UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO - UFTM

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Um estudo sobre Proporcionalidade

Rhaony Alvarenga Felipe

Uberaba - Minas Gerais
Abril de 2021

Um estudo sobre Proporcionalidade

Rhaony Alvarenga Felipe

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFTM como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza

Uberaba - Minas Gerais
Abril de 2021

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Felipe, Rhaony Alvarenga
F353e Um estudo sobre proporcionalidade / Rhaony Alvarenga Felipe. -- 2021.
73 p. : il., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2021
Orientador: Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza

1. Matemática. 2. Razão e proporção. 3. Proporcionalidade. 4. Proporcionalidade inversa. 5. Proporcionalidade direta. I. Souza, Bruno Nunes de. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 51-021.263

Leila Aparecida Anastácio - CRB-6/2513

RHAONY ALVARENGA FELIPE

UM ESTUDO SOBRE PROPORCIONALIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática, área de concentração Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Uberaba, 23 de abril de 2021.

Banca Examinadora:

Dr. Bruno Nunes de Souza – Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Dra. Deisemara Ferreira
Universidade Federal de São Carlos

fundamento no art. 6º do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 59, de 26 de abril de 2021.

Documento assinado eletronicamente por **RAFAEL RODRIGO OTTOBONI**, **Professor do Magistério Superior**, em 29/04/2021, às 21:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 59, de 26 de abril de 2021.

Documento assinado eletronicamente por **Deisemara Ferreira**, **Usuário Externo**, em 03/05/2021, às 13:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015 e no art. 34 da Portaria Reitoria/UFTM nº 59, de 26 de abril de 2021.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.uftm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0520808** e o código CRC **58360509**.

Aos meus pais, Valteir e Rose.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Valteir e Rosinei por todo suporte e amor de sempre, poderia dizer que esse título também pertence à vocês.

Aos professores que tive ao longo da vida, sejam eles do ensino fundamental, médio, graduação ou mestrado. Agradeço todos vocês por contribuírem de maneira relevante à minha formação.

A todos meus amigos de sala, por tantos momentos estudando juntos, sobretudo, à você Patrícia.

Agradeço ao Professor Doutor Rafael Rodrigo Ottoboni e à Professora Doutora Deisemara Ferreira que fizeram parte da banca examinadora. Obrigado por todas as preciosas sugestões.

Em especial, ao meu orientador Professor Doutor Bruno Nunes de Souza. Muito obrigado pelos inúmeros ensinamentos e principalmente pelo apoio, preocupação, respeito e paciência.

Por fim, muito obrigado Karina, sem você esse trabalho simplesmente não existiria.

Para Tales... a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos.
Aristóteles

Resumo

O presente trabalho teve o intuito de tratar do tema proporcionalidade, mostrando sua importância para a matemática e situações do cotidiano. Para tanto, abordamos problemas ligados à razão e proporção e os solucionamos de diversas maneiras, buscando na maioria das vezes soluções que não dependessem de algoritmos prontos. O atual trabalho se propôs, mesmo que brevemente, a discutir a relevância do aprendizado da proporcionalidade pelos estudantes tratando de temas como o raciocínio proporcional. Trouxemos também ao texto capítulos sobre proporcionalidade inversa e direta e a relação com os gráficos que representam essas situações.

Palavras-chave: Proporcionalidade, razão, raciocínio proporcional, proporcionalidade inversa, proporcionalidade direta.

Abstract

The purpose of the present work on the subject proportionality, shows importance for math and everyday situations. Problems related to ration and proportion are solved in several ways, mostly searched without being dependent on algorithms. The present work briefly discusses, the relevance and importance of teaching students proportionality and proportional reasoning in school. We also introduce a chapter about direct and inverse proportionality and review graphics that relate to the text.

Keywords: proportionality. ration. proportional reasoning. inverse proportionality. direct proportionality.

