Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Robson Miranda da Silva

Vale para 1, vale para 2, ..., Vale para todos? O Princípio da Indução Finita como instrumento da Matemática na Educação Básica e além.

Rio de Janeiro
2021

Robson Miranda da Silva

Vale para 1, vale para 2, ..., Vale para todos? O Princípio da Indução Finita como instrumento da matemática na educação básica e além.

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Luiz Silva

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S586 Silva, Robson Miranda da.

Vale para 1, vale para 2, ..., Vale para todos? O princípio da indução finita como instrumento da matemática na educação básica e além/ Robson Miranda da Silva. – 2021.

62 f. : il.

Orientador: Sérgio Luiz Silva

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Indução (Matemática) – Teses. 2. Matemática – Estudo e estudo - Teses. 3. I. Silva, Sérgio Luiz. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 510.646

Patricia Bello Meijinhos CRB-7/ 5217- Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

_______________________________ Assinatura

_______________________________ Data

Robson Miranda da Silva

Vale para 1, vale para 2, ..., Vale para todos? O Princípio da Indução Finita como instrumento da matemática na educação básica e além.

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 22 de abril de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sergio Luiz Silva (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Marcus Vinicius Tovar Costa
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Mariana Gesualdi Villapouca
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Silas Fantin
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro
2021

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me ajudar a acreditar que sempre é possível se superar em meio as atribulações.

Ao meu pai Robson (in memorian), pela educação, pelo exemplo e por ser um espelho em minha trajetória. Sua lembrança me inspira e me faz persistir.

A minha esposa Maria Lucia e ao meu filho Pietro que justificam todo meu esforço e me faz ter coragem para acreditar que tudo é possível. Tudo por eles.

Aos meus familiares, principalmente minha avó Alice e minha mãe Regina Helena, pelo apoio incondicional.

Aos meus companheiros de turma do PROFMAT, pelas diversas ajudas e trocas de aprendizado.

Ao meu orientador Professor Sérgio Luiz, por sua dedicação e paciência na orientação da elaboração desse trabalho.

A todos os professores do curso, por toda colaboração e apoio prestados.

Aos meus alunos, que fazem eu querer ser melhor a cada dia.

Ao PROFMAT e a Universidade do Estado do Rio de Janeiro, pela oportunidade da realização do mestrado.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq, pelo apoio financeiro como bolsista.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.

Galileu Galilei

RESUMO

SILVA, Robson M. *Vale para 1, vale para 2, ..., Vale para todos? O Princípio da Indução Finita como instrumento da matemática na educação básica e além.* 2021. 56f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Este trabalho visa tratar sobre uma ferramenta elementar para um bom entendimento da Matemática, que é o Princípio da Indução Finita, infelizmente pouco utilizado no ensino da Matemática em demonstrações na Educação Básica. Esse princípio está na fundamentação dos números naturais e com ele certificaremos algumas propriedades que envolvem esse conjunto numérico. A quase omissão completa dessa ferramenta na educação básica é a motivação deste estudo, que tem como objetivo servir como fonte para uma melhor compreensão do princípio tanto para alunos quanto professores da educação básica. Este trabalho aborda as diversas formulações do princípio da indução e as equivalências entre elas. Por fim, para reforçar a percepção de como pode ser utilizado esse instrumento na Educação Básica são apresentados diversos exemplos de propriedades relativas aos números naturais, a fim de estabelecer uma afinidade maior pela argumentação e pelas demonstrações de uma maneira geral na Matemática.

Palavras-chave: Princípio da Indução Finita. Formulações do Princípio. Equivalências entre Formulações. Educação Básica.

ABSTRACT

SILVA, Robson M. *It is valid for 1, it is valid for 2, ..., Is it for everyone? The Principle of Finite Induction as an instrument of Primary and Secondary Schools and beyond*. 2021. 56f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

This work aims to treat about an elementary tool for a good understanding of Mathematics, which is the Principle of Finite Induction, unfortunately little used in the teaching of Mathematics in demonstrations in the Primary and Secondary Schools. That principle takes part of the theoretic base foundation of the natural numbers and with it we will certify some properties that involve this numerical set. Almost complete omission of this tool in Primary and Secondary is the motivation of this study, which has object to serve as source for a better understanding of the principle for both students as well for teachers of Primary and Secondary Schools. This work addresses the different formulations of the Principle of Finite Induction and their equivalences. Finally, to reinforce the perception of how this instrument can be used in Primary and Secondary Schools, several examples of properties related to natural numbers are presented, in order to establish a greater affinity with argumentations and demonstrations in a general manner in Mathematics.

Keywords: Principle of Finite Induction. Formulations of the Principle. Equivalences between Formulations. Primary and Secondary Schools.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Princípio da Indução Finita, também conhecido como Princípio da Indução Matemática é uma das ferramentas mais básicas para um bom entendimento da Matemática em seu nível mais elementar e está implícito em raciocínios do tipo "… e assim por diante…" ou "… e assim sucessivamente…" Apesar do uso corriqueiro desse tipo de raciocínio, a apresentação formal desse Princípio foi quase que abolida do ensino médio. Trata-se de uma ferramenta adequada para se estabelecer de maneira correta, em acordo com os métodos da Matemática, muitas propriedades relativas aos números naturais e é a primeira noção básica de aritmética adquirida por qualquer indivíduo na sua educação escolar ou até mesmo fora dela, a não ser que este não saiba contar.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio nos conhecimentos a serem desenvolvidos pelos alunos em Matemática:

> A ampliação e o aprofundamento da explicitação da estruturação lógica da Matemática são necessários ao aluno do ensino médio, devendo-se valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica, e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática. (BRASIL, 2006, p.95)

Assim como é citado, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Fundamental, em ensino e aprendizagem de Matemática da seguinte forma:

> O estímulo à capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler ideias matemáticas, interpretar significados, pensar de forma criativa, desenvolver o pensamento indutivo/dedutivo, é o caminho que vai possibilitar a ampliação da capacidade para abstrair elementos comuns a várias situações, para fazer conjecturas, generalizações e deduções simples como também para o aprimoramento das representações, ao mesmo tempo que permitirá aos alunos irem se conscientizando da importância de comunicar suas ideias com concisão. (BRASIL, 1998, p. 63)

Propriedades relativas aos números naturais aparecem ao longo de toda a educação básica e nas diversas disciplinas de matemática. Algumas dessas propriedades são estabelecidas de forma satisfatória de maneira direta e intuitiva tais como as definições de potências e fatorial, o número de diagonais ou a soma dos ângulos internos de um polígono convexo, a soma de termos de uma progressão aritmética, etc. Outras dessas propriedades não são tão intuitivas, são fruto da observação e precisam de uma ferramenta adequada para serem estabelecidas como por exemplo, a fórmula de Moivre, a existência e unicidade da decomposição de um número como produto de fatores primos, o número de raízes de um polinômio, etc. O Princípio da Indução Finita é uma ferramenta adequada para se estabelecer de maneira correta todas essas propriedades. Ao estabelecer propriedades relativas aos números naturais, por meio de raciocínios diretos ou intuitivos, por maior convicção que se tenha do método ou da nossa intuição, é comum verificarmos tais propriedades utilizando o Princípio como uma forma de certificação.

A quase completa omissão do Princípio da Indução na educação básica, particularmente no ensino médio, acaba por ser responsável por umas das maiores deficiências na formação em matemática da educação básica, que é a dificuldade dos alunos em entender e trabalhar certas afirmações relativas aos números naturais. O domínio da linguagem e das ferramentas estabelecidas pela Matemática são essenciais para uma boa compreensão e tratamento de textos de matemática e esse é o caso do Princípio da Indução Finita para a compreensão e tratamento de muitas afirmações relativas aos números naturais. Essa omissão, de uma ferramenta tão básica, para o ensino e compreensão da Matemática em nível elementar motivou esse trabalho que tem como principal objetivo servir de fonte, tanto para alunos quanto professores da educação básica, para uma melhor compreensão dessa ferramenta. Também acreditamos que ele possa servir como material para um tratamento da matéria.

Relato de docentes, feitos por seus alunos nos cursos de graduação e nos cursos de especialização para professores do ensino fundamental e médio, ou mesmo o convívio com colegas de mestrado, indicam a dificuldade de muitas pessoas, que mesmo trabalhando e lidando com matemática, em compreender e principalmente tratar adequadamente propriedades relativas aos números naturais e, por isso, achamos que este trabalho se justifica.

Este trabalho aborda as diversas formulações do Princípio da Indução e as equivalências entre elas. Tal abordagem é feita por meio de afirmações, exemplos e tarefas propostas aos leitores, relacionadas às propriedades dos números naturais em sua maioria aprendidas na educação básica e em diferentes áreas da matemática tais como aritmética, álgebra e geometria. Cada afirmação, exemplo ou tarefa é tratada(o) com uma formulação que lhe é adequada(o). Como acontece com frequência, não temos uma receita para estabelecer resultados em matemática e, dessa forma, não temos receita sobre qual formulação utilizar diante de uma afirmação relativa aos números naturais. Nem sequer podemos afirmar que dada uma propriedade relativa aos naturais seremos capazes de estabelecê-la utilizando alguma formulação do Princípio da Indução Finita. Desse modo, pretendemos mostrar que é possível a inserção desse princípio na educação básica e de despertar o interesse nos alunos do aprendizado desse princípio a fim de possibilitar o entendimento de conceitos e propriedades mais abstratos da disciplina.

Segundo Brasil (1999), um dos papéis da Matemática na Educação Básica nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) é apresentar instrumentos que possibilitem que se continue aprendendo através de novas informações. Assim, este trabalho visa apresentar um instrumento básico nas várias áreas da Matemática usado para estabelecer certas propriedades relativas aos números naturais, sendo explorado seu fundamento teórico, além de variadas situações onde podem aparecer sua aplicabilidade na Educação Básica.

Esse princípio é considerado da seguinte forma:

> O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais. (LIMA, 1998, p.26)

Para falar sobre esse instrumento, não se pode deixar de citar como a construção do conjunto dos números naturais, representado simbolicamente por $\mathbb{N}$, foi fundamentada através dos axiomas de Peano. Segundo Boyer (2003), Giuseppe Peano (1858-1932), um matemático italiano cujo nome é ligado diretamente com rigorosas construções da álgebra e de análise, além de se interessar por um estudo profundo da lógica matemática, fez a escolha de três conceitos primitivos: um menor elemento, números inteiros não-negativos e o conceito de “sucessor”, em seus fundamentos da aritmética. Os axiomas de Peano formulados em 1889 na obra *Arithmetices principia nova methodo exposita* representava a redução da aritmética em forma de símbolos formais no lugar de palavras usadas habitualmente.

Poderíamos resumir este trabalho como uma tentativa de dar uma resposta adequada a pergunta “Vale para 1, vale para 2, ..., Vale para todos?”, título deste trabalho, por meio de afirmações, exemplos e problemas que contenham conceitos ou propriedades relacionados ao conjunto dos números naturais, apresentados durante a (ou situados ao nível da) Educação Básica e, a partir disso, demonstrar tais afirmações, exemplos e problemas utilizando o Princípio da Indução Finita, pois, em matemática, não é método legítimo se estabelecer uma propriedade relativa aos números naturais por meio da observação de sua validade para um número finito de casos se a mesma é estabelecida para todos os números naturais. Assim, também esperamos que o leitor amadureça o raciocínio indutivo e a noção de demonstração, métodos básicos da própria matemática, para que possa entender ou mesmo criticar se um resultado em matemática foi estabelecido de maneira correta.

O trabalho está organizado essencialmente em três capítulos. Ao longo do primeiro capítulo, apresentamos as várias formulações do Princípio da Indução e por meio de afirmações, exemplos e tarefas aplicamos ou sugerimos uma formulação adequada para verificar as suas validades. As tarefas para o leitor objetivam lhe dar prática na percepção de uma formulação adequada do Princípio a ser utilizada para constatar uma propriedade relativa aos números naturais. No segundo capítulo, constatamos a equivalência matemática entre as várias formulações apresentadas. No terceiro capítulo, apresentamos mais exemplos de propriedades relativas aos números naturais e as verificamos por indução dando uma melhor ideia da universalidade, onde o método indutivo pode ser empregado, reforçando a percepção de como esse instrumento pode ser utilizado na Educação Básica, com finalidade de criar uma afinidade maior pela argumentação e pelas demonstrações de uma maneira geral na Matemática. Esperamos que o trabalho contribua de alguma forma no resgate da utilização correta do método de indução no ensino da matemática.

1 AS VÁRIAS FORMULAÇÕES DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

O conjunto dos números naturais, representado por $\mathbb{N}$, é o conjunto $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$. Os números naturais nos é apresentado como a primeira noção básica de aritmética quando aprendemos a contar ou ordenar. A sua fundamentação matemática pode ser feita através dos axiomas de Peano que leva à construção do conjunto $\mathbb{N} - \{0\} = \{1,2,...\}$.

Neste capítulo, por meio de afirmações e exemplos, mirando na validade (caráter de ser verdadeiro) ou não validade (caráter de ser falso) tentaremos fazer o leitor perceber a necessidade de um instrumento adequado para se estabelecer como válida uma afirmação (propriedade) relativa aos números naturais. Para tal percepção, faremos algumas afirmações relativas aos números naturais e passaremos a verificar as suas validades ou não. Algumas são falsas embora sejam válidas para valores iniciais do conjunto dos números naturais e falham para algum n que pode ser grande mostrando que a nossa intuição pode ser falha ao acreditar que uma propriedade relativa aos números naturais é válida a partir da validade para valores iniciais, independentemente da quantidade de valores iniciais para os quais a propriedade é válida. Com isso, pretendemos convencer o leitor da necessidade de um instrumento para certificar a validade de certas propriedades relativas aos números naturais. Esse instrumento encontra-se na própria fundamentação do conjunto dos números naturais através dos axiomas de Peano. Trata-se do axioma A_4 ou Axioma ou Princípio da Indução Finita.

Peano postulou a existência de um conjunto $\mathbb{N}$ cujos elementos são chamados de números naturais, satisfazendo os seguintes axiomas ou postulados:

A_1 −Todo número natural tem um sucessor e este, é único;

A_2 – Números naturais distintos têm sucessores distintos, ou seja, caso os números naturais tenham o mesmo sucessor implicará que eles serão iguais;

A_3 – Existe um único número simbolizado por “1” e denominado por “um”, que não é sucessor de nenhum número;

A_4 – Sendo S um subconjunto contendo números naturais tal que: $1 \in S$ e além disso, o sucessor de todo elemento de S ainda pertence a S. Então $S = \mathbb{N}$.

Podemos inferir todas as propriedades básicas dos números naturais tais como adição, multiplicação, ordenação, etc, dos quatro axiomas acima. A_4 é o Axioma da Indução, conhecido também como Princípio da Indução Finita, que é a base para o método em Matemática chamado de “indução matemática”, usado para definições por recorrência ou demonstrações relativas aos números naturais.

Observamos que os axiomas de Peano não é o único sistema que fundamenta o conjunto dos números naturais. Por exemplo, há um sistema de axiomas de natureza algébrica, ver Monteiro (1969), que fundamenta o conjunto dos números naturais e o constrói a partir do zero.

Por meio das afirmações e exemplos, introduziremos as várias formulações do Princípio da Indução Finita e, em cada caso, utilizaremos a formulação que parece ser a mais adequada para estabelecer sua validade.

Consideremos as duas afirmações seguintes:

Afirmação 1.1. O número natural $n^2 + n + 41$ *é um número primo, para todo* $n \in \mathbb{N}$.(HEFEZ,2009)

Um número natural p *é dito um número primo caso não seja 0 ou 1 e possua apenas dois divisores naturais, a saber* 1 *e* p.

