



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



# Trigonometria: Uso do GeoGebra para análise de problemas reais

Luciano Pinto e Silva

Goiânia

2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

### E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

#### 1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação      Tese

#### 2. Nome completo do autor

Luciano Pinto e Silva

#### 3. Título do trabalho

Trigonometria: Uso do Geogebra para análise de problemas reais

#### 4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento  SIM      NÃO<sup>1</sup>

**[1]** Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

**a)** consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

**b)** novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **LUCIANO PINTO E SILVA, Discente**, em 07/05/2021, às 19:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Thaynara Arielly De Lima, Professora do Magistério Superior**, em 24/05/2021, às 20:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2054316** e o código CRC **14C4E35F**.

---

Luciano Pinto e Silva

# Trigonometria: Uso do GeoGebra para análise de problemas reais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dra. Thaynara Arielly de Lima

Goiânia

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Luciano Pinto e  
Trigonometria: Uso do GeoGebra para análise de problemas reais [manuscrito] / Luciano Pinto e Silva. - 2021.  
LXXXV, 85 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Thaynara Arielly de Lima.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2021.  
Bibliografia. Anexos.

1. Razões trigonométricas. 2. Círculo trigonométrico. 3. GeoGebra.  
I. Lima, Thaynara Arielly de, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

Ata nº 24 da sessão de Defesa de Dissertação de **Luciano Pinto e Silva**, que confere o título de Mestre em Matemática, **na área de concentração em Ensino de Matemática**.

Ao quinto dia do mês de maio do ano de dois mil e vinte um, a partir das quatorze horas e trinta minutos, através de web-vídeo-conferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “ **Trigonometria: Uso do Geogebra para análise de problemas reais**”. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Thaynara Arielly de Lima IME/UFG com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Tiago Moreira Vargas IME/UFG membro titular interno e Andréia Borges Avelar da Silva - FUP/UnB membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Thaynara Arielly de Lima IME/UFG, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao quinto dia do mês de maio do ano de dois mil e vinte um.

## TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

**Trigonometria: Uso do Geogebra para análise de problemas reais**

Documento assinado eletronicamente por **Andréia Borges Avelar da Silva, Usuário Externo**, em 06/05/2021, às 12:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Thaynara Arielly De Lima, Professora do Magistério Superior**, em 07/05/2021, às 11:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tiago Moreira Vargas, Professor do Magistério Superior**, em 07/05/2021, às 11:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site



[https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?)

[acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador  
**2029809** e o código CRC **69F6B4DA**.

---

**Referência:** Processo nº 23070.021145/2021-59

SEI nº 2029809

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Luciano Pinto e Silva** graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, em 1998, especializou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás em 2009 e atua como professor de matemática no ensino médio na rede estadual de ensino do Estado de Goiás.



Dedico este trabalho a minha esposa que tanto me apoiou e aos meus filhos de quem tenho tanto orgulho.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, por mais esta conquista. A minha orientadora Dra. Thaynara Arielly de Lima por toda dedicação e esforço para com este trabalho. A todo corpo docente que fez parte deste programa de mestrado e também a o Coordenador do curso Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues pelo comprometimento e dedicação ao curso e a todos os alunos.

## **Resumo**

Abordaremos de maneira geral, o conteúdo de trigonometria estudado no ensino médio, destacando as propriedades trigonométricas, definições e situações problemas envolvendo as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Faremos também, uma relação entre teoria e prática envolvendo problema hipotéticos e problemas do cotidiano, trabalhando modelos matemáticos, representações geométricas. Utilizaremos o software GeoGebra como ferramenta de apoio, para construção de gráficos e figuras geométricas, destacando algumas propriedades e exemplos.

## **Palavras-chave**

Razões trigonométricas, Círculo trigonométrico, GeoGebra.

## **Abstract**

We will approach in general, the content of trigonometry studied in high school, highlighting the trigonometric properties, definitions and problem situations involving the sine, cosine and tangent trigonometric ratios. We will also make a relationship between theory and practice involving hypothetical and everyday problems, working with mathematical models, geometric representations. We will use the GeoGebra software as a support tool for the construction of graphs and geometric figures, highlighting some properties and examples.

## **Keywords**

Trigonometric ratios, Trigonometric circle, GeoGebra.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>17</b>
1.1	Medida de ângulos e arcos . . . . .	17
1.1.1	Graus, grado e radianos . . . . .	17
1.1.2	Magnitude do radiano . . . . .	21
1.2	Razões trigonométricas . . . . .	23
1.2.1	Relações Fundamentais das razões trigonométricas . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Círculo trigonométrico</b>	<b>27</b>
2.1	Seno e cosseno no círculo trigonométrico . . . . .	30
2.1.1	Ângulos notáveis . . . . .	31
2.2	Tangente no círculo trigonométrico . . . . .	37
2.3	Adição e subtração de Arcos . . . . .	38
2.3.1	Cosseno da soma de dois arcos . . . . .	39
2.4	Lei dos senos . . . . .	44
2.5	Lei dos cossenos . . . . .	49
<b>3</b>	<b>GeoGebra no ensino da trigonometria</b>	<b>54</b>
3.1	O GeoGebra . . . . .	55
3.2	Trigonometria no GeoGebra . . . . .	58
3.2.1	Problemas de Olimpíadas . . . . .	63
3.2.2	Medidas inacessíveis . . . . .	67
3.3	Funções circulares e o GeoGebra . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>83</b>

# Introdução

O estudo da trigonometria remonta ao astrônomo grego Hiparco de Rodas (190-120a.C.). Assim como outros astrônomos gregos, Hiparco pretendia encontrar um modelo que descrevesse o movimento dos astros e dos planetas. Relacionando ângulos e cordas (traçadas em uma circunferência), ele pretendia trabalhar com ângulos, sendo possível calcular as posições presentes e futuras de astros e planetas. E assim, vários estudos a respeito da trigonometria foram surgindo ao longo dos anos, com vários estudiosos como Claudius Ptolomeu (85-165 d.C.) até chegarmos à função seno com Leonhard Euler (1707-1783) no século XVIII. Na atualidade, o estudo da trigonometria apresenta várias aplicações e em diversas áreas. [1]

A ideia principal deste projeto não é esgotar todo o conteúdo relacionado a trigonometria, muito menos criar uma fórmula mágica de ensinar matemática. O que pretendemos é elaborar, de maneira bem dinâmica, relacionando a teoria e a prática, propiciando um aprendizado prazeroso e saudável, construindo o conhecimento e oferecendo meios para que o aluno possa caminhar sozinho.

## Justificativa

Ao longo dos anos, atuando como professor no ensino médio e também no ensino superior, deparei com grandes desafios relacionados ao ensino. O maior deles enfrentado foi ensinar trigonometria, pois os alunos apresentavam muita dificuldade no entendimento do conteúdo devido a assimilação simultânea à geometria e à medida de ângulos e (ou) arcos, uma vez que a compreensão das razões trigonométricas gerava bastante confusão. Principalmente relacionar seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico. Esta dificuldade apresentada, pela maioria dos alunos do ensino médio no estudo da trigonometria, é caracterizada em avaliações internas (escola) e externas, (SAEB 2009, página 86). Nesta última, 30% dos respondentes acertaram a resposta de uma questão referente a razões trigonométricas, demonstrando um baixo rendimento com relação ao desempenho de 4,7 no IDEB - 2019 das escolas estaduais de Goiás (fonte:

<http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/ideb/resultados>, acessado em 18 de outubro de 2020. Diante destas situações relacionadas, pretendemos abordar de maneira bem dinâmica, conjecturando e explanando as diversas ligações entre a trigonometria e a realidade, apresentando definições, explorando exercícios e interagindo o conteúdo propriamente dito com o uso de tecnologia, através do software geométrico: Geogebra.

# Objetivos

## Objetivos Gerais

Pretendemos apresentar razões trigonométricas, estabelecer as principais propriedades, discutir problemas cotidianos, exercícios de olimpíadas, provas de vestibulares e concursos envolvendo trigonometria. Utilizaremos o software GeoGebra, explorando os principais conceitos.

## Objetivos Específicos

1. Definir medida de ângulos e arcos;
2. Definir ciclo trigonométrico;
3. Definir as razões trigonométricas no ciclo trigonométrico;
4. Utilizar o GeoGebra para compreender o ciclo trigonométrico;
5. Demonstrar a relação fundamental da trigonometria:  $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$ ;
6. Demonstrar as principais identidades trigonométricas;
7. Demonstrar a lei dos senos e a lei dos cossenos e suas aplicações;
8. Definir as funções circulares
9. Resolver problemas aplicando o GeoGebra.

No Capítulo 1, recordaremos os conceitos, definições e teoremas relacionados a trigonometria, tais como medidas de ângulos e razões trigonométricas. No Capítulo 2, definiremos o círculo trigonométrico, as razões trigonométricas seno, cosseno, tangente, adição e subtração de arcos, a Lei dos senos e a Lei dos Cossenos. No Capítulo 3, faremos uma breve apresentação do GeoGebra e trataremos de vários exemplos aplicando este software.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Medida de ângulos e arcos

Neste capítulo definiremos os principais conceitos relacionados à trigonometria, abordando de maneira simples e estratégica. Utilizaremos exemplos para uma melhor visualização das definições e teoremas.

#### 1.1.1 Graus, grado e radianos

Considere o ângulo reto, como sendo o ângulo formado pela quarta parte do ângulo de 1 (uma) volta. Assim, na geometria, podemos medir os ângulos a partir do ângulo reto. Para isso, divida o ângulo reto em 90 partes iguais. Cada uma destas partes corresponde a 1 grau [9]. Ao dividir 1 grau em 60 partes iguais, cada uma destas partes corresponde a 1 minuto, e dividindo 1 minuto em 60 partes iguais, temos 1 segundo em cada uma destas partes. Os símbolos  $1^\circ$ ,  $1'$  e  $1''$  são usados para denotar o grau, o minuto e o segundo, respectivamente. Veja na figura 1.1 .

Fazendo o raciocínio inverso, temos que 60 segundos ( $60''$ ) equivale a 1 minuto, 60

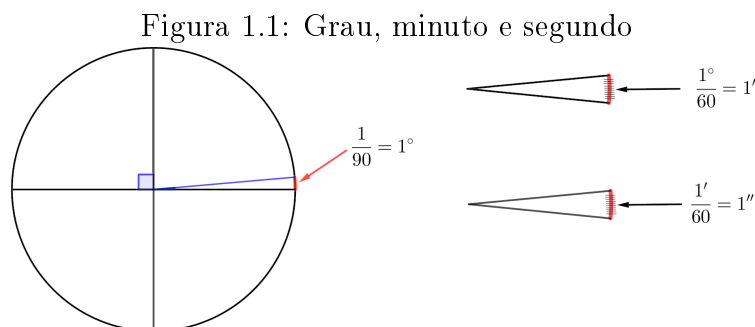
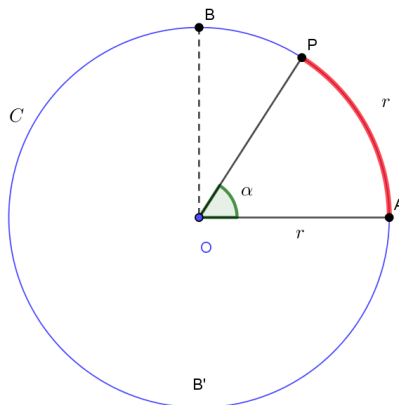


Figura 1.2: Ângulo central e o Radiano



minutos ( $60'$ ) equivale a 1 grau ( $1^\circ$ ) e 90 graus ( $90^\circ$ ) equivale a um ângulo reto. Assim, teremos a base sexagesimal para tratar de medidas de ângulos em graus.

A base sexagesimal não é a única forma de medir ângulos, um outro sistema criado foi o sistema centesimal, ou francês. Neste sistema, o ângulo reto é dividido em 100 partes iguais, chamado de grado. Cada grado é dividido em 100 minutos, e cada minuto é dividido em 100 segundos.

Os símbolos  $1^g$ ,  $1'$  e  $1''$  são usados para denotar grado, minuto e segundo, respectivamente. Sendo, 100 segundos ( $100''$ ) equivalente a 1 minuto ( $1'$ ), 100 minutos ( $100'$ ) equivalente a 1 grado ( $1g$ ) e 100 grados equivale a um ângulo reto.

É bastante plausível que teremos ângulos maiores que o ângulo reto, é claro, ângulo de  $150^\circ$  por exemplo. Ao estudar o círculo trigonométrico, no Capítulo 2, vamos encontrar valores maior que  $360^\circ$ , que serão congruentes a um ângulo entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$ , que trataremos detalhadamente.

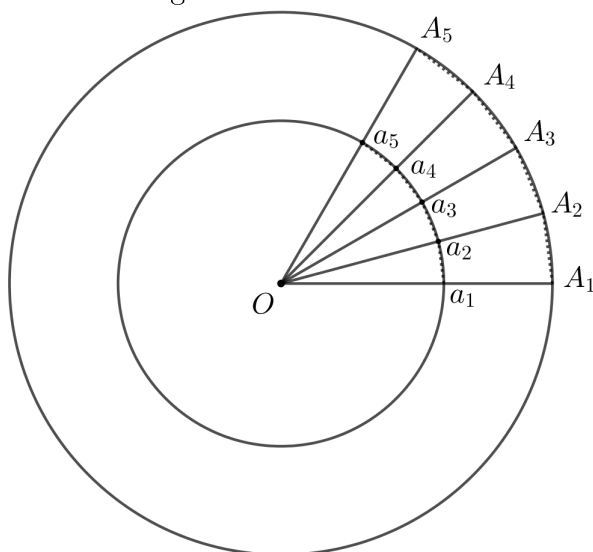
Um terceiro sistema de medidas de ângulos foi elaborado a partir do raio da circunferência construído sobre o arco de comprimento igual ao raio. E este sistema é bastante usado nos vários ramos da matemática [9], chamado de radiano. Que veremos a seguir.

Considere uma circunferência  $C$  de raio  $r$  e centro  $O$ . Seja  $\widehat{AP}$  um arco em  $C$  de comprimento  $r$ . Tomemos os segmentos  $\overline{OA}$  e  $\overline{OP}$ . O ângulo central  $\alpha = \widehat{AOP}$  é o ângulo de 1 *radiano*, veja na Figura 1.2. A notação utilizada para o radiano é  $1^c, [9]$ , que indica o ângulo de 1 *radiano*, embora trataremos o ângulo de  $1^c$  apenas por  $1rad$ .

**Teorema 1.** *A razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é igual a uma constante.*

*Demonstração.* Considere dois círculos concêntricos de centro  $O$ . Inscreva no círculo maior um polígono regular  $A_1A_2 \cdots A_n$  de  $n$  lados. Seja  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  a intersecção

Figura 1.3: O número  $\pi$



do círculo menor com os segmentos  $\overline{OA_1}$ ,  $\overline{OA_2}$ ,  $\dots$ ,  $\overline{OA_n}$ , respectivamente. Veja Figura 1.3. Em seguida, considere o polígono formado por  $a_1a_2$ ,  $a_2a_3$ ,  $\dots$ ,  $a_{n-1}a_n$ , note que  $a_1, a_2, \dots, a_n$  é um polígono regular de  $n$  lados inscrito no círculo menor, conforme Figura 1.3.

Agora veja que  $\overline{Oa_1} = \overline{Oa_2}$  e  $\overline{OA_1} = \overline{OA_2}$ , por construção. Logo, usando semelhança de triângulos temos:

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{a_1a_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{Oa_1}}.$$

Além disso, o polígono  $A_1A_2 \dots A_n$  sendo regular, seu perímetro, ou seja, a soma de seus lados, é igual a  $n \cdot \overline{A_1A_2}$ . Da mesma forma para o polígono  $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{n-1}a_n$ . Portanto, temos:

$$\frac{\text{Perímetro do polígono } A_1 \dots A_n}{\text{Perímetro do polígono } a_1 \dots a_n} = \frac{n \cdot \overline{A_1A_2}}{n \cdot \overline{a_1a_2}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{a_1a_2}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{Oa_1}} \quad (1)$$

Esta equação acontece qualquer que seja o número de lados nos polígonos. Daí, quando o número de lados tende a infinito, em ambos os polígonos, teremos que o perímetro do polígono  $A_1 \dots A_n$  será igual ao comprimento da circunferência maior e o perímetro do polígono  $a_1 \dots a_n$  será igual ao comprimento da circunferência menor.

Usando a equação (1), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Comprimento da circunferência externa}}{\text{Comprimento da circunferência interna}} &= \frac{\overline{OA}}{\overline{Oa}} \\ &= \frac{\text{Raio da circunferência externa}}{\text{Raio da circunferência interna}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\text{Comprimento da circunferência externa}}{\text{Raio da circunferência externa}} = \frac{\text{Comprimento da circunferência interna}}{\text{Raio da circunferência interna}}$$

Uma vez que não houve qualquer restrição quanto ao tamanho das duas circunferências, então a razão

$$\frac{\text{Comprimento da circunferência}}{\text{Raio da circunferência}},$$

**é a mesma para todas as circunferências.**

Logo, a razão entre o comprimento da circunferência e o raio é uma constante, assim como para o diâmetro, uma vez que o diâmetro é o dobro do raio.  $\square$

Mostramos que a razão  $\frac{C}{d}$ , onde  $C$  é o comprimento da circunferência e  $d$  o diâmetro, é uma constante e é a mesma para qualquer circunferência. O valor dessa constante é denotado pela letra grega  $\pi$ , de modo que pi é um número.

**Corolário 1.** *A medida do comprimento da circunferência é igual a  $\pi$  vezes a medida do seu diâmetro ou  $2\pi$  vezes seu raio.*

*Demonstração.* Temos no Teorema 1 que a razão entre o comprimento  $C$  e o diâmetro  $d$  é uma constante. Seja  $\pi$  essa constante. Daí,

$$\frac{C}{d} = \pi$$

$$\frac{C}{2r} = \pi.$$

Logo,

$$C = 2\pi \cdot r$$

$\square$

Sabemos que o valor de  $\pi$  não é um número inteiro, nem pode ser expresso na forma de uma fração simples, muito menos na forma de uma fração decimal. O número  $\pi$  é uma medida incomensurável, ou seja, um número cujo valor não pode ser expresso como a razão de dois números inteiros.

Seu valor, com 8 casas decimais, é

3, 14159265...

A fração  $\frac{22}{7}$  é o valor exato de  $\pi$  para duas casas decimais; pois  $\frac{22}{7} = 3,14285\dots$

Um valor mais aproximado de  $\pi$ , com seis casas decimais, pode ser representado pela fração  $\frac{355}{113}$ , pois  $\frac{355}{113} = 3,14159203\dots$

**Observação 1.** Para representar um ângulo formado por duas semirretas, ou por dois segmentos, usaremos a notação:

$$\angle AOB.$$

Onde  $O$  é o vértice,  $OA$  e  $OB$  são as semirretas ou os segmentos que formam o ângulo.

**Teorema 2.** O ângulo de 1 radiano é um ângulo constante.

*Demonstração.* Considere  $\widehat{AB}$  um arco de um quadrante do círculo, ou seja, um quarto da circunferência. Como o comprimento da circunferência é igual a  $\pi$  vezes o comprimento do seu diâmetro, ou seja  $2\pi r$ , então o comprimento de  $\widehat{AB}$  é igual a  $\frac{\pi r}{2}$ , onde  $r$  é o raio da circunferência.

Como em uma circunferência, a razão entre dois ângulos quaisquer é igual a razão entre os arcos que os contém. Então,

$$\frac{\angle AOP}{\angle AOB} = \frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}} \Rightarrow \frac{\angle AOP}{\angle AOB} = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} \Rightarrow \frac{\angle AOP}{\angle AOB} = \frac{2}{\pi}$$

ou seja,

$$\angle AOP = \frac{2}{\pi} \cdot \angle AOB$$

Mas definimos o ângulo  $\angle AOP$  como 1 *radiano*.

Portanto, 1 radiano =  $\frac{2}{\pi} \cdot \angle AOB$

1 radiano =  $\frac{2}{\pi} \cdot \text{ângulo reto}$ .

Como o ângulo reto é um ângulo constante e  $\pi$  também é constante, logo 1 *radiano* é um ângulo constante, ou seja, independente do tamanho do círculo o ângulo de 1 *radiano*, que representaremos por 1 *rad*, será sempre o mesmo.  $\square$

## 1.1.2 Magnitude do radiano

Vimos anteriormente que 1 *radiano* é

$$= \frac{2}{\pi} \times \text{ângulo reto} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= \frac{180^\circ}{3,14159265\dots} = 57,2957795^\circ$$

$$= 57^\circ 17' 44,8'' \text{ aproximadamente.}$$

Uma vez que *um radiano*  $= \frac{2}{\pi} \times \text{ângulo reto}$ , então,  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  *radianos* ou  $\frac{\pi}{2} \text{rad}$ . Daí,  $180^\circ = \pi \text{rad}$  e  $360^\circ = 2\pi \text{rad}$ .

