UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS – CCE

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DOUGLAS COSTA EIRIZ

EXPLORANDO AS RELAÇÕES ENTRE FUNÇÃO AFIM E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

VITÓRIA - ES

ABRIL 2021

DOUGLAS COSTA EIRIZ

EXPLORANDO AS RELAÇÕES ENTRE FUNÇÃO AFIM E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

VITÓRIA - ES

ABRIL 2021

DOUGLAS COSTA EIRIZ

EXPLORANDO AS RELAÇÕES ENTRE FUNÇÃO AFIM E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em ______ de ________________ de 2021.

____

Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva
(Orientador)
UFES

____

Prof. Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer
UFES

____

Prof. Dr. Nelson Machado Barbosa
UENF

Este trabalho é dedicado a minha esposa, aos meus filhos aos meus pais, à memória do meu irmão Deiver Costa Eiriz, à memória dos professores Mikhail, Liliana Leon e Geraldo (UENF) e a todos que um dia trabalharam em prol da ciência e do conhecimento.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pai e criador de todas as coisas, o qual me permitiu chegar até aqui.

Agradeço a minha esposa Patrícia Sarte Miranda pelo companheirismo, entre outras coisas, compartilhando comigo de todos os momentos de luta e dificuldade. Também aos meus filhos pela confiança depositada em mim, trazendo força de vontade a cada dia.

Agradeço a todos os amigos que o PROFMAT me proporcionou, sejam da UENF ou da UFES.

Agradeço aos professores do PROFMAT UFES pelo acolhimento e oportunidade, em especial Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva, meu orientador, que acreditou na minha proposta e mostrou os caminhos a serem trilhados, e ainda Prof. Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer e Prof. Dr. Nelson Machado Barbosa (UENF) que se dispuseram a compor a banca deste trabalho.

Aos amigos Eduardo Corrêa, Guilherme Coelho, Gilberto Caetano e Humberto Filho.

À Universidade Federal do Espírito Santo, foi uma honra passar por aqui.

"Se um dia contarem a minha história, que digam que andei com gigantes. Homens se erguem e caem como trigo, mas esses nomes jamais perecem." (Homero)

Resumo

É notável que várias foram as evoluções ocorridas no ensino da Matemática ao longo das últimas décadas, mas ainda assim são muitos os desafios por parte dos professores, uma vez que a disciplina ainda é tida como uma das grandes responsáveis pelos altos índices de reprovação dos alunos. Muito se deve à forma, algumas vezes empobrecida, com que a disciplina é repassada aos alunos, ou ainda, se deve à falta de contextualização e inter-relações entre os vários conteúdos, seja por meio do material didático ou até mesmo por despreparo do educando. Desta forma, este trabalho tem como objetivo explorar algumas relações existentes entre os temas de Função Afim e Progressão Aritmética, através da construção do pensamento dos alunos. De maneira geral, o presente estudo se define por uma pesquisa qualitativa baseada em uma sequência didática que consiste em selecionar uma amostra de alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola pública estadual; revisar os temas propostos; aplicar uma atividade instrumento de pesquisa; e ainda um momento de retorno com os alunos e análise das atividades. Tudo isso visando despertar nos mesmos a ideia que ambos os conteúdos de função afim e progressão aritmética estão relacionados por algumas particularidades e que há problemas que podem ser modelados e resolvidos por ambos os temas. Por fim, será apresentada uma análise de toda a atividade exploratória, considerando as soluções propostas pelos alunos, seja ela certa ou errada. Após todos os dados analisados, os resultados mostraram como é importante a utilização desse tipo de relação entre conteúdos, até então tido como diferentes, para a construção do conhecimento por parte dos alunos.

Palavras-chaves: Ensino. Funções. Função Afim. Sequências. Progressão Aritmética.

Abstract

It's noteworthy the great advance occurred in Mathematics teaching along the latest decades, but there are many challenges to be faced by the teachers yet, since the discipline is still considered one of the main responsible for the high failure rates among students. Much of this, is due to the way, sometimes impoverished, which the discipline is taught, or even, due to the lack of contextualization and interrelationships between the various contents, either through didactic material or even by the student's unpreparedness. So, this work aims to explore some existing relationships between the themes of Affine Function and Arithmetic Progression, through the construction of students' thinking. In general, the present study is defined by a qualitative research based on a didactic sequence that consists of selecting a sample of students from the 1st high school year in a state public school; review the proposed themes; apply a research instrument activity; and a moment to return to the students and analyze the activities. The final aim is to arouse them the idea that both, the content of affine function and arithmetic progression are related by some peculiarities and that there are problems which can be modeled and solved by both themes. Finally, an analysis of the entire exploratory activity will be presented, considering the solutions proposed by the students, whether it's right or wrong. After analyzing all data, the results showed how important it is to use this type of relation between contents, previously considered different, for the students' knowledge to be constructed.

Key-words: Teaching. Functions. Affine Function. Sequence. Arithmetic Progression.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

PISA	*Programme for International Student Assessment*
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
CBEE	Currículo Básico Escola Estadual
TFP	Teorema Fundamental da Proporcionalidade
PA	Progressão Aritmética
PG	Progressão Geométrica
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
ENA	Exame Nacional de Acesso
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PAEBES	Programa de Avaliação da Educação Básica do Espírito Santo

Lista de símbolos

$\in$	Pertence
$\mathbb{R}^2$	Plano cartesiano
$\geq$	Maior ou igual
$\leq$	Menor ou igual
$\exists$	Existe
$\subset$	Está contido
$\neq$	Diferente
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
Π	Letra grega Pi
Δ	Letra grega Delta
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$>$	Maior
$<$	Menor
$\cap$	Interseção
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não negativos
$\approx$	Aproximadamente igual
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\forall$	Para todo
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto dos números inteiros não negativos

$\|x\|$	Módulo de um número
Im	Conjunto imagem de uma função
$\mathbb{R}_+^*$	Conjunto dos números reais não negativos exceto o zero
α	Letra grega Alfa

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo apresenta uma abordagem inicial de caráter introdutório acerca do ensino da Matemática, sua evolução ao longo das décadas, bem como suas características atuais. Serão apresentados as devidas justificativas e os objetivos do presente trabalho, e ainda uma breve explanação sobre os capítulos seguintes.

1.1 Considerações Iniciais

Ao longo de quase 80 anos, o ensino da Matemática passou por mudanças significativas. No último século, por volta dos anos 40 e 50, caracterizou-se o ensino da Matemática pela mecanização e memorização, processo conhecido por ensino tradicional (PONTE, 2004).

Com o movimento da Matemática Moderna, o ensino da Matemática na década de 60 passou por uma considerável reformulação, introduzindo-se uma nova linguagem caracterizada pela utilização de símbolos da Lógica e da Teoria dos Conjuntos. Na década de 70 são evidenciados o formal e o abstrato, sem aplicações objetivas (SILVA, 2005).

Devido ao fracasso dos resultados da aprendizagem da Matemática nas décadas anteriores, nos anos 80 objetivou-se a valorização da aprendizagem, a compreensão da relevância de aspectos: sociais, antropológicos, cognitivos e linguísticos (BRASIL, 1998).

Na década de 90, surge o ensino renovado, mediante às conclusões de que os resultados negativos não estavam nas atividades de cálculos e sim nas tarefas ditas complexas que envolviam raciocínio atrelado à flexibilidade e criticidade (PONTE, 2004).

Embora seja notável a evolução no processo de ensino da Matemática ao longo dos anos, a disciplina ainda continua sendo uma das grandes responsáveis pelos altos índices de reprovação dos alunos. Os problemas pertinentes ao processo de ensino da mesma, não são novidades e apresentam-se de várias formas e distintos graus de complexidade. Toda essa problemática traduz-se em resultados visíveis, como apresentado no relatório de 2018 do PISA (*Programme for International Student Assessment* – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), que traz o Brasil, no contexto da Matemática, com um total de 384 pontos comparados aos 489 da média mundial. O relatório retrata ainda que cerca de 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de matemática, considerado mínimo para o exercício pleno da cidadania (BRASIL, 2019).

Mediante tais resultados, identifica-se o quão necessário é repensar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e a forma, muitas vezes empobrecida, com que essa é apresentada.

1.2 Justificativa

Especificamente, tratando do aluno do ensino médio, é plausível que o mesmo anseie por um ensino da Matemática que, além de temas importantes, traga uma abordagem clara e interessante acerca das variadas aplicações e interpretações de determinado assunto nas demais disciplinas ou até mesmo no seu dia-a-dia. De fato, há uma série de problemas que podem auxiliar no entendimento de determinado conteúdo, podendo proporcionar ao discente várias possibilidades de como entender, resolver e interpretar os resultados desses problemas. Na maioria das vezes, as dificuldades, por parte dos alunos na aprendizagem de conteúdos matemáticos, são resultado da utilização de estratégias de ensino inadequadas, distanciando a construção do conhecimento de um resultado positivo e satisfatório (LOCATELLI et al., 2009).

Nesta perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), trazem que: "a Matemática no ensino médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência com suas características estruturais específicas". E ainda recomendam que haja uma contextualização, interdisciplinaridade e competências do conhecimento escolar, uma vez que o desenvolvimento dessas habilidades pode acarretar em uma aprendizagem significativa, como resultado da mobilidade cognitiva do educando através de suas dimensões pessoal, social e cultural (BRASIL, 2002).

Considerando o estudo das Funções, temos que, na maioria das vezes, esse ocorre de maneira isolada, deixando de lado uma rica oportunidade de explorar a integração do conteúdo com, por exemplo, as Progressões Aritmética e Geométrica e Matemática Financeira. Os PCNs afirmam que conteúdos que se relacionam de alguma forma, ainda que sejam aparentemente diferentes, devem ter suas conexões exaltadas de maneira a melhorar o entendimento por parte do aluno (BRASIL, 2002).

O Currículo Básico Escola Estadual (CBEE) do Espírito Santo (ES, 2009), enfatiza a possibilidade de se estabelecer relações entre a Progressão Aritmética e a Função Afim, de forma a favorecer a concepção de conceitos algébricos de maneira contextualizada e significativa, permitindo a construção das conexões entre os conteúdos, aproveitando assim, o máximo das relações existentes. Os PCNs ainda ressaltam que as progressões aritméticas e geométricas, são nada mais do que casos particulares de funções (BRASIL, 2011) .

1.3 Objetivo

Este trabalho tem a finalidade de explorar como as relações entre Função Afim e Progressão Aritmética podem promover o aprendizado desses temas por meio da construção do pensamento dos estudantes. Os alunos envolvidos na pesquisa são do 1º ano do ensine médio, de uma escola estadual no município de Cachoeiro de Itapemirim, Espírito Santo.

Como objetivos específicos podemos citar:

- Por meio de revisão bibliográfica dos conteúdos, mostrar que uma progressão aritmética se trata de uma restrição de uma função afim ao conjunto dos números naturais;
- Apresentar conceitos e ferramentas necessárias para que o aluno possa construir a ideia de que ambos conteúdos estão relacionados por determinadas particularidades;
- Levar o aluno a perceber que alguns problemas podem ser resolvidos por ambos os conceitos de Função Afim e Progressão Aritmética.

1.4 Organização do Trabalho

O Capítulo 2 - Referencial Teórico, traz o embasamento que se fez necessário para a caracterização desta pesquisa, desde aspectos gerais do processo ensino aprendizagem, até temas específicos como as teorias de Funções, Função Afim, Sequências, Progressão Aritmética e ainda uma comparação entre esses dois últimos.

O Capítulo 3 - Aspectos Metodológicos, trata sobre as particularidades da pesquisa, parâmetros e sobre os sujeitos envolvidos. Descreve ainda a atividade investigativa aplicada e o procedimento da pesquisa.

O Capítulo 4 - Sequência Didática e Análise dos Dados, por sua vez, descreve cada parte da atividade exploratória e traz uma análise acerca de cada questão.

Por fim, o Capítulo 5 - Considerações Finais, apresenta a finalização do presente estudo por meio da conclusão das ideias apresentadas ao longo do mesmo, apontando os objetivos alcançados, aplicações e perspectivas para futuros trabalhos.

Capítulo 2

Referencial Teórico

Neste capítulo serão abordados, dentro da perspectiva do processo ensino e aprendizagem, conceitos de funções e sequências que servirão de base para a explanação dos temas de Função Afim e Progressão Aritmética.

2.1 Ensino Aprendizagem

Para tratar do processo ensino aprendizagem no âmbito da Educação Matemática, necessariamente deve-se pensar na transposição dos saberes, ou mais especificamente transposição didática.

Segundo Pais (2002b), A transposição didática pode ser entendida como um caso especial da transposição dos saberes, sendo esta entendida no sentido da evolução das ideias, no plano histórico da produção intelectual da humanidade. No caso das ciências e da matemática, essa evolução ocorre sob um controle mais intenso dos respectivos paradigmas.

Quanto a transposição, Pais (2002b) difere ainda o saber do conhecimento, sendo o primeiro caracterizado por ser, de certa forma, descontextualizado, associado apenas a um contexto científico histórico e cultural. O conhecimento por sua vez condiz com um contexto mais individual e subjetivo, fruto de experiências pessoais. Dessa forma, entende-se que cada aluno sempre traz consigo algum conhecimento prévio, e quando o professor consegue abordar um novo conteúdo fazendo as devidas relações, cada aluno reage de forma subjetiva segundo a sua experiência.

Em outras palavras, cabe ao professor realizar adequações de forma a traduzir o conhecimento científico como conteúdo didático, objetivando sempre atingir o entendimento do aluno, sem a omissão de partes importantes.

Pais (2002a), define ainda a transposição didática como um conjunto de transformações adaptativas capaz de tornar determinado conteúdo apto a ser tratado como objeto de ensino.

Ao professor de Matemática cabe o importante papel de definir a forma como o conteúdo será apresentado ao aluno. Em específico para o estudo da função afim e da progressão aritmética, tem-se o desafio de construir uma transposição didática, diferente das que comumente são apresentadas nos livros didáticos, de forma a conectar os conteúdos com as adaptações necessárias.

Esta pesquisa buscará explorar as relações entre Função Afim e Progressão Aritmética, por meio de transposição didática, observando os ganhos cognitivos por parte dos alunos.

2.2 Funções

O conceito de função, em sua total abrangência, está presente nos mais variados ramos da ciência e teve origem na insistência dos antigos filósofos na busca pela compreensão da realidade a fim de permitir estudar e descrever os fenômenos naturais. Desde então, ao longo dos séculos, o conceito de função foi sendo desenvolvido e aprimorado (CARAÇA, 1989).

Segundo Youschkevitch (1976), o desenvolvimento do conceito de função é dividido em três principais etapas ao longo da história:

- Antiguidade: Ainda não existiam as definições de função e variável, mas já haviam casos de dependência entre quantidades. Cada situação problema a ser resolvida demandava de uma nova análise, pois não haviam registros de padrões ou regras a serem seguidos em situações semelhantes.
- Idade Média: Tem início a noção de função sob a forma geométrica e mecânica, mas ainda sem descrições gráficas e verbais. Foram vários os trabalhos da época que trouxeram o conceito de função de forma implícita.
- Período Moderno: Surgem as expressões analíticas, que revolucionaram a Matemática com a eficácia apresentada, ocupando assim um lugar de destaque entre as ciências exatas. Nesse período foram associados também termos e conceitos importantes ao estudo das funções como: variável independente, constante, parâmetro, função propriamente dita, e ainda a fundamentação da notação $f(x)$, utilizada até os dias atuais.

Desta forma, nota-se que a construção do conceito de função passou por diversas etapas ao longo do tempo. Nesta evolução conceitual a representação de função deu-se de várias formas: como relação entre grandezas variáveis, como expressão analítica, como relação entre conjuntos e ainda como transformação.

Lima (2013) diz que, se interpretada por um ponto de vista estritamente matemático, a definição de função é estabelecida por três fundamentais elementos: a lei de associação, o conjunto domínio e o conjunto contradomínio. Onde os elementos do domínio estão relacionados aos elementos do contradomínio, segundo a lei de associação, ou seja, uma função só será bem definida se conhecidos esses três elementos.

É válido ressaltar que, no contexto de uma sala de aula no ensino básico, não há a necessidade de prender-se em uma linguagem matemática tão formal, desde que sejam tomados devidos cuidados para não haver falhas que venham a impedir ou limitar o desenvolvimento da aprendizagem por parte dos alunos (LIMA, 2013).

Definição 2.1 (LIMA, 2013): Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer. Uma função é uma relação $f : X \to Y$ em que, cada elemento $x \in X$, associa-se a um e somente um elemento $y \in Y$.

Dessa forma,

I. Os conjuntos X e Y são chamados domínio e contradomínio de f, respectivamente;

II. O conjunto $f(X) = \{y \in Y; \exists\, x \in X, f(x) = y\} \subset Y$ é chamado imagem de f;

III. Dado $x \in X$, o (único) elemento $y = f(x) \in Y$ correspondente é chamado imagem de x.

Além disso,

I. Uma função $f : X \to Y$ chama-se **injetiva** quando seus diferentes elementos pertencentes a X são transformados por f em elementos diferentes em Y. Assim, f será injetiva quando:

$$x \neq x' \text{ em } X \to f(x) \neq f(x').$$

Exemplo I: A correspondência que associa cada número natural n com seu sucessor $n + 1$ define uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com $s(n) = n + 1$.

Trata-se de uma função injetiva uma vez que números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

II. Uma função $f : X \to Y$ chama-se **sobrejetiva** quando, para qualquer elemento $y \in Y$, é possível encontrar ao menos um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo II: Sejam S o conjunto dos segmentos de reta do plano Π e Δ o conjunto das retas desse mesmo plano. A regra que associa cada segmento $AB \in S$ a sua mediatriz $g(AB)$ define uma função $g : S \to \Delta$.

Trata-se de uma função sobrejetiva, pois toda reta do plano é mediatriz de algum segmento de reta, ou seja, todo elemento de Δ será imagem de algum elemento de S.

III. Uma função $f : X \to Y$ chama-se **bijeção** ou **correspondência biunívoca** entre X e Y, quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

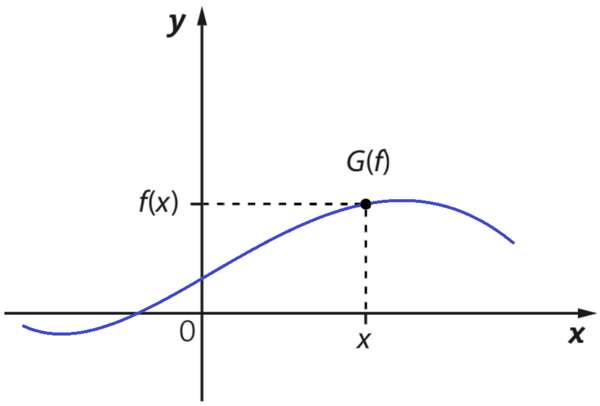
Exemplo III: Sejam $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Definindo $f : X \to Y$ pela regra de associação $f(n) = 2n$, temos uma correspondência biunívoca, onde $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$, $f(4) = 8$ e $f(5) = 10$.

2.2.1 Gráfico de uma Função

O gráfico de uma função definida de forma $f : X \to Y$ será o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$ (figura 1).

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in X\}.$$

Figura 1 – Gráfico de uma função



Fonte: Elaborado pelo autor

Lima (2013) traz que, a terminologia considerada adequada é que: um subconjunto qualquer de $X \times Y$ será gráfico de uma relação de X para Y se, e somente se, esse cumprir as condições G_1 e G_2 apresentadas a seguir:

- G_1: Para todo $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada é x.
- G_2: Se $p = (x, y)$ e $p' = (x, y')$ são pares pertencentes a G com a mesma primeira coordenada x então $y = y'$ (isto é, $p = p'$).

Em suma, estas condições podem ser resumidas em apenas uma, de forma que para cada $x \in X$ existe um, e somente um, $y \in Y$ tal que $(x, y) \in G$.

Seja uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chamada função real (seus valores são números reais, ou seja, o contradomínio é $\mathbb{R}$) de variável real (a variável independente x assume valores reais, uma vez que seu domínio é subconjunto de $\mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$), seu gráfico pode ser visualizado, de forma simples, como uma linha formada pelos pontos de coordenadas $(x, f(x))$, quando x varia no conjunto X.

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in X, y = f(x)\}.$$

Dessa forma, um ponto (x, y) pertencerá ao gráfico de f se, e somente se, $x \in X$ com os números reais x e y satisfazendo a lei de associação de f. Ou ainda, comumente falando, o gráfico de uma função é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem sua lei de formação.