Como exemplo de números primos temos: 2, que tem como divisores naturais apenas 1 e 2; 7 que tem como divisores naturais apenas 1 e 7, entre outros que possuem somente dois divisores naturais o 1 e ele próprio. Salientamos que há infinitos números primos. Já os números não primos, exceto os números 0 e 1, são chamados de *números compostos* e, como exemplos, temos o 6 que tem como divisores naturais os números $1, 2, 3$ e 6 e o 9 que possui como divisores naturais os números $1, 3$ e 9.

Afirmação 1.2. Têm-se 3^n *moedas, sendo uma delas falsa, com peso menor do que as demais que são idênticas em forma e peso. Para encontrar a moeda falsa entre* 3^n *moedas é preciso* n *pesagens em uma balança de dois pratos (Figura 1) idênticos e sem a utilização de pesos.* (CARVALHO;MORGADO,2013)

Figura 1 – Balança de dois pratos

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Scale_of_justice_2.svg.

Agora, passamos a discutir o caráter verdadeiro ou falso da Afirmação 1.1. Para isso, seja $P(n)$ a seguinte propriedade relativa a um número natural n: “o número natural $n^2 + n + 41$ é um número primo”. Observe a tabela 1 abaixo:

Tabela 1- Valores de n da propriedade relativa: “o número natural $n^2 + n + 41$ é um número primo”

n	$n^2 + n + 41$	Valor de $P(n)$
1	$1^2 + 1 + 41 = 43$	$P(1)$ é verdadeira
2	$2^2 + 2 + 41 = 47$	$P(2)$ é verdadeira
3	$3^2 + 3 + 41 = 53$	$P(3)$ é verdadeira
4	$4^2 + 4 + 41 = 61$	$P(4)$ é verdadeira
5	$5^2 + 5 + 41 = 71$	$P(5)$ é verdadeira
6	$6^2 + 6 + 41 = 83$	$P(6)$ é verdadeira
7	$7^2 + 7 + 41 = 97$	$P(7)$ é verdadeira
8	$8^2 + 8 + 41 = 113$	$P(8)$ é verdadeira
9	$9^2 + 9 + 41 = 131$	$P(9)$ é verdadeira
10	$10^2 + 10 + 41 = 151$	$P(10)$ é verdadeira
11	$11^2 + 11 + 41 = 173$	$P(11)$ é verdadeira
12	$12^2 + 12 + 41 = 197$	$P(12)$ é verdadeira
13	$13^2 + 13 + 41 = 223$	$P(13)$ é verdadeira
14	$14^2 + 14 + 41 = 251$	$P(14)$ é verdadeira

Fonte: o autor, 2021.

Observe, na tabela 1, que $P(n)$ é verdadeira nos valores apresentados até $n = 14$ e, como pode ser visto fazendo as contas, é verdadeira até $P(39)$; porém $P(40)$ não é verdadeira pois $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 41 \cdot (40 + 1) = 41 \cdot 42$ e também $P(41)$ não é verdadeira pois $41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot (41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43$. Assim, apesar de a propriedade $P(n)$ ser verdadeira para os casos de $n = 1$ até $n = 39$, ela se torna falsa no caso em que $n = 40$, e, além disso, nos mostra que ao verificarmos somente alguns casos particulares, não importando o número de casos particulares, nos quais constatamos que uma propriedade relativa a um número natural n seja verdadeira pode ser um erro afirmarmos que ela será verdadeira para todo número natural n considerado. Portanto, a Afirmação 1.1 é falsa pois falha para $n = 40$.

Na Afirmação 1.1, o primeiro valor para o qual a propriedade falha é $n = 40$. Pode ser observado que se n é múltiplo não nulo de 41 o número $n^2 + n + 41$ nunca será um número primo. Pode haver exemplos onde o primeiro valor para o qual a propriedade falha é muito grande. Um desses exemplos é a seguinte afirmação "se n é um número natural não nulo, então $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito" (STEFFENON, 2017). Lembremos que um número natural b é um quadrado perfeito quando existe um número natural a tal que $b = a^2$. O primeiro valor de n para o qual a afirmação acima é falsa é $n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$.

Agora, passamos a discutir a validade da Afirmação 1.2 onde, a propriedade $P(n)$ seria encontrar, entre 3^n moedas, a moeda falsa com n pesagens. Assim, passaremos a analisar a veracidade da propriedade $P(n)$ para todo número natural n, ou seja, se é possível encontrar uma moeda falsa entre 3^n moedas, nas condições da Afirmação 1.2, utilizando n pesagens.

Para o caso $n = 1$, teremos $3^1 = 3$ moedas, basta colocar duas delas para pesar, sendo uma em cada prato da balança. Se um dos pratos da balança subir, a moeda mais leve estará nele; se a balança ficar equilibrada, a moeda que não está nessa pesagem é a mais leve. Utilizando assim 1 pesagem, descobrimos a moeda falsa e $P(1)$ é verdadeira.

Já no caso $n = 2$, teremos $3^2 = 9$ moedas. Inicialmente, dividimos as 9 moedas em três grupos de três moedas cada. Escolhemos dois quaisquer entre os três grupos e colocamos cada um dos grupos escolhidos em pratos distintos da balança. Por um lado, se os pratos ficarem equilibrados, significa que a moeda falsa está no grupo de três que não escolhemos. Assim, com uma única pesagem descobrimos o grupo de três com a moeda falsa e, como no caso $n = 1$, encontramos a moeda falsa nesse grupo de três com uma única pesagem. Assim, se os pratos equilibrarem com os dois grupos de três, encontramos a moeda falsa, entre as $3^2 = 9$ moedas, com 2 pesagens. Por outro lado, se os pratos não equilibrarem, o grupo de três com a moeda falsa está no prato mais elevado, pois ele deve estar mais leve que o grupo de três moedas no outro prato. Assim, novamente, com uma única pesagem, encontramos o grupo de três com a moeda falsa e, como no caso $n = 1$, no grupo de três com a moeda falsa a encontramos com uma única pesagem. Em qualquer caso, encontramos a moeda falsa, entre as $3^2 = 9$ moedas, com 2 pesagens e $P(2)$ é verdadeira.

Agora no caso $n = 3$, teremos $3^3 = 27$ moedas. Primeiramente, dividimos as 27 moedas em três grupos de $3^2 = 9$ moedas cada. Analogamente, escolhemos dois quaisquer entre os três grupos e colocamos cada um dos grupos escolhidos em pratos distintos da balança. Caso os pratos fiquem equilibrados, significa que a moeda falsa está no grupo de nove que não escolhemos. Desse modo, com uma única pesagem descobrimos o grupo de nove com a moeda falsa e, como no caso $n = 2$, encontramos a moeda falsa nesse grupo de $3^2 = 9$ moedas com mais 2 pesagens. Com isso, se os pratos equilibrarem com os dois grupos de nove, encontramos a moeda falsa, entre as $3^3 = 27$ moedas, com 3 pesagens. Em contrapartida, caso os pratos não fiquem equilibrados, o grupo de nove com a moeda falsa estará no prato mais elevado, e assim com uma única pesagem, encontramos o grupo de nove com a moeda falsa e, como no caso $n = 2$, no grupo de $3^2 = 9$ moedas encontramos a moeda falsa com 2 pesagens. Assim, em ambos os casos, encontramos a moeda falsa, entre as $3^3 = 27$ moedas, com 3 pesagens e $P(3)$ é verdadeira.

Observando a argumentação dos casos $n = 1$, 2 e 3 acima, percebemos implicitamente o raciocínio de dividir as moedas em três grupos com a mesma quantidade de moedas e, comparando dois dos grupos na balança, com uma única pesagem, descobrimos o grupo com a moeda falsa. A quantidade de moedas no grupo com a moeda falsa recai em um caso onde já sabemos o número de pesagens para encontrar a moeda falsa. Por exemplo, para $n = 4$, temos $3^4 = 81$ moedas. Dividimos as 81 moedas em 3 grupos com $3^3 = 27$ cada. Comparando dois grupos na balança, encontramos o grupo com a moeda falsa com uma única pesagem. Tendo o grupo com $3^3 = 27$ moedas onde está a moeda falsa, vimos acima que podemos encontrá-la com 3 pesagens, pois vimos acima que $P(3)$ é verdadeira. Assim, com $3^4 = 81$ moedas, encontramos a moeda falsa com 4 pesagens e $P(4)$ é verdadeira. Consequentemente, com raciocínio idêntico, verificaríamos que $P(5)$ é verdadeira, depois que $P(6)$ é verdadeira e assim por diante. O problema é que existem infinitos casos a serem verificados para constatar que a Afirmação 1.2 é verdadeira já que isso significa que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n. Isso indica que necessitamos de um instrumento na Matemática que nos permita concluir que a Afirmação 1.2 é verdadeira ou que a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n sem ter que verificá-la para cada valor possível de n já que o mesmo seria impossível, porque temos uma quantidade infinita de possíveis valores para n. Este instrumento na Matemática é o **Princípio da Indução Finita** declarado abaixo:

Primeira Formulação do Princípio da Indução Finita (PIF):

Se $P(n)$ é uma propriedade relativa aos números naturais n tal que

i) $P(1)$ é válida;

ii) Assumindo que $P(n)$ é válida para algum número natural n, com n maior que ou igual 1, podemos concluir que $P(n+1)$ também é válida.

Então, $P(n)$ é válida para todo número natural n a partir de $n = 1$.

Para um melhor entendimento do Princípio da Indução Finita, observamos que se somos capazes de verificar as propriedades i) e ii) acima para alguma propriedade $P(n)$ relativa a um número natural n, podemos concluir que a propriedade $P(n)$ é válida (verdadeira) para todo número natural n a partir de 1. A constatação de que uma propriedade $P(n)$ relativa ao número natural n é válida a partir de um certo valor de n, utilizando o Primeiro Princípio da Indução Finita ou outras formulações equivalentes do mesmo princípio que veremos ao longo do texto, é chamada de demonstração por indução finita ou simplesmente demonstração por indução.

Observe que afirmações relativas aos números naturais aparecem em diversas áreas da Matemática tais como Combinatória (problemas de contagem), Aritmética, Geometria, Álgebra, etc. Portanto, o Princípio da Indução Finita é um instrumento valioso para constatar que certas afirmações relativas aos números naturais são verdadeiras.

Assim, mostraremos, por indução finita sobre n, que é possível achar a moeda falsa dentre 3^n moedas, nas condições da Afirmação 1.2, utilizando n pesagens.

Seja $P(n)$ a seguinte propriedade relativa a um número natural n: “nas condições da Afirmação 1.2, podemos encontrar a moeda falsa, entre 3^n moedas, com n pesagens”.

A primeira condição da Primeira Formulação, condição i), que chamaremos de caso-base, é verificar a validade de $P(1)$. Nas considerações da Afirmação 1.2 feita anteriormente, vimos que $P(1)$ é válida, pois corresponde ao caso de $3^1 = 3$ moedas e a condição i) ou caso-base está verificado.

A segunda condição, condição ii), é assumir que $P(n)$ é válida para algum n maior que ou igual a 1 e, a partir dessa hipótese (chamada de hipótese de indução), concluir que $P(n+1)$ também é válida.

Suponhamos que é possível determinar qual é a moeda mais leve, dentre as 3^n moedas, com n pesagens para algum n maior que ou igual a 1 e vamos argumentar para concluir que $P(n+1)$ também é válida, ou seja, que podemos achar a moeda falsa, dentre 3^{n+1} moedas, com $n+1$ pesagens. Com efeito, observe que $3^{n+1} = 3^n + 3^n + 3^n$. Assim, podemos separar as 3^{n+1} moedas em 3 grupos de 3^n moedas cada. Colocando-se dois grupos quaisquer de 3^n moedas para pesar, um grupo em cada prato da balança, se um dos pratos da balança subir, o grupo onde a moeda mais leve se encontra estará nele, agora, se a balança ficar equilibrada, o grupo onde se encontra a moeda mais leve é o que está fora dessa pesagem. Assim, descobrimos o grupo de 3^n moedas com a moeda falsa com 1 pesagem. Por hipótese de indução podemos descobrir a moeda falsa com mais n pesagens. Portanto realizamos $n+1$ pesagens para descobrir a moeda falsa e o resultado está provado.

Desse modo, pela Primeira Formulação do Princípio da Indução Finita, podemos concluir que $P(n)$ é válida para todo valor de n a partir de 1, ou seja, podemos encontrar a moeda falsa, entre 3^n moedas, com n pesagens seja qual for o número natural n maior que ou igual a 1. Portanto, podemos concluir que a Afirmação 1.2 é verdadeira.

Usaremos outro exemplo para mostrar a funcionalidade do Princípio da Indução Finita:

Exemplo 1.1. Seja $P(n)$ a seguinte propriedade relativa a um número natural n:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}, \tag{1}$$

para todo número natural n maior que ou igual a 1.

Note, na expressão, que a soma do lado esquerdo significa a soma dos elementos da forma $\frac{1}{j \cdot (j+1)}$ com j variando de 1 a n. Por exemplo, para $n = 2$, significa a soma $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; para $n = 3$, a soma $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{6+2+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ e assim por diante. Quando $n = 1$, não temos de fato uma soma e o lado esquerdo, por convenção, representa simplesmente a parcela $\frac{1}{1 \cdot 2}$.

Devemos mostrar, por indução, que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n maior que ou igual a 1. Inicialmente, olhemos o caso-base i), onde há a verificação da veracidade de $P(1)$, que, de fato, é verdadeira, pois $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$. Agora, assumimos a hipótese de indução de que $P(n)$ seja verdadeira para algum número natural n maior que ou igual a 1, o que significa assumir que a igualdade

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1} \tag{2}$$

é verdadeira para algum n maior que ou igual a 1. A partir daí, devemos concluir que $P(n+1)$ é válida, ou seja, que vale a igualdade

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \tag{3}$$

O lado esquerdo de $P(n+1)$ pode ser reescrito como

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot [(n+1)+1]} \tag{4}$$

e assim, utilizando a hipótese de indução, temos que

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot [(n+1)+1]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= \frac{n\cdot(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)} \qquad (5)\\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}
$$

Observe que, partindo do lado esquerdo de $P(n+1)$ e utilizando a hipótese de indução, chegamos ao lado direito de $P(n+1)$. Logo, concluímos que $P(n+1)$ é verdadeira e pela Primeira Formulação do Princípio da Indução Finita, podemos concluir que $P(n)$ é válida para todo número natural n maior que ou igual a 1.

Observação 1.1. um erro lógico comum é que ao utilizar o Princípio da Indução, quando se explicita a hipótese de indução, se escreve: vamos assumir ou suponhamos que $P(n)$ é válida para todo n. Há a ocorrência de um erro, pois se está assumindo aquilo que se quer provar pelo Princípio. O correto é supor que $P(n)$ é válida para algum valor de n maior que ou igual que o caso base e, a partir daí, provar que também é válida para $n+1$, ou seja, que $P(n+1)$ é válida.

Muitas vezes a propriedade relativa aos números naturais é válida a partir de $n=0$. No enunciado do Princípio de Indução Finita, em i), podemos trocar 1 por 0 sem problemas e concluir que a propriedade $P(n)$ é válida a partir de $n=0$.

A seguir, uma tarefa para o leitor.

Tarefa 1.1. Constate por indução finita sobre n que

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6},\ \forall\, n\in\mathbb{N}. \qquad (6)$$

É importante ressaltar que apesar do Princípio da Indução Finita ser um instrumento útil e adequado para constatar uma afirmação relativa aos números naturais, nem sempre precisamos recorrer a ele para tal. Às vezes, podemos constatar uma propriedade relativa aos naturais de forma direta. Como exemplo, podemos citar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética (P.A.) que passamos a descrever: uma Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência de números cujo aumento de um termo qualquer para o termo seguinte é o mesmo, ou seja, a diferença entre um de seus termos, exceto o primeiro termo denominado de a_1, e o anterior a ele é sempre constante. Essa diferença constante é chamada de razão da P.A. e, geralmente, é representada pela letra r. Como exemplo de P.A., podemos citar as sequências (1, 5, 9, 13…) onde $a_1 = 1, r = 4$ e $(23, 20, 17, 14...)$, onde $a_1 = 23$ e $r = -3$.

