a seguir em frente.

Dedico ao meu esposo, Warlei, que sempre esteve ao meu lado.

À minha filha. Um amor assim é impossível de descrever com palavras, apenas podemos sentir. Foi esse amor que me manteve firme.

Dedico aos meus amigos, por compartilharem comigo, horas de estudo, incentivos, risadas e por me apoiarem nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Luís Felipe Gonçalves Fonseca, pela dedicação e disponibilidade. Esta vitória também é sua!

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, pelo cuidado de Pai. Por me mostrar que a fé é a convicção intensa e persistente em algo abstrato, que se torna realidade para aqueles que confiam e acreditam.

Agradeço aos meus pais: Geraldo e Rosalva pelos ensinamentos, que me motivou a ir em busca dos meus objetivos.

Agradeço ao meu esposo Warlei pela parceria e dedicação à nossa família, por estar sempre ao meu lado durante o percurso acadêmico e me apoiar em todos os momentos. Pelo seu amor e por compreender minha dedicação ao mestrado.

À minha linda Antônia. Obrigada por compreender este período no qual não pude dedicar-lhe a devida atenção.

Às minhas irmãs Valéria e Jaqueline, pela amizade e por compreenderem minha ausência, pela cumplicidade de sempre. Vocês são muito importantes para mim.

Aos meus amigos do curso, que compartilharam inúmeros desafios, sempre com o espírito colaborativo e, além disso, se mostraram serem amigos de verdade. Em especial: Marcone, Cláudio, Rômulo, Ednéia, Carla, Marcelo e Fernanda. Meu muito obrigada.

Ao meu orientador, Luís Felipe Gonçalves Fonseca, pela confiança depositada em mim durante o desenvolvimento do projeto. Obrigada por me manter motivada durante todo o tempo e por cada contribuição.

Agradeço a todos os profissionais da Escola Estadual Governador Israel Pinheiro e da Escola Municipal Salgado Filho, pelo carinho.

Não poderia deixar de agradecer ao corpo docente da Universidade Federal de Viçosa, que sempre estiveram comprometidos com a qualidade e excelência do ensino.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

SANTOS, Eliane Aparecida Magalhães dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, maio de 2021. **Lemas de Kaplansky, Problema de Lucas e Alguns Exemplos de Geometria Combinatória**. Orientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. Coorientador: Luiz Gustavo Perona Araújo.

Um dos objetivos desse trabalho é a resolução do Problema de Lucas. Até se chegar ao Problema de Lucas, foram explorados alguns temas, tais como: as Combinações Completas, os Lemas de Kaplansky, o Princípio da Inclusão e Exclusão e as Permutações Caóticas. Depois de resolver o Problema de Lucas, exploramos alguns problemas de Geometria Combinatória, como a Pizza de Steiner e o Problema do Final Feliz. Finalmente, foi realizada uma análise do currículo do ensino médio e apresentada uma sequência didática para o trabalho do professor, por meio de uma abordagem significativa e desafiadora tanto para professores quanto para os estudantes.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Lemas de Kaplansky. Problema de Lucas. Geometria Combinatória.

Abstract

SANTOS, Eliane Aparecida Magalhães dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, May, 2021. **Kaplansky's lemmas, Lucas' Problem and Some Examples of Combinatorial Geometry**. Adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca. Co-adviser: Luiz Gustavo Perona Araújo.

One of the objectives of this work is to solve the Lucas Problem. For this purpose, the themes were explored: complete combinations, Kaplansky's Lemmas, The Principle of Inclusion and Exclusion and the chaotic permutations. After solving the Lucas Problem, we venture to explore some examples of Combinatorial Geometry, like Steiner's Pizza and the Happy Ending Problem. Finally, an analysis of the High School Curriculum was carried out and the following teaching were proposed for the work of the teacher, by a meaningful and challenging addressing for both teachers and students.

Keywords: Combinatory Analysis. Kaplansky's Lemmas. Lucas Problem. Combinatorial Geometry.

Lista de Símbolos

Símbolos e notações utilizadas neste trabalho:

α Letra grega Alfa

β Letra grega Beta

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

A Matemática é uma ciência de ampla importância para a vida em sociedade, seus métodos são essenciais para as várias situações cotidianas, as diversas áreas do conhecimento e para as atividades profissionais. Além do mais, é necessária para o progresso da humanidade e para a compreensão de problemas e de determinados acontecimentos. O estudo dessa ciência é de fundamental relevância para a formação do indivíduo no que tange ao desenvolvimento de suas competências e habilidades e, principalmente, do raciocínio lógico e dedutivo.

Os problemas de contagem estão diretamente relacionados à história da Matemática, e é por meio deles que as pessoas têm os primeiros contatos com essa ciência. O "contar" é um deles, pois exige que o indivíduo saiba enumerar os elementos de um conjunto. A Análise combinatória é a área da matemática que tem como característica o estímulo do raciocínio lógico e dedutivo, sendo abordada na maioria das vezes, por meio da resolução de problemas de contagem que analisam situações do cotidiano.

No entanto, do que trata a Análise Combinatória? Muitos pensam que trata apenas de problemas de enumeração de elementos, permutações, arranjos e combinações. Contudo, a Análise Combinatória trata de uma gama de problemas e de técnicas, seu estudo vem crescendo fortemente, e é muito utilizada na teoria dos grafos, modelagem matemática e na análise de algoritmos.

De acordo com os registros [10], os primeiros estudos relativos à Análise Combinatória ocorreram em torno de 300 anos antes da Era Cristã. Depois disso, muitos matemáticos se dedicaram ao estudo desse conteúdo, tais como: Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1559), Blaise Pascal (1623-1662), Isaac Newton (1646-1727), Daniel Bernoulli (1700-1782), George Pólya (1887-1985) e da Teoria das Probabilidades, como Jerônimo Cardano (1501-1576), Johannes Kepler (1571-1630), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), dentre outros grandes matemáticos.

Para a resolução de problemas de Análise Combinatória é exigido criatividade e compreensão das situações, entretanto, muitos estudantes resolvem as questões empregando fórmulas de maneira mecânica e sem reflexão, não considerando as particularidades do problema. Esses problemas podem ainda se tornar mais difíceis quando são empregados com maior complexidade. O Problema de Lucas, um problema de 1891, que se encontra no capítulo 4 deste trabalho, é um exemplo disso, foram necessários mais de 50 anos para que fosse solucionado.

A criação de novas técnicas de tratamento da Análise Combinatória, para estimular professores e estudantes, durante o processo de ensino-aprendizagem no Ensino Médio, de modo a minimizar as dificuldades encontradas por eles, é bem-vinda. Neste trabalho fizemos o estudo de temas que possam ser explorados de forma diversificada por meio da metodologia de resolução de problemas, bem como a criação de propostas que possam motivar os professores e seus alunos durante o processo de ensino-aprendizagem de conteúdos da Análise Combinatória.

Portanto, a criação de uma proposta coerente com a realidade dos estudantes requer a apreciação do currículo do Ensino Médio, com base nos documentos oficiais e relativo ao ensino da Análise Combinatória, para que seja construída uma sequência didática que contemple os temas de forma significativa e que possa ser aplicada pelo professor em suas aulas, por meio do uso de novas técnicas, que o possibilitem explorar os conteúdos em sua transversalidade.

As principais referências bibliográficas utilizadas para o desenvolvimento do presente trabalho foram: [4], [9], [13], [16], [17], [18] e [19].

2

Lemas de Kaplansky

Iniciaremos este capítulo introduzindo a ideia de Combinações Completas que é importante para a compreensão dos Lemas de Kaplansky.

2.1 Combinações Completas

As combinações completas, que também são chamadas de combinações com repetições, que denotamos por CR, serão de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho. Antes de introduzirmos o conceito de combinações completas, é interessante relembrar a definição de permutação simples, permutação com repetição e de combinação simples. Essas definições podem ser encontradas em [13].

Uma permutação simples é qualquer agrupamento ordenado de n objetos distintos, de modo que, se denominarmos P_n o número das permutações simples dos n objetos, então

$$P_n = n(n-1)(n-2)...1 = n!.$$

Uma permutação com repetição é um tipo de permutação em que existem elementos repetidos. Considere n o número de elementos e que entre n elementos existem n_1 iguais a a_1, n_2 iguais a a_2, ..., n_r iguais a a_r. Podemos calcular a quantidade de permutações com repetição a partir da seguinte fórmula:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}.$$

Os agrupamentos formados com os n elementos de um conjunto serão considerados combinações simples se os elementos dos agrupamentos diferenciarem apenas pela sua natureza, isto é, importa somente quem participa do grupo e não a ordem. Se tratarmos da contagem do número de maneiras de escolher p, dentre esses n elementos sem considerar a ordem, então criamos uma combinação destes elementos sem repetição. A fórmula para obter esta combinação é dada por:

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Diferente das combinações simples, as combinações completas consideram os casos em que existem elementos distintos e elementos repetidos e possui a seguinte definição.

Definição 2.1: CR_n^p é o número de soluções inteiras e não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p.$$

Vejamos um exemplo para o cálculo da CR_n^p:

Exemplo 2.1.1: De quantos modos é possível comprar 4 canetas em uma papelaria que vende 6 cores diferentes?

Não basta fazermos C_6^4=15, porque não estaríamos considerando as possibilidades da compra de duas canetas da mesma cor, por exemplo.

Pensando que as variáveis c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 equivalem a quantidade de canetas adquiridas da cor 1, cor 2, cor 3, cor 4, cor 5 e cor 6, respectivamente, temos a equação:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 4. \tag{2.1}$$

Então, determinando as soluções inteiras e não negativas da equação, é possível encontrar a solução do problema. Note que uma possível solução seria: $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1, c_5 = c_6 = 0$, na qual foi escolhida uma caneta da cor 1, uma caneta da cor 2, uma caneta da cor 3 e uma caneta da cor 4, que será representado por (1, 1, 1, 1, 0, 0).

Utilizando o símbolo ($\bullet$) para representar as 4 canetas, que serão compradas, e os 5 sinais de (+) usados para separá-las, que equivale ao número de variáveis menos um, podemos representar as soluções por meio da representação simbólica a seguir. Tal simbologia possui uma correspondência biunívoca com as soluções da equação (2.1), conforme veremos:

$$\bullet + \bullet + \bullet \bullet + + + \Rightarrow (1, 1, 2, 0, 0, 0).$$

$$+ + \bullet \bullet \bullet + + + \bullet \Rightarrow (0, 0, 3, 0, 0, 1).$$

$$+ \bullet \bullet + + + + \bullet \bullet \Rightarrow (0, 2, 0, 0, 0, 2).$$

As representações acima mostram que a mudança de posição de cada uma das ($\bullet$) com relação aos sinais (+) gera uma nova solução. Quando dois sinais (+) estão juntos, o valor da varíavel daquela posição é igual a zero. Com isso, podemos chegar às soluções permutando os 9 símbolos, as quatro ($\bullet$) e os cinco sinais (+), desconsiderando as repetições das ($\bullet$) que aparecem 4 vezes e dos sinais (+) que aparecem 5 vezes. Isso equivale a:

$$P_9^{4,5} = C_9^4 = 126.$$

No entanto, esse resultado corresponde ao número total de soluções inteiras e não negativas da equação: $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 = 4$, que equivale as combinações com repetições. Isso é o mesmo que:

$C_9^4 = CR_6^4 = 126.$

Teorema 2.2: O total de soluções inteiras e não negativas da equação: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$ é dada por:

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n+p-1-p)!.p!} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!.p!}.$$

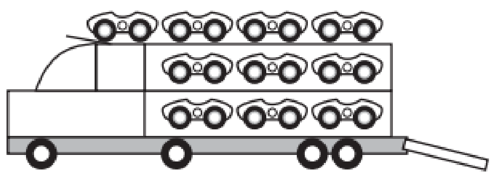
Demonstração. Note que na equação existem n incognítas que somadas devem resultar em p. Com o uso dos símbolos, nesse caso, tem-se p sinais $(\bullet)$ e $n-1$ sinais $(+)$. Logo:

$$CR_n^p = P_{n+p-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!.p!} = C_{n+p-1}^p. \tag{2.2}$$

□

A seguir veremos mais um exemplo.

Exercício 2.1.1: (Enem 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nele transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) C_6^4

b) C_9^3

c) C_{10}^4

d) 6^4

e) 4^6.

Solução: Existem um total de 10 carrinhos no caminhão-cegonha. Como foi informado, deve haver em cada caminhão um carrinho da cor amarela, um da cor branca, um da cor laranja e um da cor verde. Subtraindo essa quantidade de carrinhos, os quais as cores já estão determinadas, restarão 6 carrinhos que podem ser de cores variadas ou da mesma cor. Considerando a quantidade de carrinhos da cor amarela como c_1, da cor branca como c_2, da cor laranja como c_3 e da cor verde como c_4, que devem totalizar 6 carrinhos, tem-se:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 6.$$

Usando os símbolos, teríamos 6 sinais ($\bullet$) e 3 sinais ($+$). Fazendo uma combinação dos 9 símbolos escolhe 6, que equivale a escontrar as soluções inteiras e não negativas dessa equação, podemos chegar a solução do problema. Assim:

$$CR_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{(9)!}{(3)!.6!} = C_9^3.$$

Concluíndo a resolução do exercício.

Veremos a seguir os Lemas de Kaplansky.

2.2 História dos Lemas de Kaplansky

Irving kaplansky (1917-2006) nasceu em Toronto no Canadá [2]. Doutor em matemática pela Universidade de Harvard (1941) e professor na Universidade de Chicago, no período de 1945 a 1984. Kaplansky foi premiado com o AMS Leroy P., Prêmio Steele pelo conjunto de suas realizações e pelas descobertas matemáticas, em 1989. Contribuiu de maneira expressiva para o desenvolvimento da álgebra, teoria dos grupos e teoria dos anéis, publicando diversos artigos nessas áreas.

Figura 2.1: Irving Kaplansky.

Fonte: < http://www.ams.org/about-us/presidents/48-kaplansky>

Em 1891, o matemático chamado François Édouard Anatole Lucas criou um problema, conhecido como "Ménege Problem", que fez com que vários matemáticos fossem em busca da solução. O problema dizia o seguinte:

De quantas maneiras m casais podem se sentar em $2m$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?

Em 1943, cinquenta e dois anos após, Kaplansky apresentou uma solução para o problema de Lucas no artigo "Solution of the problème des méneges"[8], publicado no Bulletin of the American Mathematical Society. Para resolvê-lo, Kaplansky fez uso de alguns lemas, esses lemas são conhecidos hoje como Lemas de Kaplansky.

No entanto, Kaplansky não foi o único a encontrar uma solução. Em 1986, Kenneth P. Bogart e Peter G. Doyle também publicaram uma solução para o problema, no artigo "Non-Sexist Solution of the Ménage Problem"[3].

2.3 1° Lema de Kaplansky

A compreensão do lema poderá ficar mais fácil se pensarmos em exemplos que mostram a sua aplicabilidade, vejamos a seguinte situação:

Exemplo 2.3.1: Na recepção de um consultório médico, estão sentadas oito pessoas, em fila, e três delas serão escolhidas para receber um brinde. De quantas maneiras diferentes podemos escolher três delas sem que haja duas pessoas consecutivas?

Solução: Como as pessoas estão em fila, podemos representá-las por meio do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, o grupo dos possíveis ganhadores serão os subconjuntos. Iremos representar os ganhadores com o sinal $(+)$ e os não ganhadores serão representados pelo sinal $(-)$. Por exemplo:

O subconjunto representado por: $\{+-+-+---\}$ equivale às pessoas $\{1, 3, 5\}$.

O subconjunto representado por: $\{--+-+--+\}$ equivale às pessoas $\{3, 5, 8\}$.

Os exemplos anteriores são de subconjuntos que atendem a exigência para a distribuição dos brindes.

No entanto, o subconjunto representado por: $\{+-++----\}$ que correspondente às pessoas $\{1, 3, 4\}$ não é uma solução válida, uma vez que, os sinais de $(+)$ juntos representam a escolha de duas pessoas consecutivas.

Observe a figura abaixo, existem 6 espaços (quadradinhos), que estão separados por sinais $(-)$, onde podemos dispor os 3 sinais $(+)$.

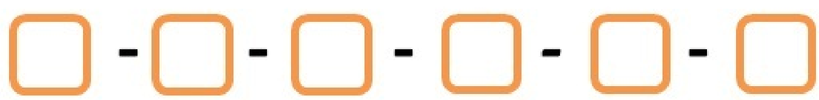


Figura 2.2: Seis espaços para distribuir 3 sinais $(+)$

É possível chegar ao número de possíveis resultados do sorteio. O número é $C_6^3 = 20$.

É esperado que alguns leitores se perguntem, não seria mais fácil resolver problemas desse tipo calculando o total de possibilidades e substraindo aqueles casos que possuem números consecutivos?

Nesse problema temos um número reduzido de pessoas, mas quando se trata de um conjunto com n pessoas, a técnica dos sinais se torna prática e eficaz na resolução.

Vejamos mais um exemplo, antes da demonstração do 1° Lema de Kaplansky.

Exemplo 2.3.2: No período de 8 a 25 de janeiro de 2020, que corresponde às férias escolares, um grupo de alunos pretende organizar um cronograma de 7 dias de estudos, para se prepararem para um concurso, mas não querem estudar em dias consecutivos. De quantas maneiras esse cronograma pode ser criado?

Solução: De forma análoga ao que foi realizado no problema anterior, temos que retirar do período de férias, que corresponde a 18 dias, os dias que serão destinados aos estudos, logo, temos $18 - 7 = 11$.

O resultado encontrado corresponde aos 11 sinais $(-)$. No entanto, sempre teremos uma posição a mais para dispor os sinais $(+)$, considerando a posição inicial e final com relação aos sinais $(-)$. Com isso, por meio de $C_{12}^{7} = 792$, chegamos ao número total de cronogramas.

Depois desses exemplos, seguem o enunciado e a demonstração do 1° Lema de Kaplansky.

Lema 2.3: (1° **Lema de Kaplansky)** Seja $F_{(n,p)}$ o número de subconjuntos de p elementos do conjunto $K = \{1, 2, 3,...,n\}$ sem que haja números consecutivos. Então o número de subconjuntos com p elementos não consecutivos é dado por:

$$F_{(n,p)} = \binom{n-p+1}{p}, n \geq p \geq 0. \tag{2.3}$$

Demonstração. : Temos que formar subconjuntos com p elementos não consecutivos de um conjunto que contém n elementos. Para isso, teremos que subtrair p da quantidade n de elementos, que equivale aos $(n-p)$ sinais de $(-)$. No entanto, entre os sinais de $(-)$, existirão $(n-p+1)$ espaços vazios para distibuir p sinais de $(+)$. Logo,

$$F_{(n,p)} = \binom{n-p+1}{p}, n \geq p \geq 0. \tag{2.4}$$

□

2.3.1 Generalização do 1° Lema de Kaplansky

Para compreendermos a generalização do 1° Lema de Kaplansky vejamos um exemplo:

Exemplo 2.3.3: Uma universidade oferta anualmente, nos últimos 15 dias do mês de janeiro, o curso de verão que tem duração de 5 dias. No entanto, pretendem oferecer o curso de modo que entre dois dias de estudo exista um intervalo, de no mínimo 2 dias para que os alunos possam assimilar o conteúdo e fazer as atividades propostas.

Abaixo é possível ver um exemplo:

No calendário, os dias escolhidos foram $\{17, 20, 23, 26 \text{ e } 29\}$ e a representação desses dias por sinais é:

$$(+--+--+--+--+--).$$

De quantas maneiras a universidade poderá escolher as datas para a realização do curso de verão?

Figura 2.3: Exemplo de calendário do curso de verão

Solução: O curso de verão poderá ocorrer em um período de 15 dias, devendo ser escolhidos 5 dias, sendo que entre dois dias escolhidos haja no mínimo dois não escolhidos. Considerando os dias escolhidos como sinal $(+)$ e os dias não escolhidos como sinal $(-)$, verificamos que entre os sinais $(+)$ existem 4 espaços, que devem ser preenchidos por sinais $(-)$, sendo necessários no mínimo 8 sinais $(-)$ para separá-los.

Note que o cronograma citado no exemplo, possui dois sinais $(-)$ nas últimas posições que dependendo da configuração escolhida, poderão aparecer, junto ou separadamente, em qualquer uma das posições à direita (antes, entre ou depois) dos sinais $(+)$, conforme os esquemas a seguir.

$$(- + - - + - - + - - + - - + -) \Rightarrow \text{Dias escolhidos } \{18, 21, 24, 27 \text{ e } 30\}.$$

$$(- + - - - + - - + - - + - - +) \Rightarrow \text{Dias escolhidos } \{18, 22, 25, 28 \text{ e } 31\}.$$

$$(+ - - - + - - + - - - + - - +) \Rightarrow \text{Dias escolhidos } \{17, 21, 24, 28 \text{ e } 31\}.$$

Subtrando do total de dias, àqueles os quais não poderão ocorrer atividades do curso de verão, $15 - 8 = 7$, podemos escolher 5 dias do total encontrado. E portanto, o número de cronogramas equivale a uma $C_7^5 = 21$.

Lema 2.4: (Generalização do 1° Lema de Kaplansky) O número de subconjuntos com p elementos do conjunto $K = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ de modo que entre dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto é uma função de n, p e r que corresponde a:

$$F_{(n,p,r)} = \binom{n-(p-1).r}{p}, \quad n \geq p \geq 0. \tag{2.5}$$

Demonstração. : Temos que formar subconjuntos com p elementos de modo que entre dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos para o subconjunto. Usando a técnica de sinais, deve-se organizar n sinais a começar pelo sinal de $(+)$, que representarão os p elementos escolhidos, separados por (r) sinais $(-)$ que representarão aqueles elementos que não participam do subconjunto, seguidos dos $n - p - (p-1).r$ sinais $(-)$ restantes. Com isso, a quantidade de elementos que não participarão do subconjunto, observando o número de intervalos existentes entre os p sinais $(+)$, equivale a $(p-1).r$. Retirando os $(p-1).r$ elementos do total de n elementos, deve-se escolher p elementos entre os $n-(p-1).r$ elementos restantes, e por isso temos:

$$F_{(n,p,r)} = \binom{n-(p-1).r}{p}, n \geq p \geq 0. \tag{2.6}$$

□

2.4 2° Lema de Kaplansky

O 2° Lema de Kaplansky é uma ligeira adaptação do 1° Lema e será de fundamental importância para a resolução do Problema de Lucas, vejamos um exemplo.

Exemplo 2.4.1: Dez amigos estão sentados em torno de uma mesa redonda. Dentre os dez amigos, quatro serão escolhidos para um jogo de mesa, chamado Catan, não sendo possível escolher amigos que se sentem ao lado, para facilitar a comunicação entre eles, bem como, para a visualização dos adversários no momento de definir as estratégias do jogo. Considerando essas regras, de quantas maneiras podemos formar a equipe?

Solução: A Figura 2.4 mostra a disposição dos amigos em torno da mesa. Veja que um possível subconjunto poderia ser formado pelas pessoas: $\{A, D, F, H\}$, mas, se a pessoa A não participar, poderemos incluir no grupo as pessoas B e J, então poderíamos formar o subconjunto: $\{B, D, G, J\}$, por exemplo.

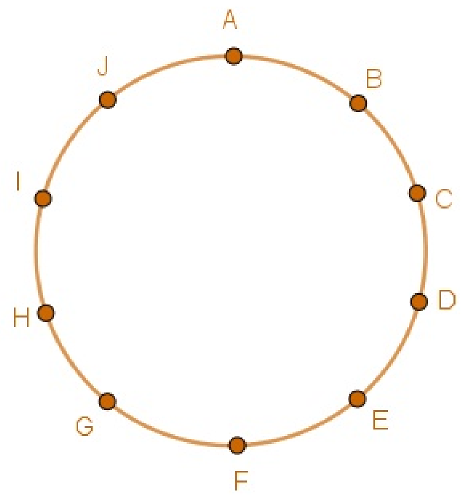


Figura 2.4: Dez pessoas em torno de uma mesa circular.

Como temos que considerar todas as possibilidades, ou seja, aquelas as quais a pessoa A irá participar do jogo e aquelas as quais a pessoa A não participará do jogo, podemos dividir o problema em dois casos.

1° **Caso - A pessoa A participa do jogo:**

Neste caso as pessoas B e J não poderão participar do jogo, assim teremos que escolher entre as demais, 3 pessoas não consecutivas para participar.

Observe que existem 10 pessoas, como a pessoa A irá participar e as pessoas B e J não puderam ser consideradas, teremos 7 pessoas para escolher 3 delas não consecutivas.

Podemos utilizar o 1° Lema de Kaplansky para calcular o número de maneiras de fazer a escolha.

$$F_{(7,3)} = \binom{n-p+1}{p} = \binom{7-3+1}{3} = \binom{5}{3} = 10. \tag{2.7}$$

2° **Caso - A pessoa A não participa do jogo:**

Neste caso podemos considerar as pessoas B a J. Como não foi escolhido nenhum participante para o jogo, é preciso escolher 4 pessoas não consecutivas entre as 9 restantes.