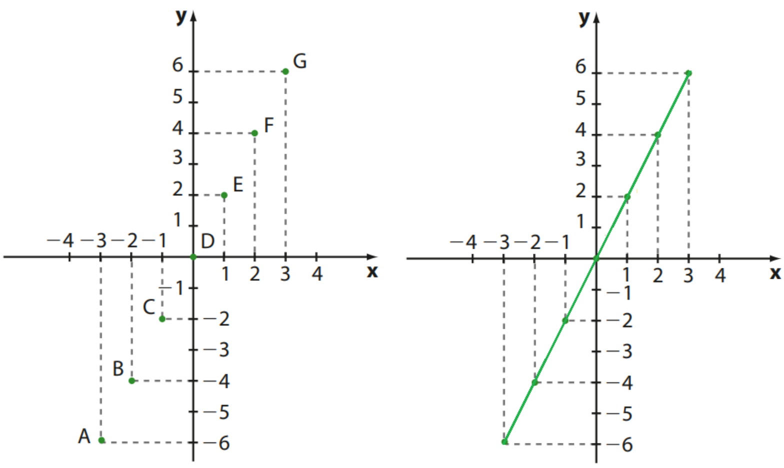
Na educação básica um dos principais recursos utilizado pelos alunos para a representação de gráficos de funções reais é o procedimento de substituição e interpolação. Dada a expressão algébrica de uma função, é feita uma tabela onde são atribuídos valores para a variável segundo o domínio obtendo suas respectivas imagens, formando pontos que serão marcados no plano cartesiano e ligados, quando possível.

Exemplo 2.2 (Adaptado (IEZZI et al., 2016a)): Construir o gráfico da função $f(x) = 2x$, considerando o domínio $D = \{x \in \mathbb{R}; -3 \leq x \leq 3\}$.

Para a construção do gráfico vamos seguir três passos: Construir a tabela de valores para identificação dos pontos, segundo o domínio dado; representar os pares ordenados como pontos no gráfico; e por fim traçar uma reta por sobre os pontos (figura 2).

Figura 2 – Construção de um gráfico no plano cartesiano

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−6	−4	−2	0	2	4	6



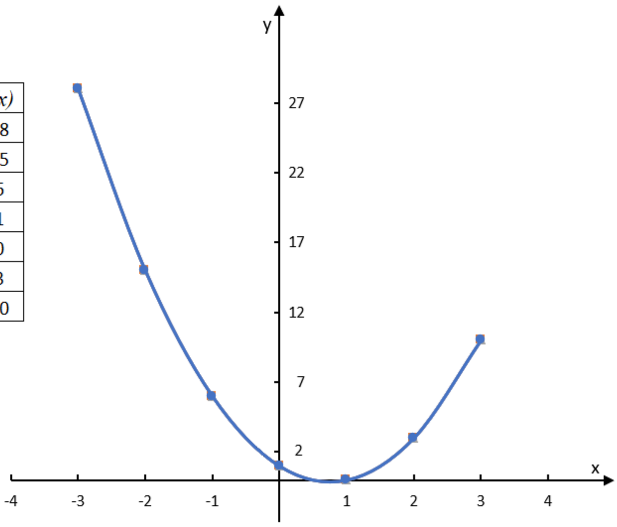
Fonte: Adaptado pelo autor (IEZZI et al., 2016a)

Tal procedimento de construção, apesar de básico e de fácil compreensão, trata-se apenas de mecanização, podendo as vezes não contribuir para uma verdadeira compreensão do gráfico e da lei de função. Vejamos um exemplo em que a mera substituição de valores e representação de pontos pode vir a ocultar elementos importantes do gráfico da função.

Exemplo 2.3 (LIMA, 2012): Considere a função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Suponha que, para esboçar o gráfico de p você monte uma tabela com valores entre -3 e 3, e marque os pontos correspondentes no plano cartesiano (figura 3).

Figura 3 – Esboço de um gráfico no plano cartesiano

x	$p(x)$
-3	28
-2	15
-1	6
0	1
1	0
2	3
3	10

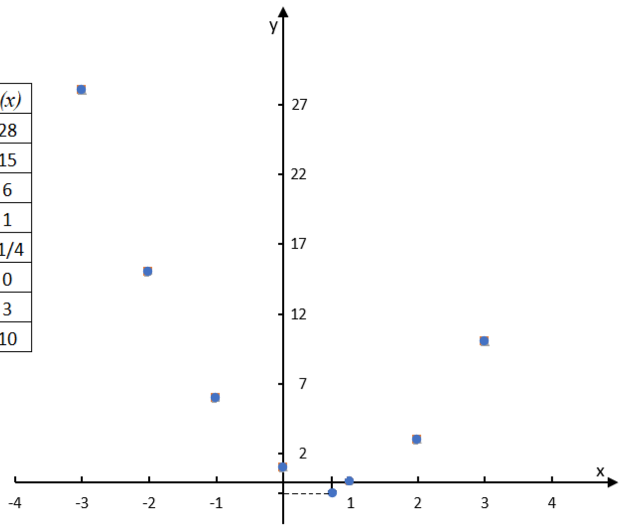


Fonte: Elaborado pelo autor

É fácil perceber que os pontos encontrados sugerem o formato de uma parábola, mas a mera substituição de valores pode deixar escapar informações importantes como o mínimo absoluto da função, que ocorre no ponto $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. É fato que, tratando-se de função quadrática, tem-se métodos acessíveis ao ensino básico, que permitem localizar esse ponto de mínimo (figura 4).

Figura 4 – Pontos representados no plano cartesiano

x	$p(x)$
-3	28
-2	15
-1	6
0	1
3/4	-1/4
1	0
2	3
3	10



Fonte: Elaborado pelo autor

2.2.2 Crescimento e Extremos de uma Função

Nos ensinos fundamental e médio, ao ensinar gráficos é comum apresentar a classificação de funções afim como crescentes ou decrescentes, dependendo do sinal do coeficiente angular; e também a determinação de máximos mínimos de funções quadráticas (de acordo com o sentido da concavidade). É fato que, crescimento e máximos e mínimos não são conceitos restritos apenas a esses tipos de funções. Lima (2012) apresenta uma definição generalizada acerca de crescimento e extremos de uma função.

Definição 2.4 (LIMA, 2012):

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dados x_1, $x_2 \in D$, tem-se que:

I. f será **monótona (estritamente) crescente** se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

II. f será **monótona não decrescente** se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

III. f será **monótona (estritamente) decrescente** se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

IV. f será **monótona não crescente** se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definição 2.5 (LIMA, 2012):

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

I. f será **limitada superiormente** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in D$;

II. f será **limitada inferiormente** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$, para todo $x \in D$;

III. $x_0 \in D$ será um **ponto de máximo absoluto** de f se $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in D$;

IV. $x_0 \in D$ será um **ponto de mínimo absoluto** de f se $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D$;

V. $x_0 \in D$ será um **ponto de máximo local** de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in D \cap]x_0 - r, x_0 + r[$;

VI. $x_0 \in D$ será um **ponto de mínimo local** de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D \cap]x_0 - r, x_0 + r[$.

Dessa forma, a partir de tais definições, podem ser destacados alguns tipos específicos de funções reais de uma variável real, ou seja, funções $f : X \to \mathbb{R}$ que têm como domínio um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e cujos valores $f(x)$, para todo $x \in X$, são números reais. Tais funções são abordadas no decorrer das séries do ensino médio.

2.3 Função Afim

Lima (2013) nos traz o seguinte comentário acerca de terminologias de função afim.

> A maioria dos nossos testes escolares refere-se à função afim como "função do primeiro grau". Essa nomenclatura sugere a pergunta: o que é grau de uma função? Função não tem grau. O que possui grau é um polinômio. [...]. O mesmo defeito de nomenclatura ocorre também com as funções quadráticas, [...]. Elas muitas vezes são chamadas, incorretamente, "função do segundo grau" (LIMA, 2013, p. 95).

Definição 2.6 (LIMA, 2012): Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será denominada função afim quando existirem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Onde b é o valor que a função assume quando $x = 0$, ou seja, $b = f(0)$. E o coeficiente a pode ser determinado a partir do conhecimento de dois valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, assumidos em dois pontos distintos x_1 e x_2. Dessa forma, conhecidos $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$. Obtêm-se:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Exemplo 2.7 (Adaptado (IEZZI et al., 2016a)): Um corretor de imóveis recebe na empresa onde trabalha mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa no valor de R$ 700,00, e uma parte variável correspondente a 2% sobre o valor total das vendas realizadas no mês. Em certo mês, as vendas somaram R$ 300.000,00. Qual seria o salário total do corretor nesse mês?

Para calcular quanto o corretor recebeu, faremos da seguinte forma:

$$700 + 2\%.300000 = 700 + 0,02.300000 = 700 + 6000 = 6700.$$

Resposta: Salário de R$ 6.700,00.

Em outro mês, as vendas somaram apenas R$ 80.000,00. Dessa forma, temos:

$$700 + 2\%.80000 = 700 + 0,02.80000 = 700 + 1600 = 2300.$$

Resposta: Salário de R$ 2.300,00.

Por conclusão toma-se que, para cada total x de vendas no mês, há um certo salário s pago ao corretor. Nesse caso, uma fórmula que expressa o salário s em função de x será:

$$s(x) = 700 + 0,02x.$$

Sendo essa forma um exemplo de função afim.

Exemplo 2.8 (Adaptado (IEZZI et al., 2016a)): Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada, que fica a 15 km de distância. O valor cobrado engloba o preço da parcela fixa (bandeirada) de R$ 4,00 mais R$ 2,20 por quilômetro rodado (não estamos considerando aqui o tempo em que o táxi ficaria parado em um eventual congestionamento). Qual a função afim que expressa o valor a ser pago pela viagem de táxi? E qual o valor pago por Antônio Carlos em sua viagem?

Podemos pensar no valor a ser pago pela corrida de táxi como uma soma onde uma parcela é a parte fixa e a outra depende da quilometragem da viagem. Chamando de x a quilometragem e de $v(x)$ o valor total, temos:

$$v(x) = 2,2x + 4$$

Para calcular o valor total da viagem de Antônio, basta substituir a distância percorrida e calcular $v(15)$:

$$v(15) = 2,2.15 + 4 = 33 + 4 = 37.$$

Resposta: $v(x) = 2,2x + 4$. Valor total de R$ 37,00.

Dados $x, x' \in \mathbb{R}$, escrevemos $x < x'$ para denotar que $x' = x + h$, com $h \in \mathbb{R}$ e $h > 0$. A este número positivo h, que deve ser somado a x para se obter x', chama-se incremento.

Pode-se assim definir a taxa de variação de uma função f no ponto x, para um incremento h, ou seja, a medida da "velocidade" de crescimento de uma função. Conforme demonstrado no teorema a seguir.

Teorema 2.9 (NETO, 2018) Caracterização da Função Afim:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

a) f será uma função afim se, e somente se, a taxa de variação,
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
for constante, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, com $h > 0$. Neste caso, teremos $f(x) = ax+b$, onde a é o valor constante da taxa de varição e $b = f(0)$.

b) Uma função afim dada por $f(x) = ax + b$ será crescente se, e somente se, $a > 0$, e decrescente se, e somente se, $a < 0$.

Demonstração:

a) Sendo f uma função afim dada por $f = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Então,
$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}\\ &= \frac{ax+ab+b-ah-b}{h}\\ &= \frac{ah}{h} = a.\end{aligned}$$
De forma recíproca, considerando a taxa de variação contante e igual a a, tem-se:
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a,$$
para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, com $h > 0$. Em particular, para $x = 0$, obtêm-se:
$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = a \Rightarrow f(h) - f(0) = ah.$$
De forma similar, para o incremento h na passagem de $x - h$ para x, tem-se:
$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} = a,$$
para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, com $h > 0$. Em particular, para $x = 0$, obtêm-se:
$$\frac{f(0)-f(-h)}{h} = a \Rightarrow f(-h) - f(0) = -ah.$$
Considerando $f(0) = b$, obtêm-se $f(h) = ah + b$ e $f(-h) = a(-h) + b$, para todo $h \in \mathbb{R}$ com $h > 0$. Assim, escrevendo x no lugar de h e $-h$ na lei de formação de f, obtêm-se $f(x) = ax + b$.

b) Seja $f(x) = ax + b$. Suporemos f crescente e $h > 0$. Então $x < x + h$ e, sendo f crescente, $f(x) < f(x + h)$, ou ainda, $f(x + h) - f(x) > 0$. Dessa forma,
$$a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0,$$

Devido ao fato de ambos numerador e denominador serem positivos.

Por reciprocidade, se $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, para $x, x' \in \mathbb{R}$, com $x < x'$, temos $x' - x > 0$ e daí,

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = a > 0$$
$$f(x') - f(x) = a(x' - x) > 0.$$

Sendo o segundo membro um produto de dois números positivos, f será crescente pois $f(x) < f(x')$.

A demonstração do item b para o caso f decrescente se, e somente se, $a < 0$, segue de forma análoga. Completando assim a demonstração do teorema.

De forma geral, segundo a taxa de crescimento a, a função afim será crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.

2.3.1 Gráfico da Função Afim

Proposição 2.10 (Adaptado (LIMA, 2013)): O gráfico de uma função afim $f : x \mapsto ax + b$ é uma linha reta.

Demonstração: Para tal prova, basta mostrar que três pontos quaisquer desse gráfico (P_1, P_2 e P_3) são colineares:

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b),$$
$$P_2 = (x_2, ax_2 + b),$$
$$P_3 = (x_3, ax_3 + b).$$

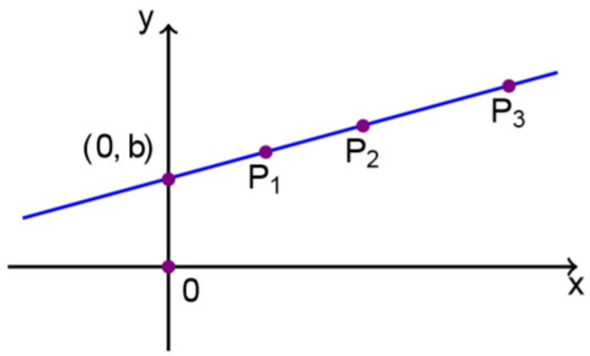
Para que isso ocorra, é suficientemente necessário que o maior dos três números (distâncias entre os pontos) $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual a soma dos outros dois. Partindo do pressuposto que as abcissas x_1, x_2 e x_3 foram numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. Pela fórmula da distância entre dois pontos, temos que:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$
$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2},$$
$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Daí segue imediatamente que (figura 5):

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

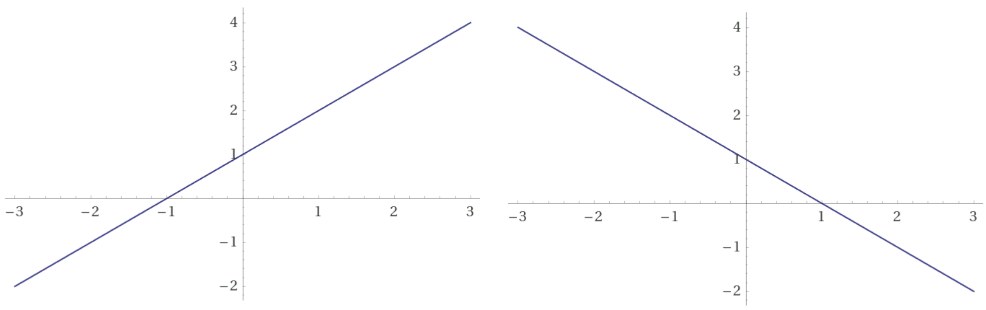
Figura 5 – Pontos colineares



Fonte: Lima (2013)

Por um olhar geométrico, o coeficiente b é a ordenada do ponto onde a reta, representação gráfica da função $f : x \mapsto ax + b$, intersecta o eixo y (figura 5). O número a é o valor constante da taxa de variação ou ainda o coeficiente angular da reta em relação ao eixo horizontal x. Quando $a > 0$ o gráfico de f será uma reta crescente (figura 6a) e quando $a < 0$ a reta será decrescente (figura 6b).

Figura 6 – Gráficos da função afim



(a) Crescente: $a > 0$ (b) Decrescente: $a < 0$

Fonte: Elaborado pelo autor

Tratando especificamente de função afim, cujo gráfico é caracterizado por uma reta, e como essa fica inteiramente definida conhecendo-se dois de seus pontos distintos, para tal basta conhecer os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função assume em dois números $x_1 \neq x_2$ quaisquer para que a reta fique inteiramente definida.

Exemplo 2.11 (IEZZI et al., 2016a): Construir o gráfico da função afim $f(x) = 3x - 1$.

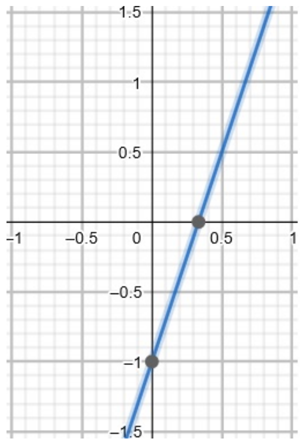
Basta obter dois pontos distintos:

- Para $x = 0$, temos $y = 3.0 - 1 = -1$. Logo, um ponto é $(0, -1)$;

- Para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$, $x = 1/3$. O outro ponto é $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Os pontos encontrados são representados no plano cartesiano e uma reta é traçada sobre eles (figura 7).

Figura 7 – Exemplo gráfico da função afim

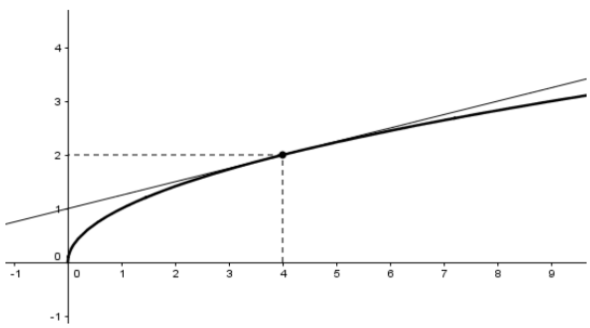


Fonte: Elaborado pelo autor

Dentre tantas outras, uma aplicação de função afim mais voltada para o ensino superior, seria a aproximação de funções. Tal aplicação consiste em encontrar uma função afim que melhor se aproxima de determinada função, numa periferia bem próxima a um ponto de seu domínio. O conjunto de técnicas desenvolvidas para obter melhores aproximações deu origem ao campo da matemática chamado Cálculo Diferencial, área de grande importância para a ciência moderna (NETO, 2018).

Exemplo 2.12 (NETO, 2018): Seja $\mathbb{R}_+$ o conjunto dos números reais não negativos. As funções $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \frac{x}{4} + 1$, tem seus gráficos esboçados na figura 8.

Figura 8 – Gráficos das funções f e g



Fonte: Neto (2018)

É notável que o ponto (4,2) é onde a reta tangencia a curva. Nas proximidades do ponto de tangência, a distância entre os dois gráficos é pequena. Dessa forma, para valores de x próximos à abscissa do ponto de tangência, isto é, para valores de x próximos de 4, temos que $\sqrt{x} = f(x)$ pode ser bem aproximada por $g(x)$.

Por exemplo, $\sqrt{5} = f(5) \approx g(5) = \frac{5}{4} + 1 = 2,25$, e podemos verificar por meio de uma calculadora que $\sqrt{5} \approx 2,236$ com três casas decimais exatas. O que nos leva ao fato de que $g(5)$ é uma aproximação de $\sqrt{5}$ com uma casa decimal exata.

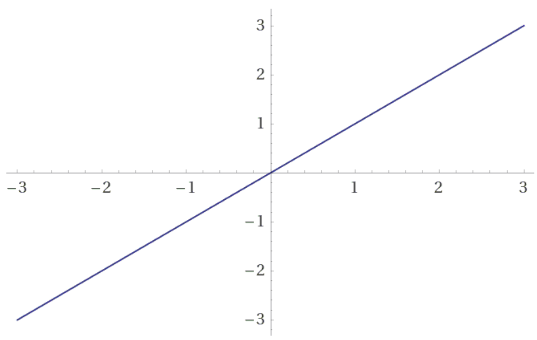
Um outro exemplo de aproximação, agora pela esquerda da abscissa 4, seria: $g(3,5) = \frac{3,5}{4} + 1 = 1,875$. Usando a calculadora tem-se $f(3,5) = \sqrt{3,5} \approx 1,87$. Logo, $g(3,5)$ é uma aproximação de $\sqrt{3,5}$ com duas casas decimais exatas.

2.3.2 Função Linear

Sendo um caso particular da função afim em que o coeficiente b é nulo ($b = 0$), a função linear é dada pela fórmula $f(x) = ax$. Tal formulação é o modelo matemático para a representação de problemas de proporcionalidade. Lima (2013) retrata a proporcionalidade como a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos, tendo seu uso universal datado de milênios.

Sendo o coeficiente b a ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo y, como nesse caso em específico $b = 0$, a reta intersectará o eixo exatamente na origem do plano cartesiano, ponto $(0,0)$ (figura 9).

Figura 9 – Gráfico da função linear



Fonte: Elaborado pelo autor

Reconhecemos a função como linear quando $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$, segue uma definição para proporcionalidade traduzida por "a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado de constante de proporcionalidade) tal que $y = ax$ para todo valor de x" (LIMA, 2013).