Não se deve confundir o arco de uma circunferência por não apresentar a unidade de medida utilizada, pois:

*"É necessário que o aluno fique atento neste ponto, pois se a unidade, em termos da qual o ângulo é medido, não for mencionada, ele deve mentalizar a palavra "radianos". Caso contrário, ele cairá facilmente no erro de supor que  $\pi$  representa  $180^\circ$ . É verdade que  $\pi$  radianos é o mesmo que  $180^\circ$ , mas o próprio  $\pi$  é um número, e apenas um número". LONEY, SIDNEY LUXTON, 2018, P.12.*

Veremos a seguir como converter a medida de graus em radianos e de radianos em graus.

Sabendo que  $180^\circ = \pi \text{rad}$  e usando regra de três simples, temos:

**Exemplo 1.** *Converta, em radianos, o ângulo de  $45^\circ$ .*

Seja  $x$  o ângulo procurado. Daí,

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ — } \pi \text{rad} \\ 45^\circ \text{ — } x \end{array}$$

Ou seja,

$$180^\circ \cdot x = 45^\circ \cdot \pi \text{rad}. \text{ Logo, } x = \frac{45^\circ \cdot \pi \text{rad}}{180^\circ} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{rad}.$$

**Exemplo 2.** *Converta, em graus, o ângulo de  $\frac{\pi}{3} \text{rad}$ .*

Seja  $x$  o ângulo procurado. Daí,

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ — } \pi \text{rad} \\ x \text{ — } \frac{\pi}{3} \text{rad} \end{array}$$

Ou seja,

$$x \cdot \pi \text{rad} = 180^\circ \cdot \frac{\pi}{3} \text{rad}. \text{ Logo, } x = \frac{60^\circ \pi \text{rad}}{\pi \text{rad}} \Rightarrow x = 60^\circ.$$

**Exemplo 3.** *Converta em radianos o ângulo de  $y^\circ$ .*

Seja  $x$  o ângulo procurado. Daí

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ — } \pi rad \\ y^\circ \text{ — } x \end{array}$$

Ou seja,

$$180^\circ \cdot x = y^\circ \cdot \pi rad. \text{ Logo, } x = \frac{y^\circ \cdot \pi rad}{180^\circ} \Rightarrow x = \frac{y\pi}{180} rad.$$

O mesmo acontece se quisermos converter radianos em graus. Basta isolar o  $y$  na equação anterior. Daí

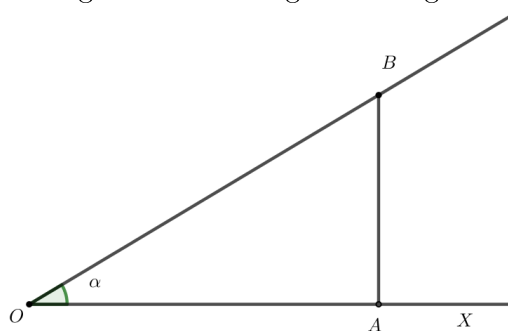
$$y = \frac{180^\circ x}{\pi} rad.$$

## 1.2 Razões trigonométricas

Inicialmente vamos considerar apenas ângulos menores que  $90^\circ$  para definirmos as razões trigonométricas. No Capítulo 2, trataremos dos ângulos maiores que  $90^\circ$ .

Considere a semirreta  $\overrightarrow{OX}$ , em seguida considere um ponto  $B$  fora dela. Trace uma semirreta  $\overrightarrow{OB}$ , formando o ângulo  $X\hat{O}B$ . Baixe a perpendicular a partir do ponto  $B$  em relação a semirreta  $\overrightarrow{OX}$  interceptando-a no ponto  $A$ . Temos então o triângulo  $AOB$ , onde  $\overline{OB}$  é a hipotenusa,  $\overline{AB}$  a perpendicular e  $\overline{OA}$  a base, conforme a Figura 1.4.

Figura 1.4: Triângulo retângulo



Vamos definir as razões trigonométricas no triângulo  $AOB$ .

Seja  $\alpha$  o ângulo  $X\hat{O}B$ , desta forma temos:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$ , o **seno** do ângulo  $\alpha$ .

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ , o **coosseno** do ângulo  $\alpha$ .

$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$ , a **tangente** do ângulo  $\alpha$ .

$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$ , a **cotangente** do ângulo  $\alpha$ .

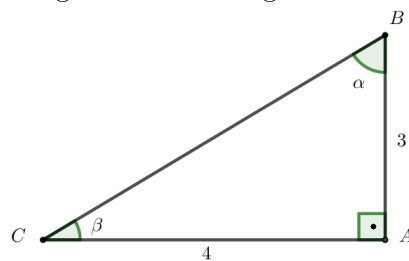
$\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$ , a **cossecante** do ângulo  $\alpha$ .

$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$ , a **secante** do ângulo  $\alpha$ .

**Exemplo 4.** Dado um triângulo retângulo  $ABC$  cujos catetos medem 3 e 4, e representando os ângulos agudos por  $\alpha$  e  $\beta$ , determine o seno, cosseno e a tangente dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ .

Resolução:

Figura 1.5: Triângulo  $ABC$



Veja na Figura 1.5 que temos a medida dos catetos mas não temos a medida da hipotenusa. Daí, vamos calcular esta medida, usando o teorema de Pitágoras. Sendo assim, denotando a hipotenusa por  $x$ , temos:

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$x^2 = 9 + 16$$

$$x^2 = 25$$

$$|x| = \sqrt{25}, \text{ como } x > 0.$$

Logo,  $x = 5$ .

Agora, vamos calcular o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ .

1. Observando o ângulo  $\alpha$

(a)  $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$

(b)  $\text{cos } \alpha = \frac{3}{5}$



$$(c) \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

2. Observando o ângulo  $\beta$

$$(a) \operatorname{sen} \beta = \frac{3}{5}$$

$$(b) \operatorname{cos} \beta = \frac{4}{5}$$

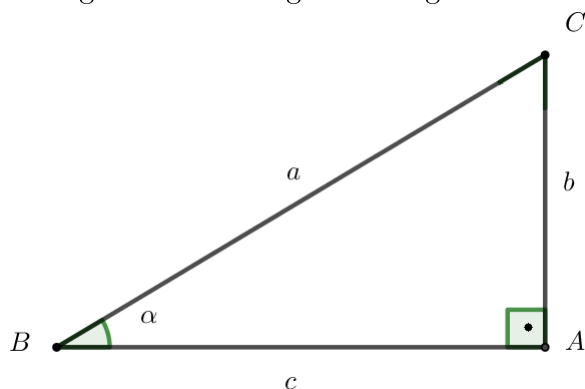
$$(c) \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}$$

### 1.2.1 Relações Fundamentais das razões trigonométricas

Observe que, ao estabelecer uma relação trigonométrica entre as razões trigonométricas, as outras surgem naturalmente.

Considere um triângulo retângulo qualquer  $ABC$ , com  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ,  $\widehat{ABC} = \alpha$ ,  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{BC} = a$  e  $\overline{AC} = b$ , conforme Figura 1.6.

Figura 1.6: Triângulo retângulo  $ABC$



Usando o teorema de Pitágoras no triângulo  $ABC$ , temos:

$$b^2 + c^2 = a^2. \quad (2)$$

Dividindo a equação 2 por  $a^2$ , temos:

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1.$$

Ou seja,

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\operatorname{cos} \alpha)^2 = 1 \quad (3)$$

Esta relação é conhecida como **Relação Fundamental da Trigonometria**.

Novamente, dividindo ambos os lados da Equação (2) por  $c^2$ , temos:

$$\frac{b^2}{c^2} + 1 = \frac{a^2}{c^2}.$$

Ou seja,

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (4)$$

Novamente, dividindo a Equação (2), por  $b^2$ , temos:

$$1 + \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Sendo assim,

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha. \quad (5)$$

Como  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a}$  e  $\cos \alpha = \frac{c}{a}$ , temos:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Logo,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}. \quad (6)$$

Analogamente,

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}. \quad (7)$$

Portanto, as relações fundamentais das razões trigonométricas são:

- $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$
- $\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$
- $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$

# Capítulo 2

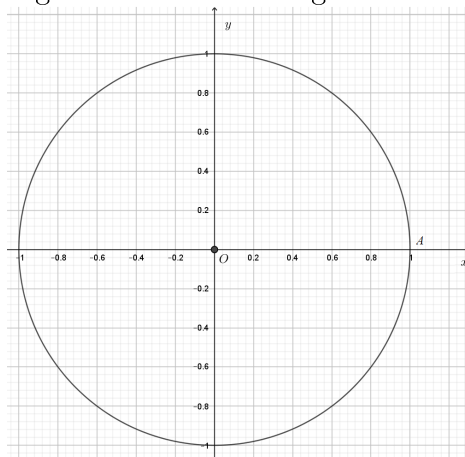
## Círculo trigonométrico

Neste capítulo, iremos abordar o comportamento das razões trigonométricas no círculo trigonométrico, destacando as propriedades e aplicações.

**Definição 1.** [7]

*Considere uma circunferência de centro  $O$  e raio unitário. Em seguida, faça a junção da circunferência com o plano cartesiano, de modo que o centro da circunferência coincida com a origem do plano cartesiano, conforme Figura 2.1 .*

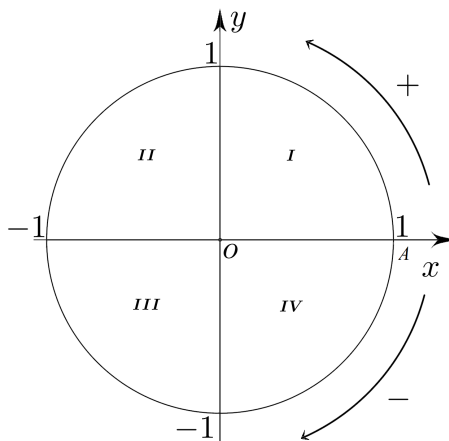
Figura 2.1: Círculo trigonométrico



*Definimos como círculo trigonométrico a circunferência, de raio unitário, orientada positivamente no sentido anti-horário, sendo a origem do círculo a interseção da circunferência com o eixo das abscissas no intervalo positivo, ou seja, o ponto  $A(1,0)$ , conforme Figura 2.2.*

Podemos, também, definir o círculo trigonométrico como sendo uma circunferência

Figura 2.2: Círculo trigonométrico



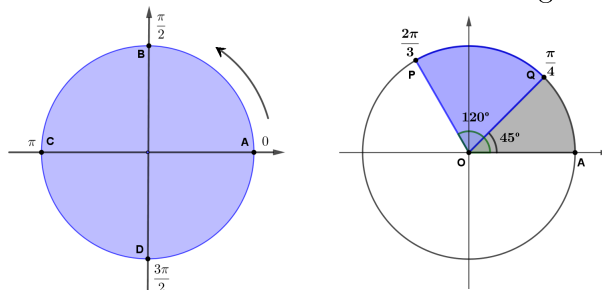
$C$ , orientada positivamente no sentido anti-horário, a partir do ponto  $(1, 0)$ , e  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$  dividida em  $I$ ,  $II$ ,  $III$  e  $IV$  quadrantes.

A seguir, vamos definir o ângulo central obtido a partir de um arco no círculo trigonométrico, donde trataremos com mais rigor na seção 3.3 do Capítulo 3.

De acordo com a definição dada anteriormente, podemos associar todo número real, entre  $0$  e  $2\pi$ , a um ponto do círculo trigonométrico. Observe, na Figura 2.4, por exemplo, que podemos associar o número  $\pi$  ao ponto  $C$ , denominado imagem de  $\pi$ ;  $B$  é associado ao número  $\frac{\pi}{2}$ ; e  $D$ , a  $\frac{3\pi}{2}$ , conforme Figura 2.4.

O ponto  $P$ , associado ao número real  $\frac{2\pi}{3}$  pertence a qual quadrante? Pertence ao II quadrante. Observe que a volta completa corresponde a  $2\pi$  e o ponto  $P$  equivale à terça parte de uma volta  $\left(\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi\right)$ . Já o número  $\frac{\pi}{4}$ , corresponde o ponto  $Q$  da Figura 2.4 [7].

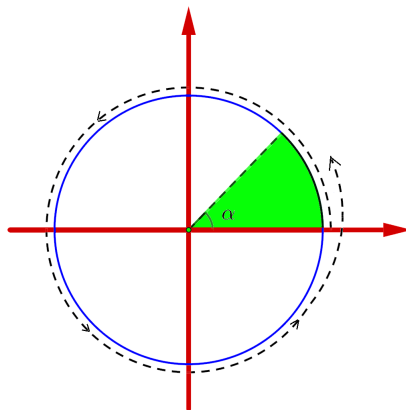
Figura 2.3: Números associados ao círculo trigonométrico



Qualquer outro valor de  $x$ , com  $x \geq 2\pi$ , corresponde, no sentido anti-horário, a um percurso de comprimento  $x$ , ao final marca-se um ponto  $P$  como imagem do número  $x$ .

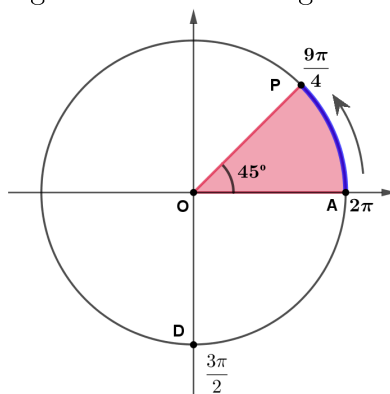
**Definição 2.** Um arco de medida  $x > 2\pi$  é congruente a  $\alpha$ , com  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , quando conseguimos escrever o arco  $x$  da forma  $\alpha + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Figura 2.4: Números associados ao círculo trigonométrico



Se  $x = 2\pi$ , sua imagem é o próprio ponto  $A$ ; se  $x = \frac{7\pi}{2}$ , podemos escrevê-lo como  $x = 7 \cdot \frac{\pi}{2}$  e sua imagem o ponto  $D$ . O número  $\frac{9\pi}{4}$  tem como imagem o ponto  $P$  da figura, já que  $\frac{9\pi}{4}$  pode ser escrito como  $\frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ , ou seja, o arco completa 1 volta e termina em  $\frac{\pi}{4}$ , veja na Figura 2.5.

Figura 2.5: Arcos congruentes

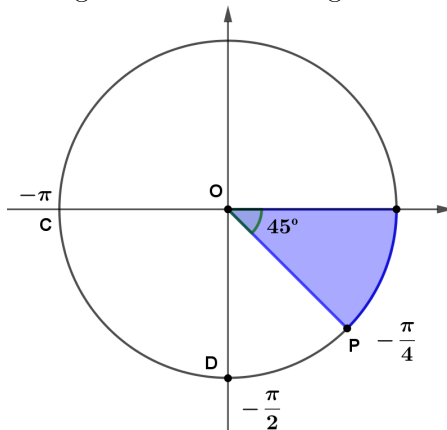


Em se tratando de valor negativo de  $x$ , o ponto descreve, no sentido horário, um percurso de comprimento igual a  $|x|$ , onde será marcado o ponto  $P$  como imagem do número  $-x$ .

O número  $-\pi$  tem como imagem o ponto  $C$ , pois o percurso descrito no sentido horário é de meia volta. Enquanto os números  $-\frac{\pi}{2}$  e  $-\frac{\pi}{4}$  têm como imagens os pontos

$D$  e  $P$ , respectivamente, pois os percursos descritos no sentido horário são  $\frac{1}{4}$  de volta e  $\frac{1}{8}$  de volta, como se observa na Figura 2.6.

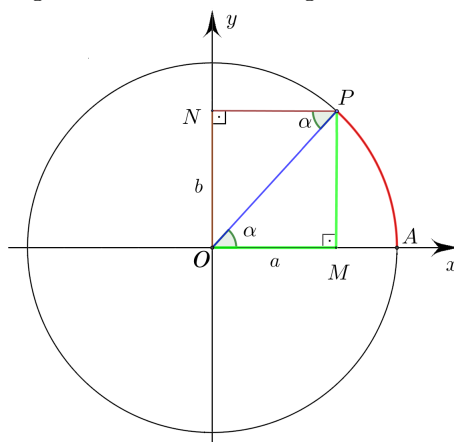
Figura 2.6: Arcos negativos



## 2.1 Seno e cosseno no círculo trigonométrico

Considere um ponto  $P$  pertencente ao círculo trigonométrico, definido anteriormente e seja  $A(1,0)$  o ponto inicial do círculo. Seja  $\alpha$  o ângulo central formado pelo arco  $\widehat{AP}$ . A partir do ponto  $P$ , trace uma reta paralela ao eixo  $\overleftrightarrow{Oy}$ , intersectando o eixo das abscissas no ponto  $M$ , em seguida trace uma reta paralela ao eixo  $\overleftrightarrow{Ox}$ , intersectando o eixo das ordenadas no ponto  $N$ .

Figura 2.7: Razões trigonométricas



O quadrilátero  $OMP$  é um retângulo, pois possui os quatro ângulos retos. Assim, temos:

$$|\overline{ON}| = |\overline{MP}| \text{ e } |\overline{OM}| = |\overline{NP}|.$$

Seja  $|\overline{OM}| = a$  e seja  $|\overline{ON}| = b$ . Vamos determinar as razões trigonométricas do ângulo  $\alpha$ , no triângulo  $OMP$  conforme Figura 2.7 :

$$\text{sen}\alpha = \frac{|\overline{MP}|}{1} = b \text{ e } \cos\alpha = \frac{|\overline{OM}|}{1} = a.$$

Daí, definimos o  $\cos\alpha$  no eixo  $\overleftrightarrow{Ox}$  e o  $\sin\alpha$  no eixo  $\overleftrightarrow{Oy}$ . Podemos escrever o ponto  $P$  como  $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ .

Observe diretamente no círculo trigonométrico que:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ (Relação Fundamental da Trigonometria) e}$$

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \beta = 90 - \alpha, \text{ logo}$$

$$\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha), \tag{8}$$

### 2.1.1 Ângulos notáveis

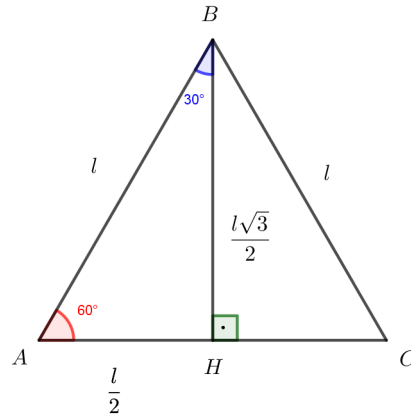
Nesta seção, vamos determinar o seno e o cosseno dos ângulos de  $30^\circ, 45^\circ$  e  $60^\circ$ , definidos como ângulos notáveis. Para isso, usaremos dois triângulos: um equilátero e outro retângulo e isósceles.

Primeiramente, considere um triângulo equilátero  $ABC$  de lado  $l$ . Sabemos que seus ângulos internos medem  $60^\circ$  ou  $\frac{\pi}{3}$ , pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ , como o triângulo em estudo é o triângulo equilátero, então ele possui todos os ângulos internos iguais. Em seguida, considere a altura de um dos vértices (vértice B por exemplo) em relação ao lado oposto, construindo uma reta suporte passando pelo vértice B e perpendicular ao lado oposto (segmento AC neste caso), intersectando no ponto  $H$ , temos: (Figura 2.8)

- $\overline{AB} = l$  lado do triângulo equilátero.
- $\overline{AH} = \frac{l}{2}$  ponto médio, pois o triângulo é equilátero.
- $\overline{BH} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$  altura do triângulo equilátero.
- $\widehat{ABH} = 30^\circ$ , bissetriz do ângulo  $\widehat{ABC}$ .

- $\widehat{HAB} = 60^\circ$ , ângulo interno.
- $\widehat{AHB} = 90^\circ$ , pois o segmento  $\overline{BH}$  é altura do triângulo.

