UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CHARGLES DOS SANTOS LAUVERS

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

VITÓRIA - ESPÍRITO SANTO

MAIO DE 2021

CHARGLES DOS SANTOS LAUVERS

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

VITÓRIA - ESPÍRITO SANTO
MAIO DE 2021

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter dado o seu Filho e por ter me permitido chegar até aqui.

Aos meus pais, Ademiro e Marina, pelo apoio e carinho e principalmente a minha mãe a quem me espelho para continuar no magistério.

A minha esposa Stéfhanny e minha filha Cecília, por todo amor, carinho, e compreensão em todos os momentos, vocês foram muito importantes para a realização desse sonho.

Aos meus irmãos Tiagles e Maraynna, por nunca terem medido esforços em ajudar-me nessa jornada.

Aos meus avós João, Adiner(in memoriam), Ozir e Adehir, seres humanos que me ensinaram o caminho da fé.

Aos amigos Ieda (in memorian), Amanda, Ana Clara, Kim, Dani, Leonardo, Milena, Marcos, Joelma, Nilza, Jucenildo, Júnior, Bruna, Elma e Neuza.

Ao meu orientador, professor Dr. Domingos Sávio Valério Silva, pelo incentivo, pelo conhecimento compartilhado, pela paciência, pelas palavras sábias e encorajadoras as quais não seria possível à conclusão deste trabalho.

Aos demais professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, em especial aos que atuam no PROFMAT: Dr. Florêncio, Dr. Valmecir, Dra Magna, Dr. Moacir, Dra. Rosa, pelo conhecimento compartilhado.

Aos meus colegas e amigos do PROFMAT, pelos momentos de alegria, de apoio e incentivo, que tornou essa jornada de dois anos muito mais agradável, em especial aos meus amigos Bruno e Fábio.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

Porque Deus amou tanto o mundo que deu seu Filho único, para que todo o que nele crer não pereça, mas tenha a vida eterna (João 3:16).

RESUMO

O objetivo deste trabalho é mostrar ao aluno/professor que o tema Análise Combinatória não se resume a fórmulas, mas por raciocínio simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas. Esse será o objetivo principal deste trabalho, mostrar que as fórmulas fazem parte do processo e não o principal centro. Assim será valorizada a metodologia de resolução de problemas, em que será apresentado o exercício e a partir/através dele a teoria será introduzida. Com a evolução dos exercícios, resolveremos problemas mais desafiadores. Então a exposição deste trabalho desenvolverá os principais métodos de contagem apresentados durante o ensino médio.

Palavras-chaves: Análise Combinatória. Metodologia de Resolução de Problemas. Métodos de Contagem.

ABSTRACT

The objective of this work is to show the teacher/student that the theme Combinatorial Analysis is not to be summarized by formulas, but by simple reasoning in the vast majority of two cases without requiring the use in complicated formulas. This should be the main objective of this work, to show that the formulas take part of the process and not the main center of it. Thus, the problem solving methodology will be valued, in which the exercise will be presented and through it the theory will be introduced. With the evolution of the exercises, we will solve more challenging problems. Thus, the exhibition of this work will develop the main methods of counting, which have been presented during the period of high school.

Keywords: Combinatorial Analysis - Problem Resolution Methodology – Counting Methods

LISTA DE DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FOTOS

LISTA DE SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCNEM	Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Médio
PROFMAT	Mestrado profissional em matemática em rede nacional
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

LISTA DE SÍMBOLOS

$!$: Símbolo do Fatorial

P_n: Número de Permutação simples de n elementos.

$P_n^{\alpha,\beta,\lambda}$: Número de Permutações de n objetos, dos quais α são iguais entre si, β são iguais entre si, λ são iguais entre si.

C_n^p : Número de Combinações simples de n elementos tomados p a p.

A_n^p : Número de Arranjos simples de n elementos, tomados p a p.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante minha caminhada no magistério como professor de Matemática o assunto Análise Combinatória sempre foi temido, pois, a minha visão eram as fórmulas. Tinha o hábito de classificar qualquer problema de combinatória em três tipos clássicos: arranjos, permutação ou combinação.

Em 2011 realizei o exame nacional de acesso ao PROFMAT, não passei. Anos seguintes 2012, 2013 e 2014 não consegui ser aprovado. Fazendo o levantamento destas avaliações percebi que o meu problema era Análise Combinatória, pois, ao examinar as resoluções das provas observei o uso inteligente do princípio multiplicativo que permitia resolver a maioria dos problemas, portanto só em classificar os problemas de contagem em três tipos clássicos é desastroso.

Durante os anos de 2014 e 2015 me preparei para estudar Análise Combinatória. O primeiro passo foi adquirir o livro “A Matemática do Ensino Médio Volume 2” da SBM, dentre outros, mas este citado foi o principal.

A característica comum destes livros foi que o tema “Análise Combinatória” estava baseado na metodologia de resolução de problemas, onde se apresenta o problema e a partir dele são propostos a teoria o que difere da prática habitual, em que problemas (ou, mais frequentemente, exercícios de cálculo) servem apenas para verificar se o aluno sabe reproduzir o que lhe foi ensinado.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000, em [3] p. 129) estabelecem as estratégias para a ação de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações-problemas. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000, em [6], p. 126) estabelecem a Análise Combinatória como uma possibilidade de uma abordagem mais completa da probabilidade, mas por si só permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório.

Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo da situação.

Considerando a minha experiência no estudo de Análise Combinatória e o que foi citado pelo PCNEM, o enfoque deste trabalho é mostrar para o aluno/professor a importância da contagem a partir da metodologia de resolução de problemas e que as fórmulas são consequências do raciocínio combinatório desenvolvido frente à problemas diversos. O presente trabalho foi dividido em quatro capítulos para expor uma proposta de aprendizagem no estudo da Análise Combinatória para o ensino médio.

O primeiro capítulo traz uma breve abordagem da metodologia de resolução de problemas, indicando que tal proposta corrobora na abordagem de conceitos, ideias e estratégias no processo de resolução dos problemas de contagem.

O segundo capítulo relata os principais métodos de contagem abordados no ensino médio por meio de 40 exercícios. Com a resolução dos primeiros exercícios, se permitirá a utilização inteligente do princípio multiplicativo e partir dele, os conceitos de permutação e combinação serão aplicados, assim as fórmulas serão uma consequência do raciocínio combinatório.

No terceiro capítulo será apresentada uma miscelânea de exercícios com soluções, abordando todos os métodos de contagem, estudado no capítulo dois. E por fim, o quarto capítulo traz uma reflexão sobre arranjo e o porquê tal trabalho não o abordou, uma vez que a maioria dos livros do ensino médio desenvolve esse método de contagem com vários exercícios.

1. UMA BREVE ABORDAGEM DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), a resolução de problemas dá oportunidade ao aluno de ampliar seus conhecimentos referentes a conceitos e procedimentos matemáticos. Resolver problemas faz parte da vida humana. Decidir qual roupa vai usar de acordo com a estação, qual faculdade estudar, com quem casar dentre outras escolhas. Chi e Glazer (1992, p 250) aduzem que:

> *[...] desde a infância somos chamados a solucionarmos problemas que o mundo nos apresenta. Adquirimos informações sobre o mundo e as organizamos em estrutura de conhecimento sobre objetos, eventos, pessoas e nós mesmos, que são armazenadas em nossas memórias. Essas estruturas de conhecimento compreendem corpos de entendimento, modelos mentais, convicções e crenças que influenciam o modo como conectamos nossas experiências e o modo como solucionamos os problemas com os quais nos confrontamos na vida cotidiana, na escola, em nosso emprego e nos momentos de lazer (CHI; GLZER, 1992 p.250).*

A resolução de problemas tem sido central desde a Antiguidade e ganhou força no campo de pesquisa em Educação Matemática a partir dos trabalhos de Polya.

Foto 1: George Polya

Fonte: https://www.facebook.com/obaricentrodamente/photos/a.15522848115088

George Polya (In DANTE, 2005, p.24) afirma que a resolução de problemas é a coluna vertebral da instrução matemática desde o papiro de Rhind. Segundo DANTE (2005, p.24) pode-se destacar cinco etapas importantes na resolução de um problema:

I. **Compreensão do problema:** É o momento de leitura e interpretação cuidadosa do problema. Depois da leitura cuidadosa pode ser feito alguns questionamentos:

a) Quais são os dados e as condições do problema?
b) O que se pede, o que se pergunta no problema?
c) É possível fazer uma tabela, uma figura ou um diagrama?
d) É possível estimar uma resposta?

II. **Elaboração de um plano de solução**

a) Qual é seu plano para resolver o problema?
b) Que estratégias você tentará desenvolver?
c) Você se lembra de um problema semelhante mais simples que pode ajudá-lo a resolver esse problema?
d) Tente organizar os dados em tabelas, gráficos ou diagramas.
e) Tente resolver o problema por partes.

III. **Execução do plano**

a) Execute o plano elaborado.
b) Efetue todos os cálculos indicados no plano.
c) Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

IV. **Verificação ou retrospectiva**

a) Você leu e interpretou corretamente o problema?
b) Você elaborou um plano razoável e que pode ser feito?
c) Executou com precisão o que foi planejado? Conferiu todos os cálculos?
d) Há alguma maneira de “tirar a prova” para verificar se você acertou?
e) A solução está correta?

f) Existe outra maneira de resolver o problema?

g) É possível usar a estratégia empregada para resolver problemas semelhantes?

V.Emissão da resposta

a) A resposta é compatível com a pergunta?

b) Você escreveu a resposta por extenso, respondendo à pergunta do problema?

A frente será abordada como essas etapas são importantes na compreensão dos problemas de contagem. É importante destacar que durante essas etapas errar é permitido, aprendemos muito por tentativa e erro. É desejável que o aluno/professor exponha soluções erradas, pois muitas vezes aprendemos mais com erros do que com os acertos ao resolver problemas de contagem.

2. MÉTODOS DE CONTAGEM

Na maioria dos exercícios de contagem as técnicas usadas são baseadas nas operações elementares de soma, subtração, multiplicação e divisão, o diferencial está na postura de compreender o problema e conseguir visualizar o processo sistemático de resolução.

Exercício 2.1: Temos três cidades A, B e C. Existem 3 rodovias que ligam A com B e 2 que ligam B com C. Partindo de A e passando por B, de quantas formas podemos chegar até C?

Solução: É importante ter um procedimento sistemático para listar todos os possíveis caminhos, sem repeti-los. Para tal, deve-se identificar as diferentes decisões a serem tomadas e examinar todas as possibilidades para cada uma delas.

1º) escolher o caminho de A até B;
2º) a seguir, escolher o caminho de B até C.

A primeira decisão pode ser feita de 3 modos diferentes. Uma vez tomada esta decisão, a segunda decisão pode ser feita de 2 modos diferentes. Pode-se, então, listar todos os caminhos possíveis, que são 6, de acordo com a figura abaixo.

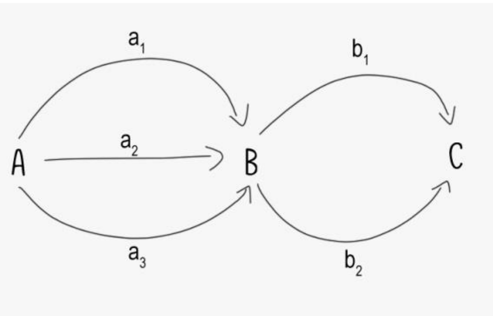


Figura 1: Caminhos entre três cidades.

I. A até B os caminhos a_1, a_2 e a_3.

II. B até C os caminhos b_1 e b_2.

Se o caminho de A até B for o a_1, então de A até C serão (a_1, b_1) e (a_1, b_2).
Se o caminho de A até B for o a_2, então de A até C serão (a_2, b_1) e (a_2, b_2).
Se o caminho de A até B for o a_3, então de A até C serão (a_3, b_1) e (a_3, b_2).

Assim tem-se um total de $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$.

Exercício 2.2: Uma bandeira é formada por 4 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e preto. Se cada listra ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

Solução: Colorir a bandeira equivale a escolher a cor de cada listra. Há 3 modos de escolher a cor da primeira listra.

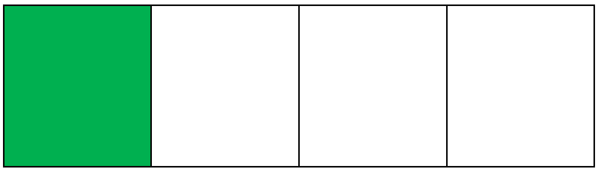


Figura 2: Listra de cor verde.

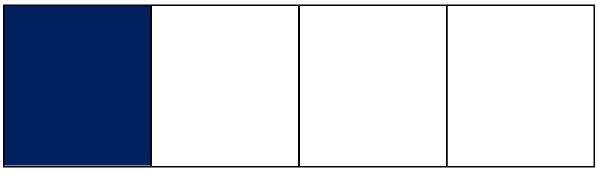


Figura 3: Listra de cor azul.

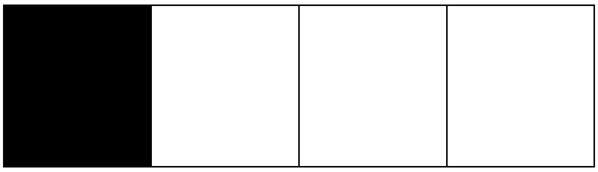


Figura 4: Listra de cor preta.

Para colorir a segunda listra é necessário ter tomado a decisão de colorir a primeira listra.

I. Se a primeira listra for verde a segunda só pode ser colorida pelas cores azul ou preta.

II. Se a primeira listra for azul a segunda só pode ser colorida pelas cores verde ou preta.

III. Se a primeira listra for preta a segunda só pode ser colorida pelas cores azul ou verde.

Observando o procedimento sistemático, pode-se notar que a partir da primeira listra cada outra listra terá 2 modos de escolher a cor de cada uma das outras 3 listras. Portanto a resposta será $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$.

Exercício 2.3: Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com 1, 4 e 8?

Solução: Observe que a palavra "**distintos"** tem aqui o significado de **diferentes**; logo, números como 444 ou 118 não podem ser contados.

Abaixo, segue a resolução do problema utilizando alguns recursos.

1º) Escrever os números.

148	418	814
184	481	841

Tem-se, então, 6 números diferentes.

Observe que a estratégia foi escrever os números em ordem crescente.

2º) Usar o diagrama de árvore.

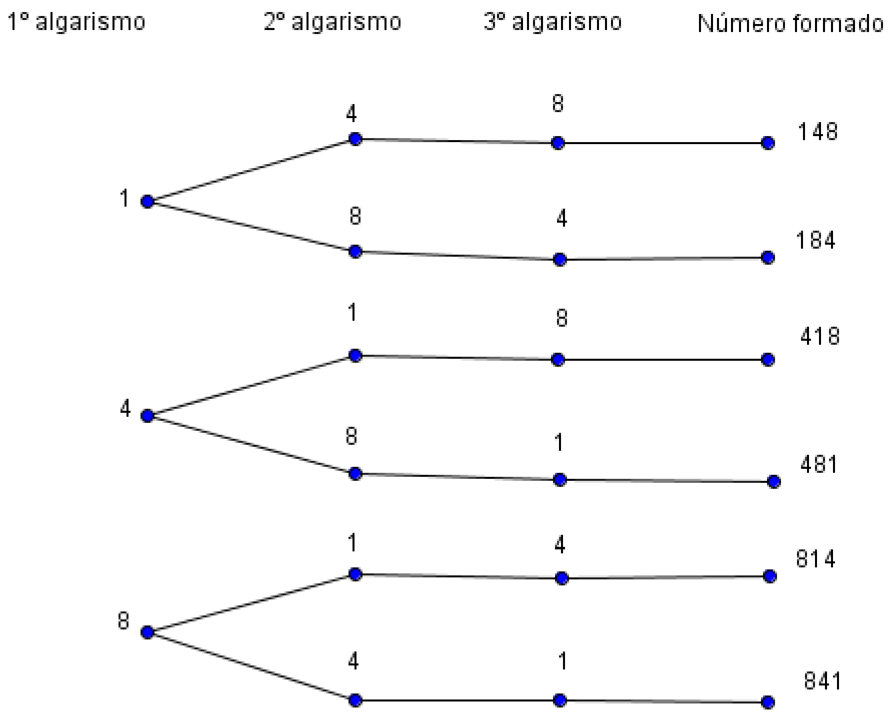


Figura 5: ilustração do diagrama de árvore do exercício 2.3.

Observa-se que além de mais esclarecedor, o diagrama de árvore também permite visualizar as 6 possibilidades. Nesta solução, usou-se o diagrama, uma das propostas na resolução de problemas.

Ao resolver os exercícios anteriores, utilizou-se alguns procedimentos de representação das contagens. De forma explícita usou-se o *Princípio Multiplicativo* ou *Princípio Fundamental da Contagem.*

O *Princípio Multiplicativo* diz que, se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy.

Para entender o *Princípio Multiplicativo*, deve-se retomar o **Exercício 2.3** e resolvê-lo pelo princípio multiplicativo.

1ª decisão: Escolha do dígito das centenas. O primeiro dígito pode ser escolhido de 3 modos.

2ª decisão: O segundo dígito poder ser escolhido de 2 modos, pois não pode ser igual ao primeiro dígito. O terceiro dígito pode ser escolhido de 1 modo, pois não pode ser igual, nem ao primeiro, nem ao segundo dígito. Portanto a resposta será $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Os próximos exercícios serão resolvidos usando de forma explícita o princípio multiplicativo.

Exercício 2.4. Um salão de festas tem 8 portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair dele uma única vez?

Solução: A pessoa tem que tomar duas decisões, entrar e sair do salão. Para entrar ele tem 8 opções, tomada a decisão de entrar, agora tomará a decisão de sair que também é 8. Logo pelo Princípio Multiplicativo, o número de modos diferentes para entrar e sair do salão uma única vez é $8 \times 8 = 64$.

Exercício 2.5. Quantos são os números de três dígitos distintos?

Antes da solução deste exercício é importante lembrar que no contexto da Análise Combinatória sobre formação de números, os números da forma 05123, 04 e 013 tem respectivamente 4, 1 e 2 algarismos, pois o zero não tem valor posicional. Isto foi citado, pois em questões de senhas de banco, placas de automóveis e entre outros, podem começar com o zero.

Solução: Tem-se que tomar três decisões, escolher o dígito da centena, da dezena e da unidade. O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a 0. O segundo dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro dígito. O terceiro dígito pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual, nem ao primeiro, nem ao segundo dígito. Portanto a resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$.

Nesses exercícios, percebe-se algumas estratégias para resolver problemas de Combinatória. Lima et al. (2006, p.90) comenta sobre essas estratégias, sendo conhecidas como "axiomas de Morgado"[1].

1) **Postura**. Deve-se sempre colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No **exercício 2.2**, colocou-se no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no **exercício 2.3**, no papel da pessoa que deveria escrever o número.