Sumário

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

1 Introdução

Ao longo dos anos de prática docente, lecionando matemática, notamos que muitos alunos possuem dificuldade com conteúdos matemáticos, mesmo quando tratamos de alguns conceitos básicos que são estudados durante o ensino fundamental.

Reconhemos a partir da nossa vivência em sala de aula que fatores como: falta de tempo hábil, extensão do currículo, salas com elevado número de alunos, em alguns casos, altos índices de evasão e mesmo a deficiência na formação de alguns de nós, professores, prejudicam o processo de ensino-aprendizagem.

Para afirmar essa dificuldade, podemos citar um dos maiores indicativos de letramento matemático que são os resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), um estudo comparativo internacional que avalia o domínio dos alunos de várias regiões em três grandes frentes - Leitura, Matemática e Ciência.

> O Brasil participa do PISA desde sua 1ª edição, em 2000, sendo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) o órgão responsável pelo planejamento e operacionalização dessa avaliação no país. (BRASIL, 2019, p.13).

Nesse documento, podemos ver que o letramento matemático brasileiro, na média, não é bom, e sob perspectiva internacional é ruim. Segundo Brasil (2019, p.105), "A média de proficiência dos jovens brasileiros em Matemática no PISA 2018 foi de 384 pontos, 108 pontos abaixo da média dos estudantes dos países da OCDE (492)".

Analisando os resultados de matemática do Pisa 2018, quando comparado somente com os países participantes da América do Sul, o Brasil é pior colocado (ao lado da Argentina).

Observação: De acordo com Brasil (2019), no ano de 2018, ao todo, 79 países participaram do Pisa, dos quais, 37 são da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), uma estrutura formada por países dedicados a discutir políticas em prol do desenvolvimento econômico.

Sobre a matriz de conteúdos matemáticos cobrados nos exames, o PISA avalia 4 temas (variações e relações; espaço e forma; quantidade; incerteza e dados). Dentre esses temas, destacamos aqui Variações e Relações, que é caracterizada da seguinte maneira:

> Envolve compreender os diversos tipos de variação que podem ocorrer num objeto matemático (estando este isolado ou fazendo parte de um sistema em que os objetos se influenciam) e reconhecer quando essas variações podem ocorrer, a fim de utilizar modelos matemáticos que permitam descrever e prever essas variações. Funções e álgebra, incluindo expressões algébricas, equações e inequações, representação de dados em gráficos ou em tabelas são fundamentais para a descrição, modelagem e interpretação de variações e relações. (BRASIL, 2019, p.101).

Destacamos o tema Variações e Relações, pois, nele está inserido o conceito de proporcionalidade, que possui relevância no exame do Pisa e em avaliações a nível nacional no geral, além de forte presença no cotidiano das pessoas. Acreditamos que a proporcionalidade seja um dos conceitos mais importantes do currículo matemático e que se encaixa no que dizemos anteriormente, um conteúdo matemático "básico" que os alunos possuem dificuldade.

1.1 Objetivo

Nesse contexto, o objetivo da dissertação é apresentar um estudo sobre proporcionalidade de modo que possamos produzir um texto a ser utilizado por professores na análise e discussão do tema proporcionalidade em sala de aula.

Buscamos abordar exemplos de situações problemas envolvendo proporcionalidade, na tentativa de apresentar diversas maneiras de resoluções, modelando e reconhecendo as situações proporcionais dentro e fora do âmbito escolar.

Queremos que esse estudo que possa estimular debates sobre o conceito e desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Também gostaríamos que ao final do texto, todos possam notar a relevância das proporções para a matemática e outras ciências, bem como a presença desse conceito nas situações do cotidiano.

Para tanto, no capítulo subsequente a introdução traremos, mesmo que brevemente, uma contextualização histórica sobre o tema, com exemplos de como civilizações antigas tratavam a proporcionalidade.

No capítulo 3, abordaremos alguns aspectos sobre proporcionalidade, trazendo alguns apontamentos e reflexões sobre o seu papel dentro do currículo de matemática e sua aprendizagem por parte dos alunos.