Figura 2.8: Triângulo equilátero de lado  $l$



Daí,

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ ou seja, } \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ ou seja, } \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e}$$

$$\operatorname{cos} 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Agora, considere um triângulo retângulo isósceles cujos lados iguais medem  $l$ . (Veja Figura 2.9)

Os ângulos da base têm medidas iguais a  $45^\circ$ , pois o triângulo é retângulo e isósceles. A hipotenusa é  $l\sqrt{2}$ . Desta forma, temos:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{cos} 45^\circ, \text{ ou seja } \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Figura 2.9: Triângulo retângulo isósceles de lado  $l$

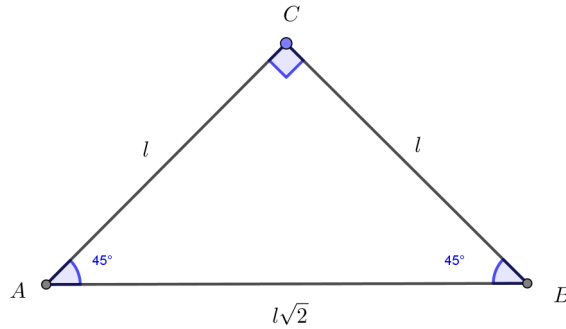
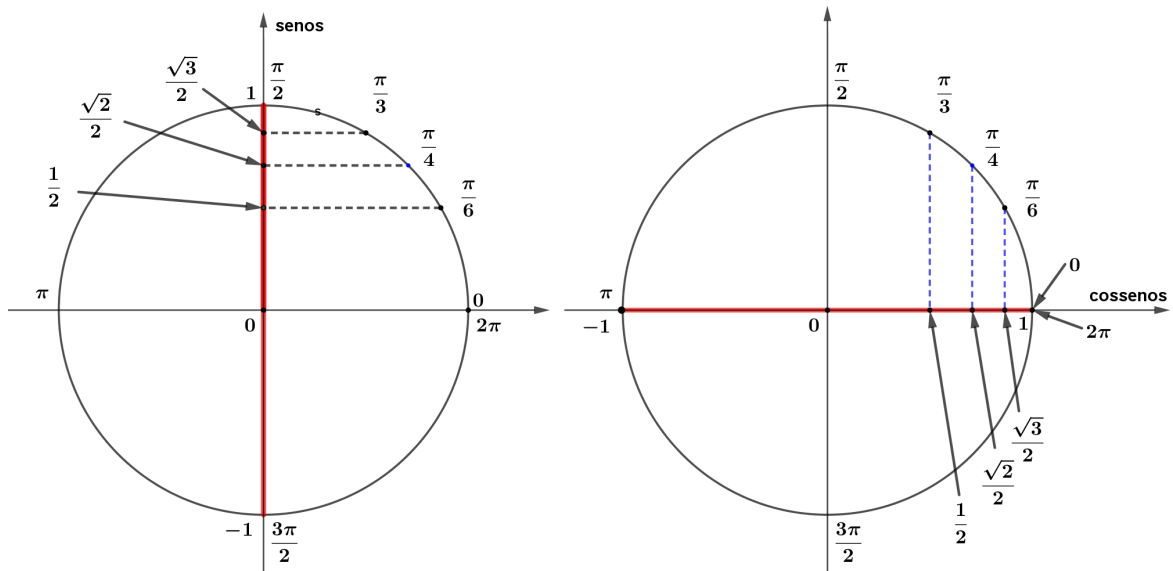


Figura 2.10: Ângulos notáveis



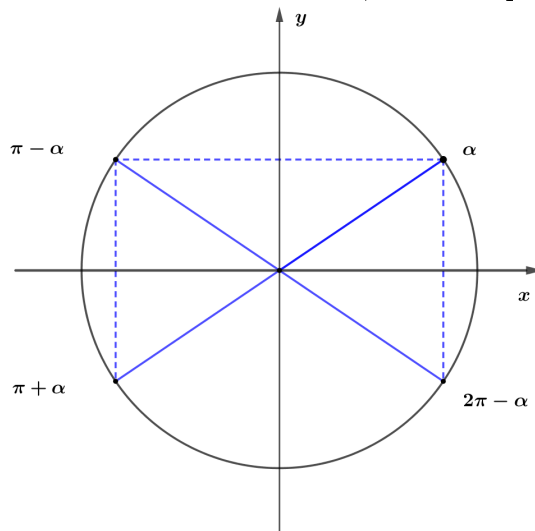
Observando a Figura 2.10, podemos notar que  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  e  $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ , bem como que  $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$ .

Sabemos também que  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ .

Observando a Figura 2.10, podemos notar que  $\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$  e  $\cos \pi = -1$ , bem como que  $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$ .

Podemos calcular o cosseno e o seno em qualquer quadrante, observando o ângulo do I quadrante e também o quadrante que cada arco pertence. Basta encontrar o ângulo correspondente no I primeiro quadrante. Para isso, observe que se temos um ângulo  $\alpha$  pertencente ao I quadrante, o correspondente no II quadrante será  $\pi - \alpha$ ; no III quadrante será  $\pi + \alpha$  e no IV quadrante será  $2\pi - \alpha$ . Conforme Figura 2.11. [7]

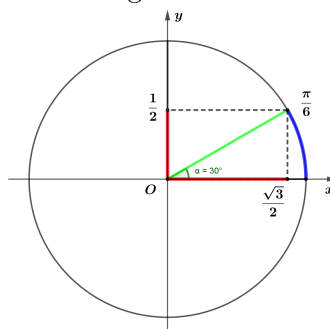
Figura 2.11: Seno e cosseno no II, III e IV quadrantes



**Exemplo 5.** Calcule o valor de  $\sin \frac{\pi}{6}$ ,  $\cos \frac{\pi}{6}$  e represente o resultado no círculo trigonométrico.

Sabemos que:  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  e  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , observe sua representação geométrica na Figura 2.12.

Figura 2.12: Razões trigonométricas no 1º quadrante



**Exemplo 6.** Calcule o valor de  $\sin \frac{5\pi}{6}$ ,  $\cos \frac{5\pi}{6}$  e represente o resultado no círculo trigonométrico.

Como  $\frac{5\pi}{6} \in II$  quadrante e  $\frac{5\pi}{6}$  é correspondente a  $\frac{\pi}{6}$  no I quadrante, temos que,

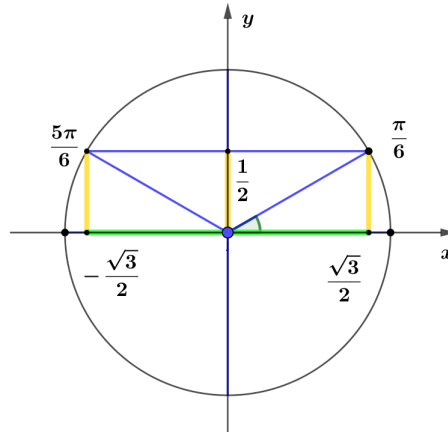
$$\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

e

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Geometricamente, na Figura 2.13 , temos:

Figura 2.13: Seno e cosseno no II quadrante



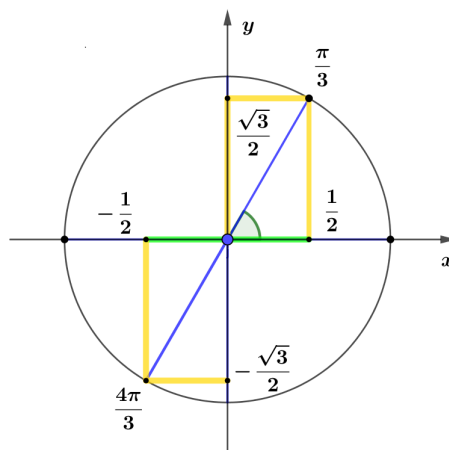
**Exemplo 7.** Calcule o valor de  $\text{sen } \frac{4\pi}{3}$ ,  $\text{cos } \frac{4\pi}{3}$ , representando o resultado no círculo trigonométrico.

Sabemos que  $\frac{4\pi}{3} \in III$  quadrante e que  $\frac{4\pi}{3}$  é correspondente à  $\frac{\pi}{3}$ , logo,

$$\text{sen } \frac{4\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \text{cos } \frac{4\pi}{3} = -\text{cos } \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Observe na Figura 2.14 os resultados obtidos:

Figura 2.14: Seno e cosseno no III quadrante



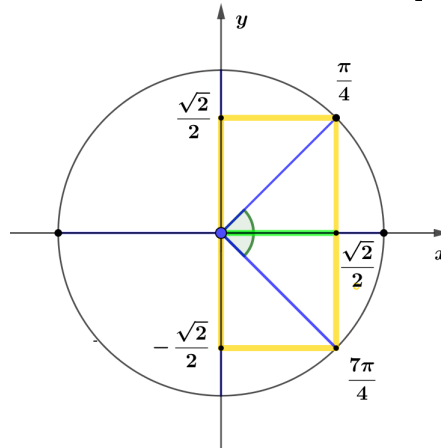
**Exemplo 8.** Calcule o valor de  $\text{sen } \frac{7\pi}{4}$ ,  $\text{cos } \frac{7\pi}{4}$ , representando o resultado no círculo trigonométrico.

Observe que  $\frac{7\pi}{4} \in IV$  quadrante e que  $\frac{7\pi}{4}$  é correspondente à  $\frac{\pi}{4}$ , logo

$$\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} \frac{7\pi}{4} = \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

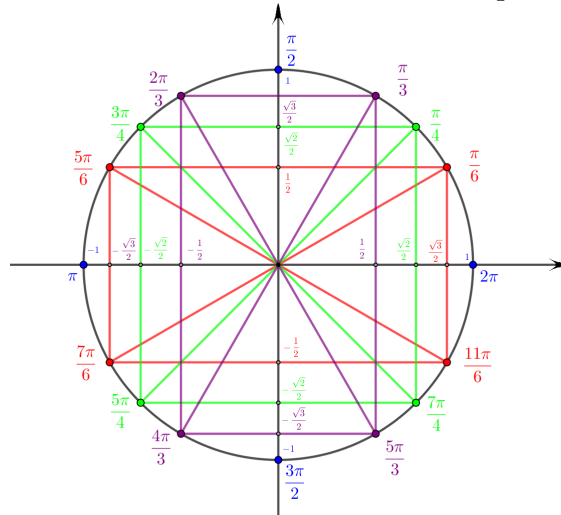
Graficamente, na Figura 2.15 temos:

Figura 2.15: Seno e cosseno no IV quadrante



Em se tratando dos ângulos notáveis, podemos apresentar os valores das razões seno e cosseno diretamente no círculo trigonométrico e relacionar cada um dos valores correspondentes aos I, II, III e IV quadrantes. Veja na Figura 2.16.

Figura 2.16: Seno e cosseno no círculo trigonométrico



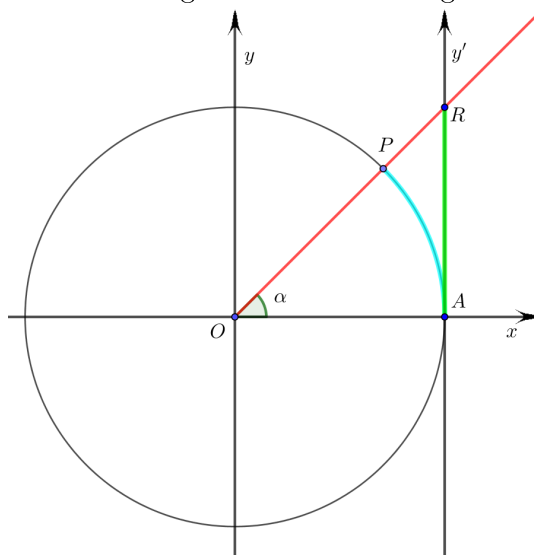
## 2.2 Tangente no círculo trigonométrico

A seguir, trataremos da tangente no círculo trigonométrico. Esta seção é baseada em [7].

No círculo trigonométrico, definido anteriormente e apresentado na Figura 2.2, vamos traçar uma reta suporte  $y'$  passando pelo ponto  $(1,0)$  e paralela ao eixo  $y$ . Em seguida, considere um arco  $\overline{AP} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  cujo ângulo central é  $\alpha$ . Considere a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  que intersecta  $y'$  em  $R$ . Observe o triângulo retângulo  $OAR$  (Figura 2.17) o valor do segmento  $\overline{AR}$  será exatamente a tangente do ângulo  $\alpha$ , pois:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{OA}} = \overline{AR}.$$

Figura 2.17: Tangente no círculo trigonométrico



Desta forma, podemos observar, geometricamente, porque a tangente de um arco não está definida para  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , pois se  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  não intersecta o eixo  $y'$ .

Do mesmo modo que fizemos no seno e no cosseno, usaremos os triângulos equilátero (de lado  $l$ ) e retângulo isósceles (de lados iguais a  $l$ ) para determinar os resultados de  $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\pi}{3}$ , associando os valores a outros quadrantes, correspondendo os arcos e agregando o sinal positivo ou negativo aos resultados. Veja no exemplo a seguir:

**Exemplo 9.** Calcule a  $\operatorname{tg}\alpha$  para:

1.  $\alpha = \frac{\pi}{6}$
2.  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

$$3. \alpha = \frac{5\pi}{4}$$

$$4. \alpha = \frac{11\pi}{6}$$

Solução:

$$1. \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

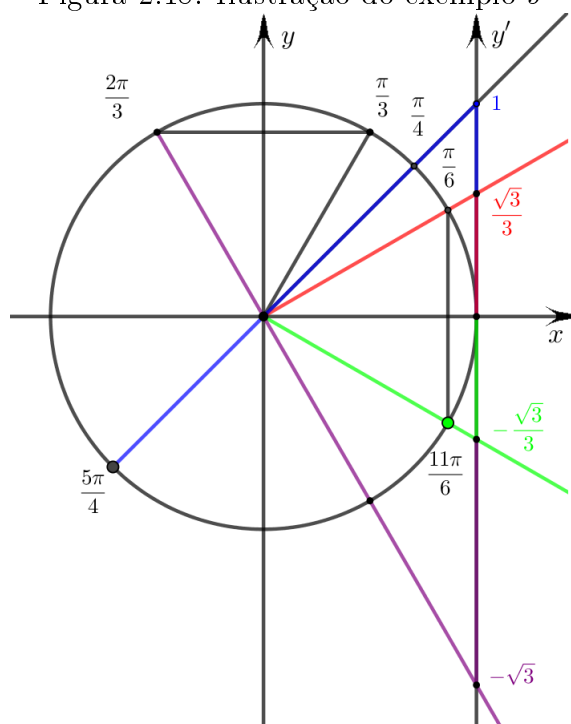
$$2. \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

$$4. \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Observe, na Figura 2.18 , o resultado no círculo trigonométrico:

Figura 2.18: Ilustração do exemplo 9



## 2.3 Adição e subtração de Arcos

A discussão desta seção será baseada em [7]. No que segue, apresentaremos resultados sobre soma e subtração de arcos, envolvendo razões trigonométricas.

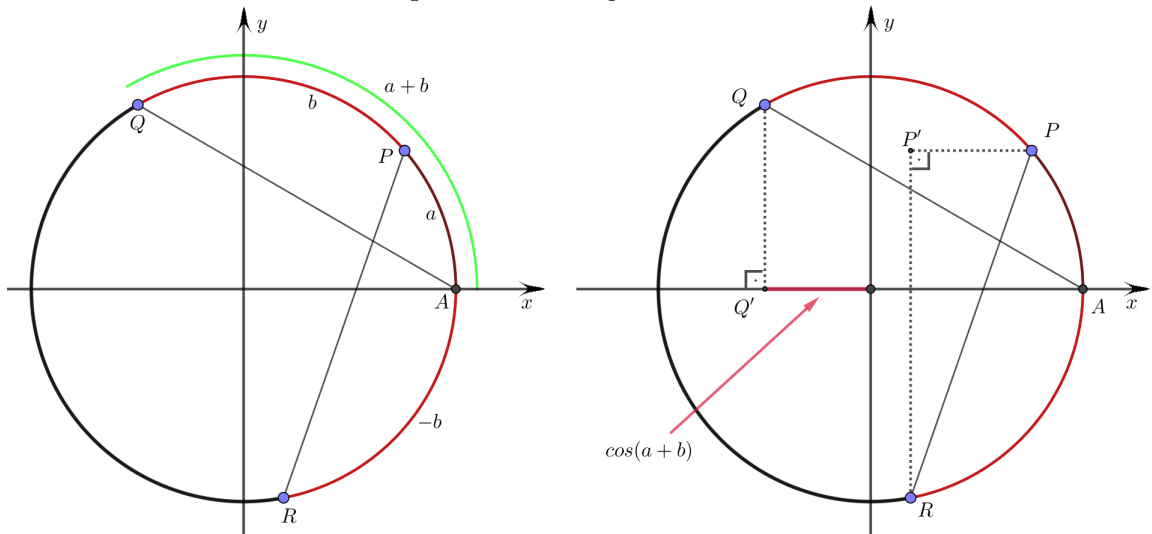
### 2.3.1 Cosseno da soma de dois arcos

**Teorema 3.** *Dados dois arcos quaisquer  $a$  e  $b$  temos que*

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

*Demonstração.* Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  as extremidades dos arcos  $a$ ,  $a + b$  e  $-b$ , respectivamente, como mostra a Figura 2.19, construído no círculo trigonométrico.

Figura 2.19: Adição de arcos



Os arcos  $\widehat{APQ}$  e  $\widehat{RAP}$  possuem a mesma medida ( $a + b$ ) e, conseqüentemente, as cordas  $\overline{AQ}$  e  $\overline{PR}$  também têm medidas iguais. Considere os pontos  $Q'$ , projeção do ponto  $Q$  sobre o eixo  $\overrightarrow{Ox}$ , e  $P'$ , interseção da reta horizontal que passa por  $P$  e da reta vertical que passa por  $R$ , Figura 21. Então,

$$\begin{aligned} |\overline{AQ'}| &= 1 + |\cos(a + b)| \\ |\overline{QQ'}| &= \operatorname{sen}(a + b) \\ |\overline{P'R}| &= \operatorname{sen} a + |\operatorname{sen}(-b)| = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b \\ |\overline{PP'}| &= \cos a - \cos(-b) = \cos a - \cos b \end{aligned}$$

Como os triângulos  $AQQ'$  e  $PRP'$  são retângulos, em  $Q'$  e  $P'$ , respectivamente, por construção, então aplicando o teorema de Pitágoras em cada um deles, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{AQ}^2 &= \overline{AQ'}^2 + \overline{QQ'}^2 \\
\overline{AQ}^2 &= 1 + 2|\cos(a+b)| + \cos^2(a+b) + \sin^2(a+b) \\
\overline{AQ}^2 &= 2 + 2|\cos(a+b)| \\
\overline{AQ}^2 &= 2 - 2\cos(a+b) \\
\overline{AQ}^2 &= 2[1 - \cos(a+b)]
\end{aligned} \tag{2.1}$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{PR}^2 &= \overline{PP'}^2 + \overline{P'R}^2 \\
\overline{PR}^2 &= \sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a \cdot \sin b + \cos^2 a - 2\cos a \cdot \cos b + \cos^2 b \\
\overline{PR}^2 &= 1 + 1 - 2\cos a \cdot \cos b + 2\sin a \cdot \sin b \\
\overline{PR}^2 &= 2 - 2(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) \\
\overline{PR}^2 &= 2[1 - (\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Como  $\overline{AQ} = \overline{PR}$ , igualando as equações (2.1) e (2.2), temos:

$$\begin{aligned}
2[1 - \cos(a+b)] &= 2[1 - (\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)] \\
1 - \cos(a+b) &= 1 - (\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) \\
\cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b
\end{aligned} \tag{2.3}$$

□

**Exemplo 10.** Usando o Teorema 3, calcule o valor de  $\cos 75^\circ$  e  $\cos 105^\circ$ .

Resolução: Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\cos 75^\circ &= \cos(30^\circ + 45^\circ), \text{ então} \\
\cos 75^\circ &= \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ \\
\cos 75^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos 75^\circ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\
\cos 75^\circ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$



Agora, vamos calcular o  $\cos 105^\circ$ .

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ), \text{ então} \\ \cos 105^\circ &= \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \operatorname{sen} 45^\circ \\ \cos 105^\circ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 105^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \cos 105^\circ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

A partir do Teorema 3, podemos obter uma expressão para o cosseno da diferença de dois arcos.