Exemplo 2.13 (NETO, 2018): Quatro amigos foram almoçar em um restaurante de comida por quilo. A tabela a seguir mostra os resultados das pesagens do almoço e o valor pago por cada um. Qual o preço do quilograma de almoço nesse restaurante?

Tabela 1 – Dados exemplo 2.13

gramas	**R$**
372	16,74
470	21,15
512	23,04
540	24,30

Fonte: Neto (2018)

Dividindo o valor pago pela massa de comida consumida, obtemos o valor de um grama de almoço. Como esse valor é o mesmo para todos os consumidores, teremos as seguintes igualdades:

$$\frac{16,74}{372} = \frac{21,15}{470} = \frac{23,04}{512} = \frac{24,3}{540} = a = 0,045.$$

Dessa forma, temos o valor em reais de cada grama de almoço, $a = 0,045$. E para determinar o valor do quilograma do almoço, basta multiplicar por 1000, ou seja, R$ 45,00/kg.

Na tabela apresentada acima, os valores da segunda coluna podem ser obtidos multiplicando a primeira coluna por $a = 0,045$. Gerando assim uma relação de dependência:

$$f(x) = ax$$

Onde $a = 0,045$, x é a quantidade de comida em gramas e $f(x)$ é o valor pago em reais. Obviamente nesse caso em específico, para x podem ser considerados apenas valores positivos. Entretanto, se fizermos x variar em $\mathbb{R}$, caracterizamos uma função linear:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{definida por } f(x) = 0,045x.$$

Através do teorema a seguir é possível determinar se uma dada função é ou não linear, seja ela crescente ou decrescente.

Teorema 2.14 (LIMA, 2013) Teorema Fundamental da Proporcionalidade:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente (ou decrescente). Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $f(cx) = cf(x)$ para quaisquer c, $x \in \mathbb{R}$.

3. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: A prova segue as implicações (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1). Inicialmente suporemos f crescente.

Para demonstrar que (1) $\Rightarrow$ (2), provemos inicialmente que para todo número racional $r = m/n$, a hipótese (1) acarreta que $f(rx) = rf(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. De fato, como $nr = m$, tem-se:

$$n.f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m.f(x),$$
$$f(rx) = \frac{m}{n}f(x) = r.f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por (2), notamos que $f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0$. Daí, como f é crescente, $0 = f(0) < f(1) = a \Rightarrow a > 0$. Além disso, temos:

$$f(r) = f(r.1) = r.f(1) = r.a = ar, \forall\, r \in \mathbb{Q}.$$

Para mostrar que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, suponhamos por absurdo que exista um número $x \in \mathbb{I}$ tal que $f(x) \neq ax$. Admitimos $f(x) < ax$ (O caso $f(x) > ax$ é tratado de modo análogo), assim temos:

$$\frac{f(x)}{a} < x.$$

Tomemos um número racional r no interior do intervalo $\left(\frac{f(x)}{a}, x\right)$:

$$\frac{f(x)}{a} < r < x \Rightarrow f(x) < ar < ax \Rightarrow f(x) < f(r) < ax.$$

Temos um absurdo, pois se f é crescente, com $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Esta contradição completa a prova de (1) $\Rightarrow$ (2). Logo, $f(cx) = f(a)cx = cf(a)x = cf(x)$, $\forall\, c, x \in \mathbb{R}$.

Para demonstrar que (2) $\Rightarrow$ (3), notamos que:

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Por fim, para demonstrar que (3) $\Rightarrow$ (1), observamos que:

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n\ parcelas}) = f(x) + f(x) + \ldots + f(x) \Rightarrow f(nx) = nf(x), \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

E ainda:

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x).$$

Assim,

$$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x).$$

Por sua vez, sendo f decrescente, teremos $a = f(1) < 0$, e as implicações a serem demonstradas (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1), seguem de forma análoga. Completando assim a demonstração do TFP.

Por fim, Lima (2013), nos traz ainda que para saber se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função linear basta verificar dois critérios:

1. f deve ser crescente ou decrescente;

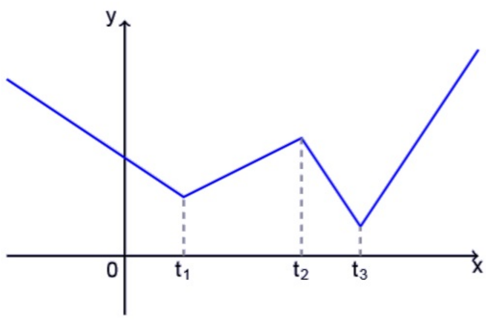
2. $f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

2.3.3 Função Modular e Função Poligonal

As funções poligonais surgem como um caso específico de função afim, com grande aplicação na vida cotidiana como imposto de renda em função da renda líquida, preço de uma mercadoria com desconto proporcional a quantidade comprada, e também nas diversas áreas da Matemática como Análise, Cálculo, Equações Diferenciais, entre outras.

Definição 2.15 (LIMA, 2013): Diz-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função poligonal quando existem $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ tais que, para $x \leq t_0$, para $x \geq t_n$ e em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, f coincide com uma função afim f_i (figura 10). Para evitar saltos no gráfico, é exigido que $f_i(t_i) = f_{i-1}(t_{i-1})$. De maneira equivalente pode-se dizer que uma função é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal.

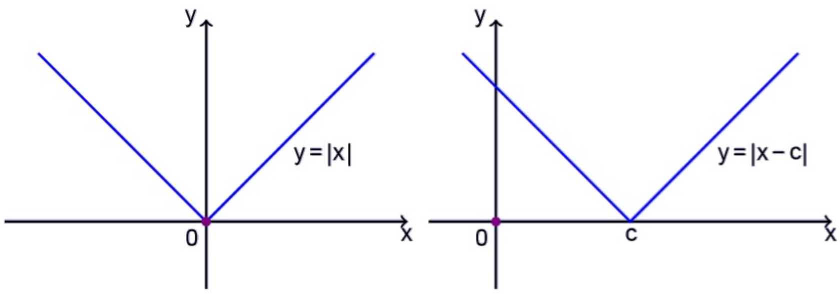
Figura 10 – Gráfico da função poligonal



Fonte: Lima (2013)

A base de uma função poligonal é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, ou ainda $f(x) = |x - c|$, para algum $c \in \mathbb{R}$ (figura 11).

Figura 11 – Gráfico da função modular



Fonte: Lima (2013)

Sendo assim, pode-se obter uma função poligonal por meio da combinação de função modular e função afim. Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 2.16 (BORTOLOSSI, 2011): Esboce o gráfico da função real $f(x) = |x-1| + |x-2|$.

Temos que $f(x) = g(x) + h(x)$, onde $g(x) = |x-1|$ e $h(x) = |x-2|$. Agora, pela definição de módulo, temos:

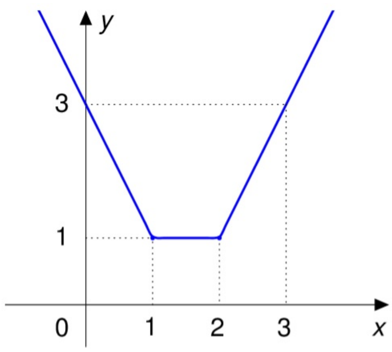
$$g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se} \quad x \geq 1, \\ -x+1, & \text{se} \quad x < 1. \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x) = \begin{cases} x-2, & \text{se} \quad x \geq 2, \\ -x+2, & \text{se} \quad x < 2. \end{cases}$$

Assim,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)+(x-2), & \text{se} \quad x \geq 2, \\ (x-1)+(-x+2), & \text{se} \quad 1 \leq x < 2, \\ (-x+1)+(-x+2), & \text{se} \quad x < 1. \end{cases} = \begin{cases} 2x-3, & \text{se} \quad x \geq 2, \\ 1, & \text{se} \quad 1 \leq x < 2, \\ -2x+3, & \text{se} \quad x < 1. \end{cases}$$

Dessa forma, obtemos o gráfico da função poligonal $f(x)$ (figura 12), expressa como combinação de valores absolutos de funções afins.

Figura 12 – Gráfico da função real $f(x)$



Fonte: Bortolossi (2011)

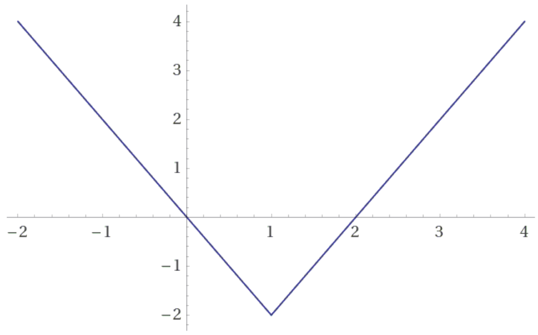
Exemplo 2.17: Esboçar o gráfico da função real $f(x) = ||2x-2|-2|$.

Temos que $f(x) = |g(x)|$, onde $g(x) = |2x-2|-2$. Dessa forma, pela definição de módulo, temos:

$$g(x) = \begin{cases} 2x-2-2, & \text{se} \quad x \geq 1, \\ -2x+2-2, & \text{se} \quad x < 1. \end{cases} \Rightarrow \quad g(x) = \begin{cases} 2x-4, & \text{se} \quad x \geq 1, \\ -2x, & \text{se} \quad x < 1. \end{cases}$$

Obtemos assim o gráfico da função modular $g(x)$ (figura 13).

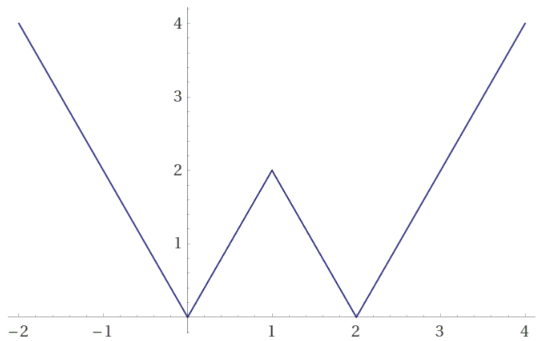
Figura 13 – Gráfico da função modular $g(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor

Sendo $f(x) = |g(x)|$, temos necessariamente que a função só permitirá valores positivos para imagem ($Im = \mathbb{R}_+$). Logo o gráfico de $f(x)$ será da seguinte forma (figura 14).

Figura 14 – Gráfico da função poligonal $f(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor

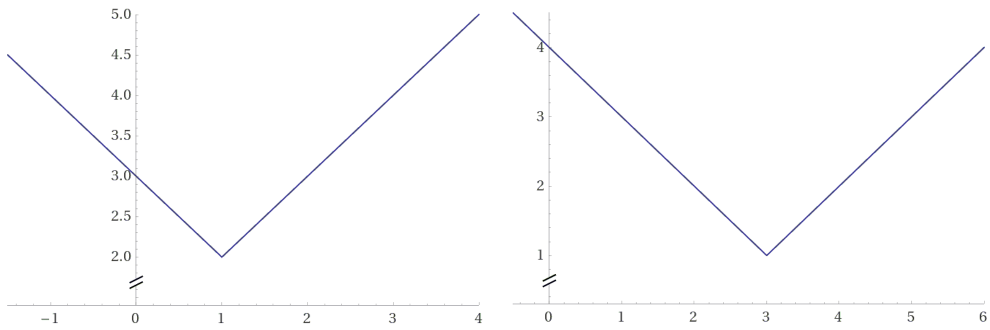
Exemplo 2.18: Esboçar o gráfico da função real a seguir.

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|+2, & \text{se} \quad x < 3/2, \\ |x-3|+1, & \text{se} \quad x \geq 3/2. \end{cases}$$

Temos que $f(x)$ é uma função real definida por partes, onde $g(x) = |x-1|+2$ e $h(x) = |x-3|+1$.

Obtemos inicialmente os gráficos das funções g e h (figura 15).

Figura 15 – Gráficos das funções modulares

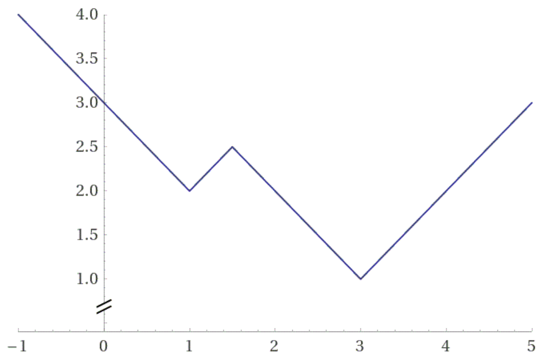


(a) Gráfico da função $g(x)$ (b) Gráfico da função $h(x)$

Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, seguindo o intervalo estabelecido para a função, obtemos o gráfico de f (figura 16).

Figura 16 – Gráfico da função $f(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor

Na resolução de um problema, na maioria das vezes, a dificuldade consiste em decidir qual o modelo matemático que melhor se enquadra, uma vez determinada a modelagem, não se tem tanta contrariedade para dar o tratamento adequado ao problema.

Nas próximas seções serão apresentadas algumas características das Funções Quadrática e Exponencial, que junto com a Função Afim são funções muito usuais no campo da modelagem matemática e na resolução de problemas elementares.

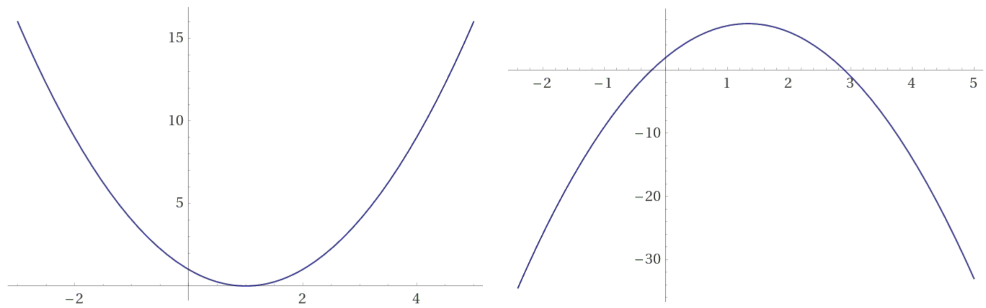
2.3.4 Função Quadrática

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando são dados números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O gráfico de qualquer função quadrática é uma parábola, que tem sua concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$ (figura 17), dessa forma a função será crescente em determinado intervalo e decrescente em outro, para ambos os casos de concavidade.

O vértice da parábola de uma função quadrática $f(x)$ é dado pelo ponto de coordenadas $(x, f(x))$, sendo $x = -b/2a$. Nesse ponto a parábola atinge seu valor mínimo se $a > 0$, ou seu valor de máximo quando $a < 0$ (IEZZI et al., 2016a).

Figura 17 – Gráficos da função quadrática



(a) Concavidade para cima: $a > 0$ (b) Concavidade para baixo: $a < 0$

Fonte: Elaborado pelo autor

2.3.5 Função Exponencial

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares (LIMA, 2013).

Uma função exponencial de base a, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, dada pela notação $f(x) = a^x$, é definida de modo que sejam válidas as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

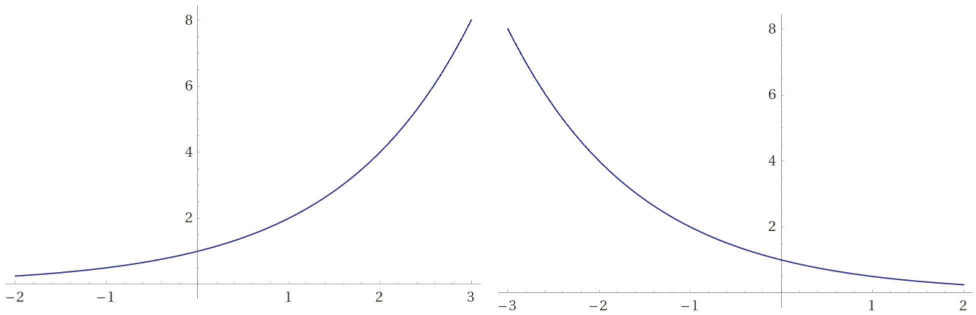
I. $a^x .\, a^y = a^{x+y}$;

II. $a^1 = a$;

III. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$.

O gráfico de uma função exponencial $f(x) = a^x$, para todo número real positivo a, diferente de 1, terá comportamento crescente se $a > 1$, e decrescente se $0 < a < 1$ (figura 18) (IEZZI et al., 2016a).

Figura 18 – Gráficos da função exponencial



(a) Crescente: $a > 1$ (b) Decrescente: $0 < a < 1$

Fonte: Elaborado pelo autor

2.4 Sequências

A partir daqui, sempre que tratarmos do conjunto dos números naturais, estaremos desconsiderando o zero, ou seja, consideraremos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Compreender sequências é quase um requisito básico para o estudo, sobre tudo, de Progressão Aritmética, assim como para a Progressão Geométrica e Limites.

Por Stewart (2009), uma sequência pode ser pensada como uma fila de números escritos segundo uma ordem definida.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

Onde a_1 é chamado primeiro termo, a_2 é chamado segundo termo e, de forma geral, a_n é dito o *n-ésimo* termo. Sendo esta uma sequência infinita, para cada termo a_n sempre haverá um sucessor a_{n+1}.

Iezzi (2013), nos traz que, interessam ao estudo da matemática as sequências em que os termos se sucedem segundo certa regra, isto é, aquelas que possuem uma lei de formação. E estas podem ser apresentadas de três maneiras:

1. Por fórmula de recorrência: São dadas duas regras, uma para identificar o primeiro termo a_1 e outra para calcular cada termo a_n a partir do termo antecedente a_{n-1}.

Exemplo: Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, $\forall\, n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$
$$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$$
$$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$$
$$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$$
$$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_5 + 3 = 14 + 3 = 17$$

Então, $f = (2, 5, 8, 11, 14, 17)$.

2. Expressando cada termo em função de sua posição: É dada uma fórmula que expressa a_n em função de n.

Exemplo: Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$, $\forall\, n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$$a_1 = 2^1 = 2, a_2 = 2^2 = 4, a_3 = 2^3 = 8, a_4 = 2^4 = 16.$$

Então, $f = (2, 4, 8, 16)$.

3. Por propriedade dos termos: É dada uma propriedade que os termos devem apresentá-la.

Exemplo: Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.

Temos $g = (2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$.

Seguindo por Lima (2013), temos ainda que uma sequência infinita é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais. Consideraremos apenas as sequências de números reais, ou seja, funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Desse modo, uma sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ nada mais é do que a função $1 \mapsto x_1, 2 \mapsto x_2, \ldots, n \mapsto x_n, \ldots$, a qual faz corresponder cada número natural n a um número real x_n.

Dois exemplos bem interessantes de sequências, do tipo gerada por fórmula de recorrência, são as progressões aritmética e geométrica.

Progressão Aritmética (PA) é uma sequência onde cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior mais uma constante r, denominada razão da PA.

Alguns exemplos de progressões aritméticas:

- $f_1 = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ em que $a_1 = 1$ e $r = 2$;
- $f_2 = (0, -2, -4, -6, -8, \ldots)$ em que $a_1 = 0$ e $r = -2$;
- $f_3 = (4, 4, 4, 4, 4, \ldots)$ em que $a_1 = 4$ e $r = 0$.

Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência onde cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante q, denominada razão da PG.

Alguns exemplos de progressões geométricas:

- $g_1 = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$ em que $a_1 = 1$ e $q = 2$;
- $g_2 = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$ em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$;
- $g_3 = (7, 7, 7, 7, 7, \ldots)$ em que $a_1 = 7$ e $q = 1$.

2.4.1 Sequências Monótonas

Uma sequência de números reais de termos x_n será dita monótona quando $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots$ (monótona não-decrescente) ou então quando $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \ldots$ (monótona não-crescente). Quando $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência será chamada crescente e quando $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência será chamada decrescente (LIMA, 2013).

2.5 Progressão Aritmética

Comumente, as progressões aritméticas estão presentes no cotidiano, em situações que envolvam grandezas com variações iguais em intervalos de tempos iguais.

Exemplo 2.19 (Adaptado (MORGADO et al., 2014)): Determinada indústria de automóveis, no primeiro mês do ano produziu 400 veículos e, a partir de então, sua produção foi aumentada em 30 veículos a cada mês. Quantos veículos ela produziu em junho do mesmo ano?

Os valores da produção mensal, a partir de janeiro, são: 400, 430, 460, 490, 520, 550, ... Dessa forma, em junho, a indústria produziu 550 veículos.

Outra maneira de resolver essa questão sem ter que escrever a produção mês a mês, seria a ideia de que se a produção aumenta 30 veículos por mês, e a partir de janeiro passaram-se 5 meses até junho, então o aumento total seria de 5 x 30 = 150, e a produção em junho se daria por 400 + 150 = 550 veículos.