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, uma P.A de razão r. Temos:

$$a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r \tag{7}$$

$$a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2 \cdot r \tag{8}$$

$$a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3 \cdot r\,, \tag{9}$$

e assim, sucessivamente, até chegar ao n-ésimo termo, representado por a_n, que será dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r\,. \tag{10}$$

A fórmula acima é conhecida como termo geral da Progressão Aritmética, a qual nos permite calcular qualquer termo de uma P.A. em função do índice n do termo que se quer calcular, do primeiro termo a_1 e da razão r.

Tarefa 1.2. Demonstre por indução finita sobre os números naturais n que a fórmula do termo geral da Progressão Aritmética é

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Agora, vamos obter a soma S_n dos n primeiros termos de uma P.A., a saber

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \tag{12}$$

de uma maneira direta. Fixado um número natural n, para obter a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.A., podemos utilizar o seguinte raciocínio simples e engenhoso de olhar S_n das duas maneiras seguintes

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{13}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} \dots . + a_1. \tag{14}$$

Na segunda expressão de S_n só invertemos as ordens das parcelas o que não altera S_n já que a adição é comutativa. Agora, somando membro a membro e agrupando do lado direito os termos equidistantes dos extremos a_1 e a_n (primeiro com último, segundo com penúltimo, terceiro com antepenúltimo e assim por diante…), obtemos

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1) \tag{15}$$

Pela propriedade de uma P.A., temos que $a_n - a_{n-1}$ é constante e igual a sua razão. Então, podemos escrever:

$$a_2 - a_1 = a_n - a_{n-1} \Longrightarrow a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n \quad (16)$$

$$a_3 - a_2 = a_{n-1} - a_{n-2} \Longrightarrow a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n \quad (17)$$

$$a_4 - a_3 = a_{n-2} - a_{n-3} \Longrightarrow a_4 + a_{n-3} = a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n \quad (18)$$

Em cada parcela destacada do lado direito da igualdade, acontece a soma de termos equidistantes dos extremos a_1 e a_n, significando que, em cada uma delas, para se o obter o termo de menor índice, adicionamos tantas vezes r a a_1 quanto subtraímos r de a_n para obter o termo de maior índice. Por exemplo, para obter a_2 adicionamos r a a_1 e para obtermos a_{n-1} subtraímos r de a_n. De tal forma que cada parcela destacada é de fato $a_1 + a_n$. Como há n parcelas, obtemos

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad (19)$$

e

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \quad (20)$$

Algumas propriedades relativas aos números naturais são válidas somente a partir de um certo número natural n_0, que pode ser $n_0 = 0$ ou ser arbitrariamente grande. Às vezes, a propriedade é válida para alguns valores iniciais, deixa de ser válida para alguns valores posteriores e passa a ser válida a partir de valores seguintes. Naturalmente, como o leitor já deve ter percebido, a conclusão do Princípio da Indução Finita pode ser a validade da propriedade a partir de um número natural n_0 desde que o caso base i) seja a verificação para n_0 e a hipótese de indução seja assumir a validade da propriedade para algum n maior que ou igual a n_0. Ou seja, temos a seguinte generalização da Primeira Formulação do Princípio da Indução Finita:

Formulação Generalizada da Primeira Formulação:

Se $P(n)$ é uma propriedade relativa ao número natural n e n_0 é um número natural tais que

i) $P(n_0)$ é válida;

ii) Assumindo que $P(n)$ é válida para algum número natural n, com n maior que ou igual a n_0, podemos concluir que $P(n+1)$ também é válida.

Então, $P(n)$ é válida para todo número natural $n \geq n_0$.

Consideremos a afirmação:

Afirmação 1.3. Um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos,$\forall n \geq 0$.

Constataremos que a Afirmação 1.3 é verdadeira a partir de $n = 0$. Note que $P(0)$ é verdadeira, pois, quando $n = 0$, significa que o conjunto não possui elementos, logo é um conjunto vazio, que tem um único subconjunto que é ele próprio. Assim, um conjunto com $n = 0$ elementos, que é o conjunto vazio, tem $2^0 = 1$ subconjunto que é ele próprio.

Agora, (hipótese de indução) assumimos que $P(n)$ é verdadeira para algum número natural n maior que ou igual a zero e consideremos um conjunto com $(n + 1)$ elementos. Retirando 1 elemento qualquer do conjunto com $(n + 1)$ elementos, ficamos com um conjunto com n elementos e, por hipótese de indução, esse conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos. Para acompanhar o raciocínio, usaremos o caso particular do conjunto $E = \{a, b, c, d\}$. Retirando um elemento, digamos a, ficamos com o subconjunto $\{b, c, d\}$ que tem 2^3 subconjuntos que são os subconjuntos que não têm o elemento a, a saber

$$\{\ \}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{b, c, d\} \tag{21}$$

Queremos contar o número de subconjuntos de um conjunto com $(n + 1)$ elementos para concluir que $P(n + 1)$ é verdadeira. No nosso exemplo particular, queremos mostra que E tem 2^4 subconjuntos.

Observe que os subconjuntos de um conjunto com $(n + 1)$ elementos podem ser divididos em 2 grupos sem elementos em comum, a saber: o grupo dos subconjuntos que não possuem o elemento retirado e o grupo dos subconjuntos que possuem necessariamente o elemento retirado. No nosso exemplo, os subconjuntos que não têm o elemento retirado estão listados em (21) e os subconjuntos de E que têm o elemento a são

$$\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\} \tag{22}$$

O número de subconjuntos que não possuem o elemento retirado, como vimos acima, pela hipótese de indução, é 2^n.

Agora, se um subconjunto possui necessariamente o elemento retirado, quando você o retira do subconjunto, fica com um único subconjunto do outro grupo, ou seja, do grupo dos subconjuntos que não possuem o elemento retirado. No exemplo, tirando o elemento a de cada subconjunto da lista (22), obtemos a lista (21).

Já se pegarmos um subconjunto que não possui o elemento retirado e o acrescentamos, ficamos com um único subconjunto que contém o elemento retirado. No exemplo, acrescentando o elemento a a cada um dos subconjuntos da lista (21), obtemos a lista (22).

Isso significa que os subconjuntos que contêm necessariamente o elemento retirado são obtidos acrescentando-se o elemento retirado a cada um dos subconjuntos que não têm o elemento retirado. Como temos 2^n subconjuntos sem o elemento retirado, teremos também 2^n subconjuntos que possuem necessariamente o elemento retirado. Tendo em vista que os subconjuntos dos dois grupos dão todos os subconjuntos de um conjunto com $n+1$ elementos, temos que um conjunto com $n+1$ elementos tem $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ subconjuntos. Assim, concluímos que $P(n+1)$ é válida a partir da suposição que $P(n)$ é válida. Então, pelo Princípio da Indução Finita, a Afirmação 1.3 é verdadeira, para todo número natural n a partir de zero.

Observação 1.2. A verificação do caso base i) é essencial para valer a conclusão do Princípio da Indução Finita. Por exemplo, consideremos a seguinte propriedade relativa aos números naturais:

$$P(n): \text{“}2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot n = n^2 + n + 2\text{”}. \tag{23}$$

Com esta notação resumida queremos dizer que a propriedade $P(n)$ é a validade da fórmula após o sinal “:”. Se assumimos que $P(n)$ é válida para algum número natural n, teríamos a validade de $P(n+1)$ a partir dessa suposição. De fato, o lado esquerdo de $P(n+1)$ é

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot n + 2 \cdot (n+1). \tag{24}$$

Como na hipótese de indução, supomos a veracidade de $P(n)$ para um número natural n considerado, então fazendo para $n+1$ temos que

$$\begin{aligned}
&(2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot n) + 2 \cdot (n+1) \\
&= (n^2 + n + 2) + 2 \cdot (n+1) \\
&= n^2 + n + 2 + 2n + 2 \\
&= n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 2 \\
&= (n+1)^2 + (n+1) + 2.
\end{aligned} \tag{25}$$

Assim, assumindo $P(n)$, vemos que $P(n+1)$ satisfaz a condição ii) do Princípio da Indução Finita.

No entanto, a propriedade $P(n)$ não é válida para qualquer valor de n porque sendo $P(n)$ uma P.A., com $a_1 = 2$ e razão $r = 2$, a soma dos n primeiros termos, com a fórmula (12) obtida anteriormente de forma direta, seria $n + n^2$ e não $n^2 + n + 1$. Concluiremos assim que $P(n)$ é falsa para todo valor de n e, portanto, a conclusão do Princípio da Indução não seria válida a partir de qualquer que seja o n_0. Isso acontece, pois não existe caso base para o qual

$P(n)$ é válida e, portanto, a condição i) é essencial para se ter a conclusão do Princípio da Indução Finita.

Observação 1.3. A expressão "De fato", utilizada na argumentação em matemática, normalmente significa que passaremos a constatar uma afirmação que acabou de ser feita.

Exemplo 1.2. Mostre por indução que $2^n > n^3$*, para todo número natural* $n \geq 10$.

Ao observar os valores de 2^n e de n^3, na tabela 2, notaremos que não é verdade que 2^n seja maior que n^3 para todo número natural n, porém a propriedade parece ser verdadeira a partir de $n = 10$.

Tabela 2 - Valores de 2^n e n^3 até $n = 11$

n	2^n	n^3
1	2	1
2	4	8
3	8	27
4	16	64
5	32	125
6	64	216
7	128	343
8	256	512
9	512	729
10	1024	1000
11	2048	1331

Fonte: o autor, 2021.

Observe que a sentença $P(n)$ é verdadeira para $n = 1$, mas é falsa para os valores seguintes até 9, tornando-se aparentemente verdadeira a partir de 10. Para constatarmos que isso realmente acontece, vamos utilizar a Formulação Generalizada do Princípio da Indução Finita, útil para tratar desigualdades, com caso base o número 10. Note, na tabela 2, que se $P(n)$ é a sentença $2^n > n^3$, temos $P(10)$ verdadeira. Agora, suponhamos, por hipótese de indução, que $P(n)$ é verdadeira para algum $n \geq 10$. Devemos mostrar que $P(n)$ também é verdadeira. Para isso utilizaremos o fato que 2^{n+1} é igual a $2^n \cdot 2$ e que 2 é maior que $\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$ que é igual a 1,331. Utilizaremos esses fatos para verificar a validade de $P(n+1)$. Temos,

$$2^{n+1} = 2.2^n > \left(1+\frac{1}{10}\right)^3 .2^n. \tag{26}$$

Como $\left(1+\frac{1}{10}\right)^3 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^3$, uma vez que $n \geq 10$, temos que

$$n \geq 10 \Rightarrow \frac{1}{10} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow 1+\frac{1}{10} \geq 1+\frac{1}{n}. \tag{27}$$

Como $\mathrm{f(x) = x^3}$ é crescente, então

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^3 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \tag{28}$$

Daí,

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^3 \cdot 2^n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot 2^n. \tag{29}$$

Assim,

$$2^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot 2^n. \tag{30}$$

Como, pela hipótese de indução, que $2^n > n^3$ temos que:

$$2^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot n^3. \tag{31}$$

Como $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot n^3 = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot n\right]^3 = (n+1)^3$, concluímos

$$2^{n+1} > (n+1)^3. \tag{32}$$

Logo, $P(n+1)$ é válida e pelo Princípio da Indução Finita, concluímos que $2^n > n^3$ para todo número natural $n \geq 10$.

Tarefa 1.3. Encontrar o menor número natural n_0 tal que $2^n > n^4$ para $n \geq n_o$.

Uma propriedade básica relativa aos números naturais, chamada de Teorema da Fatoração Única ou Teorema Fundamental da Aritmética, assegura que qualquer número natural maior que ou igual a 2 é primo ou se escreve de maneira "única" como um produto de fatores primos.

A seguir listamos algumas propriedades dos números primos que usaremos adiante.

- Se p e q são números naturais primos e p divide q então $p = q$.

- Se p é um número primo e p divide $a.b$, então p divide a ou p divide b. Na verdade, vale que se p é um número primo e p divide um produto $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ então p divide algum fator a_i.

Mais precisamente, o Teorema Fundamental da Aritmética, conhecido também como Teorema da Fatoração Única, estabelece:

Afirmação 1.4. Todo número natural maior que ou igual a 2 *é primo ou é escrito de uma única forma (a menos da ordem dos fatores) como o produto de números naturais primos.* (HEFEZ, 2016)

Para constatar a afirmação acima, consideremos a propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, de que todo número natural n maior que ou igual a dois é um número primo ou é um produto com os fatores sendo números naturais primos. Vamos tentar fazer uso da Formulação Generalizada da Primeira Formulação do Princípio para verificar a validade da afirmação. Assim, o caso base seria $n = 2$. Como 2 é um número primo, vemos que $P(2)$ é válida. Consideremos a hipótese de indução que é a validade de $P(n)$ para algum número natural n, $n \geq 2$. Tentemos obter a validade de $P(n+1)$. Dividiremos em dois casos: o primeiro caso é quando $n+1$ é um número primo, então $P(n+1)$ será válida automaticamente; porém, o segundo caso, quando $n+1$ não for um número primo, deveríamos mostrar que ele é um produto de fatores primos. Não teríamos sucesso nessa tentativa pelo fato de que os fatores de n podem não ter relação alguma com os fatores de $n+1$. Como exemplo, se considerarmos n igual a 5, note que 5 é um número primo, o sucessor $n+1$ seria o 6 que tem 2 e 3 como fatores primos e não guardam relação alguma com 5 para o nosso objetivo. Portanto, a formulação generalizada do Princípio da Indução Finita não é adequado para verificarmos a validade desse tipo de propriedade.

Para constatar o Teorema da Fatoração Única, um instrumento adequado é uma outra formulação do Princípio da Indução Finita declarado abaixo:

Segunda Formulação do Princípio da Indução Finita, Princípio da Indução Forte ou Princípio da Indução Completa:

Sejam $P(n)$ *uma propriedade relativa ao número natural* n *e* n_0 *um número natural tais que:*

i) $P(n_0)$ *é válida;*

ii) Assumindo que, para algum número natural n, com n maior que ou igual a n_0, $P(m)$ é válida para qualquer que seja o número natural m, tal que $n_0 \leq m \leq n$, podemos concluir que $P(n+1)$ também é válida.
Então, $P(n)$ é válida para todo número natural $n \geq n_0$.

Agora, passamos a demonstração do Teorema da Fatoração Única. Vimos que $P(2)$ é válida e, como hipótese de indução, assumimos que para algum n, $P(n)$ é válida para todos os números naturais m, encontrados no intervalo de 2 até n. Devemos constatar que $P(n+1)$ é válida. Considerando $n+1$, se $n+1$ é primo então $P(n+1)$ é válida; se $n+1$ não é primo então significa que ele tem um fator a que não é 1 ou $n+1$. Daí, $2 \leq a \leq n$. Consequentemente, se b é o quociente da divisão de $n+1$ por a, temos $n+1 = a \cdot b$ com $2 \leq a, b \leq n$. Pela hipótese de indução, a e b cada qual é primo ou se escreve como um produto de fatores primos já que $2 \leq a, b \leq n$. Em qualquer caso, $n+1 = a \cdot b$ é um produto de fatores primos. Com isso, utilizando o Princípio da Indução Forte, mostramos que todo número natural maior que ou igual a 2 é primo ou se escreve como um produto de fatores primos.