**Corolário 2.** (*Cosseno da diferença de dois arcos*)

*Dados dois arcos quaisquer  $a$  e  $b$  temos que*

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

*Demonstração.* Usando o Teorema 3 e o fato de que  $\cos(a - b) = \cos(a + (-b))$ , temos:

Como  $\cos b = \cos(-b)$  e  $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b$ , segue que

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos(-b) - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(-b)$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b.$$

□

**Corolário 3.** (*Senos da soma de dois arcos*)

*Dados dois arcos quaisquer  $a$  e  $b$  temos que*

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

Resolução:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a + b) &= \cos[90^\circ - (a + b)] \\ \operatorname{sen}(a + b) &= \cos[(90^\circ - a) - b] \\ \operatorname{sen}(a + b) &= \cos(90^\circ - a) \cdot \cos b + \operatorname{sen}(90^\circ - a) \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a + b) &= (\cos 90^\circ \cdot \cos a + \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \operatorname{sen} a) \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a + b) &= \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a.\end{aligned}\tag{2.4}$$

**Corolário 4.** (*Senos da diferença de dois arcos*)

*Dados dois arcos quaisquer  $a$  e  $b$  prove que*

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$$

Resolução:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a - b) &= \cos[90^\circ - (a - b)] \\ &= \cos[(90^\circ - a) + b] \\ &= \cos(90^\circ - a) \cdot \cos b - \operatorname{sen}(90^\circ - a) \cdot \operatorname{sen} b \\ &= (\cos 90^\circ \cdot \cos a + \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \operatorname{sen} a) \cdot \cos b - \cos a \cdot \operatorname{sen} b \\ &= \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a\end{aligned}$$

**Corolário 5.** (*Tangente da soma de dois arcos*)

*Dados dois arcos quaisquer  $a$  e  $b$  prove que*

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}, \text{ com } a \text{ e } b \neq \frac{\pi}{2}$$

Resolução:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a + b) &= \frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\cos(a + b)}, \text{ pois } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b},\end{aligned}$$

dividindo por  $\frac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b}$  pois  $a \neq \frac{\pi}{2}$  e  $b \neq \frac{\pi}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned}&= \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\operatorname{sen} b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \frac{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{\cos a \cdot \cos b}}, \\ &\text{simplificando e usando o fato que } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \text{ temos:} \\ &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}.\end{aligned}$$

**Corolário 6.** (*Tangente da diferença de dois arcos*)

*Dados dois arcos quaisquer  $a$  e  $b$  prove que*

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Resolução:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a-b) &= \frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{cos}(a-b)}, \text{ pois } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \\ &= \frac{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cos} a}{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}, \\ &\quad \text{dividindo por } \frac{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b}{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b}, \text{ temos:} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} b}{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b} - \frac{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cos} a}{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b}}{\frac{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b}{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b} + \frac{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{\operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b}}, \\ &\quad \text{simplificando e usando o fato que } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \text{ temos:} \\ &= \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}.\end{aligned}$$

**Corolário 7.** (*Arco duplo*)

*Sendo  $a$  um arco qualquer, prove que:*

1.  $\operatorname{cos} 2a = \operatorname{cos}^2 a - \operatorname{sen}^2 a$ .
2.  $\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} a$ .
3.  $\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$ .

Resolução:

1.

$$\begin{aligned}\operatorname{cos} 2a &= \operatorname{cos}(a+a) \\ &= \operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} a - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} a \\ &= \operatorname{cos}^2 a - \operatorname{sen}^2 a.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2a &= \operatorname{sen}(a+a) \\ &= \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} a + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} a \\ &= 2\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} a.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2a &= \operatorname{tg}(a+a) \\ &= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a} \\ &= \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.\end{aligned}$$

## 2.4 Lei dos senos

Nesta seção vamos tratar de um assunto muito importante, pois a propriedade a seguir estabelece uma lei para qualquer triângulo, que auxilia na resolução de problemas relacionados à medida dos lados e dos ângulos, de acordo com [7].

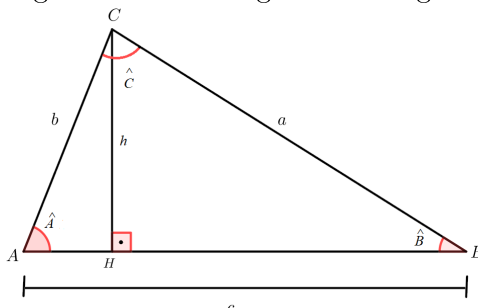
**Teorema 4.** *Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles. Isto é, em um triângulo  $ABC$ , onde o ângulos  $\hat{A}$  (respectivamente  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ ) é oposto ao lado  $a$  (respectivamente  $b$  e  $c$ ), temos:*

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

*Demonstração.* Podemos considerar três casos possíveis de triângulos: acutângulo, obtusângulo e retângulo. Vejamos cada um deles:

1. Seja o triângulo  $ABC$ , acutângulo, e  $\overline{CH}$  a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$  (Figura 2.20).

Figura 2.20: Triângulo acutângulo



No  $\triangle CHA$ , temos:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{\overline{CH}}{b} \Rightarrow \overline{CH} = b \text{sen } \hat{A}. \quad (I)$$

No  $\triangle CHB$ , temos:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{\overline{CH}}{a} \Rightarrow \overline{CH} = a \text{sen } \hat{B}. \quad (II)$$

Igualando (I) e (II), temos:

$$b \text{sen } \hat{A} = a \text{sen } \hat{B} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}.$$

De modo análogo, considerando a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ , temos:

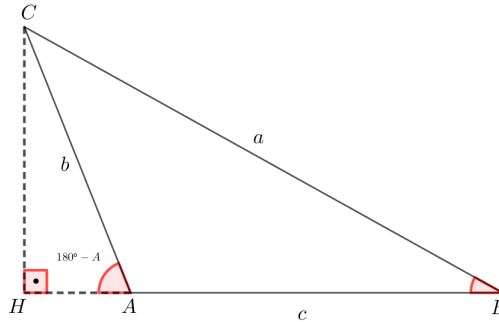
$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}.$$

Logo,

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}}.$$

2. Seja o triângulo  $ABC$ , obtusângulo em  $A$ , e  $\overline{CH}$  a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ , conforme Figura 2.21.

Figura 2.21: Triângulo obtusângulo



No  $\Delta CHA$ , temos:

$$\widehat{\text{sen}} (180^\circ - \widehat{A}) = \frac{\overline{CH}}{b} = \widehat{\text{sen}} \widehat{A} \Rightarrow \overline{CH} = b \widehat{\text{sen}} \widehat{A}. \quad (III)$$

No  $\Delta CHB$ , temos:

$$\widehat{\text{sen}} \widehat{B} = \frac{\overline{CH}}{a} \Rightarrow \overline{CH} = a \widehat{\text{sen}} \widehat{B}. \quad (IV)$$

Igualando (III) e (IV), temos:

$$b \widehat{\text{sen}} \widehat{A} = a \widehat{\text{sen}} \widehat{B} \Rightarrow \frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}}.$$

De modo análogo, considerando a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ , temos:

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}}.$$

Logo,

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}}.$$

3. Seja o triângulo  $ABC$ , retângulo. Daí, com base na Figura 2.22, temos:

$$\widehat{\text{sen}} \widehat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}}. \quad (V)$$

$$\widehat{\text{sen}} \widehat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}}. \quad (VI)$$

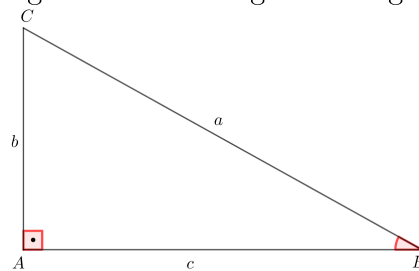
Igualando (V) e (VI), temos:

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}}.$$

Porém,  $\widehat{\text{sen}} \widehat{A} = \widehat{\text{sen}} 90^\circ = 1$ . Assim, por (V), temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}}.$$

Figura 2.22: Triângulo retângulo



Logo, para os três casos, em qualquer triângulo ABC temos:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} \quad (\text{Lei dos senos})$$

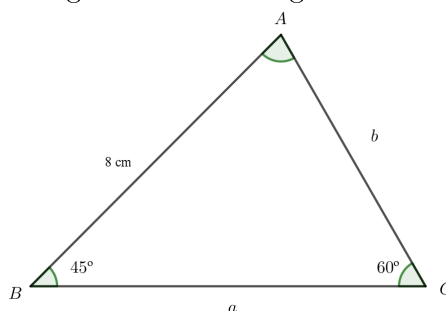
□

**Exemplo 11.** Em um triângulo ABC são dados  $\widehat{C} = 60^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$  e  $AB = 8 \text{ cm}$ . Determine o comprimento de  $\overline{AC}$  [6].

Resolução:

Considere o triângulo ABC conforme o enunciado: (Figura 2.23).

Figura 2.23: Triângulo ABC



Seja  $b = \overline{AC}$ , aplicando a lei dos senos no triângulo ABC, temos:

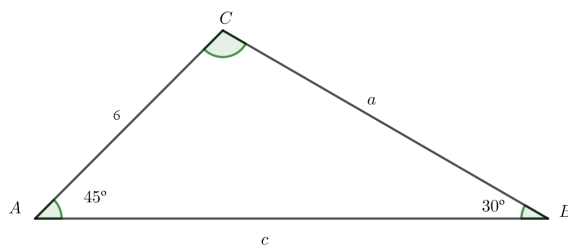
$$\frac{8}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{b}{\operatorname{sen} 45^\circ} \Rightarrow \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\sqrt{3} \cdot b = 8\sqrt{2} \Rightarrow b = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \text{ racionalizando, temos:}$$

$$b = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

**Exemplo 12.** Calcule o valor de  $\overline{BC}$  e  $\overline{AB}$  no triângulo  $ABC$  a seguir [6]:

Figura 2.24: Triângulo  $ABC$



Resolução: Veja que  $\widehat{C} = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$ . Daí,

$$\operatorname{sen} \widehat{C} = \operatorname{sen} 105^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ = 0,9659259$$

Aplicando a lei dos Senos no triângulo  $ABC$ , temos:

$$\frac{6}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} 45^\circ} \Rightarrow \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Logo,

$$\overline{BC} = 6\sqrt{2} = 8,485281.$$

Do mesmo modo,

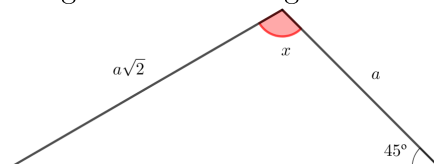
$$\frac{6}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen} 105^\circ} \Rightarrow \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{\overline{AB}}{0,9659259}.$$

Logo,

$$\overline{AB} = 12 \cdot 0,9659259 = 11,59111.$$

**Exemplo 13.** Determine a medida do ângulo  $x$  [6].

Figura 2.25: Triângulo ABC



Resolução:

Observe, Figura 2.25, que o ângulo oposto ao lado  $a$  vale:  $180^\circ - (x + 45^\circ)$ , usando a lei dos senos, temos:

$$\frac{a}{\text{sen} [180^\circ - (x + 45^\circ)]} = \frac{a\sqrt{2}}{\text{sen } 45^\circ} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen} (x + 45^\circ)} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \text{sen} (x + 45^\circ) = \frac{1}{2},$$

daí,

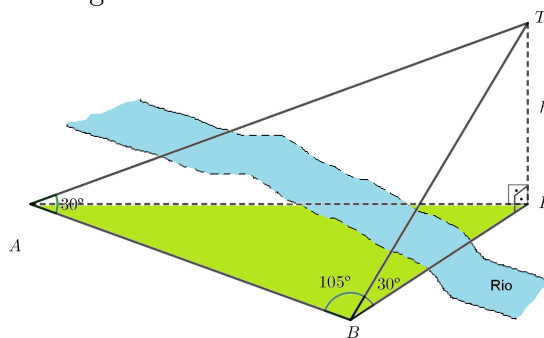
$$x + 45^\circ = 30^\circ \text{ ou } x + 45^\circ = 150^\circ.$$

Mas,  $0^\circ < x < 180^\circ$ , logo:  $x = 105^\circ$ .

**Exemplo 14.** (Universidade Federal de Uberlândia-MG) Uma pessoa se encontra numa planície às margens de um rio e vê, do outro lado do rio, o topo  $T$  de uma torre de telefone. Com o objetivo de determinar a altura  $h$  da torre, ela marca dois pontos  $A$  e  $B$  na planície e calcula  $AB = 200\text{m}$ ,  $T\hat{A}B = 30^\circ$ ,  $T\hat{B}A = 105^\circ$  e  $T\hat{B}P = 30^\circ$ , sendo  $P$  o pé da torre. Então,  $h$  é igual a:

- a)  $\frac{100\sqrt{3}}{3}m$    b)  $50\sqrt{2}m$    c)  $50\sqrt{3}m$    d)  $100\sqrt{2}m$    e)  $100m$

Figura 2.26: Vista da Torre - rio





Resolução:

No triângulo  $TAB$ , da Figura 2.26, temos que o ângulo  $\widehat{T} = 45^\circ$ , aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{\overline{BT}}{\text{sen } 30^\circ} \Rightarrow \frac{200}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{BT}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \overline{BT} = 200$$

$$\overline{BT} = \frac{200}{\sqrt{2}}, \text{ racionalizando, temos:}$$

$$\overline{BT} = 100\sqrt{2}.$$

Como o triângulo  $TBP$  é retângulo em  $P$ , aplicando o seno no ângulo  $\widehat{B}$ , temos:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{TP}}{\overline{BT}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{100\sqrt{2}}.$$

Logo,

$$h = 50\sqrt{2}m.$$

Alternativa **b)**

## 2.5 Lei dos cossenos

Nesta seção, completaremos a tarefa de relacionar os lados e os ângulos de um triângulo qualquer, apresentando a lei dos cossenos, baseada em [7].

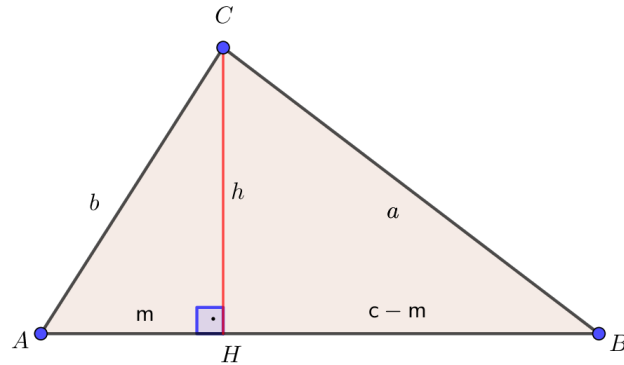
**Teorema 5.** *Dado um triângulo qualquer de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  temos:*

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$ .
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$ .
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$ .

*Demonstração.* Para demonstrar esses resultados vamos dividir em três casos de triângulos: acutângulo, obtusângulo e retângulo

1. Seja o triângulo  $ABC$ , Figura 2.27, acutângulo, e  $|\overline{CH}| = h$  a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ .

Figura 2.27: Triângulo acutângulo - ABC



Observando o  $\triangle BCH$ , podemos dizer que:

$$a^2 = h^2 + (c - m)^2. \quad (A)$$

No  $\triangle ACH$ , temos:

$$h^2 = b^2 - m^2. \quad (B)$$

Substituindo (B) em (A), temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - m^2 + (c - m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \\ &\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm. \end{aligned} \quad (C)$$

Aplicando o cosseno do ângulo A no triângulo AHC, temos que  $m = b \cos \hat{A}$ .  
Substituindo em (C), temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

Do mesmo modo, podemos escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

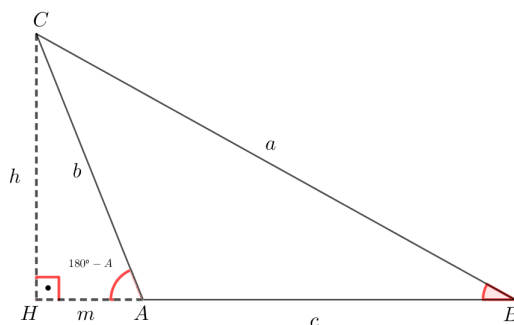
2. Seja o triângulo ABC, Figura 2.28, obtusângulo em A, e  $\overline{CH} = h$  a altura relativa ao lado  $\overline{AB}$ .

Observando o  $\triangle BCH$ , podemos dizer que:

$$a^2 = h^2 + (c + m)^2. \quad (D)$$

No  $\triangle ACH$ , temos:

Figura 2.28: Triângulo obtusângulo - ABC



$$h^2 = b^2 - m^2. \quad (E)$$

Substituindo (E) em (D), temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - m^2 + (c + m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2 \\ &\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cm. \end{aligned} \quad (F)$$

Aplicando o cosseno no suplemento do ângulo A no triângulo AHC, temos que:

$$m = b \cos(180^\circ - \hat{A}) \Rightarrow m = b(-\cos \hat{A}) \Rightarrow m = -b \cos \hat{A}.$$

Substituindo em (F), temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

Do mesmo modo, podemos escrever:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad \text{e} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

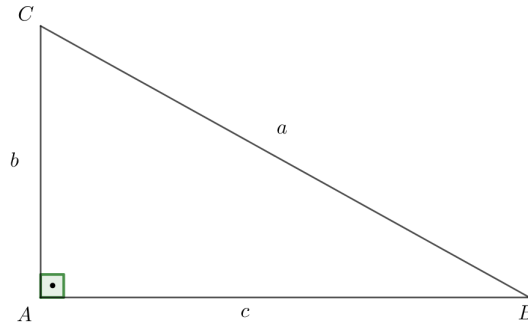
3. No caso de o triângulo ABC ser retângulo (em A, por exemplo), como  $\cos 90^\circ = 0$ , então  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ$ , que se reduz a expressão do teorema de Pitágoras. No caso dos ângulos agudos,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , temos: (Figura 2.29)

$$\cos \hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cos \hat{B} \quad \text{e} \quad \cos \hat{C} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cos \hat{C}.$$

Como:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 - b^2 + b^2 \Rightarrow$$

Figura 2.29: Triângulo Retângulo - ABC



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot b. \quad (G)$$

Então, substituindo  $b = a \cos \widehat{C}$  em (G), temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}.$$

Também podemos escrever:

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 - c^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2c \cdot c. \quad (H)$$

Substituindo  $b = a \cos \widehat{C}$  em (H), temos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ab \cos \widehat{B}.$$

Logo, para os três casos, em qualquer triângulo  $ABC$  temos:

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}.$
  - $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}.$
  - $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}.$
- (Lei dos cossenos)

□

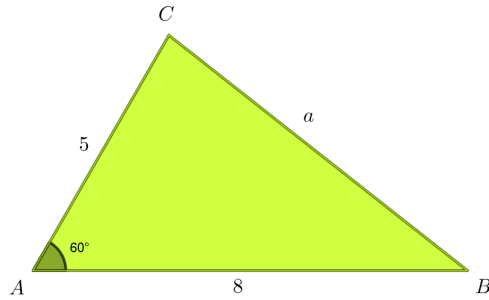
**Exemplo 15.** Calcule, usando a lei dos Cossenos, a medida do segmento  $\overline{BC}$  no triângulo da Figura 2.30 [6].

Resolução:

Basta aplicar a lei dos cossenos para o lado oposto ao vértice  $A$ . Sendo assim, temos:

$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow a^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2}$$

Figura 2.30: Triângulo - ABC

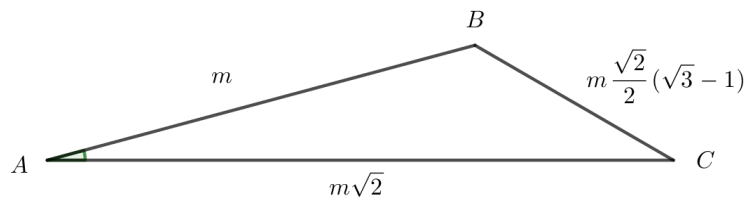


$$a^2 = 89 - 40 \Rightarrow a = \pm\sqrt{49}, \text{ como } a > 0 \text{ então:}$$

$$a = 7$$

**Exemplo 16.** Calcule, usando a lei dos Cossenos, a medida do ângulo  $\hat{A}$  no triângulo da Figura 2.31, sabendo que  $m > 0$  [6].

Figura 2.31: Triângulo - ABC



Resolução: Aplicando a lei dos Cossenos, temos:

$$\left[ m \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - 1) \right]^2 = m^2 + (m\sqrt{2})^2 - 2 \cdot m \cdot m\sqrt{2} \cos \hat{A}$$

$$\frac{2m^2}{4} (\sqrt{3} - 1)^2 = m^2 + 2m^2 - 2m^2\sqrt{2} \cos \hat{A} \quad \text{dividindo por } m^2 \text{ e multiplicando por 2,}$$

temos:

$$3 - 2\sqrt{3} + 1 = 6 - 4\sqrt{2} \cos \hat{A}$$

$$4\sqrt{2} \cos \hat{A} = 6 - 4 + 2\sqrt{3}, \text{ dividindo por } 2\sqrt{2}, \text{ temos:}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \text{ racionalizando, temos:}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, \text{ como } \hat{A} > 0, \text{ logo:}$$

$$\hat{A} = 15^\circ$$

# Capítulo 3

## GeoGebra no ensino da trigonometria

### Introdução

Já no final do século passado, o uso de novas tecnologias no ensino, apresentava uma realidade bastante promissora e evidente no meio escolar.