Novamente utilizando o 1° Lema de Kaplansky, temos:

$$F_{(9,4)} = \binom{n-p+1}{p} = \binom{9-4+1}{4} = \binom{6}{4} = 15. \tag{2.8}$$

Após realizar os cálculos relativos a análise dos dois casos, para finalizar, basta somar os resultados obtidos, ou seja, $10 + 15 = 25$, que é o número de maneiras de se formar os grupos.

Neste sentido, veremos a demonstração do 2° Lema Kaplansky.

Lema 2.5: (2° Lema de Kaplansky) Seja $G_{(n,p)}$ o número de subconjuntos de p elementos do conjunto K=$\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ nos quais não haja números consecutivos, considerando 1 e n consecutivos. Então:

$$G(n,p) = \frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}, \quad n-p \neq 0. \tag{2.9}$$

Demonstração. : De um conjunto formado por n elementos, é preciso escolher subconjuntos com p não consecutivos, considerando 1 e n consecutivos. Dividindo o problema em dois casos, iremos resolvê-lo com o 1° Lema de Kaplansky. No caso I, considera-se que o elemento 1 faz parte do subconjunto e que, consequentemente, os elementos adjacentes 2 e n não serão considerados. Utilizando o 1° do Lema, devemos escolher $(p-1)$ elementos dos $(n-3)$ elementos que restaram. No caso II, desconsidera-se a participação do elemento 1 no subconjunto, desta forma tem-se $(n-1)$ elementos, dos quais escolhe-se p elementos não consecutivos. Somando os resultados obtidos nos casos I e II, tem-se

$$G_{(n,p)} = F_{(n-3,p-1)} + F_{(n-1,p)} = \binom{(n-3)-(p-1)+1}{p-1} + \binom{(n-1)-p+1}{p}$$

$$= \binom{n-p-1}{p-1} + \binom{n-p}{p}.$$

Desenvolvendo os números binomiais, temos

$$G_{(n,p)} = \frac{(n-p-1)!}{(p-1)![n-p-1-(p-1)]!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-p-p)!}.$$

$$G_{(n,p)} = \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}.$$

Multiplicando a primeira parcela por $\frac{p}{p}$, segue que

$$G_{(n,p)} = \frac{(n-p-1)!p}{p!(n-2p)!} + \frac{(n-p)(n-p-1)!}{p!(n-2p)!}.$$

Desenvolvendo o termo $(n-p)!$, obtemos

$$G_{(n,p)} = \frac{(n-p-1)!(p+n-p)}{p!(n-2p)!} = \frac{(n-p-1)!n}{p!(n-2p)!}.$$

Multiplicando por $\frac{(n-p)}{(n-p)}$ temos,

$$G_{(n,p)} = \frac{(n-p-1)!n(n-p)}{p!(n-2p)!(n-p)} = \frac{(n-p)!n}{p!(n-2p)!(n-p)} = \frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}.\frac{n}{n-p}.$$

Observe que a primeira parcela equivale a $\binom{n-p}{p}$.

Finalizando a demonstração do 2° Lema de Kaplansky, temos:

$$G(n,p) = \frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}, \quad n-p \neq 0. \tag{2.10}$$

$\square$

2.4.1 Generalização do 2° Lema de Kaplansky

Exemplo 2.4.2: Voltando ao exemplo 2.4.1, considerando o grupo de 10 amigos sentados em torno de uma mesa circular, agora pretende-se formar grupos de 3 amigos, de modo que entre dois escolhidos haja no mínimo 2 amigos que não irão participar do jogo, garantindo um maior distanciamento.

Solução: Observe a figura 2.5, note que, se a pessoa A participa do grupo, é preciso que no mínimo, 2 pessoas à sua direita e 2 pessoas à sua esquerda não façam parte dele.

Com base nos exemplos apresentados para a demonstração do 2° Lema, a princípio, teremos que analisar caso a caso para garantir que seja considerada a participação de todas as pessoas no jogo. Se a pessoa A participa do jogo, as pessoas B, C, I e J

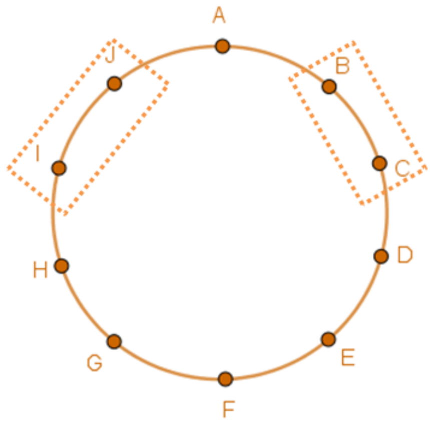


Figura 2.5: Grupo de 10 amigos em torno de uma mesa circular.

não poderão participar, mas, se a pessoa B participa, as pessoas C, D, A e J não poderão participar. Seguindo essa lógica, é preciso analisar caso a caso 3 pessoas consecutivas.

Usando a generalização do 1° Lema, poderemos chegar ao número de maneiras de escolher as duas outras pessoas para comporem o grupo.

Vamos calcular, primeiro, as possíveis maneiras de formar o grupo, em que a pessoa A participe dele. Existem 10 pessoas, escolhendo a pessoa A, desconsidera-se duas a sua direita e duas a sua esquerda, então, restarão 5 pessoas para escolher 2 delas, de modo que entre duas escolhidas haja no mínimo duas não escolhidas. Então temos:

$$F_{(5,2,2)} = \binom{5-(2-1).2}{2} = \binom{3}{2} = 3. \tag{2.11}$$

Considerando a participação da pessoa B, da mesma maneira, desconsidera-se duas pessoas a sua direita e duas a sua esquerda, e escolhe-se 2 pessoas entre as 5 restantes, de modo que entre duas escolhidas haja no mínimo duas não escolhidas, por:

$$F_{(5,2,2)} = \binom{5-(2-1).2}{2} = \binom{3}{2} = 3. \tag{2.12}$$

E para finalizar o ciclo, considerando a participação da pessoa C, de modo análogo ao que foi feito, temos:

$$F_{(5,2,2)} = \binom{5-(2-1).2}{2} = \binom{3}{2} = 3. \tag{2.13}$$

Note, se considerarmos a participação da pessoa D poderíamos incluir a pessoa A no grupo, no entanto, já contamos todas as possíveis formações que incluíam a pessoa A. Diante disso, para não contarmos esses casos duplamente, teremos que subtrair do total de elementos, aqueles que já foram analisados, e considerarmos os demais casos em que as pessoas D, E, F, G e H poderiam participar do grupo, sem que as pessoas A, B e C participassem. Portanto, teríamos que subtrair do total de 10 pessoas, àquelas as quais já consideramos a participação, e dentre as restantes, escolher as 3 que participarão do jogo, de modo que entre elas haja no mínimo duas que não participarão. Temos assim:

$$F_{(7,3,2)} = \binom{7-(3-1).2}{3} = \binom{3}{3} = 1. \tag{2.14}$$

Para concluir, soma-se os resultados de (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14) para chegar a:

$$3.F_{(5,2,2)} + F_{(7,3,2)} = 3.\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3.3 + 1 = 10,$$

que equivale ao total de grupos que podem ser formados.

Lema 2.6: (Generalização do 2° **Lema de Kaplansky)** O número de subconjuntos com p elementos do conjunto $K = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$ de modo que entre dois elementos escolhidos para o subconjunto haja, no conjunto, pelo menos r elementos não escolhidos, considerando 1 e n consecutivos, é uma função de n, p e r que corresponde a:

$$G(n,p,r) = \frac{n}{n-p.r}\binom{n-p.r}{p}. \tag{2.15}$$

Demonstração. : De um conjunto que contém n elementos, temos que escolher p de modo que entre dois elementos escolhidos, haja no conjunto pelo menos r elementos não escolhidos, sendo 1 e n consecutivos. Dispomos os elementos em um círculo, conforme figura 2.6:

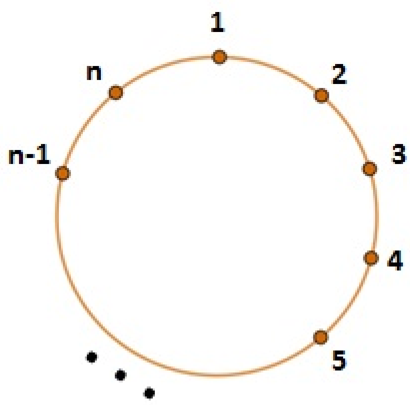


Figura 2.6: Círculo contendo n elementos.

Analisando caso a caso, como no exemplo 2.4.2, do jogo de mesa, escolhe-se r elementos e calcula-se o número de maneiras de se formar subconjuntos com cada um deles. Se começamos escolhendo o elemento 1, temos que desconsiderar $2r$ elementos, r a sua direita e r a sua esquerda. Observe que do total de n elementos, subtrai-se $2r$ deles, bem como o elemento já escolhido, no caso o elemento 1, ficando com $(n-2r-1)$ elementos no total. Dos quais serão escolhidos $(p-1)$ elementos de modo que entre dois elementos escolhidos, haja no conjuntos pelo menos r elementos não escolhidos. Pela generalização do 1° Lema de Kaplansky, temos:

$$F_{(n-2r-1,p-1,r)} = \binom{n-2r-1-(p-1-1).r}{p-1} = \binom{n-pr-1}{p-1}. \tag{2.16}$$

Essa função se repetirá r vezes.

$$r.F_{(n-2r-1,p-1,r)} = r.\binom{n-2r-1-(p-1-1).r}{p-1} = r.\binom{n-pr-1}{p-1}. \tag{2.17}$$

Após calcularmos os r casos, retira-se dos n elementos os r elementos já escolhidos, que equivale a $(n-r)$, depois disso calcula-se o número de maneiras de se formar subconjuntos com p elementos, de modo que entre dois elementos escolhidos haja pelo menos r elementos do conjunto não escolhidos. Novamente, utilizando a generalização do 1° Lema, temos:

$$F_{(n-r,p,r)} = \binom{n-r-(p-1).r}{p} = \binom{n-pr}{p}. \tag{2.18}$$

Finalmente, somando os resultados encontrados em (2.17) e (2.18), temos:

$$G(n,p,r) = r.\binom{n-pr-1}{p-1} + \binom{n-pr}{p}$$

$$= r.\frac{(n-pr-1)!}{(n-pr-1-p+1)!.(p-1)!} + \frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)!.p!}.$$

Multiplicando a primeira parcela por $\frac{p}{n-pr}.\frac{n-pr}{p}$, temos:

$$G(n,p,r) = r.\frac{p}{n-pr}.\frac{n-pr}{p}.\frac{(n-pr-1)!}{(n-pr-p)!.(p-1)!} + \frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)!.p!}$$

$$= \frac{rp}{n-pr}.\frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)!.p!} + \frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)!.p!}$$

$$= \left(\frac{rp.}{n-pr} + 1\right).\left(\frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)!.p!}\right)$$

$$= \left(\frac{n}{n-pr}\right).\frac{(n-pr)!}{(n-pr-p)!.p!}$$

$$= \frac{n}{n-pr}.\binom{n-pr}{p}.$$

$\square$

Concluíndo as demonstrações dos Lemas de Kaplansky.

No próximo capítulo veremos o Princípio da Inclusão e Exclusão e a definição de Permutações Caóticas, temas utilizados na solução do Problema de Lucas.

3 Princípio da Inclusão e Exclusão

Neste capítulo, veremos o Princípio da Inclusão e Exclusão que é uma fórmula para contar o número de elementos da união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos.

Veja situações que envolvem dois conjuntos, por meio de diagramas:

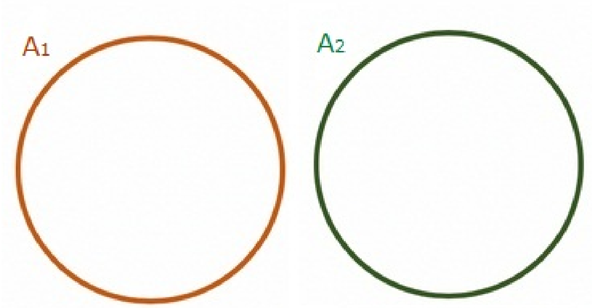


Figura 3.1: Conjuntos disjuntos

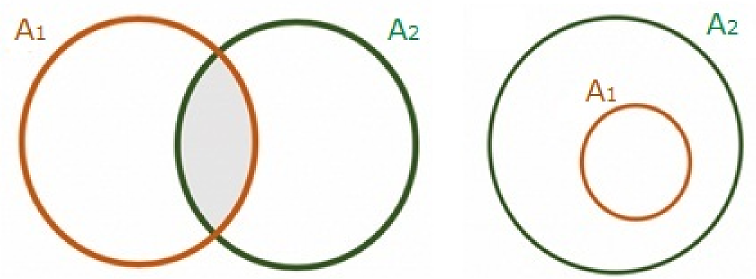


Figura 3.2: Conjuntos não disjuntos

As letras maiúsculas serão utilizadas para designar os conjuntos e as letras minúsculas, os elementos. O termo $n(A_1)$ irá indicar a cardinalidade do conjunto A_1.

Axioma 3.1: Sejam A_1 e A_2 conjuntos finitos tais que $(A_1 \cap A_2)=\emptyset$. Então $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2)$

Lema 3.2: Sejam A_1 e A_2 conjuntos finitos. Então $n(A_1 - A_2) = n(A_1) - n(A_1 \cap A_2)$.

Demonstração. Tendo em mente que $A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 - A_2)$, segue que $n(A_1) = n[(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 - A_2)]$.

Pelo Axioma 3.1, temos $n(A_1) = n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 - A_2)$, ou seja, $n(A_1 - A_2) = n(A_1) - n(A_1 \cap A_2)$. □

A versão mais simples da união de dois conjuntos não disjuntos, segundo Morgado (2000) [10], equivale ao teorema a seguir:

Teorema 3.3: (Príncipio da Inclusão e Exclusão para dois conjuntos): Sejam A_1 e A_2, conjuntos finitos, então $n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2)$.

Demonstração. Pretende-se contar o número de elementos da união de A_1 e A_2. Dado um elemento x, se x pertence a $(A_1 \cup A_2)$, pertencerá ou a somente um dos dois conjuntos ou aos dois conjuntos ao mesmo tempo. Se $x \in A_1$ e $x \notin A_2$, temos que $x \notin (A_1 \cap A_2)$, então, $n(A_1)$ conta x uma vez e $n(A_2)$ não conta x. O caso em que x pertence somente ao conjunto A_2 é análogo.

No entanto, se x pertence a ambos os conjuntos, $n(A_1)$ conta x uma vez, $n(A_2)$ conta x uma vez. Assim, para que essa dupla contagem não ocorra, conta-se x em $n(A_1)$, conta-se x em $n(A_2)$ e subtraímos x em $n(A_1 \cap A_2)$. Portanto, em qualquer das circunstâncias, se $x \in (A_1 \cap A_2)$ ou $x \notin (A_1 \cap A_2)$, temos:

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2).$$

□

O Princípio da Inclusão e Exclusão para três conjuntos será precedido pela resolução de uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio.

Exercício 3.0.1: (Enem-2004) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum das quais também 4 estarão em C_1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante conclui que, para montar os três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

a) 135

b) 126

c) 118

d) 114

e) 110

Solução: Pretende-se contar o número N de páginas originais a serem impressas para a confecção dos catálogos. No diagrama 3.3, que representa os conjuntos de páginas de C_1, C_2, C_3, pode-se verificar que existem interseções dos conjuntos dois a dois, que equivale ao número de páginas comuns a dois dos catálogos e interseções dos conjuntos três a três, que equivale ao número de páginas comuns a três catálogos ao mesmo tempo. Somando o número de páginas dos catálogos C_1, C_2, C_3, o número de páginas das interseções entre dois conjuntos é contado duas vezes, devendo ser subtraído uma vez. Com isso, o número de páginas comuns aos três conjuntos é contado três vezes, e substraído três vezes, então é preciso corrigir a contagem, somando-o uma vez.

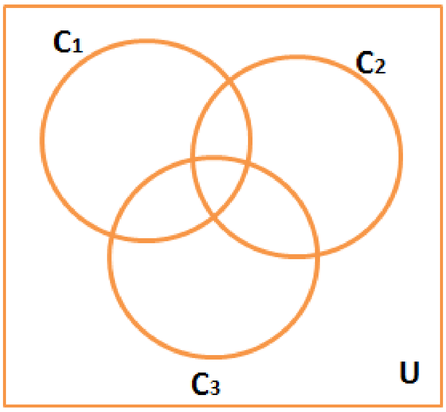


Figura 3.3: Diagrama dos catálogos de produtos

Com base nas informações, temos:

- Número de páginas de $C_1 = 50$.
- Número de páginas de $C_2 = 45$.
- Número de páginas de $C_3 = 40$.
- Número de páginas de $(C_1 \cap C_2) = 10$.
- Número de páginas de $(C_1 \cap C_3) = 6$.
- Número de páginas de $(C_2 \cap C_3) = 5$.
- Número de páginas de $(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 4$.

Portanto, a solução do exercício 3.0.1 é dada por:

$$N = 50 + 45 + 40 - 10 - 6 - 5 + 4 = 118,$$

que corresponde ao total de originais a serem impressas para a confecção dos catálogos.

Teorema 3.4: (Príncipio da Inclusão e Exclusão para três conjuntos): Sejam A_1, A_2 e A_3, conjuntos finitos, então $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) +$

$n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Demonstração. Pretende-se contar o número de elementos da união de A_1, A_2 e A_3. Dado um elemento x, se x pertence a $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, este pode pertencer a somente um dos três conjuntos, ou a dois deles, ou aos três conjuntos ao mesmo tempo.

Se $x \in A_1$ e $x \notin (A_i \cap A_j)$; $i, j = 2{,}3$, $i \neq j$, $n(A_1)$ conta x uma vez, $n(A_2)$ conta x zero vez, $n(A_3)$ conta x zero vez, $n(A_1 \cap A_2)$ conta x zero vez, $n(A_1 \cap A_3)$ conta x zero vez, $n(A_2 \cap A_3)$ conta x zero vez e $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x zero vez. Portanto, $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x uma vez. Os casos em que x pertence a somente (A_2) ou a somente (A_3) é análogo.

Se $x \in (A_1 \cap A_2)$ e $x \notin (A_3)$, temos que $n(A_1)$ conta x uma vez; $n(A_2)$ conta x uma vez; $n(A_3)$ conta x zero vez; $n(A_1 \cap A_2)$ conta x uma vez; $n(A_1 \cap A_3)$ conta x zero vez; $n(A_2 \cap A_3)$ conta x zero vez; $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ conta x zero vez. Novamente, $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x uma vez. Note que os casos em que $x \in (A_1 \cap A_3)$ e $x \notin (A_2)$ ou $x \in (A_2 \cap A_3)$ e $x \notin (A_1)$ são análogos.

Consideremos agora que $x \in (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Temos que $n(A_i)$, com $(i = 1{,}2{,}3)$, conta x uma vez; $n(A_i \cap A_j)$ conta x uma vez, com $(i{,}j = 1{,}2{,}3)$ e $i \neq j$, e $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x uma vez. No entanto, $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ conta x uma única vez, com isso, verifica-se o resultado. $\square$

Teorema 3.5: (Príncipio da Inclusão e Exclusão para k conjuntos): o número de elementos na união de k conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, ... A_k$, é dado por:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k) = n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} n(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < k} n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) +$$

$$\sum_{i \leq i_1 < i_2 < i_3 < k} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + ... + (-1)^{p-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p < k} n\left(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}\right) +$$

$$... + (-1)^{k-1} n\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right).$$

Demonstração. Dado um elemento x, se x pertence a apenas p conjuntos da lista $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$, então x será contado:

$$\binom{p}{1} \text{vezes em} \sum_{i=1}^{k} n(A_i);$$

$$\binom{p}{2} \text{vezes em} \sum_{i \leq i_1 < i_2 < k}^{k} n(A_{i_1} \cap A_{i_2});$$

$$\binom{p}{3} \text{vezes em} \sum_{i \leq i_1 < i_2 < i_3 < k}^{k} n(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3});$$

$$\vdots$$

$$\binom{p}{p} \text{vezes em} \sum_{i \leq i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_p < k}^{k} n\left(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}\right).$$

A interseção de mais de p conjuntos não terá contribuição alguma na contagem de aparições do elemento x, já que x pertence à exatamente p conjuntos entre A_1, A_2, A_3, ..., A_k.

Com isso, é necessário provar que x é contado apenas uma vez no somatório abaixo:

$$\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \binom{p}{j}.$$

Para $x \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$, segue da expansão binomial que:

$$(x+1)^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} x^j. \tag{3.1}$$

Substituindo x por -1 na Equação (3.1), e sabendo que $\binom{p}{0} = 1$, temos

$$0 = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \ldots + (-1)^p \binom{p}{p}.$$

E, portanto,

$$\binom{p}{0} = 1 = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} \binom{p}{j}.$$

Isso conclui a demonstração. □

3.1 Permutações Caóticas

As permutações caóticas ou os desarranjos utilizam do Princípio da Inclusão e Exclusão e serão de grande importância para a resolução do Problema de Lucas no próximo capítulo. É denominada caótica uma permutação em que nenhum elemento do conjunto permanece em sua posição original.

Definição 3.6: Uma permutação de m elementos, sendo eles $(a_1, a_2, a_3, ..., a_m)$, é dita caótica se nenhum a_i ocupar a i-ésima posição, para todo $i = 1,2,...,m$.

Dado o conjunto (a_1, a_2, a_3, a_4), existem 24 modos de permutar seus elementos. Ordenar os elementos da forma: (a_2, a_4, a_1, a_3) caracteriza uma permutação caótica, enquanto que da forma: (a_2, a_4, a_3, a_1) não caracteriza, pois a_3 ocupa sua posição original. Mas, quantas são as permutações caóticas de um conjunto com quatro elementos?

Seja D_4 o número de permutações caóticas de 4 elementos e:

$A = \{$Conjunto das permutações dos 4 elementos$\}$;

$A_i = \{$Conjunto das permutações em que a_i ocupa a i-ésima posição, com $i \in \mathbb{Z}$ e $1 \leq i \leq 4\}$.

Então D_4 é o resultado da diferença entre o número total de permutações e o número de permutações as quais os elementos estão em sua posição original, que corresponde a:

$$D_4 = 4! - n\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\right).$$

Temos $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = 3!$.

Com relação as interseções possíveis entre os $A_i s$, com $1 \leq i \leq 4$, bem como quantas permutações existem, com dois ou três ou quatro elementos em suas posições originais, temos que:

• O número de interseções entre dois dos conjuntos é equivalente a $\binom{4}{2} = 6$. E fixando dois dos elementos, em sua posição original, o total é de 2! permutações.

• O número de interseções entre três dos conjuntos é equivalente a $\binom{4}{3} = 4$. E fixando três dos elementos, em sua posição original, o total é de 1! permutação.

• O número de interseções entre quatro dos conjuntos é igual a $\binom{4}{4} = 1$. E fixando quatro elementos, em sua posição original, o total é de $0! = 1$ permutação.

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão:

$$n\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\right) = \binom{4}{1}.3! - \binom{4}{2}.2! + \binom{4}{3}.1! - \binom{4}{4}.0! = 24 - 12 + 4 - 1 = 15.$$

Finalmente:

$$D_4 = 24 - 15 = 9,$$

que equivale as permutações caóticas de um conjunto com quatro elementos distintos.

3.1.1 O cálculo de D_m

Generalizando agora para um conjunto de m elementos $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$. Seja D_m o número de permutações caóticas de m elementos, e sejam:

$A = \{$Conjunto das permutações de m elementos$\}$

$A_i = \{$Conjunto das permutações em que a_i ocupa a i-ésima posição, com $i \in \mathbb{Z}$ e $1 \leq i \leq m$ $\}$.

Assim, $n(A) = m!$; $n(A_i) = (m-1)!$; $n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = (m-2)!$,..., $n\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) = 1$.

As interseções possíveis entre os $A_i s$, com $1 \leq i \leq m$, bem como quantas permutações existem, com dois ou três, ..., ou m elementos em suas posições originais, ocorre da seguinte forma:

• O número de interseções entre dois dos conjuntos é equivalente a $\binom{m}{2}$. E fixando dois dos elementos, em sua posição original, o total é de $(m-2)!$ permutações.

• O número de interseções entre três dos conjuntos é equivalente a $\binom{m}{3}$. E fixando três dos elementos, em sua posição original, o total é de $(m-3)!$ permutações.

$\vdots$

• O número de interseções entre m dos conjuntos é igual a $\binom{m}{m} = 1$. E fixando m elementos, em sua posição original, o total é de $0! = 1$ permutação.

Daí, podemos definir:

$$D_m = n(A) - n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right). \tag{3.2}$$

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, segue que:

$$D_m = m! - \left[\binom{m}{1}(m-1)! - \binom{m}{2}(m-2)! + ... + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}(m-m)!\right]$$

$$= m! - \frac{m!}{1!} + \frac{m!}{2!} - \frac{m!}{3!} + ... + (-1)^m \frac{m!}{m!}$$

$$= m!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^m \frac{1}{m!}\right) \tag{3.3}$$

Neste sentido, resolveremos uma questão que exige conhecimento desse conteúdo.

Exercício 3.1.1: Há 6 encomendas endereçadas a 6 pessoas distintas. Neste caso, qual a probabilidade de que, ao se entregar as encomendas, nenhuma delas seja entregue ao destinatário correto?