2) **Divisão.** Deve-se, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada região; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos. Entrar e sair do salão foi dividido em escolher o número de portas para entrar e, a seguir, em escolher o número de portas para sair. No **exercício 2.5** em que se pede a quantidade de números de três dígitos distintos, observe como é possível deixá-lo complicado por um erro de estratégia. Começando a escolha dos dígitos pelo último dígito, há 10 modos de escolher o último dígito. Em seguida, há 9 modos de escolher o dígito central, pois não pode repetir o dígito já usado. Agora, destaca-se um impasse: de quantos modos é possível escolher o primeiro dígito? A resposta é "depende". Se não tiver usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro dígito, pois não poderá usar nem o 0, nem os dois dígitos já usados nas demais casas; se já tiver usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro dígito. Haverá exercícios que o "depende" vai surgir, daí terá que dividir o problema em casos, mas se puder evitá-lo a resolução se torna mais simples. Para evitar, na medida do possível, impasses como o acima, uma outra estratégia importante é:

3) **Não adiar dificuldades.** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for

[1] Augusto César de Oliveira Morgado foi professor da Escola Nacional de Ciências Estatísticas (ENCE), onde foi chefe do Departamento de Estatística Teórica e professor adjunto, por concurso em que obteve 1º lugar, da Escola Naval. Foi professor adjunto da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) e foi professor titular da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Foi professor de vários cursos de extensão para professores, organizados pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), pela VITAE, pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), pelo Sindicato dos Professores de Volta Redonda e Barra Mansa e pelo Sindicato dos Professores do Município do Rio de Janeiro. Foi professor de matemática do Colégio Pedro II 1 e do Colégio Santo Antônio Maria Zaccaria.

mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No **exercício 2.5**, a escolha do primeiro dígito era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro dígito não pode ser igual a 0. Essa é, portanto, a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar e, conforme acabou de ser abordado, postergá-la só serve para causar problemas.

A partir da metodologia de resolução de problemas com foco em combinatória, analisar-se-á os próximos exercícios aplicando as estratégias citadas acima.

Exercício 2.6. Uma vila tem 2 saídas ao norte e 2 saídas ao sul apenas. De quantas maneiras é possível sair da vila?

Solução: Para sair da vila deve-se escolher uma das saídas ao norte ou uma das saídas ao sul. Logo há $2+2=4$ saídas. O interessante neste exercício foi que a resposta 4 não foi obtida por uma multiplicação, mas por uma adição. Observe que neste exercício foi necessário tomar uma única decisão.

Além do *Princípio Multiplicativo*, existe o ***Princípio Aditivo***. Nele, **dados dois acontecimentos independentes (quando a ocorrência de um deles não afeta a ocorrência do outro), de tal modo que um deles pode ocorrer de $\boldsymbol{m}$ maneiras distintas e o outro, de $\boldsymbol{n}$ maneiras distintas, a quantidade de maneiras de ocorrer um acontecimento ou o outro acontecimento é dado por $\boldsymbol{m+n}$.**

Exercício 2.7. Numa lanchonete há 4 opções de refrigerante, 3 opções de suco e 2 marcas de água mineral. De quantas maneiras uma pessoa pode escolher uma bebida?

Solução: É necessário escolher uma bebida entre as opções. Pode-se escolher um refrigerante (4 possibilidades) ou um suco (3 possibilidades) ou uma água mineral (2 possibilidades). Observe que a solução do problema é obtida com uma das escolhas. Assim o número total de possibilidades é $4+3+2=9$. Com os dois exercícios apresentados acima, viu-se que o *Princípio Aditivo* constitui como uma ferramenta básica para resolver problemas de contagem.

Exercício 2.8. Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

1ª Solução: Listar os números ou construir uma árvore de possibilidade ajuda compreender a forma dos números que se deseja, mas para contar todos é inconveniente. Portanto, usar-se-á o princípio multiplicativo. Há 5 modos de escolher o último dígito. Note que ao começar pelo último dígito, que é o mais restrito; o último dígito só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8. Em seguida, passa-se ao primeiro dígito, pois também possui restrição (não pode começar com o 0).

De quantos modos pode-se escolher o primeiro dígito? A resposta é "depende": se não tiver usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro dígito, pois não poderá usar nem o 0 nem o dígito usado na última casa; se tiver usado o 0, haverá 9 modos de escolher o primeiro dígito, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa. Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas. Usando a estratégia de dividir o problema em dois casos, tem-se:

1º) os números que terminam em 0.

Para os que terminam em 0, há 9 modos de escolher o primeiro dígito e 8 modos de escolher o dígito da dezena e 1 modo de escolher o dígito da unidade. Pelo princípio multiplicativo há $9 \times 8 \times 1 = 72$ números que terminam em 0.

2º) os números que **não** terminam em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último dígito, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o dígito da dezena. Há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números que não terminam em 0. Os números pares de três dígitos distintos podem terminar em 0 **ou** não terminar em 0. Casos como este, aplicando o *Princípio Aditivo,* tem-se: A resposta é $72 + 256 = 328$.

2ª Solução: Pode-se inicialmente pensar em todos os números de três dígitos distintos. No **Exercício 2.5** encontrou-se a resposta 648. Esses 648 números podem ser classificados em pares ou ímpares, onde um número par não pode ser ímpar ao mesmo tempo. Entre esses 648 números, a quantidade de ímpares é fácil de ser calculada. Observe:

Há 5 modos de escolher o último dígito. Note que começando pelo último dígito, que é o mais restrito; o último dígito só pode ser 1, 3, 5, 7 ou 9.

Há 8 modos de escolher o primeiro dígito, pois não se pode usar nem o 0 nem o dígito usado na última casa.

Há 8 modos de escolher o segundo dígito, pois não se pode usar nem o dígito da primeira casa e nem o dígito da última casa.

Há $5 \times 8 \times 8 = 320$ números ímpares de três dígitos distintos.

Portanto a resposta é $648 - 320 = 328$.

Nas duas soluções nota-se dois raciocínios.

a) **Raciocínio construtivo.** O raciocínio que resolve a maior parte dos problemas de combinatória.

b) **Raciocínio destrutivo.** O raciocínio do tipo, contar a mais e depois descontar o que não serve e foi contado indevidamente.

Embora em certos casos seja melhor usar um raciocínio destrutivo, o aluno/professor só se sentirá seguro quando dominar o raciocínio construtivo.

Exercício 2.9. Dispondo de 4 cores (AMARELA, AZUL, VERDE E VERMELHA) para colorir o mapa da figura, com os países “P”, “Q”, “R” e “S”, de modo que países cuja fronteira é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor. De quantas maneiras é possível colorir o mapa?

Solução:

P	Q
R	S

Figura 6: Ilustração do exercício 2.9.

a) Começando a colori pelo país Q, tem-se 4 modos de o fazer, supondo que a cor escolhida foi a AMARELA**.**

P	Q
R	S

Figura 7: Ilustração do exercício 2.9.

b) O país P pode ser colorido de 3 modos, pois não se pode usar a mesma cor de Q. Supondo que a cor escolhida foi a AZUL.

P	Q
R	S

Figura 8: Ilustração do exercício 2.9.

c) O país R pode ser colorido de 3 modos, pois não se pode usar a mesma cor de P. Supondo que a cor escolhida foi a VERMELHA.

P	Q
R	S

Figura 9: Ilustração do exercício 2.9.

d) O país S pode ser colorido de 2 modos, pois não se pode usar a mesma cor de Q e R. Será colorida de VERDE.

P	Q
R	S

Figura 10: Ilustração do exercício 2.9.

Pelo princípio multiplicativo tem-se, então, $4 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$.

Ao resolver o problema acima pela primeira vez, este autor também encontrou a resposta 72. Mas essa resposta está errada, o correto é 84. Daí, surgiram as seguintes dúvidas ao retornar e analisar cada passo da resolução do problema.: onde está o erro? Qual situação foi deixada de contar? E no **item d),** encontrou-se o motivo do erro, observe:

d) O país S pode ser colorido de 2 modos, pois não se pode usar a mesma cor de Q e R. Será colorida de VERDE.

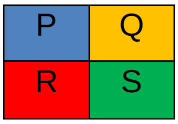


Figura 11: Ilustração do exercício 2.9.

e) O país S poderia ser colorido de 3 modos se o país R fosse colorido da mesma cor de Q, neste caso de AMARELO.

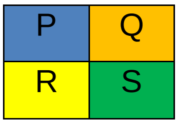


Figura 12: Ilustração do exercício 2.9.

Então a cor do país S depende da cor escolhida do país R. Ou seja, chegou-se a um impasse. Esta situação é análoga a do **Exercício 2.8.** Assim, divide-se o problema em dois casos.

I) A cor do país Q é igual à cor do país R.

a) Ao começar colorindo o país Q, tem-se 4 modos de fazer isso, supondo que a cor escolhida foi a AMARELA**.**

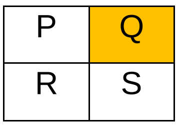


Figura 13: Ilustração do exercício 2.9.

b) O país R pode ser colorido de 1 modo, pois sua cor é igual a cor do país Q.

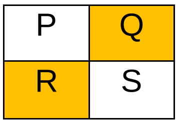


Figura 14: Ilustração do exercício 2.9.

c) O país P pode ser colorido de 3 modos, pois não se pode usar a mesma cor de Q. Suponha que se escolheu a cor AZUL.

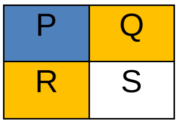


Figura 15: Ilustração do exercício 2.9.

d) O país S pode ser colorido de 3 modos, pois não se pode usar a mesma cor de Q e de R. Pelo princípio multiplicativo obtém-se $4 \times 1 \times 3 \times 3 = 36$.

II) A cor do país Q é diferente da cor do país R.

a) Ao começar colorindo o país Q, tem-se 4 modos de fazer isso, suponha que a cor escolhida foi a AMARELA.

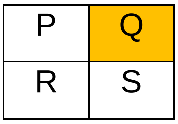


Figura 16: Ilustração do exercício 2.9.

b) O país R pode ser colorido de 3 modos, pois sua cor é diferente da cor do país Q. Suponha que a cor escolhida foi a VERMELHA.

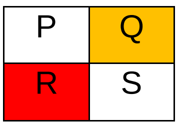


Figura 17: Ilustração do exercício 2.9.

c) O país P pode ser colorido de 2 modos, pois não se pode usar a mesma cor de Q e de R. Suponha que a cor escolhida foi a AZUL.

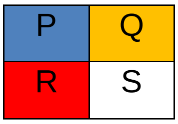


Figura 18: Ilustração do exercício 2.9.

d) O país S pode ser colorido de 2 modos, pois não se pode usar a mesma cor de Q e de R. Pelo princípio multiplicativo tem-se $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$.

Observe que para colorir os países os dividiu em dois casos independentes.

- **A cor do país Q é igual a cor do país R**

ou

- **A cor do país Q é diferente a cor do país R**

Portanto pelo princípio aditivo a resposta é $\mathbf{36 + 48 = 84}$.

Observe que foi utilizada uma estratégia muito válida na resolução de problemas. Lembrar-se de um problema semelhante mais simples pode ajudar na resolução de exercícios. No exercício acima, usou-se a estratégia análoga a do **Exercício 2.8.**

É importante ressaltar no **Exercício 2.9** o erro cometido inicialmente na resolução do problema, tal erro leva ao questionamento, a refletir em possibilidades e outras estratégias a serem tomadas, pois como em outras áreas da Matemática, muitas vezes aprende-se mais com erros do que com os acertos ao resolver problemas de contagem. Nesse mesmo sentido, DANTE (2005, p.24) afirma que:

> *[...] Deixe claro que é permitido errar.* ***Aprendemos muito por tentativa e erro e não por tentativa e acerto.*** *O erro deve ser encarado como ponto de apoio para uma ideia nova. Quando está implícito que é "proibido errar", o aluno não se arrisca, não se aventura, não gera novas ideias, não explora caminhos novos e diferentes.*

Antes da resolução de mais exercícios, é importante destacar uma notação muito usada em problemas de contagem por simplificar algumas contas.

Dado um número natural n, seja $n!$ (leia n fatorial)

o produto $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times (n-1) \times n$.

Em situações envolvendo contagens, é comum aparecer multiplicações entre números naturais consecutivos.

Para o caso em que $n = 0$ ou $n = 1$, define-se que:

$0! = 1$ e $1! = 1$

Observe alguns exemplos:

a) $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

b) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

c) $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

d) $3! + 4! = 6 + 24 = 30 \;\; (3! + 4! \neq 7!)$

e) $\frac{7!}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

f) $\frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

g) $\frac{7!}{(3!)x(4!)} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35$

Note ainda que se pode escrever $n! = n \times (n-1)!$, para $n \geq 1$.

Exercício 2.10. Ulisses (U), Fábio(F), Eduardo (E) e Sávio (S) são alunos do 9º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Eles vivem brigando por causa da posição em que cada um quer sentar. Para resolver o problema, o professor sugeriu um rodízio completo dos alunos na fileira, trocando a disposição todos os dias. Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de os quatro meninos se acomodarem nas quatro carteiras?

Solução: Inicialmente, vamos destaca-se todas as possibilidades de acomodação

1ª	2ª	3ª	4ª
U	F	E	S
U	F	S	E
U	E	F	S
U	E	S	F
U	S	E	F
U	S	F	E

Tabela 1: Filas

1ª	2ª	3ª	4ª
F	U	E	S
F	U	S	E
F	E	U	S
F	E	S	U
F	S	U	E
F	S	E	U

Tabela 2: Filas

1ª	2ª	3ª	4ª
E	U	F	S
E	U	S	F
E	F	U	S
E	F	S	U
E	S	U	F
E	S	F	U

Tabela 3: Filas

1ª	2ª	3ª	4ª
S	U	F	E
S	U	E	F
S	F	U	E
S	F	E	U
S	E	U	F
S	E	U	F

Tabela 4: Filas

Observe que uma disposição difere das demais apenas pela ordem em que os quatro alunos vão se sentar nas quatro carteiras. Assim, cada maneira de arrumar os meninos na fileira corresponde a um **agrupamento ordenado** (sequência) formado por quatro elementos. Portanto, pode-se afirmar que cada disposição na tabela corresponde a uma **permutação** dos quatro alunos.

Utilizando o Princípio Multiplicativo para contar o número de maneiras tem-se:

a) Para ocupar a primeira carteira da fileira, há 4 opções.

b) Definida a primeira posição, há 3 opções para escolher o menino que vai sentar na segunda posição.

c) Definidas a primeira e a segunda posição, há duas opções de escolha para o menino que vai sentar na terceira carteira.

d) Escolhidas a primeira, a segunda e a terceira posição, o menino que vai sentar na última carteira fica determinado de maneira única.

Assim, há $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ possibilidades. Desse modo, são necessários 24 dias para esgotar todas as possibilidades de os quatro meninos se acomodarem na fileira.

Este é um problema clássico de contagem chamado *problema das permutações simples*.

A palavra “permutar” significa trocar de posição[2].

Permutação simples de n elementos distintos é qualquer agrupamento ordenado formado por esses n elementos. Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de permutações simples de n elementos é $n!$, que indicaremos por:

$$P_n = n!$$

Neste contexto, a palavra **simples** caracteriza que em cada lista não haverá repetição de elementos.

Exercício 2.11. Quantos são os anagramas da palavra UFES?

Antes da solução é necessário apontar o significado de anagrama no contexto da Análise Combinatória. Anagrama pode ser definido como palavra formada pela alteração da ordem das letras[3]. Um anagrama da palavra UFES é a palavra EFUS.

Solução: Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 4 letras. O número de anagramas é $P_4 = 4! = 24$.

A exposição consecutiva dos **exercícios 2.10** e **2.11** é demonstrar que muitos problemas de contagem usam da ideia de anagramas. Dominar exercícios de anagrama possibilita um leque de ideias para resolver problemas complicados de contagem.

---

[2] BALESTRI, Rodrigo Matemática: interação e tecnologia, volume 2, 2016, página 125.
[3] BALESTRI, Rodrigo Matemática: interação e tecnologia, volume 2, 2016, página 127.

Exercício 2.12. Com relação à palavra PROFMAT:

a) Quantos anagramas existem?
b) Quantos anagramas começam por T?
c) Quantos anagramas começam por T e terminam com A?
d) Quantos anagramas começam por consoante?
e) Quantos anagramas têm as letras PRFMT juntas e nessa ordem?
f) Quantos anagramas têm as consoantes juntas?

Solução:

a) Cada anagrama é uma permutação das letras P, R, O, F, M, A, T. Logo, o número procurado é $P_7 = 7! = 5040$.

b) T __ __ __ __ __ __

Neste caso tem-se somente que permutar as letras P, R, O, F, M, A. Logo, o número procurado é $P_6 = 6! = 720$.

c) T __ __ __ __ __ A

Neste caso tem-se somente que permutar as letras P, R, O, F, M. Logo, o número procurado é $P_5 = 5! = 120$.

d) Para a primeira letra deste anagrama temos 5 possibilidades de escolhas. Escolhido a primeira letra restam então 4 consoantes e 2 vogais para permutar, ou seja, há P_6 maneiras.

Pelo princípio multiplicativo tem-se $5 \times P_6 = 5 \times 720 = 3600$.

e) Se as letras PRFMT devem estar juntas e nessa ordem, então elas funcionam como "uma letra" que deve ser permutada com A e O. Logo, o número de permutações é $P_3 = 3! = 6$.

f) De início parece que é a mesma pergunta anterior, mas não é, pois não há necessidade de as consoantes estarem juntas na mesma ordem, basta estar juntas. Se as letras PRFMT devem estar juntas, então elas funcionam como "uma letra" que deve ser permutada com A e O.

Logo, o número de permutações é $P_3 = 3! = 6$.

Todavia, em cada uma dessas permutações, as consoantes podem se permutar entre si, $P_5 = 5! = 120$ formas.

Logo, pelo princípio multiplicativo, o número de anagramas nessas condições é $P_3 \times P_5 = 6 \times 120 = 720$.

Exercício 2.13. (PROFMAT 2014 – questão 27): Uma pessoa vai visitar cinco locais na cidade do Rio de Janeiro: Cristo Redentor, Pão de Açúcar, Teatro Municipal, Candelária e Jardim Botânico. De quantas maneiras diferentes pode planejar a sequência das cinco visitas, se não quiser começar nem terminar pelo Jardim Botânico?

Solução: Excluindo o Jardim Botânico e ordenando os quatro outros pontos turísticos encontra-se $P_4 = 24$ possibilidades de roteiros distintos. Para cada um destes roteiros, o Jardim Botânico pode ser “encaixado” em três posições, logo para cada uma das 24 possibilidades consideradas anteriormente, tem-se três roteiros distintos. Portanto, há $3 \times 24 = 72$ possibilidades no total.

Exercício 2.14. Tenho 6 livros diferentes de Português e 6 livros diferentes de Matemática. Quero colocar os livros de Português e os de Matemática na prateleira de uma estante. De quantas maneiras posso fazer isso, de modo que livros da mesma matéria fiquem juntos?

Solução: Considerando os 6 livros de Português como um só livro (P), os 6 de Matemática como um só livro (M). Deve-se, então, permutar P e M, em um total de $P_2 = 2! = 2$ configurações. Mas, para cada uma dessas configurações, devem-se permutar os livros em P e os livros em M, totalizando $P_2 \times P_6 \times P_6 = 2 \times 720 \times 720 = 1036800$.

Mesmo que muitos exercícios de combinatória possam ser resolvidos pelo princípio básico (Aditivo ou Multiplicativo) é importante aplicar de forma direta a ideia das permutações simples. Por isso a importância de fazer muitos exercícios de contagem, pois, assim, há a possibilidade de se deparar com problemas que exigem um tempo maior de resolução, daí associar problemas já selecionados facilitam a abordagem. Um exemplo disso é o próximo exercício. Um problema fácil de compreender, mas dá um pouco de trabalho.

Exercício 2.15. Permutando-se as letras T, R, A, P, O, S, são formados 720 anagramas. Esses anagramas são colocados em ordem alfabética.

a) Qual é a posição correspondente a PRATOS?

b) Que anagrama ocupa a 500^{a} posição?

Solução:

a) Começando por A, há $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

Começando por O, há $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

Começando por PA, há $P_4 = 4! = 24$ anagramas.

Começando por PO, há $P_4 = 4! = 24$ anagramas.
Começando por PRAO, há $P_2 = 2! = 2$ anagramas.