"Se não se ligar, a escola se desqualificará". Com esse título, uma revista (suplemento de informática de *L'Hebdo*, dezembro de 1997, p.12) atribui a Patrick Mendelsohn, responsável pela unidade das tecnologias da formação na Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade de Genebra, duas declarações que merecem atenção:

"As crianças nascem em uma cultura em que se clica, e o dever dos professores é inserir-se no universo de seus alunos"

"Se a escola ministra um ensino que aparentemente não é mais útil para uso externo, corre um risco de desqualificação. Então, como vocês querem que as crianças tenham confiança nela?"

Perrenoud, 2000, p. 125.

Essa vertente alastrou-se no mundo todo e, a cada dia, mais escolas se adaptaram para propiciar no meio escolar instrumentos tecnológicos, voltados às novas tecnologias. Como uma ferramenta de ensino facilitadora e eficaz para o professor.

"A escola não pode ignorar o que se passa no mundo. Ora, as novas tecnologias da informação e da comunicação (TIC ou NTIC) transformam

espetacularmente não só nossas maneiras de comunicar, mas também de trabalhar, de decidir, de pensar."

Perrenoud, 2000, p. 125.

Com o uso das TICs, o professor dispõe de um recurso a mais, que torna suas aulas mais dinâmicas e atrativas, despertando no aluno maior interesse e aprendizado mais significativo no conteúdo proposto.

"As novas tecnologias podem reforçar a contribuição dos trabalhadores pedagógicos e didáticos contemporâneos, pois permitem que sejam criadas situações de aprendizagem ricas, complexas, diversificadas, por meio de uma divisão de trabalho que não faz mais com que todo o investimento repose sobre o professor, uma vez que tanto a informação quanto a dimensão interativa são assumidas pelos produtores dos instrumentos."

Perrenoud, 2000, p. 139.

Nosso intuito não é elencar todas as premissas sobre a inserção das novas tecnologias na educação, que já se encontra em um estado bem mais avançado do que no início dos anos 90, principalmente devido ao cenário atual, em que estamos passando, com aulas 100% on-line, transmitidas por vídeo conferências, nas diversas plataformas, com provas virtuais e utilizando vários recursos tecnológicos, como mesas digitalizadoras, tablets, fones e microfones dos mais variados tipos e modelos.

O que pretendemos aqui, é apresentar e utilizar um software educacional que facilita o aprendizado e a compreensão sobre o conteúdo de trigonometria trabalhado nas escolas de ensino médio. Este software agrega a geometria e a álgebra de maneira dinâmica e com uma estrutura interativa, de fácil entendimento e acesso, pois ao longo dos anos ensinando trigonometria, percebi a dificuldade dos alunos em assimilar as razões trigonométricas e seus respectivos valores. Em sua maioria (os professores) optam em criar meios para que os alunos "decorem" cada um dos valores, o que torna ainda mais difícil o aprendizado.

### 3.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um software matemático bastante dinâmico e gratuito, com versões tanto para computadores quanto para tablets e smartphones, pode ser instalado em diversas plataformas como IOS, Android, Linux, Windows. O software atende diversos

níveis de ensino, e traz recursos em diversas áreas da matemática tais como geometria, álgebra, análise, estatística e ganhou vários prêmios, tanto na Europa como nos Estados Unidos.

"GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo."

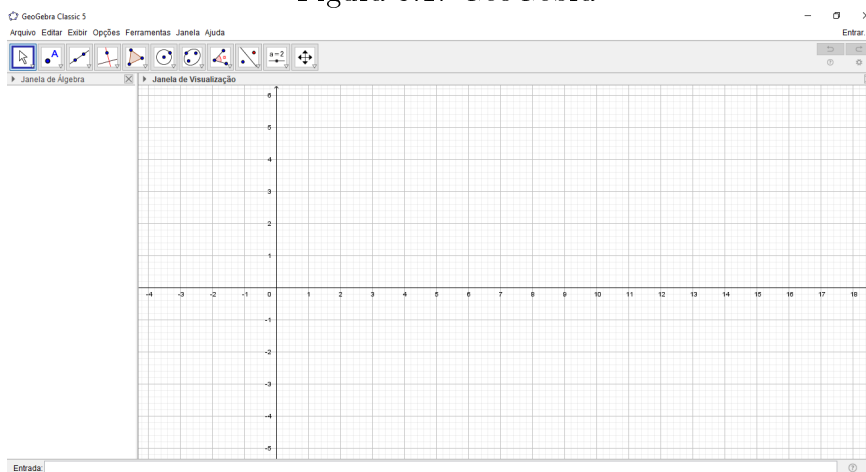
<https://www.pucsp.br/geogebra/geogebra.html>, acesso em 07/02/2021

O GeoGebra pode ser baixado no site <https://www.geogebra.org/download?lang=pt> ou pode ser usado on-line na página eletrônica:

<https://www.geogebra.org/m/XUv5mXTm#material/ncjw5zr>, (acessado em 27/03/2021).

Utilizaremos a versão *GeoGebra Classic 5*, principalmente, para construção de gráficos de funções, figuras geométricas e animações. A na Figura 3.1 motra toda tela inicial do GeoGebra.

Figura 3.1: GeoGebra



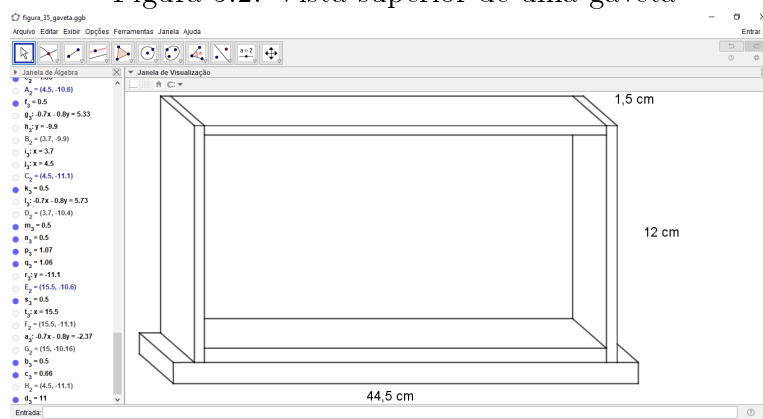
Fonte: Print do software GeoGebra.

É possível construir diversos tipos de gráficos e também figuras geométricas. Todas as imagens anteriores, deste trabalho, foram feitas no GeoGebra e editadas posteriormente, utilizando escala real (em cm). Algumas figuras espaciais podem ser planificadas



facilmente, apresentando uma visualização em perspectiva, proporcionando uma visão espacial, facilitando a leitura dos elementos relacionados as dimensões do objeto. A Figura 3.2 mostra em detalhes, as dimensões do projeto de uma gaveta.

Figura 3.2: Vista superior de uma gaveta

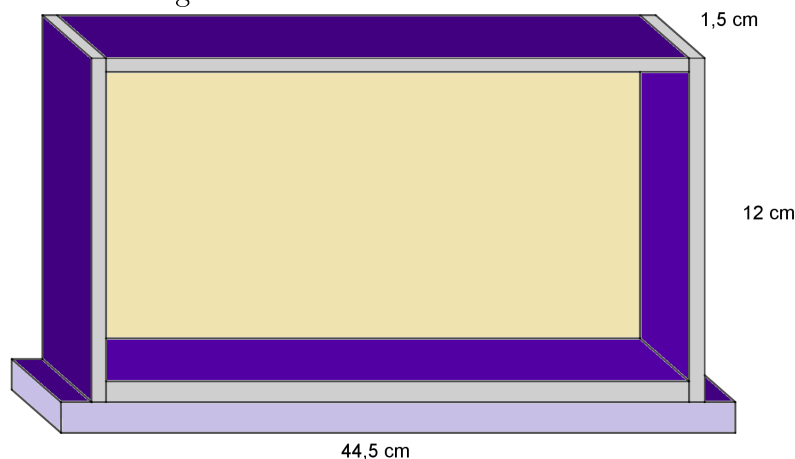


Fonte: Print do software GeoGebra com uma aplicação.

Podemos editar a figura usando um aplicativo simples de edição de imagens, como o Paint, Inkscape, LightZone, Gimp e outros, para realçar detalhes como profundidade, largura, luminosidade e espaço.

Observe a Figura 3.3, que contém uma edição da Figura 3.2. Incrementamos cores vivas para as molduras e também realçamos as cores apropriadas para expressar solidez, proporcionando uma visualização mais nítida do objeto.

Figura 3.3: Gaveta editada no Paint

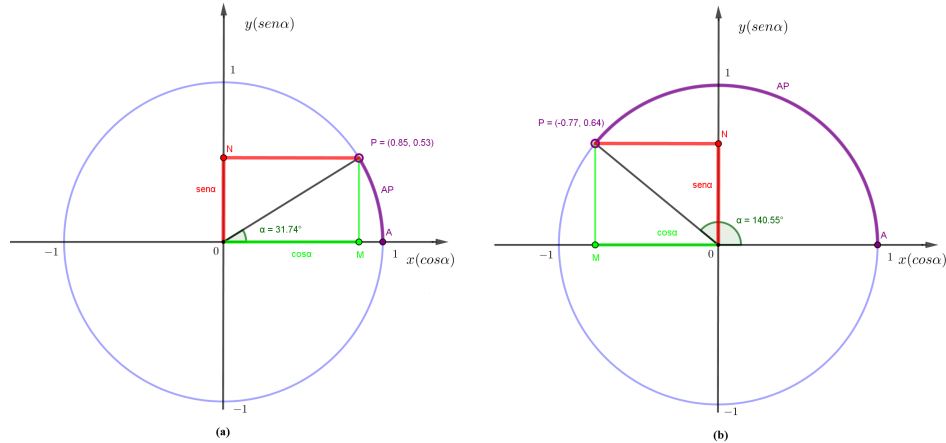


A seguir, apresentaremos o círculo trigonométrico construído no GeoGebra, com animações e alguns problemas clássicos.

## 3.2 Trigonometria no GeoGebra

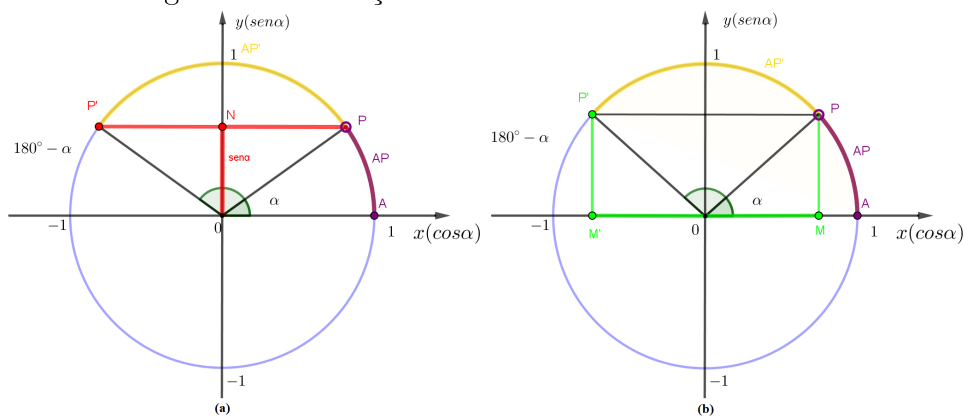
Nesta seção trataremos de como o GeoGebra apresenta facilidades no aprendizado das funções trigonométricas, pois o aluno acompanha, de maneira dinâmica, passo a passo, as variações do seno, do cosseno e da tangente, quando movimentamos um arco no círculo trigonométrico. (Veja a Figura 3.4).

Figura 3.4: Seno e cosseno no círculo trigonométrico



Observe que o  $\text{sen } \alpha$  é a projeção ortogonal de  $P$  sobre o eixo  $\overleftrightarrow{Oy}$ , variando de  $-1$  a  $1$ . Desta forma, temos que o seno é positivo no  $1^{\circ}$  e  $2^{\circ}$  quadrantes e negativo no  $3^{\circ}$  e  $4^{\circ}$  quadrantes. Temos também que  $\text{sen}(180^{\circ} - \alpha) = \text{sen } \alpha$ . Já o  $\text{cos } \alpha$  é a projeção ortogonal de  $P$  sobre o eixo  $\overleftrightarrow{Ox}$ , variando de  $-1$  a  $1$ , sendo positivo no  $1^{\circ}$  e  $4^{\circ}$  quadrantes e negativo no  $2^{\circ}$  e  $3^{\circ}$  quadrantes e ainda  $\text{cos}(180^{\circ} - \alpha) = -\text{cos } \alpha$ . Veja Figura 3.5.

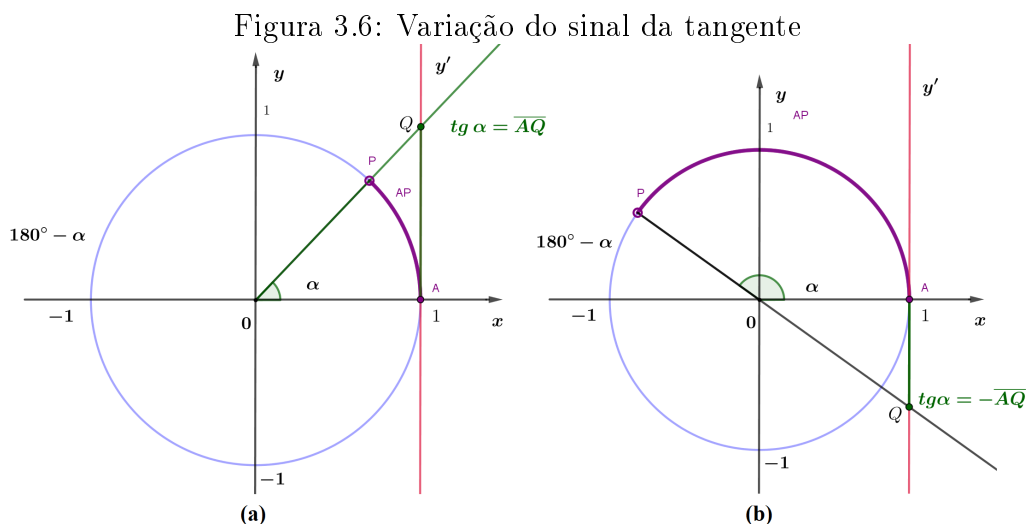
Figura 3.5: Variação do sinal do seno e do cosseno



Observe os arcos no  $3^{\circ}$  e  $4^{\circ}$  quadrantes. Utilizando o Exemplo 3 e o Teorema 3, podemos escrever que:

- $\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$  e  $\text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen } \alpha$
- $\text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos } \alpha$  e  $\text{cos}(360^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$

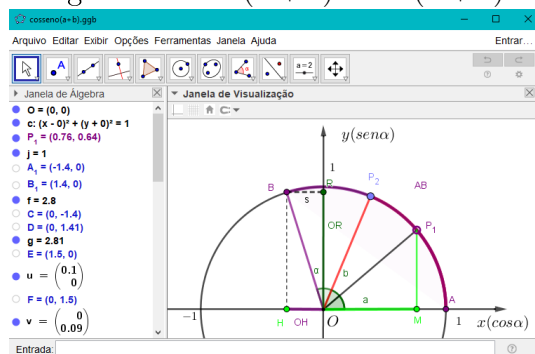
A tangente pode ser vista facilmente através dos gráficos (a) e (b) representados na Figura 3.6. Observe que a tangente é positiva no 1º e 3º quadrantes e negativa no 2º e 4º quadrantes.



Note que a tangente não está definida para os ângulos de  $90^\circ$  e  $270^\circ$  pois o arco  $\widehat{AP}$ , quando  $P = (0, 1)$  ou  $P = (0, -1)$ , faz com que o segmento  $\overline{OP}$  seja paralelo ao eixo  $y'$  impossibilitando que o segmento  $\overline{OP}$  intersecte a reta  $y'$ .

Podemos ilustrar o cosseno da soma de dois arcos no GeoGebra. Veja a representação feita na Figura 3.7, onde o arco  $\widehat{AP_1}$  é o ângulo  $a$ , o arco  $\widehat{AP_2}$  é o ângulo  $b$  e o arco  $\widehat{AB}$  é o ângulo  $\alpha = a + b$ . Com isso, o  $\text{cos}(a + b) = \overline{OH}$ . Utilizando o GeoGebra, o usuário tem a liberdade de alterar os ângulos  $a$  e  $b$ , variando automaticamente o ângulo  $\alpha = (a + b)$ , mostrando os valores do  $\text{cos}(a + b)$  em cada arco selecionado.

Figura 3.7:  $\text{cos}(a + b)$  e  $\text{sen}(a + b)$





medida do raio. Digite "1" e tecle **Enter** ou aperte em **Ok**, aparecerá uma circunferência de centro  $A=(0,0)$  e raio 1.

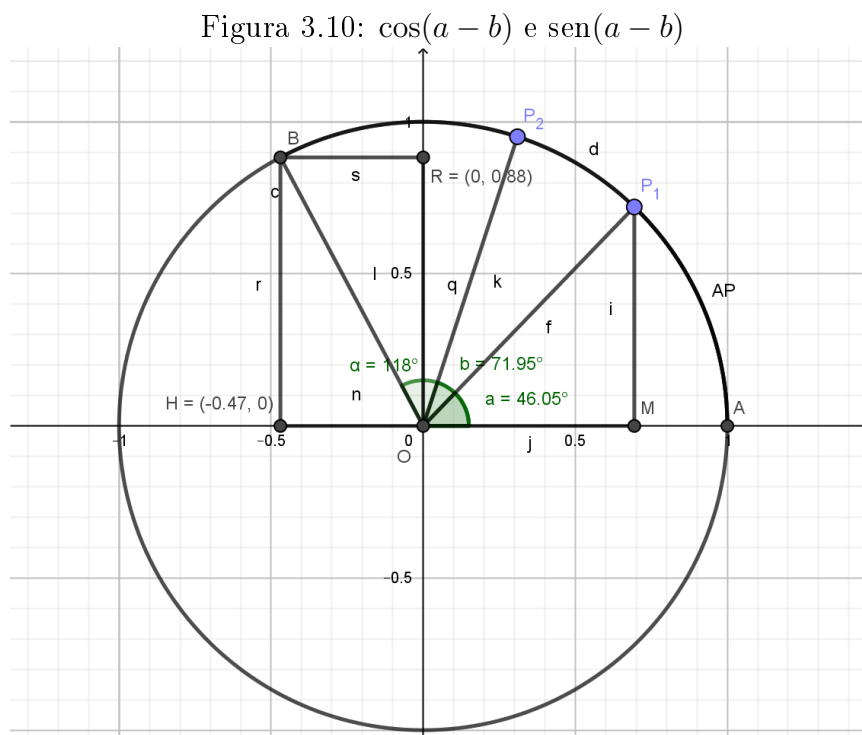
2. Renomear: para renomear o ponto  $A=(0,0)$ , clique com o botão direito do mouse no ponto A e selecione a opção **"Renomear"**. Aparecerá uma janela. Digite **"O"** e tecle **Enter**.
3. Ampliar a visualização do gráfico: posicione o cursor do mouse na janela de visualização e use a opção **scroll** do mouse ou selecione a última janela na barra de ferramentas e selecione a opção **"ampliar"**, aparecerá uma lupa no cursor do mouse, clicando na janela de visualização o gráfico irá ampliar.
4. Movendo o gráfico: Para mover o gráfico, selecione a primeira janela da barra de ferramentas e selecione a opção **"mover"**, clique e segure com o cursor do mouse na janela de visualização, arrastando o gráfico para posição desejada.
5. Marcando um ponto na circunferência: na segunda janela da barra de ferramentas, selecione a opção ponto, em seguida marque um ponto em cima da circunferência, no primeiro quadrante, clicando com o mouse e aparecerá o ponto A. Seguindo os passos do item 2 renomeie o ponto A novamente para o ponto  $P_1$ . Para escrever um índice no GeoGebra use **"underline"** e depois o índice desejado. Observe que o ponto  $P_1$  está sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .
6. Para mover um ponto na janela de visualização, selecione a primeira janela na barra de ferramentas e selecione a opção **"Mover"**, em seguida na janela de visualização clique e segure com o mouse no ponto  $P_1$ , ao arrastar perceberá que o ponto percorrerá a circunferência.
7. Para construir um segmento, selecione a terceira janela na barra de ferramentas e selecione a opção **"Segmento"**, a seguir selecione os pontos desejados, clicando com o mouse nos pontos  $O = (0,0)$  e  $P_1$ . Aparecerá, na janela de álgebra o segmento **"f=1"**, representando o nome e o tamanho do segmento.
8. Reta perpendicular: vamos construir duas retas perpendiculares aos eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente. Para isto, selecione a quarta janela na barra de ferramentas e selecione a opção **"Reta perpendicular"**, em seguida clique com mouse no ponto  $P_1$  e depois na reta  $Ox$ . Aparecerá na janela de álgebra a reta **"g:x = k<sub>1</sub>"**,  $k_1$  real. Repita o procedimento para o eixo  $OY$  e aparecerá na janela de álgebra a reta **"h:y=k<sub>2</sub>"**,  $k_2$  um número real. Seguindo os passos do item 6, perceba que as retas perpendiculares também se movem.