A sequência formada pelos valores de produção mensal (400, 430, 460, 490, 520, 550, ...) é um exemplo de progressão aritmética. O valor constante aumentado de um termo para o seu sucessor é chamado de razão da PA.

Definição 2.20 (MORGADO et al., 2014): Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo a_n e o termo anterior a_{n-1} é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r.

Segundo Iezzi (2013), as progressões aritméticas podem ser classificadas da seguinte forma, segundo sua razão r.

- **Crescente:** Cada termo da PA é maior que o anterior, se $r > 0$;

$$a_n > a_{n-1} \Longleftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Longleftrightarrow r > 0.$$

- **Constante:** Cada termo da PA é igual ao anterior, se $r = 0$;

$$a_n = a_{n-1} \Longleftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \Longleftrightarrow r = 0.$$

- **Decrescente:** Cada termo da PA é menor que o anterior, se $r < 0$.

$$a_n < a_{n-1} \Longleftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0 \Longleftrightarrow r < 0.$$

2.5.1 Termo Geral da Progressão Aritmética

Por Morgado et al. (2014), em uma PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, para avançar um termo basta somar a razão, para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim sucessivamente. Dessa forma, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois para passar de a_5 para a_{13}, são avançados 8 termos; $a_4 = a_{17} - 13r$, pois são retrocedidos 13 termos ao passar de a_{17} para a_4. De modo geral, para passar de a_1 para a_n, são avançados $n - 1$ termos, portanto a lei do termo geral para qualquer PA será dada por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Exemplo 2.21: Calcule o 17º termo da PA cujo primeiro termo é 3 e a razão é 5.

Sendo $a_1 = 3$ e $r = 5$, temos:

$$a_{17} = a_1 + 16.r = 3 + 16.5 = 83.$$

Resposta: $a_{17} = 83$.

Exemplo 2.22 (Adaptado (IEZZI et al., 2016a)): Determine quantos múltiplos de 3 há entre 100 e 500.

A sequência dos múltiplos de 3 é uma PA de razão 3 (0, 3, 6, 9, ...), mas como nos interessa estudar a sequência entre 100 e 500, temos que:

- O primeiro múltiplo de 3 maior que 100 é o 102, logo: $a_1 = 102$;
- O último múltiplo de 3 pertencente ao intervalo é o 498, e como sua posição é desconhecida, temos: $a_n = 498$.

Dessa forma, queremos então determinar o número de termos n da PA (102, 105, ..., 498). Pelo termo geral, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 498 = 102 + (n - 1).3 \Rightarrow n = 133.$$

Resposta: Há 133 múltiplos de 3 entre 100 e 500.

2.5.2 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética

Basicamente, a soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer segue a ideia de Gauss usada para calcular a soma $1 + 2 + \ldots + 100$.

Teorema 2.23 (MORGADO et al., 2014): A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}.$$

Demonstração: Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de trás para frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1$. Daí,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

É possível observar que, passando de um parêntese para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, e tal fato não altera a soma, logo todos os parênteses são iguais ao primeiro $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, tem-se

$$2S_n = (a_1 + a_n).n \Longleftrightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}.$$

Exemplo 2.24: Obtenha a soma dos 200 primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos.

A sequência $(1, 3, 5, \ldots)$ é uma PA em que $a_1 = 1$ e $r = 2$, então:

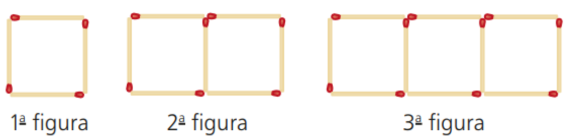
$$a_{200} = a_1 + 199.r = 1 + 199.2 = 399.$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_{200}).200}{2} = \frac{(1 + 399).200}{2} = 40.000.$$

Resposta: $S_n = 40.000$.

Exemplo 2.25 (Adaptado (IEZZI et al., 2016a)): Observe a imagem a seguir (figura 19) e determine a quantidade total de palitos usada para se construir as 20 primeiras figuras.

Figura 19 – Figuras com palitos



Fonte: Iezzi et al. (2016a)

Para os palitos utilizados nas três primeiras figuras formadas, temos a PA (4, 7, 10, ...), e o seu 20º termo será:

$$a_{20} = a_1 + 19.r = 4 + 19.3 = 61.$$

Assim, o total de palitos será dado por:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}).20}{2} = \frac{(4 + 61).20}{2} = 650.$$

Resposta: Serão necessários 650 palitos.

2.6 Comparação entre Função Afim e Progressão Aritmética

Quanto à relação entre funções afins e progressões aritméticas, segundo Lima (2001), uma progressão aritmética é meramente a restrição de uma função afim ao conjunto dos números naturais e, em análise a um específico livro didático de ensino médio apontou que, essa conexão nunca é feita no livro, embora a fórmula do termo geral a sugira claramente.

> Não é feita figura alguma ilustrando que os termos de uma P.A. são igualmente espaçados sobre uma reta. Nem é apresentado o gráfico de uma P.A. onde seus termos seriam pontos alinhados no plano (LIMA, 2001, p. 56).

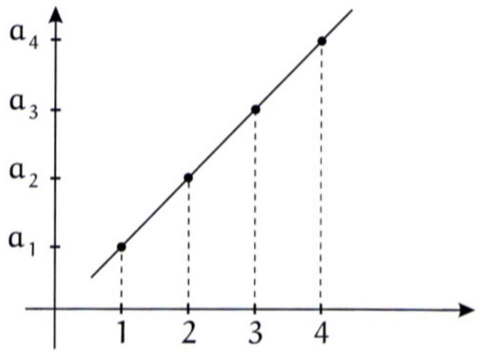
Esta conexão entre função afim e progressão aritmética exprime-se da forma que, dada uma PA $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, seu termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)r = nr + (a_1 - r)$ de modo que $a_n = f(n)$, se definirmos $f(x) = xr + a_1 - r$. Assim, para cada PA existe uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a = r$ e $b = a_1 - r$, tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e ainda, de maneira recíproca, dada uma função $f(x) = ax + b$, seus valores $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \ldots, a_n = f(n), \ldots$ formam uma progressão aritmética de razão a, pois $f(n) - f(n-1) = an + b - a(n-1) - b = a$.

Morgado et al. (2014) retrata ainda esta relação de forma que, em uma progressão aritmética $a_n = a_1 + (n-1)r$, a função que associa cada número natural n ao valor de a_n é uma restrição da função afim $f(x) = a_1 + r(x-1) = rx + a_1 - r$ ao conjunto dos números naturais.

Se tomarmos a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x$, esta determina a progressão aritmética $(3, 6, 9, 12, \ldots)$, ou ainda, dada a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x - 1$, temos como imagem de g a progressão aritmética $(1, 3, 5, 7, \ldots)$.

Dessa forma, pensando em uma PA como uma função que associa a cada natural n o valor de a_n, o gráfico dessa função será formado por uma sequência de pontos colineares no plano. E ainda, (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, os pontos do plano com coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), (n, a_n)$, estão em linha reta. Pois, seu gráfico são pontos sobre o gráfico de uma função afim (figura 20).

Figura 20 – Gráfico de uma progressão aritmética



Fonte: Morgado et al. (2014)

A seguir, são apresentados exemplos de problemas que podem ser resolvidos de ambas as formas, por progressão aritmética ou por função afim.

Exemplo 2.26: O preço de um carro novo é R$ 35.000,00 e diminui R$ 1.000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço após 4 anos de uso?

Por progressão aritmética: Chamando o preço com n anos de uso de a_n, temos $a_1 = 34.000$ (pois corresponde ao valor do carro com um ano de uso), $r = -1.000$ (pois tratamos de uma desvalorização) e queremos calcular a_4.

$$a_4 = a_1 + (n-1)r = a_1 + 3r = 34000 + 3.(-1000) = 31000.$$

O preço será de R$ 31.000,00.

Por função afim: A desvalorização do carro pode ser expressa pela função $v(n) = 35000 - 1000n$, onde n é o número de anos e $v(n)$ é o valor do carro em função dos anos de desvalorização.

$$v(4) = 35000 - 1000.4 = 31000.$$

O preço será de R$ 31.000,00.

Exemplo 2.27: Marcelo criou uma conta em uma rede social. Nesse mesmo dia, três pessoas começaram a segui-lo. Após um dia, ele já tinha 20 seguidores e após 2 dias, já eram 37 seguidores. Marcelo percebeu que, a cada novo dia, ele ganhava 17 seguidores. Considerando que o crescimento dos seguidores permaneça constante, após quantos dias ele ultrapassará 1.000 seguidores?

Por progressão aritmética: Pelas informações apresentadas no problema temos uma PA crescente $(3, 20, 37, \ldots)$ de razão $r = 17$, resta saber qual a posição n ocupada pelo termo 1.000, ou o próximo termo maior que 1.000.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)r \\
1000 &= 3 + (n-1).17 \\
1000 &= 3 + 17n - 17 \\
1014 &= 17n \\
n &= \frac{1014}{17} \approx 59,65.
\end{aligned}$$

O fato de ter resultado em um número decimal 59,65 indica que no 60º dia Marcelo terá ultrapassado 1.000 seguidores. Vamos verificar:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1)r \\
a_{59} &= 3 + (59-1).17 \\
a_{59} &= 3 + 986 \\
a_{59} &= 989 \\
a_{60} &= 989 + 17 = 1006.
\end{aligned}$$

A partir do 60º dia Marcelo ultrapassará 1.000 seguidores.

Por função afim: Podemos observar que no dia inicial ele obteve 3 seguidores e, a partir daí obteve um aumento constante de 17 seguidores por dia. Como o número de seguidores foi contado a partir do dia 1, poderíamos cometer algum erro de interpretação ao utilizarmos a função afim na forma $s(x) = 3 + 17x$, pois sendo x o número de dias e $s(x)$ o número de seguidores, devemos desconsiderar o dia zero. Assim, temos: $s(x) = 3 + 17x - 17 = 17x - 14$. Como espera-se um número de inscritos superior a 1.000, temos:

$$\begin{aligned}
s(x) &= 17x - 14 \\
1000 &= 17x - 14 \\
1000 + 14 &= 17x \\
x &= \frac{1014}{17} \\
x &\approx 59,65.
\end{aligned}$$

O resultado na forma de decimal 59,64, indica que Marcelo ultrapassará 1.000 seguidores a partir do 60º dia.

Segundo Lima (2013), uma progressão aritmética pode ser vista geometricamente como uma sequência (finita ou infinita) de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ igualmente espaçados na reta. Isto implica que a razão $h = x_{i+1} - x_i$ não depende de i:

$$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_{i+1} - x_i = \ldots.$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, digamos $f(x) = ax + b$, e $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão h, então os pontos $y_i = f(x_i), i = 1, 2, \ldots$ também estão igualmente espaçados, ou seja, formam uma progressão aritmética de razão:

$$y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b) = a(x_{i+1} - x_i) = ah.$$

Dessa forma, tendo uma reta não vertical (gráfico de uma função afim) em $\mathbb{R}$ e tomando sobre ela os pontos $(1, y_1), (2, y_2), \ldots, (i, y_i), \ldots$, cujas abcissas são números naturais $1, 2, \ldots, i, \ldots$, as ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$ desses pontos formam uma progressão aritmética (pois as abcissas $1, 2, 3, \ldots$ formam uma PA de razão 1).

A recíproca da observação acima é verdadeira, como pode ser verificado no teorema a seguir.

Teorema 2.28 (LIMA, 2013): Se uma função monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ numa outra progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots$, então f é uma função afim.

Demonstração: Inicialmente adotaremos uma nova função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(0)$, que transforma qualquer progressão aritmética em outra progressão aritmética, e temos ainda definida a propriedade $g(0) = 0$. Resta agora mostrar que g é de fato linear.

Seja uma progressão aritmética formada pelos números $-x, 0, x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, logo teremos uma outra progressão aritmética formada por $g(-x), 0, g(x)$. Por conseguinte, $g(-x) = -g(x)$.

Consideremos agora a progressão aritmética formada pelos números $0, x, 2x, \ldots, nx$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, e o mesmo para suas respectivas imagens em g: $0, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$. Tomando a diferença entre o segundo e o primeiro termo dessa PA, obtemos como razão $g(x)$. Segue então que $g(nx) = ng(x)$. E por fim, sendo n um inteiro negativo, temos que $-n \in \mathbb{N}$, logo:

$$g(nx) = -g(-nx) = -(-n.g(x)) = n.g(x).$$

Fazendo assim valer $g(nx) = ng(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Pelo TFP, segue-se que $g(x)$ é linear, $g(x) = ax$. Dessa forma, pondo $f(0) = b$, temos:

$$f(x) = g(x) + f(0) = ax + b, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

2.7 Problemas Resolvidos

Nesta seção serão apresentadas aplicações dos conteúdos de Função Afim e Progressão Aritmética na resolução de problemas presentes em avaliações e programas voltados para o ensino médio.

Alguns problemas são mais específicos em seu enunciados e pedem resoluções diretas, como quando é solicitada a função afim que descreve determinada situação, ou ainda, quando é preciso determinar a soma de todos os valores envolvidos. Ainda assim, tais problemas poderiam ser resolvidos por ambos os conteúdos.

Problema 1 (Portal da Matemática - OBMEP): A função que determina o valor, em reais, a ser pago por uma corrida de táxi é $f(x) = 3,40 + 2,50x$, sendo x a distância percorrida em km. Qual o valor a ser pago por uma corrida de 10 km?

a) R$ 25,00   b) R$ 25,40   c) R$ 28,40   d) R$ 28,00

Solução (Por função afim): Como a distância percorrida foi de 10 km, para encontrar a quantia a ser paga basta substituir x pelo valor dado:

$$f(10) = 3,40 + 2,50.10 = 28,40 \text{ reais.}$$

Resposta: c) R$ 28,40.

Solução (Por progressão aritmética): Dada a função que descreve o valor da corrida, temos a razão $r = 2,50$ e $a_1 = 3,40 + 2,50 = 5,90$, assim basta determinar o termo a_{10} da PA.

$$\begin{aligned} a_{10} &= 5,90 + (10-1).2,50 \\ a_{10} &= 5,90 + 22,50 \\ a_{10} &= 28,40 \end{aligned}$$

Resposta: c) R$ 28,40.

Problema 2 (Portal da Matemática - OBMEP): Um experimento da área de agronomia mostra que a temperatura mínima de superfície do solo $t(x)$, em $°C$, é determinada em função do resíduo x de planta e biomassa na superfície, em g/m^2, conforme registrado na tabela. Determine a função que relaciona as duas grandezas.

Tabela 2 – Dados problema 2

g/m^2	10	20	30	40	50	60	70
$°C$	7,24	7,30	7,36	7,42	7,48	7,54	7,60

Fonte: Assis e Miranda (2017)

Solução (Por função afim): Determinamos inicialmente a taxa de variação da temperatura:

$$\frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} = \frac{7,30 - 7,24}{20 - 10} = \frac{0,06}{10} = 0,006\ °C/_{g/m^2}.$$

Pelo padrão de valores da tabela, podemos determinar a temperatura para uma quantidade "zero" de resíduos, $7,24 - 0,06 = 7,18°C$. Assim, temos:

$$t(x) = 0,006x + 7,18, \text{ para } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Solução (Por progressão aritmética): Devido à proporcionalidade linear apresentada na tabela do exercício, é possível interpretá-la como uma progressão aritmética de 70 termos, mas que é apresentada resumidamente de 10 em 10 termos.

Determinamos inicialmente a razão da PA:

$$r = \frac{a_{20} - a_{10}}{20 - 10} = \frac{7,30 - 7,24}{20 - 10} = \frac{0,06}{10} = 0,006\ {}^{\circ}C/_{g/m^2}.$$

Sendo o $a_{10} = 7,24$, é possível determinar a_1:

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + (10 - 1).0,006 \\ 7,24 &= a_1 + 0,054 \\ 7,186 &= a_1 \end{aligned}$$

Dessa forma, determina-se então a fórmula do termo geral:

$$\begin{aligned} a_n &= 7,186 + (n - 1).0,006 \\ a_n &= 7,186 + 0,006n - 0,006 \\ a_n &= 7,18 + 0,006n \end{aligned}$$

Considerando a_n e n como $t(x)$ e x, respectivamente, tem-se:

$$t(x) = 0,006x + 7,18.$$

Problema 3 (Portal da Matemática - OBMEP): Os comprimentos dos degraus da escada abaixo diferem uniformemente em 2 cm entre os vizinhos de cima para baixo (figura 21). O degrau mais inferior mede 45 cm. Qual a medida do segundo degrau de cima para baixo?

Figura 21 – Escada

Fonte: Miranda e Assis (2017)

Solução (Por função afim): Se o primeiro degrau inferior mede 45 cm e os demais medem 2 cm amenos que o anterior, temos a seguinte função afim: $f(x) = 47 - 2x$ ($x = 1$ indica a medida do primeiro degrau), onde para determinado degrau x tem-se seu comprimento $f(x)$. Dessa forma:

$$f(7) = 47 - 2.7$$
$$f(7) = 47 - 14$$
$$f(7) = 33\,cm.$$

Solução (Por progressão aritmética): Observe que, de baixo para cima, a diferença comum vale 2 cm. Sendo assim, o segundo degrau de cima para baixo é o mesmo que o sétimo degrau de baixo para cima e ele mede:

$$a_7 = 45 + (7 - 1).(-2)$$
$$a_7 = 45 - 12$$
$$a_7 = 33\,cm.$$

Problema 4 (ENEM 2019): O *slogan* "Se beber não dirija", muito utilizado em campanhas publicitárias no Brasil, chama a atenção para o grave problema da ingestão de bebida alcoólica por motoristas e suas consequências para o trânsito. A gravidade desse problema pode ser percebida observando como o assunto é tratado pelo Código de Trânsito Brasileiro. Em 2013, a quantidade máxima de álcool permitida no sangue do condutor de um veículo, que já era pequena, foi reduzida, e o valor da multa para motoristas alcoolizados foi aumentado. Em consequência dessas mudanças, observou-se queda no número de acidentes registrados em uma suposta rodovia nos anos que se seguiram às mudanças implantadas em 2013, conforme dados no quadro. Suponha que a tendência de redução no número de acidentes nessa rodovia para os anos subsequentes seja igual à redução absoluta observada de 2014 para 2015. Com base na situação apresentada, o número de acidentes esperados nessa rodovia em 2018 foi de:

Tabela 3 – Dados problema 4

Ano	2013	2014	2015
Número total de acidentes	1050	900	850

Fonte: ENEM (2019)

a) 150 b) 450 c) 550 d) 700 e) 800

Solução (Por função afim): Considerando que a diferença no número de acidentes entre os anos de 2014 e 2015 será constante para os demais anos subsequentes, temos a taxa da variação da função afim:

$$a = \frac{850 - 900}{2015 - 2014}$$
$$a = -50.$$

Se considerarmos o ano de 2014 como o ano inicial, teremos o coeficiente $b = 900$. Dessa forma, tem-se uma função afim decrescente caracterizada por:

$$f(x) = 900 - 50x$$

Sendo 2014 o ano "zero", o ano de 2018 será o quarto da sequência, assim:

$$f(4) = 900 - 50.4 = 900 - 200 = 700.$$

Solução (Por progressão aritmética): Considerando a diferença no número de acidentes apresentada entre os anos de 2014 e 2015, temos um valor de 50 e o problema nos propõe uma progressão aritmética para dos anos seguintes com uma razão $r = -50$.

Dessa forma, devemos descartar o ano de 2013 e considerar o ano de 2014 como o termo a_1 da PA. Assim, o número de acidentes do ano de 2018 passa a ser o elemento a_5 desta mesma PA.

$$a_5 = 900 + 4.(-50)$$
$$a_5 = 900 - 200$$
$$a_5 = 700.$$

Resposta: d) 700.

Problema 5 (PAEBES 2016): Considere todos os números inteiros de 200 a 700. Quantos desses números inteiros não são divisíveis por 7?

a) 250 b) 350 c) 428 d) 429 e) 430

Solução (Por função afim): Para encontrar a quantidade de números não divisíveis por 7, primeiro devemos trabalhar com os divisíveis. Após o 200, o primeiro número divisível por 7 é o 203 (pois 203 : 7 = 29), daí temos uma função afim para determinar um número divisível por 7 a partir de 200: $f(x) = 196 + 7x$, com $x \in \mathbb{N}$. Sendo 700 o último número em questão, basta determinar x para $f(x) = 700$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 196 + 7x \\ 700 &= 196 + 7x \\ 700 - 196 &= 7x \\ \frac{504}{7} &= x \\ x &= 72. \end{aligned}$$

Uma vez que de 200 a 700 há $700 - 199 = 501$ números (700 deve ser subtraído de 199 pois o 200 entra na contagem) e 72 números divisíveis por 7, fazendo $501 - 72 = 429$, há 429 números não divisíveis por 7 no intervalo dado.

Resposta: d) 429.