Começando por PRAS, há $P_2 = 2! = 2$ anagramas.

Assim, o anagrama PRATOS é precedido de:

$120 + 120 + 24 + 24 + 2 + 2 = 292$ anagramas, e sua posição é a 293^{a}.

b) Da 1^{a} à 120^{a} posição têm-se os anagramas que começam por A.

Da 121^{a} à 240^{a} posição têm-se os anagramas que começam por O.

Da $241^{\underline{a}}$ à $360^{\underline{a}}$ posição têm-se os anagramas que começam por P.

Da $361^{\underline{a}}$ à $480^{\underline{a}}$ posição tem-se os anagramas que começam por R.

Começando por SA tem-se: $P_4 = 4! = 24$ anagramas (posição $481^{\underline{a}}$ até a $504^{\underline{a}}$). As últimas posições (que começam por SAT) são:

$504^{\underline{a}}$ → SATRPO

$503^{\underline{a}}$ → SATROP

$502^{\underline{a}}$ → SATPRO

$501^{\underline{a}}$ → SATPOR

$500^{\underline{a}}$ → SATORP

$499^{\underline{a}}$ → SATOPR

Logo, o anagrama procurado é SATORP.

Nos próximos exercícios será calculada a quantidade de permutações quando alguns elementos se repetem. No contexto da Análise Combinatória esse método de contagem é definido como **Permutação com Repetição**[4].

Exercício 2.16. Calcule o número de anagramas de cada uma das palavras:

a) CASA b) AMANDA c) BATATA

Solução:

a) Se as quatro letras que compõem essa palavra fossem distintas entre si, teria então $4!$ anagramas. Mas a palavra não se altera quando há permuta entre as letras iguais; por isso, conclui-se que o número de anagramas dessa palavra é menor que $P_4 = 4! = 24$.

[4] Permutação com repetição é um tipo de permutação em que existem elementos repetidos.

Um raciocínio possível para o cálculo desse número de anagramas é considerar as letras iguais como elementos diferentes. Para melhor orientação, utilizou-se as letras iguais com cores diferentes, obtendo:

CASA

Figura 19: palavra casa.

Assim, pode-se formar $4! = 24$ permutações com esses elementos "distintos". São elas:

CASA	**ACSA**	**SCAA**	**ACAS**
CAAS	**ACAS**	**SCAA**	**ACSA**
CSAA	**ASCA**	**SACA**	**AACS**
CSAA	**ASAC**	**SAAC**	**AASC**
CASA	**AACS**	**SACA**	**ASCA**
CAAS	**AASC**	**SAAC**	**ASAC**

Figura 20: anagramas da palavra casa.

Porém, se as cores nessas 24 permutações forem eliminadas, obtém-se a seguinte representação:

CASA	**ACSA**	**SCAA**	**ACAS**
CAAS	**ACAS**	**SCAA**	**ACSA**
CSAA	**ASCA**	**SACA**	**AACS**
CSAA	**ASAC**	**SAAC**	**AASC**
CASA	**AACS**	**SACA**	**ASCA**
CAAS	**AASC**	**SAAC**	**ASAC**

Figura 21: anagramas da palavra casa.

Observe os anagramas em destaque que se repetem pela cor vermelha.

CASA	**ACSA**	**SCAA**	**ACAS**
CAAS	**ACAS**	**SCAA**	**ACSA**
CSAA	**ASCA**	**SACA**	**AACS**
CSAA	**ASAC**	**SAAC**	**AASC**
CASA	**AACS**	**SACA**	**ASCA**
CAAS	**AASC**	**SAAC**	**ASAC**

Figura 22: anagramas em repetidos.

O número de anagramas da palavra CASA é 12.

Pelos anagramas apresentados observa-se que quando há a troca das duas letras A entre si, obtém-se o mesmo anagrama e não um anagrama distinto, o que aconteceria se fossem diferentes. Isso faz com que, nessa contagem $4!$, contou-se o mesmo anagrama várias vezes, $2!$ vezes precisamente, pois há $2!$ modos de trocar as letras A entre si.

Então a resposta pode ser representada na forma:

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

b) Usando o mesmo raciocínio do item anterior teria $6!$ anagramas. Como as três letras A são iguais, quando as trocas entre si, obtém-se o mesmo anagrama e não anagrama distinto, o que aconteceria se fossem diferentes. Isso faz com que, na contagem de $6!$, tenha contado o mesmo anagrama várias vezes, $3!$ vezes precisamente, pois há $3!$ modos de trocar as letras A entre si.

A resposta é $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

c) Para calcular o número de anagramas da palavra BATATA, basta contar as letras que são iguais.

- Letra A repete três vezes
- Letra T repete duas vezes

Então a resposta é $\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{2} = 60$

De modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais entre si, β são iguais entre si, λ são iguais entre si,..., é

$$P_n^{\alpha,\beta,\lambda,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\lambda!\ldots}.$$

Exercício 2.17. Considerando os anagramas da palavra MATEMATICA, determine:

a) o número total de anagramas

b) quantos começam com A

Solução:

a) A palavra MATEMÁTICA tem 10 letras, sendo 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, 1 letra E, 1 letra I e 1 letra C.

$$P_{10}^{3,2,2} = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200 \text{ anagramas.}$$

b) Fixando a primeira letra, sobram 9 letras para permutar, sendo 2 letras A, 2 letras M, 2 letras T, 1 letra E, 1 letra I e 1 letra C.

$$P_9^{2,2,2} = \frac{9!}{2!2!2!} = 45360 \text{ anagramas.}$$

Exercício 2.17. Numa prova de 10 questões, todos os alunos de uma classe tiraram nota 8 (acertaram 8 questões e erraram 2). O professor, desconfiado, resolveu comparar todas as provas e ficou feliz ao verificar que em toda a classe não havia duas provas iguais. Qual é o maior número de alunos que essa classe pode ter?

Solução: Das 10 questões da prova, 8 estarão certas e 2 estarão erradas.

Seja **C:** certo e **E:** errado. Veja algumas sequências de acertos e erros dos alunos. Considerando que a primeira letra seja referente à $1^{\underline{a}}$ questão, a segunda letra a $2^{\underline{a}}$ questão assim sucessivamente.

CCCCCCCCEE
CECCCCCCEC
EECCCCCCCC
CCCCECECCC

Figura 23: Sequências de acertos e erros.

Note que para calcular o número de maneiras diferentes de tirar 8 nessa prova é o mesmo que calcular o número de anagramas da palavra **CCCCCCCCEE**

$$P_{10}^{8,2} = \frac{10!}{8!\,2!} = 45$$

Dizer que não houve duas provas iguais significa que o maior número de alunos que a classe pode ter é 45. Se ela tivesse 46 alunos, com certeza haveria duas provas iguais, já que o número de maneiras diferentes de tirar 8 na prova é igual a 45. Logo, essa classe pode ter, no máximo, 45 alunos.

Exercício 2.18. Partindo de sua casa para chegar à escola, Júlia deve caminhar 8 quarteirões para a direita e 5 quarteirões para cima, como indicado no exemplo da figura abaixo. Ela sabe que existem muitas maneiras diferentes de fazer o percurso casa-escola, sempre seguindo o caminho mais curto. Como ela é uma menina muito curiosa, ela gostaria de sempre fazer caminhos diferentes. Quantos desses caminhos existem da casa de Júlia até a escola?

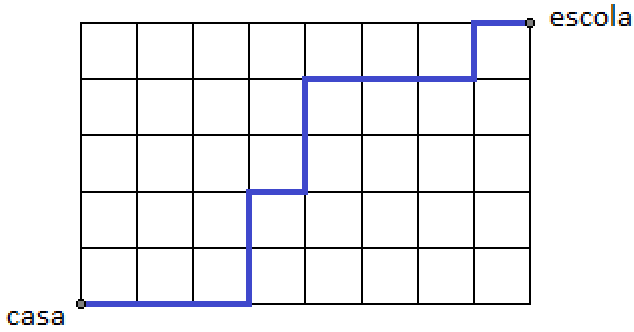


Figura 24: Exemplo de um caminho.

Solução: Qualquer que seja a maneira que Júlia caminhe da sua casa até a escola, ela deve percorrer 8 quarteirões para a direita e 5 quarteirões para cima. Um caminho ligando a sua casa até a escola é então uma sequência de "travessias de quarteirões", sendo 8 no sentido horizontal (para a direita) e 5 no sentido vertical (para cima).

Assim, para definir um caminho ela precisa apenas decidir em que ordem fará essas travessias. Desse modo, imaginando 8 letra D e 5 letra C. Uma permutação qualquer destas 13 letras pode ser interpretada como um caminho a ser percorrido por Júlia. O caminho exemplificado da figura anterior é representado pela sequência DDDCCDCCDDDCD. O número de caminhos é, então, igual ao número de permutações de 13 letras, sendo 8 delas iguais a letra D e 5 delas iguais a letra C.

Esse número é dado por

$$P_{13}^{8,5} = \frac{13!}{8!\,5!} = 1287$$

Portanto o número de caminhos que existem da casa de Júlia até a escola é 1287.

Exercício 2.19. Um jogo é formado por 20 pontos, conforme a figura.

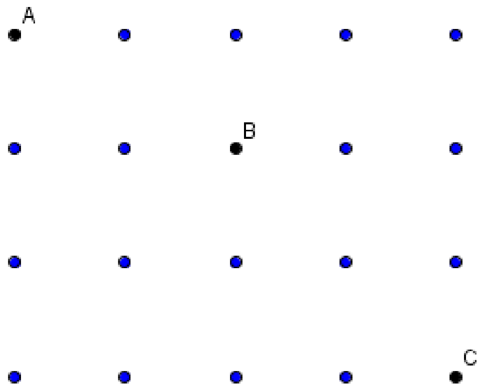


Figura 25: 20 pontos

a) Calcule o número total de possibilidades para caminhar de A a C, sabendo que só pode haver movimento na horizontal (da esquerda para a direita) ou na vertical (de cima para baixo), um espaço entre dois pontos de cada vez.

Solução: A resolução deste item usa a mesma ideia do exercício anterior, associando cada caminho a um anagrama. De A até C serão 7 passos, sendo 4 horizontais (H) e 3 verticais(V). Um caminho possível seria HHHVVHV. Observe a figura:

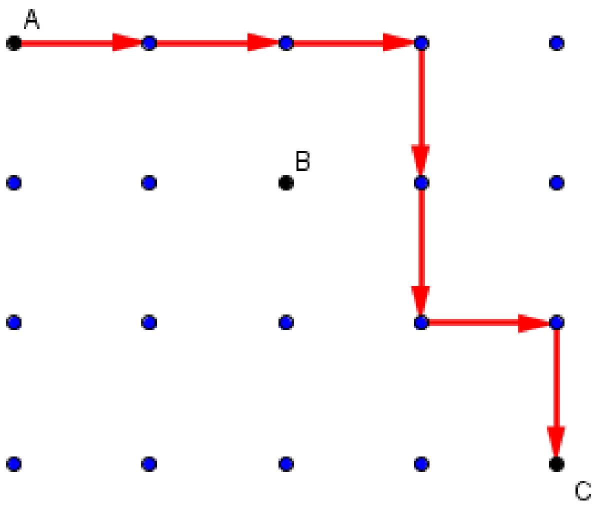


Figura 26: Exemplo de um caminho.

O número de caminhos possíveis é igual ao número de permutações de 7 passos, com repetição de 4 horizontais e 3 verticais. Calculando, tem-se:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35.$$

Logo, são 35 possibilidades.

b) Calcule de quantas maneiras se pode caminhar de A até C, passando por B, seguindo as mesmas regras do item a.

Solução: Agora tem-se uma restrição, é obrigatório passar por B. Seguindo as estratégias de resolver problemas de contagem, deve-se colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação. Neste caso terá duas ações (decisões):

- Ir de A até B
- Ir de B até C

De A até B são 3 passos, sendo 2 horizontais e 1 vertical. Logo, há $P_3^2 = 3$ caminhos possíveis de A até B.

De B até C são 4 passos, sendo 2 horizontais e 2 verticais. Logo, há $P_4^{2,2} = 6$ caminhos possíveis de B até C.

Pelo princípio multiplicativo, há $3 \times 6 = 18$ caminhos. Portanto, pode-se caminhar de A até C, passando por B, de 18 maneiras.

Exercício 2.20. Com os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ de quantas formas podemos permutá-los de modo que os números ímpares fiquem em ordem crescente?

Solução: O número formado será de 7 dígito, pois é preciso permutar todos os dígitos. Veja a listagem de alguns números possíveis:

1	3	5	7	2	4	6

Figura 27: Ilustração do exercício 2.20.

1	2	3	4	5	6	7

Figura 28: Ilustração do exercício 2.20.

1	6	3	5	2	4	7

Figura 29: Ilustração do exercício 2.20.

6	4	2	1	3	5	7

Figura 30: Ilustração do exercício 2.20.

Omitindo os números pares, veja como fica a nova configuração:

1	3	5	7			

Figura 31: Ilustração do exercício 2.20.

1		3		5		7

Figura 32: Ilustração do exercício 2.20.

1		3	5			7

Figura 33: Ilustração do exercício 2.20.

			1	3	5	7

Figura 34: Ilustração do exercício 2.20.

Observe que a configuração de 1357 já está definida, pois os dígitos ímpares devem ficar em ordem crescente. Aplicando o princípio multiplicativo, devem-se colocar os dígitos 2, 4 e 6 nos espaços da figura abaixo.

____1___3___5___7___

1ªdecisão: Quantas maneiras o 2 pode ser colocado? 5 maneiras.

__2__1___3___5___7___

Supondo que o 2 ficou à esquerda do 1.

2ªdecisão: Quantas maneiras o 4 pode ser colocado? 6 maneiras, pois com a primeira decisão foram criadas mais duas possibilidades.

__2__1___3__4__5___7___

Supondo que o 4 ficou entre 3 e 5.

3ªdecisão: Quantas maneiras o 6 pode ser colocado? 7 maneiras, pois com a primeira e segunda decisão foram criadas mais quatro possibilidades.

$$\_\_\mathbf{2}\_\_\mathbf{1}\_\_\_\mathbf{3}\_\_\mathbf{4}\_\_\mathbf{5}\_\_\_\mathbf{7}\_\_\_$$

Pelo princípio multiplicativo, o número total é $5 \times 6 \times 7 = 210$.

Para esse problema, como vários outros, vale a pena associar a anagramas. Observe:

Os números 1357 sempre estarão nesta configuração, ou seja, a permutação entre eles será uma única vez, pois só existe uma forma de colocar os números 1357 em ordem crescente. Daí basta considerar os números ímpares como se fossem iguais.

Então para encontrar a solução do exercício basta calcular as permutações de:

x x x x $2\ 4\ 6$

$$P_7^4 = \frac{7!}{4!} = 210\,.$$

Exercício 2.21. Com os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, de quantas formas podemos permuta-los de modo que os números ímpares fiquem em ordem crescente e os pares também?

Solução: O diferente do exercício anterior é que os pares também precisam estar em ordem crescente. Usando a ideia de anagrama, como no exercício acima.

Então basta calcular as permutações de:

x x x x y y y

Então a resposta é $P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$ formas.

Exercício 2.22. Em uma sala de aula existem 4 meninas e 3 meninos. De quantas formas eles podem ficar em uma fila, se as meninas devem ficar em ordem crescente de altura, e os meninos também? (Suponha que duas pessoas quaisquer não tenham a mesma altura).

Solução: É automático associar ao exercício anterior. Onde as meninas fazem o papel dos ímpares e os meninos fazem o papel dos pares. Portanto as pessoas podem ficar de 35 formas nesta fila.

Exercício 2.23. Quantas soluções inteiras não negativas tem a equação $x + y = 6$?

Solução: Por tentativas, encontra-se ao todo 7 soluções inteiras não negativas.

x	y	(x, y)
0	6	$(0,6)$
1	5	$(1,5)$
2	4	$(2,4)$
3	3	$(3,3)$
4	2	$(4,2)$
5	1	$(5,1)$
6	0	$(6,0)$

Tabela 5: Soluções da equação

Exercício 2.24. Quantas soluções inteiras não negativas tem a equação $x + y + z = 6$?

Solução: Resolvendo por tentativa, o trabalho será muito grande, e corre-se o risco de esquecer alguma solução.

Um raciocínio alternativo seria o seguinte: dividir 6 unidades em 3 partes ordenadas, de modo que fique em cada parte um número maior ou igual à zero.

Indicando cada unidade por uma bolinha e usando a barra para fazer a separação, que corresponde aos sinais de adição, obtém-se, por exemplo

OOOlOlOO Figura 35: corresponde à solução $(3,1,2)$

OOlOOlOO Figura 36: corresponde à solução $(2,2,2)$

OOllOOOO Figura 37: corresponde à solução $(2,0,4)$

OOOOlOlO Figura 38: corresponde à solução $(4,1,1)$

llOOOOOO Figura 39: corresponde à solução $(0,0,6)$

Dessa maneira, o número de soluções inteiras não negativas da equação é dada pela quantidade de permutação das 6 bolinhas e das 2 barrinhas, com 6 e 2 repetições.

$$P_8^{6,2} = \frac{8!}{6!\,2!} = 28$$

De forma geral o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r \quad \text{é:}$$

$$P_{(n+r-1)}^{(n-1),r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\ r!}$$

De fato, cada solução da equação é uma permutação de r símbolos O e $(n-1)$ símbolos l, precisa-se então de $(n-1)$ barras para dividir r bolas em n partes.

Exercício 2.25. Questão 24. (ENEM 2017 – questão 149 – caderno amarelo)
Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.

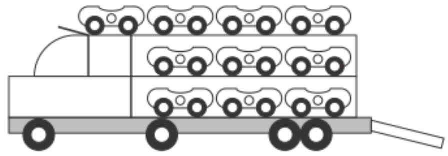


Figura 40: Representação do caminhão de brinquedo

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

Solução: O que diferencia um brinquedo do outro é a quantidade de carrinhos amarelo, branco, laranja e verde. Como o brinquedo deve ter pelo menos um carrinho de cada uma dessas cores, então considere que isso já é satisfeito. Para completar o brinquedo faltam 6 carrinhos. Para esses carrinhos, sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as quantidades de carrinhos amarelo, branco, laranja e verde, respectivamente. Deseja-se determinar a quantidade de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ com cada $x_i \geq 0$. **As soluções dessa equação é o número de permutações de 6 bolas e 3 barras.** A quantidade de tais permutações é dada por

$$P_9^{6,3} = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

O desafio do exercício foi a interpretação e associar a permutações repetidas. Em Matemática e principalmente em Análise Combinatória a compreensão do problema a partir de uma leitura cuidadosa é o primeiro passo para resolver o problema.

Exercício 2.26. Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x + y + z = 6$?

É comum quando as pessoas se deparam com esse problema optarem por seguir o seguinte caminho até a solução: Se as soluções fossem inteiras não negativas, pelo **exercício 2.24** teria então a resposta 28. Mas há soluções indevidas, onde o número 0 aparece. Então, basta encontrar o número de soluções onde o número 0 se figura e retirá-la de 28.

Daí o número 0 pode aparecer duas vezes ou uma vez.

1ª) O número 0 aparece duas vezes.

Uma solução seria $(0,0,6)$, onde $x = y = 0$ e $z = 6$. O total de soluções é o número de permutações de 0, 0, 6.

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$

2ª) O número 0 aparece uma vez.

No exercício 2.23 têm-se as seguintes soluções $(1,5)$; $(2,4)$; $(3,3)$; $(4,2)$; $(5,1)$.

I) (a, b) é solução da equação $a + b = 6$, com $a \neq b$.