Solução: Existem 720 modos de realizar a entrega das encomendas aos destinatários.

No entanto, queremos encontrar o número de maneiras de realizar a entrega, de modo que nenhuma encomenda chegue ao destinatário a qual esta endereçada, para então calcular a probabilidade, considerando o que o resultado representa no total de possibilidades.

Subtraindo do total encontrado àquelas maneiras as quais, pelo menos uma, duas, três, quatro, cinco ou seis encomendas seja entregue ao destinatário correto, podemos encontrar o resultado desejado. Resolver esse problema equivale a encontrar o número de permutações caóticas das encomendas, daí temos:.

$$m!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^m \frac{1}{m!}\right) =$$

$$6!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = 265$$

Portanto, a probabilidade de que, ao se entregar as encomendas, nenhuma delas seja entregue ao destinatário correto é: $\frac{265}{720} = 37\%$, aproximadamente.

Finalmente, no próximo capítulo veremos o Problema de Lucas.

4

O Problema de Lucas

O matemático François Édouard Anatole Lucas [1], nasceu em 1842 em Amiens, França, e faleceu em 1891 em Paris, França. Lucas é conhecido por seus resultados na teoria dos números, estudou a sequência de Fibonacci, criou métodos para testar a primalidade e para provar que o número de Mersenne $(2^{127} - 1) =$ 170141183460469231731687303715884105727 é primo . Este continua sendo o maior número primo descoberto sem o auxílio de um computador.

Figura 4.1: Matemático Édouard Lucas.

Fonte: < https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lucas/>

Durante a Guerra Franco-Prussiana $(1870 - 1871)$, Lucas serviu como oficial de artilharia. Depois que os franceses foram derrotados, Lucas tornou-se professor de matemática no Lycée Saint Louis, em Paris. Mais tarde, tornou-se professor de matemática no Lycée Charlemagne, também em Paris.

O Problema de Lucas foi formulado em 1891 e também é conhecido como Ménege Problem. Este capítulo é destinado a sua resolução e para tal utilizaremos o 2° Lema de Kaplansky.

De quantas maneiras m casais podem se sentar em $2m$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?

Antes de chegar ao Problema de Lucas, iremos resolver os casos particulares para 1, 2 e 3 casais.

Solução:

Quando $m = 1$, temos um casal, e não há solução. Portanto, 0 maneira.

Quando $m = 2$, temos dois casais, mas é impossível acomodá-los em torno de um círculo sem que pessoas do mesmo sexo e o casal fiquem separados. Neste caso, a solução também é 0.

Quando $m = 3$, temos três casais. Para resolver esse caso serão definidos alguns procedimentos:

• Nomear as pessoas, os homens de H_1, H_2, H_3 e as mulheres, M_1, M_2, M_3, formando dois grupos.

• Numerar os lugares de 1 a 6, pois são distintos.

• Escolher qual grupo se sentará primeiro, isso para que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas, definir os lugares pares ou ímpares, isto equivale a 2 opções de escolha.

Definindo o grupo que irá se sentar primeiro, por exemplo, as mulheres, é preciso contar todas as maneiras de se fazer isso. Que pode ser feito de $3! = 6$ maneiras.

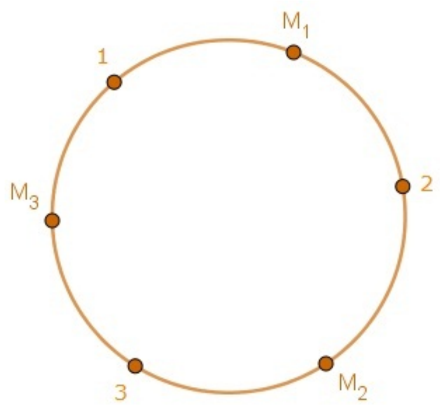


Figura 4.2: Círculo com 3 mulheres.

Depois disso, devemos contar o número de maneiras de acomodar os homens de modo que nenhum deles se sentem ao lado de sua mulher. Todas as possíveis maneiras de se fazer isso será denotada por U_3.

Seja S_3 a solução do Problema de Lucas para $m = 3$. Note que ela é dada por:

$$S_3 = 2.3!.U_3. \tag{4.1}$$

Então, queremos encontrar o valor de U_3.

Já que as mulheres foram acomodadas, pode-se redefinir os lugares como 1, 2 e 3, conforme figura 4.2. E sejam:

$A = \{$Conjunto das permutações dos homens$\}$.

$A_i = \{$Conjunto das permutações dos homens em que o $i-$ésimo homem está à direita de sua mulher, com $1 \leq i \leq 3\}$.

$A_i^{'} = \{$Conjunto das permutações dos homens em que o $i-$ésimo homem está à esquerda de sua mulher, $1 \leq i \leq 3\}$.

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, segue que:

$$U_3 = n(A) - n(A_1 \cup A_1^{'} \cup A_2 \cup A_2^{'} \cup A_3 \cup A_3^{'}).$$

Assim, temos:

$n(A) = 3!$, que equivale a todas as permutações possíveis;

$n(A_i) = n(A_i^{'}) = (n-1)! = 2!$, que equivale a fixar um dos homens e permutar os demais;

$n(A_i \cap A_i^{'}) = 0$, pois não há como um homem ocupar duas posições diferentes ao mesmo tempo (à direita e à esquerda de sua mulher). Além disso, dois homens distintos não podem ocupar uma mesma posição. Deste modo $n(A_1^{'} \cap A_2) = n(A_2 \cap A_2^{'}) = n(A_3 \cap A_3^{'}) = 0$.

O número de elementos da interseção de dois conjuntos não consecutivos é igual a 1, pois neste caso considera-se dois homens fixos.

Para o cálculo do número de interseções possíveis entre os A_i e $A_i^{'}$, uma vez que não podemos escolher dois conjuntos consecutivos, e A_1 e $A_3^{'}$ são consecutivos, usaremos o 2° Lema de Kaplansky, assim:

$$G(6{,}2) = \frac{6}{6-2}\binom{6-2}{2} = \frac{3}{2}.6 = 9.$$

Então, a soma das cardinalidades das interseções de dois conjuntos é $9.1! = 9$.

O número de elementos da interseção de 3 conjuntos será igual a 1, uma vez que as mulheres estão em posições prefixadas. Logo a soma das cardinalidades das interseções de 3 conjuntos é $2.1 = 2$.

O número de interseções de 3 conjuntos será calculado da mesma maneira, note que ela será nula se escolhemos dois conjuntos consecutivos, então:

$$G(6{,}3) = \frac{6}{6-3}\binom{6-3}{3} = 2.$$

O número de elementos da interseção de 4 conjuntos é sempre zero, pois, escolhendo 4 conjuntos quaisquer sempre teremos dois deles consecutivos.

Finalmente, temos:

$$U_3 = n(A) - n(A_1 \cup A_1^{'} \cup A_2 \cup A_2^{'} \cup A_3 \cup A_3^{'}) = 3! - 6.2! + 9.1 - 2.1 + 0 = 1.$$

Logo, o número de maneiras de acomodar 3 casais em torno de um círculo sem que pessoas do mesmo sexo se sentem juntas e nenhum homem fique ao lado de sua mulher é:

$S_3 = 2.3!.1 = 12.$

Concluindo, assim, a resolução do Problema de Lucas para o caso $m = 3$.

Solução do Problema de Lucas para m casais:

Adotaremos os seguintes procedimentos para acomodar $2m$ pessoas:

• Nomear as pessoas: homens de H_1,H_2,H_3,...,H_m e mulheres, M_1,M_2,M_3,...,M_m formando dois grupos.

• Numerar os lugares de $1, 2, 3$,...,$2m$ (1° passo - Figura 4.3).

• Escolher qual grupo se sentará primeiro, se nos lugares pares ou nos ímpares, para que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas. Isso pode ser feito de 2 modos. (2° passo - Figura 4.3)

• Redefinir os lugares, como 1,2,3, ...,m, (3° passo - Figura (4.3).

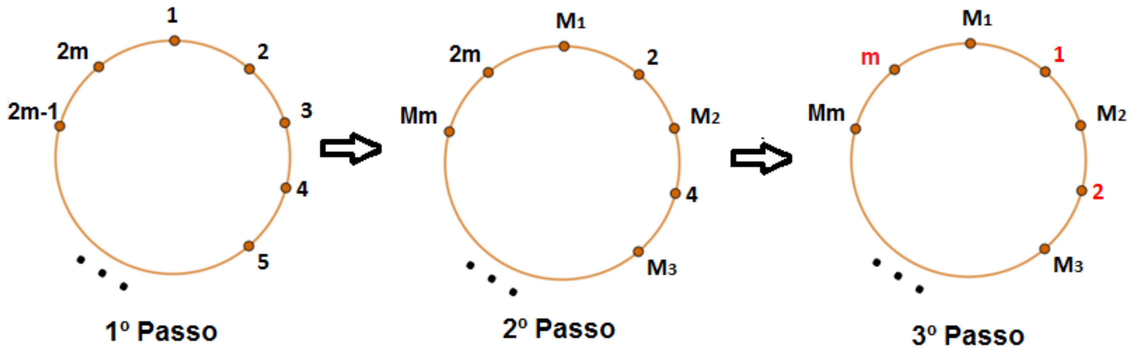


Figura 4.3: Círculo com 2m lugares.

Definindo que as mulheres se sentarão primeiro, o número de maneiras de acomodá-las pode ser feito de $m!$ modos.

Feito isso, devemos contar o número de maneiras de acomodar os homens, considerando que nenhum deles pode se sentar ao lado de sua mulher. Sejam U_m o número de maneiras de acomodá-los e S_m a solução do Problema de Lucas para m casais, temos que:

$$S_m = 2.m!.U_m. \tag{4.2}$$

Para encontrar U_m definiremos:

$A = \{$Conjunto das permutações dos homens$\}$.

$A_i = \{$Conjunto das permutações dos homens em que o $i-$ésimo homem está à direita de sua mulher, com $1 \leq i \leq m\}$.

$A_i^{'} = \{$Conjunto das permutações dos homens em que o $i-$ésimo homem está à esquerda de sua mulher, $1 \leq i \leq m\}$.

Pelo Princípio da Inclusão e Exclusão, podemos determinar U_m da seguinte forma:

$$U_m = n(A) - n(A_1 \cup A_1{}' \cup A_2 \cup A_2{}' \cup A_3 \cup A_3{}' \cup ... \cup A_{m-1} \cup A'{}_{m-1} \cup A_m \cup A'{}_m).$$

Sendo:

$n(A) = m!$, que são todas as permutações possíveis.

$n(A_i) = n(A_i{}') = (m-1)!$, que equivale a fixar um dos homens e permutar os demais.

O número de elementos da interseção de dois conjuntos não consecutivos é $(m-2)!$, o mesmo vale para (A_1) e $(A_m{}')$ que são consecutivos. Lembre-se que não há como um homem ocupar duas posições diferentes ao mesmo tempo (à direita e à esquerda de sua mulher) e dois homens distintos não podem ocupar uma mesma posição.

Usando o 2° Lema de Kaplansky, temos que a soma das cardinalidades das interseções de dois conjuntos é dada por:

$$G(2m,2)(m-2)! = \frac{2m}{2m-2}\binom{2m-2}{2}.(m-2)!$$

A cardinalidade da interseção de 3 conjuntos será calculada da mesma maneira, note que também será nula se escolhermos dois conjuntos consecutivos.

O número de elementos da interseção de 3 conjuntos não consecutivos será igual a $(m-3)!$, pois fixados 3 dos homens, os demais podem ser permutados, assim a soma das cardinalidades das interseções de 3 conjuntos é dada por:

$$G(2m,3)(m-3)! = \frac{2m}{2m-3}\binom{2m-3}{3}.(m-3)!.$$

Analogamente, a interseção de p dos conjuntos A_1, $A'{}_1$, A_2, $A'{}_2$, A_3, $A'{}_3$,...,A_{m-1}, $A'{}_{m-1}$, A_m, $A'{}_m$, com dois deles não consecutivos, sendo A_1 e $A'{}_m$ consecutivos, é uma permutação $(m-p)!$, com $m \geq p$ e p elementos fixos.

Então, a soma das cardinalidades das interseções de p conjuntos é dada por:

$$G(2m,p)(m-p)! = \frac{2m}{2m-p}\binom{2m-p}{m}.(m-p)!.$$

Note que se considerarmos as interseção de mais de m conjuntos, todas serão nulas, uma vez que teremos pelo menos dois conjuntos consecutivos.

Finalmente, temos:

$$U_m = n(A) - n(A_1 \cup A'{}_1 \cup A_2 \cup A'{}_2 \cup A_3 \cup A'{}_3 \cup ... \cup A_m \cup A'{}_m)$$

$$= m! - 2m.(m-1)! + \frac{2m}{2m-2}\binom{2m-2}{2}.(m-2)! - \frac{2m}{2m-3}\binom{2m-3}{3}.(m-3)! + ...$$

$$+(-1)^m.\frac{2m}{2m-m}\binom{2m-m}{m}.(m-m)!.$$

$$= \sum_{p=0}^{m}(-1)^p.\frac{2m}{2m-p}\binom{2m-p}{p}.(m-p)!.$$

Logo, o número de maneiras de acomodar m casais em torno de um círculo de modo que duas pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas e nenhum homem fique ao lado de sua mulher é:

$$S_m = 2.m!.\sum_{p=0}^{m}(-1)^p.\frac{2m}{2m-p}\binom{2m-p}{p}.(m-p)! \tag{4.3}$$

Concluindo a resolução do Problema de Lucas para m casais.

Veremos a seguir a resolução do Problema de Lucas para 4 casais.

Exemplo 4.0.1: De quantas maneiras 4 casais podem se sentar em 8 cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?

Solução: Substituindo $m = 4$ na equação (4.3), temos:

$$S_4 = 2.4!.\sum_{p=0}^{4}(-1)^p.\frac{8}{8-p}\binom{8-p}{p}.(4-p)!$$

Para $p = 0$:

$$(-1)^0.\frac{8}{8}\binom{8}{0}.(4)! = 24.$$

Para $p = 1$:

$$(-1)^1.\frac{8}{7}\binom{7}{1}.(3)! = -48.$$

Para $p = 2$:

$$(-1)^2.\frac{8}{6}\binom{6}{2}.(2)! = 40.$$

Para $p = 3$:

$$(-1)^3.\frac{8}{5}\binom{5}{3}.(1)! = -16.$$

Finalmente, para $p = 4$:

$$(-1)^4.\frac{8}{4}\binom{4}{4}.(0)! = 2.$$

Logo, temos $S_4 = 48.(24 - 48 + 40 - 16 + 2) = 96$ maneiras de acomodar 4 casais em torno de um círculo, de modo que nenhum homem esteja ao lado de sua mulher e que duas pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas.

5 Geometria Combinatória

Não é comum, mas existem vários problemas que envolvem esses dois conceitos matemáticos, a geometria e a combinatória, por exemplo. Neste capítulo veremos alguns problemas desse tipo e trabalharemos com figuras geométricas, bem como com pontos, retas, planos, círculos, polígonos convexos, sem citar métodos construtivos, mas com o objetivo de explorar as propriedades combinatórias dentro da geometria. A princípio, faremos uma breve contextualização histórica e na sequência é possível encontrar algumas definições de geometria plana.

5.1 Uma breve contextualização histórica

Não podemos falar de geometria sem citar nomes como Euclides, Pitágoras e Tales de Mileto. Imagina-se que a geometria tenha surgido às proximidades do rio Nilo devido à necessidade de medir as áreas das terras e redistribuí-las àqueles que ficaram prejudicados por causa das enchentes, bem como para recalcular a cobrança de impostos pelo rei da época.

Com base nos escritos de Roque (2012, p. 60) [16], a história tradicional nos conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI antes da era contemporânea e foi influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios. Dizem que um dos seus feitos teria sido o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito. No final do século VII a.E.C, diversas realizações tecnológicas podem ter contribuído para o desenvolvimento da matemática e alguns termos de geometria já apareciam na arquitetura.

A matemática pitagórica, datada da primeira metade do século V a.E.C, teria feito a transição entre as épocas, de Tales e Euclides. A geometria e aritmética caminhavam juntas. A exemplo disso podemos citar os números figurados de Pitágoras que consistiam em pontos, representados por pedrinhas, que também não eram pontos matemáticos, mas remetiam a elementos discretos. No entanto, a descoberta das grandezas incomensuráveis por um pitagórico contribuiu para a separação entre a geometria e a aritmética, a primeira devendo se dedicar às grandezas geométricas e a segunda aos números. Esta separação é um dos traços marcantes da geometria grega, e como ela se desenvolveu com Euclides.

Euclides nasceu por volta do ano 300 a.E.C, em Alexandria, cidade portuária do Mediterrâneo no Egito. É conhecido como o pai da geometria, foi professor de matemática na Escola Real de Alexandria liderou a criação de os "Elementos de Euclides", que é considerado um dos mais notáveis trabalhos da matemática de todos os tempos.

Com Euclides, a matemática grega pode ter adquirido nova configuração, os Elementos que constituem um conjunto de treze livros, escritos por volta do ano 300 a.E.C, empregavam enunciados geométricos gerais que não envolviam somente procedimentos de medida, mas toda uma formalização matemática com objetivo de mostrar uma geometria única, válida para grandezas comensuráveis ou incomensuráveis.

5.1.1 Um pouco de Geometria Combinatória

Podemos iniciar com a seguinte pergunta: O que é geometria combinatória? De acordo com Lovász, Pelikán e Vesztergobmbi (2010) [9], ao falarmos de geometria combinatória, estamos na verdade tratando de problemas de geometria que em sua resolução podemos utilizar conceitos de análise combinatória, como a combinação por exemplo. A recíproca também é verdadeira, visto que também podemos resolver problemas de combinatória, aplicando conceitos de geometria.

Pensando no ensino da geometria nos dias de hoje, queremos mostrar que a geometria não deve estar limitada a uma única linguagem. Faremos aqui o uso dessa liberdade para explorar um pouco da geometria e combinatória na resolução de problemas, o que não é muito usual, com objetivo de que professores e alunos encontrem novas perspectivas para o ensino e aprendizagem desses conteúdos.

Segundo Morgado (1991, p. 1) [10], podemos dizer que a análise combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas, não apenas o estudo de combinações, arranjos e permutações. A análise combinatória trata de vários outros tipos de problemas.

É importante mostrar aos alunos que a análise combinatória não está limitada apenas ao uso de fórmulas, mas pode ser empregada em situações que exigem análise cuidadosa do problema.

A teoria de L. P. Ramsey (1903-1930) é um grande exemplo, pois faz o uso de combinatória e geometria. O chamado teorema de Ramsey afirma que se tivermos no plano um conjunto de n pontos, com $n \geq 6$, no qual não há 3 pontos colineares e unirmos todos os pontos dois a dois, usando duas cores distintas, por exemplo, para traçar os segmentos de reta que unirão os pontos, teremos formado um triângulo cujos lados são todos da mesma cor.

Quando analisamos os livros didáticos do ensino médio, encontramos questões que exigem conhecimento nestas áreas. Vejamos dois exemplos retirados do livro Matemática, 3^a Ed. - Ed. Moderna, 2015 [15].

Exemplo 5.1.1: Considere o polígono convexo $ABCDEFG$ representado abaixo

a) Quantos segmentos de reta têm extremos em 2 vértices distintos do polígono?

b) Quantos dos segmentos de reta obtidos no item anterior são diagonais do polígono $ABCDEFG$?

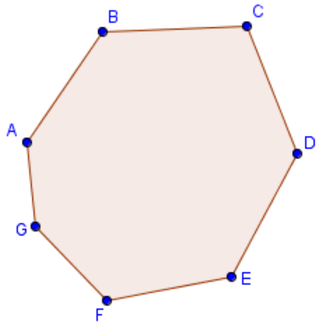


Figura 5.1: Figura retirada do livro Matemática, Ed. Moderna, 2015, p. 392.

Solução:

a) Queremos formar segmentos de reta a partir de dois vértices do heptágono. Note que a ordem dos vértices escolhidos não altera o segmento formado, então o número de segmentos é dado por:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7.6}{2} = 21.$$

Portanto, pode-se formar 21 segmentos a partir dos vértices do heptágono.

b) Como queremos encontrar as diagonais do heptágono, e a diagonal de um polígono é o segmento de reta entre dois vértices não consecutivos, é preciso desprezar a quantidade de lado do heptágono, então basta fazer:

$$d = \binom{7}{2} - 7 = 21 - 7 = 14.$$

Temos que o heptágono possui 14 diagonais.

Exemplo 5.1.2: Considere 7 pontos distintos, A, B, C, D, E, F e G, de uma circunferência, conforme a figura.

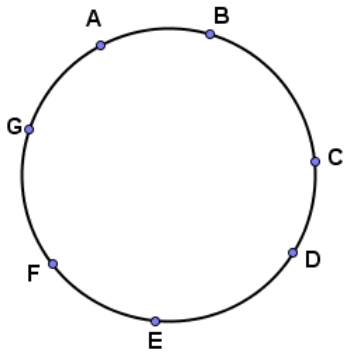


Figura 5.2: Figura retirada do livro Matemática, Ed. Moderna, 2015, p. 393.

a) Quantas retas ficam determinadas por esses pontos?

b) Quantos triângulos ficam determinados por esses pontos?

c) Quantos quadriláteros convexos ficam determinados por esses pontos?

d) Quantos pentágonos convexos ficam determinados por esses pontos?

e) De todos os pentágonos convexos determinados por esses pontos, quantos têm como vértice o ponto A?

f) De todos os pentágonos convexos determinados por esses 7 pontos, quantos têm como lado o segmento $\overline{AB}$?

Solução:

a) Dados sete pontos em uma circunferência, pretende-se formar retas a partir de dois pontos. Note que escolher os pontos A e B é o mesmo que escolher os pontos B e A, independente da ordem, estamos tratando de uma mesma reta. Então o número de retas é dado por:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7.6}{2} = 21.$$

Chegando ao total de 21 retas.

b) Temos que um triângulo é determinado por três pontos não colineares. Considere o conjunto de pontos $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ dispostos sobre a circunferência. Note que não existem três pontos colineares nesse conjunto, então, qualquer agrupamento de três pontos distintos determinará um triângulo. Temos também que a ordem dos três pontos escolhidos não altera o triângulo formado, assim o número de triângulos pode ser encontrado por:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35.$$

c) De maneira análoga ao que foi feito para calcular o número de triângulos, temos que o número de quadriláteros convexos determinados por esses sete pontos é dado por:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{3!4!} = 35.$$

d) Então, de maneira análoga ao item c), o número de pentágonos pode ser encontrado calculando:

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{2!5!} = 21.$$

e) Pretende-se formar pentágonos que tenham sempre o ponto A como vértice. Fixado o ponto A, é preciso escolher entre os seis pontos restantes os quatro que formarão pentágonos convexos, tendo sempre o ponto A com vértice. Então, podemos encontrar o número de pentágonos, subtraindo um ponto do conjunto e calculando:

$$\binom{7-1}{5-1} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{2!4!} = 15.$$

f) Agora, pretende-se formar pentágonos que tenham sempre o segmento $\overline{AB}$ como lado do polígono. Fixado o segmento $\overline{AB}$, é preciso escolher entre os cinco pontos restantes quatro que formarão pentágonos convexos tendo sempre o segmento $\overline{AB}$ como lado. Então, podemos encontrar o número de pentágonos, retirando os pontos A e B do conjunto e calculando:

$$\binom{7-2}{5-2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

Finalizando a resolução dos exemplos.

Os dois exemplos relacionam à geometria com a análise combinatória. No entanto podemos trabalhar com problemas mais desafiadores que correlacionam essas duas áreas da matemática, de modo que professores e alunos estejam motivados e em busca de novos desafios.

5.2 Algumas definições de geometria plana

Apresentaremos algumas definições que serão úteis ao longo desse capítulo.

5.2.1 Ângulos

Definição 5.1: Dadas no mesmo plano duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, um ângulo (ou região angular) de vértice A e lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Um ângulo pode ser convexo ou côncavo. Conforme figura 5.3, o ângulo α é definido como sendo convexo, e o ângulo β é definido como sendo côncavo.

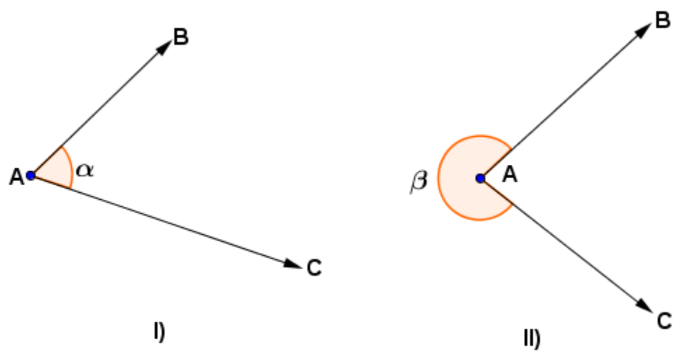


Figura 5.3: Regiões angulares no plano.

As letras gregas minúsculas serão usadas para representar medidas de ângulos e o termo $\angle BAC = \theta°$ para indicar a medida do ângulo em graus. Habitualmente, escrevemos $\angle BAC$, que se referente ao ângulo convexo $\angle BAC$, tal que $0 < \angle BAC <$

180°. O ângulo $\angle BAC$ é agudo quando $0 < \angle BAC < 90°$, reto quando $\angle BAC = 90°$, obtuso quando $90° < \angle BAC < 180°$ e raso quando $\angle BAC = 180°$.