No Capítulo 4 demonstraremos algumas definições e teoremas sobre os conceitos: proporcionalidade e função linear, além das suas relações entre esses dois temas.

Já no capítulo 5 apresentamos algumas situações proporcionais e exemplos de soluções, na tentativa de mostrar como os alunos podem encontrar mais de uma maneira de resolver os problemas de proporcionalidade, sem se tornarem reféns de algortimos e fórmulas.

O capítulo 6 trará um olhar mais detalhado sobre o conceito de proporcionalidade inversa e a relação com o gráfico de sua função.

Por fim, concluímos o trabalho com algumas colocações e expectativas sobre o texto.

2 Contexto histórico

Para Lima *et al.* (2000, p.92) “A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios”.

Escolhemos essa frase para a iniciar nossa discussão sobre o tema porque acreditamos que ela represente bem alguns dos sentimentos que nos motivaram a escrever esse texto. Tratar de um tema matemático como a proporcionalidade, recorrente em inúmeras situações que nos cercam sempre nos pareceu entusiasmante.

Podemos admitir que pensar e resolver situações proporcionais sempre fizeram parte das tarefas de nós humanos, um dos exemplos mais célebres e antigos é o Papiro de Rhind.

2.1 Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes

Um dos documentos conhecidos mais importantes e antigos de toda matemática é o papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes. O documento que hoje se encontra quase que por completo no British Museum em Londres, e com algumas partes no Brooklyn Musuem nos Estados Unidos, foi descoberto pelo arqueólogo escocês Alexander Henry Rhind em 1858 em uma de suas viagens ao Egito.

> É conhecido como papiro de Rhind ou de Ahmes, como homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio de cerca de 2000 a 1800 a.C. (BOYER, 2012, p.30).

Esse antigo texto reune 85 problemas matemáticos das mais diversas áreas como: geometria, economia básica, agropecuária, proporcionalidade, aritmética, frações e muitos outros, todos temas que eram relevantes para a solução de problemas do cotidiano da sociedade egípcia daquela época. Segundo Boyer (2012, p.32) “Muitos dos problemas de Ahmes mostram conhecimento de manipulações equivalentes à regra de três”.

Exemplos disso são os problemas 72 e 63 do Papiro de Rhind, que estão presentes no livro *História da Matemática* de Carl Boyer.

Problema 72: Qual o número de pães de “força” 45 que são equivalentes a 100 pães de “força” 10?

Problema 63: Como repartir 700 pães entre 4 pessoas, sendo que as quantidades que devem receber estão na proporcão prolongada 2/3 : 1/2 : 1/3 : 1/4.

Podemos verificar que o problema 72 se trata de uma partilha proporcional de pães por um número de homens e o problemas 63 é um caso de proporcionalidade inversa, ambos, portanto, são exemplos claros da presença da proporcionalidade na matemática egípcia antiga.

Outros problemas que merecem nossa atenção especial, são os problemas de 24 a 27 do Papiro, que tratam de um certo valor desconhecido, chamado de "aha" envolvendo situações de natureza proporcional cujas resoluções eram feitas através do que matemáticos que estudam esse período chamam de *Método da Falsa Posição*.

O Método da Falsa Posição muito nos interessa, já que basicamente consiste em uma estratégia (diferente da utilizada em livros atuais) para soluções dos problemas de natureza proporcional usados no Antigo Egito. Acreditamos que seja válido entendermos tal método, antes porém, devemos saber como essa civilização realizava cálculos de multiplicação.