Portanto, há duas soluções desse tipo. Basta calcular

$$2 \times P_3 = 12$$

II) (a, b) é solução da equação $a + b = 6$, com $a = b$.

E para uma solução desse tipo. Basta calcular

$$1 \times P_3^2 = 3$$

Pelo princípio aditivo obtém-se ainda $3 + 12 + 3 = 18$. Logo a solução procurada é $28 - 18 = 10$.

Neste exercício, o raciocínio destrutivo não trouxe uma segurança, pois em casos de mais variáveis o trabalho seria muito maior. **Abaixo será apresentada uma solução usando o raciocínio construtivo.** Observe:

Solução:

Chamando x de $1 + a$, y de $1 + b$ e z de $1 + c$, o problema se transforma em encontrar todas as soluções inteiras e não negativas de $(a + 1) + (b + 1) + (c + 1) = 6$, ou seja, de $a + b + c = 3$. A resposta é

$$P_5^{2,3} = 10$$

Exercício 2.27. De quantos modos é possível comprar 10 picolés em uma padaria que oferece 3 sabores, sendo que pelo menos 2 de cada um dos sabores ofertados devem ser comprados?

Solução: Supondo que esses sabores sejam de coco, limão e uva. Seja:
x o número de picolés de coco
y o número de picolés de limão
z o número de picolés de uva

É claro que $x + y + z = 10$. Mas, há restrições em x, y e z. Obrigatoriamente temos que comprar pelo menos 2 picolés de cada sabor, ou seja, $x \geq 2$, $y \geq 2$ e $z \geq 2$. Existem números naturais a, b e c tais que $x = 2 + a, y = 2 + b$ e $z = 2 + c$.

Logo, $(2 + a) + (2 + b) + (2 + c) = 10$, assim para saber quantos modos é possível comprar 10 picolés, equivale achar o número de soluções inteiras não negativas da equação.

$$a + b + c = 4$$

Basta calcular

$$P_6^{4,2} = 15$$

Exercício 2.28. Quantas são as soluções inteiras e não negativas da inequação $x + y + z \leq 6$?

Solução: As soluções inteiras não negativas de $x + y + z \leq 6$ dividem–se em vários grupos: Soluções onde:

1ª) $x + y + z = 6$ 2ª) $x + y + z = 5$

3ª) $x + y + z = 4$ 4ª) $x + y + z = 3$

5ª) $x + y + z = 2$ 6ª) $x + y + z = 1$

7ª) $x + y + z = 0$

A resposta é $P_8^{6,2} + P_7^{5,2} + P_6^{4,2} + P_5^{3,2} + P_4^{2,2} + P_3^{1,2} + P_2^{0,2} = 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84$.

Resolução deste tipo podem se tornar trabalhosos, pois para $x + y + z \leq 6$ foi necessário encontrar a solução inteira não negativa de 7 equações. Se no lugar do 6 fosse o número 89, seria preciso encontrar as soluções inteiras não negativas de 90 equações. O trabalho seria maior.

Agora será apontada uma solução mais engenhosa. Observe:

Solução: Em cada solução inteira não negativa de $x + y + z \leq 6$ defina–se a *folga* da solução por $f = 6 - (x + y + z)$.

A tabela a seguir mostra algumas soluções e as respectivas folgas.

x	y	z	$x+y+z$	f
4	1	1	6	0
3	0	1	4	2
2	1	1	4	2
1	1	0	2	4

Tabela 6: Exemplos de soluções com folga

O número de soluções inteiras não negativas da inequação $x+y+z \leq 6$ é igual ao número de soluções inteiras não negativas da equação $x+y+z+f=6$ que é

$$P_9^{6,3} = 84\,.$$

Exercício 2.29. Questão 25. (OBMEP 2018 – 1ª fase – N3 – questão 18): Helena tem três caixas com 10 bolas em cada uma. As bolas dentro de uma mesma caixa são idênticas, e as bolas em caixas diferentes possuem cores distintas. De quantos modos ela pode escolher 15 bolas dessas três caixas?

Foto 2: Ilustração das caixas com as bolas

Solução: O primeiro contato com esta questão pode levar o indivíduo a buscar a solução por diagrama de árvore. Construir diagramas é uma estratégia que pode ser usado em problemas de contagem. Escolhendo primeiro a quantidade de bolas vermelhas, verdes e azuis nesta ordem, tem-se:

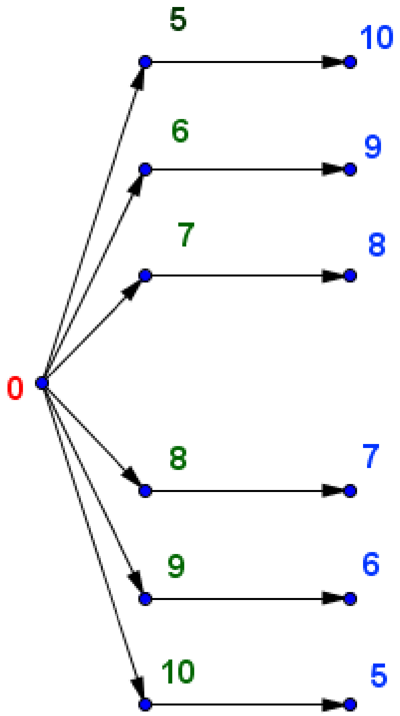


Figura 41: Diagrama de árvore

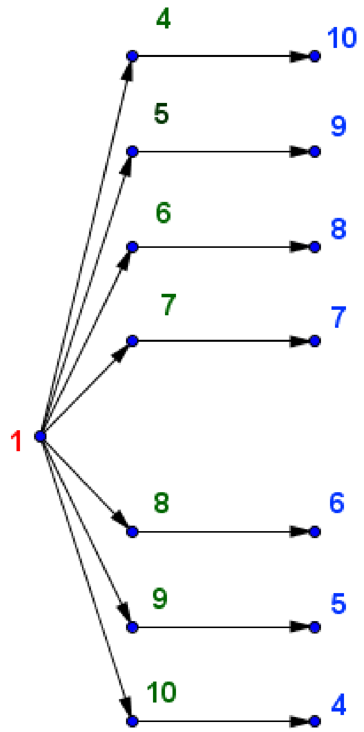


Figura 42: Diagrama de árvore

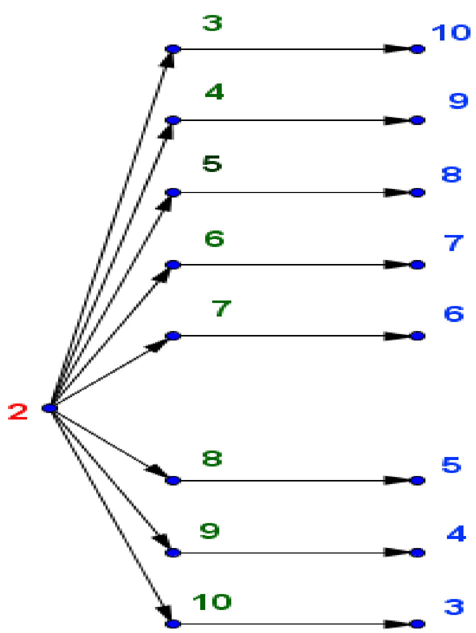


Figura 43: Diagrama de árvore

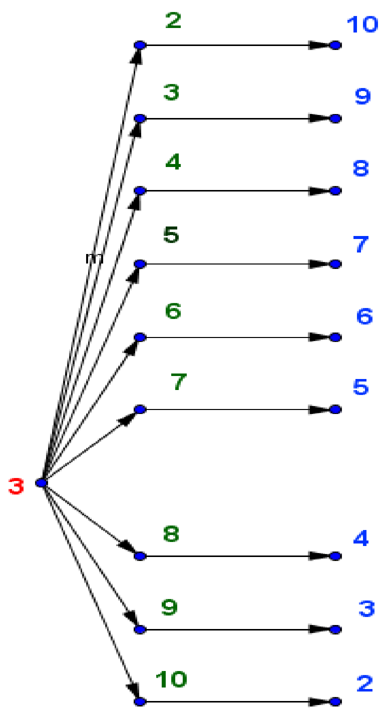


Figura 44: Diagrama de árvore

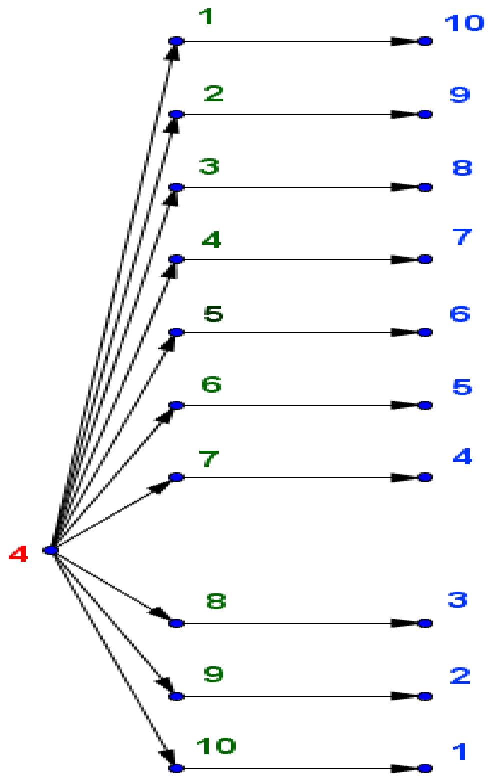


Figura 45: Diagrama de árvore

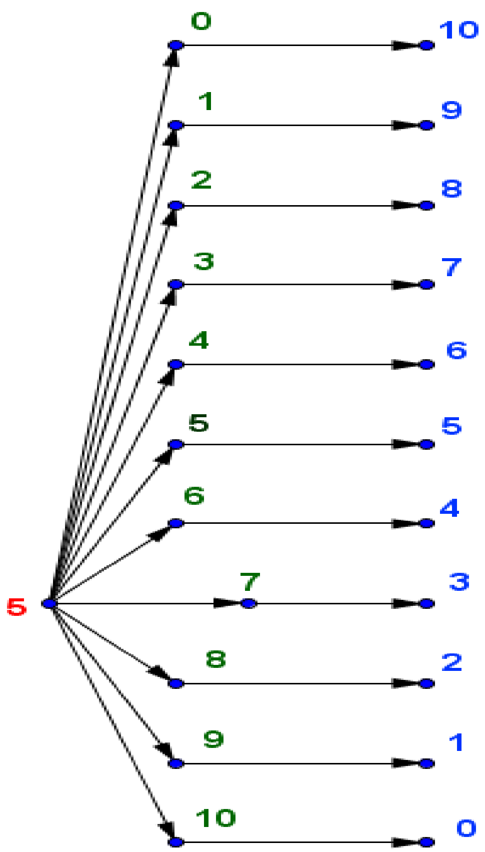


Figura 46: Diagrama de árvore

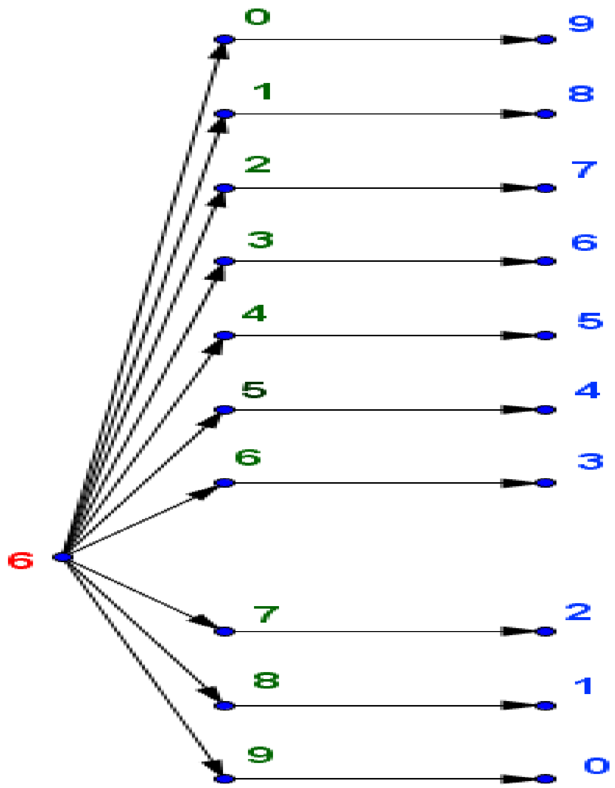


Figura 47: Diagrama de árvore

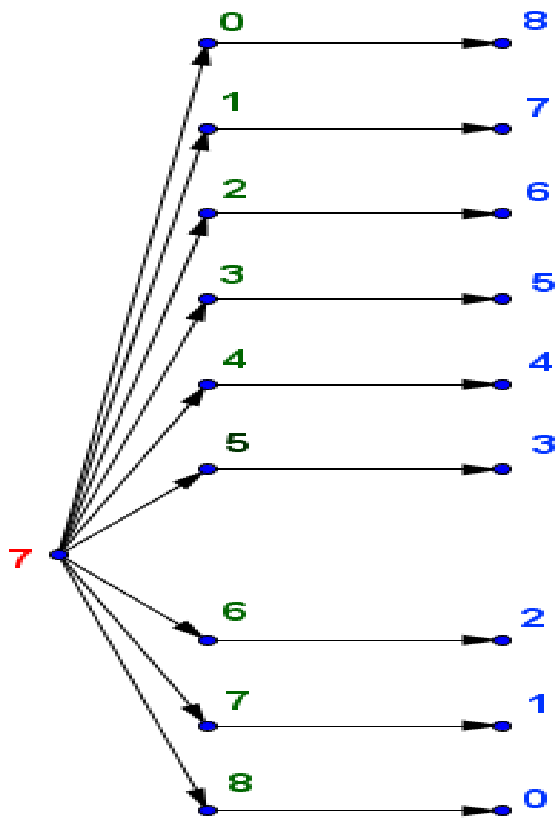


Figura 48: Diagrama de árvore

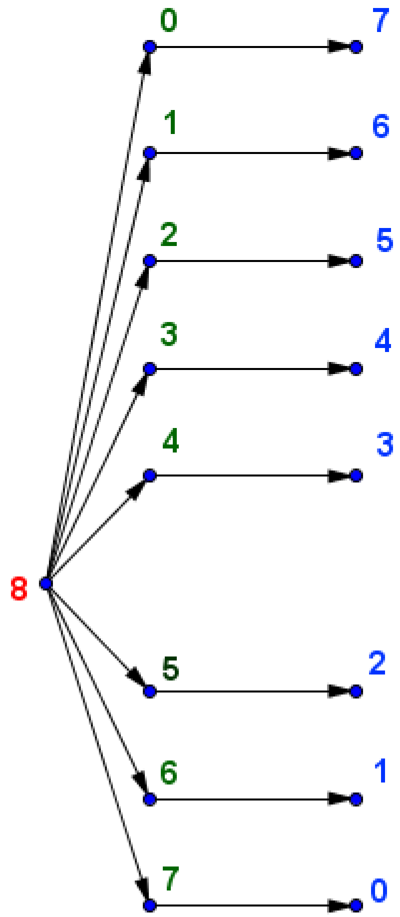


Figura 49: Diagrama de árvore

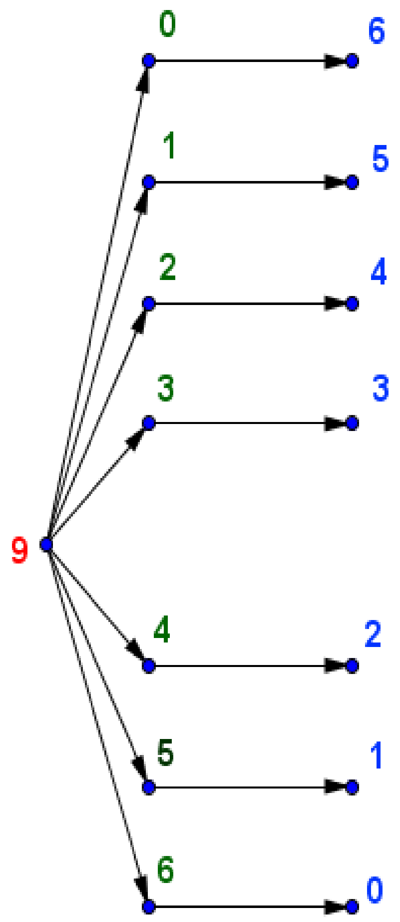


Figura 50: Diagrama de árvore

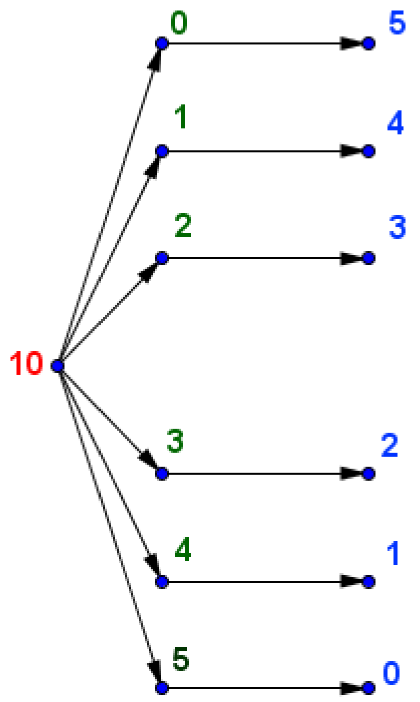


Figura 51: Diagrama de árvore

Pelo diagrama de árvore chegou-se ao seguinte resultado:

$6+7+8+9+10+11+10+9+8+7+6=2\times 40+11=91$ possibilidades de escolhas.

Agora será apontada uma outra solução usando a ideia de permutação com repetição.

Solução: Sejam x, y e z as quantidades de bolas retiradas de cada uma das três caixas. Esses são números inteiros que satisfazem

$$x+y+z=15\,,\qquad 0\leq x\leq 10\,,\quad 0\leq y\leq 10\,,\quad 0\leq z\leq 10$$

Considerando 15 bolas e 2 barras: Qualquer permutação desses 17 objetos pode ser associada a uma solução da equação anterior em inteiros não negativos: as bolas à esquerda da primeira barra correspondem ao x; as bolas entre as duas barras correspondem ao y; e as bolas à direita da segunda barra correspondem ao z. Por exemplo, a escolha de 9 bolas da primeira caixa, nenhuma da segunda e 6 da terceira pode ser representada do seguinte modo.

$$\underbrace{\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,|}_{x}\;\underbrace{\quad}_{y}\;|\;\underbrace{\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet}_{z}$$

Figura 52: Representação das bolas e barras

Com 15 bolas e 2 barras, há $P_{17}^{15,2}=136$ modos de separá-las. Entretanto, dentre essas soluções, é possível que uma das três variáveis assuma um valor maior que 10. Como apenas uma das três pode assumir um valor maior que 10, para eliminar as soluções indesejadas, escolheu-se uma das três variáveis com valor maior que 10 e subtraiu 11 dela, pois as quantidades $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ não fazem parte da variável escolhida. A solução então passará a satisfazer a equação em inteiros não negativos $x+y+z=4$. Usando agora 4 bolas e 2 barras, conclui-se que a equação anterior possui $P_6^{2,4}=\frac{6\times 5}{2}=15$ soluções. Portanto, o total de soluções é $136-3\times 15=91$.

Exercício 2.30. Em uma loja de móveis, havia três vagas para balconista, Antônio, Carlos, João, José e Pedro se candidataram para preencher as vagas. De quantas formas o dono da loja pode escolher os três balconistas de que ele precisa?

Solução: Em primeiro lugar, note que ele não vai usar todos os candidatos. De 5, escolherá apenas 3. Além disso, a ordem em que ele vai escolhê-los não faz diferença: se ele escolher primeiro João, depois José e por último Pedro; ou primeiro José, depois Pedro e por último João, o grupo escolhido será o mesmo.
Já deu para perceber que permutar não é a solução.