Muitas vezes, é útil ter um nome associado a dois ângulos cuja soma das medidas seja igual a 90°, 180° ou 360°. Se dois ângulos possuem essa propriedade são chamados complementares, suplementares e replementares, respectivamente. Assim, temos que:

- α e β são as medidas de dois ângulos complementares, se $\alpha + \beta = 90°$.
- α e β são as medidas de dois ângulos suplementares, se $\alpha + \beta = 180°$.
- α e β são as medidas de dois ângulos replementares, se $\alpha + \beta = 360°$.

5.2.2 Polígonos

Definição 5.2: Um polígono é uma região do plano limitada (de área finita) por uma poligonal fechada que determina seus lados.

Usaremos letras maíusculas para determinar os vértices do polígono. Os lados são segmentos de reta que possuem pontos extremos; dados dois pontos, sejam A e B, então a medida desse segmento será definida por AB.

Os polígonos são classificados com convexos e não-convexos.

Definição 5.3: Um polígono é convexo quando qualquer segmento que une dois de seus pontos está inteiramente contido nele.

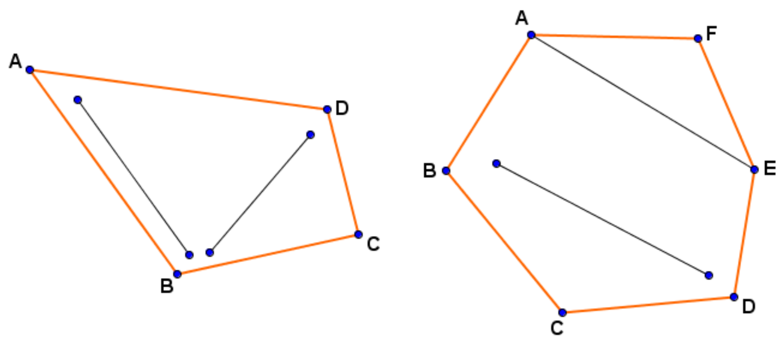


Figura 5.4: Polígonos convexos.

Definição 5.4: Um polígono é não-convexo quando houver algum segmento com extremidades nele, mas com pelo menos um ponto do segmento fora dele.

5.2.3 Ângulo replementar em polígonos

O conceito de ângulo replementar não é muito comum, iremos explorar esse conceito analisando alguns casos em polígonos convexos e polígonos não-convexos.

Considere um polígono qualquer, sem perda de generalidade, suponha que seja o polígono $ABCD$ e sejam α e β dois ângulos desse polígono, conforme (figura 5.6). No caso I, trata-se de um polígono convexo, então, $\angle ABC = \alpha$, com $0 < \alpha < 180°$, e o replementar de $\angle ABC = \beta$, consequentemente, $\beta > 180°$. Esse fato ocorre com todos os ângulos desse polígono, ou seja esse polígono possui todos os ângulos menores que 180°.

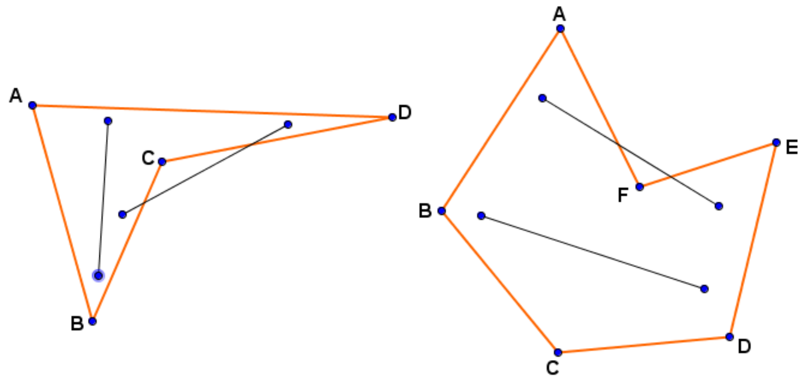


Figura 5.5: Polígonos não-convexos.

No caso II, se considerarmos o $\angle ABC$, temos que $\angle ABC < 180°$, no entanto, isso não ocorre com todos os ângulos desse polígono, observe que o $\angle BCD = \alpha < 180°$ e o replementar do $\angle BCD = \beta > 180°$, e encontra-se no interior do polígono. Isso caracteriza um polígono não-convexo.

É interessante salientar que no caso I o replementar está no exterior do polígono e no caso II o replementar encontra-se no interior dele.

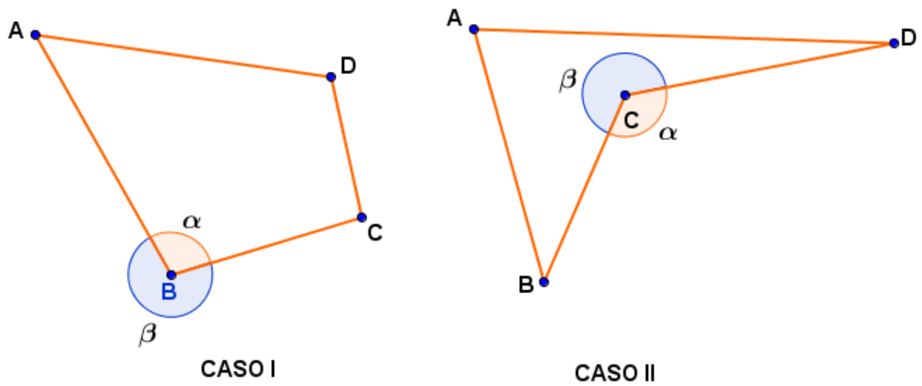


Figura 5.6: Ângulo replementar.

6

Alguns exemplos de Geometria Combinatória

Neste capítulo, veremos alguns problemas envolvendo geometria e análise combinatória, o Problema do Final Feliz e os desdobramentos que surgiram a partir dele.

6.1 Contagem de interseções de diagonais de um polígono convexo

Vamos analisar os pontos de interseção das diagonais de um dado polígono. Quantas são as interseções das diagonais de um polígono de n vértices? Primeiramente, assuma que ele não tem três diagonais passando pelo mesmo ponto, que os vértices não são contados como interseções e não serão consideradas interseções de diagonais fora do polígono convexo.

A figura 6.1 é um exemplo. O ponto laranja é uma "boa interseção", e será contado, mas o ponto circulado fora do polígono não será considerado.

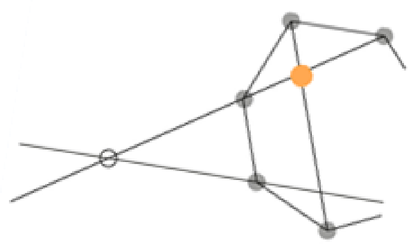


Figura 6.1: Interseção de diagonais de um polígono.

Vamos analisar agora o hexágono. Quantas interseções possuem suas diagonais, considerando apenas aquelas que definimos como sendo de "boa interseção"?

Para resolver esse problema, podemos começar contando os pontos de interseção relativo a cada diagonal. No final, somamos todos os resultados obtidos.

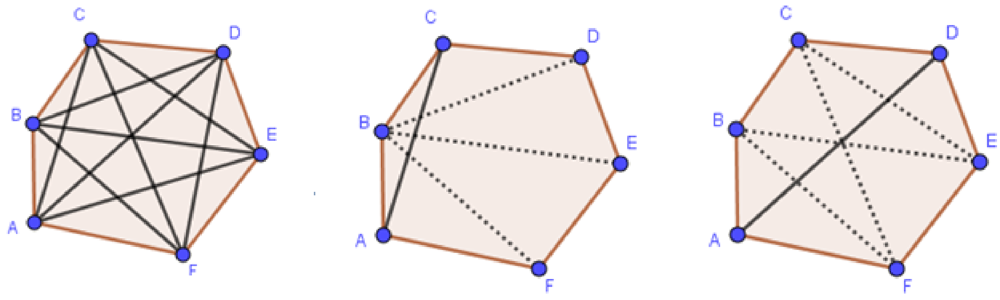


Figura 6.2: Interseções de diagonais de um hexágono.

Consideremos as diagonais $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$, $\overline{EA}$ e $\overline{FB}$ que interligam dois vértices não consecutivos, conforme a figura 6.2. Sem perda de generalidade, podemos analisar $\overline{AC}$, note que a diagonal $\overline{AC}$ intercepta três diagonais que partem do vértice vizinho B, então existem três interseções na diagonal $\overline{AC}$. Como o hexágono possui seis diagonais desse tipo, temos um total de 18 interseções.

No entanto, essas interseções foram contadas duas vezes. Dividindo o valor encontrado por dois, chegamos a 9 interseções.

Consideremos agora as diagonais $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$. Sem perda de generalidade, suponha que seja $\overline{AD}$, note que existem quatro interseções sobre essa diagonal. Como são três diagonais desse tipo, teremos um total de 12 interseções. Entretanto é preciso dividir esse resultado por 2, feito isso, encontramos 6 interseções.

Para finalizar a contagem do número de interseções das diagonais, basta somar os resultados encontrados, então o número total é dado por: $9 + 6 = 15$.

O procedimento utilizado para resolver o problema de contagem das diagonais do hexágono não é prático, pode levar a erros ou em duplicidade na contagem das interseções, principalmente quando temos um polígono com número maior de vértices. E se mostra muito complicado para a resolução da contagem de interseção de diagonais de um polígono de n vértices.

Pensando de maneira diferente, podemos resolver esse problema de forma mais elegante e organizada, utilizando a análise combinatória.

Rotule todo ponto de interseção com as extremidades das diagonais que se intersectam nesse ponto. Por exemplo, a interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BF}$ recebe o rótulo $ABCF$, a interseção das diagonais $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$ recebe o rótulo $ACDE$, e assim por diante. Note que pontos de interseções diferentes recebem rótulos diferentes. Além do mais, observe na figura 6.3, que todo conjunto de quatro vértices é usado para rotular um único ponto de interseção das diagonais; por exemplo a quádrupla $CDEF$ denota a interseção das diagonais $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$.

Se queremos contar todos os pontos de interseção, basta contar as quádruplas de vértices; o número de interseções das diagonais é exatamente o número de subconjuntos de 4 elementos do conjunto de vértices. Portanto, se o polígono possui 6 lados, deve-se calcular $\binom{6}{4} = 15$. Generalizando, o número de interseções de diagonais de um n-ágono convexo é dado por:

$$\binom{n}{4} = \frac{n!}{(n-4)!4!}.$$

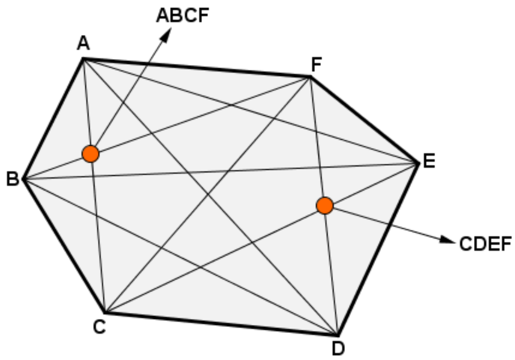


Figura 6.3: Rotulando interseções de diagonais de um polígono convexo.

O que resolve o problema de contagem de interseções de diagonais de um polígono de n vértices.

6.1.1 Contando regiões e a Pizza de Steiner

Dado um plano, qual é o número máximo de regiões em que o plano pode ser dividido por n retas? Pensando em uma pizza, qual é o número máximo de pedaços em que uma pizza pode ser dividida por n cortes retilíneos?

Observe que o número de regiões será máximo quando cada reta intercepta todas as demais em pontos distintos, ou seja, não se considera retas paralelas, nem 3 ou mais retas que se interceptem em um mesmo ponto.

Podemos verificar a figura 6.4 que representa a Pizza de Steiner, ao passo que são realizados quatro cortes, bem como a número de planos gerados.

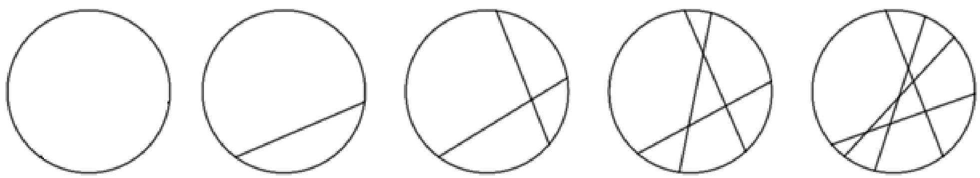


Figura 6.4: Número de regiões da Pizza de Steiner.

Considerando o fato de que nunca três retas se interceptem em um mesmo ponto e não existem retas paralelas, podemos numerar as regiões da Pizza de Steiner geradas a partir do acréscimo dos cortes.

Vejamos a tabela 6.1.

Número de cortes (n)	Números de regiões	Regiões acrescentadas
0	1	-
1	2	1
2	4	2
3	7	3
4	11	4

Tabela 6.1: Número de regiões da Pizza de Steiner.

Note que o número de regiões da linha posterior é sempre igual ao número de regiões anterior mais o número de regiões acrescentadas. Note também que a medida que o número de retas aumenta, a contagem se torna uma tarefa difícil, sendo árduo contar as novas regiões.

Os dados da tabela sugerem que o número total de regiões aumenta n unidades, quando se faz o n-ésimo corte, e que o número total de regiões obtidas com n cortes é sempre igual a

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = 1 + \frac{n.(n+1)}{2}. \tag{6.1}$$

Vamos provar que a proposição é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Utilizaremos a indução matemática.

Solução:

Seja $P(n) = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = 1 + \frac{n.(n+1)}{2}$.

Para $P(1)$ temos:

$1 + 1 = 1 + \frac{1.(2)}{2} = 2$, o que é verdadeiro.

Por hipótese, suponhamos que

$$P(k) = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k = 1 + \frac{k.(k+1)}{2}.$$

Queremos mostrar que a proposição também é válida para $(k + 1)$.

Ou seja:

$$P(k+1) = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k + (k+1) = 1 + \frac{(k+1).(k+2)}{2}.$$

Por hipótese temos

$$P(k) = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + k = 1 + \frac{k.(k+1)}{2}.$$

Somando o próximo termo da sequência em ambos os membros da igualdade

$$1+1+2+3+4+...+k+(k+1) = 1+\frac{k.(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{2 + k.(k+1) + 2k + 2}{2}$$

$$= \frac{(k+1).(k+2)+2}{2} = 1 + \frac{(k+1).(k+2)}{2}.$$

O que mostra que $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, está provado que $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como o princípio de indução e a recorrência não são conteúdos abordados no ensino médio, vejamos uma solução para o problema utilizando a análise combinatória.

Para tal, considere que retas são traçadas sobre um quadro vertical, conforme figura 6.5, que é suficientemente grande em comprimento e largura, de modo que todos os pontos de interseção apareçam sobre ele. Considere também que nenhuma reta é totalmente horizontal (nunca paralela à base do quadro), que todas as retas interceptam a aresta inferior do quadro e que mesmo a aresta mais baixa do quadro está caindo um pouco para a esquerda.

Agora considere o ponto mais baixo em cada região sobre o quadro. Cada região tem exatamente um ponto mais baixo, pois todas as regiões são finitas, e as linhas de contorno do quadro não são horizontais. Esse ponto mais baixo é então um ponto de interseção de duas das retas, ou o ponto de interseção da reta com a aresta mais baixa do quadro ou o canto inferior esquerdo do quadro.

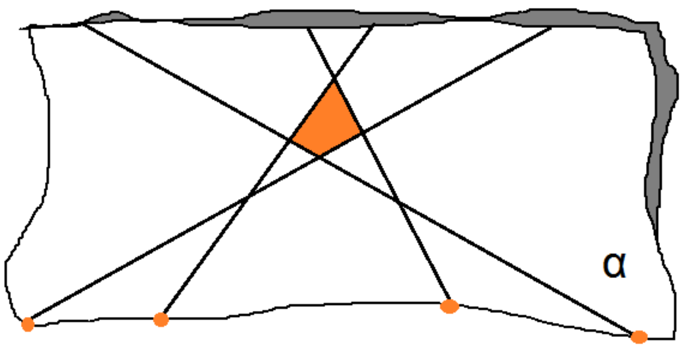


Figura 6.5: Retas traçadas sobre o quadro.

O número de pontos mais baixos é a soma do número de pontos de interseção das retas, mais o número de interseções entre retas e a aresta inferior do quadro mais a região do canto inferior esquerdo do quadro. Como quaisquer duas retas se interceptam (nunca três delas passando pelo mesmo ponto), e esses pontos de interseção são todos diferentes, o número de tais pontos mais baixos é dado por:

$$\binom{n}{2} + n + 1.$$

Temos ainda que o número de pontos mais baixos é igual ao número de regiões geradas pelas interseções entre as retas, entre retas e a borda inferior do quadro mais a região α do canto inferior esquerdo do quadro.

Assim, o número de regiões do quadro, quando, são traçadas 4 retas é dado por:

$$\binom{4}{2} + 4 + 1 = 11.$$

Com isso, o número de regiões do quadro, quando são traçadas n retas será dado por:

$$\binom{n}{2} + n + 1 = \frac{n!}{(n-2)!2!} + n + 1 = \frac{n.(n-1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 - n + 2n}{2} + 1$$

$$= \frac{n^2 + n}{2} + 1 = \frac{n.(n+1)}{2} + 1.$$

Que equivale ao resultado da contagem do número de regiões da Pizza de Steiner encontrado em (6.1).

6.2 O Problema do Final Feliz

No ano de 1932, Esther Klein propôs um problema de geometria plana aos seus amigos Paul Erdos e George Szekeres, com o seguinte enunciado:

Dados quaisquer cinco pontos numa superfície plana, de forma que não há três deles alinhados, prove que quatro desses pontos sempre formarão um quadrilátero convexo.

Quando Klein propôs o quebra-cabeça aos seus amigos, ela tinha 23 anos e morava em sua cidade natal, Budapeste, na Hungria. O problema recebeu esse nome por que, posteriormente, Klein e Szekeres se casaram, então o problema ficou conhecido por "Happy end problem", ou seja, Problema do Final Feliz.

Figura 6.6: Klein, Szekeres e Erdös

Esther Klein em 1927, George Szekeres em 1928 e Paul Erdös em uma fotografia sem data.

Fonte: < https://medium.com/@eltonwade>

Klein já havia elaborado a prova antes mesmo de apresentá-la aos amigos, mas Erdös e Szekeres descobriram uma maneira de mostrar que a afirmação era verdadeira.

A partir desse problema, surgiram outros questionamentos. No mínimo, quantos pontos, de forma que não há três deles alinhados, são necessários para formar um pentágono convexo? Qual o número máximo de pontos no plano, de forma que não há três deles alinhados, que não contém os vértices de um n-ágono convexo?

A conjectura de Erdos-Szekeres, desenvolvida a partir do famoso Problema do Final Feliz, traz a hipótese de qual seria o número mínimo de pontos no plano, de forma que não haja três deles alinhados, necessário para garantir a existência de um n-ágono convexo. Esse número é denotado por $f(n)$.

A hipótese é de que $f(n) = 2^{n-2} + 1$ garanta a existência de um n-ágono convexo com vértices entre o conjunto de pontos. Por exemplo, para se obter um polígono convexo de 4 lados são necessários no mínimo 5 pontos, de forma que não haja três deles alinhados.

O caso da existência de um triângulo é trivialmente resolvido, os casos de $f(4) = 5$, $f(5) = 9$ e $f(6) = 17$ são todos matematicamente comprovados, enquanto que o valor de $f(n)$ para $n \geq 7$ permanece desconhecido.

Embora tenham provado que $f(n) > 2^{n-2}$ seja o limite inferior exato para que exista o n-ágono convexo, o caso geral de quantos pontos são necessários para garantir a existência de um polígono de n lados, ainda não está comprovado.

Neste trabalho, será demonstrado o caso quando $f(4) = 5$ e, a partir dele, o caso para $f(5) = 9$. Além disso serão analisadas algumas configurações com 8 pontos para verificar se garantem a existência de um pentágono convexo, o intuito é verificarmos se o limite inferior da conjectura é sempre verdadeiro.

A seguir veremos algumas definições, notações e características de estruturas geométricas importantes para compreensão dos teoremas.

- **Envoltória convexa dos pontos:** linha convexa poligonal em torno de um conjunto de pontos no plano euclidiano.

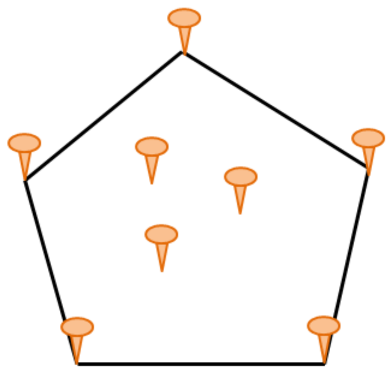


Figura 6.7: Envoltória convexa em torno de cinco pontos.

- **Pontos em posição geral:** configuração de pontos no plano de forma que nunca três deles estão sobre uma mesma reta.

- **Configuração** $(x - y - z)$, em que x, y e z são números inteiros, relativo à organização dos pontos no plano em posição geral. Por exemplo, uma configuração (5-3-0), conforme a figura 6.7, consiste em 8 pontos, sendo 5 formando a envoltória convexa do conjunto e os outros 3 pontos no interior dela. A configuração (5-3-1) consiste em 9 pontos, dos quais 5 formarão a envoltória convexa, 3 pontos formando um triângulo no interior dela e 1 ponto no interior das duas estruturas.

Teorema 6.1: (O Problema do Final Feliz). Qualquer conjunto de cinco pontos no plano em posição geral tem um subconjunto de quatro pontos que formam os vértices de um quadrilátero convexo.

As possíveis configurações envolvendo 5 pontos são: (5-0-0), (4-1-0) e (3-2-0).

A prova do Teorema 6.1 seguirá imediatamente da prova dos três próximos lemas.

Lema 6.2: Dado quaisquer cinco pontos no plano em configuração (5-0-0), sempre é possível formar um quadrilátero convexo com exatamente 4 dos 5 pontos da envoltória convexa.

Demonstração. Se a configuração 5-0-0 caracteriza um pentágono, figura 6.8, escolhendo 4 dos pontos da envoltória convexa, é sempre possível formar um quadrilátero convexo. Como $\angle BAD < \angle BAE$ e $\angle CDA < \angle CDE < 180°$, $ABCD$ é um quadrilátero conxexo. E a escolha dos vértices do quadrilátero convexo poderá ser feita de $\binom{5}{4} = 5$ maneiras. Daí o problema está resolvido.

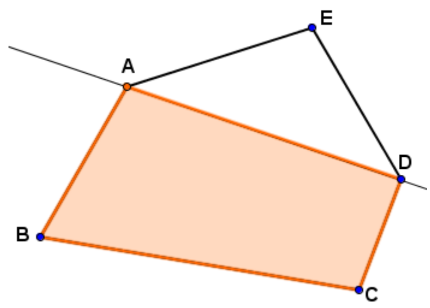


Figura 6.8: Conjunto de pontos em configuração (5-0-0).

□

Lema 6.3: Dado um conjunto qualquer de 5 pontos no plano em posição geral e na configuração (4-1-0), o ponto do interior formará exatamente 2 quadriláteros convexos, com cada quadrilátero formado com um subconjunto de 3 dos 4 pontos da envoltória convexa. Os 2 quadriláteros convexos formados compartilham exatamente 1 lado, e esse lado é uma das bordas da envoltória convexa.

Demonstração. Suponha que a configuração (4-1-0) consista no quadrilátero $ABCD$ em torno do ponto E, conforme figura 6.9.

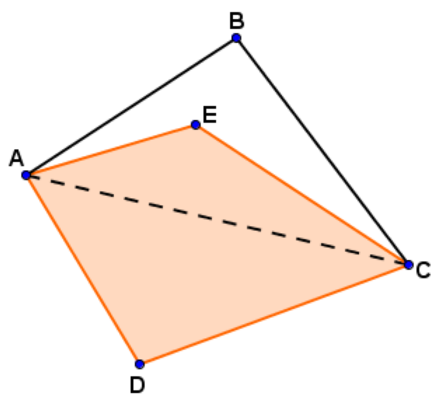


Figura 6.9: Quadrilátero convexo AECD.

O ponto E pode estar no interior do $\triangle ABC$ ou no interior do $\triangle ACD$. Se o ponto E estiver em $\triangle ABC$, temos $\angle EAD < \angle BAD < 180°, \angle ECD < \angle BCD < 180°$, $\angle ADC < 180°$ (por definição de envoltória convexa) e $\angle AEC < 180°$ (já que o ponto E está no interior de $\triangle ABC$). Então $AECD$ é um quadrilátero convexo enquanto que $AECB$ não o é (o replementar do $\angle AEC > 180°$). O

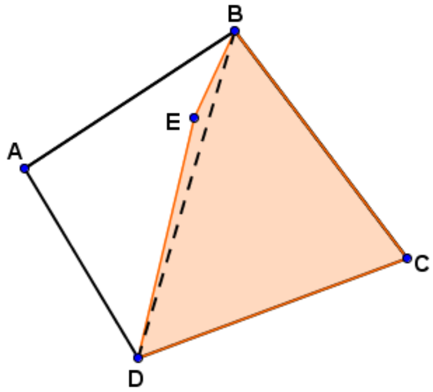


Figura 6.10: Quadrilátero convexo BCDE.

caso em que o ponto E está no interior do $\triangle ACD$ pode ser provado de maneira totalmente análoga.