Agora, devemos constatar que a decomposição como um produto de fatores primos é única a menos da ordenação dos fatores. Para isso, utilizaremos novamente o Princípio de Indução Forte. Ou seja, devemos mostrar que se $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s = n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$ são duas decomposições de n, como produtos de fatores primos p_i e q_j, então $s = t$ e, a menos da reordenação dos fatores, temos $p_i = q_i$ para $i = 1, 2, \ldots, s$. Em i), o caso base seria $n = 2$, como $2 = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$, então 2 deve ser um dos p_i , logo, $r = 1$ e $p_1 = 2$. Agora verificamos a validade de ii). Daí assumiremos que para algum n e todo m, $2 \leq m \leq n$, se $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$ são duas decomposições de m como produto de fatores primos p_i e q_j, então $s = t$ e, a menos da reordenação dos fatores, temos $p_i = q_i$ para $i = 1, 2, \ldots, s$.

Consideremos duas decomposições para $n+1$, $p_1 \cdot \ldots \cdot p_u = n+1 = q_1 \cdot \ldots \cdot q_v$. Se $u = 1$, $n+1$ é primo e, como no caso $n = 2$, concluímos $v = 1$ e $q_1 = n+1$. Assim, podemos assumir $u \geq 2$ e, consequentemente, $v \geq 2$. Daí, $p_1 = q_i$ para algum i. Reordenando os q_i's , caso necessário, podemos assumir $i = 1$. Então, dividindo

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_u = n+1 = q_1 \cdot \ldots \cdot q_v \, , \tag{33}$$

por p_1, obtemos

$$2 \leq p_2 \cdot \ldots \cdot p_u = \frac{n+1}{p_1} = q_2 \cdot \ldots \cdot q_v \leq n. \tag{34}$$

Observe que $\frac{n+1}{p_1}$ cai nas condições da hipótese de indução. Assim, aplicando a hipótese de indução a $\frac{n+1}{p_1}$, concluímos $u - 1 = v - 1$ e $u = v$, ou seja, o número de fatores primos de ambos coincidem e, a menos de reordenação dos fatores primos, $p_2 = q_2, \dots, p_u = q_u$ e verificamos a propriedade para $n + 1$, a saber $u = v$ e, a menos da ordem dos fatores primos, $p_1 = q_1, \dots, p_u = q_u$. Então, pelo Princípio da Indução Forte, está provado a unicidade da decomposição como um produto de fatores primos para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Exemplo 1.3. Prove que todo número natural não nulo pode ser expresso de maneira única como a soma de potências distintas de 2. Mais precisamente, para todo número natural não nulo n *, existe um único natural* $\boldsymbol{t}$ *e únicos coeficientes* $a_j = 0$ ou $a_j = 1$, $j = 0, \dots, t$, $a_t = 1$, tais que

$$n = a_t \cdot 2^t + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0. \tag{35}$$

Para exemplificar a propriedade acima, temos

$$37 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0. \tag{36}$$

A constatação da afirmação no Exemplo 1.3 se dará em duas etapas: na primeira, provaremos a existência de uma representação como requerida acima e, na segunda, que a representação obtida é a única possível. Ambas as etapas serão provadas pelo Princípio da Indução Forte.

Para a existência da representação, consideremos a propriedade $P(n)$: *todo número natural não nulo* n *, pode ser representado na forma*

$$n = a_t \cdot 2^t + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0 \tag{37}$$

c*om* $a_j = 0$ *ou* $a_j = 1$, *com* $j = 0, \dots, t - 1$ e $a_t = 1$.

Notemos que o caso base 1 tem a representação $1 = 1 \cdot 2^0 = a_0$ com $t = 0$ e $a_0 = 1$ e uma representação existe para o caso base 1. Como hipótese de indução, suponhamos que todo número natural m, $1 \leq m < n$, tenha uma representação na base 2, ou seja, existe um número natural p tal que

$$m = a_p \cdot 2^p + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0 \tag{38}$$

com $a_j = 0$ ou $a_j = 1$ com, $j = 0, \dots, p - 1$ e $a_p = 1$.

Considerando o número natural n, $n \geq 2$, e dividindo n por 2, obtemos

$$n = 2 \cdot q + a_0 \text{ com } a_0 = 0 \text{ ou } a_0 = 1 \text{ e } q \neq 0. \tag{39}$$

Temos $1 \leq q < n$ e, pela hipótese de indução, podemos escrever

$$q = a_t \cdot 2^{t-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^1 + a_1 \text{ com } a_j = 0 \text{ ou } a_j = 1,\ j = 1, \dots, t,\ a_t = 1. \tag{40}$$

Substituindo (3) em (2), obtemos

$$n = a_t \cdot 2^t + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0 \ \ \textit{com}\ \ a_j = 0 \textit{ ou } a_j = 1\ , j = 0, \dots, t,\ a_t = 1. \tag{41}$$

Assim, constatamos pelo Princípio da Indução Forte que todo número natural n, $n \geq 1$, tem uma representação como afirmada no Exemplo 1.3.

Agora, passamos a constatar que a representação é única. Para isso, consideremos a propriedade $P(n)$: para *todo número natural não nulo* n *, existe um único número natural* t *e únicos* $a_j = 0$ *ou* $a_j = 1$, $j = 0, \dots, t$, ***c****om* $a_t = 1$, *tais que*

$$n = a_t \cdot 2^t + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0. \tag{42}$$

Para o caso base $n = 1$ vimos a representação $1 = a_0$ com $t = 0$ e $a_0 = 1$. Se

$$1 = 1 \cdot 2^t + \dots + a_0 \cdot 2^0, \tag{43}$$

é uma outra representação de 1 **c**om $a_j = 0$ ou $a_j = 1$, $j = 0, \dots, t$, $a_t = 1$, necessariamente $t = 0$ e a_0 =1; caso contrário, a soma das potências de 2 seria pelo menos 3 e podemos concluir que $1 = a_0$, com $t = 0$ e $a_0 = 1$, é a única representação de 1 nas condições estipuladas. Usando a hipótese de indução, suponhamos que para algum n e todo número natural m, $1 \leq m < n$, existe um único número natural s e únicos $c_j = 0$ ou $c_j = 1$, $j = 0, \dots, s$, com $c_s = 1$, tais que

$$m = c_s \cdot 2^s + \dots + c_1 \cdot 2 + c_0. \tag{44}$$

Considerando o número natural n, n ≥ 2 , sejam

$$n = a_t \cdot 2^t + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0 \text{ com } a_j = 0 \text{ ou } a_j = 1, j = 0, \dots, t,\ a_t = 1 \tag{45}$$

e

$$n = b_p \cdot 2^p + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0 \text{ com } b_i = 0 \text{ ou } b_i = 1, i = 0, \dots, p,\ b_p = 1 \tag{46}$$

representações de n. Podemos escrever

$$n = q_1 \cdot 2 + a_0, a_0 = 0 \text{ ou } a_0 = 1 \text{ e } n = q_2 \cdot 2 + b_0, b_0 = 0 \text{ ou } b_0 = 1, \tag{47}$$

com

$$q_1 = a_t \cdot 2^{t-1} + a_{t-1} \cdot 2^{t-2} + \cdots + a_1 \tag{48}$$

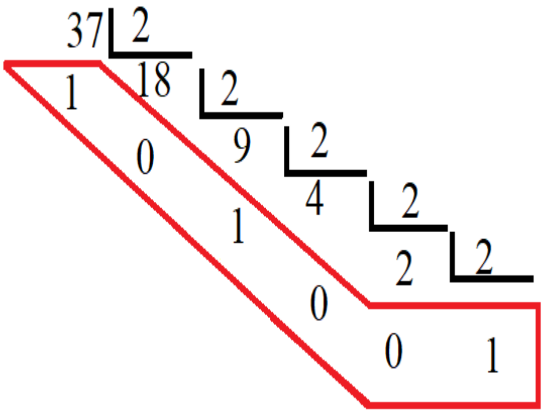
e

$$q_2 = b_p \cdot 2^{p-1} + b_{p-1} \cdot 2^{p-2} + \cdots + b_1 \tag{49}$$

Assim, $n = q_1 \cdot 2 + a_0$ e $n = q_2 \cdot 2 + b_0$ representam a divisão de n por 2. Pela unicidade do quociente e do resto da divisão, $q_1 = q_2$ e $a_0 = b_0$. Como $1 \leq q_1 = q_2 < n$, pela hipótese de indução, $q_1 = q_2$ tem uma única representação e, daí, $t - 1 = p - 1$ ou $t = p$ e, $a_t = b_t = 1, \dots, a_1 = b_1$. Juntando isso com $a_0 = b_0$, vemos que $t = p$ e $a_j = b_j, j = 0, \dots, t$, com $a_t = b_t = 1$, e concluímos a unicidade da representação para n e, por indução forte, obtemos que a representação (4) é única para todo $n \geq 1$.

O exemplo acima caracteriza o sistema de numeração binário, onde todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de diferentes potências de 2 com expoentes inteiros não negativos, denominada *representação binária ou representação na base* 2. Esse sistema utiliza somente os dígitos 0 e 1 como coeficientes das potências de 2 que são chamados de dígitos binários ou 'bits'. Observe que os dígitos binários são os restos possíveis de divisões sucessivas por 2. Por exemplo, Figura 2, para obter a representação de 37 exemplificada anteriormente,

Figura 2 – Divisão de 37 por 2



Fonte: o autor, 2021.

Normalmente a representação na base 2 de n, como no Exemplo 1.3, é feita resumidamente na forma $n = (a_t \ldots a_0)_2$.. Assim, para 37 teríamos $37 = (100101)_2$. Já a representação $(10111)_2$ é a representação binária do número natural

$$(10111)_2 = 1.\,2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 16 + 0 + 4 + 2 + 1 = 23. \qquad (50)$$

A representação binária é utilizada na computação, onde há dois tipos de sinais elétricos, os que indicam ausência de eletricidade, representado pelo número zero (0) e os que indicam presença de eletricidade, representado pelo algarismo um (1), sendo as informações passadas através de sequências binárias, onde cada dígito binário é chamado de *bit (binary digit)*, que é o componente básico da representação de dados. Os computadores operam com grupos de bits. Uma representação de um desses grupos é o b*yte* que possui um grupo de oito bits, este pode ser usado como caracteres, conforme a tabela abaixo, como uma letra (A-Z), um número (0-9) ou outro símbolo qualquer (#, %, *,?, @), entre outros. Abaixo segue a Tabela 3 conforme Hefez (2016, p.277) que faz uma tradução para a linguagem binária dos símbolos mais utilizados:

Tabela 3 – Valores correspondentes entre Binário, Decimal e símbolo

Binário	Decimal	símbolo	Binário	Decimal	símbolo	Binário	Decimal	símbolo
00100000	32		01000000	64	@	01100000	96	‘
00100001	33	!	01000001	65	A	01100001	97	a
00100010	34	”	01000010	66	B	01100010	98	b
00100011	35	#	01000011	67	C	01100011	99	c
00100100	36	$	01000100	68	D	01100100	100	d
00100101	37	%	01000101	69	E	01100101	101	e
00100110	38	&	01000110	70	F	01100110	102	f
00100111	39	′	01000111	71	G	01100111	103	g
00101000	40	(	01001000	72	H	01101000	104	h
00101001	41	)	01001001	73	I	01101001	105	i
00101010	42	*	01001010	74	J	01101010	106	j
00101011	43	+	01001011	75	K	01101011	107	k
00101100	44	,	01001100	76	L	01101100	108	l
00101101	45	−	01001101	77	M	01101101	109	m
00101110	46	.	01001110	78	N	01101110	110	n
00101111	47	/	01001111	79	O	01101111	111	o
00110000	48	0	01010000	80	P	01110000	112	p
00110001	49	1	01010001	81	Q	01110001	113	q
00110010	50	2	01010010	82	R	01110010	114	r
00110011	51	3	01010011	83	S	01110011	115	s
00110100	52	4	01010100	84	T	01110100	116	t
00110101	53	5	01010101	85	U	01110101	117	u
00110110	54	6	01010110	86	V	01110110	118	v
00110111	55	7	01010111	87	W	01110111	119	w
00111000	56	8	01011000	88	X	01111000	120	x
00111001	57	9	01011001	89	Y	01111001	121	y
00111010	58	:	01011010	90	Z	01111010	122	z
00111011	59	;	01011011	91	[	01111011	123	{
00111100	60	<	01011100	92	\	01111100	124	|
00111101	61	=	01011101	93	]	01111101	125	}
00111110	62	>	01011110	94	∧	01111110	126	∼
00111111	63	?	01011111	95	_			

Fonte: Hefez (2016).

É importante ressaltar, que as formulações do Princípio da Indução Finita são equivalentes, ou seja, cada um é consequência do outro. Mais precisamente, a partir da admissão de um deles como algo válido sem a necessidade de constatação (como um axioma) o outro pode ser demonstrado. Daí a legitimidade da constatação por indução. As equivalências entre as várias formulações do princípio de indução serão estabelecidas adiante.

Deixamos para o leitor a tarefa de, seguindo os mesmos passos para estabelecer a representação na base 2, estabelecer a existência e a unicidade da representação de um número natural em uma base fixada b qualquer com b um número natural maior que ou igual a 3. Em outras palavras, usar o Princípio da Indução Forte para constatar a propriedade a seguir.

Tarefa 1.4. Prove que fixado um inteiro qualquer b, $b \geq 2$, todo inteiro positivo n admite uma única representação da forma

$$n = a_m \cdot b^m + a_{m-1} \cdot b^{m-1} + \cdots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0, \tag{51}$$

onde m é um número natural, $a_i \in N$ com $0 \leq a_i < b$, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$, com a_m diferente de zero.

"A representação de n na base b" é o nome pela qual (51) é chamada. Os coeficientes a_i*'s* são *os algarismos de* n *na base* b, *os dígitos de* n *na base* b ou b-*dígitos de* n. A representação (5) é indicada resumidamente por $n = (a_m \ldots a_0)_b$.

Grande parte da humanidade utiliza a base $b = 10$, ou seja, a base decimal para o sistema numérico de representação decimal, onde os coeficientes das potências de 10 são $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ chamados simplesmente de algarismos. Na representação decimal, normalmente colocamos os algarismos justapostos sem fazer referência a base 10 que está implícita. Não obstante, Eves (2004) cita algumas civilizações que usam ou usavam sistemas de bases não-decimais como o sistema quinário (base 5) que foi o primeiro a ser usado extensivamente e é usado até hoje em tribos na América do Sul, além de ser encontrado na tribo Yukaghirs da Sibéria e em calendários de camponeses alemãs. O sistema vigesimal (base 20) foi usado por índios americanos e no sistema de numeração maia e o sistema sexagesimal (base 60) foi usado pelos babilônios, sendo influenciador nas medidas do tempo e de ângulos.

Tarefa 1.5. Escreva na base decimal a representação binária $(100100)_2$.

Exemplo 1.4. Escreva as representações decimais de $(4213)_5$ *e* $(157)_8$:

$$(4213)_5 = 4.\,5^3 + 2.5^2 + 1.5^1 + 3.5^0 = 500 + 50 + 5 + 3 = 558 \tag{52}$$

$$(157)_8 = 1.\,8^2 + 5.8^1 + 7.8^0 = 64 + 40 + 7 = 111 \tag{53}$$

Tarefa 1.6. Escreva na base decimal os números $(1122)_4$ *e* $(36)_7$.

Segue abaixo uma terceira formulação do Princípio da Indução Finita:

Terceira Formulação do Princípio da Indução Finita ($\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{k = 1}$):

Sejam $P(n)$ *uma propriedade relativa ao número natural* n *e* a *um número natural tais que:*

i) $P(a)$ *e* $P(a+1)$ *são válidas.*

ii) Assumindo que $P(n)$ *e* $P(n+1)$ *são válidas para algum* $n \geq a$, *podemos concluir que* $P(n+2)$ *também é válida.*

Então, $P(n)$ é válida para todo número natural n, $n \geq a$.

A sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, denominada sequência de Fibonacci, é definida por:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n, \text{ para } n \geq 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Ou seja, a partir do terceiro termo, cada termo dessa sequência é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores ao próprio. Assim, obtemos a sequência

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots\}.$$

Essa sequência é conhecida por diversas curiosidades em torno dela. Segundo Eves (2004), a sequência de Fibonacci surgiu em 1202, na obra *Liber abaci* de Leonardo de Pisa, que por ser filho de Bonaccio também era conhecido como Leonardo Fibonacci. Essa sequência foi originada a partir de um problema desta obra que buscava encontrar a quantidade de pares de coelhos que seriam produzidos em um ano, a partir de um único casal de coelhos, uma vez que cada casal procria a cada mês um novo casal que se torna produtivo ao passar dois meses. Além dessa, existem outras diversas aplicações para tal sequência, Crilly (2017) cita algumas delas, dentre as quais na natureza, onde são encontradas nos números de espirais formada pelo número de sementes das espirrais dos girassóis, em vários projetos arquitetônicos, onde são encontrados nas proporções de salas e de construções e também na música, usada por alguns compositores como inspiração para algumas composições de músicas clássicas e contemporâneas.

Afirmação 1.5. O termo geral da sequência de Fibonacci é dado por

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \tag{55}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esse termo geral tem uma relação bem próxima ao número áureo, também conhecido como razão áurea, simbolizado por ϕ, que é a letra grega *phi* cujo valor é $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, próximo a $1{,}618034$. A aproximação desse número irracional é gerada pela razão de termos sucessivos da sequência de Fibonacci chegando a uma melhor aproximação conforme o crescimento da sequência. Podemos reescrever esse termo geral na forma: $a_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$. O número áureo também pode ser obtido como a razão de dois segmentos positivos que estão em razão áurea:

$\frac{(a+b)}{a} = \frac{a}{b} = \phi$ com $a > b$, de modo que a equação do segundo grau resultante $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ tem como raízes as bases das potências do termo geral a_n e ϕ como a raiz positiva.

Demonstraremos tal afirmação, utilizando a Terceira Formulação do Princípio da Indução Finita acima, onde a propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, é "o termo geral a_n da sequência de Fibonacci é dado por $a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$".

Para constatar tal afirmação, mostraremos por indução em n, para o caso base $n = 0$, verificando as validades de $P(0)$ e $P(0+1) = P(1)$:

$$a_0 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}} = 0\,, \tag{56}$$

$$a_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = 1\,, \tag{57}$$

que demonstra a validade de i) para $a = 0$; ou sejam, $P(0)$ e $P(1)$ são válidas. Por hipótese de indução, suponhamos as validades de $P(n)$ e $P(n+1)$ para algum $n \geq 0$. Devemos verificar a validade de $P(n+2)$. Temos,

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{2} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{2}{2} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}}
\end{aligned} \tag{58}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}},$$

o que demonstra a validade de $P(n+2)$. Assim, pela Terceira Formulação do Princípio da Indução Finita, o termo geral da sequência de Fibonacci é dado por $a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.5: Seja a_n o termo geral da sequência de Fibonacci. Mostre que $a_{2n-1} = a_{n-1}^2 + a_n^2$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. (HEFEZ, 2016)

Seja a propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, dada por $P(n)$: "$a_{2n-1} = a_{n-1}^2 + a_n^2$, sendo a_n o termo geral da sequência de Fibonacci". Mostraremos por indução em n, para o caso base $n = 1$:

$$a_1 = a_{2.1-1} = a_{1-1}^2 + a_1^2 = a_0^2 + a_1^2 = 0^2 + 1^2 = 1, \quad (59)$$

$$a_3 = a_{2.2-1} = a_{2-1}^2 + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2, \quad (60)$$

que demonstra a validade de i) para $a = 1$, ou sejam, $P(1)$ e $P(2)$ são válidas. Por hipótese de indução, suponhamos a validade de $P(n)$ e $P(n+1)$ para algum $n \geq 1$. Devemos verificar a validade de $P(n+2)$. Utilizando a definição da sequência de Fibonacci, temos

$$\begin{aligned} a_{2n+3} &= a_{2n+2} + a_{2n+1} \\ &= (a_{2n+1} + a_{2n}) + a_{2n+1} \\ &= a_{2n+1} + (a_{2n+1} - a_{2n-1}) + a_{2n+1} \\ &= 3a_{2n+1} - a_{2n-1}. \end{aligned} \quad (61)$$

Como pela hipótese de indução, as proposições $P(n)$ e $P(n+1)$ são, respectivamente

$$a_{2n-1} = a_{n-1}^2 + a_n^2 \text{ e } a_{2n+1} = a_n^2 + a_{n+1}^2, \quad (62)$$

então

$$\begin{aligned} a_{2n+3} &= 3a_{2n+1} - a_{2n-1} \\ &= 3(a_n^2 + a_{n+1}^2) - (a_{n-1}^2 + a_n^2) \\ &= 3a_n^2 + 3a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 - a_n^2 \end{aligned}$$

$$= 2a_n^2 + 3a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2$$
$$= 2a_n^2 + 3a_{n+1}^2 - (a_{n+1} - a_n)^2$$
$$= 2a_n^2 + 3a_{n+1}^2 - (a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}a_n + a_n^2) \quad (63)$$
$$= 2a_n^2 + 3a_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_n - a_n^2$$
$$= 2a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_n + a_n^2$$
$$= a_{n+1}^2 + (a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}a_n + a_n^2)$$
$$= a_{n+1}^2 + (a_{n+1} + a_n)^2$$
$$= a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 \,,$$

que demonstra a validade de $P(n+2)$. Assim, pelo Princípio da Indução Finita,

$a_{2n-1} = a_{n-1}^2 + a_n^2$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. (64)

Tarefa 1.7. Seja a_n o termo geral da sequência de Fibonacci. Mostre que $a_{2n} = a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2$, para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Segue abaixo o caso geral da terceira formulação:

Terceira Formulação do Princípio da Indução Finita (a e $k \geq 1$):

Sejam $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n, a e $k \geq 1$ números naturais fixados tais que:

i) $P(a)$, $P(a+1)$, ..., $P(a+k)$ são válidas.

ii) Assumindo que $P(n)$, $P(n+1)$, ..., $P(n+k)$ são válidas para algum $n \geq a$, podemos concluir que $P(n+k+1)$ também é válida.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \geq a$.

Afirmação 1.6. Considere a sequência

$$a_0 = 6$$
$$a_1 = 13 \quad (65)$$
$$a_2 = 33$$
$$a_{n+3} = 6 \cdot a_{n+2} - 11 \cdot a_{n+1} + 6 \cdot a_n, n \geq 0,$$

o termo geral dessa sequência é dado por $a_n = 2 \cdot (2^{n-1} + 1) + 3^{n+1}$.

Seja a propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, dada por "$a_n = 2 \cdot (2^{n-1} + 1) + 3^{n+1}$, *para $n \geq 0$*". Inicialmente, mostramos para o caso base $a = 0$ com $k = 2$:

$$a_0 = 2 \cdot (2^{0-1} + 1) + 3^{0+1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) + 3 = 3 + 3 = 6 \quad (66)$$

$$a_1 = 2 \cdot (2^{1-1} + 1) + 3^{1+1} = 2 \cdot (1 + 1) + 3^2 = 4 + 9 = 13 \quad (67)$$

$$a_2 = 2 \cdot (2^{2-1} + 1) + 3^{2+1} = 2 \cdot (2 + 1) + 3^3 = 6 + 27 = 33, \quad (68)$$

que demonstra a validade de i) para $a = 0$ com $k = 2$, ou sejam, $P(0)$, $P(1)$ e $P(2)$ são válidas. Por hipótese de indução, suponhamos a validade de $P(n)$, $P(n+1)$ e $P(n+2)$ para algum $n \geq 0$. Devemos verificar a validade de $P(n+3)$. Pela definição da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, temos

$$a_{n+3} = 6 \cdot a_{n+2} - 11 \cdot a_{n+1} + 6 \cdot a_n. \quad (69)$$

Como pela hipótese de indução, as proposições $P(n)$, $P(n+1)$ e $P(n+2)$ são válidas, temos que

$$a_n = 2 \cdot (2^{n-1} + 1) + 3^{n+1} \quad (70)$$

$$a_{n+1} = 2 \cdot (2^n + 1) + 3^{n+2} \quad (71)$$

$$a_{n+2} = 2 \cdot (2^{n+1} + 1) + 3^{n+3} \quad (72)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
a_{n+3} &= 6 \cdot [2 \cdot (2^{n+1} + 1) + 3^{n+3}] - 11 \cdot [2 \cdot (2^n + 1) + 3^{n+2}] + 6 \\
&\quad \cdot [2 \cdot (2^{n-1} + 1) + 3^{n+1}] \\
&= 6 \cdot 2 \cdot (2^{n+1} + 1) + 6 \cdot 3^{n+3} - 11 \cdot 2 \cdot (2^n + 1) - 11 \cdot 3^{n+2} + 6 \cdot 2 \cdot (2^{n-1} + 1) \\
&\quad + 6 \cdot 3^{n+1} \\
&= 12 \cdot 2^{n+1} + 12 + 6 \cdot 3^{n+3} - 22 \cdot 2^n - 22 - 11 \cdot 3^{n+2} + 12 \cdot 2^{n-1} + 12 + 6 \\
&\quad \cdot 3^{n+1} \\
&= 12 \cdot 2^n \cdot 2 - 22 \cdot 2^n + 12 \cdot 2^n \cdot 2^{-1} + 12 - 22 + 12 + 6 \cdot 3^n \cdot 3^3 - 11 \cdot 3^n \cdot 3^2 \\
&\quad + 6 \cdot 3^n \cdot 3 \\
&= (24 - 22 + 6) \cdot 2^n + 2 + (162 - 99 + 18) \cdot 3^n \\
&= 8 \cdot 2^n + 2 + 81 \cdot 3^n \\
&= 2^3 \cdot 2^n + 2 + 3^4 \cdot 3^n \\
&= 2 \cdot (2^{n+2} + 1) + 3^{n+4}.
\end{aligned} \quad (73)$$

Assim, pela Terceira Formulação do Princípio da Indução Finita,

$$a_n = 2 \cdot (2^{n-1} + 1) + 3^{n+1}, \textit{ para } n \geq 0. \quad (74)$$

Exemplo 1.6. Considere a sequência

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 4 \quad (75)$$

$a_3 = 14$

$a_{n+3} = 6 \cdot a_{n+2} - 12 \cdot a_{n+1} + 8 \cdot a_n, n \geq 1.$

Mostre que o termo geral da sequência é calculado por $a_n = (n^2 + n + 2) \cdot 2^{n-3}$.

Seja a propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, dada por $a_n = (n^2 + n + 2) \cdot 2^{n-3}$, *para* $n \geq 1$. Inicialmente, mostramos para o caso base $a = 1$ com $k = 2$:

$$a_1 = (1^2 + 1 + 2) \cdot 2^{1-3} = 4 \cdot 2^{-2} = 1 \quad (76)$$

$$a_2 = (2^2 + 2 + 2) \cdot 2^{2-3} = 8 \cdot 2^{-1} = 4 \quad (77)$$

$$a_3 = (3^2 + 3 + 2) \cdot 2^{3-3} = 14 \cdot 2^0 = 14 \quad (78)$$

que demonstra a validade de i) para $a = 1$ e $k = 2$, ou sejam, $P(1)$, $P(2)$ e $P(3)$ são válidas. Por hipótese de indução, suponhamos a validade de $P(n)$, $P(n+1)$ e $P(n+2)$ para algum $n \geq 1$, então

$$a_n = (\mathrm{n}^2 + n + 2) \cdot 2^{n-3} \quad (79)$$

$$a_{n+1} = [(n+1)^2 + (n+1) + 2] \cdot 2^{n-2} \quad (80)$$

$$a_{n+2} = [(n+2)^2 + (n+2) + 2] \cdot 2^{n-1}. \quad (81)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
a_{n+3} &= 6 \cdot [(n+2)^2 + (n+2) + 2] \cdot 2^{n-1} - 12 \cdot [(n+1)^2 + (n+1) + 2] \cdot 2^{n-2} \\
&\quad + 8 \cdot (\mathrm{n}^2 + n + 2) \cdot 2^{n-3} \\
&= 6 \cdot 2^{n-1} \cdot (n^2 + 4n + 4 + n + 2 + 2) - 12 \cdot 2^{n-2} \cdot (n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 2) \\
&\quad + 8 \cdot 2^{n-3} \cdot (\mathrm{n}^2 + n + 2) \\
&= 6 \cdot 2^n \cdot 2^{-1} \cdot (n^2 + 5n + 8) - 12 \cdot 2^n \cdot 2^{-2} \cdot (n^2 + 3n + 4) + 8 \cdot 2^n \cdot 2^{-3} \\
&\quad \cdot (\mathrm{n}^2 + n + 2) \\
&= 3 \cdot 2^n \cdot (n^2 + 5n + 8) - 3.2^n \cdot (n^2 + 3n + 4) + 2^n \cdot (\mathrm{n}^2 + n + 2) \qquad (82) \\
&= (3n^2 + 15n + 24 - 3n^2 - 9n - 12 + n^2 + n + 2) \cdot 2^n \\
&= (n^2 + 7n + 14) \cdot 2^n \\
&= (n^2 + 6n + 9 + n + 3 + 2) \cdot 2^n \\
&= [(n+3)^2 + (n+3) + 2] \cdot 2^n
\end{aligned}$$

que demonstra a validade de $P(n+3)$. Assim, pela Terceira Formulação do Princípio da Indução Finita, $a_n = (n^2 + n + 2) \cdot 2^{n-3}$, *para* $n \geq 1$.

Tarefa 1.8: Considere a sequência

$a_1 = 5$

$a_2 = 24 \quad (83)$

$a_3 = 117$

$a_n = 9 \cdot a_{n-1} - 27 \cdot a_{n-2} + 27 \cdot a_{n-3}, n \geq 1.$

Mostre que o termo geral da sequência é dado por $a_n = (n^2 + 2n + 5) \cdot 3^n$.

Segue abaixo um Princípio que é equivalente ao Princípio da Indução Finita, denominado como Princípio da Boa Ordenação (PBO):

Princípio da Boa Ordenação:

"Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ *tem um elemento mínimo. Ou seja, dado* $A \subset \mathbb{N}$ *e* $A \neq \emptyset$, *existe* $n_0 \in A$ *tal que* $\mathrm{n}_0 \leq n$, $\forall n \in A$.*"*

Afirmação 1.7. Dados os números naturais a *e* b *não simultaneamente nulos e* $d = mdc\ (a, b)$, *existem números inteiros* m *e* n *tais que* $d = m \cdot a + n \cdot b$.

Lembremos que o máximo divisor comum (mdc) de dois inteiros não simultaneamente nulos a e b, abreviado como $mdc(a, b)$, é o maior número natural que é divisor comum de a e b. Como exemplo, para determinar o mdc de 36 e 60, observamos que os divisores de 36 são $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ e os divisores de 60 são $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10,\ 12, 15\ 20, 30, 60\}$. Note que esses números têm como divisores positivos comuns os números 1, 2, 3, 4, 6 e 12, dentre eles o maior é 12, o que implica que 12 é o $mdc(36{,}60)$.

Agora, passamos a verificar a Afirmação 1.7: dados a e b não nulos, considere o conjunto $D = \{d \in \mathbb{Z} \mid d > 0\ e\ d = m \cdot a + n \cdot b, com\ m, n \in \mathbb{Z}\}$. Para considerar d_0, o menor elemento de D, devemos provar que $D \neq \emptyset$. De fato, tomando $m = a$ e $n = b$, uma vez que m e n são números inteiros e podemos escolher tais valores, obtemos que $m \cdot a + n \cdot b = a^2 + b^2$ é positivo, tendo em vista que a ou b é não nulo, e, portanto, é um elemento de D. Logo provamos que $D \neq \emptyset$. Mostraremos que d_0 é o máximo divisor comum entre a e b.