O processo de multiplicação no Antigo Egito funcionava basicamente como um algoritmo de duplicações sucessivas dos números. Por exemplo, para multiplicar 6×3, o processo seria:

$$\begin{array}{ccc} 1 & - & 3 \\ 2 & - & 6 \\ 4 & - & 12 \\ 6 & - & 24 \end{array}$$

Notem que a coluna da esquerda indica quantas vezes multiplicamos o número 3 e a coluna da esquerda é o produto final das duplicações realizadas. Vejamos que escolhemos o menor fator (no caso o 3) para iniciar o processo de multiplicação e então, o duplicamos algumas vezes até alcançarmos o produto desejado: $6 \times 3 = 24$. Mas como esse processo funcionaria para uma multiplicação entre números maiores ou mesmo para não múltiplos? Como seria multiplicar 18 x 31, por exemplo ?

$$\begin{array}{ccc} 1 & - & 31 \\ 2 & - & 62 \\ 4 & - & 124 \\ 8 & - & 248 \\ 16 & - & 496 \\ 32 & - & 992 \end{array}$$

Agora já sabemos que 18 x 31 é um número maior que 496 mas menor que 992. Mas, notem que $16 + 2 = 18$, que é um dos fatores da multiplicação a ser realizada. Portanto, devemos somar os números da coluna da direita, referentes aos valores 16 e 2. Assim:

$$62 + 496 = 558.$$

Justamente o resultado do produto desejado, $18 \times 31 = 558$.

Agora que temos noção da ideia de multiplicação que perdurava naquele período, podemos analisar o problema 24 do Papiro de Rhind e entender o Método da Falsa Posição utilizado pelos egípcios para resolver situações pareciadas.

Problema 24: Sabendo que aha mais um sétimo de aha resulta em 19, encontre o valor de aha.

Devemos estar cientes que "aha" seria a incógnita do problema, atualmente, chamando "aha" de x, poderíamos interpretar tal situação da seguinte maneira:

$$x + \frac{1}{7}\,x = 19. \tag{2.1}$$

De maneira mais moderna, o problema 24 do Papiro de Ahmes pode ser solucionado resolvendo a equação 2.1. Para tal, é sabido que devemos isolar o valor de x para obter o resultado final, chegando em:

$$x = \frac{19 \ \times \ 7}{8}.$$

De modo resumido, podemos dizer que há duas operações matemáticas necessárias para resolver o problema, que são: 19×7 e $(19 \times 7) \div 8$.

No Método da Falsa Posição utilizado no Antigo Egito, os escribas também realizavam essas duas operações operações essenciais para conseguir as respostas, mas de uma maneira bastante diferente.

A priori, a estratégia era considerar um número (supostamente falso) para iniciar o método. O valor 7 é o número escolhido por Ahmes já que praticamente "elimina" a necessidade de trabalhar com a fração 1/7 de "aha". Pois:

$$7 + \frac{1}{7}\,7 = 8.$$

Então, agora sem a parte fracionária presente no enunciado do problema, o egípcio antigo começaria a trabalhar com o número 8, realizando multiplicações.

$$1 \quad - \quad 8$$

$$2 \quad - \quad 16$$

$$4 \quad - \quad 32$$

O escriba para em duas vezes, pois 4×8 excede o valor procurado 19, então usando as ideias de multiplicação e noções matemática da época, ele percebe que:

$$2 \quad - \quad 16$$

$$1 \quad - \quad 8$$

$$\frac{1}{2} \quad - \quad 4$$

$$\frac{1}{4} \quad - \quad 2$$

$$\frac{1}{8} \quad - \quad 1$$

Pela ideia de multiplicação da época, como $19 = 16 + 2 + 1$, agora ele somaria os valores respectivos a 16, 2 e 1 do lado esquerdo da coluna, ficando com:

$$\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right).$$

Ahmes agora saberia que precisa trabalhar com esse número e ir em busca do valor 7 através do processo de multiplicação. Tentando resignificar para a maneira como resolvemos esse tipo de problema atualmente, o escriba até agora teria feito o equivalente a $19 \div 8$, e agora passaria a buscar a multiplicação desse valor por 7 para completar as operações que sabemos ser essenciais encontrar o valor 19.