Solução (Por progressão aritmética): O primeiro número divisível por 7 após o 200, é o 203 (pois $203 : 7 = 29$) e o último desta sequência é o próprio 700 (pois $700 : 7 = 100$). Para determinar a quantidade de números divisíveis por 7 basta encontrar o número de termos n da progressão aritmética com primeiro termo $a_1 = 203$, último termo $a_n = 700$ e razão $r = 7$.

$$\begin{aligned} 700 &= 203 + (n-1).7 \\ 700 &= 203 + 7n - 7 \\ 7n &= 700 - 203 + 7 \\ n &= \frac{504}{7} \\ n &= 72. \end{aligned}$$

Já sabemos que de 200 a 700 há $700 - 199 = 501$ números e 72 números divisíveis por 7, e fazendo $501 - 72 = 429$, tem-se que há 429 números não divisíveis por 7 no intervalo dado.

Resposta: d) 429.

Problema 6 (Portal da Matemática - OBMEP): João vende jornal. Ele recebe um valor fixo de R$ 500,00 (por mês) mais R$ 1,50 para cada unidade vendida. Determine:

a) O salário de João, f, em função da quantidade x de jornais vendidos por mês.

b) Quantos jornais ele deverá vender para ter um salário de R$ 1.400,00?

Solução: a) Temos o valor 500 como parte fixa (termo independente de x) e o valor $1,50$ que varia conforme as vendas (termo dependente de x), dessa forma, o salário de João é:

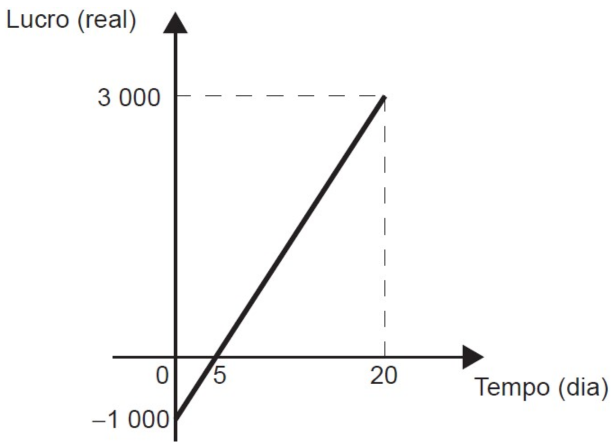
$$f(x) = 500 + 1,5x.$$

b) Sendo 1.400 o valor total, temos que $f(x) = 1400$, logo:

$$\begin{aligned} 1400 &= 500 + 1,5x \\ 900 &= 1,5x \\ \frac{900}{1,5} &= x \\ x &= 600 \text{ jornais.} \end{aligned}$$

Problema 7 (ENEM 2017): Em um mês, uma loja de eletrônicos começa a obter lucro já na primeira semana. O gráfico (figura 22) representa o lucro (L) dessa loja desde o início do mês até o dia 20. Mas esse comportamento se estende até o último dia, o dia 30. A representação algébrica do lucro L em função do tempo t é:

Figura 22 – Lucro mensal



Fonte: ENEM (2017)

a) $L(t) = 20t + 3000$

b) $L(t) = 20t + 4000$

c) $L(t) = 200t$

d) $L(t) = 200t - 1000$

e) $L(t) = 200t + 3000$

Solução: Segundo os dados apresentados no gráfico, podemos determinar a taxa de variação da função (ou coeficiente angular):

$$\frac{3000 - 0}{20 - 5} = \frac{3000}{15} = 200.$$

Podemos observar ainda que para o tempo zero o lucro é de -1000, sendo esse o coeficiente linear. Dessas forma temos:

$$L(t) = 200t - 1000.$$

Resposta: d) $L(t) = 200t - 1000$.

Problema 8 (ENEM 2013): As projeções para a produção de arroz no período de 2012 – 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção. A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

Tabela 4 – Dados problema 8

Ano	**Projeção da produção (t)**
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

Fonte: ENEM (2013)

a) 497,25 b) 500,85 c) 502,87 d) 558,75 e) 563,25

Solução: A partir do ano de 2013 se tomarmos cada termo subtraído do termo anterior $(51,50 - 50,25 = 1,25)$ obteremos um valor constante de 1,25, dessa forma temos uma PA crescente com $a_1 = 50,25$, $r = 1,25$ e o ano de 2021 será o décimo termo.

$$a_{10} = 50,25 + 9.1,25$$
$$a_{10} = 50,25 + 11,25$$
$$a_{10} = 61,50.$$

Como o problema pede a quantidade total produzida, temos:

$$S_{10} = \frac{(50,25 + 61,50).10}{2}$$
$$S_{10} = (111,75).5$$
$$S_{10} = 558,75.$$

Resposta: d) 558,75.

Problema 9 (PAEBES 2019): Laura comprou um livro de 840 páginas e precisa realizar sua leitura antes de uma prova. Para alcançar seu objetivo, ela elaborou um cronograma de leitura no qual as quantidades de páginas a serem lidas por dia seguem uma progressão aritmética. De acordo com esse cronograma, no primeiro dia de leitura ela deverá ler 13 páginas desse livro e no último dia, 71 páginas. Seguindo esse cronograma, Laura precisará de quantos dias para ler todo esse livro?

a) 10 b) 20 c) 24 d) 29 e) 58

Solução: Considerando a soma dos termos de uma progressão aritmética, temos um total de $S_n = 840$ páginas do livro, $a_1 = 13$ e $a_n = 71$, onde n denota o número de dias que Laura precisará para ler o livro.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \\ 840 &= \frac{(13 + 71).n}{2} \\ 1680 &= 84n \\ n &= \frac{1680}{84} = 20 \end{aligned}$$

Resposta: b) 20.

2.8 Outras Aplicações

Ambos conteúdos de Função Afim e Progressão Aritmética têm suas particularidades relacionadas com conteúdos de Juros Simples e, de forma interdisciplinar com Física, Movimento Uniforme e Movimento Uniformemente Variado.

Exemplo 2.29 (Adaptado (IEZZI et al., 2016b)): Uma dívida de R$ 1.000,00 será paga com juros simples de 50% ao ano. Ela deverá ser quitada após um número inteiro de anos. Calcular os montantes dessa dívida para os primeiros seis anos.

Sendo os juros de 50%, por ano, tem-se: $0,5.1000 = 500$, isto é, R$ 500,00. Assim, para os primeiros seis anos:

Tabela 5 – Dados exemplo 2.29

Ano	1	2	3	4	5	6
Montante	1500	2000	2500	3000	3500	4000

Fonte: Iezzi et al. (2016b)

Os valores dos montantes, na forma como são apresentados na tabela, formam uma PA de razão 500, e o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$
$$a_n = 1500 + (n-1).500$$
$$a_n = 500n + 1000.$$

Sendo toda PA uma função afim de domínio $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, podemos ainda associar essa problemática de juros simples à função:

$$f(x) = 500x + 1000, \forall\, x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

No âmbito da Física, quando se trata de Movimento Uniforme, considera-se que um veículo a velocidade (v) constante, sofre variações de espaço iguais em intervalos de tempo iguais, estabelecendo assim uma relação de dependência entre as variáveis espaço (s) e tempo (t) (IEZZI et al., 2016b):

$$s(t) = s_0 + vt.$$

Já no Movimento Uniformemente Variado, considera-se que a aceleração escalar de um móvel (α) é constante, e a velocidade escalar sofre variações iguais em intervalos de tempo iguais, gerando assim uma relação de dependência entre as variáveis velocidade e tempo (IEZZI et al., 2016b):

$$v(t) = v_0 + \alpha t$$

Exemplo 2.30 (Adaptado (DANTE, 2013)): A tabela abaixo fornece a posição $s(t)$, em km, ocupada por um veículo, em relação ao km 0 de uma estrada em que se desloca, para vários instantes de tempo t, em horas.

Tabela 6 – Dados exemplo 2.30

$\mathbf{t}(h)$	0	2	4	6	8	10
$\mathbf{s(t)}(km)$	50	100	150	200	250	300

Fonte: Dante (2013)

a) Qual a função horária que descreve a posição desse veículo em função do tempo?

b) Em que instante o veículo ocupará a posição de 500 km?

a) Pela tabela apresentada, observa-se uma velocidade constante, pois ele percorre 50 km a cada 2 horas, aumentando o espaço. Sendo a velocidade a taxa de variação de s, tem-se:

$$v = \frac{100 - 50}{2 - 0} = \frac{50}{2} = 25\,km/h.$$

Por sua vez, para o instante de tempo inicial, o veículo ocupa a posição $s(0) = 50$ km. Assim, a função afim que descreve esse movimento será dada por:

$$\begin{aligned} s(t) &= vt + s_0 \\ s(t) &= 25t + 50. \end{aligned}$$

b) Para determinar o instante em que o veículo ocupa a posição de 500 km, faz-se:

$$\begin{aligned} s(t) &= 25t + 50 \\ 500 &= 25t + 50 \\ 450 &= 25t \\ t &= \frac{450}{25} = 18\,horas. \end{aligned}$$

Exemplo 2.31 (Adaptado (BONJORNO et al., 2016)): Um veículo percorre um trecho retilíneo de uma estrada e sua velocidade varia com o tempo de acordo com a tabela a seguir. Considerando apenas o intervalo em que o movimento é uniformemente variado, determine a lei que descreve a variação da velocidade em função do tempo.

Tabela 7 – Dados exemplo 2.31

$\mathbf{t}(s)$	0	2	4	6	8	10
$\mathbf{v}(m/s)$	14	18	22	26	26	26

Fonte: Bonjorno et al. (2016)

Segundo os dados apresentados na tabela, observa-se movimento uniformemente variado no intervalo de 0 a 6 segundos. Dessa forma é possível determinar o valor da aceleração escalar:

$$\alpha = \frac{18 - 14}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2\,m/s^2.$$

Por sua vez, para o instante de tempo inicial, o veículo possui uma velocidade inicial $v_0 = 14\,m/s$. Assim, a função afim que descreve essa variação será dada por:

$$\begin{aligned} v(t) &= \alpha t + v_0 \\ v(t) &= 2t + 14. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Aspectos Metodológicos

Este capítulo tratará especificamente da ferramenta de pesquisa, dos sujeitos envolvidos e da forma como se deu a mesma.

3.1 Caracterização da Pesquisa

A presente pesquisa caracteriza-se por qualitativa, uma vez que não houve preocupação apenas com o número de acertos e erros por parte dos pesquisados, e sim com toda a construção do conhecimento levada em conta na resolução das atividades propostas.

Segundo Goldenberg (2000), no âmbito da pesquisa, dados qualitativos e quantitativos se distinguem, entre outros pontos, por esse primeiro consistir em descrições detalhadas de situações com o intuito de compreender os indivíduos em seus próprios termos, não sendo padronizáveis como o que ocorre com os dados quantitativos. Por tais fatores, Goldenberg diz ainda que, ao optar-se por uma pesquisa de caráter qualitativo, cabe ao pesquisador certa flexibilidade e criatividade para coletar e analisar os dados.

> Não existindo regras precisas e passos a serem seguidos, o bom resultado da pesquisa depende da sensibilidade, intuição e experiência do pesquisador (GOLDENBERG, 2000, p. 31).

Para que, futuramente, outros pesquisadores possam analisar os resultados obtidos no presente estudo, Goldenberg (2000) afirma que é necessária uma delimitação clara do objeto de estudo, e esse deve estar diretamente ligado à problemática central. Nesta pesquisa, em específico, trata-se da não abordagem do estudo das progressões aritméticas como um caso particular de função afim.

As atividades aplicadas para a realização da pesquisa foram divididas em três partes: Exercícios introdutórios (Apêndice A), Exercícios específicos (Apêndice B) e Exercícios conclusivos (Apêndice C).

3.2 Sujeitos da Pesquisa

A pesquisa foi aplicada nas turmas de 1º ano do ensino médio da escola Professora Hosana Salles, da rede estadual do Espírito Santo, localizada no município de Cachoeiro de Itapemirim.

De todos os alunos, foi selecionada uma amostra de 20 estudantes para participarem das atividades propostas pelo professor em formação. Tal seleção foi realizada juntamente com os demais professores da área de conhecimento.

Deu-se preferência para discentes do 1º ano, pois para essas turmas o estudo da progressão aritmética e função afim é recente . No primeiro trimestre do ano letivo de 2019, foi ministrado o conteúdo de progressão aritmética, já o de função afim foi abordado no segundo trimestre.

Uma vez que a pesquisa foi realizada em meados do terceiro trimestre de 2019, bastou uma breve revisão dos conteúdos em questão para que os alunos retomassem os conceitos necessários para o andamento da pesquisa por meio de suas contribuições com as atividades propostas.

3.3 Instrumentação

Para a realização da pesquisa, planejou-se a sequência didática composta por: divisão dos alunos em dois grupos, com o intuito de diminuir o contingente, sendo possível uma maior atenção aos mesmos; aulas de revisão dos conteúdos trazendo à tona ideias chaves para a resolução das atividades propostas; aplicação da atividade instrumento de pesquisa; e ainda um momento de retorno com os alunos e análise das atividades.

Todas as etapas da sequência didática foram pensadas visando o sucesso da pesquisa, segundo as seguintes situações de aprendizagem:

- **Conteúdos**: Função Afim e Progressão Aritmética;
- **Competências**: Reconhecer as relações pertinentes aos conteúdos de Função Afim e Progressão Aritmética;
- **Habilidades Desenvolvidas**: Revisar Função Afim, revisar Progressão Aritmética e compreender as relações entre os conteúdos envolvidos;
- **Materiais**: Quandro branco, projetor e bloco de atividades.

3.4 Descrição das Atividades

Algumas das questões propostas foram elaboradas pelo autor e outras foram adaptadas de livros didáticos de ensino médio (BIANCHINI; PACCOLA, 2004), (SANTOS; GENTIL; GRECO, 2002), (SMOLE; KIYUKAWA, 1988), conforme o objetivo do presente estudo. Propositalmente, as questões foram dispostas de modo que, ao resolvê-las, os alunos fossem capazes de identificar e entender a relação entre função afim e progressão aritmética.

Os exercícios foram divididos em três grupos: introdutórios, específicos e conclusivos. De maneira que houvesse uma sequência lógica na evolução dos conteúdos, no grau de dificuldade e nas relações entre os mesmos.

1º Grupo - Exercícios Introdutórios: Composto por 4 questões (Apêndice A), este primeiro grupo teve como principal objetivo revisar os conceitos básicos dos conteúdos de função afim e progressão aritmética de forma a preparar o aluno para o que será tratado nos demais exercícios. Na parte de função afim, exercícios para indicar os coeficientes angular e linear de cada função e cálculo de imagem de determinada função. Em progressão aritmética, exercícios para indicar a razão e completar alguns termos da PA e ainda reconhecimento por meio de um gráfico.

2º Grupo - Exercícios Específicos: Formado por 7 questões no total (Apêndice B), este grupo, por sua vez, procurou tratar cada conteúdo de maneira distinta e com exercícios um pouco mais aplicados. Ambas partes tiveram exercícios de aplicação direta do conteúdo e também alguns problemas exigindo um pouco mais além da simples aplicação de conceitos.

3º Grupo - Exercícios Conclusivos: Por fim, este grupo composto por 4 questões (Apêndice C), teve o objetivo de concatenar os conceitos abordados e levar o aluno ao objetivo central desse estudo de perceber a progressão aritmética como uma particularidade da função afim. Os exercícios desta etapa exigiam não somente de forma isolada, como também os conceitos dos dois conteúdos envolvidos.

3.5 Procedimento da pesquisa

Inicialmente o professor pesquisador, após selecionar a amostra de 20 alunos, dividiu-os em dois grupos, para ter uma mobilidade maior na utilização das aulas, sem atrapalhar as demais aulas dos alunos, e ainda, viabilizar uma maior atenção à aplicação da sequência didática.

Foram aplicadas duas aulas de 50 minutos em um dia para o primeiro grupo e duas aulas de 50 minutos no dia seguinte para o segundo grupo, para revisão dos conteúdos de função afim e progressão aritmética, com explicação, resolução de exercícios e comentários. O material utilizado na revisão foi o mesmo do ano letivo decorrente (IEZZI et al., 2016a).

Para a resolução da atividade exploratória foram reservadas seis aulas de 50 minutos, sendo três para cada grupo, em dias subsequentes. Nesta etapa, os alunos trabalharam individualmente, e em momentos oportunos e necessários o professor pesquisador fez as devidas intervenções. As atividades foram identificadas com os nomes dos alunos e, ao final de cada encontro eram recolhidas para serem entregues no encontro posterior.

Durante as aulas reservadas ao presente estudo, teve-se sempre o cuidado de tratar o aluno como sujeito autônomo e participativo no processo de construção proposto pela sequência didática, garantindo assim a fluidez das atividades e do processo de interpretação dos conceitos a serem aprendidos, objetivando sempre uma postura interrogativa (PONTE et al., 2003).

Após o término da atividade instrumento de pesquisa e um tempo para uma análise inicial por parte do professor pesquisador, todo o grupo de alunos foi reunido mais uma vez para a realização de uma devolutiva a respeito das atividades, dissertando por todas as questões e comentando, quando cabível, os erros mais comuns dentre as resoluções. De maneira geral, na opinião dos alunos envolvidos na pesquisa, o conteúdo de progressão aritmética seria um pouco mais simples quando comparado ao conteúdo de função afim, pois segundo eles, "PA só têm as fórmulas de termo geral e soma dos termos (...) e a função, além da fórmula, ainda tem a parte do gráfico e análise".

Sobre a análise das atividades, essa foi realizada de modo a considerar as soluções propostas pelos alunos, seja ela certa ou errada, mas sempre com a finalidade de contribuir para a construção de novos níveis de conhecimento.

Capítulo 4

Sequência Didática e Análise dos Dados

Neste capítulo, será apresentada uma análise dos exercícios da atividade exploratória, bem como uma tabulação dos erros, não para quantificar erros e acertos, mas para uma visão relativa sobre o objetivo proposto.

4.1 Parte 1: Exercícios Introdutórios

Esta primeira parte da atividade exploratória (Apêndice A) é composta por 4 exercícios e teve como objetivo revisar os conceitos básicos dos conteúdos de função afim e progressão aritmética, de forma a preparar o aluno para as demais etapas da atividade.

Questão 1: *Complete as sequências indicando o primeiro termo* (a_1)*, a razão* (r)*, e indique se ela é crescente ou decrescente:*

a) $(-1, -4, -7, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_)$

b) $(-4, -2, 0, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_)$

c) $(45, 51, 57, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_)$

d) $(-10, -8, -6, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_)$

O objetivo dessa questão era apenas verificar o entendimento dos conceitos básicos de progressão aritmética por parte dos alunos.

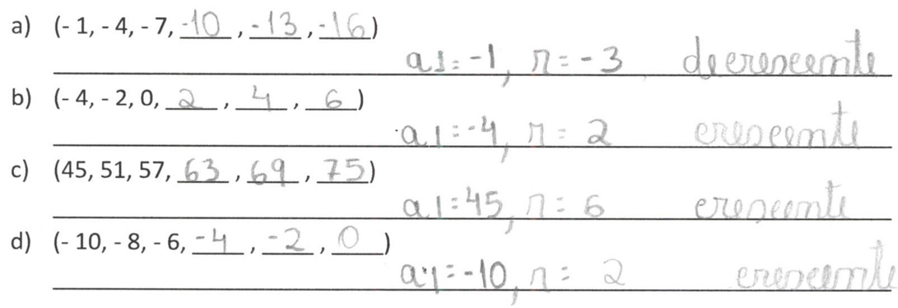
Tabela 8 – Resultado Questão 1

Acertos	**Erros**	**Índice**
20	0	100%

Fonte: Dados da pesquisa

Como esperado por parte do pesquisador, todos os 20 alunos acertaram esta primeira questão (figura 23), identificando claramente o primeiro termo e a razão das progressões aritméticas apresentadas, visto ser parte inicial do assunto, a qual os alunos demonstravam certo domínio ao longo da revisão dos conteúdos.

Figura 23 – Questão 1


a) (- 1, - 4, - 7, -10, -13, -16)
a1 = -1, r = -3 decrescente

b) (- 4, - 2, 0, 2, 4, 6)
a1 = -4, r = 2 crescente

c) (45, 51, 57, 63, 69, 75)
a1 = 45, r = 6 crescente

d) (- 10, - 8, - 6, -4, -2, 0)
a1 = -10, r = 2 crescente

Fonte: Dados da pesquisa

Questão 2: *Nas funções a seguir, indique o coeficiente angular* (a)*, o coeficiente linear* (b) *e se ela é crescente ou decrescente:*

a) $y = x - 1$

b) $y = -x + 4$

c) $y = -3x + 2$

d) $y = 2x + 1$

O objetivo desta questão era apenas verificar o entendimento dos conceitos básicos de função afim por parte dos alunos.