9. Determinar ponto de interseção entre dois objetos: vamos construir o ponto de intersecção da reta  $g$  com o eixo  $Ox$ . Selecione na segunda janela da barra de ferramentas a opção "**Interseção de dois objetos**", em seguida clique na reta  $g$  depois no eixo  $Ox$ , aparecerá o ponto  $A$ . Siga os passos do item 2 e renomeie o ponto  $A$  para o ponto  $M$ . Para omitir as retas  $g$  e  $h$ , clique no botão direito do mouse na reta  $g$  e selecione a opção "**Exibir objeto**", faça o mesmo com a reta  $h$ .
10. Repita o item 7 e construa o segmento  $\overline{P_1M}$  e  $\overline{OM}$ .
11. Construindo um ponto: selecione na segunda janela da barra de ferramentas a opção ponto, em seguida marque na janela de visualização o ponto  $(1,0)$ , aparecerá o ponto " $A = (1,0)$ ".
12. Medida do ângulo: para determinar a medida de um ângulo, selecione a oitava janela na barra de ferramentas e selecione a opção "**Ângulo**" depois clique no ponto  $A$ , no ponto  $O$  e no ponto  $P_1$ . Aparecerá o ângulo  $\alpha$  e a medida do mesmo. Renomeie para "**a**".
13. Construindo um arco: na sexta janela da barra de ferramentas, selecione a opção "**Arco circular**", em seguida clique nos pontos  $O$ ,  $A$  e  $P_1$ . Aparecerá o arco  $d$ . Renomeie para arco  $AP$ .
14. Repetindo o item 5 aparecerá o ponto **B**, renomeie para o ponto  $P_2$ .
15. Repetindo o item 7 construa o segmento  $\overline{OP_2}$ .
16. Repetindo o item 12 construa o ângulo "**b**" clicando nos pontos  $A$ ,  $O$  e  $P_2$ .
17. Construindo um ângulo com amplitude fixa: na oitava janela da barra de ferramentas selecione a opção "**Ângulo com amplitude fixa**" depois clique nos pontos  $A$  e  $O$ , aparecerá uma janela com a marcação  $45^\circ$ , apague e digite "**a+b**" e aparecerá o ângulo  $\alpha$  e o ponto  $A'$ . Renomeie o ponto  $A'$  para o ponto  $B$ . (Observe que  $\alpha = a + b$ ).
18. Repita o item 7 e construa o segmento  $\overline{OB}$ , em seguida repita o item 13 e construa o arco  $AB$ .
19. Repita o item 8 no ponto  $B$  com o eixo  $Ox$ . Aparecerá a reta "**m**" Depois repita o item 9 e determine a interseção da reta **m** com o eixo  $Ox$ . Aparecerá o ponto "**C**". Renomeie para o ponto  $H$ . Omita a reta **m** e construa o segmento  $\overline{OH}$ .

20. Repita o item 8 no ponto  $B$  com o eixo  $Oy$ . Aparecerá a reta " $\mathbf{p}$ ". Depois repita o item 9 e determine a interseção da reta  $\mathbf{p}$  com o eixo  $Oy$ . Aparecerá o ponto " $\mathbf{C}$ ". Renomeie para o ponto  $R$ . Omita a reta  $\mathbf{p}$  e construa o segmento  $\overline{OR}$ .

21. Repita o item 7 e construa os segmentos  $\overline{BH}$  e  $\overline{BR}$

A construção do gráfico está representada na Figura 3.10 .



Observe que a abscissa do ponto  $H$  é o  $\cos(a + b)$  e a ordenada do ponto  $R$  é o  $\sin(a + b)$ . Movendo os pontos  $P_1$  ou  $P_2$  os pontos  $H$  e  $R$  também moverão.

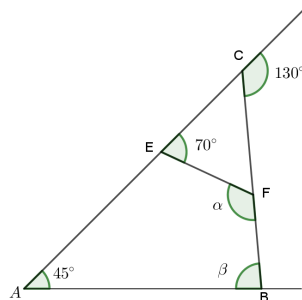
### 3.2.1 Problemas de Olimpíadas

Nesta seção, abordaremos problemas relacionados a trigonometria, onde faremos uso do GeoGebra na resolução para comparar com a solução algébrica encontrada. Na OBMEP de 2009 temos três problemas envolvendo triângulos que separamos para destacar algumas características relevantes.

**Problema 1.** *Determine os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  na Figura 3.11. (5ª Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas - OBMEP 2009. Banco de questões. P.20).*

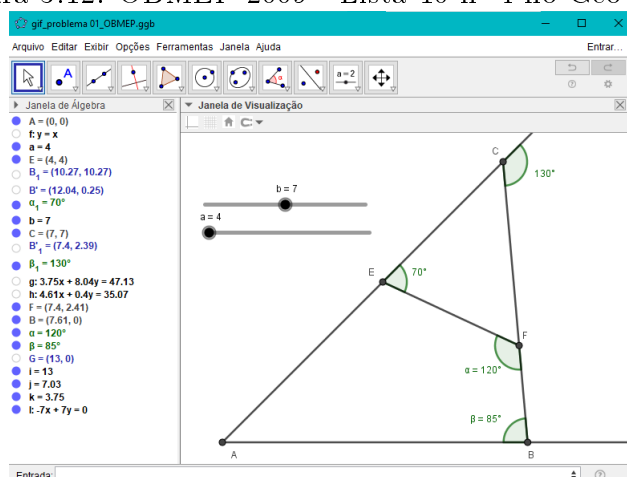
*Demonstração.* Aplicando teorema do ângulo externo e a soma dos ângulos internos de um triângulo, encontramos facilmente as medidas dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$ , e são, respectivamente:  $120^\circ$  e  $85^\circ$ . Mas o problema vai além disso, pois ao mudar o ponto  $C$  ou

Figura 3.11: OBMEP 2009 - Lista 10 n<sup>o</sup> 4



o ponto  $E$ , teremos um novo triângulo com as mesmas medidas de ângulos, pois os ângulos independem da medida dos triângulos, uma vez que são semelhantes. Usando o GeoGebra, conseguimos mostrar visualmente, usando os controles deslizantes "a" e "b", para o aluno o comportamento dos ângulos  $\alpha$  e do ângulo  $\beta$ . Veja na Figura 3.12.

Figura 3.12: OBMEP 2009 - Lista 10 n<sup>o</sup> 4 no GeoGebra



□

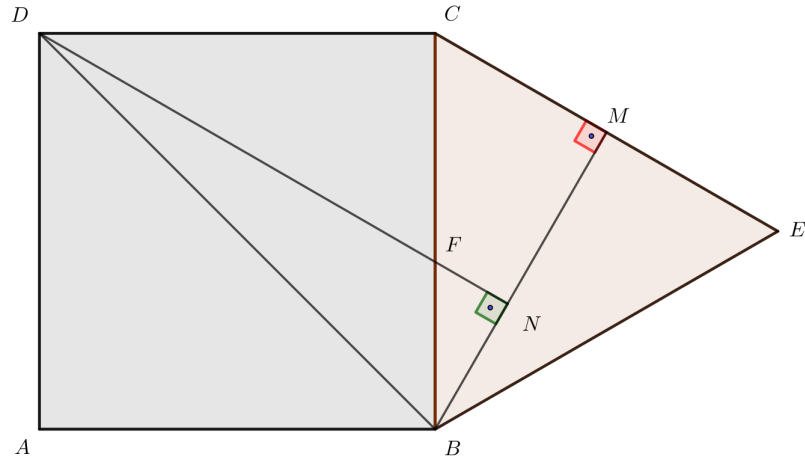
O próximo problema trata dos ângulos de  $15^\circ$  e  $75^\circ$ . E conseguimos, construir geometricamente a  $tg15^\circ$ , o  $\text{sen } 15^\circ$ , a  $tg75^\circ$  e o  $\text{sen } 75^\circ$ .

**Problema 2.** Na Figura 3.13,  $ABCD$  é um quadrado de lado  $1\text{cm}$  e  $\triangle BCE$  é um triângulo equilátero. O ponto  $M$  é o ponto médio do segmento  $\overline{CE}$ ,  $\overline{DN}$  é perpendicular a  $\overline{BM}$  e  $\overline{BM}$  é perpendicular a  $\overline{CE}$ . (5<sup>a</sup> Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas - OBMEP 2009. Banco de questões. P.25).

- Calcule os comprimentos dos lados do triângulo  $\triangle DBN$ .
- Use o item (a) para calcular o cosseno, o seno e a tangente dos ângulos de  $15^\circ$  e  $75^\circ$ .



Figura 3.13: OBMEP 2009 - Lista 4 n<sup>o</sup> 4



*Demonstração.* (a)

Como  $\overline{DB}$  é a diagonal do quadrado de lado 1 cm, usando o teorema de Pitágoras, temos que  $\overline{DB} = \sqrt{2}$ .

O triângulo  $BCE$  é equilátero, logo seus ângulos internos valem  $60^\circ$ . Usando esta informação e observando a Figura 3.13, temos:

- No  $\triangle CDF$  temos que  $\widehat{CFD} = 60^\circ$ , pois é oposto pelo vértice ao ângulo  $\widehat{BFN} = 60^\circ$ .
- No  $\triangle BFN$  temos que  $\widehat{NBF} = 30^\circ$ , soma dos ângulos internos de um triângulo.
- No  $\triangle DBN$  temos que  $\widehat{NBD} = 75^\circ$  e  $\widehat{BDN} = 15^\circ$ .

Aplicando a lei dos senos entre os ângulos  $\widehat{DCF}$  e  $\widehat{CFD}$  no triângulo  $CDF$ , temos:

$$\frac{\text{sen } 90^\circ}{\overline{DF}} = \frac{\text{sen } 60^\circ}{\overline{DC}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{DF} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

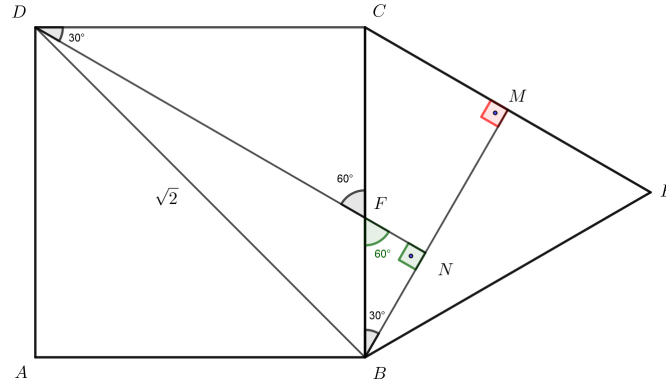
Veja, Figura 3.14.

Aplicando o  $\cos 60^\circ$  no triângulo retângulo  $CDF$ , temos:

$$\frac{\overline{CF}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{CF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Daí, temos que  $\overline{BF} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Figura 3.14: OBMEP 2009 - Lista 4 n<sup>o</sup> 4



Então, olhando para o triângulo  $BFN$ , temos:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\overline{FN}}{\overline{BF}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{FN}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \overline{FN} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \text{ e}$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\overline{BN}}{\overline{BF}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{BN}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \overline{BN} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Logo, a medida dos três lados do triângulo  $DBN$  são:

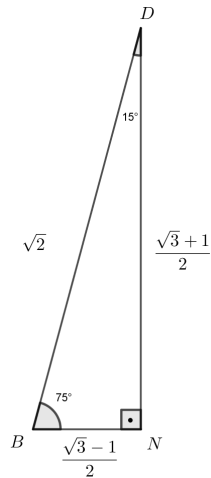
- $\overline{DB} = \sqrt{2}$ .
- $\overline{DN} = \overline{DF} + \overline{FN} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ .
- $\overline{BN} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ .

(b) No triângulo  $DBN$  temos:  $\widehat{DBN} = 75^\circ$  e  $\widehat{BDN} = 15^\circ$ . Ou seja:

$$\operatorname{cos} 75^\circ = \frac{\overline{BN}}{\overline{DB}} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\operatorname{cos} 15^\circ = \frac{\overline{DN}}{\overline{DB}} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Figura 3.15: Triângulo BND



□

### 3.2.2 Medidas inacessíveis

Algumas medidas são consideradas inacessíveis pela dificuldade em medi-las, como por exemplo a distância entre a terra e o sol. O comprimento de uma ponte sobre um rio. A altura de um prédio. O raio da terra. A espessura de um fio de cabelo.

Tanto o macro quanto o micro, sempre foram motivo de reflexão para os povos mais antigos e também para os dias atuais. As medidas inacessíveis fizeram com que instrumentos cada vez mais precisos fossem criados e aprimorados ao longo dos tempos. A tecnologia chegou a tal ponto que, hoje, conseguimos calcular distâncias usando um aparelho com um *laser*. Também conseguimos calcular a área de um terreno usando satélites através de GPS (Sistema de Posicionamento Global). Nossos antepassados já tinham a preocupação em cálculos que excediam os limites físicos. Temos como exemplo, as pirâmides do Egito, o raio da terra, dentre outros. Pois nesse período (idade antiga e idade média), os instrumentos de medição eram bastante precários, acarretando o uso da geometria para calcular tais medidas.

[...] Assim, Eratóstenes saiu da biblioteca em vinte e um de junho alguns minutos antes do meio-dia para medir a sombra exatamente naquele momento em Alexandria, enquanto, em Siena, no mesmo instante, a luz do sol entrava a pino dentro do poço. Ele mediu um ângulo de cerca de 7,2 graus. Depois, dividiu 360 por 7,2 o que dá 50. Agora, sabia que eram

necessárias 50 frações iguais a medida da distância entre Alexandria e Siena para formar a circunferência da Terra. [...].

VINAGRE, A.L.M. *Eratóstenes e a Medida do Diâmetro da Terra*. Campinas: Unicamp, IFL. p.3 e 4. Disponível em <[https://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530\\_F590\\_F690\\_F809\\_F895/F809/F809\\_sem2\\_2002/940298\\_AndreVinagre\\_Eratostenes.pdf](https://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2002/940298_AndreVinagre_Eratostenes.pdf)> Acesso em: 18 de fevereiro de 2021.

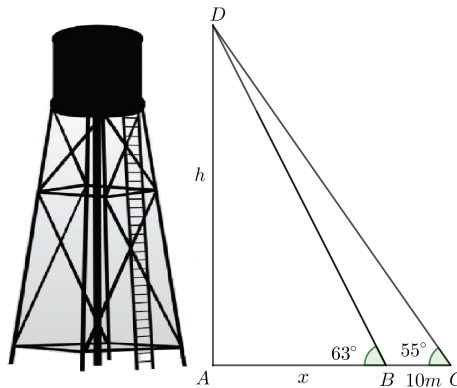
O uso da trigonometria facilitou, e muito, para tal medição. E cada vez mais foram surgindo instrumentos mais precisos. O Teodolito foi um deles.

A invenção do teodolito, no século XVI, por 1571, Leonard Digges, contribuiu para as construções de estradas e medição de grandes áreas e também de medidas inacessíveis. Veja a seguir como construir um teodolito caseiro acessando o site: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/brincando-com-trigonometria-oficinas-obtendo-medidas-inacessiveis/>>.

O Exemplo 17 mostra o cálculo da altura de uma torre usando trigonometria.

**Exemplo 17.** Para medir a altura de uma torre com uma caixa d'água usando um teodolito, vamos medir o ângulo entre a base e o topo a uma distância  $x$  da base com um ângulo de  $63^\circ$  em seguida caminhando horizontalmente 10m teremos um ângulo de  $55^\circ$ , conforme esquema na Figura 3.16

Figura 3.16: Torre caixa d'água



Resolução:

Seja  $x = \overline{AB}$ , aplicando tangente nos ângulos  $ABD$  e  $ACD$ , temos:

$$\operatorname{tg} 63^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\operatorname{tg} 63^\circ} \quad (A)$$

e

$$\operatorname{tg} 55^\circ = \frac{h}{x + 10} \Rightarrow x = \frac{h - 10 \operatorname{tg} 55^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ} \quad (B)$$

Substituindo a equação (A) na equação (B), temos:

$$\frac{h}{\operatorname{tg} 63^\circ} = \frac{h - 10 \operatorname{tg} 55^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ} \Rightarrow$$

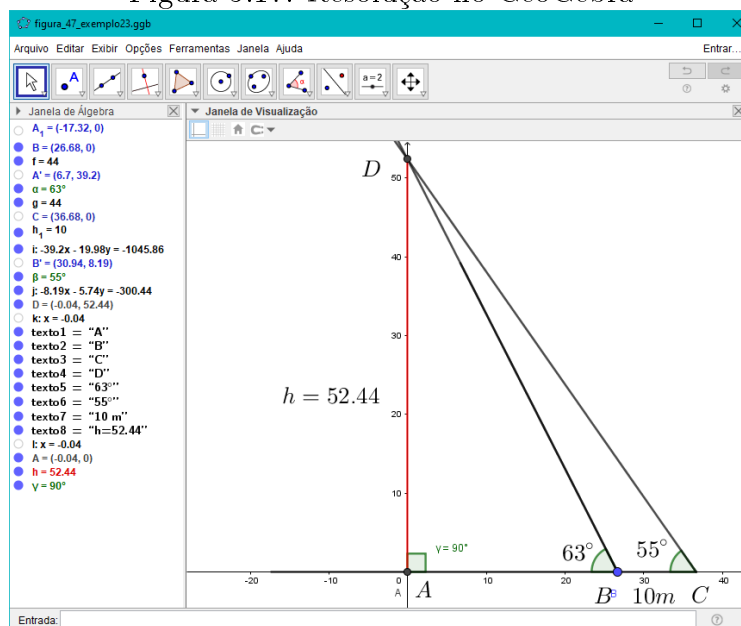
$$h \operatorname{tg} 55^\circ = h \operatorname{tg} 63^\circ - 10 \operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 63^\circ \Rightarrow$$

$$h \operatorname{tg} 63^\circ - h \operatorname{tg} 55^\circ = 10 \operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 63^\circ \Rightarrow$$

$$h = \frac{10 \operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 63^\circ}{\operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 55^\circ}$$

Substituindo o valor da tangente de  $63^\circ$  e  $55^\circ$ , temos:  $h \cong 52,44m$

Figura 3.17: Resolução no GeoGebra



Ao simular o problema acima no GeoGebra, inserindo todas as propriedades enunciadas, tivemos o resultado desejado. Veja a resolução do Exemplo 17 construída no GeoGebra na Figura 3.17. Observe que o segmento  $\overline{AD} = 52,44$  é igual ao resultado obtido anteriormente.

A seguir, vamos resolver o problema proposto na introdução da seção e que é bastante conhecido, onde foi feito o cálculo para medir o raio da terra.

**Exemplo 18.** Um fato interessante aconteceu mais ou menos a 2,3 mil anos, no posto de fronteira cidade de Siene (hoje Assuã), no dia 21 de junho, no solstício de verão, quando o sol refletia diretamente no fundo de um poço ao meio dia. Pois Siene se situa no hemisfério norte, praticamente sobre o Trópico de Câncer. Poços profundos e estreitos somente podem ter o seu fundo iluminado pela luz solar se estiverem em latitudes que ficam entre os dois paralelos dos trópicos. Um estaca cravada verticalmente em Alexandria, ao meio-dia no solstício, projeta uma sombra cerca de 8 vezes menor do que a altura da estaca. Ou seja, a luz do sol ao meio dia tem uma orientação que perfaz um ângulo de aproximadamente 50 vezes menor que o ângulo subtendido pela circunferência, isto é, cerca de  $7,2^\circ$ .