E se optar por resolvê-lo usando o princípio multiplicativo? Nesse caso, teriam 5 candidatos para a primeira vaga, 4 para a segunda e 3 candidatos para a última. A solução seria: $5 \times 4 \times 3 = 60$.

Haveria ainda 60 formas de escolher os três novos balconistas dentre os candidatos. O problema é que, ao usar o princípio multiplicativo, considera-se que a ordem dos agrupamentos faz diferença. E, nesse caso, não deseja que isso aconteça! De outro modo, conta-se várias vezes o mesmo grupo de candidatos, só porque foram escolhidos em ordem diferente:

João	**José**	**Pedro**
João	**Pedro**	**José**
José	**João**	**Pedro**
José	**Pedro**	**João**
Pedro	**João**	**José**
Pedro	**José**	**João**

Tabela 7: Grupos de candidatos

Esses seis grupos são iguais, e foram contados como agrupamentos diferentes nas 60 formas de escolher que foram encontradas.

Para retirar as repetições desses e de outros grupos, deve-se dividir o resultado 60 pelo número de vezes que eles se repetem na contagem. Os grupos repetidos são as formas de permutar os 3 objetos, neste caso $3! = 6$.

Logo, deve-se dividir 60 por 6, para não contar as repetições:

Portanto há 10 maneiras de escolher os 3 novos balconistas, entre os 5 candidatos. O tipo de agrupamento feito no exercício acima, em que não foram usados todos os elementos e no qual a ordem não faz diferença**, chama-se combinação simples.** No exercício, há uma combinação de 5 objetos (os 5 candidatos) 3 a 3 (queríamos escolher). Isso significa que: de 5, deseja-se escolher 3, e a ordem não faz diferença.

Exercício 2.31. Quantos são os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que possuem apenas 3 elementos?

Solução: Os conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{3, 1, 5\}$ são idênticos. Nesse sentido, será utilizado o raciocínio do exercício anterior.

1ª) Usando o princípio multiplicativo para contar o número de agrupamentos ordenados formado por 3 elementos distintos, escolhidos entre os 6 elementos disponíveis: $6 \times 5 \times 4 = 6 \times (6 - 1) \times (6 - 2) = 120$.

2ª) Contar o número de sequências distintas que podem ser formadas com os 3 elementos escolhidos: $P_3 = 3! = 6$.

3ª) Como qualquer permutação desses 3 elementos dá origem a uma única combinação, o número de combinações dos 6 elementos tomados 3 a 3 é:

$$\frac{6 \text{ x } 5 \text{ x } 4}{P_3} = \frac{6 \text{ x } (6 - 1) \text{ x } (6 - 2)}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

A divisão por P_3 permite corrigir o resultado da contagem. Portanto o número de subconjuntos é 20.

Exercício 2.32. De quantos modos podemos selecionar p elementos distintos entre n elementos distintos dados?

Solução: Busca-se encontrar um método, baseado nos exercícios anteriores, para contar o número de combinações desses n elementos tomados p a p (com $p \leq n$). Indica-se esse número por C_n^pou $C_{n,p}$.

$$C_n^p = \frac{n\,(n-1).(n-2)\ldots(\,n-p+1)}{p!}$$

Pode-se encontrar uma expressão alternativa multiplicando o numerador e o denominador por $(n-p)!$. Obtém-se então:

$$C_n^p = \frac{n\,(n-1).(n-2)\ldots(\,n-p+1)}{p!}.\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$= \frac{n\,(n-1).(n-2)\ldots(\,n-p+1).(n-p)\ldots 3.2.1}{p!\,(n-p)!}.$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Nesse sentido, faz necessário a apresentação de uma fórmula para o cálculo de número combinações. É importante sempre destacar que o aluno/professor não é obrigado a usá-la! Se quiser, pode fazer o mesmo tipo de raciocínio do **exercício 2.31** para calcular combinações.

Observação: As notações C_n^p e $C_{n,p}$ para denotar o número de combinações simples de n elementos tomados p a p são mais comuns em livros para o Ensino Médio no Brasil[5].

Em textos mais avançados[6], a notação mais usual é $\binom{n}{p}$.

Exercício 2.33. Faça o que se pede:

a) De quantas formas podemos escolher 2 pessoas, de um grupo de 5, para uma viagem?

b) De quantas formas podemos escolher 3 pessoas, de um grupo de 5, para uma viagem?

Solução:

a) A situação é de um agrupamento não ordenado. Então basta escolher 2 pessoas das 5, ou seja, $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5.4.3!}{2.3!} = \frac{20}{2} = 10$. A resposta é 10.

b) A situação é de um agrupamento não ordenado. Então basta escolher 3 pessoas das 5, ou seja, $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = \frac{20}{2} = 10$. A resposta é 10.

Observar-se que a resposta é a mesma, mas isso não foi uma coincidência, pois para selecionar 2 entre as 5 pessoas equivale a dividir as 5 pessoas em um grupo de 2 pessoas, que são escolhidas, e um grupo de $(5 - 2)$ pessoas, que não são escolhidas.

---

[5] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** vol. único, livro do professor. 1. ed. São Paulo: Ática, 2005

Balestri, Rodrigo Matemática: interação e tecnologia, volume 2 / Rodrigo Balestri. 2 ed. São Paulo: Leya, 2016.

[6] A.C. Morgado e P.C.P Carvalho, Matemática Discreta, 2ª edição, Coleção PROFMAT, SBM, 2015.

O **Exercício 2.33** mostra que uma escolha de p pessoas é equivalente a uma escolha de $n-p$ pessoas que não irão viajar. Logo, o número de maneiras de escolher p pessoas entre n é igual ao número de maneiras de escolher $n-p$ pessoas entre n; ou seja,

$$\boldsymbol{C_n^p = C_n^{n-p}}$$

A igualdade acima é muito usada em combinatória. Em situações em calcular C_{100}^{98} é mesmo que calcular C_{100}^{2}, pois $98+2=100$. É impressionante como algumas propriedades desses números podem ser demonstrados por argumentos combinatório simples, sem usar a fórmula C_n^p.

Veja algumas situações:

a) $C_n^1 = n$. Temos que escolher 1 elemento dos n elementos disponíveis.

b) $C_n^n = 1$. Só há 1 maneira de escolher todos os n elementos disponíveis

c) $C_n^0 = 1$. Só existe um modo de não escolher ninguém entre n.

d) $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$.

Supondo que o grupo tem $n+1$ pessoas e considerando um deles e denote-o por K. Dividindo este grupo de $n+1$ pessoas em dois subgrupos: os que contêm a pessoa K e os que não contêm a pessoa K. A cardinalidade do primeiro grupo é C_n^{p-1}, já que se precisa complementar o time com mais $p-1$ pessoas escolhidas entre as n restantes. A cardinalidade do segundo grupo é C_n^p. Agora se precisa escolher o grupo inteiro entre as n pessoas restantes.

Portanto $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$.

Observação: Este argumento permite provar um fato importante sem fazer cálculos. Esse fenômeno é bem característico da combinatória. Muitas vezes basta pensar alguns minutos para entender o sentido combinatório do problema em consideração e evitar cálculos complicados e tediosos. É por isso que essa pesquisa identificou como necessário discutir demonstrações como a que fora feita acima. Quando o indivíduo compreende o sentido das fórmulas é porque este já se apropriou dos argumentos combinatórios.

Exercício 2.34. Numa sala há 6 pessoas e cada uma cumprimenta cada uma das outras com um único aperto de mão. Quantos foram os apertos de mão?

Solução: São 6 alunos que vão se cumprimentar. Não importa a ordem no cumprimento, ou seja, quando A cumprimenta B, B já cumprimentou A (não conta duas vezes, conta uma vez só). Assim, fica evidente que se está combinando 6 alunos, 2 a 2. Para encontrar o número total de combinações:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

Assim, encontra-se 15 comprimentos.

Este tipo de exercício possibilita rever conceitos vistos em séries anteriores, observe:

Os alunos serão nominados por $A, B, C, D, E\ e\ F$.

	A	B	C	D	E	F	Número de cumprimentos
A		x	x	x	x	x	5
B			x	x	x	x	4
C				x	x	x	3
D					x	x	2
E						x	1
F							0

Tabela 8: Cumprimentos entre os alunos

Na tabela o x representa que houve cumprimento, a lacuna que estiver sem o x indica que o aluno não pode cumprimentar a si mesmo ou já cumprimentou outro aluno. Assim o número de cumprimento é $1+2+3+4+5=15$. O indivíduo quando se depara com esse tipo de soma é comum associar a soma de uma PA (Progressão Aritmética) finita, que é do tipo:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

Nesse caso, $a_1 = 1, a_n = 5\ e\ n = 5$.

Assim, $S_5 = \frac{(1+5)5}{2} = \frac{30}{2} = 15$.

Se a sala tivesse n alunos teríamos $\frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ cumprimentos.

É correto associar a soma $1+2+3+\cdots+n-1 = C_n^2$. Pois

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nesse sentido, o exercício acima apresentou uma relação de Combinatória com Progressão Aritmética. Isto revela para o aluno/professor que métodos de contagem aparecem em outros contextos da Matemática.

Exercício 2.35. Determine a quantidade de diagonais do octógono convexo.

Solução:

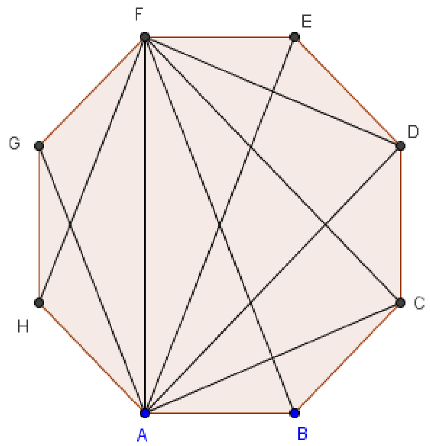


Figura 53: Octógono convexo

O octógono convexo tem 8 lados, o interesse do exercício é calcular o número de segmentos formados por dois vértices, tais que os segmentos formados não sejam os lados do polígono. A figura é um exemplo de algumas diagonais. A diagonal AF é idêntica a diagonal FA. O vértice A só não forma diagonal com os vértices H, A e B, pois AH e AB são segmentos que representam os lados do polígono. Com esses argumentos pode-se afirmar que cada vértice forma $(8 - 3)$ diagonais, como são 8 vértices, encontra-se então $8 \times (8 - 3) = 40$. Contudo, essa não é a resposta, pois cada diagonal foi contada duas vezes. Portanto o número de diagonais do octógono convexo é 20.

Usando o raciocínio de combinação simples para resolver este exercício:

As combinações dos 8 vértices desse polígono, tomado 2 a 2, representam todos os lados e diagonais do octógono convexo. Como o que se deseja é apenas as diagonais, deve-se subtrair do total dessas combinações o número de segmentos que formam os lados do polígono, ou seja:

$$D = C_8^2 - 8 = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} - 8 = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2!\,6!} - 8 = 28 - 8 = 20$$

A resposta é 20 diagonais.

Usando combinação simples é possível calcular o número de diagonais de um polígono convexo de n lados. Observe:

$$D = C_n^2 - n = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!\,(n-2)!} - n = \frac{n^2 - n}{2} - n$$

$$D = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Exercício 2.36. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 4 pessoas, com **exatamente** 2 homens, podem ser formadas?

Solução: Os 5 homens podem ser representados por H_1, H_2, H_3, H_4 e H_5 e as 4 mulheres, por M_1, M_2, M_3 e M_4.

- Para escolher 2 homens, tem-se: $C_5^2 = 10$, ou seja, 10 possibilidades, abaixo destacadas:

  $\{H_1, H_2\}$, $\{H_1, H_3\}$, $\{H_1, H_4\}$, $\{H_1, H_5\}$, $\{H_2, H_3\}$, $\{H_2, H_4\}$, $\{H_2, H_5\}$, $\{H_3, H_4\}$, $\{H_3, H_5\}$, $\{H_4, H_5\}$.

- Para escolher 2 mulheres, tem-se: $C_4^2 = 6$, ou seja, 6 possibilidades:

$\{M_1, M_2\}$, $\{M_1, M_3\}$, $\{M_1, M_4\}$, $\{M_2, M_3\}$, $\{M_2, M_4\}$, $\{M_3, M_4\}$

Observe, por exemplo, a dupla masculina $\{H_1, H_2\}$; eles poderão se juntar a qualquer uma das **6** duplas femininas:

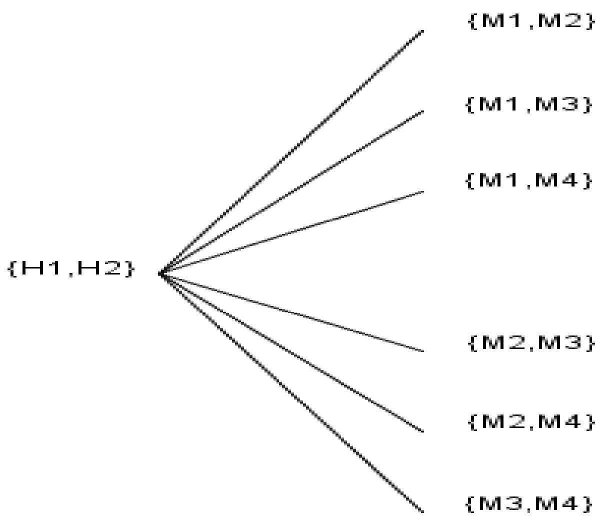


Figura 54: Diagrama de árvore

Para a próxima dupla masculina listada $\{H_1, H_3\}$, tem-se, novamente6 possibilidades de composição. Enfim, para cada uma das 10 duplas masculinas, o número de possibilidades de composição com as duplas femininas é 6.

Assim, o resultado procurado é:

$$C_5^2 \times C_4^2 = 10 \times 6 = 60 \text{ comissões.}$$

Neste exercício usou-se combinação e o princípio multiplicativo. Chega a um momento em Análise Combinatória que o mesmo exercício envolve vários tipos de métodos de contagem.

Exercício 2.37. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 4 pessoas, com **pelo menos** 2 homens, podem ser formadas?

Solução: Há comissões com: 2 homens e 2 mulheres ou 3 homens e 1 mulher ou 4 homens.

- 2 homens e 2 mulheres encontram-se $C_5^2 \times C_4^2 = 10 \times 6 = 60$ comissões.
- 3 homens e 1 mulher encontram-se $C_5^3 \times C_4^1 = 10 \times 4 = 40$ comissões.
- 4 homens encontram-se $C_5^4 \times C_4^0 = 5 \times 1 = 5$ comissões.

Pelo princípio aditivo a resposta é $60 + 40 + 5 = 105$.

Usando o raciocínio destrutivo a solução ficaria assim:

C_9^4 : o número total de comissões, escolher 4 pessoas das 9 disponíveis.

$C_5^1 \times\ C_4^3 + C_5^0 \times C_4^4$: o número total de comissões onde há exatamente 1 homem ou nenhum homem.

Basta calcular $C_9^4 - (C_5^1 \times C_4^3 + C_5^0 \times C_4^4) = 126 - (20 + 1) = 126 - 21 = 105$.

Observação: O que difere os **exercícios 2.36** e **2.37** foram as palavras "exatamente" e "pelo menos", respectivamente.

Quando se utiliza "exatamente" deve-se aplicar combinação e o princípio multiplicativo. Quando se utiliza "pelo menos" deve-se aplicar combinação, princípio multiplicativo e princípio aditivo.

Exercício 2.38. Marcam-se cinco pontos distintos sobre uma reta **r.** Sobre outra reta **s**, paralela (e distinta) a **r**, marcam-se mais quatro pontos distintos.

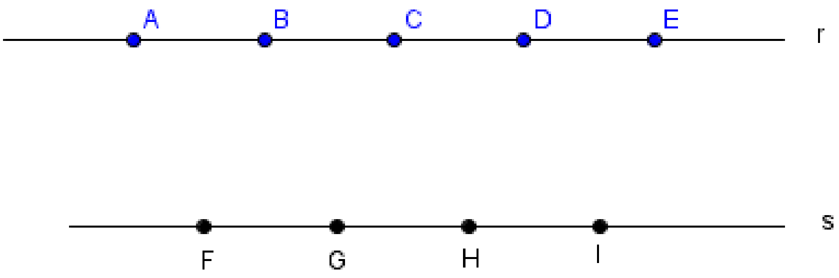


Figura 55: Retas paralelas

a) Quantos triângulos podem ser formados com vértices em três quaisquer desses pontos?

b) Quantos quadriláteros convexos podem ser formados com vértices em quatro quaisquer desses pontos?

Solução:

a) 1º modo: os triângulos construídos podem ter:

- 2 vértices em **r** e 1 vértice em **s**:

$C_5^2 \times C_4^1 = 10 \times 4 = 40$ triângulos.

- 1 vértice em **r** e 2 vértices em **s**:

$C_5^1 \times C_4^2 = 5 \times 6 = 30$ triângulos.

Pelo princípio aditivo encontra-se $40 + 30 = 70$ triângulos.

2º modo: do total de combinações possíveis, exclui-se aquelas que não determinam triângulos, quando os 3 pontos escolhidos estão alinhados.

Temos, então: $C_9^3 - \underbrace{C_5^3}_{\substack{3\ pontos \\ em\ r}} - \underbrace{C_4^3}_{\substack{3\ pontos \\ em\ s}} = 84 - 10 - 4 = 70.$

b) É preciso escolher, sem importar a ordem, 2 pontos em **r** e 2 pontos em **s**. Isso pode ser feito de:

$C_5^2 \times C_4^2 = 10 \times 6 = 60$ maneiras.

A resposta é 60 quadriláteros convexos.

Exercício 2.39. De quantos modos distintos pode-se iluminar uma sala com 6 lâmpadas que podem ser acesas de maneira independentes?

Solução: Sejam A, B, C, D, E e F as lâmpadas dessa sala. Podem acender $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 lâmpadas.

- 1 lâmpada: $C_6^1 = 6$ modos
- 2 lâmpadas: $C_6^2 = 15$ modos
- 3 lâmpadas: $C_6^3 = 20$ modos
- 4 lâmpadas: $C_6^4 = 15$ modos
- 5 lâmpadas: $C_6^5 = 6$ modos
- 6 lâmpadas: $C_6^6 = 1$ modos

A resposta é $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$ modos.

Observação: No primeiro capítulo deste trabalho foi destacado dentro da metodologia de resolução de problemas a **Execução do Plano.** E no **item c** diz: Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

Assim buscará outra maneira de resolver o **exercício 2.39**. Especificamente em contagem executam-se algumas estratégias. Como já foi dito, a postura é uma delas.

Considerando uma sala de 6 lâmpadas independentes: é preciso decidir se a lâmpada fica acesa ou apagada, ou seja, para cada lâmpada tem-se 2 possibilidades.

Pelo princípio multiplicativo encontra-se $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$. Como a sala tem que estar iluminada, desconsiderando o caso quando todas estiverem apagadas. Daí a resposta será $64 - 1 = 63$.

Pensando nas duas resoluções juntas chega-se na seguinte igualdade:

$$C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 - 1$$

$$1 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6$$

$$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 \; (C_6^0 = 1)$$

Se alterar o problema para: De quantos modos distintos pode-se iluminar uma sala com n lâmpadas que podem ser acesas de maneira independentes?

A resolução seguiria a mesma lógica. A resposta seria $2^n - 1$. E chegaria na igualdade:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^{n-3} + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Um simples exercício motivador permite abordar conceitos, ideias e procedimentos matemáticos.

Exercício 2.40. Quantos são os anagramas da palavra MATEMATICA.