Portanto, ele utilizaria $\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$ como fator para encontrar o produto 7. Como já sabemos, o processo de multiplicação mostraria que:

$$1 \quad - \quad 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$2 \quad - \quad 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$4 \quad - \quad 9 + \frac{1}{2}$$

Reparem agora que $1 + 2 + 4 = 7$, isso significa que a essa altura o egípico antigo teria encontrado o equivalente à $(19 \times 8) \div 7$, ou seja, bastaria agora somar os valores da coluna da direita para encontrar a solução do problema. Finalmente, realizando a soma Ahmes concluiria que:

$$aha = 16 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

E assim, está resolvido o problema 24 do Papiro de Rhind pelo Método da Falsa Posição.

Notem que se terminarmos a soma de frações referentes ao número "aha" encontrado, ficaríamos com:

$$16 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{133}{8}.$$

Justamente o resultado da equação 2.1.

Agora que conhecemos o método, podemos identificar que mesmo se tratando de um processo diferente do tradicionalmente utilizado atualmente, é evidente a necessidade que o escriba possuía de compreender ideias intimamente relacionadas com o conceito de proporcionalidade.

> É importante notarmos que o método da falsa posição adotava, portanto, duas linhas mestras. Em primeiro lugar, a adoção inicial de uma falsa posição quanto ao valor da incógnita, adoção esta baseada na conveniência da eliminação das frações. Em segundo lugar, a correção do valor atribuído inicialmente à incógnita por uma proporção entre os valores resultantes das somas (o correto e o obtido com a posição inicial) e os valores das incógnitas (o correto e a própria falsa posição inicial). (C.F. d. MEDEIROS, A. MEDEIROS, 2004, p.548).

Podemos perceber que a existência do Método da Falsa Posição dependeu da noção e dos conhecimentos sobre proporcionalidade, o que é um indicativo da relevância dessa ideia dentro da matemática. Trateremos de situações parecidas com o problema 24 do Papiro de Rhind nos próximos capítulos desse trabalho e as resolveremos utilizando ideias matemáticas mais modernas do que o Método da Falsa Posição.

Observação: Para construir a resolução do problema 24 que apresentamos, utilizamos como referência principal o excelente artigo *"A Falsa (Su-)Posição? Tradução dos Problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro de Rhind"* de 2018 escrito por Fábio Maia Bertato. Esse texto traz possívelmente a primeira tradução direta do egípcio para o português de uma parte do Papiro de Rhind. O trabalho propõe uma explicação matemática para o algoritmo do Método da Falsa Posição e também discute as origens desse termo a partir da análise de traduções anteriores.

2.2 Grécia Antiga

Sabemos que os gregos antigos davam muita importância ao conhecimento. Essa civilização é comumente apresentada como berço da civilização ocidental, sendo considerada símbolo cultural e político do Ocidente.

Os gregos se destacavam dentre outras coisas por terem construído um conhecimento mais organizado e abstrato do que o criado por civilizações anteriores ou mesmo contemporâneas, não seria exagero dizer que o conceito de ciência tal como conhecemos hoje se deve em muito ao que aconteceu na Grécia Antiga.

Dentre todas as áreas do conhecimento presentes naquele perído, a matemática foi uma das mais importantes e desenvolvidas, sendo objeto de estudo de Euclides, Platão, Arquimedes, Tales de Mileto, Pitágoras, Apolônio de Perga, entre outros estudiosos. As próprias palavras "matemática" e "geometria" são oriundas dessa civilização.

Citamos a Geometria, pois, na Grécia Antiga resolver um problema matemático, por vezes, estava muito associado a resolver esse problema geometricamente, ou seja, era preciso pensar em construções de sólidos e figuras, o que depende de conhecimentos sobre proporções e medidas. Isso fez com que na Grécia Antiga os conceitos matemáticos, e em especial, o conceito de proporcionalidade, fosse quase que inteiramente tratado de maneira geométrica.