Resolução: Usando regra de três, temos:

$$\begin{array}{l} 2\pi \text{ — } 360^\circ \\ 800 \text{ — } 7,2^\circ \end{array}$$

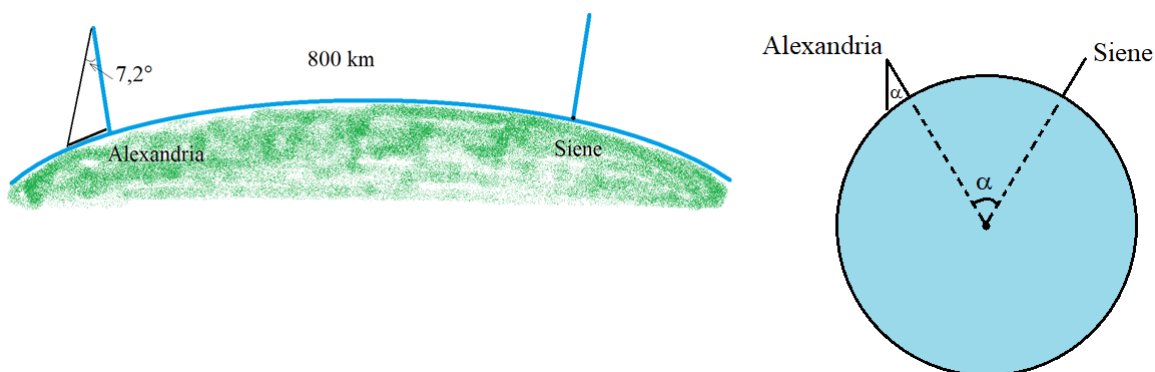
Daí,

$$2\pi r \cdot 7,2^\circ = 800 \cdot 360^\circ$$

$$r = \frac{288000}{14,4}$$

$$r = 6366,198$$

Figura 3.18: Raio da terra



### 3.3 Funções circulares e o GeoGebra

"As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no

dia-a-dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise. A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela submetido. Se  $c$  é o comprimento da corda,  $\alpha$  é o ângulo e  $r$  o raio da circunferência então  $c = 2r \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right)$ . Esta é a origem da palavra *seno*, que provém de uma tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo *jiba* (corda) com *jaib* (dobra), cavidade, *sinus* em latim). [Cfr. "Meu professor de Matemática", pág.187.]"

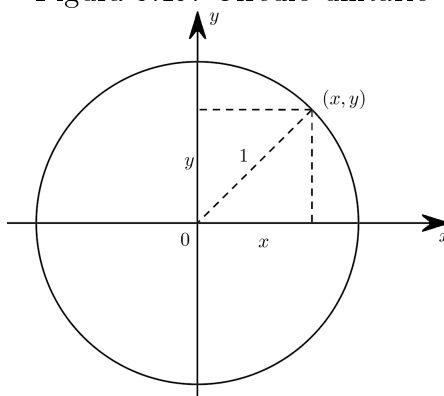
Lima, Elon Lages ...[et al.]. A Matemática do Ensino Médio Volume 1. Sexta edição.

Rio de Janeiro: SBM, 2003. P.213.

Nesta seção, iremos mostrar como as funções circulares, seno, cosseno e tangente, se comportam no círculo trigonométrico, avaliando o domínio, a imagem, o período o crescimento e decrescimento, com o auxílio do GeoGebra.

No Capítulo 2 temos a definição do círculo trigonométrico. As razões trigonométricas foram definidas na sessão 1.2. Por hora, sabemos que  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ . Desta forma, os números  $\operatorname{cos} \alpha$  e  $\operatorname{sen} \alpha$  são as coordenadas de um ponto da circunferência de raio unitário e centro na origem de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $C$  essa circunferência, que chamaremos de *círculo unitário*. Sendo assim,  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ , representada na Figura 3.19.

Figura 3.19: Círculo unitário



Considere  $P(x, y)$  um ponto do círculo trigonométrico  $C$ , desta forma temos que  $-1 \leq x \leq 1$  e  $-1 \leq y \leq 1$ .

Para definir as funções  $\operatorname{cos} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , iremos associar a cada número real  $t$  um ângulo e estabelecer o cosseno e o seno deste ângulo. Vimos no Capítulo 1 algumas maneiras de medir ângulo, as unidades mais usadas são o radiano e o grau.

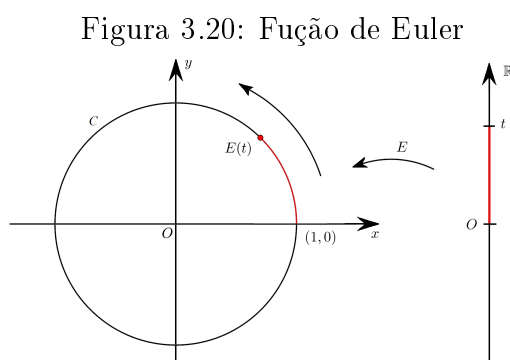
Definiremos as funções trigonométrica usando, como premissas, a função de Euler  $E : \mathbb{R} \rightarrow C$ , que corresponde a cada número real  $t$  o ponto  $E(t) = (x, y)$  da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$
- se  $t > 0$ , percorremos sobre a circunferência  $C$ , a partir do ponto  $(1, 0)$ , um arco de comprimento  $t$ , sempre no sentido positivo (anti-horário, ou seja, o sentido que nos leva de  $(1, 0)$  para  $(0, 1)$  pelo caminho mais curto sobre  $C$ ). O ponto final do caminho será chamado  $E(t)$ .
- se  $t < 0$ ,  $E(t)$  será a extremidade final de um caminho sobre  $C$ , de comprimento  $|t|$ , que parte do ponto  $(1, 0)$  e percorre  $C$  sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiro de um relógio usual). [8]

"A função de Euler  $E : \mathbb{R} \rightarrow C$  pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência  $C$  (pensada como um carretel) de modo que o ponto  $0 \in \mathbb{R}$  caia sobre o ponto  $(1, 0) \in C$ ."

Lima, Elon Lages ...[et al.]. A Matemática do Ensino Médio Volume 1. Sexta edição.  
Rio de Janeiro: SBM, 2003. P.218.

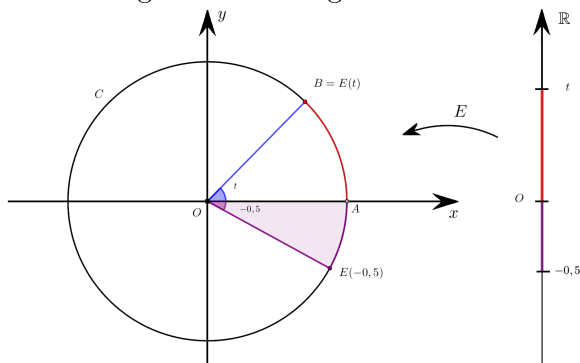
Observe na Figura 3.20, que quando o ponto  $t$  descreve na reta um intervalo de comprimento  $l$ , sua imagem  $E(t)$  também completa um arco de comprimento  $l$  em  $C$ .



Como a circunferência  $C$  tem raio unitário e comprimento  $2\pi$ , quando o ponto  $t$  marcar um intervalo de comprimento  $2\pi$ , a imagem  $E(t)$  completará uma volta sobre  $C$ , voltando ao ponto inicial. Desta forma, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , tem-se  $E(t) = E(t + 2\pi)$ , que podemos generalizar como: para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , tem-se  $E(t + 2k\pi) = E(t)$ , pra todo  $t \in \mathbb{R}$ .



Figura 3.21: Ângulo Central



Desta maneira, conseguimos associar a cada número real  $t$  um ângulo central  $\widehat{AOB}$  em  $C$  de medida  $t$  *radianos*, onde  $A = (1, 0)$ ,  $B = E(t)$  e  $O = (0, 0)$ . Figura 3.21.

Sejam  $x = \cos t$  e  $y = \sin t$  as funções *coosseno* e *seno*, respectivamente, com  $t \in \mathbb{R}$ , então  $E(t) = (\cos t, \sin t)$ , na circunferência unitária.

Veja como fica a representação gráfica destas funções nas Figuras 3.22 e 3.23

Figura 3.22: Função Seno

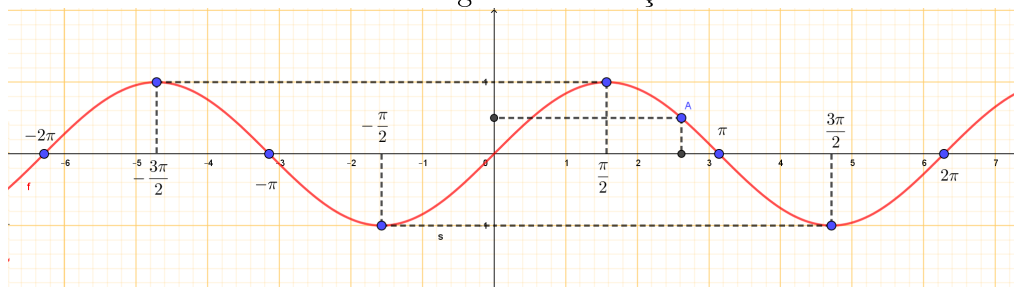
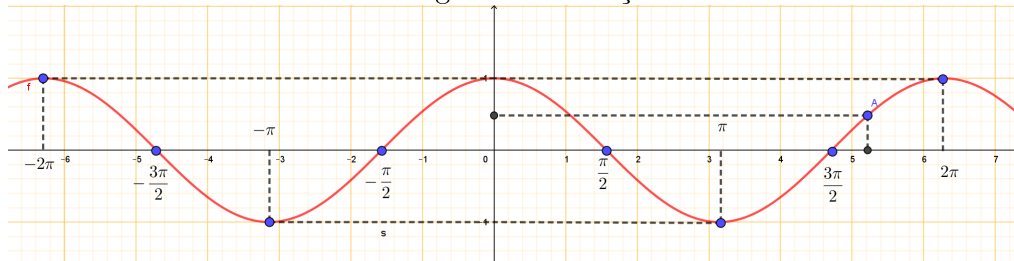


Figura 3.23: Função Cosseno

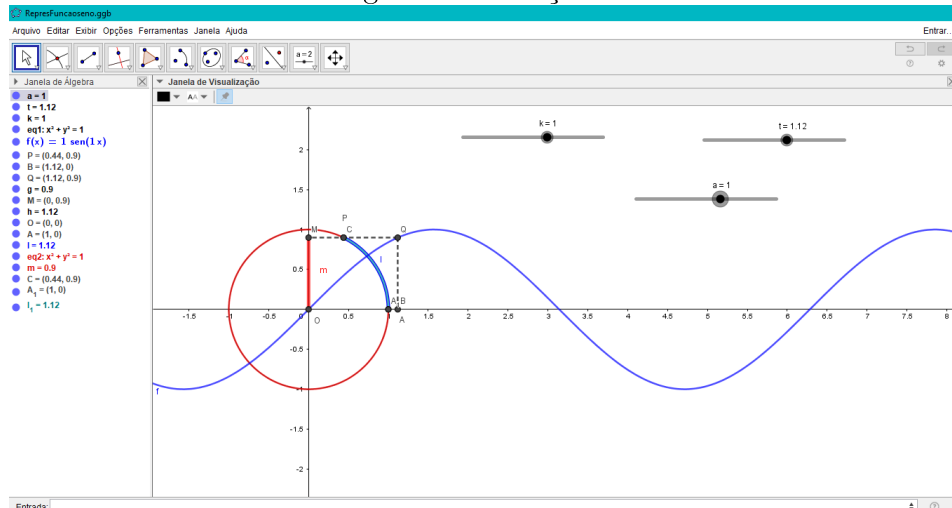


Temos que a função  $y = \sin t$  (e isso pode ser mostrado para o aluno através do GeoGebra), é crescente no primeiro e no quarto quadrantes, decrescente no segundo e terceiro quadrantes, positiva no primeiro e segundo quadrantes e negativa no terceiro e quarto quadrantes, variando de -1 a 1, com um período de  $2\pi$ . Veja na Figura 3.24.

Enquanto a função  $y = \cos t$  é crescente no terceiro e quarto quadrantes, decrescente

no primeiro e segundo quadrantes, positiva no primeiro e quarto quadrante, negativa no segundo e terceiro quadrantes, variando de  $-1$  a  $1$ , com um período de  $2\pi$ .

Figura 3.24: Função Seno no GeoGebra

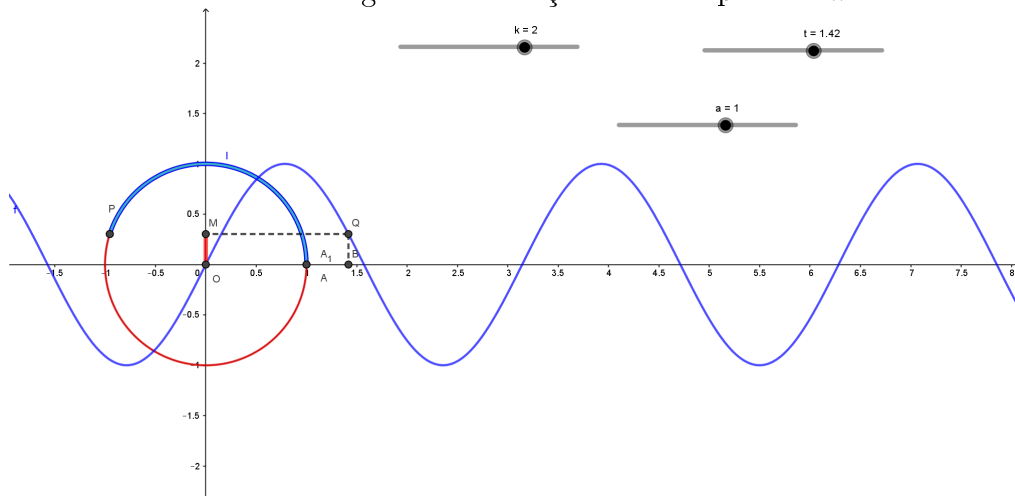


Observe na Figura 3.24 que os parâmetros  $k$  e  $a$  alteram a função seno, ampliando ou reduzindo o período da função, aumentando ou diminuindo o intervalo (imagem da função) de variação. O mesmo ocorre com a função cosseno.

De um modo geral, se  $f(t) = a \operatorname{sen}(kt)$ , com  $a, k \in \mathbb{R}^*$ , e  $P$  o período de  $f$ , então  $P = \frac{2\pi}{k}$ .

Veja na Figura 3.25, o gráfico da função seno de período  $\pi$ .

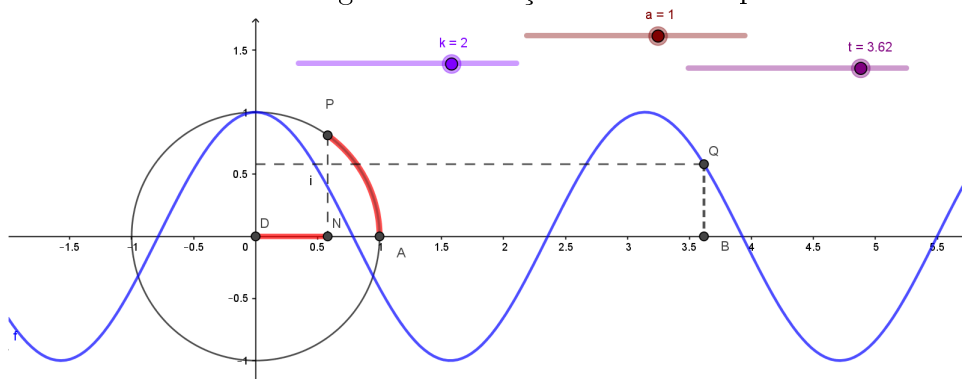
Figura 3.25: Função Seno de período  $\pi$



O professor tem a liberdade de alterar o valor de  $k$ , usando o GeoGebra, mostrando aos alunos a variação do gráfico da função.

Veja como fica o gráfico da função  $y = a \operatorname{cos}(kt)$  na Figura 3.26 de período  $\pi$ .

Figura 3.26: Função Cosseno de período  $\pi$



A liberdade de representar o gráfico das funções seno e cosseno visualmente promove uma interatividade do aluno com as diversas representações possíveis de maneira dinâmica e divertida, alternando os valores dos controles deslizantes  $a$  e  $k$  no aplicativo GeoGebra. A seguir, temos um exemplo e resolveremos utilizando o GeoGebra, mostrando as variações ocorridas na função proposta.

**Exemplo 19.** (UFPB - 2013) Segunda série - Com o objetivo de analisar o consumo de água de certa cidade, a companhia de água e esgotos solicitou à sua equipe de engenheiros um estudo sobre a vazão de água nessa cidade. O estudo mostrou que essa vazão  $V(t)$ , em  $m^3/h$ , na hora  $t$ , é expressa pela função:

$$V(t) = 1000 \left[ 4 + 2\text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{12}t \right) \right], \text{ onde } 0 \leq t \leq 24$$

Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas acerca da vazão de água nessa cidade:

- I A vazão mínima é de  $3000m^3/h$ .
- II A vazão máxima é de  $6000m^3/h$ .
- III A vazão é maior ou igual a  $5000m^3/h$  no horário das 3h às 9h e das 15h às 21h.
- IV A vazão em  $t = 12h$  é de  $5000m^3/h$ .

Está(ão) correta(s) apenas a(s) afirmativa(s):

1. II e III
2. II e IV
3. I, II e III
4. II

5. I, II e IV

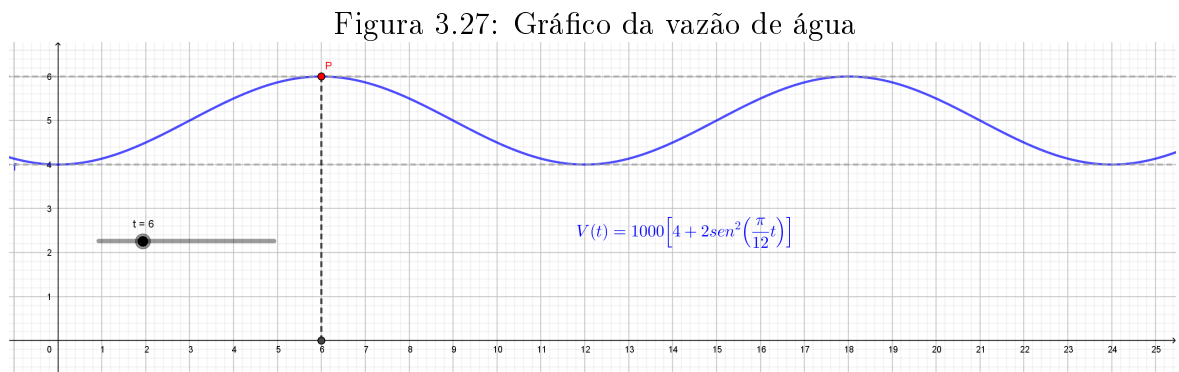
Sabemos que a imagem da função  $f(x) = \sin(x)$  pertence ao intervalo  $[-1,1]$ , desta forma,  $(\sin(x))^2$  pertence ao intervalo  $[0,1]$ . Daí,  $4 + 2 \cdot (\sin(x))^2$  pertence ao intervalo  $[4,6]$ . Então,  $V(t) = 1000 \left[ 4 + 2\text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{12}t \right) \right]$  pertence ao intervalo  $[4000,6000]$ . Logo, o item (II) é verdadeiro e o item (I) é falso.

Como  $V(12) = 1000 \left[ 4 + 2\text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{12} \cdot 12 \right) \right] = 1000[4 + 0] = 4000$ , logo o item (IV) é falso.

Sabemos que para  $t = 3$ , temos  $V(3) = 1000 \left[ 4 + 2\text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{12} \cdot 3 \right) \right] = 1000[4 + 1] = 5000 = V(15)$ . E para  $t = 9$ , temos  $V(9) = 1000 \left[ 4 + 2\text{sen}^2 \left( \frac{\pi}{12} \cdot 9 \right) \right] = 1000[4 + 1] = 5000 = V(21)$ . Como o período de  $V(t)$  é 12, então  $V(t)$  é máximo para  $t = 6$  e para  $t = 18$ . Então, o item (III) é verdadeiro.

Logo, a alternativa correta é 1. - II e III

Analisando o gráfico representado na Figura 3.27, feito no GeoGebra, temos que a vazão máxima é de  $6000m^3/h$  e que a vazão é maior ou igual a  $5000m^3/h$  no horário das  $3h$  às  $9h$  e das  $15h$  às  $21h$ . Logo, as afirmativas que estão corretas são: II e III. Obs.: Para ter uma visualização melhor do gráfico, desprezamos o valor 1000 na função, não comprometendo o comportamento do gráfico.