Um caso semelhante ocorre quando o ponto E reside em △ABD ou △CBD. Considerando todas as combinações possíveis de 4 pontos, sendo um o ponto E, e outros 3, pontos da envoltória, (A,B,C,E), (A,C,D,E), (A,B,D,E) e (B,C,D,E), verifica-se que exatamente duas dessas combinações caracterizam o quadrilátero convexo, que compartilham exatamente uma borda da envoltória convexa. Isso completa a prova para Lema 6.3. □

Lema 6.4: Em qualquer conjunto de 5 pontos em configuração (3-2-0) no plano, existe exatamente 1 quadrilátero convexo formado pelos 2 pontos internos e 2 dos 3 pontos externos.

Demonstração. Provaremos que existe exatamente um quadrilátero convexo se os pontos estão dispostos na configuração (3-2-0). Suponha que essa configuração seja formada por um $\triangle ABC$ (envoltória convexa) e existem dois pontos, D e E, no interior do $\triangle ABC$. Os pontos A, B e C não podem ser todos vértices de um quadrilátero convexo, por que contradiz a suposição de que a envoltória convexa do conjunto é um triângulo. Portanto, o quadrilátero convexo só pode ser formado pelos 2 pontos internos, D e E, e por 2 pontos da envoltória convexa. Pode-se considerar o quadrilátero convexo $ABDE$ da figura.

Como o replementar do $\angle AED > 180°$, então a $AEDC$ não é um quadrilátero convexo, da mesma forma, como o replementar de $\angle BDE > 180°$, $BDEC$ não é um quadrilátero convexo. Então, só pode haver 1 quadrilátero convexo entre os 5 pontos, que é a $AEDB$. Isso finaliza a prova do Lema 6.4. □

6.2.1 Prova geométrica para a conjectura de Erdos-Szekeres, $f(5) = 9$

A princípio, para a demonstração do caso $f(5) = 9$, iremos analisar as configurações de um conjunto de 9 pontos: (5-3-1), (3-4-2) e as configurações de um conjunto de 8 pontos: (3-3-2) e (4-3-1).

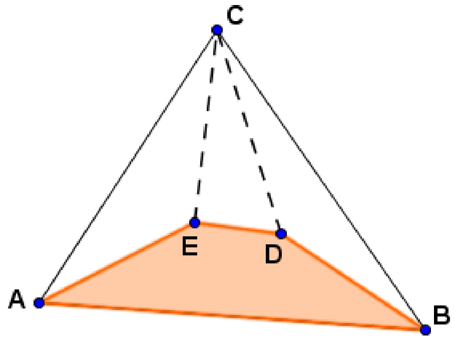


Figura 6.11: Conjunto de pontos em configuração (3-2-0)

Lema 6.5: Em uma configuração (5-3-1), há um pentágono convexo formado por cinco dos nove pontos da configuração.

Demonstração. Se são escolhidos os 5 pontos da envoltória convexa, já temos o polígono procurado. Considere agora que são escolhidos 4 dos 5 pontos da envoltória convexa. Sem perda de generalidade, suponha que esses pontos sejam A, C, D e E (figura 6.12). O outro ponto deve está no exterior do quadrilátero $AEDC$, suponha que seja o ponto F. Com isso temos $\angle EAF < \angle EAB < 180°$ e $\angle DCF < \angle DCB < 180°$, formando o pentágono convexo $AEDCF$.

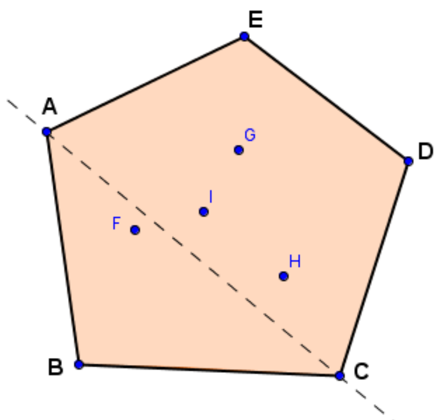


Figura 6.12: Conjunto de pontos em configuração (5-3-1)

Analisaremos o caso em que são escolhidos três dos 5 pontos da envoltória convexa. Suponha sem perda de generalidade que os pontos escolhidos sejam A, E e D. Se H é escolhido como ponto no interior da envoltória, temos o quadrilátero $AEDH$. Com o ponto F, formamos o pentágono convexo $AEDHF$.

Agora, suponha que sejam escolhidos dois dos cinco pontos da envoltória convexa. Admita que os pontos escolhidos são A e E. Com os pontos G e H, formamos o quadrilátero não-convexo $AEGH$ (o replementar do $\angle EGH > 180°$). Por outro lado, escolhendo os pontos F, G e I, obtemos o pentágono convexo $AEGIF$, conforme figura 6.13.

□

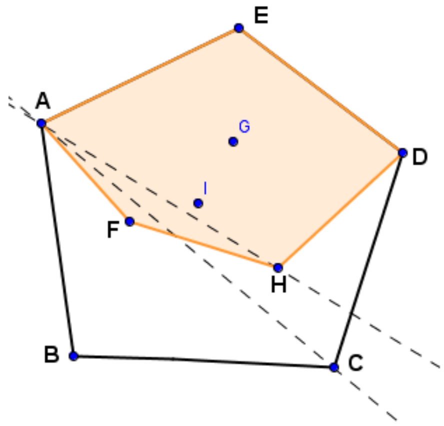


Figura 6.13: Pentágono AEDHF

Iremos analisar a seguir o conjunto envolvendo 6 pontos em configuração (4-2-0), que será importante para a compreensão da configuração (3-4-2).

Lema 6.6: Para cada configuração (4-2-0) de pontos no plano que não existe um pentágono convexo, os 4 pontos que formam a envoltória convexa podem ser divididos em dois grupos de 2 pontos exatamente. De modo que os 2 pontos de cada grupo não façam parte da diagonal da envoltória convexa, mas que cada grupo forme um quadrilátero convexo com os 2 pontos restantes que estão no interior do polígono.

Demonstração. Suponha que a configuração (4-2-0) consista em um quadrilátero $ABCD$ que envolva dois pontos E e F. Considere a posição do ponto E dentro do quadrilátero $ABCD$. Pelo Lema 6.3 tal estrutura forma exatamente 2 quadriláteros convexos com 3 pontos da envoltória convexa e o ponto E. Os 2 quadriláteros são $AECD$ e $BCDE$, conforme figura 6.14.

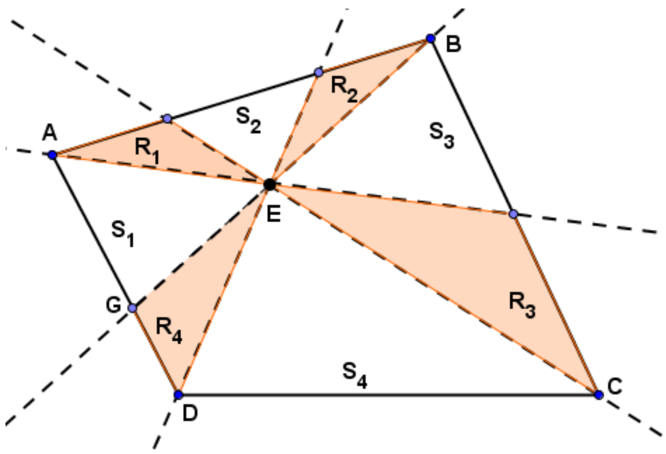


Figura 6.14: Conjunto de pontos em configuração (4-2-0).

O Lema considera configurações onde não existem pentágonos convexos, com isso o ponto F não pode estar nas regiões R_1, R_2, R_3 ou R_4; estar em R_1 resultaria no polígono convexo $ADCEF$ e em R_3 no polígono convexo $ADCFE$, por exemplo.

O mesmo ocorre se F estiver em R_2 ou R_4. Então só pode estar nas regiões S_1, S_2, S_3 ou S_4. Se F esta sobre a região em S_1, nesse caso os grupos de pontos são (A,B) e (C,D), de modo que 2 pontos do conjunto não façam parte de uma diagonal do polígono. Suponha que $\overrightarrow{BE}$ intercepta AD em G. Temos $\angle DFE < 180°$ e $\angle FEC < \angle AEC < 180°$, então $FECD$ é um quadrilátero convexo; temos também $\angle AFE < 180°$ e $\angle FEB < \angle BEG = 180°$. Daí $AFEB$ também é um quadrilátero convexo. Mas, se considerarmos os quadriláteros $AFED$ (o replementar do $\angle AFE > 180°$) e o $BEFC$ (o replementar $\angle BEF > 180°$), então esses quadriláteros são não-convexos. Daí os grupos de pontos só podem ser (A,B) e (C,D).

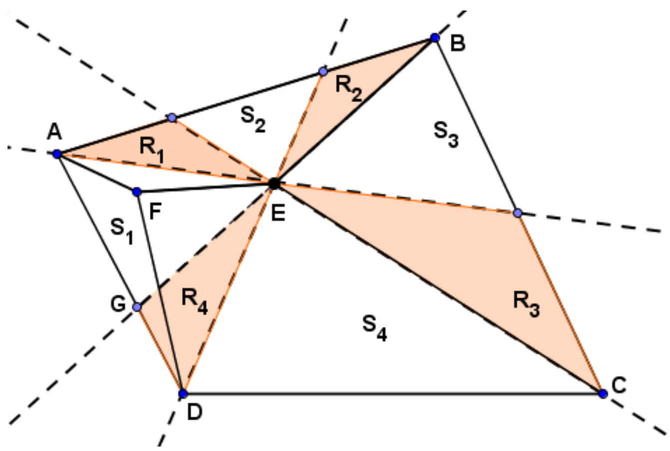


Figura 6.15: Conjunto de pontos em configuração (4-2-0) formando 2 quadriláteros.

Uma situação semelhante ocorre se F estiver em S_3 ou em S_2 ou em S_4. Nesse caso os grupos de pontos serão (A,D) e (B,C), a existência dos respectivos quadriláteros convexos pode ser comprovada de maneira análoga. Embora a prova acima abranja apenas uma das possíveis posições do ponto E, ela é feita com base no Lema 6.3. Outras possíveis posições de E podem ser comprovadas em conformidade. Isso finaliza a prova do Lema 6.6. □

Lema 6.7: Em uma configuração (3-4-2), existe um pentágono convexo cujos vértices são pontos da configuração.

Demonstração. Vamos analisar uma configuração de pontos do tipo (4-2-0) dentro de outra do tipo (3-4-2). Se existe um pentágono convexo na configuração (4-2-0), o Lema é trivialmente comprovado. Suponha que não seja esse o caso. De acordo com Lema 6.6, existem dois quadriláteros convexos diferentes na configuração 4-2-0, e eles compartilham um lado formado pelos dois pontos mais internos. Suponha que os 4 pontos da estrutura interna formem o quadrilátero $ABCD$, e os pontos internos a ele sejam E e F, como mostrado na figura 6.16. Os quadriláteros convexos formados são $ABFE$ e $CDEF$.

Se algum dos três pontos da envoltória convexa estiver em A_1 ou em A_2, um pentágono convexo existiria, provando o Lema. Portanto, o único caso a

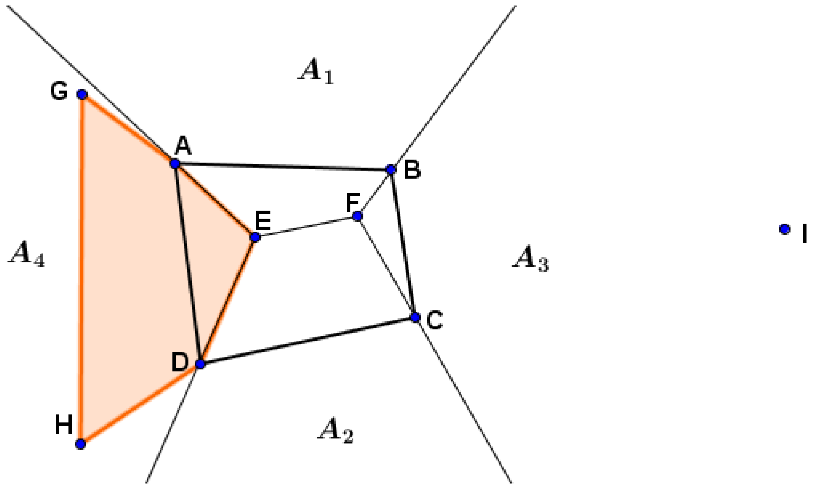


Figura 6.16: Conjunto de pontos em configuração (3-4-2).

considerar é quando esses três pontos estão na região $A_3 \cup A_4$. Resultando em exatamente 2 pontos em A_3 ou em A_4, enquanto o ponto restante estará na outra região, pois três pontos na mesma região contraria a suposição de que eles formam a envoltória convexa. Sem perda de generalidade, assuma que 2 pontos G e H estejam em A_4, em que $GH > GA$, enquanto um ponto está em A_3. Daí teremos $\angle GAE$ e $\angle HDE < 180°$, $\angle HGA < \angle HGI < 180°$ e $\angle GHC < \angle GHI < 180°$, então $AEDHG$ é um pentágono convexo, completando a prova do Lema.

Embora o caso mencionado seja apenas um dos muitos casos possíveis, é feito sem perda de generalidade de acordo com resultados anteriores. □

A seguir iremos analisar a configuração (3-3-2) que servirá de base para a análise da configuração (3-3-3).

Lema 6.8: Há um pentágono convexo cujos vértices estão entre um conjunto de pontos em configuração (3-3-2).

Demonstração. Suponha que a configuração interna (3-2) consista em um $\triangle ABC$ ao redor dos pontos D e E. Pelo Lema 6.4, existe um único quadrilátero convexo entre esses 5 pontos, trata-se do quadrilátero $ABDE$, como demonstrado na figura 6.17.

Observe que a área limitada pelos segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{DB}$ é A_1, enquanto que por $\overline{EC}$ e $\overline{EA}$ é a área A_3. Suponha que a envoltória convexa seja o $\triangle FGH$. Se algum dos 3 pontos estiver em A_2, então um pentágono convexo é formado por esse ponto e pelos pontos A, E, D e B, provando o lema. O outro caso é quando exatamente 2 pontos estão em A_1 ou A_3 e 1 esta no outro; se 3 pontos estiverem na mesma região, contrariaria a suposição de que formam a envoltória convexa. Se 2 pontos, digamos F e G (em que $FC < FG$), estão em A_1, temos $\angle GFC < \angle GFH < 180°$, $\angle FGB < \angle FGH < 180°$. Então os pontos F, G, B, D e C formam um pentágono convexo. Da mesma forma, dois pontos estando em A_3, digamos F e G, então F,G,C, E e A formará um pentágono convexo. Isso completa a prova.

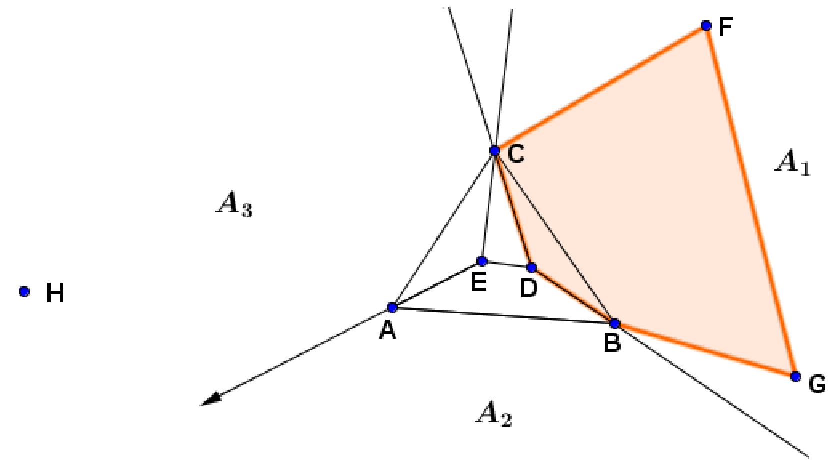


Figura 6.17: Conjunto de pontos em configuração (3-3-2).

□

A seguir veremos a demonstração da configuração (4-3-1) para a análise da configuração (4-3-2).

Lema 6.9: Em uma configuração (4-3-1), existe um pentágono convexo cujos vértices são pontos dessa configuração.

Demonstração. Suponha que a configuração interna (3-1) consista em um $\triangle ABC$ em torno de um ponto D, conforme figura 6.18.

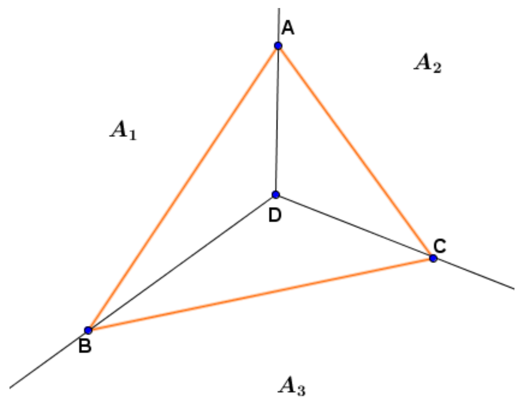


Figura 6.18: Conjunto de pontos em configuração (4-3-1).

Suponha que a envoltória convexa do conjunto seja formada pelos pontos E, F, G e H, em que cada um desses pontos pode estar em A_1, ou A_2, ou A_3. Sem perda de generalidade, podemos assumir que E está em A_1. Se algum dos pontos F, G ou H estiver em A_1, suponha que seja F, como A e B não compõem a envoltória convexa, temos $\angle FEA < 180°$ e $\angle EFB < 180°$, então $AEFBD$ é um pentágono convexo (figura 6.19). Outro caso é quando nenhum dos pontos F, G ou H está em A_1. Sem perda de generalidade, suponha que F esteja em A_2. De forma semelhante, o pentágono convexo pode ser encontrado em A_2 formado pelos pontos A, C, D, F, e com o outro ponto sendo G ou H, com G ou H

estando em A_2. Se G e H estiverem em A_3 resultaria em um pentágono convexo com vértices nos pontos B, C, D, G e H.

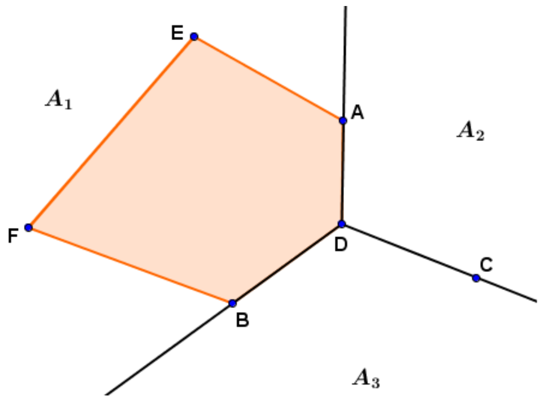


Figura 6.19: Polígono convexo AEFBD.

□

Após a demonstração do Teorema 6.10, veremos alguns casos de conjuntos de 8 pontos em posição geral que não formam um pentágono convexo, com isso, teremos que $f(5) > 8$.

Teorema 6.10: Qualquer conjunto de 9 pontos no plano em posição geral tem um subconjunto de 5 pontos que formam os vértices de um pentágono convexo. Em outras palavras, $f(5) = 9$.

Demonstração. Conforme provado nos Lemas 6.5, 6.6, 6.7, 6.8 e 6.9, em todas as configurações (5-3-1), (4-3-2), (4-4-1), (3-4-2) e (3-3-3), existe um pentágono convexo. Analisando o caso em que os pontos estão em configuração (5-3-1), foi comprovado de forma trivial que se pode encontrar um pentágono convexo, com isso os casos em que o conjunto de pontos estão em configuração (5-4-1), ou (6-3-0), ou (7-2-0), ou (8-1-0), ou (9-0-0), que correspondem a pontos extras na estrutura, a existência do pentágono convexo pode ser demonstrada de maneira totalmente análoga. As configurações (4-3-2) e (4-4-1) consistem em pontos extras em uma configuração (4-3-1), que pelo Lema 6.9, contém um pentágono convexo. Assim, em ambas as configurações, é sempre possível encontrar um pentágono convexo. A configuração (3-4-2) analisada no Lema 6.7 também comprova a existência de um pentágono convexo. A configuração (3-3-3) consiste em um ponto extra em uma configuração (3-3-2), que contém um pentágono convexo. Isso esgota todos os casos para qualquer conjunto de nove pontos em posição geral, finalizando assim a prova.

□

6.2.2 Prova geométrica para a conjectura $f(5) > 8$

A seguir serão analisados conjuntos de pontos em configuração (3-4-1) e (4-4-0).

Dado um conjunto de 8 pontos no plano em posição geral, sabe-se que é possível formar pelo menos $\binom{8}{5} = 56$ pentágonos. A quantidade de pentágonos vai depender da configuração em que os pontos se encontram no plano.

Para casos em que os pontos estão em configuração (3-4-1), vamos considerar os pontos A, B, C, D, E, F, G e H com suas coordenadas fixadas, conforme tabela 6.2.

Ponto	Coordenadas
A	(4.06 , 8.52)
B	(1.24, 2.84)
C	(10.2, 2.64)
D	(3.86, 5.24)
E	(4.18, 4.08)
F	(6.78, 4.2)
G	(5, 6)
H	(4.24, 4.94)

Tabela 6.2: Coordenadas do conjunto de pontos em configuração (3-4-1).

A configuração (3-4-1) é composta por: uma envoltória convexa triangular, quadrilátero convexo no interior da envoltória e um ponto interior às duas estruturas, conforme figura 6.20. Note que $ADEGF$ e $ADGEF$ são pentágonos distintos formados pelo mesmo conjunto de vértices. Conforme podemos verificar nas figuras 6.21 e 6.22, os dois pentágonos se diferenciam apenas pela sequência de pontos.

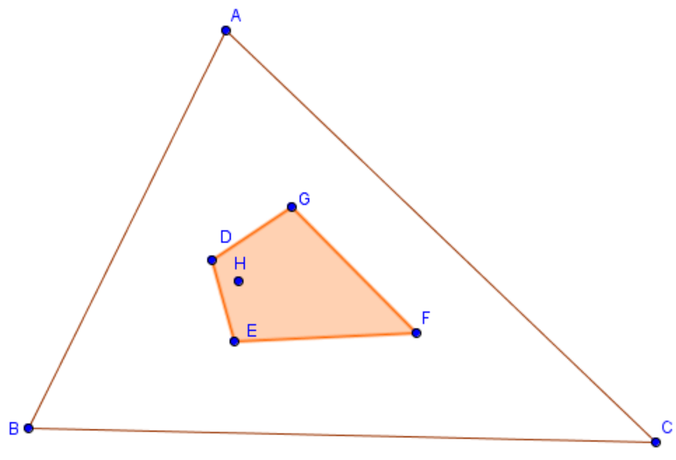


Figura 6.20: Pontos em configuração (3-4-1).

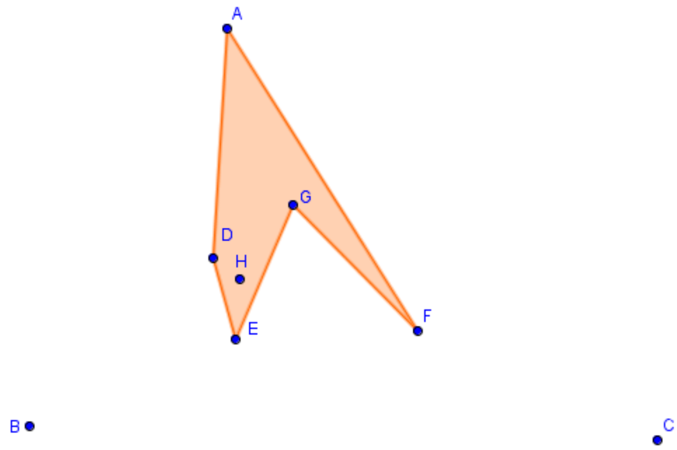


Figura 6.21: Pentágono ADEGF.

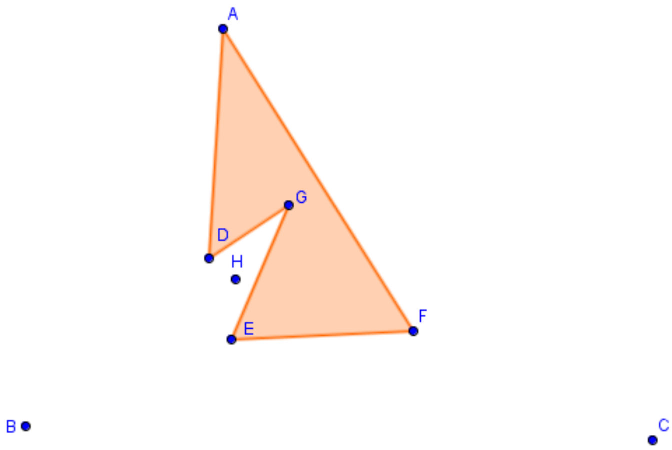


Figura 6.22: Pentágono ADGEF.

Vamos analisar também o conjunto de 8 pontos em configuração (4-4-0), considerando os pontos com coordenadas fixadas, conforme tabela (6.3).