Solução: **Este exercício já foi resolvido no exercício 2.17 e a resposta foi 15120. Agora o mesmo exercício será atacado usando a ideia de combinação:**

A estratégia inicial é arrumar as letras repetidas. Neste caso, as letras A, M e T.

- Dos 10 espaços precisa-se escolher 3 para a letra A: C_{10}^{3}

A ____ ____ ____ A ____ A ____ ____ ____

- Dos 7 espaços precisa-se escolher 2 para a letra M: C_{7}^{2}

A ____ M ____ A ____ A M ____ ____

- Dos 5 espaços precisa-se escolher 2 para a letra T: C_{5}^{2}

A ____ M ____ A ____ A M T T

- Dos 3 espaços precisa-se escolher 3 para as letras E, I e C: $C_{3}^{3} \times P_3$ (pois as letras são distintas).

Pelo princípio multiplicativo tem-se então:

$C_{10}^{3} \times C_{7}^{2} \times C_{5}^{2} \times C_{3}^{3} \times P_3 = \frac{10!}{3!7!} \times \frac{7!}{2!5!} \times \frac{5!}{2!3!} \times 1 \times 3!$, simplificando o numerador com o denominador chega-se em

$$\frac{10!}{3!\,2!\,2!} = 151200$$

A expressão acima é o número de anagrama da palavra MATEMATICA.

3. ANÁLISE COMBINATÓRIA – MISCELÂNEA DE EXERCÍCIOS

Os 40 exercícios propostos acima estimulam uma análise interpretativa dos métodos de contagem desenvolvido no Ensino Médio, enfatizando a elaboração de uma sucessão de decisões, presentes no uso do princípio multiplicativo, ou da disjunção de casos, associada ao uso do princípio aditivo.

A compreensão dos outros métodos de contagem, como permutação e combinação surgem naturalmente a partir dos problemas, por isso quanto mais problemas forem abordados mais confiante o indivíduo fica em resolvê-los permitindo ampliar o raciocínio das diferentes técnicas de contagem.

A seguir, 40 exercícios serão abordados, o que servirá de motivação para fixar os conceitos de contagem. As soluções para todos os exercícios serão encontradas ao final do capítulo.

Exercício 3.1. (OBMEP 2013 – Questão 7, Nível 1, 1ª fase): Um grupo de meninos está sentado em volta de uma mesa retangular. Dois meninos estão sentados à frente de Abelardo, no lado oposto da mesa. Um menino está sentado à frente de Beto, quatro à frente de Carlos e cinco à frente de Daniel. Quantos meninos estão sentados à mesa?

Exercício 3.2. (Apostila "Métodos de Contagem e Probabilidade", página 4): Quantas são as formas de pintar a bandeira a seguir utilizando 3 cores diferentes dentre 4 dadas?

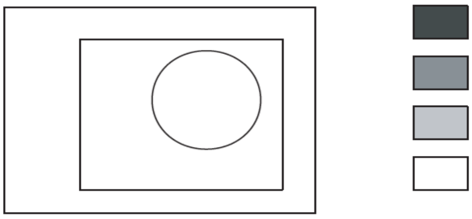


Figura 56: Bandeira

Exercício 3.3. (Material teórico presente no Portal da Matemática http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5yr1740zquo8s.pdf):

Quantos são os números naturais de 200 a 999, tais que todos os seus algarismos pertencem ao conjunto $A = \{1, 4, 7, 9\}$, podendo haver repetições de algarismos?

Exercício 3.4. (Apostila "Métodos de Contagem e Probabilidade", página 10): Um professor de matemática escreveu no quadro a seguinte pergunta: *"De quantos modos podem-se escolher três dos jogadores de um time de futebol (composto por* 11 *jogadores) para representá-lo em uma cerimônia de premiação?"*. Alguns minutos para o término da aula um aluno apresentou a solução: *"O primeiro jogador pode ser escolhido de* 11 *modos distintos. O segundo, de* 10 *e o terceiro, de* 9*. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, o número total de possibilidades distintas para a escolha dos jogadores parece ser* $11 \times 10 \times 9 = 990$*."* A solução está certa ou errada? Se estiver errada, então encontre a solução correta.

Exercício 3.5. (Prova da OBMEP 2006, questão 7º nível 1, 1ª fase).

Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os quatro podem sentar-se no banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

Figura 57: Casais de namorados

EXERCÍCIO 3.6. (PROFMAT 2018 – questão 23 – Prova G)

Para colorir os quatro triângulos, indicados na figura abaixo por A, B, C e D, pode-se usar uma mesma cor mais de uma vez, desde que dois triângulos com um lado em comum tenham cores diferentes. Obedecendo essa regra e usando no máximo quatro cores, de quantas maneiras distintas pode-se colorir os quatro triângulos?

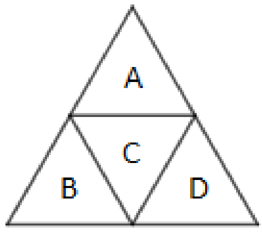


Figura 58: Triângulo

Exercício 3.7. (PROFMAT 2019 – questão 24): Em um estacionamento há 5 vagas exclusivamente para carros e 7 vagas mais estreitas exclusivamente para motos. De quantas formas é possível estacionar 3 carros e 4 motos nessas vagas?

Exercício 3.8. (PROFMAT 2014 – questão 35): Cada uma das cinco regiões da figura deve ser pintada com uma só cor, escolhida entre verde, amarelo, azul e branco. De quantas maneiras distintas podemos colorir a figura, de modo que regiões adjacentes não fiquem com a mesma cor?

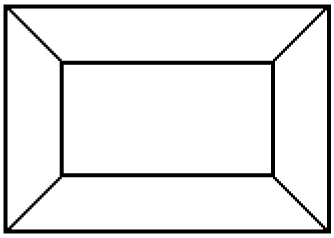


Figura 59: Regiões

Exercício 3.9. (PROFMAT 2013 – questão discursiva 1): Cristina e Pedro vão com outros seis amigos, três moças e três rapazes, para uma excursão. No ônibus que vai fazer a viagem sobraram apenas quatro bancos vagos, cada um deles com dois assentos, todos numerados. Ficou acertado que cada banco vago será ocupado por uma moça e um rapaz, e que Cristina e Pedro se sentarão juntos. Respeitando-se esse acerto, de quantas maneiras o grupo de amigos pode se sentar nos assentos vagos do ônibus? Justifique sua resposta.

Exercício 3.10. (A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, página 94, exercício 2.): Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem n elementos?

Exercício 3.11. (PROFMAT 2018 – questão 7 – Prova G): Quantos números distintos de 8 dígitos são possíveis formar usando dois algarismos 1 e seis algarismos 2?

Exercício 3.12.: Para compor a tripulação de um avião, dispomos de 20 pilotos, 4 copilotos, 3 comissárias e 5 comissários de bordo. Sabendo que em cada voo vão 2 comissárias, 2 comissários, 1 piloto e 2 copilotos, de quantos modos pode ser escolhida a tripulação?

Exercício 3.13.: Tenho 6 livros diferentes de Português e 6 livros diferentes de Matemática. Quero colocar 4 livros de Português e 3 de Matemática na prateleira de uma estante. De quantas maneiras posso fazer isso, de modo que livros da mesma matéria fiquem juntos?

Exercício 3.14.: Uma prova tem 10 questões de múltipla escolha. Cada questão certa vale 1 ponto e cada questão errada vale zero ponto. De quantos modos é possível tirar nota 7 nessa prova?

Exercício 3.15.: Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos $1, 2, 3, 4, 5$ podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente pelo algarismo 3. De quantas maneiras distintas ela pode escolher sua senha?

Exercício 3.16. (Questão 2 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2013): Os ciclistas têm aversão ao número zero (porque é oval) e ao número oito (porque assim ficam as rodas após os acidentes). Quantos sócios podem se inscrever num clube de ciclistas se cada um deve possuir uma identificação de três dígitos, sem usar o dígito zero nem o dígito oito?

Exercício 3.17. (Questão 87 – Banco de Questões da OBMEP – Nível 3 – 2010): Em um táxi, um passageiro pode se sentar na frente e três passageiros atrás. De quantas maneiras podem se sentar quatro passageiros de um táxi se um desses passageiros quiser ficar na janela?

Exercício 3.18. (Questão 9 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2005): Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

Exercício 3.19. (Questão 11 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2007): Manuela quer pintar as quatro paredes de seu quarto usando as cores azul, rosa, verde e branco, cada parede de uma cor diferente. Ela não quer que as paredes azul e rosa fiquem de frente uma para a outra. De quantas maneiras diferentes ela pode pintar seu quarto?

Exercício 3.20. (Questão 17 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2009): Com exatamente dois segmentos de reta, podemos fazer figuras diferentes unindo os vértices de um pentágono. Cinco dessas figuras estão ilustradas a seguir.

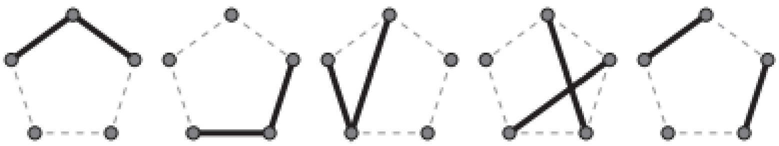


Figura 60: Segmentos de reta

Incluindo essas cinco, quantas figuras diferentes podemos fazer desse modo?

Exercício 3.21. (Questão 17 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2010): Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?

Exercício 3.22. (Questão 9 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2011): Com os algarismos 1, 4, 6 e 8 pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?

Exercício 3.23. (Questão 11 – Prova da 1ª Fase da OBMEP – Nível 3 – 2013): Ana quer fazer duas aulas de natação por semana, uma de manhã e a outra à tarde. A escola de natação tem aulas de segunda a sábado às 9h, 10h e 11h e de segunda a sexta às 17h e 18h. De quantas maneiras distintas Ana pode escolher o seu horário semanal, de modo que ela não tenha suas aulas no mesmo dia nem em dias consecutivos?

Exercício 3.24. (PROFMAT 2017 – questão 21 – Prova 1): Um jogo é disputado em uma malha de 16 pontos, conforme a figura da esquerda abaixo. O jogador A inicia no ponto P e deve chegar ao ponto Q, podendo se deslocar apenas ao longo das retas que unem os pontos e atingir apenas um novo ponto a cada rodada. Em contrapartida, o jogador B inicia no ponto Q e deve chegar ao ponto P sob as mesmas condições. As jogadas acontecem alternadamente, iniciando com o jogador A. Em sua vez, um jogador não pode se deslocar para um ponto que esteja sendo ocupado pelo outro jogador.

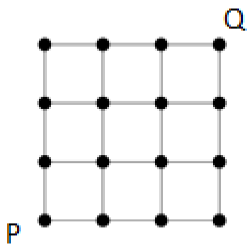


Figura 61: Malha

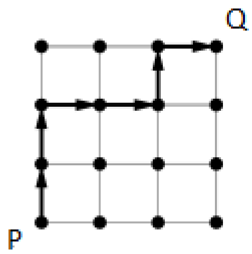


Figura 62: Trajetória

Em uma partida já encerrada, o jogador A percorreu a trajetória destacada na figura da direita acima, atingindo o ponto Q em 6 jogadas. De quantas maneiras diferentes o jogador B pode ter se deslocado, sabendo que ele alcançou o ponto P também em 6 jogadas?

Exercício 3.25. (PROFMAT 2011 – questão objetiva 28): Em uma festa há 13 casais. Cada homem cumprimenta com um aperto de mão os outros convidados, exceto sua própria esposa. As mulheres recebem apertos de mão, mas não procuram ninguém para cumprimentar. Quantos apertos de mão são dados pelos 26 participantes?

Exercício 3.26. (PROFMAT 2011 – questão discursiva 2): Uma equipe esportiva composta por 6 jogadoras está disputando uma partida de 2 tempos. No intervalo do primeiro para o segundo tempo podem ser feitas até 3 substituições e, para isto, o técnico dispõe de 4 jogadoras no banco. Quantas formações distintas podem iniciar o segundo tempo?

Exercício 3.27. **(Prova de Habilitação – OBMEP na Escola – 2019 – questão 3)**: Na grade horária semanal de uma turma há 4 aulas diárias de segunda a sexta-feira. Não há mais do que uma aula de cada disciplina por dia. Em cada semana, há 3 aulas de Português e 3 aulas de Matemática.

	SEGUNDA	TERÇA	QUARTA	QUINTA	SEXTA
AULA 1					
AULA 2					
AULA 3					
AULA 4					

Tabela 9: Grade de horário semanal

a) Se as aulas de Matemática devem ser às segundas, quartas e sextas-feiras, de quantos modos diferentes elas podem ser colocadas na grade horária da turma?

b) Se os dias da semana podem ser escolhidos livremente para as aulas de Matemática, de quantos modos diferentes elas podem ser colocadas na grade horária da turma?

c) Se, em um dia fixado, há aulas de Português e de Matemática, de quantos modos diferentes elas podem ser colocadas na grade horária desse dia?

d) De quantas maneiras é possível colocar as três aulas de Português e as três de Matemática na grade horária de modo que haja pelo menos uma aula de Matemática ou de Português todos os dias?

EXERCÍCIO 3.28.

a) Temos 4 bolas vermelhas idênticas e 10 bolas azuis idênticas. De quantas maneiras diferentes podemos fazer uma fileira com essas bolas, de modo que duas bolas vermelhas não estejam uma imediatamente ao lado da outra?

b) De quantos modos diferentes podemos formar uma fila com 4 homens e 10 mulheres de modo que dois homens não estejam um imediatamente ao lado do outro homem?

EXERCÍCIO 3.29.

a) De quantos modos diferentes podemos repartir uma dúzia de balas iguais entre três crianças?

b) De quantos modos diferentes podemos repartir uma dúzia de balas iguais entre três crianças de modo que cada criança receba pelo menos uma bala?

Exercício 3.30. **(Prova OBMEP 2005 – 2ª Fase – N2 – Questão 3):** Na caixinha de costura de Lilavati só há botões de três cores: pretos, brancos e marrons. Os botões são de três tamanhos: pequenos, médios e grandes, e além disso são de duas formas: quadrados e redondos. Na caixinha não há botões pequenos redondos nem botões grandes pretos, e dos outros tipos há exatamente um botão de cada.

a) Quantos botões brancos quadrados há na caixinha?

b) Quantos botões há na caixinha?

Exercício 3.31. (Prova OBMEP 2011 – 2ª Fase – N2 – Questão 5): João vai pintar figuras compostas por quadrados e triângulos. Cada quadrado pode ser pintado de azul, vermelho ou verde e cada triângulo de azul, vermelho ou amarelo, de modo que polígonos com um lado comum não tenham a mesma cor.

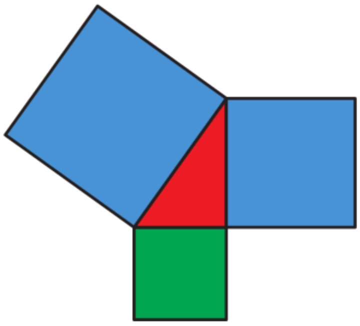
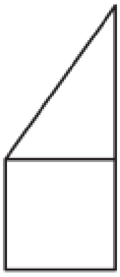


Figura 63: Quadrados e triângulo

Em cada um dos itens abaixo, determine de quantas maneiras João pode pintar a figura correspondente.

a)



b)

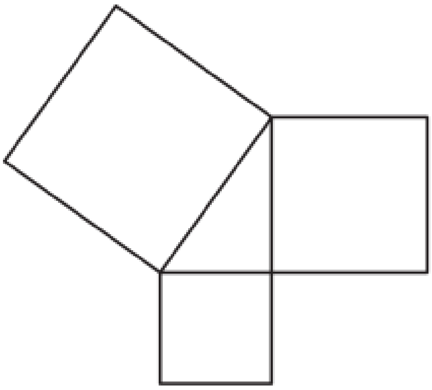


Figura 64: Quadrado e triângulo

Figura 65: Quadrados e triângulo

Exercício 3.32.: Utilizando somente os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5, sem repetições, iremos obter 120 diferentes números. Suponha que seja feita uma fila ordenada com esses 120 números, colocando-os em ordem crescente. Então, 12345 e 12354 seriam, respectivamente, o primeiro e o segundo elementos dessa fila. Determine qual é a posição que ocupa o número 23154.

Exercício 3.33.: Três cariocas, quatro baianos e cinco paraenses devem formar uma única fila de modo que pessoas de um mesmo Estado estejam juntas, uma imediatamente atrás da outra. De quantas maneiras diferentes essas 12 pessoas podem ser colocadas nesta fila?

Exercício 3.34.: Em alguns parques de diversões mais antigos, costuma-se encontrar um jogo onde o participante solta algumas bolas de pingue-pongue em uma rampa inclinada. Na parte de baixo da rampa existem casas numeradas. A pontuação obtida pelo jogador é a soma dos números das casas onde as bolinhas entraram. Atualmente, versões modificadas e com premiações muito maiores desse jogo estão sendo exploradas na televisão.

Na figura ao lado vemos uma simplificação desses jogos. Na nossa situação, três bolas diferentes (uma vermelha, uma amarela e uma verde) devem ser jogadas em um tabuleiro inclinado com 4 casas na parte de baixo. Após as três bolas serem jogadas, de quantas maneiras diferentes elas podem aparecer nas casas do tabuleiro?

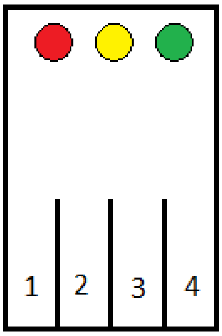


Figura 66: Tabuleiro

Observação 1. Cada uma das bolas pode ocupar qualquer uma das quatro casas do tabuleiro.

Observação 2: Cada casa do tabuleiro pode receber zero, uma, duas ou três bolas, uma em cima da outra.

Observação 3. Em cada casa do tabuleiro as bolas podem aparecer em ordens variadas.

Exercício 3.35.: O hexágono da figura a seguir está dividido em seis triângulos. Temos três cores à disposição: vermelho, azul e amarelo. Queremos calcular de quantos modos diferentes podemos pintar o hexágono com essas cores de modo que cada triângulo seja colorido com uma única cor e triângulos vizinhos sejam coloridos com cores diferentes.

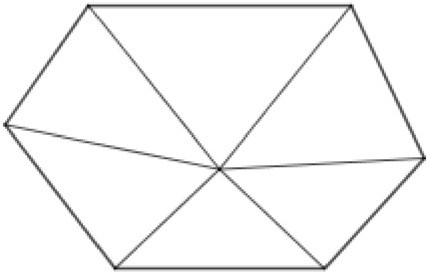


Figura 67: Hexágono

Para facilitar essa contagem, vamos analisar alguns casos particulares e vamos representar pelas letras A, B, C, D, E e F os triângulos que devem ser coloridos.

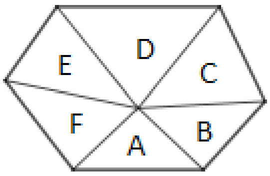


Figura 68: Hexágono representado

a) De quantos modos diferentes podemos realizar a pintura do hexágono de modo que os triângulos A, C e E sejam coloridos com três cores diferentes?

b) De quantos modos diferentes podemos realizar a pintura do hexágono de modo que os triângulos A e C sejam coloridos da mesma cor e o triângulo E seja colorido com uma outra cor?

c) De quantos modos diferentes podemos realizar a pintura do hexágono de modo que os triângulos A, C e E sejam os três coloridos com a mesma cor?

d) Finalmente, de quantos modos diferentes podemos pintar o hexágono?

Observação. Dois triângulos são vizinhos se eles possuem um lado em comum.