Vários são os matemáticos que contruibuíram para o desenvolvimento da matemática nessa época que possuem algum conceito ou teorema à eles hoje creditados. Muitos desses feitos ou são razões entre segmentos e medidas ou não existiriam sem esssa noção.

Nesse contexto, podemos dizer com certeza que sem os conceitos de razão e proporção tanto a matemática como as outras áreas do conhecimento presentes na sociedade grega da época não seriam as mesmas, como podemos ver em Fossa (2011).

Interessante perceber que mesmo a Grécia Antiga sendo uma sociedade bastante diferente dos egípcios (ou babilônios), tendo desenvolvido uma matemática muito mais abstrata que tratava por vezes de problemas sem nenhuma aplicação prática, é possível notar que pensar as relações de proporcionalidade foram igualmente fundamentais para a ciência daquele povo, chegando até em alguns momentos a ser sinônimo de divino, como é o caso da proporção áurea.

2.3 Proporção Áurea

Chamamos de Proporção Áurea ou Número de Ouro o número irracional $1.61803\ldots$, representado atualmente pela letra do alfabeto grego ϕ. A escolha pela letra "fi" (pronúncia em português) se deve à uma homenagem ao famoso artista e escultor Fídias, que viveu no século V a.C. na Grécia Antiga.

Segundo Lauro (2005), tal número estava presente na civilização grega em diversas áreas e não só na matemática, sendo parte essencial nas artes e cultura daquele período. Um dos exemplos é podermos encontrar a proporção áurea na construções do templo Partenon, um dos mais célebres e aclamados edifícios da cultura Grega, símbolo cultural e político daquela civilização. Acredita-se que Fídias foi responsável pela decoração do templo.

Embora seja difícil definir com exatidão sua origem, é possível admitir que a proporção áurea faz parte da história da humanidade há muito tempo, já que podemos encontrá-la em diversas obras e construções do passado. De acordo com Junior (2014), no Egito, por exemplo, podemos encontrar o número de ouro no templo de Osíris e na Pirâmide de Quéops, inclusive no Papiro de Rhind há menções sobre um número sagrado que acredita-se ser ϕ dada a presença desse número em construções tão importantes daquela civilização. Para além das artes e ciência podemos encontrar a razão áurea em padrões encontrados no corpo humano e na natureza em geral.

Atualmente, o número de ouro ainda é utilizado nas artes e arquiterura e ao longo da história sempre recebeu a atenção de artistas e matemáticos, dois exemplos são: a presença de ϕ na relação entre dos números da Sequência de Fibonacci, e nas obras "Mona Lisa" e "O Homem Vitruviano" de Leonardo da Vinci $(1452 - 1519)$ em que a razão áurea aparece em partes do corpo e rosto nos elementos das pinturas, como podemos ver em Anastácio, Ferreira (2015).

Na Grécia Antiga o conceito da beleza era discutido e buscado nas mais diversas áreas, sobretudo nas ligadas às artes, como é o caso da construção de estátuas e esculturas, nesse contexto, a busca por harmonia, formas e padrões mais agradáveis era uma preocupação, tendo o número de ouro ocupado espaço central como respostas para algumas dessas buscas.

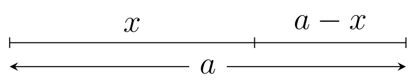
Segundo Euclides, em *Os Elementos*, ϕ poderia ser obtido através da "divisão de um segmento em média e extrema razão". Em outras palavras, isso significa dividir um segmento de reta em duas partes, de tal maneira a se obter um resultado igual entre duas razões: uma obtida entre a menor e a maior parte e outra obtida entre o segmento total e a maior parte.

Para Euclides, essa era inclusive a maneira mais simples de se encontrar a harmonia e beleza entre dois segmentos, conforme Junior (2014), o que mostra a preocupação da busca pelo belo presente nesse período. Tal fato ilustra bem o lugar que a matemática ocupava naquela civilização, não sendo apenas utilizada para resoluções de situações de cunho prático e utilitárias.