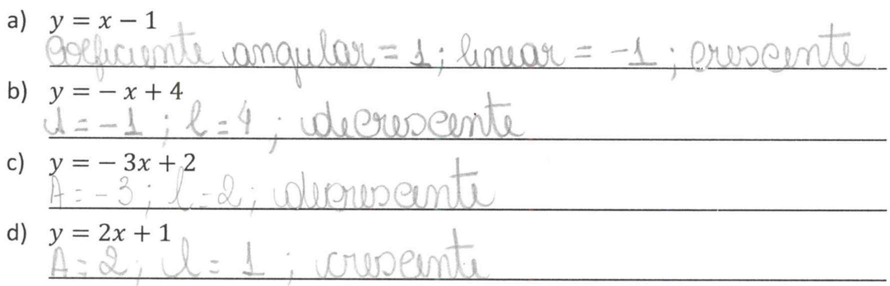
Tabela 9 – Resultado Questão 2

Acertos	**Erros**	**Índice**
19	1	95%

Fonte: Dados da pesquisa

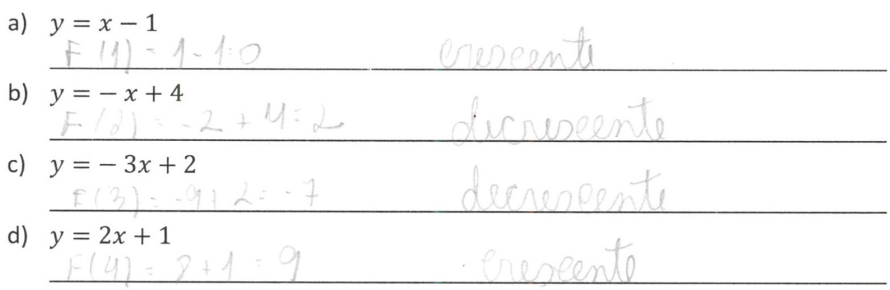
Dos 20 alunos pesquisados, 19 entenderam claramente o comando da questão e responderam de forma correta (figura 24), e apenas 1 aluno se equivocou ao responder a questão e calculou algumas imagens das funções dadas (figura 25), ainda que tenha respondido corretamente a parte de identificação do comportamento da função como crescente ou decrescente.

Figura 24 – Questão 2 elaborada corretamente pelo aluno 01


a) $y = x - 1$
Coeficiente angular = 1; linear = −1; crescente
b) $y = -x + 4$
A = −1 ; L = 4 ; decrescente
c) $y = -3x + 2$
A = −3 ; L = 2 ; decrescente
d) $y = 2x + 1$
A = 2 ; L = 1 ; crescente

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 25 – Questão 2 elaborada incorretamente pelo aluno 02


a) $y = x - 1$
F(1) = 1 − 1 = 0 crescente
b) $y = -x + 4$
F(2) = −2 + 4 = 2 decrescente
c) $y = -3x + 2$
F(3) = −9 + 2 = −7 decrescente
d) $y = 2x + 1$
F(4) = 8 + 1 = 9 crescente

Fonte: Dados da pesquisa

Questão 3: *Dada a função afim* $f(x) = x + 2$, *e o domínio (1, 5, 9, 13), determine:*

a) $f(1)$; *b)* $f(5)$; *c)* $f(9)$; *d)* $f(13)$;

e) Escreva os resultados dos itens a, b, c e d, respectivamente:

f) O que observa nos resultados encontrados?

Esta questão tinha por objetivo tratar a noção de valores de domínio e as respectivas imagens, dada uma determinada função afim.

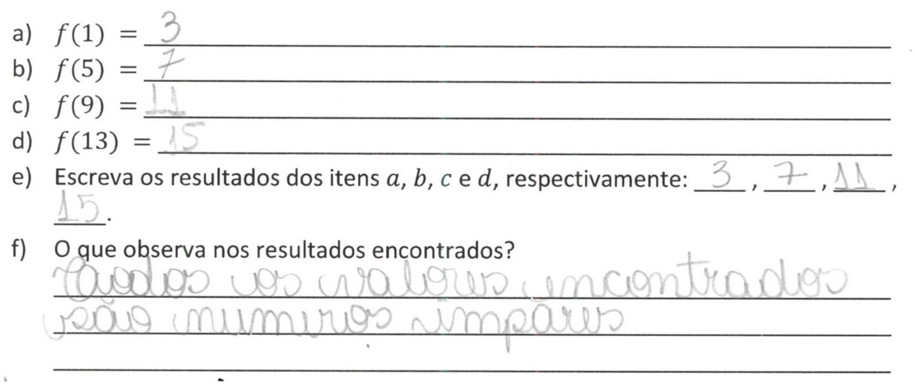
Tabela 10 – Resultado Questão 3

Acertos	**Erros**	**Índice**
20	0	100%

Fonte: Dados da pesquisa

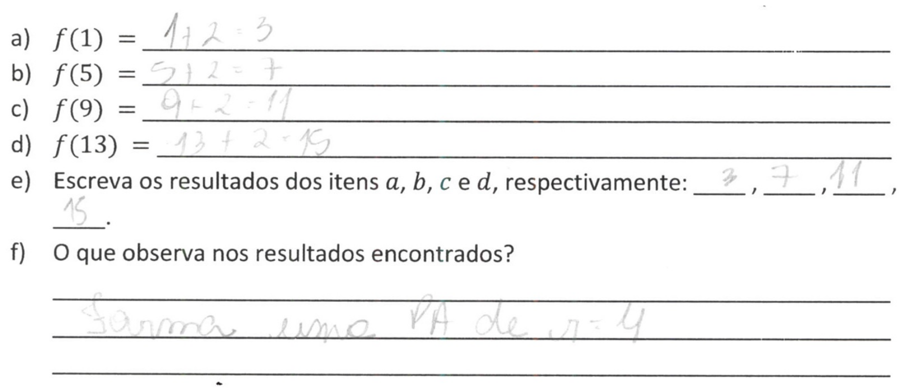
Nesta questão todos os alunos acertaram ao responder os itens de *a* até *e*. As diferentes respostas do item *f* não foram aqui classificadas como erro pois essa ficou aberta às diferentes interpretações por parte dos alunos. Alguns identificaram como uma sequência composta por números ímpares (figura 26) enquanto outros já afirmaram ser uma progressão aritmética (figura 27).

Figura 26 – Questão 3 elaborada corretamente pelo aluno 01


a) $f(1)$ = 3
b) $f(5)$ = 7
c) $f(9)$ = 11
d) $f(13)$ = 15
e) Escreva os resultados dos itens a, b, c e d, respectivamente: 3, 7, 11, 15.
f) O que observa nos resultados encontrados?
Todos os valores encontrados são numeros impares

Fonte: Dados da pesquisa

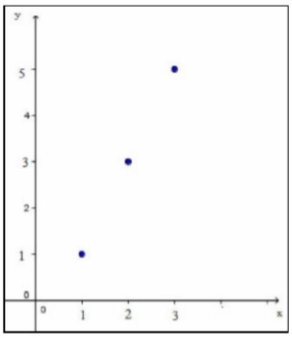
Figura 27 – Questão 3 elaborada corretamente pelo aluno 02


a) $f(1)$ = 1+2=3
b) $f(5)$ = 5+2=7
c) $f(9)$ = 9+2=11
d) $f(13)$ = 13+2=15
e) Escreva os resultados dos itens a, b, c e d, respectivamente: 3, 7, 11, 15.
f) O que observa nos resultados encontrados?
forma uma PA de r=4

Fonte: Dados da pesquisa

Questão 4: *O gráfico a seguir é caracterizado por uma PA ou por uma função afim? Justifique:*

Figura 28 – Questão 4



Fonte: Adaptado pelo autor

O objetivo desta questão era que o aluno identificasse o gráfico como o de uma progressão aritmética, uma vez que o mesmo contem pontos alinhados e igualmente espaçados, diferentemente, se fosse um gráfico de uma função afim que deveria conter uma reta.

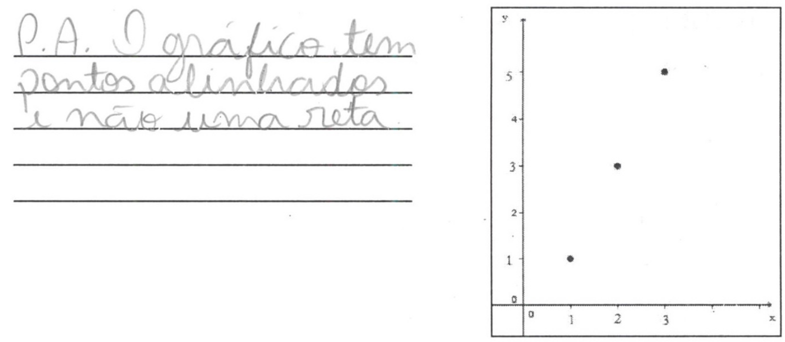
Tabela 11 – Resultado Questão 4

Acertos	**Erros**	**Índice**
12	8	60%

Fonte: Dados da pesquisa

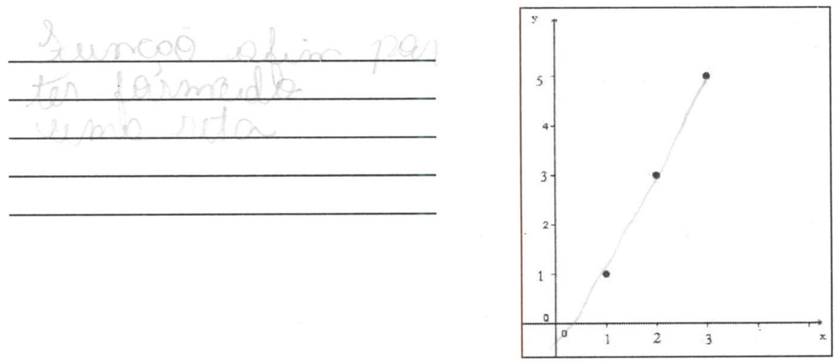
Dos 20 estudantes, 12 identificaram corretamente o gráfico como de uma progressão aritmética devido ao fato de conter pontos alinhados e devidamente espaçados (figura 29), e 8 alunos não responderam corretamente, em alguns casos (figura 30) confundindo o fato de os pontos estarem alinhados com a formação de uma reta.

Figura 29 – Questão 4 elaborada corretamente pelo aluno 01



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 30 – Questão 4 elaborada incorretamente pelo aluno 02



Fonte: Dados da pesquisa

4.2 Parte 2: Exercícios Específicos

Esta segunda parte da atividade exploratória (Apêndice B), composta por 7 questões no total, procurou tratar cada conteúdo de maneira específica, com exercícios de aplicação direta dos assuntos e com alguns problemas um pouco mais elaborados.

4.2.1 Função Afim

Questão 5: *Observe a tabela a seguir:*

Tabela 12 – Juros Simples

t(meses)	1	2	3
J(reais)	60	120	180

Fonte: Dados da pesquisa

a) Determine a lei da função que expressa os juros simples em função do tempo.

b) Faça o esboço do gráfico dessa função.

O objetivo desta questão foi o de proporcionar ao aluno trabalhar com função afim de forma contextualizada, nesse caso aplicada a juros simples.

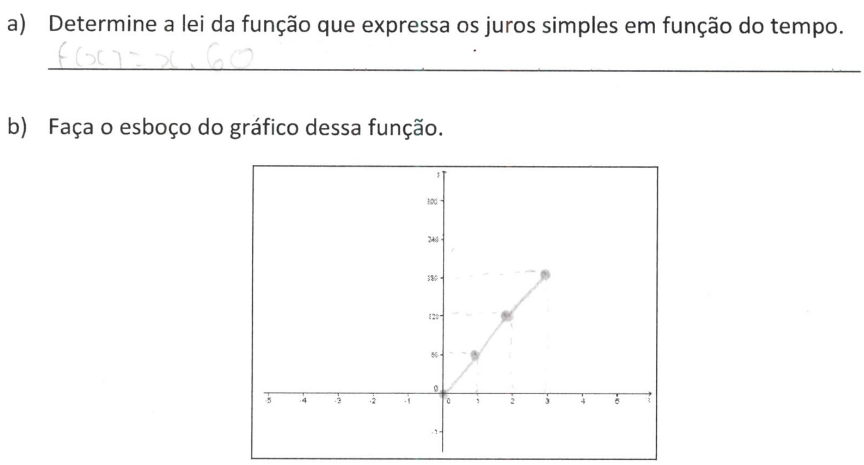
Tabela 13 – Resultado Questão 5

Acertos	**Erros**	**Índice**
20	0	100%

Fonte: Dados da pesquisa

Todos os 20 alunos responderam corretamente essa questão, identificando a função afim aplicada à tabela 12, bem como o gráfico linear referente (figura 31).

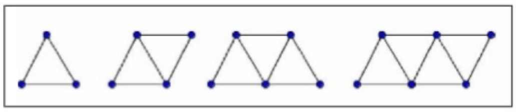
Figura 31 – Questão 5 elaborada corretamente pelo aluno 01



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 6: *Observe a sequência de triângulos formados por palitos:*

Figura 32 – Sequência de triângulos



Fonte: Adaptado pelo autor

a) Complete a tabela:

Número de Triângulos	Número de Palitos
1	3
2	5
3	
4	
5	
6	
7	
n	

b) Determine a lei que expressa o número de palitos em função do número de triângulos formados?

c) Desenhe o gráfico dessa função:

d) Quantos palitos são necessários para formar 37 triângulos:

e) Quantos triângulos poderão ser formados com 99 palitos:

Esta questão tinha o objetivo de relacionar função afim com raciocínio lógico.

Tabela 14 – Resultado Questão 6

Acertos	**Erros**	**Índice**
17	3	85%

Fonte: Dados da pesquisa

Dos 20 alunos pesquisados, 17 responderam corretamente a questão, preenchendo a tabela (item *a*) e, consequentemente, respondendo aos demais itens *b*, *c*, *d* e *e* (figura 33). Dentre os 3 alunos que não tiveram sucesso em suas respostas, um até preencheu a tabela corretamente (item *a*) mas errou nos demais itens (*b*, *c*, *d* e *e*), outro se equivocou ao completar a tabela o que acarretou em erro nos demais itens que dependiam diretamente do respondido no item *a* (figura 34), um terceiro aluno não se atentou ao fato de que o gráfico da função, segundo o domínio dado, não passava pela origem dos eixos. Ficou aqui evidenciado que a maioria dos alunos souberam desenvolver a ideia de função apresentada pela sequência de triângulos e a quantidade de palitos utilizados.

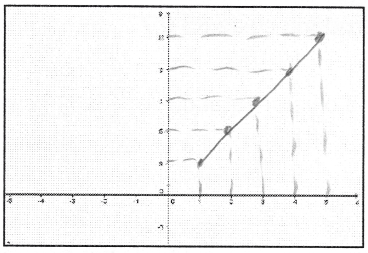
Figura 33 – Questão 6 elaborada corretamente pelo aluno 01

Número de Triângulos	Número de Palitos
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
n	$n.2+1$

b) Determine a lei que expressa o número de palitos em função do número de triângulos formados?

$y = 2.x + 1$

c) Desenhe o gráfico dessa função:



d) Quantos palitos são necessários para formar 37 triângulos:

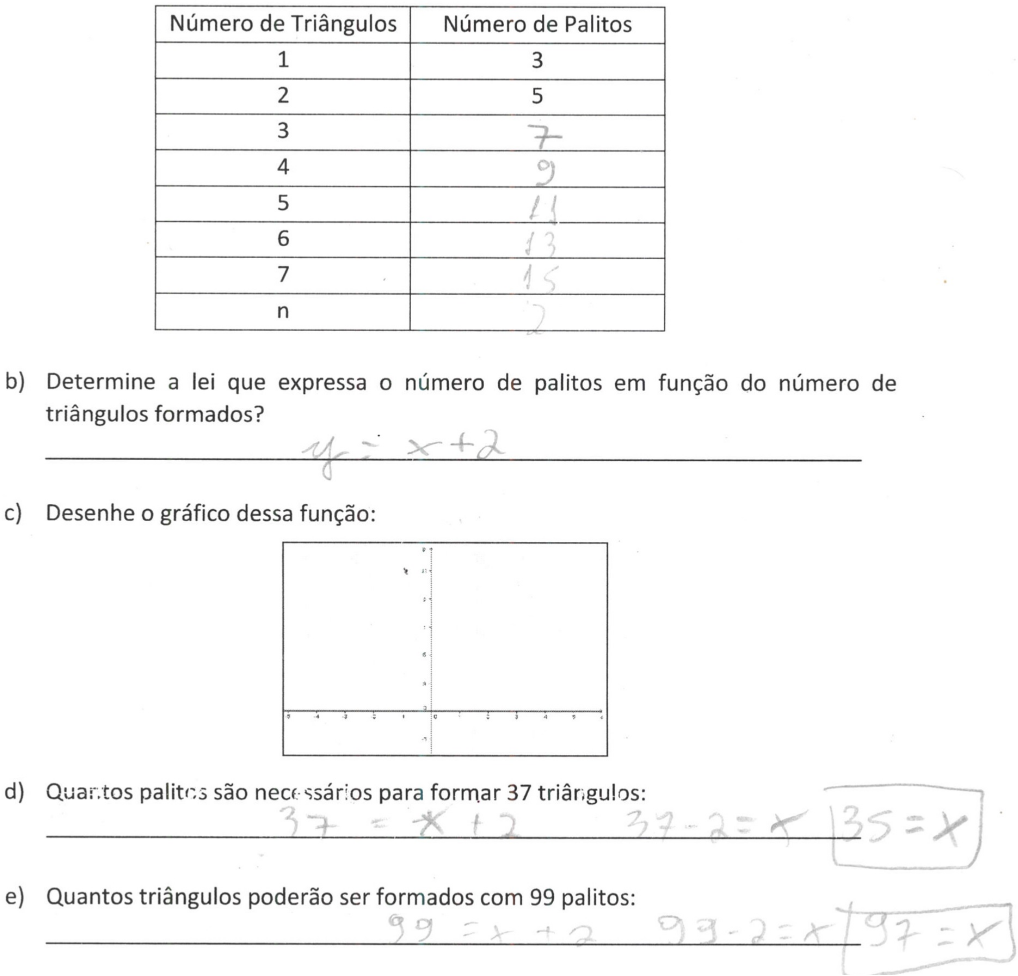
$2.37 + 1 = 75$

e) Quantos triângulos poderão ser formados com 99 palitos:

$2x+1=99 \quad 2x=98 \quad x=98/2 \quad x=49$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 34 – Questão 6 elaborada incorretamente pelo aluno 02



Número de Triângulos	Número de Palitos
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
n	?

b) Determine a lei que expressa o número de palitos em função do número de triângulos formados?

$y = x + 2$

c) Desenhe o gráfico dessa função:

d) Quantos palitos são necessários para formar 37 triângulos:

$37 = x + 2 \quad 37 - 2 = x \quad \boxed{35 = x}$

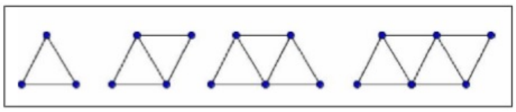
e) Quantos triângulos poderão ser formados com 99 palitos:

$99 = x + 2 \quad 99 - 2 = x \quad \boxed{97 = x}$

Fonte: Dados da pesquisa

Questão 7: *Observe a sequência de triângulos formados por palitos, quanto ao perímetro:*

Figura 35 – Sequência de triângulos



Fonte: Adaptado pelo autor

a) Complete a tabela:

Número de Triângulos	Perímetro da Figura
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
7	
n	

b) Determine a lei que expressa o perímetro da figura em função do número de triângulos formados?

c) Desenhe o gráfico dessa função:

Esta questão tinha o objetivo que relacionar função afim com raciocínio lógico, analisando o perímetro da figura formada.

Tabela 15 – Resultado Questão 7

Acertos	**Erros**	**Índice**
18	2	90%

Fonte: Dados da pesquisa

Dentre os 20 alunos que responderam a questão, 18 responderam corretamente, associando a tabela preenchida com a específica função afim e sua representação gráfica (figuras 36 e 37). Um aluno não se atentou ao que deveria ser preenchido na tabela, o perímetro dos triângulos, relacionando o número de palitos (figura 38) errando os demais itens da questão, e outro ao esboçar o gráfico da função, segundo o domínio dado, não observou que o mesmo passava pela origem dos eixos (figura 39).

Figura 36 – Questão 7 elaborada corretamente pelo aluno 01 (parte 1)

a) Complete a tabela:

Número de Triângulos	Perímetro da Figura
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
n	m + 2

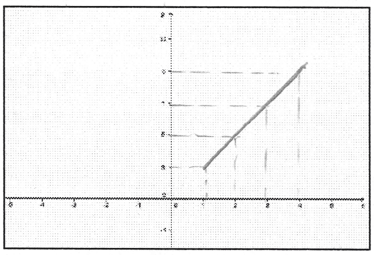
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 37 – Questão 7 elaborada corretamente pelo aluno 01 (parte 2)

b) Determine a lei que expressa o perímetro da figura em função do número de triângulos formados?