Exercício 3.36. (A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, página 103, exemplo 9): Quantos são os anagramas da palavra “BÚLGARO” que não possuem duas vogais adjacentes?

Exercício 3.37. (PROFMAT 2016 – questão 27): Acrescentando-se 3 novos elementos ao conjunto A, obtemos o conjunto B com precisamente 224 subconjuntos a mais do que A. Qual é o número de elementos de A?

Exercício 3.38 (A Matemática do Ensino Médio, Volume 2, página 109, exercício 26.): Uma fila de cadeiras, no cinema, tem 10 poltronas. De quantos modos 3 casais podem se sentar nas poltronas, de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

Exercício 3.39. (Círculos Matemáticos – A Experiência Russa, página 119, problema 5): Um clube de xadrez tem 2 meninas e 7 meninos. Tem que ser escolhido um time com quatro pessoas para um torneio e este time tem que conter pelo menos uma menina. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Exercício 3.40. (Círculos Matemáticos – A Experiência Russa, página 119, problema 6): De quantas maneiras diferentes podemos dividir 10 meninos em dois times de basquete com 5 meninos cada?

3.1 SOLUÇÕES DA MISCELÂNEA DE EXERCÍCIOS

A seguir serão exploradas as soluções para todos os exercícios propostos acima. Espera-se que a sua consulta só aconteça após uma tentativa séria de resolução dos problemas, após o leitor ter desenvolvido suas estratégias e raciocínio sem medo de errar.

Solução do Exercício 3.1: Como Abelardo tinha exatamente dois amigos à sua frente, o lado da mesa oposto a ele tinha exatamente duas pessoas. Como Beto tinha um único amigo à sua frente, o lado da mesa oposto a ele tinha exatamente uma pessoa. Carlos tinha quatro amigos à sua frente, logo o lado da mesa oposto a ele tinha exatamente quatro pessoas e Daniel tinha cinco amigos à sua frente, de modo que o lado da mesa oposto a ele tinha cinco pessoas. Como a mesa tem exatamente quatro lados, pode-se concluir que o número de meninos à mesa era $1 + 2 + 4 + 5 = 12$.

Solução do Exercício 3.2: Para resolução deste exercício, inicialmente, deve-se concentrar em 3 decisões consecutivas a tomar: escolha da cor externa do retângulo maior, a escolha da cor do retângulo menor sobreposto ao maior e a escolha da cor do círculo interno. A cor externa pode ser qualquer uma das 4 cores. Uma vez escolhida a cor externa, o retângulo menor pode ser pintado de três modos distintos. Assim, a escolha combinada da cor externa e do retângulo menor pode ser feita de $4 \times 3 = 12$ modos. Para cada um destes 12 modos, o círculo pode ser pintado com uma das duas cores que sobraram. Logo, através do princípio multiplicativo é possível concluir que o número total de possibilidades para pintarmos a bandeira é $4 \times 3 \times 2 = 24$.

Solução do Exercício 3.3: Para formar um número de 3 algarismos é preciso tomar apenas 3 decisões: (i) qual será seu algarismo da casa das centenas; (ii) qual será seu algarismo da casa das dezenas; (iii) qual será seu algarismo das unidades.

Nas condições desejadas, deve-se montar um número de 200 a 999, então seu algarismo das centenas não poderá ser igual a 1. Agora, como todos os algarismos devem pertencer ao conjunto A, sobraram apenas três possíveis valores (4, 7 ou 9) para o dígito das centenas. Assim, $m_1 = 3$. Por outro lado, os dígitos das dezenas e das unidades podem ser quaisquer elementos de A, de forma que existem quatro escolhas para cada um deles, $m_2 = m_3 = 4$. Logo, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras de formar um número com as propriedades indicadas é igual a $m_1 \times\ m_2\ \times m_3 = 3 \times 4 \times 4 = 48$.

Solução do Exercício 3.4: Esta solução está incorreta, mas é possível consertá-la para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores A, B e C. A comissão de representantes, assim formada, seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro B, depois A, depois C. No entanto, as duas escolhas foram contadas como se fossem distintas. O que permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, A, B e C vão surgir, durante o processo de enumeração, $3 \times 2 \times 1 = 6$ vezes, o mesmo ocorrendo com todas as possíveis comissões. Logo, o número correto de comissões é igual a $\frac{990}{6} = 165$.

Solução do Exercício 3.5: Cada casal pode se sentar em duas posições diferentes: o namorado à esquerda e a namorada à direita e vice-versa. Como são dois casais, pelo princípio multiplicativo, tem-se então quatro casos para esses posicionamentos. Além disso, os dois casais podem sentar-se em duas posições diferentes: um à direita e outro à esquerda do banco e vice-versa. Pelo princípio multiplicativo, segue que $4 \times 2 = 8$ é o total de casos desejado.

Solução do Exercício 3.6: Começar colorindo o triângulo C, pode ser feito de 4 modos distintos. Em seguida, pode-se colorir o triângulo A de 3 modos distintos. De modo análogo, temos 3 modos distintos para colorir B e 3 modos distintos para colorir D. Portanto, a resposta é $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$.

Solução do Exercício 3.7: Para o primeiro carro a ser estacionado temos 5 possibilidades de escolha. Uma vez estacionado o primeiro carro, sobram 4 escolhas para o segundo, logo temos $5 \times 4 = 20$ possibilidades para estacionar dois carros. Para cada uma destas possibilidades sobram três vagas para o terceiro carro. Logo, o número total de possibilidades para o estacionamento dos carros é igual a $20 \times 3 = 60$. De modo análogo, tem-se $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ possibilidades para estacionar as motos. Para cada uma das 60 possibilidades do estacionamento dos carros tem-se então 840 escolhas para o estacionamento das motos, portanto a resposta é igual a $60 \times 840 = 50400$.

Solução do Exercício 3.8: Denota-se às 5 regiões da figura dada pelas letras A, B, C, D e E, conforme a figura abaixo. Um modo de contar as possibilidades de colorir a figura, respeitando as condições exigidas, é escolher em primeiro lugar a cor da região A e, usando o Princípio Aditivo, separar em dois casos:

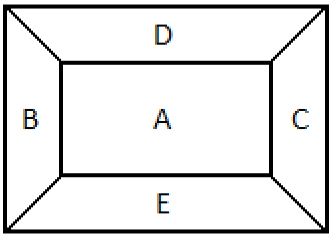


Figura 69: Regiões

1º caso. As cores das regiões B e C são diferentes. Nesse caso, tem-se 4 cores para colorir a região A, 3 cores para a região B, 2 para colorir C e, finalmente, colorindo as regiões D e E com a quarta cor. Pelo Princípio Multiplicativo, nesse caso, pode-se colorir a figura de $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$ maneiras diferentes.

2º caso. As cores das regiões B e C são iguais. Neste caso, tem-se 4 cores para colorir a região A, 3 para a região B, que será a mesma para a região C, 2 cores para colorir a região D e, finalmente, 2 para a região E. Pelo Princípio Multiplicativo, neste caso, é possível colorir a figura de $4 \times 3 \times 1 \times 2 \times 2 = 48$ maneiras diferentes.

Assim, pelo Princípio Aditivo, encontra-se $24 + 48 = 72$ maneiras distintas de colorir a figura dada, nas condições exigidas pelo enunciado.

Solução do Exercício 3.9: Primeiro é preciso identificar de quantas maneiras os casais podem ser formados: Ordenando os rapazes, o primeiro rapaz tem 3 possibilidades entre as moças, o segundo tem 2 e o terceiro fica determinado pelos outros. Assim, são 6 possíveis formações de casais. Para cada formação há várias maneiras de escolher seus bancos. Sendo 4 bancos para os 4 casais, são $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades. Mas cada casal pode escolher os assentos de seu banco de duas maneiras, então para cada escolha dos casais nos bancos ainda há $2^4 = 16$ possíveis posicionamentos. São, portanto, $6 \times 24 \times 16 = 2304$ maneiras de o grupo se sentar, nas condições impostas.

Solução do Exercício 3.10: Para formar um subconjunto, deve-se decidir, para cada elemento do conjunto, se ele pertencerá ou não ao subconjunto. Há 2 modos de decidir o que fazer com o primeiro elemento do conjunto, 2 modos com o segundo, etc. Pelo Princípio multiplicativo a resposta é $2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$.

Solução do Exercício 3.11: A distribuição dos 8 algarismos é dada por $8!$. Como existem dois algarismos 1 e seis algarismos 2, a resposta é $\frac{8!}{6!2!} = 28$. Para outra solução, basta escolher as posições dos algarismos 1, ou seja, C_8^2 e assim as posições dos algarismos 2 ficarão definidas. Logo, a resposta é $C_8^2 = 28$.

Solução do Exercício 3.12: Para escolher a tripulação de um voo, há $C_3^2 = 3$ maneiras de escolher as comissárias, $C_5^2 = 10$ maneiras de escolher os comissários, $C_4^2 = 6$ maneiras de escolher os copilotos e 20 maneiras de escolher o piloto. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $3 \times 10 \times 6 \times 20 = 3600$ modos de escolher a tripulação.

Solução do Exercício 3.13: Há $C_6^4 = 15$ maneiras de escolher 4 livros dentre os 6 livros de Português. Uma vez escolhidos os 4 livros de Português, há $4! = 24$ maneiras de dispô-los na prateleira. Em seguida, escolhendo 3 livros dentre os 6 de Matemática, o que pode ser feito de $C_6^3 = 20$. Uma vez escolhidos os 3 livros de

Português, há $3! = 6$ maneiras de dispô-los na prateleira. Como os livros de Português podem estar dispostas à esquerda ou à direita dos de Matemática, então o número de maneiras de dispor todos os 7 livros na prateleira é igual a $15 \times 24 \times 20 \times 6 \times 2 = 86400$.

Solução do Exercício 3.14: Cada maneira de tirar nota 7 na prova corresponde, de maneira única, a uma sequência de 10 dígitos, sendo 3 dígitos iguais a 0 e 7 dígitos iguais a 1. O i-ésimo dígito na sequência corresponde a ter acertado ou não a i-ésima questão da prova. Assim, o número de maneiras de tirar nota 7 na prova é igual ao número de tais sequências, que é igual a $P_{10}^{3,7} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$.

Solução do Exercício 3.15: Sem a restrição de a senha conter o número 13, haveria $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ escolhas para a senha, uma vez que para cada um dos 4 dígitos há 5 escolhas possíveis. Porém, devem ser excluídas senhas do tipo $13XX$, $X13X$ e $XX13$. Existem $5 \times 5 = 25$ escolhas para cada um desses três tipos de senha, uma vez que para cada um dos 2 dígitos representados por X há 5 escolhas possíveis. Assim, o número de maneiras distintas de Maria escolher sua senha seria $625 - 3 \times 25 = 550$. No entanto, na contagem das senhas do tipo $13XX$ e $XX13$, a senha 1313 foi considerada duas vezes. Assim, a resposta é $550 - 1 = 549$.

Solução do Exercício 3.16: Já que os ciclistas não usam o dígito 0 e nem o 8, restam os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 9. Assim, há 8 possibilidades para a escolha de cada dígito. É preciso então escolher números de três dígitos. Logo, há 8 opções para o primeiro dígito, 8 opções para o segundo dígito e 8 opções para o terceiro dígito. Daí, pelo Princípio Multiplicativo, conclui-se que no máximo $8 \times 8 \times 8 = 512$ sócios podem se inscrever.

Solução do Exercício 3.17: O passageiro que quer ficar na janela tem três possíveis lugares para se sentar, o seguinte pode se sentar em qualquer lugar livre, tendo, portanto, três possíveis lugares; o seguinte tem dois possíveis lugares e o último não tem escolha. Assim, o número dessas formas de se sentar é $3 \times 3 \times 2 = 18$.

Solução do Exercício 3.18: Para formar o número de um dos bilhetes comprados por Marcelo, inicialmente deve-se decidir como dispor o algarismo sete no número. Há 4 maneiras de tomar essa decisão, pois o número do bilhete é de uma das seguintes formas: $777X$, $77X7$, $7X77$ ou $X777$, sendo que X representa um algarismo diferente de zero e 7. Uma vez tomada essa primeira decisão, deve-se, afinal, tomar a decisão de escolher o algarismo restante. Essa última decisão pode ser tomada de 8 maneiras, uma vez que o algarismo restante deve ser diferente de zero e 7. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de bilhetes comprados por Marcelo é $8 \times 4 = 32$.

Solução do Exercício 3.19: Manuela pode começar decidindo qual das paredes pintará de azul. Como há 4 paredes, há 4 maneiras de tomar essa decisão. Uma vez tomada essa decisão, ela deve decidir qual cor usará para pintar a parede oposta. Como só poderá pintar a parede oposta de verde ou branco, há 2 maneiras de tomar essa decisão. Uma vez tomada essa decisão, ela deve decidir qual cor usará para pintar uma das paredes ainda não pintadas. Como há 2 cores ainda não usadas, há 2 maneiras de tomar essa decisão. Uma vez tomada essa decisão, por fim, ela deve decidir qual cor usará para pintar a última parede. Como só restou uma cor ainda não usada, há apenas 1 maneira de tomar essa decisão. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, o número de maneiras de Manuela pintar o seu quarto é $4 \times 2 \times 2 \times 1 = 16$.

Solução do Exercício 3.20: Como dois vértices do pentágono definem um segmento de reta, há um total de $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ segmentos de reta. Uma figura consiste de 2 destes segmentos de reta, e escolhas distintas de dois segmentos de reta correspondem a figuras distintas. Assim, o número de figuras distintas é igual a $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Solução do Exercício 3.21: Diante dos múltiplos casos: (I) Ana recebe dois presentes ou (II) Ana recebe apenas a boneca. No caso (I), Ana recebe a boneca e Tio João deve distribuir os quatro presentes restantes de modo que cada criança, inclusive Ana, receba exatamente um desses presentes. Para isso, ele pode numerar os presentes (que são distintos) e escolher qual das crianças vai ganhar o primeiro presente (4 escolhas), depois qual vai ganhar o segundo (3 escolhas), depois qual vai ganhar o terceiro (2 escolhas) e finalmente qual vai ganhar o último (1 escolha). Pelo Princípio Multiplicativo, isso pode ser feito de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras diferentes. No caso (II), Tio João deve distribuir os presentes entre as outras três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos um presente. Desse modo, uma das crianças vai receber dois presentes e as outras duas apenas um. O Tio João deve escolher quem vai receber dois presentes (3 escolhas). Depois disso, ele dá um presente para cada uma das crianças que vão receber apenas um presente ($4 \times 3 = 12$ escolhas) e entrega os presentes restantes à criança que vai ganhar dois presentes (1 escolha). Pelo Princípio Multiplicativo, isso pode ser feito de $3 \times 12 \times 1 = 36$ maneiras diferentes. No total, pelo Princípio Aditivo, Tio João pode distribuir os presentes de $24 + 36 = 60$ maneiras diferentes.

Solução do Exercício 3.22: Pelo Princípio Multiplicativo, com os números 1, 4, 6 e 8 podem-se formar $4 \times 3 \times 2 = 24$ números de três algarismos distintos, pois há 4 possibilidades para escolher a centena, depois 3 possibilidades para escolher a dezena e, por fim, 2 possibilidades para escolher a unidade. Nas unidades desses números irão aparecer seis vezes cada um dos algarismos 1, 4, 6 e 8, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 24 números e $24 \div 4 = 6$; o mesmo irá ocorrer nas dezenas e nas centenas. Como $6 \times (1 + 4 + 6 + 8) = 114$, a soma desses 24 números será $114 + 10 \times 114 + 100 \times 114 = 111 \times 114 = 12654$.

Solução do Exercício 3.23: Essa solução inicia-se na distinção entre os possíveis horários de Ana em dois casos: (I) se ela tem aula aos sábados e (II) se ela não tem aula aos sábados.

No caso (I), ela deve escolher sua aula de sábado (3 possibilidades) e depois sua aula à tarde (2 possibilidades) em algum dia de segunda a quinta (4 possibilidades). Temos então $3 \times 2 \times 4 = 24$ horários possíveis nesse caso.

No caso (II), ela deve escolher dois dias não consecutivos da semana (6 possibilidades), escolher um deles para ter aula pela manhã (2 possibilidades; automaticamente, no outro dia escolhido ela terá aula à tarde), escolher seu horário da manhã (3 possibilidades) e seu horário da tarde (2 possibilidades). Temos então $6 \times 2 \times 3 \times 2 = 72$ horários possíveis nesse caso.
No total, Ana tem $24 + 72 = 96$ horários possíveis para fazer suas aulas com as restrições do enunciado.

Solução do Exercício 3.24: Tomando o ponto P como sendo $(0, 0)$ e o ponto Q como $(3, 3)$, R = $(1, 2)$ poderá ser o único ponto de encontro na terceira jogada de A e de B, lá que a trajetória de A foi destacada na figura. Começando o cálculo pelo total de trajetórias possíveis de B ao fazer o percurso de Q até P. Tem-se, então, 3 movimentos na vertical e 3 na horizontal, perfazendo um total de $\frac{6!}{3!3!} = 20$.

Agora, para calcular o total de trajetórias possíveis de B passando obrigatoriamente por R, de Q a R são $\frac{3!}{2!1!} = 3$ e de R a P são $\frac{3!}{2!1!} = 3$. Ou seja, passando por R teremos um total de $3 \cdot 3 = 9$ trajetórias. Logo a resposta é $20 - 9 = 11$.

Solução do Exercício 3.25: Primeiramente, deve-se contar o número de apertos de mão de homem para mulher. Como são 13 homens e cada um deles cumprimenta com um aperto de mão cada mulher (exceto a própria esposa), logo, o número de apertos de mão entre homem e mulher é $13 \times 12 = 156$. Agora, contando o número de apertos de mão entre homens. Essa quantidade é igual a $C_{13}^{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$. Duas mulheres não apertam as mãos. Assim o número total de apertos de mão é igual a $156 + 78 = 234$.

Solução do Exercício 3.26.

- Nenhuma substituição: 1 formação.
- 1 substituição. Há 4 maneiras de escolher a substituta e 6 maneiras de escolher quem será substituída dando $4 \times 6 = 24$ formações diferentes.
- 2 substituições. Há $C_4^2 = 6$ maneiras de escolher as substitutas e $C_6^2 = 15$ maneiras de escolher as que serão substituídas, dando $6 \times 15 = 90$ formações diferentes.
- 3 substituições. Há $C_4^3 = 4$ maneiras de escolher as substitutas e $C_6^3 = 20$ maneiras de escolher as que serão substituídas, dando $4 \times 20 = 80$ formações diferentes.

Somando as possibilidades, obtém-se um total de $1 + 24 + 90 + 80 = 195$ formações diferentes.

Solução do Exercício 3.27.

a) Como há 4 possibilidades de horário para as aulas de Matemática em cada um dos dias, segunda, quarta e sexta, têm um total de $4 \times 4 \times 4 = 64$ possibilidades de se colocar as aulas de Matemática na grade horária.

b) Temos $C_5^3 = \frac{5\times4\times3}{3!} = 10$ possibilidades de escolhas para os 3 dias nos quais ocorrerão as aulas de Matemática. Para cada escolha de 3 dias, há $4 \times 4 \times 4 = 64$ possibilidades para distribuir as aulas de Matemática. Logo, um total de $10 \times 64 = 640$ possibilidades.

c) Escolhendo primeiro o horário para as aulas de Matemática: 4 possibilidades. Em seguida, para cada uma dessas possibilidades tem-se 3 possibilidades de horário para as aulas de Português, resultando um total de $4 \times 3 = 12$ possibilidades.

d) São 6 aulas (3 de Matemática e 3 de Português) em 5 dias de aulas, logo, necessariamente haverá um dia com aulas das duas disciplinas, Português e Matemática. Há então 5 possibilidades de escolha para esse dia e nele encontram-se, pelo item c), 12 possibilidades de colocar as aulas de Português e Matemática. Feito isso, sobram 4 dias para as outras 4 aulas: 2 de Português e 2 de Matemática. Como cada dia deverá ter uma aula de uma dessas disciplinas, essas 4 aulas deverão ser distribuídas, cada uma, em um desses quatro dias.