Hoje, alguns milênios depois sabemos que ϕ pode ser obtido matematicamente através de algumas sequências, como a sequência de Fibonacci, em relações geométricas e trigonométicas, como o pentagrama e outras deduções algébricas e geométricas.

A seguir vamos mostrar como encontrar ϕ. Podemos dizer que dividir um segmento a

em média e extrema razão, basicamente é conseguir a representação abaixo:



Isso significa que temos que encontrar x tal que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{(a-x)} \ . \tag{2.2}$$

Multiplicando os termos por $(a-x)x$, temos que :

$$(a-x)x\ \frac{a}{x} = (a-x)x\ \frac{x}{(a-x)} \ .$$

Simplificando e fazendo a distributiva temos que:

$$a^2 - ax = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + ax - a^2 = 0 \tag{2.3}$$

Considerando a equação 2.3, temos que a é número positivo qualquer (já que representa o valor de um segmento de reta) e x é nossa variável. Nosso objetivo é encontrar as raízes dessa equação, utilizando a Fórmula de Bhaskara chegamos nas raízes x_1 e x_2:

$$x_1 = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$x_2 = -a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \tag{2.4}$$

Por se tratar em parte de um problema geométrico, consideraremos apenas a raíz positiva, logo, ficaremos com x_1.

$$x_1 = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Voltando a equação 2.2, fazendo $x = x_1$ e $a = 1$, temos que:

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 1.61803\ldots$$

Portanto,

$$\frac{x}{a} = 1.61803\ldots = \phi.$$

Uma das figuras mais famosas do período grego antigo foi o retângulo de ouro ou retângulo áureo, que seria o retângulo mais agradável para a maioria das pessoas (agradável, do ponto de vista estético). Tal retângulo basicamente consiste num retângulo cujos lados possuem uma razão igual a ϕ.

> Este retângulo exerceu uma influência muito grande na arquitetura e na pintura. Nos dias de hoje ele é bastante utilizado no formato de cartões de crédito, carteira de identidade, carteira de habilitação, capas de livros e cadernos, cartas de baralho, blocos de papel de carta, janelas, construções, etc. Em 1876, o psicólogo alemão, Gustav Fechner, realizou uma pesquisa sobre a preferência por formato de retângulos. O resultado desta pesquisa mostrou que a maioria das pessoas prefere um certo retângulo cuja razão entre as suas medidas muito se aproxima da razão áurea. Essas pesquisas foram repetidas por Wilmar (1894), Lalo (1908) e Thorndike (1917) e em cada uma destas pesquisas os resultados foram semelhantes. (QUEIROZ, 2007, p.8).

O trecho acima é mais um exemplo do poder e importância que uma proporção possui desde os tempos mais antigos e que atravessou milênios e civilizações. Abaixo representaremos um retângulo de ouro, que poderia ser construído, por exemplo, a partir da divisão de um segmento em extrema e média razão, já que uma vez encontrado os valores de x e a teríamos uma retângulo como o da figura .

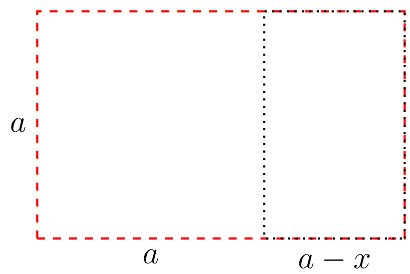


Figura 1 – Retângulo de Ouro.

Esperamos que com esse breve capítulo possamos ter sido convincentes em demonstrar a importância que relações de proporcionalidade possuem ao longo da história da civilização, seja na matemática ou fora dela.

3 Proporcionalidade no Currículo e Raciocínio Proporcional

Para além das quatro operações básicas, quais conteúdos matemáticos são fundamentais para aprendizagem de novos conceitos? Quais conteúdos matemáticos podem auxiliar a maioria das pessoas a entender situações no cotidiano?