$f(x) = x + 2$

c) Desenhe o gráfico dessa função:



Fonte: Dados da pesquisa

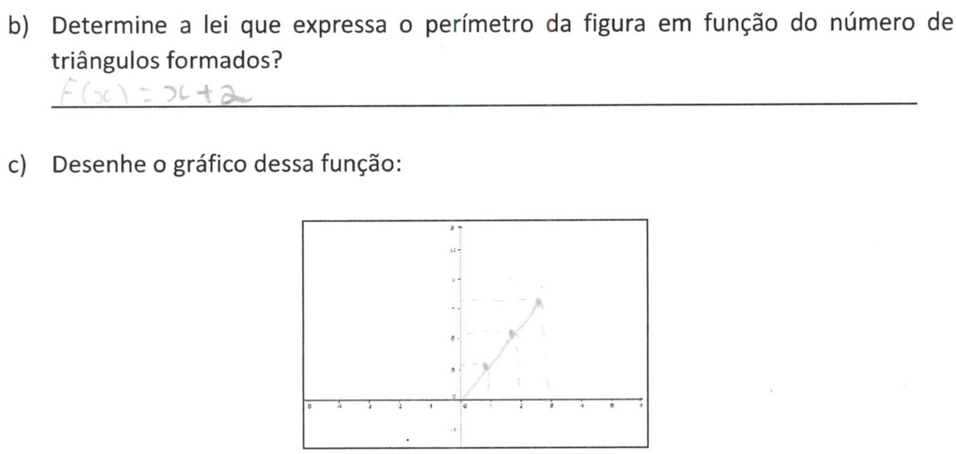
Figura 38 – Questão 7 elaborada incorretamente pelo aluno 02 (parte 1)

a) Complete a tabela:

Número de Triângulos	Perímetro da Figura
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
n	2

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 39 – Questão 7 elaborada incorretamente pelo aluno 02 (parte 2)


b) Determine a lei que expressa o perímetro da figura em função do número de triângulos formados?

f(x) = x+2

c) Desenhe o gráfico dessa função:

Fonte: Dados da pesquisa

Questão 8: *O valor de uma corrida de táxi é formado por uma parte fixa mais um valor variável que depende da quantidade de quilômetros rodados. Supondo que a taxa fixa seja de R\$ 4,90 e o quilômetro rodado custa R\$ 0,72, determine:*

a) A lei que expressa o valor total da corrida (y) em função do número de quilômetros rodados (x):

b) O valor a ser pago por uma corrida de 8,5 km:

c) A distância percorrida por um passageiro que pagou um total de R\$ 10,66:

O objetivo desta questão era proporcionar ao aluno trabalhar com função afim de forma contextualizada com problemas do cotidiano, nesse caso aplicada ao valor a ser pago por uma prestação de serviço.

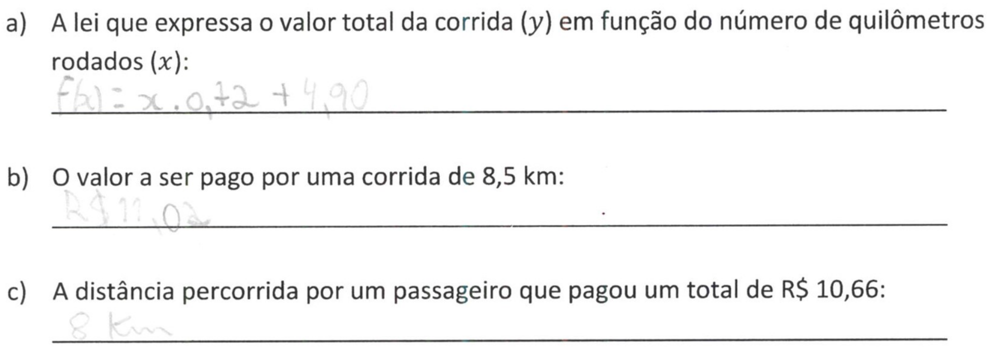
Tabela 16 – Resultado Questão 8

Acertos	**Erros**	**Índice**
18	2	90%

Fonte: Dados da pesquisa

A maioria dos alunos, 18 dentre os 20 envolvidos, acertaram esta questão, souberam identificar a lei que expressava o valor da corrida em função da quilometragem percorrida, acertando os demais itens por consequência desse (figura 40). Dentre os 2 alunos que erraram, ambos se equivocaram na determinação da lei da função, determinando apenas um valor e não a função específica requerida pela questão. E sem a função do item *a* errar os demais itens *b* e *c*, foi consequência (figura 41).

Figura 40 – Questão 8 elaborada corretamente pelo aluno 01


a) A lei que expressa o valor total da corrida (y) em função do número de quilômetros rodados (x):

f(x) = x . 0,72 + 4,90

b) O valor a ser pago por uma corrida de 8,5 km:

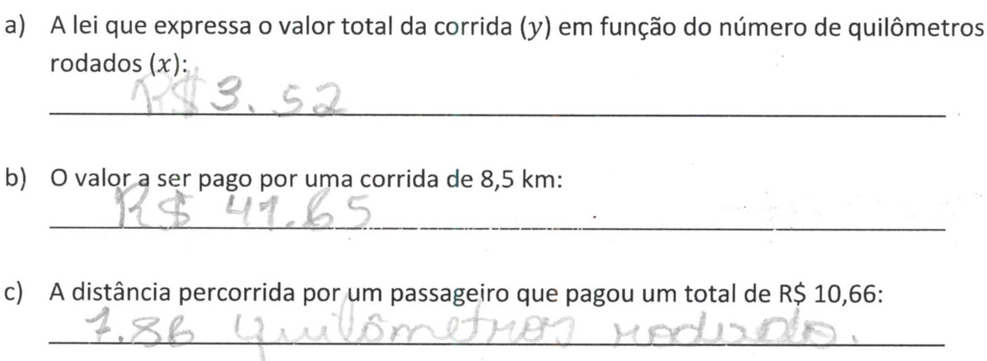
R$ 11,02

c) A distância percorrida por um passageiro que pagou um total de R$ 10,66:

8 Km

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 41 – Questão 8 elaborada incorretamente pelo aluno 02


a) A lei que expressa o valor total da corrida (y) em função do número de quilômetros rodados (x):

R$ 3.52

b) O valor a ser pago por uma corrida de 8,5 km:

R$ 41.65

c) A distância percorrida por um passageiro que pagou um total de R$ 10,66:

7.86 quilômetros rodados.

Fonte: Dados da pesquisa

4.2.2 Progressão Aritmética

Questão 9: *Um atleta percorre 4,9m durante o primeiro segundo. Depois disso, a cada segundo percorre sempre 9,8m a mais do que no segundo anterior. Quantos metros ele percorrerá após 8 segundos?*

Esta questão tinha o objetivo de mostrar a aplicação das ideias de progressão aritmética em problemas simples, onde identifica-se o padrão da sequência e determina-se os demais elementos da mesma.

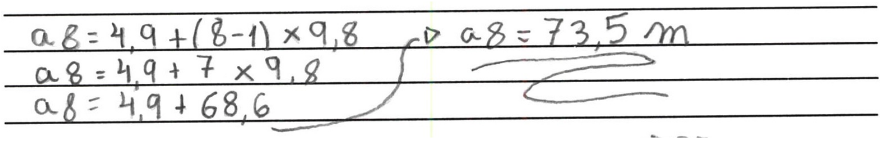
Tabela 17 – Resultado Questão 9

Acertos	**Erros**	**Índice**
20	0	100%

Fonte: Dados da pesquisa

Todos os alunos acertaram esta questão, alguns revolveram por meio de somas sucessivas para se chegar ao valor final, e uma minoria aplicou diretamente na fórmula do termo geral, uma vez que eram conhecidos o primeiro termo e a razão da PA (figura 42).

Figura 42 – Questão 9 elaborada corretamente pelo aluno 01



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 10: *Observe o quadro abaixo:*

Figura 43 – Sequência de números

3	5	7	9
11	13	15	17
19	21	23	25
...	...	...	...

Fonte: Adaptado pelo autor

a) Quais os números da sexta linha da tabela?

b) Qual número ocupará a 3ª coluna na 12ª linha?

c) Qual a soma dos elementos da 14ª coluna?

O objetivo desta questão era aplicar o conceito de progressão aritmética na resolução de problemas de raciocínio lógico.

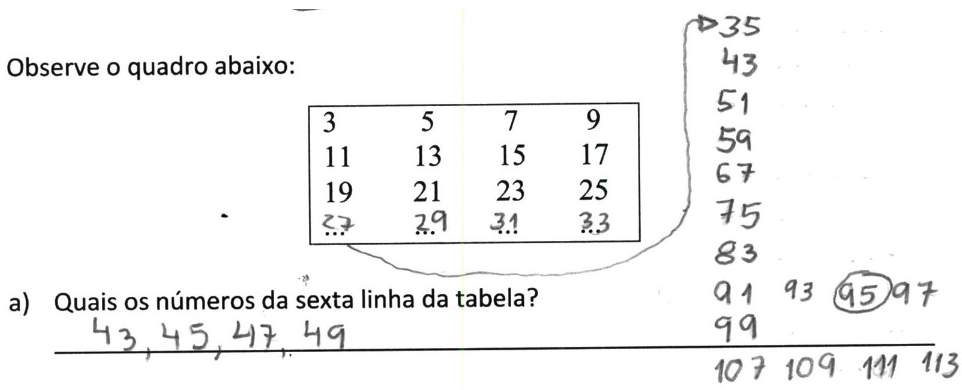
Tabela 18 – Resultado Questão 10

Acertos	**Erros**	**Índice**
20	0	100%

Fonte: Dados da pesquisa

Todos os 20 alunos pesquisados responderam esta questão de forma correta, analisando o quadro e identificando o padrão da sequência entre linhas e colunas (figuras 44 e 45). É válido destacar que nem todos os alunos tiveram a mesma linha de raciocínio, o que não impediu de obterem êxito na resolução do exercício.

Figura 44 – Questão 10 elaborada corretamente pelo aluno 01 (parte 1)



Observe o quadro abaixo:

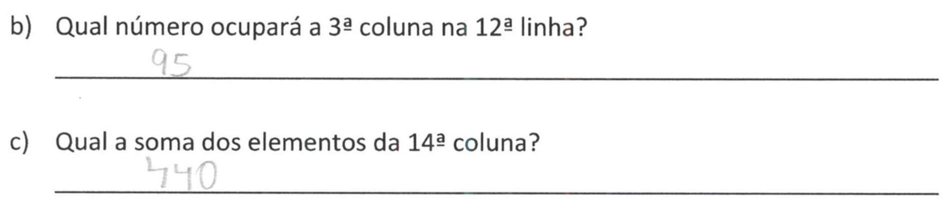
3	5	7	9
11	13	15	17
19	21	23	25
27	29	31	33

35
43
51
59
67
75
83
91 93 95 97
99
107 109 111 113

a) Quais os números da sexta linha da tabela?
43, 45, 47, 49

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 45 – Questão 10 elaborada corretamente pelo aluno 01 (parte 2)



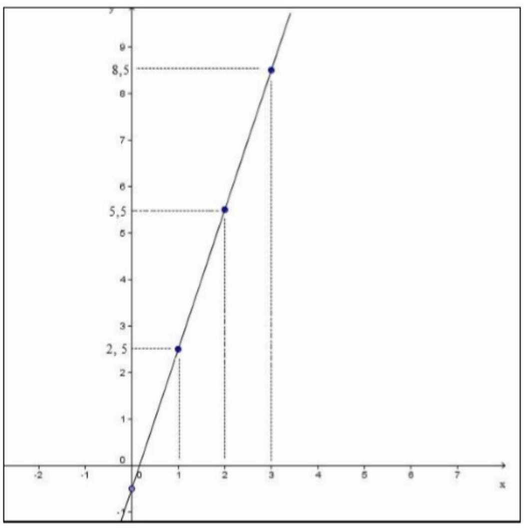
b) Qual número ocupará a 3ª coluna na 12ª linha?
95

c) Qual a soma dos elementos da 14ª coluna?
440

Fonte: Dados da pesquisa

Questão 11: *Determine a razão* (r) *e o primeiro termo* (a_1) *da progressão aritmética formada pelas ordenadas (eixo y) dos pontos assinalados.*

Figura 46 – Gráfico progressão aritmética



Fonte: Adaptado pelo autor

O objetivo desta questão era a resolução por meio de análise e interpretação do gráfico.

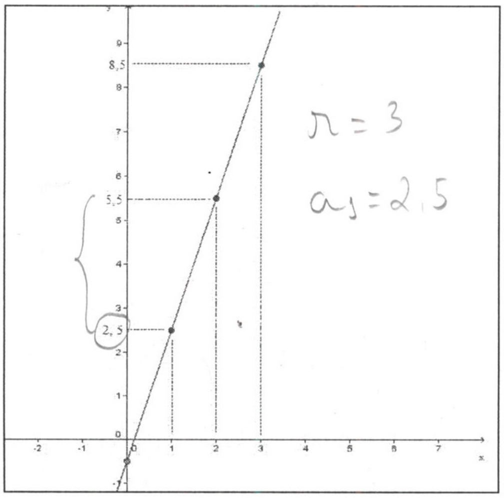
Tabela 19 – Resultado Questão 11

Acertos	**Erros**	**Índice**
20	0	100%

Fonte: Dados da pesquisa

Uma vez que a questão afirmava, em seu enunciado, que o gráfico representava uma progressão aritmética, não houve dúvidas quanto à análise do gráfico e todos os alunos souberam identificar o primeiro termo da PA como a ordenada do ponto de abscissa 1, e a razão da PA como a diferença constante entre as ordenadas dos pontos destacados (figura 47).

Figura 47 – Questão 11 elaborada corretamente pelo aluno 01



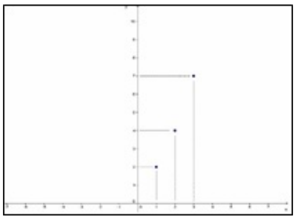
Fonte: Dados da pesquisa

4.3 Parte 3: Exercícios Conclusivos

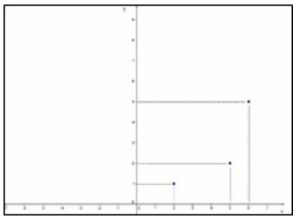
A terceira e última parte da atividade exploratória (Apêndice C) é composta por 4 questões com o principal objetivo de concatenar os conceitos abordados, e levar o aluno a perceber a progressão aritmética como um caso particular da função afim. Os exercícios desta etapa exigiam, na maioria das vezes, os conceitos dos dois conteúdos envolvidos.

Questão 12: *Em quais gráficos a sequência formada pelas ordenadas (eixo y) dos pontos assinalados é uma progressão aritmética? E uma função? Justifique sua resposta.*

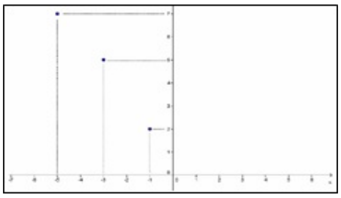
Figura 48 – Gráficos questão 12



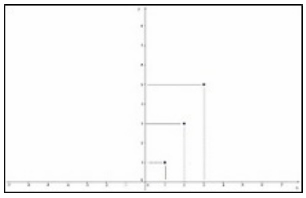
(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: Adaptado pelo autor

Esta questão teve por objetivo identificar quais gráficos representavam progressão aritmética, e se possível, de forma conclusiva e consequente, identifica-lo como gráfico de função afim, ainda que sejam representados apenas pontos e não retas.

Tabela 20 – Resultado Questão 12

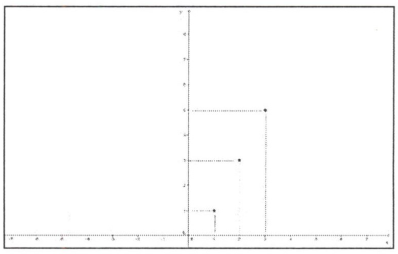
Acertos	**Erros**	**Índice**
20	0	100%

Fonte: Dados da pesquisa

Todos os alunos envolvidos na pesquisa acertaram esta questão pois, dentre outras observações que descartaram as demais opções, souberam associar o fato de que o gráfico de uma progressão aritmética deve conter pontos alinhados e igualmente espaçados, ou seja, diferença constante entre os valores sobre o eixo das ordenadas, sendo o item *d* a resposta correta (figura 49). Alguns alunos ainda afirmaram ser o gráfico de uma função afim, devido principalmente a possibilidade de se traçar uma reta sobre os pontos alinhados.

Figura 49 – Questão 12 elaborada corretamente pelo aluno 01

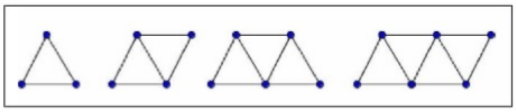
d) Função afim e PA
tem uma razão
e o gráfico forma
uma reta



Fonte: Dados da pesquisa

Questão 13: *Observe a sequência de triângulos formados por palitos, quanto ao perímetro:*

Figura 50 – Sequência de triângulos



Fonte: Adaptado pelo autor

a) Complete a tabela:

Número de Triângulos	Perímetro da Figura
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
7	
n	

b) Escreva a sequência formada na segunda coluna na ordem encontrada. Esta sequência é uma progressão aritmética? Explique por quê:

O objetivo desta questão foi utilizar uma atividade que já fora resolvida com o conceito de função afim, e que nesta etapa deveria ser resolvida por meio de progressão aritmética.

Tabela 21 – Resultado Questão 13

Acertos	**Erros**	**Índice**
19	1	95%

Fonte: Dados da pesquisa

Por desatenção ao conceito de perímetro explorado pela questão, um aluno se equivocou no preenchimento da tabela, não chegando às conclusões devidas para responder aos demais itens da questão (figura 51). Os outros 19 alunos compreenderam que o exercício, que antes fora resolvido por função afim, estava perfeitamente relacionado com o conceito de progressão aritmética (figura 52).

Figura 51 – Questão 13 elaborada corretamente pelo aluno 02

a) Complete a tabela:

Número de Triângulos	Perímetro da Figura
1	3
2	6
3	8
4	12
5	14
6	17
7	20
n	

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 52 – Questão 13 elaborada corretamente pelo aluno 01

a) Complete a tabela:

Número de Triângulos	Perímetro da Figura
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
n	n+2

b) Escreva a sequência formada na segunda coluna na ordem encontrada (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Esta sequência é uma progressão aritmética? Sim. Explique por quê: sequência de números com uma razão (1)

Fonte: Dados da pesquisa

Questão 14: *Considere a função $y = x + 2$ e complete a tabela:*

x	y
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
7	

a) O que você observa nas questões 13 (PA) e 14 (função afim)? Possuem algo em comum?

Esta questão teve por objetivo levar o aluno à conclusão de que, embora fossem exercícios distintos, um sobre função afim e o outro sobre PA, ambos apresentavam a mesma solução.

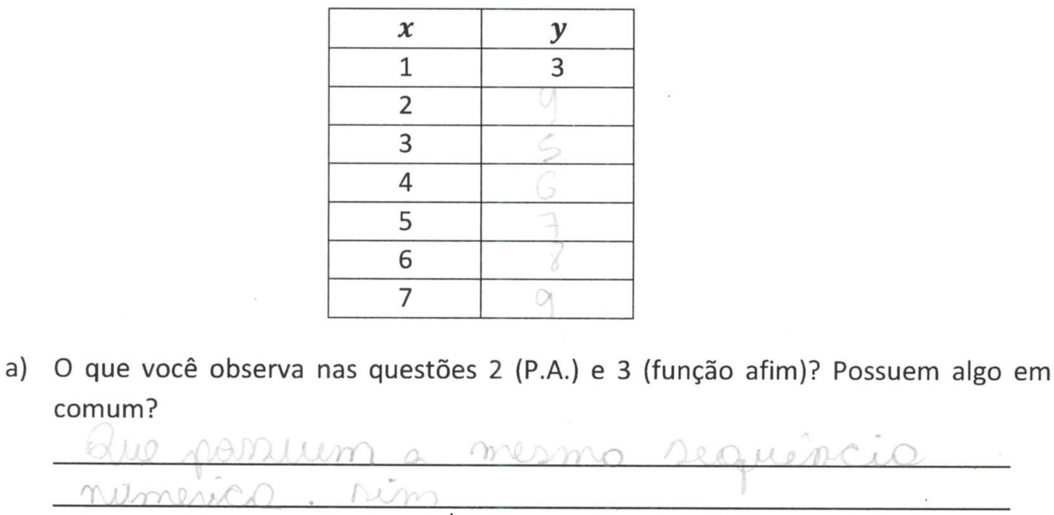
Tabela 22 – Resultado Questão 14

Acertos	**Erros**	**Índice**
19	1	95%

Fonte: Dados da pesquisa

Todos os alunos, com exceção do que errou a questão anterior, ou seja os 19, chegaram a conclusão de que ambas questões apresentavam a mesma sequência numérica como solução (figura 53), independente do comando tratar de uma PA (questão 13) ou diretamente de uma função afim (questão 14).