**Exemplo 20.** (Universidade Federal do Paraná - 2011)- Suponha que a expressão  $P = 100 + 20\text{sen}(2\pi t)$  descreve de maneira aproximada a pressão sanguínea  $P$ , em milímetros de mercúrio, de uma certa pessoa durante um teste. Nessa expressão,  $t$  representa o tempo em segundos. A pressão oscila entre 20 milímetros de mercúrio acima e abaixo dos 100 milímetros de mercúrio, indicando que a pressão sanguínea da pessoa é 120 por 80. Como essa função tem um período de 1 segundo, o coração da pessoa bate 60 vezes por minuto durante o teste.

1. Dê o valor da pressão sanguínea dessa pessoa em  $t = 0s$ ;  $t = 0,75s$ .
2. Em que momento, durante o primeiro segundo, a pressão sanguínea atingiu seu mínimo?

A resolução deste problema é bastante simples. No caso do item *a*) basta substituir  $t = 0$  e  $t = 0,75$  na expressão acima.

No primeiro caso,  $P = 100 + 20\text{sen}(0) = 100$ . Para  $t = 0,75$  temos:

$$P = 100 + 20\text{sen}(2 \cdot 0,75) = 100 + 20\text{sen}(1,5) = 100 - 20 = 80$$

Logo, os valores são: 100 e 80, respectivamente.

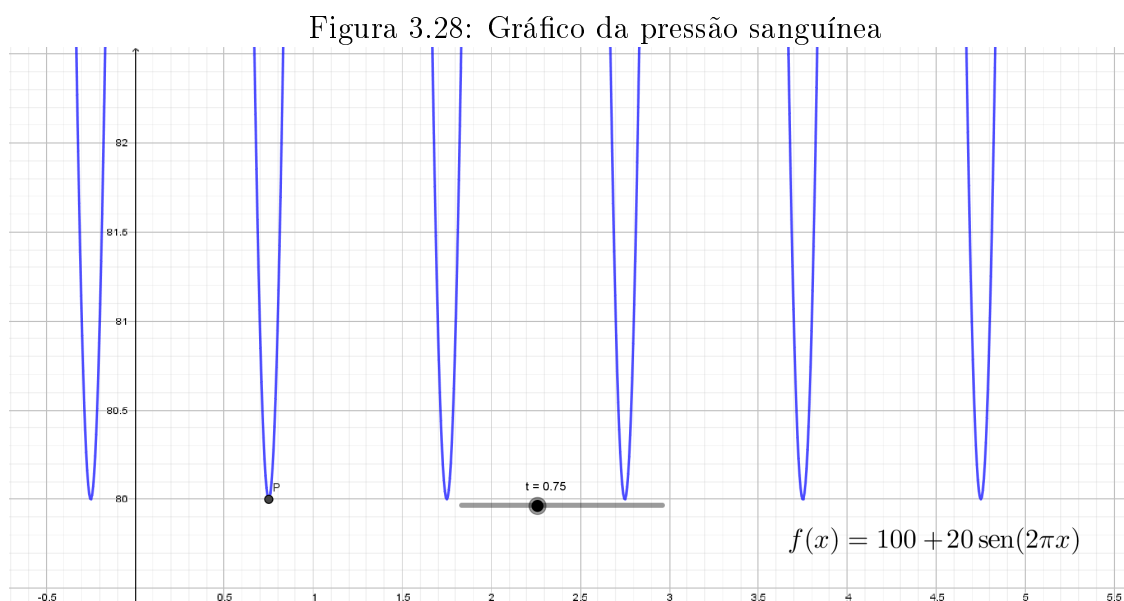
No item *b* temos que determinar o instante  $t$  em que a pressão sanguínea atinge o valor mínimo. Para isso,  $P$  será mínimo quando *seno* for igual a  $-1$ . Ou seja:

$$\text{sen}(2\pi t) = -1 \Rightarrow 2\pi t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{4}$$

Logo,

$$t = 0,75s$$

Observe o resultado na Figura 3.28.



**Exemplo 21.** *ACADEMIA DA FORÇA AÉREA - Rio e Janeiro 2012.*

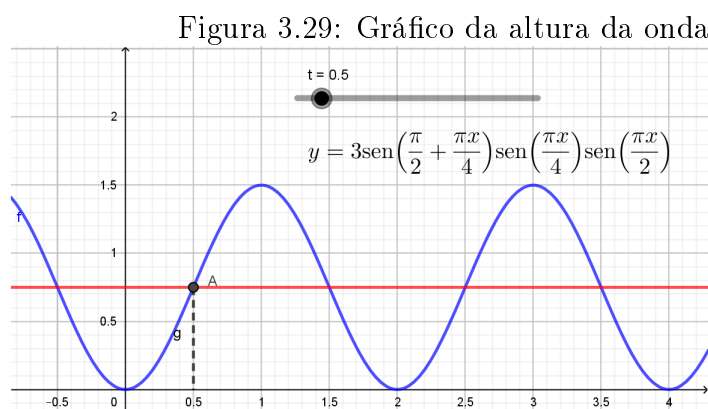
Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo  $y = 3\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  em que  $y = f(x)$  é a altura da onda, em metros, e  $x$  o tempo, em minutos.

Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão **NÃO** condiz com o modelo proposto.

1. A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.

2. Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.
3. De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas
4. As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, ... segundos são sempre iguais.

Veja o gráfico da onda, na Figura 3.29, conforme o modelo apresentado:



Analisando o gráfico e observando os itens citados, concluímos que a única alternativa que não condiz com o modelo proposto é a alternativa *c*, pois de zero a 4 minutos, observamos apenas duas cristas.

A seguir, vamos definir a função tangente e apresentar um exemplo relacionado a esta função.

Seja  $y = \text{tg } t$  a função *tangente* definida no intervalo  $I = \{t \in \mathbb{R} | t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

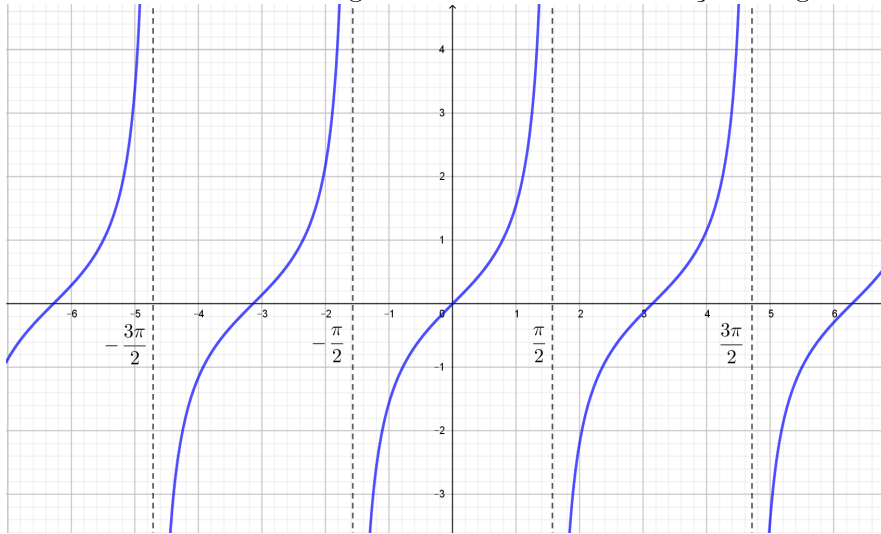
O valor da *tangente* de um arco está definida no círculo trigonométrico na Seção 2.2. Ao representar todos os pontos  $(t, \text{tg } t)$  em  $\mathbb{R}^2$ , teremos o gráfico a seguir:

Observe que o gráfico tangencia a reta  $x = \frac{\pi}{2}$  pela direita e pela esquerda, indo para  $-\infty$  e  $+\infty$ , respectivamente, repetindo o mesmo comportamento quando  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Agora, vamos apresentar um exemplo explorando a tangente na construção de um parafuso. Começamos com algumas definições.

### Definição 3. *Rosca*

Figura 3.30: Gráfico da função tangente

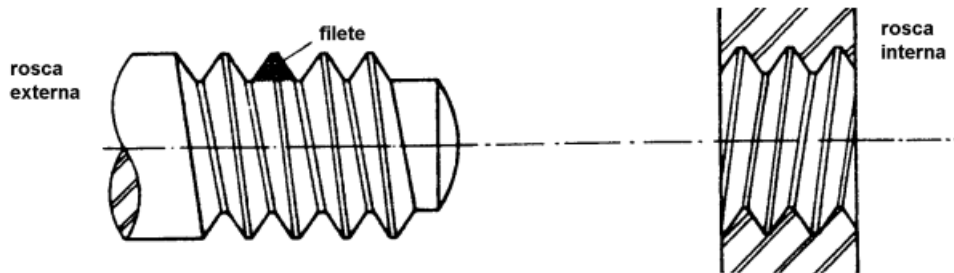


*Rosca é uma saliência de perfil constante, helicoidal, que se desenvolve de forma uniforme, externa ou internamente, ao redor de uma superfície cilíndrica ou cônica. Essa saliência é denominada filete.*

*<http://www.abraman.org.br/arquivos/72/72.pdf>. Página 13. Acessado em 02/04/2021*

Observe a ilustração definida na Figura 3.31

Figura 3.31: Rosca interna e rosca externa



<<http://www.abraman.org.br/arquivos/72/72.pdf>>

#### Definição 4. *Passo e hélice de rosca*

*Quando há um cilindro que gira uniformemente e um ponto que se move também uniformemente no sentido longitudinal, em cada volta completa do cilindro, o avanço (distância percorrida pelo ponto) chama-se passo e o percurso descrito no cilindro por esse ponto denomina-se hélice.*

O desenvolvimento da hélice forma um triângulo retângulo, onde se têm:

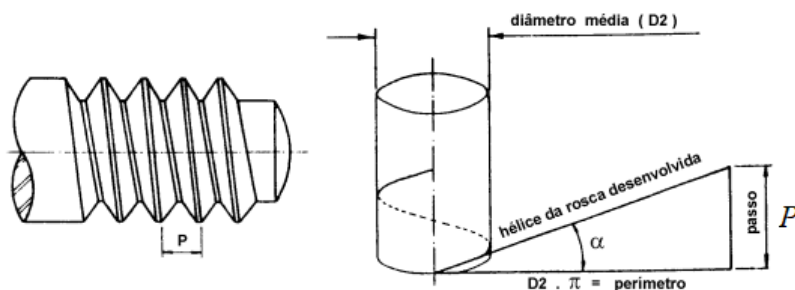
$\alpha$  = ângulo da hélice

$P$  (passo) = *cateto oposto*

*hélice* = *hipotenusa*

$D_2$  (diâmetro médio) = *cateto adjacente*

Figura 3.32: Passo e hélice de rosca



<<http://www.abraman.org.br/arquivos/72/72.pdf>> Página 14

Usando as razões trigonométricas, podemos determinar o diâmetro médio, o passo ou o ângulo de qualquer rosca:

$$\text{ângulo da hélice} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{P}{D_2 \cdot \pi}$$

$$P \text{ (passo)} = \operatorname{tg} \alpha \cdot D_2 \cdot \pi$$

A medida que o ângulo da hélice aumenta, a força de atrito atuando entre a porca e o parafuso diminui, e podemos comprovar através do paralelogramo de forças, exigindo alguns critérios na aplicação do passo da rosca.

Usando  $\alpha < \frac{\pi}{12}$ , teremos um aperto adequado em parafusos de fixação.

FA = força de atrito

FN = força normal

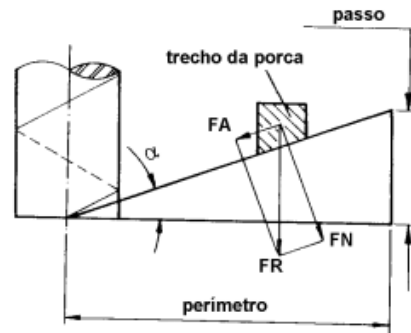
FR = força resultante

Na Figura 3.34 temos a representação gráfica da função  $P(x) = D_2 \cdot \pi \cdot \operatorname{tg} x$ , onde  $x$  é o ângulo da hélice da rosca do parafuso.

Observe que a "**largura P**" da rosca depende da medida do ângulo  $x$ , com diâmetro  $D_2$  dado. Neste caso, mantemos o diâmetro  $D_2$  do parafuso fixo e estamos variando o ângulo  $\alpha$ , representado por **x**.

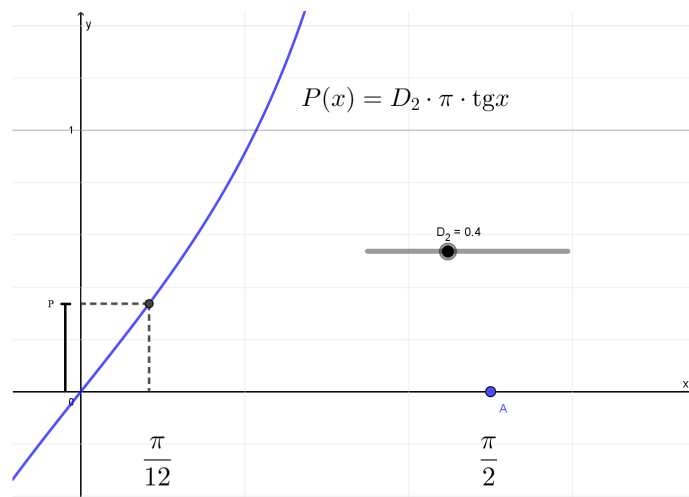


Figura 3.33: Força de atrito



<http://www.abraman.org.br/arquivos/72/72.pdf>. Página 14

Figura 3.34: Força de atrito



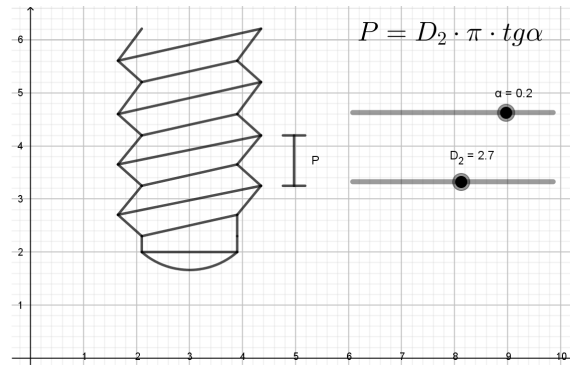
Na Figura 3.35 temos um modelo da representação do parafuso, seguindo as normas técnicas especificadas anteriormente, feito no GeoGebra, o qual foram atribuídos os valores do diâmetro  $D_2$  e do ângulo  $\alpha$ , enquanto que o passo  $P$  está em função de  $D_2$  e  $\alpha$ .

No modelo apresentado anteriormente, retratamos um modelo geral, citando os elementos básicos como diâmetro, hélice e passo. Temos vários tipos de roscas, das mais simples as mais complexas envolvendo outros elementos tais como filete da lâmina, diâmetro interno e externo, altura do filete, etc. Veja alguns exemplos de roscas:

- Rosca fina

Usada na construção de automóveis e aeronaves, principalmente porque nesses veículos ocorrem choques e vibrações que tendem a afrouxar a porca.

Figura 3.35: Passo do parafuso em função do ângulo



- Rosca média (normal)

Utilizada normalmente em construções mecânicas e em parafusos de modo geral, proporciona também uma boa tensão inicial de aperto.

- Rosca de transporte ou movimento

Possui passo longo e por isso transforma o movimento giratório num deslocamento longitudinal bem maior que as anteriormente citadas.

Não é nosso intuito esgotar todos os tipos de roscas muito menos tratar cada uma delas. Apenas mostrar o quanto é importante o estudo das razões trigonométricas nos vários ramos da geometria.

## Capítulo 4

### Considerações finais

O estudo e aplicação das razões trigonométricas nas diversas áreas do conhecimento tem um papel importante, principalmente para resolver problemas envolvendo a relação fundamental da trigonometria, a lei dos senos e dos cossenos.

O uso de novas tecnologias facilitou o entendimento do conteúdo e mostrou o quanto é importante criar uma cultura, dentro de sala de aula, principalmente na rede pública de ensino, do uso de software na educação como um todo.

A utilização do Geogebra, como ferramenta de apoio, contribuiu para demonstrar o círculo trigonométrico e definir as razões trigonométricas no círculo trigonométrico, assim como nas representações gráficas das funções circulares, fazendo animações e aplicações contextualizadas.

A importância de usar um software no ensino da trigonometria, no caso o GeoGebra, ampliou as infinitas possibilidades em que podemos tratar um problema, as vezes considerado até impossível de se resolver, mostrando através de figuras e gráficos suas variações em diferentes contextos, estabelecendo padrões e relacionando propriedades identificadas anteriormente. Fazendo com que conteúdos considerados de difícil entendimento se tornem claros e objetivos.

Desta forma, vimos o quanto é prazeroso estudar trigonometria e buscar problemas sobre esse assunto, envolvendo e trabalhando de maneira dinâmica no GeoGebra.

Este trabalho contribuiu muito para meu crescimento pessoal e profissional. Com certeza continuarei a aprimorar e ampliar meus estudos sobre trigonometria e o uso do GeoGebra.

# Referências Bibliográficas

- [1] BERLINGHOFF, WILLIAM E FERNANDO Q GOUVÊA. tradução: Elza Gomide, Helena Castro. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. 2<sup>a</sup> edição. São Paulo: Blucher, 2010.
- [2] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação Básica: SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores*. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008.
- [3] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Eureka! n<sup>o</sup> 3 Olimpíada Brasileira de Matemática - Outubro de 98*. Rio de Janeiro: CNPQ, 1998.
- [4] GUIDORIZZI, HAMILTON LUIZ. *Um curso de Cálculo, Vol 1 - 5<sup>a</sup> edição*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [5] <http://www.abraman.org.br/arquivos/72/72.pdf>. Acessado em 02/04/2021
- [6] IEZZI, GELSON; OSVALDO DOLCE; DAVID DEGENSZAJN; ROBERTO PÉRIGO; NILZE DE ALMEIDA. *Matemática: ciência e aplicações, 1<sup>a</sup> série: ensino médio, matemática. 2<sup>a</sup> ed.* São Paulo: Atual, 2004. - (Coleção matemática: ciência e aplicações).
- [7] IEZZI, GELSON; OSVALDO DOLCE; DAVID DEGENSZAJN; ROBERTO PÉRIGO; NILZE DE ALMEIDA. *Matemática: ciência e aplicações, 2<sup>a</sup> série: ensino médio, matemática. 2<sup>a</sup> ed.* São Paulo: Atual, 2004. - (Coleção matemática: ciência e aplicações).
- [8] LIMA, ELON LAGES; PAULO CEZAR PINTO CARVALHO; EDUARDO WAGNER; AUGUSTO CÉSAR MORGADO. *A Matemática do Ensino Médio Volume 1. Sexta edição*. Rio de Janeiro: SBM, 2003.
- [9] LONEY, SIDNEY LUXTON. *Plane Trigonometry*. USA: Columbia SC, 2018.
- [10] MOURA, DÁCIO G E EDUARDO F BARBOSA. “Trabalhando com projetos – Planejamento e gestão de projetos educacionais”. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2011.

- [11] PERRENOUD, PHILIPPE. *Dez novas competências para ensinar*. Tradução Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.
- [12] *Revista da Olimpíada / Universidade Federal de Goiás / Instituto de Matemática e Estatística. Nº 8.* (jun. 2013/ jun. 2014). Goiânia: Editora da UFG, 2013.
- [13] *Revista da Olimpíada / Universidade Federal de Goiás / Instituto de Matemática e Estatística. Nº 9.* (jul. 2014/ jset. 2015). Goiânia: Editora da UFG, 2014.
- [14] SMOLE, KÁTIA STOCCO; MARIA IGNEZ DINIZ; NEIDE PESSOA PESSOA; CRISTIANE ISHIHARA. *Jogos de matemática: de 1<sup>o</sup> ao 3<sup>o</sup> ano*. Porto Alegre: Grupo A, 2008.
- [15] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, . *Revista do Professor de Matemática: RPM. 2<sup>o</sup> quadrimestre de 2009.*. São Paulo: SBM,2009.
- [16] WAGNER, EDUARDO, *PIC: Programa de Iniciação Científica da OBMEP - Teorema de Pitágoras e Áreas*. Rio d Janeiro: IMPA, 2017.
- [17] VINAGRE,A.L.M. *Eratóstenes e a Medida do Diâmetro da Terra. Campinas: Unicamp, IFL. p.3 e 4.* Disponível em < [https:// www.ifl.unicamp.br/ lunazzi/F530\\_F590\\_F690\\_F809\\_F895/F809/F809\\_sem2\\_2002/940298\\_ AndreVinagre\\_Eratostenes.pdf](https://www.ifl.unicamp.br/lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2002/940298_AndreVinagre_Eratostenes.pdf) > Acesso em: 18 de fevereiro de 2021.