Como $d_0 \in D$, existem m_0 e $n_0 \in Z$ tais que $d_0 = m_0 \cdot a + n_0 \cdot b$. Dividindo a por d_0, pelo algoritmo da divisão, obtemos únicos inteiros q e r tais que

$$a = d_0 \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < d_0. \tag{84}$$

Substituindo a equação de d_0 na equação acima temos

$$\begin{aligned} a &= (m_0 \cdot a + n_0 \cdot b)q + r \\ a &= m_0 \cdot a \cdot q + n_0 \cdot b \cdot q + r \\ r &= (1 - m_0 \cdot q) \cdot a + (-n_0 \cdot q) \cdot b. \end{aligned} \tag{85}$$

Se $r > 0$ então r seria um elemento de D. Como $r < d_o$ e d_o é o menor elemento de D, teríamos uma contradição caso r fosse um elemento de D. Daí, $r = 0$. Assim, $a = d_0 \cdot q$

que implica em d_0 divide a. Procedendo de maneira análoga a anterior, com b no lugar de a, concluímos que também d_0 divide b.

Agora, se d_0' divide a e d_0' divide b, temos:

$$a = d_0' \cdot k, \tag{86}$$

$$b = d_0' \cdot l, \tag{87}$$

sendo k e l números inteiros. Multiplicando as igualdades acima, respectivamente por m_0 e n_0, obtemos

$$m_0 \cdot a = d_0' \cdot k \cdot m_0, \tag{88}$$

$$n_0 \cdot b = d_0' \cdot q \cdot n_0. \tag{89}$$

Adicionando membro a membro, concluímos

$$m_0 \cdot a + n_0 \cdot b = d_0' \cdot k \cdot m_0 + d_0' \cdot q \cdot n_0. \tag{90}$$

Ou seja,

$$\mathrm{d}_0 = d_0' \cdot (k \cdot m_0 + q \cdot n_0). \tag{91}$$

Daí, d_0' divide d_0 o que implica que $d_0 = mdc(a, b)$.

Observação 1.4. Na literatura de Matemática, é comum a primeira formulação ou a sua generalização e a segunda formulação serem chamadas de Primeiro Princípio da Indução Finita e Segundo Princípio da Indução Finita respectivamente.

2 EQUIVALÊNCIAS ENTRE AS FORMULAÇÕES DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

As diversas formulações do Princípio da Indução Finita, apresentadas no capítulo anterior, são equivalentes do ponto de vista da Matemática. Isso significa que assumindo uma das formulações, podemos inferir (chegar à conclusão), por meio de raciocínios legítimos do ponto de vista da Matemática, qualquer outra formulação. Assim, ao aplicar uma formulação qualquer para estabelecer a validade de algo relativo aos números naturais estaremos sempre apoiados no axioma A_4 de Peano. Neste capítulo, mostramos a equivalência entre os vários princípios.

2.1) Equivalência entre a Primeira Formulação do Princípio da Indução Finita e o Princípio da Boa Ordem (PBO)

(Primeira Formulação) *"Se $P(n)$ é uma propriedade relativa ao número natural n tal que*

i) P (1) é válida;

ii) Assumindo que $P(n)$ é válida para algum número natural n, com $n \geq 1$, podemos concluir que $P(n+1)$ também é válida.

Então $P(n)$ é válida para todo número natural n a partir de $n = 1$."

e

(PBO) *"Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo. Ou seja, dado $A \subset \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$, existe $n_0 \in A$ tal que $\mathrm{n}_0 \leq n, \forall n \in A$."*

PB0 $\Longrightarrow$ Primeira Formulação:

Devemos fazer algumas considerações sobre a implicação acima. Ela não significa que, nos axiomas de Peano, podemos substituir A_4 pelo Princípio da Boa Ordenação pois, para o PBO, necessitamos que $\mathbb{N}$ esteja totalmente ordenado e, com os axiomas de Peano, utilizamos A_4 para introduzir uma ordenação em $\mathbb{N}$. Ela significa que podemos dar uma prova da Primeira Formulação desde que assumamos propriedades usuais de $\mathbb{N}$, em particular a sua ordenação usual. Para ver um sistema de axiomas que inclui o Princípio da Boa Ordenação e não a Primeira Formulação veja Monteiro (1969).

Agora, passamos a verificar a implicação acima. Assumindo o PBO, consideremos uma propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, que satisfaça *i) e ii)* da Primeira Formulação.

Seja $A = \{n \in \mathbb{N} - \{0\}: P(n)\ não\ é\ válida\}$. Temos que $A = \emptyset$ e, portanto, $P(n)$ é válida para todo n em $\mathbb{N} - \{0\}$, implicando a Primeira Formulação.

Suponhamos, por absurdo, que $A \neq \emptyset$. Pelo PBO, A teria um menor elemento n_0. Como $1 \notin A$ já que $P(1)$ é válida por $i)$, teríamos $n_0 \geq 2$ e $1, \dots, n_0 - 1$ são elementos que não estão em A e $P(n_0)$ não é válida. Em particular, $P(n_0 - 1)$ é válida e, pelo item $ii)$ da Primeira Formulação, $P(n_0) = P(n_0 - 1 + 1)$ é válida. Assim, chegamos a uma contradição. Como a contradição é consequência de termos assumido que $A \neq \emptyset$, concluímos que $A = \emptyset$ e $P(n)$ é válida para todo $n \geq 1$, implicando a Primeira Formulação.

Agora, Primeira Formulação $\Longrightarrow$ PBO:

Assumindo a Primeira Formulação, consideremos $A \subset \mathbb{N} - \{0\}$ um subconjunto não vazio. Suponhamos por absurdo que A não tem elemento mínimo. Nestas condições, $1 \notin A$, senão 1 seria o elemento mínimo de A. Consideremos a propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, dada por $P(n)$: "$n \in (\mathbb{N} - \{0\}) - A$". Temos,

$i)$ $P(1)$ é válida já que $1 \notin A$;

$ii)$ Se para algum $n; n \geq 1$, $P(n)$ é válida, então $P(n+1)$ é válida. Caso contrário, $n + 1 \in A$ e poderíamos considerar o número natural a_0 tal que $P(1)$, $P(2)$,...,$P(a_0)$ são válidas e $P(a_0 + 1)$ não é válida. Tal a_o existiria porque $P(1)$ é válida e $P(n+1)$ não seria válida já que $n + 1 \in A$. Assim, $a_0 + 1 \in A$ e, como $1, \dots, a_0 \in (\mathbb{N} - \{0\}) - A)$, concluiríamos que $a_0 + 1$ é o elemento mínimo de A, chegando em uma contradição. Tendo em vista que $i)$ e $ii)$ acima são válidas, pela Primeira Formulação, $P(n)$ é válida para todo número natural $n \geq 1$. Consequentemente, A é vazio e chegamos a uma contradição. Como o que nos levou a uma contradição foi supor que A não tinha elemento mínimo, concluímos que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N} - \{0\}$ tem um elemento mínimo.

2.2) Equivalência entre a Primeira Formulação do Princípio da Indução Finita e a Generalização da Primeira Formulação (GPF)

Em seguida, faremos a equivalência entre a Primeira Formulação e a sua generalização.

(GPF) "*Se $P(n)$ é uma propriedade relativa ao número natural n e n_0 é um número natural tais que*

i) $P(n_0)$ é válida;

ii) Assumindo que $P(n)$ é válida para algum número natural n, com n maior que ou igual a n_0, podemos concluir que $P(n+1)$ também é válida.

Então $P(n)$ é válida para todo número natural $n \geq n_0$."

Primeira Formulação $\Longrightarrow$ Generalização da Primeira Formulação

Assim, assumindo a Primeira Formulação, consideremos uma propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, satisfazendo $i)$ e $ii)$ da formulação generalizada para algum número natural n_0. Para demonstrar a implicação acima, iremos considerar a propriedade $Q(n) = P(n_o + n - 1)$. Temos, por $i)$ da formulação generalizada, que $Q(1)$ é válida pois $Q(1) = P(n_o)$ é válida. Assumindo $Q(n)$ válida para algum número natural n, $n \geq 1$, temos que $P(n_o + n - 1)$ é válida. Como $n_o + n - 1 \geq n_o$, por $ii)$ da formulação generalizada, temos $Q(n+1) = P(n_o + n) = P(n_o + n - 1\ + 1)$ é válida. Pela Primeira Formulação, $Q(n)$ é válida para todo $n \geq 1$ implicando a validade de $P(n)$ para todo $n \geq n_o$ e provamos a validade da formulação generalizada a partir da Primeira Formulação.

Generalização da Primeira Formulação$\Longrightarrow$Primeira Formulação

Para constatar a implicação acima, basta assumirmos $n_0 = 1$ e teremos a Primeira Formulação a partir da formulação generalizada.

2.3) Equivalência entre a Generalização da Primeira Formulação e o Princípio da Indução Forte (PIF)

Em seguida, faremos a equivalência entre a Generalização da Primeira Formulação e a Segunda Formulação do Princípio da Indução Finita (Princípio da Indução Forte ou Completa)

(PIF) *"Sejam* $P(n)$ *uma propriedade relativa ao número natural n e a um número natural tais que:*

i) $P(a)$ *é válida;*

ii) Assumindo que, para algum número natural n, *com n maior que ou igual a* a, $P(m)$ *é válida para qualquer que seja o número natural* m, *tal que* $a \leq m \leq n$, *podemos concluir que* $P(n+1)$ *também é válida.*

Então $P(n)$ *é válida para todo número natural* $n \geq a$."

Generalização da Primeira Formulação $\Longrightarrow$ Princípio da Indução Forte.

Para demonstrar a implicação acima, vamos assumir a Formulação Generalizada e considerar uma propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, satisfazendo as propriedades $i)$ e $ii)$ do Princípio de Indução Forte para algum número natural a. Agora, consideramos a proposição $Q(n)$ dada por "$P(m)$ para todo número natural m, com $a \leq m \leq n$". Assim, $Q(n)$ é válida se, e somente se, $P(m)$ é válida para todo número natural m, com $a \leq m \leq n$. Por $i)$ do Princípio da Indução Forte, $Q(a)$ é válida, pois $P(a)$ é válida. Assumindo $Q(n)$ válida para algum número natural n, $n \geq a$, temos que $P(m)$ é válida, para todo número natural m, onde

$a \leq m \leq n$. Por $ii)$ do Princípio da Indução Forte, temos que $P(n+1)$ é válida, implicando na validade de $P(m)$ para todo m tal que $a \leq\ m \leq n+1$. Assim $Q(n+1)$ é válida. Pela Formulação Generalizada, $Q(n)$ é válida para todo $n \geq a$ implicando na validade de $P(n)$ para todo número natural $n \geq a$, e assim, provamos a validade do Princípio da Indução Forte a partir da Generalização da Primeira Formulação.

Princípio da Indução Forte $\Longrightarrow$ Generalização da Primeira Formulação

Agora, assumimos o Princípio da Indução Forte e consideramos uma propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, satisfazendo as propriedades $i)$ e $ii)$ da Formulação Generalizada para algum número natural a . Consideremos a proposição $Q(n)$: "$P(m)$ para todo número natural m,$a \leq m \leq n$". Por $i)$, da Formulação Generalizada, temos que Q(a) é válida já que P(a) é válida. Assumindo $Q(n)$ válida para algum número natural n, $n \geq a$, temos que $P(m)$ é válida, para todo número natural m,$a \leq m \leq n$. Por $ii)$, da Formulação Generalizada temos que $P(n+1)$ é válida já que $P(n)$ é válida. Consequentemente, $Q(n+1)$ é válida. Pelo Princípio da Indução Forte, $Q(n)$ é válida para todo $n \geq a$ implicando a validade de $P(n)$ para todo número natural n tal que $n \geq a$. Logo, provamos a validade da Formulação Generalizada a partir do Princípio de Indução Forte.

2.4) Equivalência entre a Generalização da Primeira Formulação e a Terceira Formulação do Princípio (TPF)

E, por fim, mostraremos a equivalência entre a Formulação Generalizada e a Terceira Formulação do Princípio da Indução Finita, a saber

(TPF) *"Sejam $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n, a e $k \geq 1$ números naturais fixados tais que:*

i) $P(a)$, $P(a+1)$, ..., $P(a+k)$ são válidas.

ii) Assumindo que $P(n)$, $P(n+1)$, ..., $P(n+k)$ são válidas para algum $n \geq a$, podemos concluir que $P(n+k+1)$ também é válida.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \geq a$."

Generalização da Primeira Formulação $\Longrightarrow$ Terceira Formulação.

Para demonstrar a implicação acima, vamos assumir a Formulação Generalizada e considerar uma propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, satisfazendo as propriedades $i)$ e $ii)$ da Terceira Formulação para números naturais fixados a e $k \geq 1$. Agora, consideramos a propriedade $Q(n)$: "$P(n)$, $P(n+1)$, ..., $P(n+k)$". Assim, $Q(n)$ é válida se e somente se $P(n)$, $P(n+1)$, ..., $P(n+k)$ são válidas. Temos, por $i)$ da Terceira Formulação que $Q(a)$ é válida já que $P(a)$, $P(a+1)$, ..., $P(a+k)$ *são válidas.* Assumindo $Q(n)$ válida para algum número natural n, $n \geq a$, temos que $P(n)$, $P(n+1)$, ..., $P(n+k)$ são válidas. Por $ii)$ da Terceira Formulação, obtemos que $P(n+k+1)$ também é válida. Assim, podemos concluir que $Q(n+1)$ é válida tendo em vista as validades de $P(n+1),\ldots,P(n+k+1)$. Pela Formulação Generalizada, $Q(n)$ é válida para todo número natural $n \geq a$ implicando a validade de $P(n)$ para todo número natural $n \geq a$. Desta forma provamos a Terceira Formulação a partir da Formulação Generalizada.

Terceira Formulação $\Longrightarrow$ Generalização da Primeira Formulação

Agora, assumimos a Terceira Formulação e consideramos uma propriedade $P(n)$, relativa ao número natural n, satisfazendo as propriedades $i)$ e $ii)$ da Formulação Generalizada para algum número natural a. Por i) e ii) da Formulação Generalizada, $P(a)$ e $P(a+1)$ são válidas já que, por i), $P(a)$ é válida e, por ii), sendo $P(a)$ válida então $P(a+1)$ é válida. Se $P(n)$ é válida para algum n, $n \geq a$, utilizando consecutivamente ii) da Formulação Generalizada, concluímos que $P(n+1)$ e $P(n+2)$ são válidas. Ou sejam, $P(a)$ e $P(a+1)$ são válidas e se $P(n)$ e $P(n+1)$ são válidas para algum n, $n \geq a$, então $P(n+2)$ é válida. Utilizando a Terceira Formulação para a e $k=1$, concluímos que $P(n)$ é válida para todo $n \geq a$, terminando a prova da Formulação Generalizada a partir da Terceira Formulação.

3 **OUTROS EXEMPLOS**

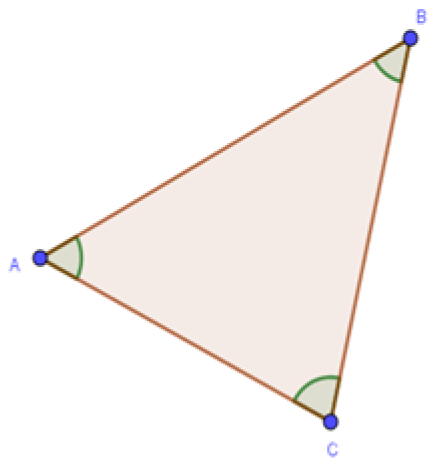
Este capítulo tem o objetivo de dar ao leitor uma visão mais clara de que o Princípio da Indução Finita é realmente uma ferramenta básica da Matemática, presente nas diversas áreas do conhecimento e usado para fundamentar propriedades de naturezas diversas relacionadas aos números naturais. Por isso, ele inclui exemplo geométrico, outros exemplos aritméticos, exemplo algébrico. Também inclui definições básicas que são fundamentadas no Princípio da Indução Finita.