Ponto	Coordenadas
A	(2.72 , 4.5)
B	(2.74, 1.82)
C	(7.8, 4.58)
D	(7.94, 1.74)
E	(3.88, 3.56)
F	(6.6, 3.86)
G	(3.78, 2.54)
H	(6.88, 2.6)

Tabela 6.3: Coordenadas do conjunto de pontos em configuração (4-4-0).

A configuração (4-4-0) é composta por: uma envoltória convexa quadrangular e o quadrilátero convexo no interior da envoltória. Note que são possíveis formar 2 pentágonos distintos com o mesmo conjunto de vértices, conforme pode ser verificado nas figuras 6.23 e 6.24.

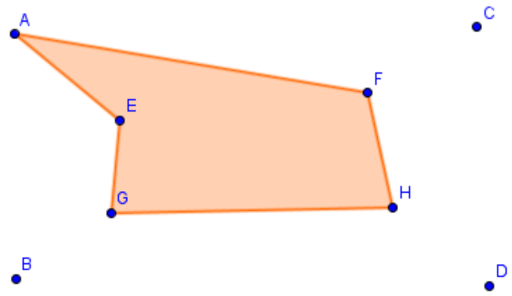


Figura 6.23: Pentágono AEGHF.

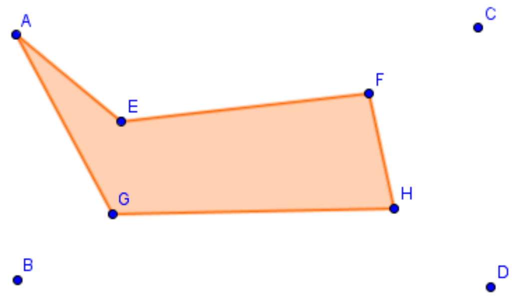


Figura 6.24: Pentágono AGHFE.

Após esta análise apresentaremos os seguintes lemas.

Lema 6.11: Um conjunto de pontos em configuração (3-4-1) não é condição suficiente para a existência de um pentágono convexo.

Demonstração. Considere o conjunto de pontos em configuração (3-4-1), com base nas coordenadas fixadas na tabela 6.2.

Queremos provar que nesse conjunto de pontos em configuração (3-4-1) não existe um pentágono convexo. Vamos considerar o pentágono formado por 1 ponto da envoltória convexa e 4 pontos da estrutura quadrilateral. Se traçarmos retas que passam por $\overline{AE}$, $\overline{AF}$, definimos o $\triangle AEF$, com a análise do replementar pode-se verificar que os pentágonos $ADEFG$, figura 6.25, $BEFGD$ e $CFGDE$ não são pentágonos convexos.

Sejam considerados 1 ponto da envoltória convexa, 3 pontos da estrutura quadrilateral e o ponto interior às duas estruturas, o ponto H. Sem perda de generalidade, consideremos o pentágono $BDGHE$ (figura 6.26), de maneira análoga a análise construída no item anterior, note que o replementar do $\angle GHE > 180°$, logo o pentágono $BDGHE$ não é convexo.

Vejamos agora os pentágonos formados por 2 pontos da envoltória convexa e 3 da estrutura quadrilateral. Se consideramos o $\triangle ABF$, conforme figura 6.27, pode-se verificar que o replementar do $\angle BEF > 180°$, isso ocorre quando consideramos o $\triangle AGF$, pois o replementar do $\angle AGF > 180°$, daí o pentágono $ABEFG$ não pode ser convexo.

Agora, considere a situação de escolher 2 pontos da envoltória convexa, 2 da estrutura quadrilateral e o ponto H interior às duas estruturas, isso ocorre de

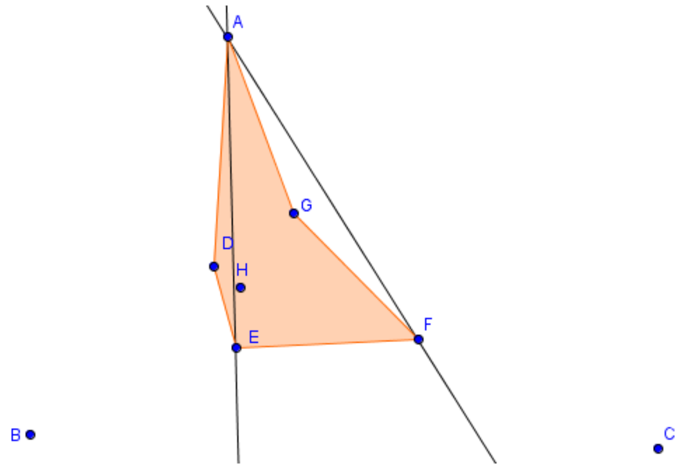


Figura 6.25: Pentágono $ADEFG$.

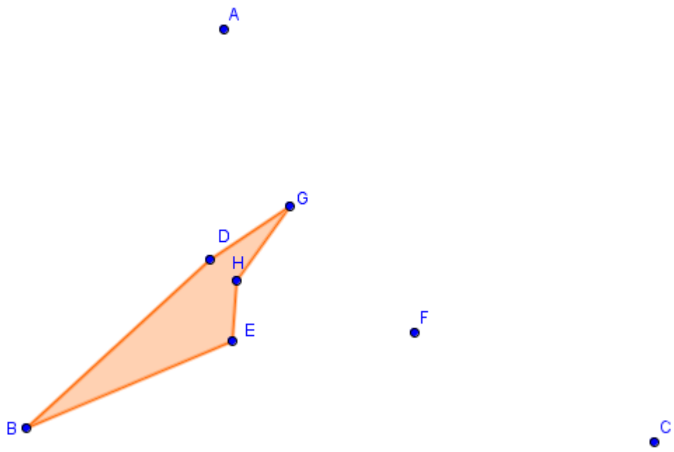


Figura 6.26: Pentágono $BDGHE$.

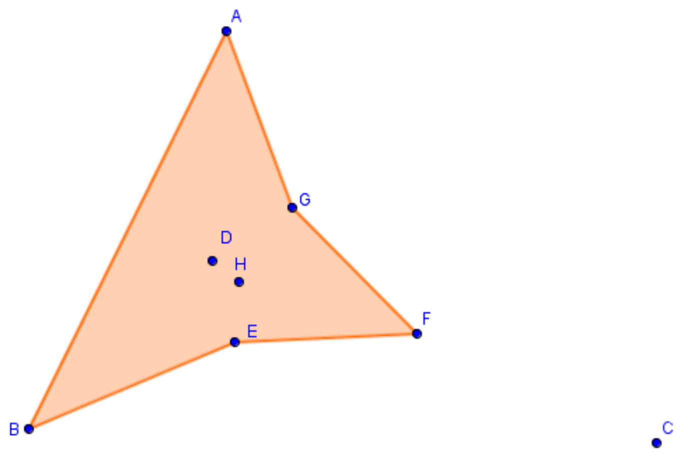


Figura 6.27: Pentágono $ABEFG$.

pelo menos $\binom{3}{2}.\binom{4}{2}.\binom{1}{1} = 18$ maneiras, no entanto, como analisado anteriormente, o replementar do $\angle GHE > 180°$, daí $ABEHG$ certamente não é um pentágono convexo (figura 6.28).

Podemos também verificar os pentágonos formados com 3 pontos da envoltória

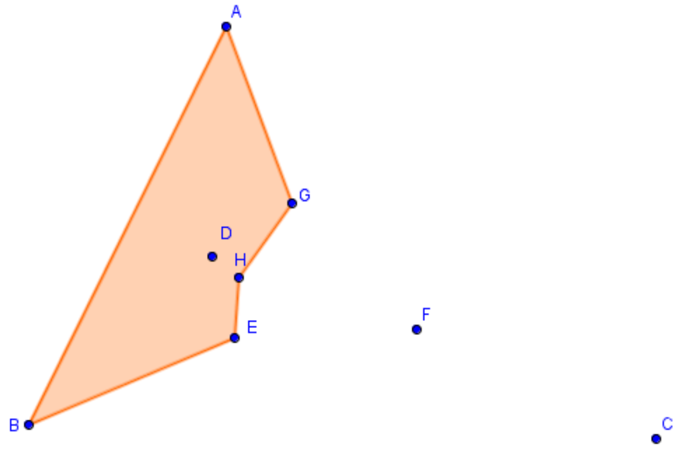


Figura 6.28: Pentágono $ABEHG$.

convexa e 2 da estrutura quadrilateral. Seja o pentágono $ABEFC$, conforme figura 6.29. Analisando apenas os pontos escolhidos, pelo Lema 6.4, em qualquer conjunto de 5 pontos em configuração (3-2-0), existe exatamente 1 quadrilátero convexo. Com isso $\angle BEF < 180°$ e, $\angle EFC < 180°$ e, consequentemente, o replementar do $\angle BEF > 180°$ e o replementar do $\angle EFC > 180°$, portanto $ABEFC$ não é um pentágono convexo.

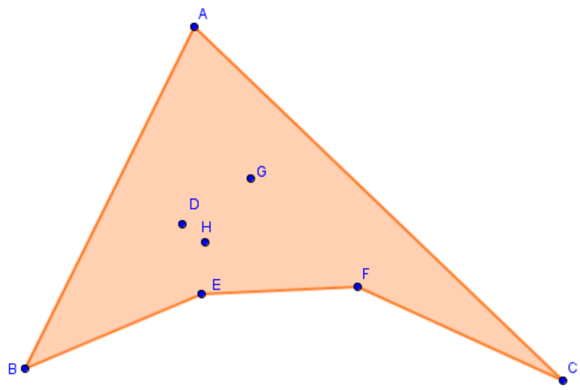


Figura 6.29: Pentágono $ABEFC$.

Finalmente, se não considerarmos pontos da envoltória convexa, podemos formar os pentágonos $DGFHE$, $DGFEH$, $DHGFE$ e $DGHFE$. No entanto, como o ponto H está no interior da estrutura quadrilateral, todos os possíveis pentágonos formados terão uma diagonal externa, o que caracteriza um pentágono não-convexo, conforme figura 6.30. Então, nenhuma das formas de unir os 5 pontos poderá formar um pentágono convexo.

Nas tabelas 6.4 e 6.5, estão relacionadas todas as possibilidades de construção do pentágono a partir do conjunto de 8 pontos em configuração (3-4-1), que complementam as demonstrações anteriores.

Na figura 6.31 foram definidos todos os possíveis segmentos para formar o pentágono.

Os casos apresentados acima esgotam todas as possibilidades de se formar o

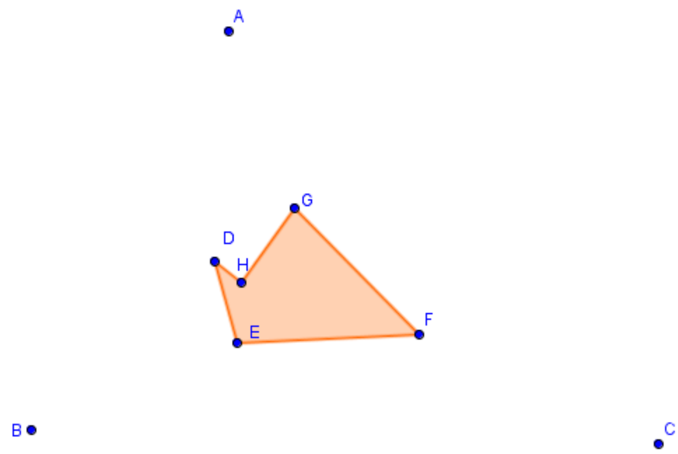


Figura 6.30: Pentágono $DEFGH$.

$N°$ mínimo de possibilidades de escolha dos 5 pontos		
Envoltória convexa	Estrutura quadrilateral	Ponto interior às estruturas (H)
$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{4}$	-
$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{1}{1}$
$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{3}$	-
$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{1}{1}$
$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{2}$	-
$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{1}{1}$

Tabela 6.4: Possibilidades mínimas de escolha dos 5 pontos no conjunto em configuração (3-4-1).

Possibilidades de escolha dos pontos 5 pontos			
Envoltória conv.	Estrutura quad.	Ponto (H)	Total de possibilidades
3	1	-	3
3	4	1	12
3	4	-	12
3	6	1	18
1	6	-	6
1	4	1	4
-	1	1	1

Tabela 6.5: Possibilidades mínimas de escolha dos 5 pontos no conjunto de pontos em configuração (3-4-1).

pentágono convexo. Foi mostrado que nenhuma delas contém o polígono convexo procurado.

Finalizando a demonstração do Lema 6.11.

□

Definiremos agora o último lema dessa seção.

Lema 6.12: Um conjunto de pontos em configuração (4-4-0) não é condição suficiente para a existência de um pentágono convexo.

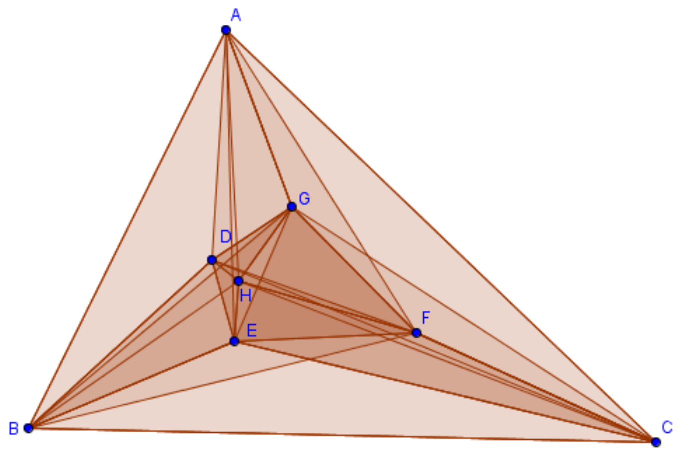


Figura 6.31: Todos os possíveis pentágonos do conjunto de pontos em configuração (3-4-1).

Demonstração. Considere o conjunto de pontos em configuração (4-4-0), conforme coordenadas fixadas na tabela 6.3, composto por uma envoltória convexa e uma estrutura interna quadrilateral convexa. Queremos provar que nesse conjunto não existe um pentágono convexo. Vamos analisar um pentágono formado por 1 ponto da envoltória convexa e 4 pontos da estrutura quadrilateral. Sem perda de generalidade, suponha que seja o pentágono $AFHGE$, conforme figura 6.32. Como os pontos estão em posição geral e AEG é um triângulo, $\angle AEG < 180°$, consequentemente, o replementar do $\angle AEG > 180°$, então $AFHGE$ não é um pentágono convexo. Os outros casos podem ser demonstrados de modo totalmente análogo.

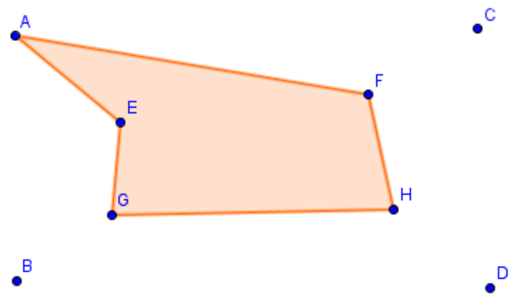


Figura 6.32: Pentágono $AFHGE$.

Agora, suponha que sejam escolhidos 2 pontos da envoltória convexa e 3 pontos da estrutura quadrilateral, conforme figura 6.33. Analogamente, verificando o $\triangle ABH$, ocorre que os replementares dos $\angle AEH$ e $\angle BGH$ são maiores que 180°, com isso $AEHGB$ não é um pentágono convexo.

Se considerarmos 3 pontos da envoltória convexa e 2 pontos da estrutura quadrilateral, conforme figura 6.34, da mesma forma, ocorrerá que o replementar do $\angle AEH > 180°$, logo $ABDHE$ não é um pentágono convexo.

Resta então analisar a construção dos pentágonos que possuam 4 pontos da envoltória convexa e 1 ponto da estrutura quadrilateral. Sem perda de

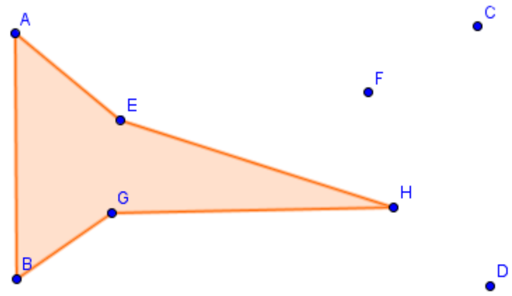


Figura 6.33: Pentágono $AEHGB$.

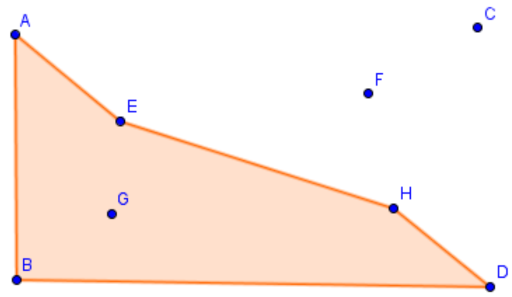


Figura 6.34: Pentágono $ABDHE$.

generalidade, e conforme a figura 6.35, o pentágono $ABDFC$ contradiz a definição de polígono convexo. Pode-se verificar então que nenhum dos pentágonos serão convexos, que é o mesmo que dizer que todos eles terão um ângulo maior 180°; no caso do pentágono $ABDFC$, trata-se do replementar do $\angle CFD > 180°$.

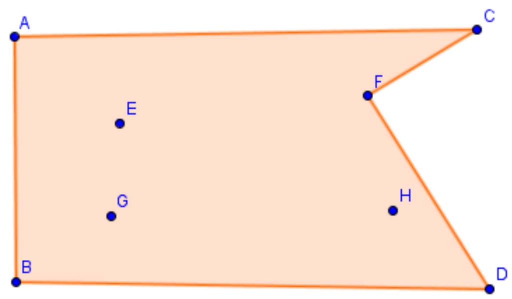


Figura 6.35: Pentágono $ABDFC$.

Nas tabelas 6.6 e 6.7 estão relacionadas as possibilidades de construção de um pentágono a partir do conjunto de 8 pontos em configuração (4-4-0), analisadas anteriormente, que não garantem a existência de um pentágono convexo.

Na figura 6.36, estão representados os segmentos de um conjunto de pontos em configuração (4-4-0) e os possíveis pentágonos.

Os casos apresentados esgotam as possibilidades de se formar o pentágono convexo.

$N°$ mínimo de possibilidades de escolha dos pontos	
Envoltória convexa	Estrutura quadrilateral
$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{4}$
$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$
$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{2}$
$\binom{4}{4}$	$\binom{4}{1}$

Tabela 6.6: Possibilidades de escolha dos 5 pontos no conjunto em configuração (4-4-0).

$N°$ mínimo de possibilidades de escolha dos 5 pontos		
Envoltória conv.	Estrutura quad.	Total de possibilidades
4	1	4
6	4	24
4	6	24
1	4	4

Tabela 6.7: Possibilidades mínimas de escolha dos 5 pontos de um conjunto em configuração (4-4-0).

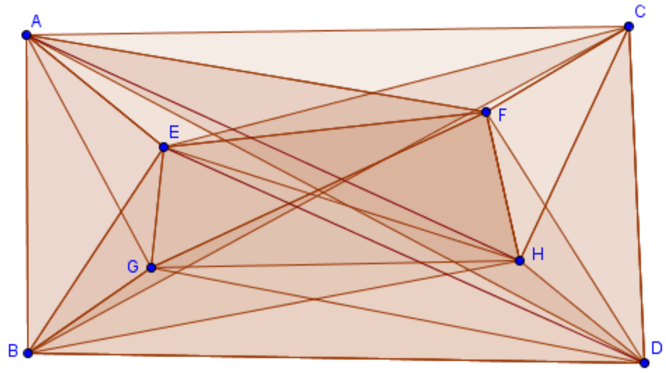


Figura 6.36: Todos os possíveis pentágono do conjunto de pontos em configuração (4-4-0).

O que completa a demonstração do Lema 6.12.

□

7
Currículo do Ensino Médio

Neste capítulo, será realizada uma análise do currículo do ensino médio relativo ao conteúdo de análise combinatória, por meio de um estudo da Base Nacional Comum Curricular.

7.1 A BNCC - Base Nacional Comum Curricular

A BNCC [4] é um documento de caráter normativo que define os processos de aprendizagens que são essenciais e que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas da educação básica, assegurando os direitos de aprendizagem, desenvolvimento e a formação humana integral.

Além disso, os currículos adotados nas instituições de ensino devem estar de acordo com BNCC, de modo complementar, para garantir as aprendizagens de cada etapa da educação básica, uma vez que essas aprendizagens só acontecem, verdadeiramente, mediante o conjunto de decisões adotadas. São essas decisões que vão adequar os ideais definidos no documento à realidade local, considerando o contexto e as características dos alunos.

O documento está organizado por competências que norteiam as aprendizagens essenciais a serem garantidas no ensino médio. No quadro 7.1, podemos verificar quais são elas:

Para a área de matemática e suas tecnologias, é proposto a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens desenvolvidas no ensino fundamental. Isso deve ser feito de modo interrelacionado com os conhecimentos já explorados, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da matemática, com objetivo de que eles tenham perspectiva de sua aplicação no dia a dia. No quadro 7.2, estão relacionadas as competências gerais da educação básica para o ensino fundamental.

Cada área do conhecimento estabelece competências específicas, cujo desenvolvimento deve acontencer ao longo do ensino fundamental. As competências específicas possibilitam a articulação horizontal e vertical entre as áreas, perpassando todos os componentes curriculares, ou seja, realizando a progressão entre o Ensino Fundamental – Anos Iniciais e o Ensino Fundamental – Anos Finais, considerando suas especificidades.

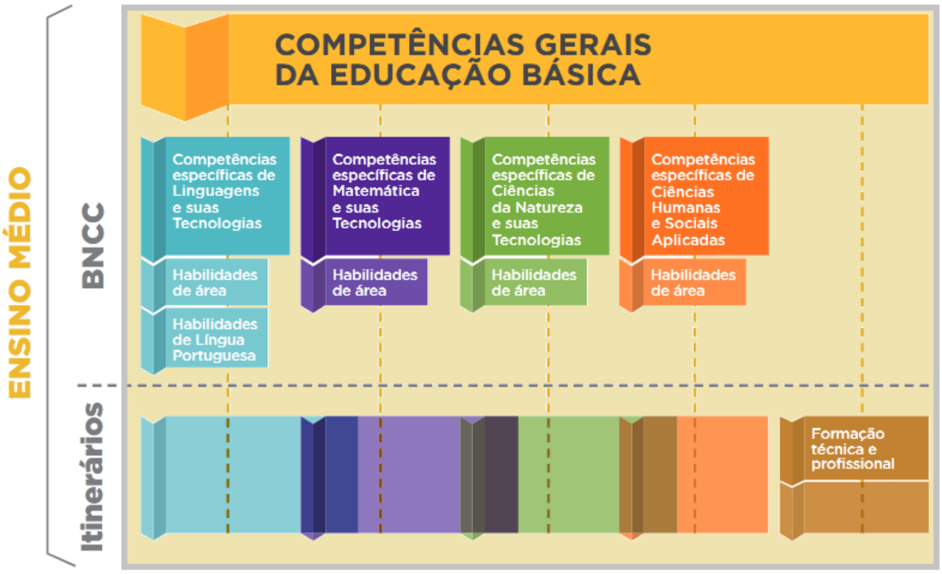


Figura 7.1: Quadro de competências gerais do ensino médio - retirado da BNCC

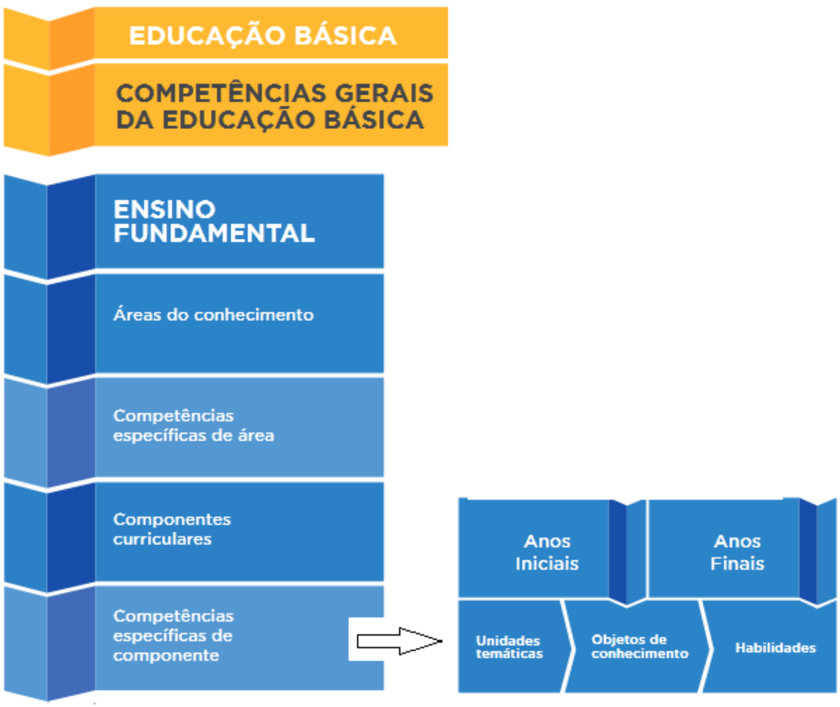


Figura 7.2: Quadro de competências gerais do ensino fundamental - retirado da BNCC

Relacionadas a cada uma das competências, são descritas ainda habilidades a serem desenvolvidas ao longo da etapa. Essas habilidades definirão os parâmetros a serem adotados e sequência didática para o ensino do contéudo de análise combinatória no ensino médio. Vejamos a tabela 7.1:

Ano Escolar: 1° ao 3° ano do ensino médio

UNIDADE TEMÁTICA	COMPETÊNCIA ESPECÍFICA	HABILIDADES
Probabilidade e Estatística	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando os resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativos e aditivos, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama da árvore.
Probabilidade e Estatística	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.