Figura 53 – Questão 14 elaborada corretamente pelo aluno 01



x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9

a) O que você observa nas questões 2 (P.A.) e 3 (função afim)? Possuem algo em comum?

Que possuem a mesma sequência numerica. sim

Fonte: Dados da pesquisa

Questão 15: *Dada a função afim $f(x) = 2x + 2$, e o domínio (1, 3, 5, 7), determine:*

a) $f(1)$; b) $f(3)$; c) $f(5)$; d) $f(7)$;

e) Escreva os resultados dos itens a, b, c e d, respectivamente:

f) O que observa nos resultados encontrados?

Por fim, esse último exercício trazia uma questão típica de função afim, envolvendo domínio e imagem, e o objetivo esperado era que o aluno pudesse concluir que os resultados por ele determinados formavam uma progressão aritmética.

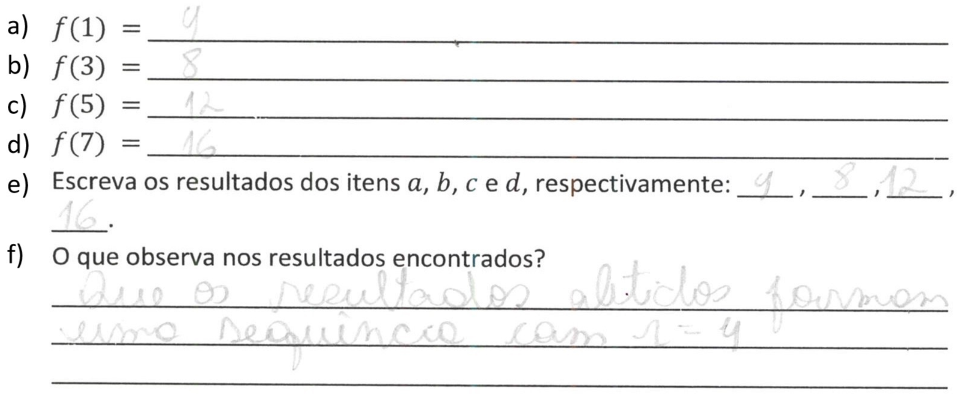
Tabela 23 – Resultado Questão 15

Acertos	**Erros**	**Índice**
20	0	100%

Fonte: Dados da pesquisa

Nesta última questão, todos os 20 alunos completaram corretamente os itens propostos, e puderam chegar a conclusão final de que os resultados obtidos como imagem da função $f(x) = 2x + 2$ formavam uma PA de razão 4 (figura 54).

Figura 54 – Questão 15 elaborada corretamente pelo aluno 01


a) $f(1)$ = 4
b) $f(3)$ = 8
c) $f(5)$ = 12
d) $f(7)$ = 16
e) Escreva os resultados dos itens a, b, c e d, respectivamente: 4, 8, 12, 16.
f) O que observa nos resultados encontrados?
Que os resultados obtidos formam uma sequência com r = 4

Fonte: Dados da pesquisa

Capítulo 5

Considerações Finais

É perceptível a dificuldade da maioria dos alunos em compreender a Matemática, dificuldade essa que algumas vezes reflete a falta de preparo do professor em apresentar determinado conteúdo de forma a fugir da formalidade sem empobrecer o processo de ensino e aprendizagem, tornando-o mais atrativo e proveitoso.

Como forma de enriquecer esse processo e ainda auxiliar o professor na diversificação da apresentação dos conteúdos, o presente estudo teve como objetivo explorar algumas relações existentes entre os temas Função Afim e Progressão Aritmética por meio de uma sequência didática que permitiu ao aluno pesquisado a construção do conceito, até então desconhecido para alguns, de que Progressão Aritmética pode ser tratada como um caso particular de Função Afim.

É válido ressaltar que após participar desse trabalho, o aluno pode perceber e compreender as semelhanças entre os temas através das representações algébricas e gráficas. Outro fato importante a ser ressaltado foi que a percepção dos alunos de que, em determinadas situações, um mesmo problema poderia ser resolvido das duas formas, por progressão aritmética ou por função afim.

Sobre as relações entre função afim e progressão aritmética, estas evidenciadas nas diretrizes obrigatórias da educação pública, devem ser devidamente consideradas pelos professores de matemática de forma a favorecer o processo de assimilação por parte do aluno, gerando nele autonomia para a resolução de problemas. Tendo sempre o cuidado de não descaracterizar a essência do conteúdo.

Mediante a proposta inicial da pesquisa - de apresentar aos alunos as relações existentes entre os conteúdos envolvidos - tem-se que o objetivo fora alcançado em sua totalidade conforme as etapas seguidas de: apresentação do tema aos pesquisados, explanação de ambos os conteúdos com o intuito de revisão, aplicação da atividade exploratória e devolutiva aos alunos acerca da atividade de forma a apontar os principais pontos observados pelo pesquisador.

Para estudos posteriores, seria válida a abordagem de outras relações que possam vir a enriquecer o processo ensino e aprendizagem, como entre função exponencial e progressão geométrica, ou ainda relacionando estas a juros compostos. O estudo das relações entre função afim e progressão aritmética pode ainda ser estendido as similaridades com juros simples, e ainda de forma interdisciplinar, com o estudo do Movimento Retilíneo Uniforme, abordado na disciplina de Física. Outra forma válida, seria aplicação da linha de pensamento desta pesquisa no ensino superior com a finalidade de explorar a elaboração de sequências didáticas.

Referências

ASSIS, C.; MIRANDA, T. Portal da matemática - obmep: Módulo função afim. *Acesso em 08/05/2020*, 2017. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1>. Citado na página 49.

BEZERRA, A. J. L. Coletânea de questões do paebes tri - 2015 à 2019. *Acesso em 08/05/2020*. Disponível em: <https://professoralexjose.blogspot.com/2018/12/coletanea-de-questoes-do-paebes-tri.html>.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 2004. Citado na página 61.

BONJORNO, J. R. et al. *Física: Mecânica, 1º ano*. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016. v. 1. Citado na página 58.

BORTOLOSSI, H. J. Pré-cálculo. *Departamento de Matemática Aplicada - UFF*, Acesso em 15/06/2020, 2011. Disponível em: <http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2011.1/gma00116/aulas/gma00116-aula-13.pdf>. Citado na página 36.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. secretaria de educação fundamental. *MEC/Secretaria de Educação Fundamental*, Brasília, 1998. Citado na página 16.

BRASIL. Ensino médio–orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. 2002. Citado na página 17.

BRASIL. Inep: Instituto nacional de estudos e pesquisas educacionais anísio teixeira. *Prova Saeb*, 2011. Citado na página 17.

BRASIL. Inep. *Acesso em 12/03/2020*, 2019. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206>. Citado na página 17.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989. Citado na página 20.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto & Aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. v. 1. Citado na página 57.

ENEM. Portal dos professores de matemática. *Acesso em 08/05/2020*. Disponível em: <http://professoresdematematica.com.br/lista-enem-matematica.html>. Citado 3 vezes nas páginas 51, 54 e 55.

ES. *Secretaria da Educação. Currículo Básico Escola Estadual: Área de Ciências da Natureza, Matemática*, SEDU, Vitória, 2009. Citado na página 17.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisas qualitativas em ciências sociais*. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2000. Citado na página 59.

IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar, 4: Sequências, matrizes, determinantes e sistemas*. 8. ed. [S.l.]: Atual, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 42.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações – 1º ano*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 1. Citado 8 vezes nas páginas 23, 26, 27, 30, 39, 43, 44 e 61.

IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações – 3º ano*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.

LIMA, E. L. *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. Citado na página 45.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 26.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado 15 vezes nas páginas 20, 21, 22, 26, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 39, 41, 42, 47 e 48.

LOCATELLI, O. C. et al. O potencial dos mediadores tecnológicos na mediação pedagógica: Temas transversais e formação de professores. *Revista Digital da CVA/Ricesu*, v. 5, n. 19, Fev 2009. Citado na página 17.

MIRANDA, T.; ASSIS, C. Portal da matemática - obmep: Módulo de progressões aritméticas. *Acesso em 08/05/2020*, 2017. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/index.php/site/index?a=1>. Citado na página 50.

MORGADO, A. C. et al. *Matemática Discreta*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 42, 43, 44, 45 e 46.

NETO, A. P. Portal da matemática - obmep: Módulo função afim. *Acesso em 14/10/2020*, 2018. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material_teorico/brc70d5silssg.pdf>. Citado 4 vezes nas páginas 28, 31, 32 e 33.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002a. 9-16 p. Citado na página 19.

PAIS, L. C. *Transposição Didática, In: MACHADO, S. D. A. Educação Matemática: uma introdução*. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002b. 13-40 p. Citado na página 19.

PONTE, J. P. da. O ensino da matemática em portugal: Lições do passado, desafios do futuro. *Acesso em: 12/03/2018*, 2004. Disponível em: <http://periodicos.iftm.edu.br/index.php/sepit/article/view/341>. Citado na página 16.

PONTE, J. P. da et al. *Investigações matemáticas na sala de aula*. [S.l.]: Autêntica Editora, 2003. v. 7. Citado na página 62.

SANTOS, C. A. M.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. *Matemática*. 6. ed. São Paulo: Ática, 2002. Citado na página 61.

SILVA, J. A. F. da. Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na matemática: Algumas considerações. *Universidade Católica de Brasília*, 2005. Citado na página 16.

SMOLE, K. C. S.; KIYUKAWA, R. *Matemática*. São Paulo: Saraiva, 1988. Citado na página 61.

STEWART, J. *Cálculo Vol 2*. 6. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2009. Citado na página 40.

YOUSCHKEVITCH, A. P. *The Concept of Function*. [S.l.]: Archive for History of Exact Sciences, 1976. 6-9 p. Citado na página 20.

APÊNDICE A

Atividade Exploratória: Exercícios Introdutórios

PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Exercícios Introdutórios:

Este primeiro bloco de exercícios tem o intuito de revisar conceitos básicos pertinentes aos conteúdos de função afim e progressão aritmética.

1. Complete as sequências indicando o primeiro termo (a_1), a razão (r), e indique se ela é crescente ou decrescente:

a) (- 1, - 4, - 7, ____ , ____ , ____)
____

b) (- 4, - 2, 0, ____ , ____ , ____)
____

c) (45, 51, 57, ____ , ____ , ____)
____

d) (- 10, - 8, - 6, ____ , ____ , ____)
____

2. Nas funções a seguir, indique o coeficiente angular (a), o coeficiente linear (b) e se ela é crescente ou decrescente:

a) $y = x - 1$
____

b) $y = -\,x + 4$
____

c) $y = -\,3x + 2$
____

d) $y = 2x + 1$
____

3. Dada a função afim $f(x) = x + 2$, e o domínio (1, 5, 9, 13), determine:

a) $f(1)\ =$ ____
b) $f(5)\ =$ ____
c) $f(9)\ =$ ____
d) $f(13)\ =$ ____
e) Escreva os resultados dos itens a, b, c e d, respectivamente: ____ , ____ , ____ , ____.
f) O que observa nos resultados encontrados?
____
____
____

4. O gráfico a seguir é caracterizado por uma P.A. ou por uma função afim? Justifique:

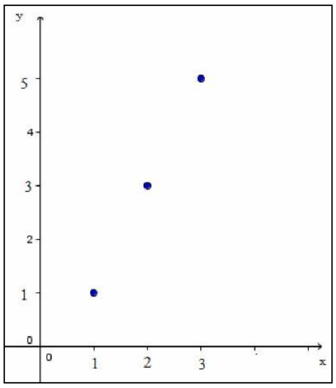
____

____

____

____

____



APÊNDICE B

Atividade Exploratória: Exercícios Específicos

Universidade Federal do Espírito Santo

PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

<u>Exercícios Específicos – Função</u>:

Este bloco de exercícios tem por objetivo tratar especificamente dos conceitos de função afim e progressão aritmética de forma distinta.

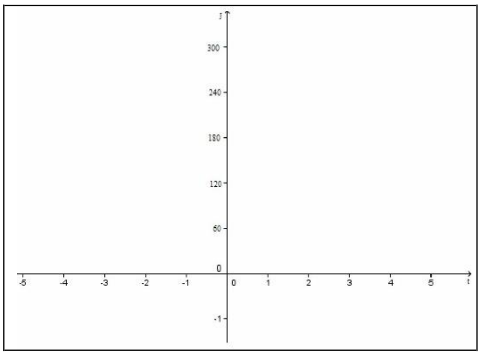
5. Observe a tabela a seguir:

t (meses)	1	2	3
J (reais)	60	120	180

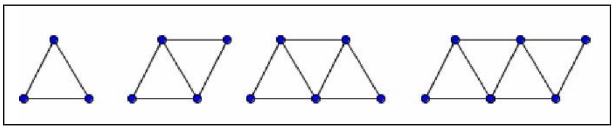
a) Determine a lei da função que expressa os juros simples em função do tempo.

____

b) Faça o esboço do gráfico dessa função.



6. Observe a sequência de triângulos formados por palitos:



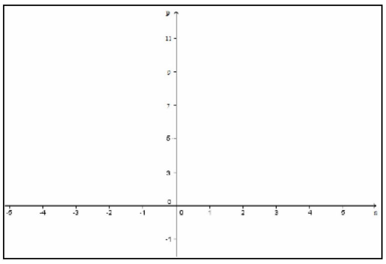
a) Complete a tabela:

Número de Triângulos	Número de Palitos
1	3
2	5
3	
4	
5	
6	
7	
n	

b) Determine a lei que expressa o número de palitos em função do número de triângulos formados?

____

c) Desenhe o gráfico dessa função:



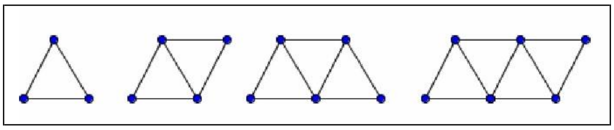
d) Quantos palitos são necessários para formar 37 triângulos:

____

e) Quantos triângulos poderão ser formados com 99 palitos:

____

7. Observe a sequência de triângulos formados por palitos, quanto ao perímetro:



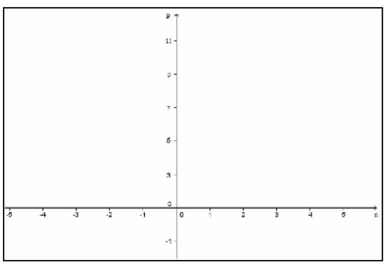
a) Complete a tabela:

Número de Triângulos	Perímetro da Figura
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
7	
n	

b) Determine a lei que expressa o perímetro da figura em função do número de triângulos formados?

____

c) Desenhe o gráfico dessa função:



8. O valor de uma corrida de táxi é formado uma parte fixa mais um valor variável que depende da quantidade de quilômetros rodados. Supondo que a taxa fixa seja de R$ 4,90 e o quilômetro rodado custa R$ 0,72, determine:

   a) A lei que expressa o valor total da corrida (y) em função do número de quilômetros rodados (x):

   ____

   b) O valor a ser pago por uma corrida de 8,5 km:

   ____

   c) A distância percorrida por um passageiro que pagou um total de R$ 10,66:

   ____

<u>Exercícios Específicos – Progressão Aritmética</u>:

9. Um atleta percorre 4,9 m durante o primeiro segundo. Depois disso, a cada segundo percorre sempre 9,8 m a mais do que no segundo anterior. Quantos metros ele percorrerá após 8 segundos?

   ____
   ____
   ____
   ____

10. Observe o quadro abaixo:

3	5	7	9
11	13	15	17
19	21	23	25
...	...	...	...

   a) Quais os números da sexta linha da tabela?

   ____

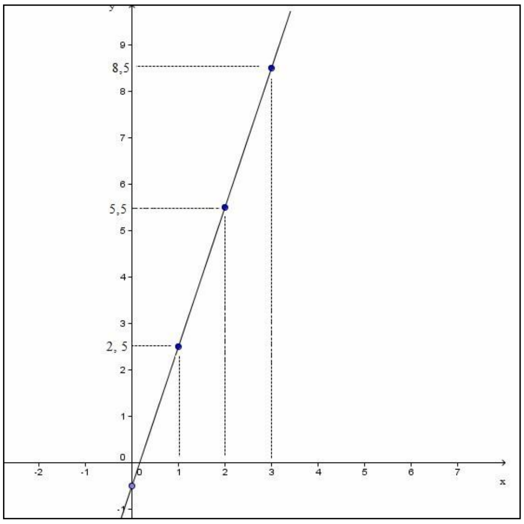
   b) Qual número ocupará a 3ª coluna na 12ª linha?

   ____

   c) Qual a soma dos elementos da 14ª coluna?

   ____

11. Determine a razão (r) e o primeiro termo (a_1) da progressão aritmética formada pelas ordenadas (eixo y) dos pontos assinalados.



APÊNDICE C

Atividade Exploratória: Exercícios Conclusivos

Universidade Federal do Espírito Santo

PROFMAT

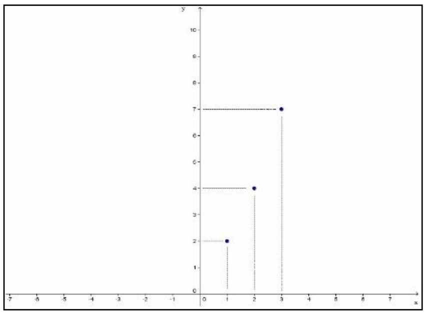
PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

<u>Exercícios Conclusivos</u>:

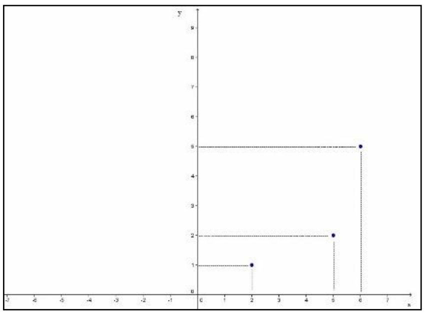
Este grupo de exercícios tem o objetivo de concatenar ambos os conceitos de função afim e progressão aritmética, formando a ideia de que esta última se trata de um caso particular de função afim.

12. Em quais gráficos a sequência formada pelas ordenadas (eixo y) dos pontos assinalados é uma progressão aritmética? E uma função? Justifique sua resposta.

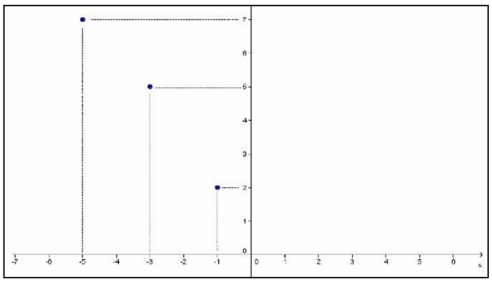
a) ________________________________
____
____
____



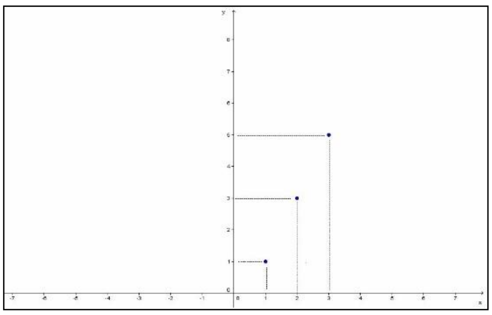
b) ________________________________
____
____
____



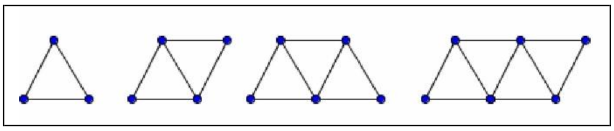
c) ________________________________
____
____
____



d) ________________________________
____
____
____



13. Observe a sequência de triângulos formados por palitos, quanto ao perímetro:



a) Complete a tabela:

Número de Triângulos	Perímetro da Figura
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
7	
n	

b) Escreva a sequência formada na segunda coluna na ordem encontrada (___, ___, ___, ___, ___, ___, ___). Esta sequência é uma progressão aritmética? ______. Explique por quê: ____.

14. Considere a função $y = x + 2$ e complete a tabela:

x	y
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
7	

a) O que você observa nas questões 13 (P.A.) e 14 (função afim)? Possuem algo em comum?
____
____

15. Dada a função afim $f(x) = 2x + 2$, e o domínio (1, 3, 5, 7), determine:

a) $f(1) =$ ____
b) $f(3) =$ ____
c) $f(5) =$ ____
d) $f(7) =$ ____
e) Escreva os resultados dos itens a, b, c e d, respectivamente: ____ , ____ , ____ , ____.

f) O que observa nos resultados encontrados?

____

____

____