No exemplo geométrico abaixo, também incluímos uma possível abordagem do raciocínio indutivo, sem o tratamento formal de acordo com a formulação do princípio da indução finita subjacente, a saber a Generalização da Primeira Formulação, para alunos do ensino fundamental. As figuras abaixo foram feitas pelo autor no aplicativo GeoGebra (https://www.geogebra.org/).

Exemplo 3.1. Demonstrar, por indução finita, o seguinte teorema da Geometria Plana: a soma das medidas dos ângulos de um polígono convexo de n lados ($n \geq 3$) *é igual a* $S_n = (n-2) \cdot 180°$.

1. Mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo (Figura 3) é $180°$.

Figura 3 - Triângulo



Fonte: o autor, 2021.

2. Desenhar um quadrilátero em uma folha de papel.

3. Cortar o quadrilátero ao longo dos lados para descartar a parte da folha de papel que não faz parte do quadrilátero (entendido como sendo formado pelos lados e a região limitada pelos lados).

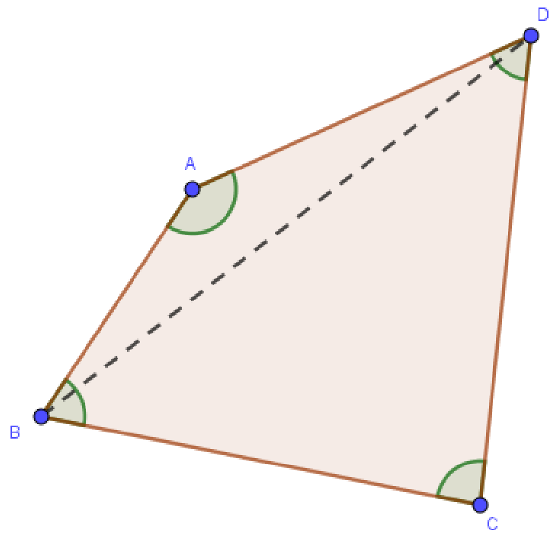
4. Marcar os ângulos internos do quadrilátero.

5. Ligar por um segmento de reta dois vértices alternados (tem um único outro vértice entre eles) quaisquer do quadrilátero.

6. Cortar o quadrilátero ao longo do segmento de reta traçado em 5.

7. Observar que o quadrilátero foi dividido em dois triângulos (Figura 4) e, juntando e separando os dois triângulos ao longo do corte, observar que a soma dos ângulos internos dos dois triângulos é igual à soma dos ângulos internos do quadrilátero.

Figura 4 - Quadrilátero



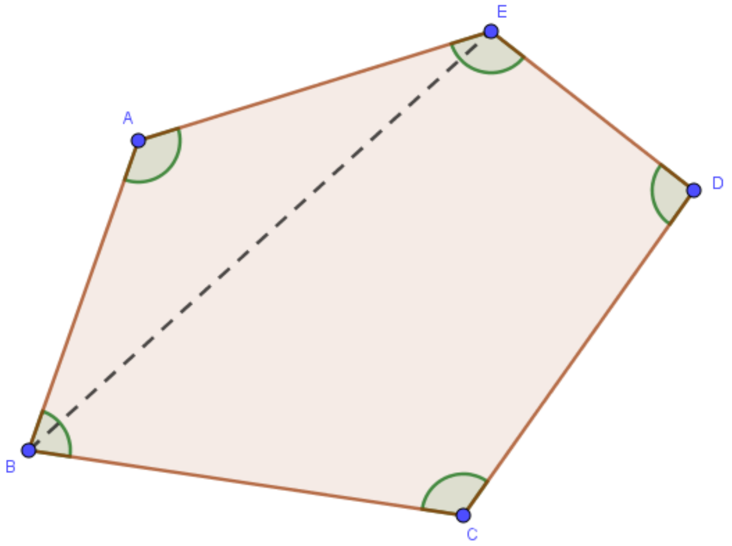
Fonte: o autor, 2001.

8. Concluir que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é $2 \cdot 180° = 360°$.

9. Repetir os passos de 2 a 6 com um pentágono.

10. Observar que o pentágono foi dividido em um quadrilátero e um triângulo (Figura 5) e, juntando e separando o triângulo do quadrilátero, observar que a soma dos ângulos internos dos dois polígonos é igual à soma dos ângulos internos do pentágono.

Figura 5 - Pentágono

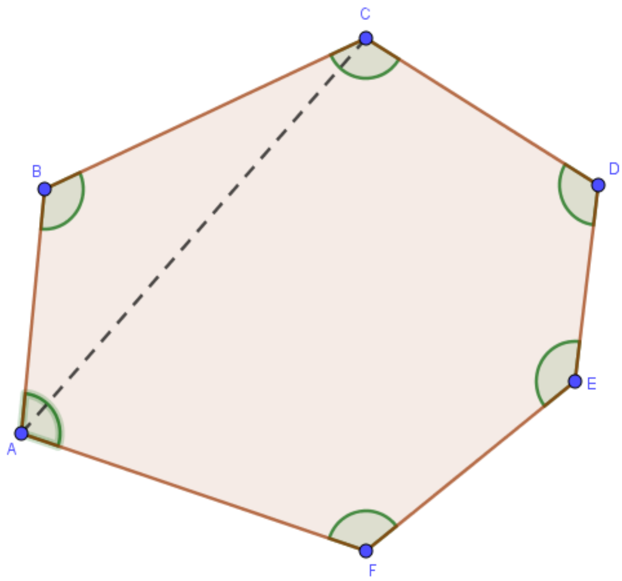


Fonte: o autor, 2021.

11. Concluir que a soma dos ângulos internos do pentágono é igual a $2 \cdot 180° + 180° = 3 \cdot 180°$.

12. Fazer processo análogo com o hexágono (Figura 6) e concluir que a soma dos ângulos internos do hexágono é $4 \cdot 180°$.

Figura 6 - Hexágono



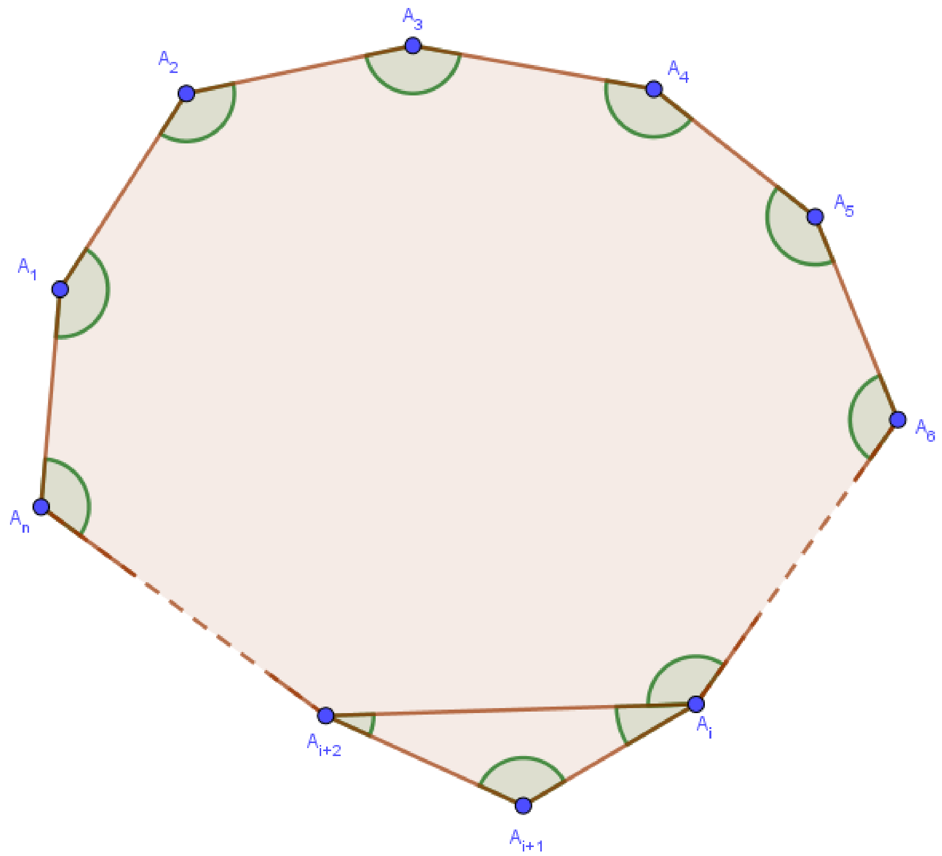
Fonte: o autor, 2021.

13. Conjeturar, com base nos exemplos acima, que a soma dos ângulos internos de um polígono (convexo) de n lados é $(n-2) \cdot 180°$ para algum n.

14. (Hipótese de Indução) Assumir que a soma S_n dos ângulos internos de algum polígono convexo com n lados é $S_n = (n-2) \cdot 180°$.

15. Considerar um polígono com $n+1$ lados e ligar com um segmento de reta dois vértices alternados quaisquer. Observar que com isso dividimos o polígono com $(n+1)$ lados em um polígono com n lados e um triângulo e que a soma dos ângulos internos do polígono de $(n+1)$ lados é igual a soma dos ângulos internos do polígono de n lados com a soma dos ângulos internos do triângulo.

Figura 7 – Polígono com $n+1$ lados



Fonte: o autor, 2021.

com $A_{i+n} = A_i$, $i = 1, \dots, n$

16. Concluir, utilizando o assumido em (14), que a soma dos ângulos internos de um polígono de $n+1$ lados é:

$$(n-2) \cdot 180° + 180° = (n-1) \cdot 180° = [(n+1)-2] \cdot 180° , \qquad (92)$$

ou seja, se assumimos que a fórmula vale para um polígono de n lados então podemos concluir que a fórmula vale para $(n+1)$ lados.

17. Finalizar, utilizando as tabelas 4 e 5, afirmando que a fórmula vale para qualquer número de lados n porque, como vimos que vale para $n = 3,4,5,6$, utilizando o passo (16), concluímos que vale para 7, (utilizando (16)) vale para 8, ..., vale para um polígono convexo com um número n qualquer de lados.

Tabela 4 – Modelo para o aluno preencher

Número de lados do polígono:	Soma dos ângulos internos do polígono:
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
...	
n	

Fonte: o autor, 2021.

Tabela 5 – Sugestão de como ser preenchida

Número de lados do polígono:	Soma dos ângulos internos do polígono:
3	180°
4	180°+180°=2.180°=360°
5	2.180°+180°=3.180°=540°
6	3.180°+180°=4.180°=720°
7	4.180°+180°=5.180°=900°
8	5.180°+180°=6.180°=1080°
9	6.180°+180°=7.180°=1260°
...	
n	(n-2).180°

Fonte: o autor, 2021.

Exemplo 3.2: Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

onde q é um número real fixo chamado razão.

a) *Mostre que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.*

b) *Se $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, mostre que $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$*,com $q \neq 1$.

a) Seja a_1 e q fixados, demonstraremos por indução sobre n.

i) $P(1)$ é verdadeira, pois $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1 \cdot q^0 = a_1$.

ii) Suponhamos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$, então:

$$a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{(n-1)+1} = a_1 \cdot q^{n+1-1} = a_1 \cdot q^{(n+1)-1} = a_{n+1}$$

Pelo Princípio da Indução Matemática, (a) foi provado para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Seja a_1 e q fixados, demonstraremos por indução sobre n que

i) $P(1)$ é verdadeira, pois $S_1 = a_1 \frac{q^1-1}{q-1} = a_1$

ii) Suponhamos que $S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\begin{aligned} S_n + a_{n+1} &= S_n + a_1 \cdot q^n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} + \frac{a_1 \cdot q^n \cdot (q-1)}{q-1} \\ &= \frac{a_1 \cdot (q^n - 1) + a_1 \cdot q^n \cdot (q-1)}{q-1} \\ &= \frac{a_1 \cdot q^n - a_1 + a_1 \cdot q^n \cdot q - a_1 \cdot q^n}{q-1} \\ &= \frac{a_1 \cdot q^n \cdot q - a_1}{q-1} \\ &= a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q-1} = S_{n+1} \end{aligned} \tag{93}$$

Pelo Princípio da Indução Matemática, (b) foi provado para todo $n \in \mathbb{N}$.

O Teorema Fundamental da Álgebra é que todo polinômio complexo tem pelo menos uma raiz complexa. O exemplo abaixo é uma consequência dele.

Exemplo 3.3: Todo polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_o$, *com* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\partial P(x) = n$,$n \geq 1$ *e com coeficientes complexos, contadas as multiplicidades, têm n raízes complexas.*

O símbolo $\partial P(x)$ representa o grau do polinômio $P(x)$. Como exemplos, temos o polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 6$, onde se trata de um polinômio com grau 2, ou seja, $\partial P(x) = 2$, e possui nesse caso, 2 raízes reais distintas, que são o 2 e o 3. E, também temos o polinômio $P(x) = x^2 - 2x + 1$, $\partial P(x) = 2$, possuindo raiz 1 com multiplicidade 2.

Demonstraremos por indução sobre n, onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_o$, com $n \in \mathbb{N}$ e $\partial P(x) = n, n \geq 1$. Para tal, consideremos a seguinte propriedade $L(n)$: "um polinômio

$P(x)$, $\partial P(x) = n$, tem n raízes complexas, contadas as multiplicidades, para todo número natural n, $n \geq 1$".

i) $L(1)$ é verdadeira, pois se $\partial P(x) = 1$, então $P(x) = a_1 x + a_0$. Logo, $P(x) = a_1 x^1 + a_0 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a_0}{a_1}$.

Assim, o polinômio de grau 1 tem 1 raiz complexa. Agora, em ii), suponhamos que $L(n)$ é válida, para algum n, $n \geq 1$, ou seja, todo polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_o$ e $\partial P(x) = n$, com coeficientes complexos, tenha n raízes complexas contadas com as multiplicidades.

Consideremos, agora, um polinômio $Q(x)$ com coeficientes complexos e grau $n+1$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $Q(x)$ tem pelo menos uma raiz complexa α. Por uma propriedade bem conhecida dos polinômios, $Q(x)$ é divisível por $x - \alpha$. Assim, podemos escrever $Q(x) = R(x) \cdot (x - \alpha)$ onde $R(x)$ é um polinômio com coeficientes complexos e grau n. Observe que β é raiz de $Q(x)$ se, e somente se, $\beta = \alpha$ ou β é raiz de $R(x)$. Pela hipótese de indução, $R(x)$ tem n raízes contadas as multiplicidades. Assim, $Q(x)$ tem $n+1$ raízes contadas as multiplicidades, a saber as n de $R(x)$ e α. Logo, a propriedade vale para polinômios de grau $n+1$ e pelo Princípio da Indução Finita (Primeira Formulação) provamos a afirmação no Exemplo 3.3.

Nos exemplos abaixo, mostramos como a indução finita pode ser usada para fundamentar definições por recorrência.

Exemplo 3.4: Definição do fatorial de um número natural n.

Dado um número natural n, designemos por $n!$ o fatorial de um número natural n dado abaixo:

Para $n = 0$, colocamos $0! = 1$ e para um número natural n, $n \geq 1$, colocamos $n! = n \cdot [(n-1)!]$. Com isso, temos que $n!$ está bem definido para todo número natural. Como exemplos,

$$1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1; \quad (94)$$

$$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1; \quad (95)$$

$$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1; \quad (96)$$

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1; \quad (97)$$

ou seja, grosseiramente falando, $n!$ é o produto dos números naturais de 1 a n para $n \geq 2$.