Tabela 7.1: Diretrizes para a abordagem do conteúdo contagem para o ensino médio - retirado da BNCC

No entanto, é importante ressaltar que conteúdos que se relacionam diretamente ao ensino da análise combinatória já estão presentes no currículo desde os anos iniciais do ensino fundamental. Esses exigem do aluno saberes como: a construção do espaço amostral de eventos equiprováveis, utilização da árvore de possibilidades, o princípio aditivo e o multiplicativo.

De acordo com esse estudo, foi desenvolvida uma sequência didática com base nos objetivos específicos e habilidades, relativo ao conteúdo de análise combinatória a serem trabalhadas no ensino médio.

7.2 Sequência didática

Uma sequência didática corresponde a um conjunto de atividades com ideias articuladas, com base em objetivos específicos, para orientação do professor durante o processo de ensino-aprendizagem.

A seguir é possível encontrar o material criado. São no total 9 (nove) atividades, a serem aplicadas em 09 (nove) aulas e os temas estão relacionados seguindo a ordem:

1. Princípio Aditivo e Multiplicativo;
2. Permutação e Arranjo;
3. Combinação simples;
4. 1° Lema de Kaplansky;
5. 2° Lema de Kaplansky;
6. Princípio da Inclusão e Exclusão;
7. Permutação Caótica;
8. O Problema de Lucas;
9. Geometria Combinatória.

ENSINO MÉDIO	**Ano: 2020**		**Bimestre:**
Disciplina: Matemática	**Professor(a):**		
Data: _______/______/2020	**Turma: 2º ano**	**Valor:**	
ANÁLISE COMBINATÓRIA – Princípio Aditivo e Multiplicativo			**AULA 1**
ALUNO:			**Nº:**

Princípio Aditivo e Multiplicativo

Iremos relembrar alguns conceitos importantes de Análise Combinatória e sua aplicação na resolução de problemas.

Os princípios aditivo e multiplicativo ou princípios fundamentais da Contagem constituem em ferramentas básicas para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos. Os problemas de contagem fazem parte da chamada análise combinatória, são muitas vezes considerados difíceis, mas exige técnicas matemáticas bastante elementares, essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão.

Métodos de Contagem – Princípio Aditivo

Suponhamos que um cliente queira comprar um veículo, e ao chegar à Concessionária encontra apenas dois modelos diferentes do veículo que quer comprar.

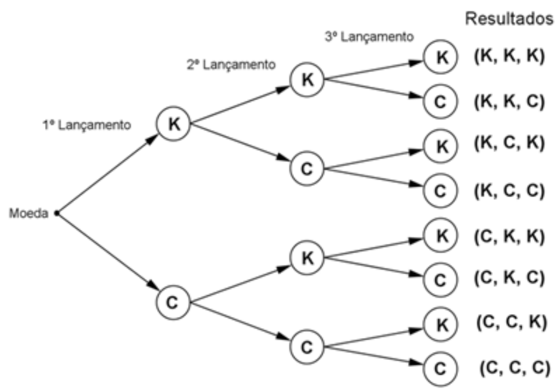
Do primeiro modelo há duas cores diferentes e do segundo modelo há quatro cores disponíveis. Quantas maneiras o cliente poderá efetuar essa compra?

Pelo princípio aditivo podemos chegar a $2 + 4 = 6$ maneiras. O princípio aditivo deve ser usado quando se deseja calcular como realizar um evento ou outro, não ambos simultaneamente o que equivale a união de dois conjuntos disjuntos.

Métodos de Contagem – Princípio Multiplicativo

Exemplo: Uma moeda é lançada três vezes sucessivamente. Quais são as sequências possíveis de faces obtidas nesses lançamentos?

Para relacionar os possíveis resultados, utiliza-se do diagrama da árvore de possibilidades, conforme abaixo:



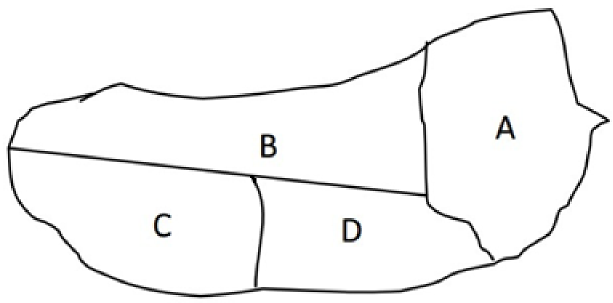
Pelo diagrama, verificamos 8 possíveis resultados: (K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C).

Usando o princípio multiplicativo, podemos chegar ao resultado multiplicando o número de possibilidade do 1° lançamento pelo número de possibilidade do 2° lançamento pelo número de possibilidade do 3° lançamento:

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ maneiras.}$$

Outros problemas:

1. Um país é formado por quatro regiões A, B, C e D, como mostra o mapa abaixo:



   Deseja-se colorir esse mapa de modo que regiões com uma fronteira comum tenham cores distintas. Analise as afirmações e informe se são verdadeiras (V) ou Falsas (F) e justifique as falsas.

   a) ( ) É possível colorir o mapa usando apenas duas cores.

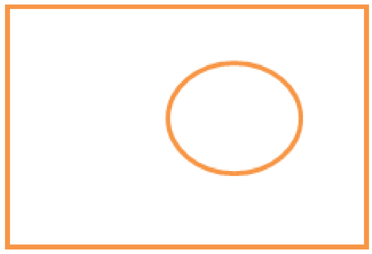
   b) ( ) Usando quatro cores distintas, o número de maneiras de colorir o mapa é 24.

   c) ( ) Com quatro cores disponíveis o número máximo de possibilidades para colorir o mapa é 60.

   d) ( ) O número mínimo de cores necessárias para colorir o mapa é 3.

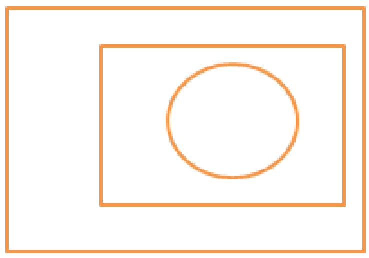
2. Na biblioteca de uma escola tem livros de literatura, biologia, medicina, arquitetura e química, dos quais tem 20 tipos diferentes de livros de literatura, 45 de biologia, 24 de medicina, 27 de arquitetura e 29 de química. De quantas maneiras um aluno poderá escolher um livro de biologia ou um livro de química?

3. (Obmep 2017) Uma bandeira com a forma abaixo vai ser pintada utilizando duas entre as cores, preta, branca e azul. Quantas são as maneiras de pintá-la?

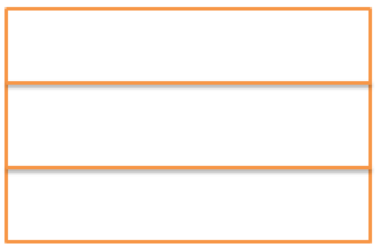


4. (Obmep 2017) Utilizando 4 cores diferentes, informe quantas são as maneiras de pintar as bandeiras abaixo, de modo que regiões adjacentes tenham cores distintas?

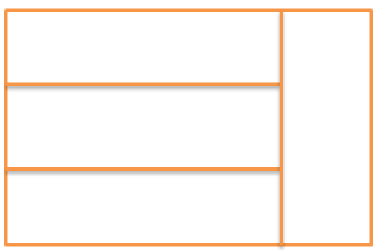
   a) bandeira 1



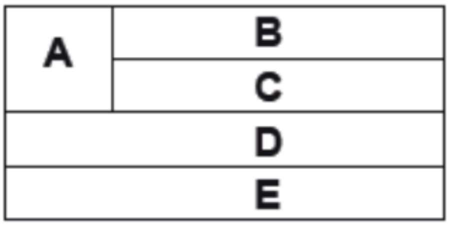
   b) bandeira 2



5. (Obmep 2017 - adaptada) Utilizando 6 cores diferentes, informe quantas são as maneiras de pintar a bandeira abaixo, de modo que regiões adjacentes tenham cores distintas?



6. (ENEM - 2015) A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.



Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor. O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é:

a) $1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$

b) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$

c) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 3$

d) $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2$

e) $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

ENSINO MÉDIO	**Ano: 2020**	**Bimestre:**
Disciplina: Matemática	**Professor(a):**	
Data: _______/______/2020	**Turma: 2º ano**	**Valor:**
ANÁLISE COMBINATÓRIA – Permutação e Arranjo		**AULA 2**
ALUNO:		**Nº:**

Permutação e Arranjo

A análise combinatória é a área da Matemática a qual se estuda a quantidade de agrupamentos que podem ser formados a partir de um conjunto de valores. O foco é o estudo dos tipos de agrupamento, que são resolvidos pelo princípio fundamental da contagem, e que são chamamos de permutação, a arranjo e combinação.

Permutação - Anagramas:

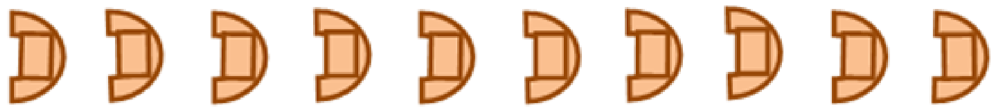
1. Quantos são os anagramas da palavra ALUNO?

2. Quantos são os anagramas da palavra ALUNO, que começam com a letra A?

3. Quantos são os anagramas da palavra ALUNO nos quais não há duas vogais consecutivas?

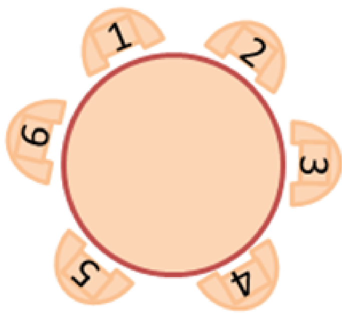
Arranjo - Agrupamento ordenado de elementos distintos:

4. De quantas maneiras é possível acomodar 6 pessoas em 10 cadeiras dispostas em fila?

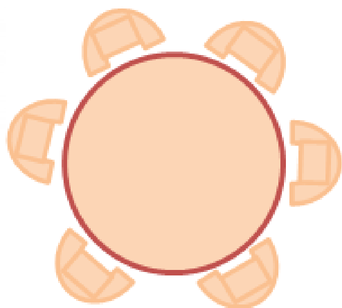


5. De quantas maneiras é possível acomodar 6 pessoas, sendo 3 homens e 3 mulheres em 10 cadeiras dispostas em fila, de modo que as mulheres estejam juntas?

6. Considere uma mesa redonda com 6 cadeiras, numeradas de 1 a 6, de quantas maneiras é possível acomodar 4 pessoas nestas cadeiras?



7. Considere uma mesa redonda com 6 cadeiras não numeradas, de quantas maneiras é possível acomodar 6 pessoas nestas cadeiras?



ENSINO MÉDIO	**Ano: 2020**	**Bimestre:**
Disciplina: Matemática	**Professor(a):**	
Data: _____/_____/2020	**Turma: 2º ano**	**Valor:**
ANÁLISE COMBINATÓRIA – Combinação Simples	**AULA 3**	
ALUNO:		**Nº:**

Combinação Simples:

A combinação simples pode ser definida como sendo um agrupamento dos elementos de um conjunto em subconjuntos. Na combinação a ordem dos elementos não é considerada na formação dos subconjuntos, ou seja, o subconjunto $\{A, B\}$ e $\{B, A\}$ são iguais, devendo ser considerado uma única vez na contagem das combinações. Vejamos um exemplo:

(Obmep 2017) Um grupo de 10 alunos pretende criar uma comissão, constituída por dois deles. Quantas são as comissões possíveis?

Observe que para ocupar a primeira vaga da comissão temos 10 alunos interessados. Quando for selecionado o primeiro aluno, teremos então 9 alunos interessados na segunda vaga. Podemos assim usar o princípio multiplicativo para calcular o total de maneiras, que seria 10 x 9 = 90. No entanto, o cargo ou a função desenvolvida pelos alunos é a mesma, assim para desconsiderar as repetições é preciso dividir o resultado por 2, já que uma comissão formada pelos alunos A e B e igual a uma comissão formada pelos alunos B e A. Daí temos:

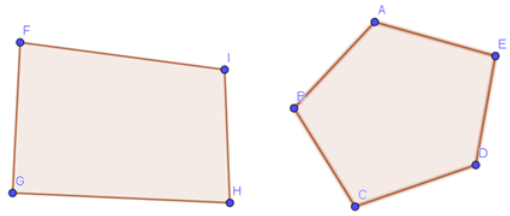
$$\frac{10.9}{2} = 45.$$

Podendo ser formadas 45 comissões.

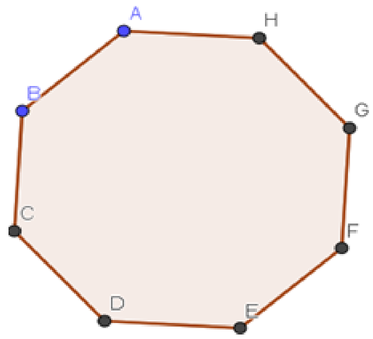
Agora, vamos exercitar:

1. Observe as figuras geométricas abaixo e trace as diagonais desses polígonos?

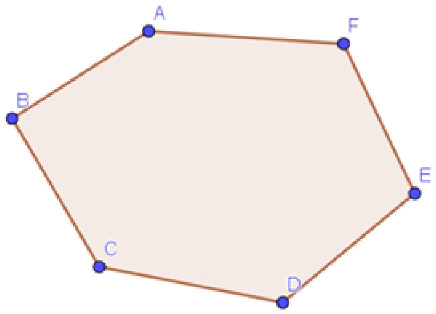
   a) Informe o nome e o número de diagonais de cada um deles.



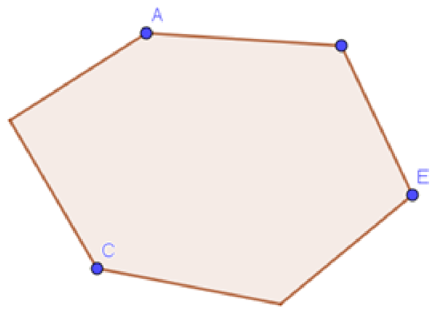
2. Dado um octógono regular, com vértices A, B, C, D, E, F, G e H, quantas são as diagonais desse polígono?



3. Dado um hexágono convexo, com vértices A, B, C, D, E e F, quantos triângulos podemos formar, de modo que possuam vértices em comum com o hexágono?

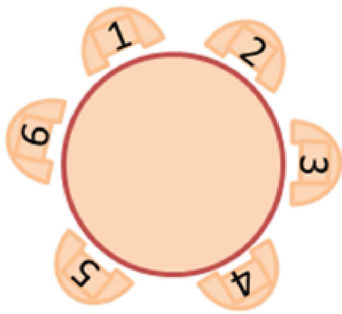


4. Dado um hexágono convexo, com vértices A, B, C, D, E e F, quantos são os triângulos cujos vértices, são vértices não-consecutivos do hexágono?



Existe alguma forma de se calcular as possíveis maneiras usando combinação: Pense Nisso!

5. De quantas maneiras podemos acomodar 2 pessoas em 6 cadeiras numeradas de 1 a 6, em torno de um mesa circular, de modo que não haja a ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?



6. De quantas maneira podemos acomodar 3 pessoas em 6 cadeiras numeradas de 1 a 6, em torno de um mesa circular, de modo que não haja a ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?

   Obs.: Não se esqueça de permutar as pessoas.

ENSINO MÉDIO	Ano: 2020		Bimestre:
Disciplina: Matemática	Professor(a):		
Data: _____/_____/2020	Turma: 2º ano	Valor:	
ANÁLISE COMBINATÓRIA -1º Lema de Kaplansky		AULA 4	
ALUNO:			Nº:

1° **Lema de Kaplansky**

De quantas maneiras podemos formar um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., n\}$ de modo que não haja números consecutivos?

Vejamos um exemplo: Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. De quantas maneiras podemos formar um subconjunto de 3 elementos de modo que não haja números consecutivos?

Iremos representar o subconjunto com sinais de $(+)$ e sinais de $(-)$. Os sinais de $(+)$ representarão aqueles elementos escolhidos e os sinais de $(-)$ aqueles elementos não escolhidos.

O subconjunto representado por $\{+ - + - + - -\}$ corresponde a $\{1, 3, 5\}$. O subconjunto representado por $\{- - + - + - +\}$ corresponde a $\{3, 5, 7\}$.

Esses exemplos são de subconjuntos que atendem a exigência do problema, mas o subconjunto representado por $\{+ - + + - - -\}$ que corresponde a $\{1, 3, 4\}$, não é uma resposta válida, uma vez que, os sinais de $(+)$ juntos representam a escolha de dois números consecutivos.

Note que entre dois sinais de $(+)$ deve haver no mínimo um sinal de $(-)$, e que para separar n sinais $(+)$ serão necessários $(n - 1)$ sinais de $(-)$. Desta maneira, por meio do esquema de símbolos podemos resolver o exemplo calculando o número de maneiras de permutar os sinais de $(+)$ e sinais de $(-)$, de modo que não tenhamos dois sinais de $(-)$ juntos.

Observando a figura, podemos ver que existem 5 espaços (representados por quadradinhos) para colocar 3 sinais de $(+)$, ou seja devemos escolher 3 espaços dos 5 existentes.

Como vimos no contéudo de combinação, podemos contar o número de subconjuntos, calculando:

$$\frac{5.4.3}{3!} = \frac{60}{6} = 10.$$

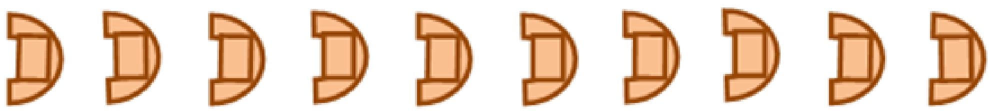
Portanto, Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ podemos formar 10 subconjuntos diferentes que estão relacionados a seguir:

{1, 3, 5}	{1, 5, 7}
{1, 3, 6}	{2, 4, 6}
{1, 3, 7}	{2, 4, 7}
{1, 4, 6}	{2, 5, 7}
{1, 4, 7}	{3, 5, 7}

Acabamos de ver 1° Lema de Kaplansky. Com esses conhecimentos tente resolver os exercícios a seguir:

1. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ um conjunto formado por 10 números consecutivos, pretende-se formar subconjuntos com 5 elementos desse conjunto, de modo que no subconjunto não existam números consecutivos. Relacione todos os subconjuntos possíveis atendendo a exigência do problema.

2. Uma fila tem 10 cadeiras nas quais devem sentar-se 5 homens de modo que não fiquem dois homens em posição adjacente. De quantos modos isso pode ser feito? **No final, lembre-se de permutar os homens.**



3. No período de 14 de julho ao dia 05 de agosto de 2021, que corresponde a férias escolares, um grupo de alunos pretende criar um cronograma de estudo para um concurso, que terá duração de 5 dias. No entanto, não pretendem estudar em dias consecutivos, ou seja após um dia de estudo deve haver pelo menos um dia disponível para fazer outras atividades. De quantas maneiras esses cronograma poderá ser criado?

4. Quantos são os anagramas da palavra MATEMATICA, nos quais não há duas letras A consecutivas?

   Desconsidere o acento e no final lembre-se de permutar as letras.

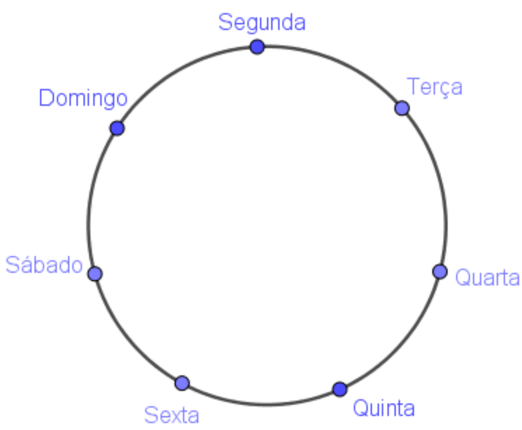
ENSINO MÉDIO	Ano: 2020		Bimestre :
Disciplina: Matemática	Professor(a):		
Data: ____/____/2020	Turma: 2º ano	Valor:	
ANÁLISE COMBINATÓRIA - 2º Lema de Kaplansky		AULA 5	
ALUNO:			Nº:

2° **Lema de Kaplansky**

Dado um conjunto de n elementos. De quantas maneiras podemos formar um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., n\}$ de modo que não haja números consecutivos, considerando 1 e n como consecutivos?

Vejamos um exemplo: Durante o primeiro semestre um aluno do 3° ano do Ensino Médio pretende fazer um cronograma de estudo semanal. Estudar 3 vezes por semana é seu objetivo, desde que ele não estude em dias consecutivos. De quantas maneiras ele poderá criar esse cronograma de estudo?

Diferente dos problemas da aula anterior, o cronograma de estudo terá um ciclo que se estenderá por um semestre, como podemos ver abaixo, sábado e domingo são dias consecutivos.



Para resolver esse problema, o aluno pensou em duas situações:

Aqueles cronogramas que teriam a segunda-feira como dia de estudo e aqueles cronogramas os quais a segunda-feira não faria parte.

Se segunda-feira fosse escolhida, deveria desconsiderar a terça-feira e o domingo, Com isso, ele verificou que existiam quatro dias para escolher os dois que completariam o cronograma.

Utilizando o 1° Lema de Kaplansky, o aluno resolveu por meio de $\binom{3}{2}$. Que resultou em 3 maneiras.

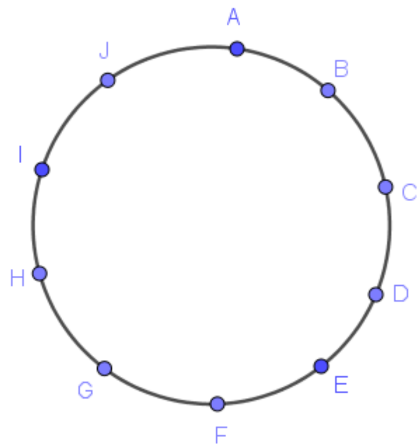
Ele também verificou que se a segunda-feira não fizesse parte do cronograma, poderia considerar a terça-feira e o domingo. Com isso, deveria escolher os 3 dias não consecutivos dentre os 6 restantes.

Utilizando o 1° Lema de Kaplansky, o aluno fez $\binom{4}{3}$. E encontrou 4 maneiras.

Somando os resultados, o aluno concluiu que existiam 7 modos de montar o cronograma de estudo.

Vamos praticar!

1. Dez amigos estão sentados em torno de uma mesa redonda. Dentre os dez amigos quatro serão escolhidos para um jogo de mesa, chamado Catan, no entanto, não é interessante escolher amigos que se sentem ao lado, para facilitar a comunicação entre eles, bem como, para a troca de olhares no momento de definir a estratégia do jogo. Considerando essa regra principal de escolha, de quantas maneiras podemos formar a equipe?



2. Em uma ronda de ciranda, formada por 20 crianças, haverá a distribuição de selos para apenas 6 delas, sendo que, entre duas crianças que ganhar o selo deve sempre haver uma que não tenha ganhado. De quantas maneiras podemos fazer isso?

3. João Contratou os serviços de um Personal Treiner, que atende todos os dias da semana. No entanto, ele precisa escolher 2 dias da semana para o treinamento, mas não deseja treinar em dias consecutivos. De quantas maneiras ele poderá escolher os dias de treinamento?

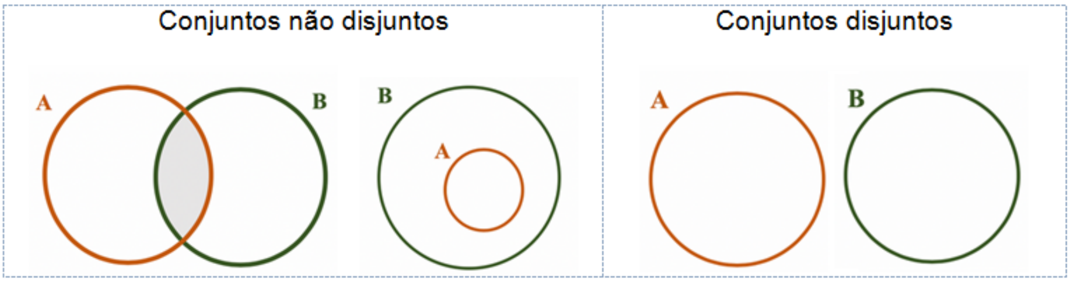
4. Em uma mesa circular estão sentados 18 candidatos ao cargo de assistente administrativo, desses, 6 serão selecionados para participar do teste de seleção da etapa 1, no entanto, entre 2 candidatos selecionados, deve haver 2 candidatos que não irão fazer o teste. De quantas maneiras podemos fazer isso?