Escolhendo inicialmente os 2 dias para as aulas de Matemática, resultando $C_4^2 = \frac{4\times 3}{2} = 6$ possibilidades. Nesses dois dias, pode-se escolher de 4×4 maneiras diferentes os horários das aulas de Matemática. Finalmente, também há 4×4 possibilidades para os horários das aulas de Português nos 2 dias restantes. Portanto, no total há $5 \times 12 \times 6 \times (4 \times 4) \times (4 \times 4) = 92160$ possibilidades.

Solução do Exercício 3.28.

a) Primeiro disponha as 10 bolas azuis em fila, uma ao lado da outra, como na figura a seguir. Agora observe que podemos colocar as 4 bolas vermelhas nos 11 espaços indicados. Portanto o número de possibilidades é igual a

$$C_{11}^4 = \frac{11\times 10\times 9\times 8}{4!} = 330.$$

Figura 70: Bolas em fila

b) Podemos formar uma fila com 10 mulheres, uma ao lado da outra, de $10!$ maneiras diferentes. Agora nos 11 espaços disponíveis, podemos colocar os 4 homens de $11 \times 10 \times 9 \times 8$ maneiras diferentes. O número de possibilidades é igual a $10! \times (11 \times 10 \times 9 \times 8) = 28740096000$.

Solução do Exercício 3.29.

a) Como as balas são iguais, o que diferencia uma distribuição da outra é a quantidade de balas recebidas por cada uma das crianças. Sejam então x_1, x_2 e x_3 as quantidades de balas recebidas pelas crianças. Deseja-se calcular quantas são as soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ com cada $x_i \geq 0$. Para fazer esse cálculo, será utilizado o que às vezes é chamado de método da “barra-bola”. Imagine então 12 bolas e 2 barras verticais. As soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, $x_i \geq 0$, são as permutações desses 14 objetos.

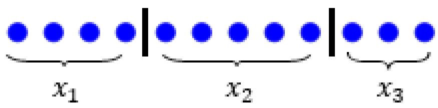


Figura 71: Bolas e barras

Portanto a resposta procurada é $P_{14}^{12,2} = \frac{14 \times 13}{2} = 91$.

b) Como cada criança deve receber pelo menos uma bala, então distribua uma bala para cada uma delas. As 9 balas que restaram devem ser distribuídas para as três crianças em quantidades y_1, y_2 e y_3 tais que $y_1 + y_2 + y_3 = 9$ com cada $y_i \geq 0$. Como exposto no item anterior, a quantidade de soluções dessa equação é dada por

$$P_{11}^{9,2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55.$$

Solução do Exercício 3.30.

a) Botões brancos quadrados distinguem-se pelo tamanho. Como só há um botão de cada tipo, segue que na caixinha de Lilavati há exatamente 3 botões brancos quadrados: um pequeno, um médio e um grande.

b) Como são 3 possibilidades para tamanho, 2 possibilidades para a forma e 3 possibilidades para cor, aplicando o princípio multiplicativo, encontra-se que o número de possíveis tipos de botões é dado pelo produto $3 \times 2 \times 3 = 18$. Por outro lado, como não há botões pequenos redondos (seriam 3, um para cada cor) nem botões grandes pretos (seriam 2, um para cada forma) e só há um botão de cada tipo, o total de botões na caixinha de Lilavati é $18 - (3 + 2) = 13$. Outra solução equivalente (mais longa e trabalhosa) é fazer uma tabela listando todos os tipos possíveis de botões e depois excluir os pequenos redondos e os grandes pretos.

Solução do Exercício 3.31.

a) Se João pintar o quadrado de azul, ele terá as escolhas vermelho e amarelo para o triângulo. Se ele pintar o quadrado de vermelho, ele terá as escolhas azul e amarelo para o triângulo. Finalmente, se ele pintar o quadrado de verde, ele terá as escolhas azul, vermelho e amarelo para o triângulo. Então, segue pelo princípio aditivo que João pode pintar a figura de $2 + 2 + 3 = 7$ maneiras diferentes.

b) Se João escolher azul ou vermelho para o triângulo, cada um dos quadrados poderá ser pintado de duas cores. Assim, pelo princípio multiplicativo, há $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ maneiras distintas de se pintar a figura. Se ele escolher amarelo para o triângulo, cada quadrado poderá ser pintado de três cores. Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $1 \times 3 \times 3 \times 3 = 27$ maneiras distintas de se pintar a figura. Portanto, como na primeira escolha há 16 maneiras de se pintar a figura e na segunda escolha há 27 maneiras, conclui-se que pelo princípio aditivo que há $16 + 27 = 43$ das maneiras distintas de pintar a figura.

Solução do Exercício 3.32: Fixando inicialmente o 1 na casa das dezenas de milhar: dessa forma, todos os números com tal característica irão aparecer antes do 23154 na fila. Assim, existem 4 possibilidades de escolha de um número para a casa dos milhares, 3 possibilidades de escolha de um número para a casa das centenas, duas possibilidades para as dezenas e 1 para as unidades. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ números tendo o 1 como algarismo inicial.

Fixando o 1 na casa dos milhares. Observe que em função da ordenação crescente, o 2 deve ocupar necessariamente a casa das dezenas de milhar. Então, existem 3 opções de escolha para a ocupação da casa das centenas, 2 para as dezenas e 1 para as unidades. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $3 \times 2 \times 1 = 6$ números tendo o 2 como algarismo inicial e posteriormente o 1.

Finalmente, fixando o 1 na casa das centenas, então em função da ordenação crescente o número será da forma:

$\underline{\;2\;}\quad \underline{\;3\;}\quad \underline{\;1\;}\quad \underline{\;?\;}\quad \underline{\;?\;}$

Dessa maneira, existem duas opções fixadas desses três primeiros valores, 23145 ou 23154. Portanto, pelo princípio aditivo existem $24 + 6 + 1 = 31$ números em posições anteriores ao valor dado, sendo que 23154 irá ocupar a 32^{a} posição na fila ordenada.

Solução do Exercício 3.33: Representando os cariocas por $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, os baianos por $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ e os paraenses por $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$.

Se deseja que pessoas do mesmo estado estejam juntas daí basta permutar as letras $C \;\; B \;\; P$, isso pode ser feito de $3!$ maneiras, mas para cada uma dessas possibilidades os elementos de C, B e P podem permutar entre si. Daí a resposta será $3! \times 3! \times 4! \times 5! = 103680$ maneiras.

Solução do Exercício 3.34: Dividindo o problema em três casos, tem-se:

1º caso: Uma bola em cada casa:

Para a bola vermelha há 4 possibilidades

Para a bola vermelha há 3 possibilidades

Para a bola vermelha há 2 possibilidades

Pelo Princípio Multiplicativo teremos $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras

2º caso: 3 bolas em uma única casa:

Supondo que as três bolas sejam uma bola “branca”, daí terá 4 maneiras de colocar essa “bola” nas casas, mas a ordem das bolas é importante, daí terá $3!$ possibilidades. Pelo Princípio Multiplicativo teremos $4 \times 3! = 24$ maneiras.

3º caso: 2 bolas em uma única casa e uma casa com uma bola.

Calculando as maneiras de fazer as escolhas das bolas, tem-se: Basta escolher 2 bolas das três, onde a ordem é importante, daí encontra-se 3×2 maneiras. Para cada uma dessas maneiras há 4 possibilidades para as duas bolas e 3 possibilidades para uma bola, ou seja, 4×3 maneiras. Assim, pelo Princípio Multiplicativo encontra-se então, $3 \times 2 \times 4 \times 3 = 72$ maneiras e pelo princípio aditivo encontra-se $24 + 24 + 72 = 120$. Portanto após as três bolas serem jogadas, há 120 maneiras diferentes de elas aparecerem nas casas do tabuleiro.

Solução do Exercício 3.35.

a) Há a disposição 3 cores: amarelo, vermelho e azul.
Para o triângulo A temos 3 possibilidades.
Para o triângulo C temos 2 possibilidades.
Para o triângulo E temos 1 possibilidades.
Para o triângulo B temos 1 possibilidade.
Para o triângulo D temos 1 possibilidade.
Para o triângulo F temos 1 possibilidade.

Pelo Princípio Multiplicativo encontra-se $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 6$ modos diferentes.

b) Para o triângulo A há 3 possibilidades.
Para o triângulo C temos 1 possibilidade.
Para o triângulo E temos 2 possibilidades.
Para o triângulo B temos 2 possibilidades.
Para o triângulo D temos 1 possibilidade.
Para o triângulo F temos 1 possibilidade.

Pelo Princípio Multiplicativo encontra-se $3 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$ modos diferentes.

c) Para o triângulo A há 3 possibilidades.

Para o triângulo C temos 1 possibilidade.

Para o triângulo E temos 1 possibilidade.

Para o triângulo B temos 2 possibilidades.

Para o triângulo D temos 2 possibilidades.

Para o triângulo F temos 2 possibilidades.

Pelo Princípio Multiplicativo encontra-se $3 \times 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ modos diferentes.

d) Contando de quantos modos diferentes é possível colorir o hexágono, tem-se, ao dividir essa contagem nos seguintes casos, dependendo das repetições das cores nos triângulos A, C e E:

- Os triângulos A, C e E devem ser coloridos com três cores diferentes. Vimos no item (a) que nesse caso o hexágono pode ser colorido de 6 modos diferentes.

- Dois dos triângulos A, C e E tem uma mesma cor e o terceiro triângulo tem uma cor diferente. Cabe destacar e identificar que esse caso pode acontecer de três maneiras diferentes, pois o triângulo que tem uma cor diferente pode ser o A ou pode ser o C ou pode ser o E. De acordo com o item (b) conclui-se que ao todo esse caso pode acontecer de $12 + 12 + 12 = 36$ maneiras diferentes.

- Os triângulos A, C e E devem ser coloridos com uma única cor. Como demonstrado no item (c) que nesse caso o hexágono pode ser colorido de 24 maneiras diferentes.

Portanto existem $6 + 36 + 24 = 66$ maneiras diferentes de colorir o hexágono de modo que dois triângulos vizinhos tenham cores diferentes.

Solução do Exercício 3.36: Deve-se, primeiramente, arrumar as consoantes e, depois, entremear as vogais. O número de modos de arrumar em fila as consoantes B, L, G, R é $P_4 = 4! = 24$. Arrumadas as consoantes, por exemplo, na ordem BLGR, deve-se colocar as vogais U, A, O nos 5 espaços da figura. Como não pode colocar duas vogais no mesmo espaço, três dos espaços serão ocupados, cada um com uma vogal e dois espaços ficarão vazios. Então, há $C_5^3 = 10$ modos de escolher os três espaços que serão ocupados e $P_3 = 3! = 6$ modos de colocar as vogais nos espaços escolhidos.

____B ____L ____G ____R ____

A resposta é $24 \times 10 \times 6 = 1440$.

Solução do Exercício 3.37: Seja n o número de elementos do conjunto A. Segue que o número de subconjuntos de A é igual a 2^n. Como B tem $n + 3$ elementos, o número de elementos de B é igual a 2^{n+3}. Pelos dados do problema, é possível identificar que $2^{n+3} = 2^n + 224$. Resolvendo essa equação encontra-se

$$2^{n+3} = 2^n + 224 \iff 2^n \cdot 2^3 = 2^n + 224 \iff 7 \cdot 2^n = 224 \iff 2^n = 32 \iff n = 5$$

Portanto, o conjunto A possui 5 elementos.

Solução do Exercício 3.38: Escolhida a ordem de cada casal, o que pode ser feito de 2^3 modos, é preciso arrumar em fila 4 espaços vazios e 3 casais, o que pode ser feito de C_7^4 modos (escolha dos espaços vazios) vezes $3!$ (colocação de 3 casais nos 3 lugares restantes). Pelo Princípio Multiplicativo a resposta é $2^3 \times C_7^4 \times 3! = 8 \times 35 \times 6 = 1680$ modos.

Solução do Exercício 3.39: O time tem que ter uma ou duas meninas. No último caso, existem C_7^2 maneiras de se escolher dois meninos. Se o time só tiver uma menina (e aqui há duas possibilidades), então o time pode ser completado com a adição de três meninos, o que pode ser feito de C_7^3 maneiras diferentes. Portanto, existem ao todo,

$C_7^2 + 2 \times C_7^3 = 21 + 2 \times 35 = 21 + 70 = 91$ times possíveis.

Outra maneira é escolher o time sem mulheres, que pode ser feito C_7^4 maneiras.

O total de time que se pode ter é C_9^4.

A resposta é $C_9^4 - C_7^4 = 126 - 35 = 91$ times possíveis.

Solução do Exercício 3.40: O primeiro time pode ser escolhido de C_{10}^5 maneiras. Esta escolha determina completamente o segundo time. No entanto, este cálculo conta cada par de times duas vezes. Portanto a resposta é $\frac{C_{10}^5}{2} = \frac{252}{2} = 126$.

4. ALIÁS, PARA QUE SERVEM ARRANJOS?

Até o presente momento foram citados o Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo, Permutações e Combinação. Provavelmente o leitor deve estar se perguntando: onde estão os **ARRANJOS**?

O aluno/professor ao pesquisar sobre arranjos nos livros didáticos do ensino médio se depara com o seguinte:

Arranjos simples de n elementos tomados p a p $(p \leq n)$ são agrupamentos ordenados diferentes que se podem formar com p dos n elementos dados. Indica-se por $A_{n,p}$ ou A_n^p o total desses agrupamentos, que calculamos assim:

$$A_n^p = n\,(n-1).(n-2)\ldots(n-p+1)$$

ou

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Durante a caminhada deste autor no magistério, foi identificado o excessivo foco nesta fórmula e os alunos pensavam o seguinte: "Se a ordem importa então vamos usar arranjo".

Observe dois exemplos:

1) Quantos números de 2 algarismos diferentes podemos escrever com algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9?

Solução: Então o aluno entendia que a ordem era importante, pois $12 \neq 21$ e aplicava a fórmula de arranjo.

$$A_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = 72$$

Resposta correta do aluno**.**

2) Quantos números de 2 algarismos podemos escrever com algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9?

Solução: Então o aluno entendia que a ordem era importante, pois $12 \neq 21$ e aplicava a fórmula de arranjo.

$$A_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = 72$$

Resposta errada, pois a ordem dos algarismos importa, mas eles não são distintos. Nos dois exemplos a aplicação da fórmula de arranjos precisa de mais restrições além da ordem. Isso só complica as coisas na Análise Combinatória.

Enfrentando os mesmos exemplos com outra postura encontra-se:

1) **Solução:** Há duas decisões a serem tomadas: escolher um número para a dezena e um número para unidade. 9 modos para as dezenas e 8 para unidade, pois não se pode repetir o da dezena. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo a resposta é $9 \times 8 = 72$.

2) **Solução:** Há duas decisões a serem tomadas: escolher um número para a dezena e um número para unidade. 9 modos para as dezenas e 9 para unidade. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo a resposta é $9 \times 9 = 81$.

Conclui-se, então, que **é possível usar o Princípio Multiplicativo para resolver problemas desse tipo.** Aplicar o conceito de arranjo simples é o mesmo que aplicar de forma direta o Princípio Multiplicativo.

Então, retoma-se a pergunta deste tópico: **ALIÁS, PARA QUE SERVEM ARRANJOS?**

A resposta encontrada por meio da presente pesquisa foi: **Praticamente para nada dentro de uma proposta de ensino- aprendizagem no Ensino Médio, pois se torna mais uma fórmula para memorizar.** E neste trabalho expôs que compreender o que está sendo feito é mais importante do que decorar uma fórmula e aplicá-la. Recomenda-se dominar os métodos citados inicialmente (Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo, Permutações e Combinação) e depois de resolver muitos exercícios e compreendê-los, seria válido conhecer o que é arranjo por causa das avaliações externas como o ENEM.

Observe a questão 165 do ENEM de 2009: Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

(a) Uma combinação e um arranjo, respectivamente.
(b) Um arranjo e uma combinação respectivamente.
(c) Um arranjo e uma permutação, respectivamente.
(d) Duas combinações.
(e) Dois arranjos.

Nesta questão a resposta correta é a letra A. Mesmo não conhecendo nada de arranjo e dominando os outros métodos, é possível resolver esta questão por eliminação das alternativas. Portanto recomenda-se ao professor, depois de bem trabalho os métodos de contagem (Princípio Multiplicativo, Princípio Aditivo, Permutações e Combinação), faça um breve comentário sobre arranjo associando-o diretamente ao Princípio Multiplicativo.

Considerações Finais

O objetivo principal desse trabalho foi desenvolver o ensino de Análise Combinatória por meio de resolução de problemas com o intuito de explorar os principais métodos de contagem com foco na compreensão do processo combinatório a partir do uso inteligente do princípio multiplicativo.

Fugiu-se do tradicional: teoria, fórmulas e exercícios. Neste trabalho foi feito praticamente o caminho inverso, isto é, foi apresentado o exercício motivador, e a partir dele desenvolvido a ideia teórica. Em seguida, foram propostos exercícios diversos com a intenção de acostumar o aluno/professor a entender o problema e não tentar classificá-lo em arranjos, permutações ou combinações, pois, os tipos de agrupamentos surgem de forma natural.

A utilização de tabelas, de diagramas, de esquemas e o desenvolvimento de estratégias aplicadas nos problemas permitiu criar conexões lógicas para dá sentido em cada fórmula apresentada/utilizada. Foram apresentados também muitos problemas que inicialmente pareciam complicados e que puderam ser resolvidos quando associados a problemas mais simples.

Além disso, ficou evidenciado durante o estudo que não há necessidade de expor arranjo de forma equivalente aos outros métodos de contagem, pois o mesmo é uma aplicação direta do princípio multiplicativo.

Espera-se que este trabalho ajude você, aluno/professor, a não ter mais receio em estudar e ensinar Combinatória. Quanto mais exercícios forem resolvidos e compreendidos a sua confiança aumentará, daí se sentirá motivado a resolver mais problemas.

REFERÊNCIAS

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: interação e tecnologia**, volume 2. 2 ed. São Paulo: Leya, 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. **Pcn+ Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 15 de dez 2020.

CARVALHO, Paulo. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. Rio de Janeiro, IMPA, 2017.

DANTE, L.R, **Matemática: Volume único**: Ática, São Paulo, 2005.

FOMIN, D.et al. **Círculos Matemáticos.** Tradução de Valéria de Magalhães Iório.

IEZZI ET AL, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações**, volume 2: ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2013.

LIMA E.L. **Temas e problemas.** Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio** – volume 2 /6. ed – Rio de Janeiro: SBM 2006.

MORGADO, A.C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**, SBM, Rio de Janeiro, 2006.

Multicurso Ensino Médio. **Matemática, segunda série**. Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2008.

PEREIRA, André Gustavo Campos. **Análise Combinatória e probabilidade**. Natal: EDUFRN, 2012.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **Matemática ensino médio**. Saraiva, São Paulo,2010.

SOUZA, J.R de. **Novo olhar Matemática**. FTD, São Paulo, 2013.

Google - Questão Enem 2009.
Disponível em: https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/enem-2015-correcao-da-questao-170/. Acesso em 22/01/2021.

Google – OBMEP, Programas e Portais. Disponível em: http://www.obmep.org.br/. Acesso em 26/ 11/2020.