Exemplo 3.5: Definição da potência n-ésima de um número não nulo a

Dado um número não nulo a, designemos a n-ésima potência de a para um número natural n dada abaixo:

Para $n = 0$, colocamos $a^0 = 1$ e para um número natural n, $n \geq 1$, colocamos $a^n = a^{n-1} \cdot a$. Com isso, temos que a^n está bem definido para todo número natural. Como exemplos,

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a; \tag{98}$$

$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a; \tag{99}$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a; \tag{100}$$

$$a^4 = a^3 \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a; \tag{101}$$

ou seja, para $n \geq 2$, a^n é o produto de n fatores iguais a.

Dado um número complexo não nulo $z = a + ib$, com a, b números reais e $i = \sqrt{-1}$, podemos escrever $z = \rho \cdot (cos\, \theta + i \cdot sen\, \theta)$, onde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo de z e θ é uma determinação do ângulo que o vetor de coordenadas (a, b) forma com o semieixo positivo dos x medido no sentido anti-horário. A expressão de z em termos de ρ e θ é chamada de “a forma trigonométrica do número complexo z”.

Exemplo 3.6: (Fórmula de Moivre) Dados um número complexo z com forma trigonométrica $z = \rho \cdot\ (cos\, \theta + i \cdot sen\, \theta)$ e um número natural n, vale

$$z^n = \rho^n \cdot (cos\, (n\theta) + i \cdot sen\, (n\theta)) \tag{102}$$

Demonstraremos por indução em n:

i) $P(1)$ é verdadeira, pois $z^1 = z = \rho^1 \cdot (cos(1 \cdot \theta) + i.sen(1 \cdot \theta)) = \rho \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)$.

ii) Suponhamos que $z^n = \rho^n \cdot (cos(n\theta) + i.sen(n\theta))$ seja verdadeira, para algum $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, então:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = \rho^n \cdot \big(cos(n\theta) + i.sen(n\theta)\big) \cdot \rho \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta) \\ &= \rho^n \cdot \rho \cdot \{[cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)].(cos\theta + i \cdot sen\theta)\} \\ &= \rho^n \cdot \rho \cdot \big(cos(n\theta) \cdot (cos\theta + i.sen\theta) + i \cdot sen(n\theta) \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)\big) \\ &= \rho^n \cdot \rho \cdot (cos(n\theta) \cdot (cos\theta + i.sen\theta) + i^2 \cdot sen(n\theta) \cdot sen\theta + i \cdot sen(n\theta) \\ &\qquad \cdot cos\theta) \end{aligned} \tag{103}$$

$$= \rho^n \cdot \rho \cdot (cos(n\theta) \cdot cos\theta - sen(n\theta) \cdot sen\theta + i \cdot sen(n\theta) \cdot cos\theta + i \cdot cos(n\theta) \cdot sen\theta)$$

$$= \rho^n \cdot \rho \cdot \big(cos(n\theta + \theta) + i \cdot sen(n\theta + \theta)\big)$$

$$= \rho^{n+1} \cdot \Big(\cos\big((n+1)\theta\big) + i \cdot sen\big((n+1) \cdot \theta\big)\Big).$$

Pelo Princípio da Indução Matemática, foi provado para todo $n \in \mathbb{N}$.

Acima, utilizamos as seguintes fórmulas trigonométricas:

$$\cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta, \tag{104}$$

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + sen\beta \cdot cos\alpha. \tag{105}$$

Exemplo 3.7: Mostre que $a_n = 7^n - 1$ *é um número divisível por 6, para todo número natural* $n \geq 0$.

Sejam $a_n = 7^n - 1$ e $P(n)$ a proposição "a_n é um número divisível por 6, $\forall n \geq 0$". Para o caso base, teremos $n = 0$, no qual $a_n = 7^0 - 1 = 0$ é divisível por 6. Suponhamos, por indução, que $P(n)$ seja válida para algum $n \geq 0$. Devemos provar que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja, a_{n+1} é um número divisível por 6. De fato, como:

$$a_{n+1} = 7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7 - 7 + 6 = 7 \cdot (7^n - 1) + 6 = 7 \cdot a_n + 6 \tag{106}$$

e a_n é um número divisível por 6 pela hipótese de indução e 6 também é divisível por 6, então a_{n+1} também é divisível por 6 e, portanto, $P(n+1)$ verdadeira. Logo, pelo Princípio da Indução, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 0$.

Exemplo 3.8: Seja a sequência $a_1 = 2, a_2 = 3$ *e* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$ *para* $n \geq 3$. *Prove, por indução em* n, *que* $a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^n$, *para todo* $n \geq 1$.

Esta é a sequência de Fibonacci a partir de $n = 3$.

Para $n = 1$, temos que $a_1 = 2 > \frac{8}{5}$ e, para $n = 2$, temos que $a_2 = 3 = \frac{75}{25} > \frac{64}{25} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$. Suponhamos $P(n)$ e $P(n+1)$ válidas para algum $n \geq 1$, devemos provar a validade de $P(n+2)$. De fato, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^{n+1} + \left(\frac{8}{5}\right)^n$, como $\left(\frac{8}{5}\right)^{n+1} + \left(\frac{8}{5}\right)^n = \left(\frac{8}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{8}{5} + 1\right) = \left(\frac{8}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{13}{5}\right)$ e $\frac{13}{5} = 2{,}6 > \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 2{,}56$, teremos

$$\left(\frac{8}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{13}{5}\right) > \left(\frac{8}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2. \tag{107}$$

Como $\left(\frac{8}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^{n+2}$, obtemos

$$a_{n+2} > \left(\frac{8}{5}\right)^{n+2}. \tag{108}$$

Assim $P(n + 2)$ é verdadeira e pelo Princípio da Indução Finita $P(n)$: $a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^n$ é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Exemplo 3.9: Seja a_i , o termo geral da sequência de Fibonacci. Estabeleça uma fórmula para a soma $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ para n ≥ 0. Em seguida faça a demonstração dessa fórmula.

Note que os primeiros termos da sequência são:

$$S_0 = 0 = 1 - 1 = a_2 - 1 \tag{109}$$

$$S_1 = 1 = 2 - 1 = a_3 - 1 \tag{110}$$

$$S_2 = 2 = 3 - 1 = a_4 - 1 \tag{111}$$

$$S_3 = 4 = 3 - 1 = a_5 - 1 \tag{112}$$

$$S_4 = 7 = 8 - 1 = a_6 - 1 \tag{113}$$

$$S_5 = 12 = 13 - 1 = a_7 - 1 \tag{114}$$

o que sugere que $S_n = a_{n+2} - 1$, para todo $n \geq 0$. Demonstraremos que $S_n = a_{n+2} - 1$, onde a propriedade $P(n)$ relativa ao número natural n é: "se n ≥ 0, então $S_n = a_{n+2} - 1$".

No caso base i), para $a = 0$, já vimos que S_n é verdadeira para n de 0 a 5. Como hipótese de indução, suponhamos que a propriedade $P(n)$ é válida para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, devemos mostrar que $P(n + 1)$ é verdadeira. De fato,

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \tag{115}$$

Como, por hipótese, $S_n = a_{n+2} - 1$, temos:

$$S_{n+1} = a_{n+1} + a_{n+2} - 1 = a_{n+3} - 1 \tag{116}$$

o que mostra que a fórmula é válida para $n + 1$ e consequentemente $P(n + 1)$ é válida.

Então pelo Princípio da Indução Matemática, $S_n = a_{n+2} - 1$, para todo $n \geq 0$.

Tarefa 3.1: Seja a_n , o termo geral da sequência de Fibonacci. Mostre que para $n \geq 0$, $a_n^2 + a_{n+1}^2$ é um número que pertence a sequência de Fibonacci.

Exemplo 3.10: Seja a_n uma sequência definida por $a_0 = 3$ e $a_{n+1} = \frac{\sum_{m=0}^{n} a_m}{n+3}$, para cada natural n,$n \geq 1$, temos $a_n = 1$.

Note que os primeiros termos da sequência são:

$$a_1 = \frac{3}{3} = 1; \tag{117}$$

$$a_2 = \frac{3+1}{4} = 1; \tag{118}$$

$$a_3 = \frac{3+1+1}{5} = 1; \tag{119}$$

o que sugere que $a_n = 1$, para todo n ≥ 1, com $a_0 = 3$. No caso base i), com $a_1 = 1$ a sentença é verdadeira. Como hipótese de indução, suponhamos que, para algum n, $n \geq 1$, $P(m)$ seja verdadeira para todo m tal que $1 \leq m \leq n$. Então,

$$a_{n+1} = \frac{\sum_{m=0}^{n} a_m}{n+3} = \frac{a_0 + n \cdot 1}{n+3} = \frac{3 + n \cdot 1}{n+3} = 1, \tag{120}$$

o que mostra que a fórmula vale para $n + 1$. Então pelo Princípio da Indução Forte, $a_n = 1$, para todo $n \geq 1$.

No exemplo abaixo, mostramos uma desigualdade clássica, muito útil para fazer estimativas de outras funções.

Exemplo 3.11: (Desigualdade de Bernouli) Mostre que $(1 + a)^n \geq 1 + na$, $\forall n \geq 1$ *e* $\forall a \in \mathbb{R}$ *com* $a > -1$.

Seja $P(n)$ a proposição: "se $a > -1$, então $(1 + a)^n \geq 1 + na$, $\forall n \in \mathbb{N}$". Fixado a, para i), no caso base temos $n = 1$, $P(1)$ é verdadeira, pois $1 + a \geq 1 + a$. Agora, suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, teremos que mostrar que $P(n)$ é verdadeira para $n + 1$. Ou seja, $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot a$.

Como, pela hipótese de indução $(1 + a)^n \geq 1 + na$, multipliquemos os dois membros por $1 + a$, que é sempre positivo pois $a > -1$, teremos:

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} &\geq (1 + na) \cdot (1 + a) \\ (1 + a)^{n+1} &\geq 1 + (n + 1) \cdot a + na^2 \\ (1 + a)^{n+1} &\geq 1 + (n + 1) \cdot a. \end{aligned} \tag{121}$$

Assim, pelo Princípio da Indução Finita, $(1 + a)^n \geq 1 + na$, $\forall n \geq 1$ e $\forall a \in \mathbb{R}$ com $a > -1$.

Fixado um número real positivo a, $a \neq 1$, uma importante função do Cálculo Diferencial e Integral é a função exponencial de base a, definida por

$$f(x) = a^x, x \geq 0. \tag{122}$$

Para exemplificar o uso da Desigualdade de Bernoulli para estimar funções, mostramos a seguir que, quando $a > 1$, a função exponencial de base a assume valores arbitrariamente grandes quando x se torna arbitrariamente grande.

Consideremos $a > 1$. Neste caso, é uma propriedade bem conhecida da função exponencial é que ela é crescente, ou seja, $f(x) > f(y)$ quando $x > y$. Podemos escrever $a = 1 + b$ com $b > 0$. Dado qualquer número real positivo M, tão grande quanto se queira, tomemos um número natural n_o tal que $n_o > \frac{M-1}{b}$. Se $x > n_o$, então

$$a^x > a^{n_o} = (1+b)^{n_o} \geq 1 + n_o \cdot b > 1 + \left(\frac{M-1}{b}\right) \cdot b = M. \quad (123)$$

Ou seja, $a^x > M$ para $x > n_o$. Acima, usamos a Desigualdade de Bernoulli $(1+b)^{n_o} \geq 1 + n_o \cdot b$ já que $b > 0$.

CONCLUSÃO

Este trabalho, tendo como proposta apresentar um material que possibilite o uso do Princípio da Indução Finita para estabelecer vários conhecimentos estabelecidos nas diversas séries na Educação Básica, acreditamos ter uma abordagem e uma linguagem adequadas para tal finalidade com a ressalva de que o Capítulo 3, no qual estabelecemos as equivalências das várias formulações, é essencialmente para os professores.

Abordagens como no Exemplo 3.1 do Capítulo 3 devem ser incentivadas nas correspondentes séries do ensino fundamental porque, apesar de seu caráter informal e recreativo, apresentam ao aluno a essência do Princípio da Indução Finita e podem ser pensadas para várias outras propriedades relativas aos números naturais aprendidas no referido segmento educacional, inclusive definições por recorrência. Já a abordagem mais formal acreditamos ser mais adequada nas últimas séries do ensino fundamental, apresentando algumas formulações, e nas séries do ensino médio.

O Princípio da Indução Finita, por ser uma ferramenta básica no aprendizado da Matemática e por estabelecer algo que pertence ao nosso senso comum, não deve ficar fora da formação de um aluno da educação básica e muito menos não ser do domínio daqueles que ensinam na mesma.

Acreditamos que esta dissertação possa auxiliar professores de matemática e estudantes da Educação Básica no tratamento ou aprendizado do assunto, contribuindo para o resgate do ensino do tema e para uma compreensão mais sólida do método da Matemática.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. Trad. Elza F. Gomide. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher,2003.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, *Orientações Curriculares Para o Ensino Médio*, v. 2, Brasília: MEC, 2006.

________, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC, 1998.

________, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999.

CARVALHO, Paulo. C. P.; MORGADO, Augusto C. *Matemática Discreta*. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

CARVALHO, Paulo C. P.; LIMA, Elon L.; MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo. *A Matemática do Ensino Médio* Vol. 1, 2, 3 e 4. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016 (Coleção Professor da Matemática).

COUTINHO, S. C. *Números Inteiros e Criptografia RSA*.. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

CRILLY, Tony. 50 Ideias de Matemática que Você Precisa Conhecer. 1.ed. SãoPaulo: Planeta, 2017.

DEGENSZAJN, David; DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; PÉRIGO, Roberto. *Matemática volume único*. 3. ed. São Paulo: Atual, 2005.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016 (Coleção PROFMAT).

HEFEZ, Abramo. Artigo: *Indução Matemática* – Obmep, 2009. (http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296654.o). Acesso em 13/07/ 2020.

DOMINGUES, Hygino H. *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual, 1991.

DOMINGUES, Hygino H., IEZZI, Gelson. *Álgebra Moderna*. São Paulo: Atual, 2003

IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004.

LACERDA, José Carlos Admo. *Praticando Aritmética*. 7. ed. Rio de Janeiro: Xyz, 2014.

LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise v.1*. 12.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008 (Projeto Euclides).

LIMA, Elon Lages. *O Princípio da Indução.* **Eureka!** - A Revista da Olimpíada Brasileira de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, n. 3, p. 26-43, 1998.

LOPES, Luís. *Manual de Indução Matemática*. Rio de Janeiro: Interciência, 1998.

MONTEIRO, Luis Henrique Jacy. *Elementos da Álgebra*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1969.

PEREIRA, Valberto Rômulo Feitosa. *Aplicações de Indução Matemática*. Curitiba: CRV,2018.

SCHEINERMAN, Edward R. Trad. Alfredo A. de Farias. *Matemática Discreta*: uma introdução. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

SOMINSKI,I.S. Trad. Gelson Iezzi. *Método da Indução Matemática*. São Paulo. Atual,1996.

STEFFENON, Rogério Ricardo. Artigo: *BELOS PROBLEMAS INDUÇÃO E PRINCÍPIO DAS GAVETAS DE DIRICHLET*. João Pessoa - V Bienal da SBM, 2017. (http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/BELOS%20PROBLEMAS.pdf). Acesso em 06/08/2020.

STEWART, Ian. *Almanaque das Curiosidades Matemáticas*. Rio de Janeiro : Zahar, 2009.

VERMA, Surendra. *Ideias Geniais na Matemática*. 1ª Ed. São Paulo: Gutenberg, 2013.