ENSINO MÉDIO	**Ano: 2020**		**Bimestre:**
Disciplina: Matemática	**Professor(a):**		
Data: ____/____/ 2020	**Turma: 2º ano**	**Valor:**	
ANÁLISE COMBINATÓRIA – Princípio da Inclusão e Exclusão		**AULA 6**	
ALUNO:			**Nº:**

Princípio da Inclusão e Exclusão

O Princípio da Inclusão e Exclusão é uma generalização de um dos princípios básicos de contagem. É uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos.

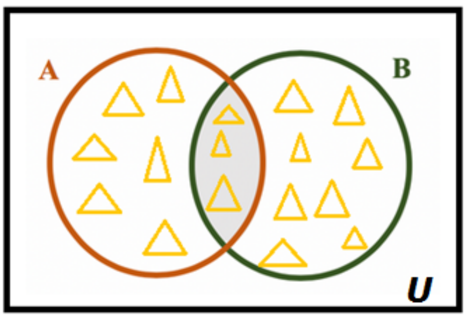
Abaixo esta representado o Diagrama de Venn:



Dois Conjuntos não disjuntos

Veremos a seguir um exemplo envolvendo dois conjuntos não disjuntos:

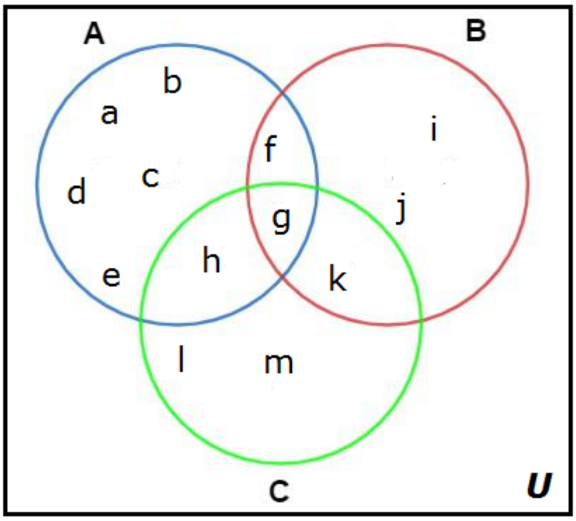
Observe a imagem abaixo, queremos contar o número de triângulos existentes, ou seja, contar o número de elementos da união dos conjuntos A e B.



Considere n a cardinalidade dos conjuntos. Temos $n(A) = 9$ triângulos e $n(B) = 11$ triângulos. Para calcular o total de triângulos não basta somarmos $n(A) + n(B) = 20$. Do total encontrado devemos subtrair o número de triângulos que existem na interseção, pois os três triângulos da interseção foram contados 2 vezes. Com isso, temos $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 9 + 11 - 3 = 17$.

Três Conjuntos não disjuntos

Pretende-se contar o número de elementos existentes na união dos conjuntos A, B e C, ou seja $n(A \cup B \cup C)$, que estão dispostos no diagrama abaixo.

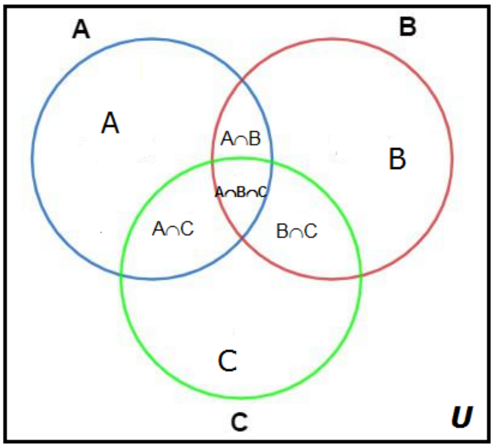


Usando o princípio da inclusão e exclusão, devemos somar o número de elementos do conjunto A, o número de elementos de conjunto B e o número de elementos do conjunto C. E como no exemplo anterior, temos as interseções de dois conjuntos, e os elementos dessas interseções foram contados duas vezes, por isso se deve subtraí-los, portanto, teremos: $A \cup B \cup C = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C) = 8+5+5-2-2-2 = 12$. Feito isso estamos incluindo duas vezes e excluído uma vez os elementos da interseção de dois conjuntos, mas, observe que os elementos da interseção de três conjuntos foram contados três vezes e subtraídos três vezes, o que precisa ser corrigido. Para finalizarmos devemos incluir o número de elementos da interseção de três Conjuntos, que equivale a:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)$$

$$= 8+5+5-2-2-2+1 = 13$$

Observe o diagrama abaixo, esse é o procedimento correto para se obter o resultado.



CURIOSIDADE: Quatro Conjuntos não disjuntos

Para contar o número de elementos de quatro conjuntos, que equivale a $n(A \cup B \cup C \cup D)$, devemos seguir o mesmo procedimento, uma sequência de inclusões e exclusões, conforme segue:

$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)$.

Vamos praticar:

1. Uma instituição beneficente oferece cursos de informática, xadrex e fotografia a comunidade. Após a apuração de todas as inscrições realizadas obtiveram os seguintes dados:

   - 24 pessoas se matricularam para o curso de informática;
   - 10 pessoas se matricularam para o curso de xadrez;
   - 22 pessoas se matricularam para o curso de fotografia;
   - 3 pessoas se matricularam para o curso de informática e xadrez;
   - 5 pessoas se matricularam para o curso de informática e fotografia;
   - 4 pessoas se matricularam para o curso de xadrez e fotografia;
   - 2 pessoas se matricularam para o curso de informática, xadrez e fotografia;
   - 4 inscrições estavam sem identificação.

   Responda:

   a) Quantas inscrições a instituição recebeu?

   b) Quantas pessoas optaram apenas pelo curso de fotografia?

   c) Quantos alunos fizeram a inscrição para os cursos de informática ou fotografia?

2. (Enem - 2004) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum das quais também 4 estarão em C_1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante conclui que, para montar os três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão e igual a:

   a) 135
   b) 126
   c) 118
   d) 114
   e) 110

3. (PUC - 2013) O número de alunos matriculados nas disciplinas Álgebra A, Cálculo II e Geometria Analítica é 120. Constatou-se que 6 deles cursam simultaneamente Cálculo II e Geometria Analítica e que 40 cursam somente Geometria Analítica. Os alunos matriculados em Álgebra A não cursam Cálculo II nem Geometria Analítica. Sabendo que a turma de Cálculo II tem 60 alunos, então o número de estudantes em Álgebra A é:

   a) 8
   b) 14
   c) 20
   d) 26
   e) 32.

ENSINO MÉDIO	Ano: 2020		Bimestre:
Disciplina: Matemática	Professor(a):		
Data: _____/_____/ 2020	Turma: 2º ano	Valor:	
ANÁLISE COMBINATÓRIA – Permutação Caótica			AULA 7
ALUNO:			Nº:

Permutação Caótica

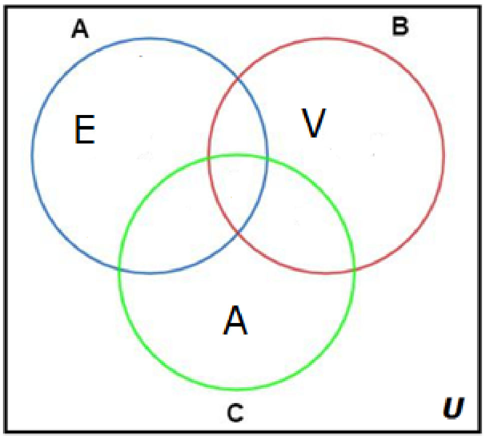
Uma permutação de elementos é dita caótica quando nenhum dos elementos ocupa sua posição original.

Considere a palavra EVA, as possíveis permutações desta palavra são: EVA – EAV – AEV – AVE – VAE – VEA, que chamamos de Anagramas. E as permutações Caóticas são os anagramas AEV e VAE.

É possível aplicar o principio da Inclusão e exclusão para resolver esse problema?

Podemos considerar todas as permutações da palavra EVA e subtrair do total de anagramas, aqueles os quais as letras da palavra estão em sua posição original.

Vamos considerar um conjunto universo, que contém todos os anagramas da palavra EVA, o conjunto A composto pelos anagramas que possuem a letra E em sua posição original, o conjunto B composto pelos anagramas que possuem a letra V em sua posição original e o conjunto C, composto pelos anagramas que possuem a letra A em sua posição original. Para resolver o problema, basta contar o número de elementos da união dos conjuntos A, B e C e subtrair esse resultado do total de permutações.



Então, temos:

$$6 - [n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)]$$

$$= 6 - (2 + 2 + 2 - 1 - 1 - 1 + 1) = 2.$$

Permutação Caótica usando combinação

Observe que o número de elementos das interseções de dois conjuntos e de três conjuntos, nesse caso, são sempre iguais, por isso podemos usar a combinação para contar o número de elementos das interseções, e depois, basta subtrair a quantidade encontrada do total de anagramas para se ter as permutações caóticas de uma palavra. Considere a palavra CUBO, temos:

$$4! - (\binom{4}{1}.3! - \binom{4}{2}.2! + \binom{4}{3}.1! - \binom{4}{4}.0!)$$

$$= 24 - (4.6 - 6.2 + 4.1 - 1.1)$$

$$= 24 - (24 - 12 + 4 - 1)$$

$$= 24 - (15)$$

$$= 9.$$

Vamos praticar:

1. Registre todas as permutações caóticas envolvendo os números $(1, 2, 3, 4)$ nas quais, nenhum deles esta em sua posição original?

2. Quantos são as permutações caóticas da palavra SOMAR?

3. (Leonard Euler 1707 – 1783, adaptada) Existem 6 cartas endereçadas a 6 pessoas distintas. Qual a probabilidade de que ao se entregar as cartas nenhuma delas seja entregue ao destinatário correto?

   Obs.: Use o Triângulo de Pascal para consultar o resultado das combinações.

   1
   1 1
   1 2 1
   1 3 3 1
   1 4 6 4 1
   1 5 10 10 5 1
   1 6 15 20 15 6 1

4. De quantas maneiras as pessoas de um grupo de n amigos podem sortear seus presentes, sem que uma pessoa sorteia a si mesma?

ENSINO MÉDIO	Ano: 2020		Bimestre :
Disciplina: Matemática	Professor(a):		
Data: ____/____/2020	Turma: 2º ano	Valor:	
ANÁLISE COMBINATÓRIA – O Problema de Lucas		AULA 8	
ALUNO:			Nº:

O Problemas de Lucas

Curiosidade:

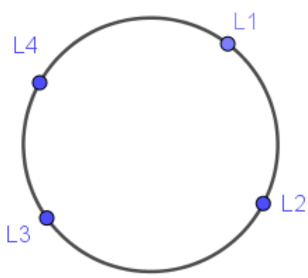
François Édouard Anatole Lucas, Francês, nasceu em 1842 e morreu em 1891, formulou um problema em 1891 que foi solucionado somente em 1943 pelo matemático Irving Kaplansky, cujo enunciado é o seguinte:

De quantas maneiras m casais podem se acomodar em $2m$ cadeiras diferentes em torno de uma mesa circular de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua esposa?

Problemas deste tipo são desafiadores e estimulam à descoberta e a busca por novos conhecimentos. Assim como Kaplansky desenvolveu seus Lemas para a resolução deste problema outros matemáticos também foram em busca da solução. Após alguns anos, em 1986, Kenneth P. Bogart (1968-2005) e Peter G. Doyle, publicaram uma solução diferente para o Problema de Lucas.

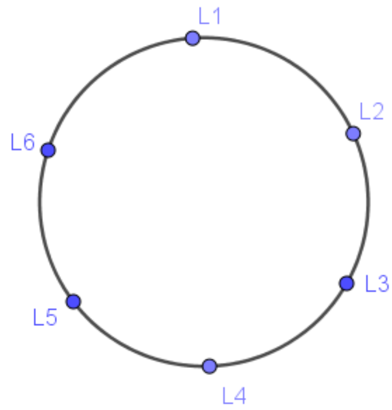
Usando seus conhecimentos e todos os conteúdos anteriores tente resolver esses problemas:

1. É possível acomodar 2 casais em torno de uma mesa circular, de modo que atendam a exigência do Problema de Lucas?



2. De quantas maneiras podemos acomodar 3 casais, ou seja 6 pessoas, em torno de uma mesa circular de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas?

3. De quantas maneiras podemos acomodar 3 casais, ou seja 6 pessoas, em torno de uma mesa circular de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua esposa?



Dica:

• Nomear os homens, por exemplo, H_1, H_2 e H_3;

• Nomear as mulheres, por exemplo, M_1, M_2, M_3;

• Numerar os lugares 1 a 6;

• Acomodar as Mulheres nas posições pares ou ímpares (por exemplo;

• Calcular todas as permutações dos homens e depois subtrair aquelas posições onde eles se encontram ao lado de sua mulher (Princípio da Inclusão e Exclusão);

• Usar o 2º Lema de Kaplansky para calcular todas as maneiras de acomodar os homens.

4. De quantas maneiras podemos acomodar 4 casais, ou seja 8 pessoas, em torno de uma mesa circular de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua esposa?

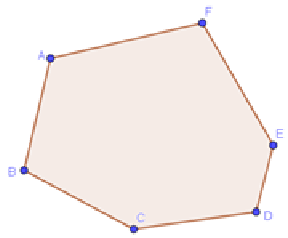
5. De quantas maneiras podemos acomodar 50 casais, ou seja, 100 pessoas, em torno de uma mesa circular de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua esposa?

ENSINO MÉDIO	Ano: 2020		Bimestre :
Disciplina: Matemática	Professor(a):		
Data: ___/___/2020	Turma: 2º ano	Valor:	
ANÁLISE COMBINATÓRIA – Geometria Combinatória		AULA 9	
ALUNO:			Nº:

Geometria Combinatória

Achar estranho ou nunca ter se deparado com problemas de geometria que possam ser resolvidos com a análise combinatória, é comum entre os alunos. No entanto, existem diversos problemas de geometria que podem ser resolvidos usando técnicas combinatórias, a seguir estão alguns exemplos:

Exemplo 1: Dado um hexágono convexo, com vértices A, B, C, D, E e F, quantas são as diagonais desse polígono?



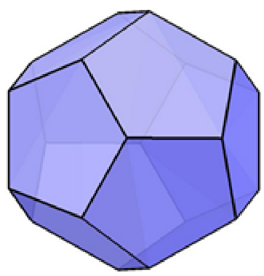
Calculando a combinação de 6 pontos escolhe 2, teremos calculado o total de segmentos que ligam dois vértices do polígono, no entanto, precisamos lembrar que os 6 lados do polígono também foram contatos, sendo necessário subtraí-los no final.

Então a resposta será:

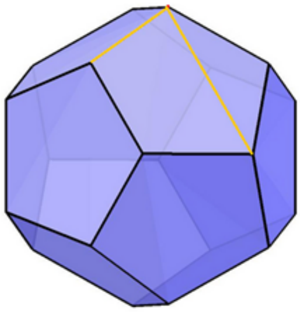
$$\binom{6}{2} - 6 = 9.$$

Daí podemos concluir que o hexágono possui 9 diagonais.

Exemplo 2: Dado um dodecaedro, quantas são as diagonais desse poliedro?



O dodecaedro é um poliedro regular, possui 12 faces pentagonais e 20 vértices, para o cálculo do número de diagonais pode-se fazer a combinação de 20 vértices para escolher dois deles, assim, encontra-se o total de segmentos que ligam dois vértices quaisquer. No entanto, é preciso lembrar que as arestas do poliedro bem como as diagonais das faces também foram contadas, conforme mostra na figura a seguir:



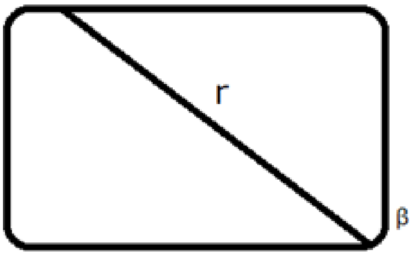
Diante disso, após realizarmos o cálculo do total das combinações de dois vértices quaisquer, é preciso encontrar o número de arestas do poliedro (que pode ser encontrado pela relação de Euler, $(V + F - 2 = A)$, e ainda calcular o número de diagonais das 12 faces (novamente pode-se usar a combinação de 5 vértices escolhe 2, menos o número de arestas das faces), para finalmente subtrair esses resultados do total encontrado a princípio. Então temos:

$$\begin{aligned} &\binom{20}{2} - (V + F - 2) - 12. \left[\binom{5}{2} - 5\right] \\ &= 190 - 30 - 60 \\ &= 100. \end{aligned}$$

Concluímos assim, que o dodecaedro possuem 100 diagonais.

Outros exemplos. Vamos pensar:

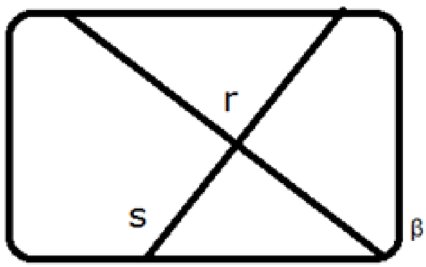
Podemos também contar regiões a partir de retas traçadas no plano. Observe o plano β, dividido em duas regiões pela reta r.



Ao interceptar o plano a reta r dividiu o plano em dois. Então uma reta divide o plano e cria uma nova região.

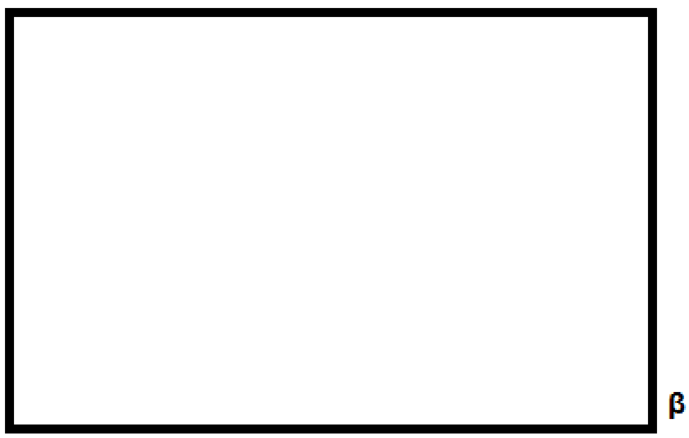
Considerarmos agora, duas retas, podemos verificar que surgiram 2 novas regiões.

Então, podemos afirmar que duas retas dividem o plano em quatro regiões? Isso sempre acontece? Quantas interseções entre retas existem?



Vamos praticar:

1. Projete três retas no plano abaixo, pense e responda:



   a) Quantas regiões existem no total?

   b) Quantas regiões novas são criadas quando se inclui uma nova reta?

   c) Quantas interseções entre retas existem?

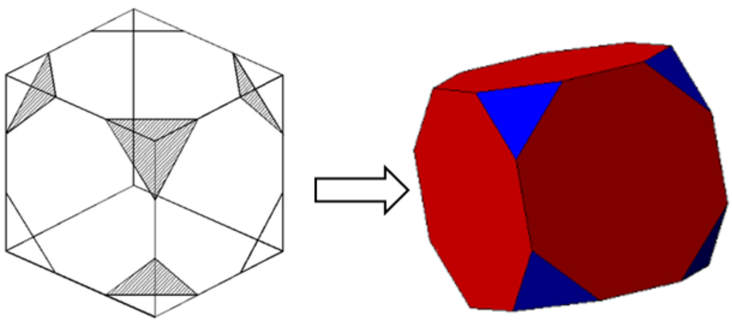
   d) Qual o número máximo de regiões que três retas dividem o plano? Existe um número mínimo de regiões?

   e) Quais são as condições para que exista um maior número de regiões no plano quando interceptado por 3 retas?

2. Considerando o maior número de regiões possíveis, em quantas regiões quatro retas dividem o plano?

Podemos resolver esse problema usando a Combinação? Pense nisso!

3. Um cubo foi seccionado nos oito vértices e de cada um deles foi retirada uma pirâmide de base triangular. O novo sólido gerado é chamado de cubo truncado, um dos sólidos de Arquimedes e possui 24 vértices, 6 faces octagonais regulares e 8 faces triangulares regulares, conforme mostra as figuras abaixo:



Sabe-se que o cubo convencional possui 4 diagonais, quantas são as diagonais do cubo truncado?

4. Em quantas regiões dois triângulos podem dividir um plano? Existe o máximo e mínimo de regiões?

5. Em quantas regiões dois quadriláteros podem dividir um plano? Existe o máximo e mínimo de regiões?

Desafio:

6. Construção de polígonos convexos. Dados quaisquer cinco pontos numa superfície plana, de forma que não há três deles alinhados, prove que quatro desses pontos sempre formarão um quadrilátero convexo.

Sugestão: Use o software GeoGebra para a construção.

8 Considerações Finais

Este trabalho é mais uma possibilidade, dentre outras, de motivar e estimular o estudante para o aprendizado de conteúdos que exijam conhecimento em Análise Combinatória. Quanto aos professores de matemática podem fazer uso dele para o estudo dos conteúdos bem como para a aplicação em suas aulas.

As competências a serem desenvolvidas com os estudantes, por meio de criação de registros, não são exclusivas da matemática, no entanto, é interessante que o estudante possa fazer isso para a compreensão dos dados e para a análise e resolução dos problemas. Os temas tratados neste trabalho exigem análise das informações, desenvolvimento de um raciocínio, identificação e a representação de padrões, elaboração de registros das informações, construção de uma solução para um dado problema e a comunicação para expressar as generalizações.

Para trabalhar habilidades que envolvam o raciocínio, é necessário que os estudantes em interação com seus colegas e professor possam investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos. Os problemas de análise combinatória possuem essas características, por isso a importância de se criar uma sequência didática para dar sentido ao trabalho desenvolvido.

Além de tudo, espera-se que as atividades disponibilizadas neste trabalho, possam servir de sequência didática para professores e seus alunos, pois tratam de conteúdos importantes a serem trabalhados no ensino médio. As atividades podem ser ainda mais dinâmicas se utilizadas em aulas remotas.

Uma vez que estamos trabalhando com a área de conhecimento de Matemática e suas Tecnologias, os temas estudados possuem argumentos que possibilitam o professor a explorar novas técnicas, como por exemplo, ensinar a Geometria Combinatória fazendo uso do software GeoGebra [7], de modo que a interação possa ser ainda mais prazerosa, levando os estudantes a conhecer novas ferramentas tecnológicas.

Enfim, o desejo é de que este trabalho agregue conhecimento que contribua para o exercício do professor e de seus alunos, ampliando e otimizando as possibilidades pedagógicas em sua rotina dentro e fora da sala de aula.

Bibliografia

[1] BIOGRAFIA. *François Édouard Anatole Lucas.* Disponível em: <https://mathshistory.st–andrews.ac.uk/Biographies/Lucas/>. Acesso em: outubro de 2020.

[2] BIOGRAFIA. *Irving Kaplansky*, Disponível em: <http://www.ams.org/about-us/presidents/48–kaplansky>. Acesso em: setembro de 2020.

[3] BOGART, K. P. e DOYLE, P. G. *Non-sexist solution of the ménage problem.* Vol. 93. 7. Taylor & Francis, 1986, pp. 514–518.

[4] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC).* Brasília: MEC, 2017.

[5] ENEM. *Exame Nacional do Ensino Médio.* INEP. Ministério da Educação. Disponível em:<http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em novembro de 2020.

[6] FERREIRA, I. M. N. *Os lemas de Kaplansky e o problema de Lucas. Diss de mestr.* 2017.

[7] GEOGEBRA. *GeoGebra.* Disponível em: <https://www.geogebra.org/> acesso em setembro de 2020.

[8] KAPLANSKY. *I. et al. Solution of the Probleme des ménages.* Bulletin of the American Mathematical Society 49.10 (1943), pp. 784-785.

[9] LOVASZ, L., PELIKAN, J. e VESZTERGOMBI, K. *Matemática discreta.* Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

[10] MORGADO, A. C. d. O. et al. *Análise combinatória e probabilidade.* Instituto de Matemática pura e aplicada, 1991.

[11] MORGADO, A. C. e Carvalho, P. C. P. *Matemática discreta.* 2015.

[12] OBMEP. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.* IMPAR. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/ banco.htm.>. Acesso em outubro de 2020.

[13] OLIVEIRA SANTOS, J. P. de, Mello, M. P. e Murari, I. T. C. *Introdução à análise combinatória.* Ed. Ciencia Moderna, 2007.

[14] PAIVA, J. P. R. A. *Funções geradoras e algumas aplicações à contagem. Diss de mestr.* 2020.

[15] PAIVA, M. *Matemática.* Vol. 3. Ed. São Paulo: Moderna. 2015, pp. 392–394.

[16] ROQUE, T. e Carvalho, J. B. P. de. *Tópicos de história da matemática.* 2012.

[17] SANTOS, L. G. M. d. *O problema de Lucas.* Disponível em <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/BUOS-9F8GZN?locale=es>, acesso em setembro de 2020.

[18] SILVA, R. *Cinco Pontos e um Final Feliz.* Revista do Professor de Matemática 72. 2011, p. 4.

[19] YEUNG, D. *A Geometric approach to the second non-trivial case of the Erdos-Szekeres conjecture.* Hang Lung Mathematics Awards 7. 2016, pp 63-75.