Essas foram algumas das perguntas que motivaram a escolha do tema desse trabalho. Dentre os temas estudados desde os primeiros anos do ensino fundamental até o ensino médio, acreditamos que a proporcionalidade seja uma das possíveis respostas para as perguntas acima.

No cotidiano da maioria das pessoas é recorrente se depararem com situações em que algum conhecimento sobre proporcionalidade esta sendo usado, atividades como: conversão de moedas e medidas, manipulação de medicamentos, porções exatas de ingredientes a serem usados em uma receita, leitura de gráficos e escalas, compra de produtos de diferentes quantidades, leitura de medidas expressadas em percentual, entre outras atividades são alguns exemplos em que o conceito de proporcionalidade está presente.

A ideia de proporcionalidade é tão antiga e presente (ou por isso presente) em nossos dias que em alguns momentos olhamos mais para as proporções do que para qualquer outro número. Por exemplo, o imposto sobre a propriedade de veículos automotores (IPVA) é um imposto cobrado sobre o valor do veículo. Em alguns estados como São Paulo, esse valor é de 4%. Sabemos que 4% de um carro que custa R$ $30.000,00$ é diferente de 4% do valor de um carro de R$ $100.000,00$ e, mesmo assim, muitos de nós temos a percepção de que nesses dois casos a contribuição se deu de forma "justa" ou "igual". Note que, matematicamente, somente as taxas possuem valores iguais, já que em valores absolutos estamos tratando de valores diferentes (4.000 e 1.200). No entanto, acreditamos que muitas pessoas podem entender que em ambos os casos houve uma contribuição igual das partes, já que proporcionalmente se tratam de quantias equivalentes. Isso é muito impactante, pois mostra o poder que as proporções possuem no nosso cotidiano.

No contexto escolar, a proporcionalidade aparece com lugar de destaque principalmente no ensino da Matemática, no entanto, podemos afirmar que a proporcionalidade é fundamental no ensino das Ciências em geral. Nas Ciências Naturais seu conceito está presente na realização de balanços de equações químicas, nas definições de pressão, velocidade e aceleração, em medidas de densidade populacionais, entre outros casos. Em Ciências humanas como a Geografia, seu conceito também é essencial na leitura e produção de mapas que utilizam escalas. Dentro da matemática, o conceito de proporcionalidade está presente na Geometria, Trigonometria, nas construções de gráficos, em todos os problemas envolvendo razões ou porcentagem, nos campos da Álgebra, Estatística, Artimética e tantos mais. Nessa perspectiva, podemos dizer que a proporcionalidade não só une as áreas da Matemática como também a conecta com outras áreas do conhecimento.

Com tanta presença no dia a dia e na ciência de modo geral, é correto afirmar que a proporcionalidade é uma espécie de fio condutor entre as áreas do conhecimento, tendo papel protagonista na Matemática e fundamental em várias situações cotidianas.

> Assim, a proporcionalidade não é apenas um conteúdo matemático, mas um "formador" de estruturas cognitivas para a compreensão de outros importantes conceitos matemáticos, tanto nas questões numéricas, como naquelas que envolvem Medidas e Geometria. (COSTA, ALLEVATO, 2015, p.5).

Tal ideia corrobora muito com o que destacamos anteriormente: a proporcionalidade ocupa lugar de destaque no ensino da matemática, seja por ser um conteúdo que une a disciplina em suas várias áreas, seja por ser um conceito que permite a aproximação de outras disciplinas. O que nos faz afirmar mais uma vez que a proporcionalidade é, sobretudo, importante para o ensino das ciência em geral.

A ideia de construir elos entre os mais diversos campos da matemática é muito significativa e valorizada no ensino. Com base nisso, gostaríamos de apresentar um dos objetivos específicos do ensino de matemática para o ensino fundamental estabelecido pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2017, p.267).

Estamos convencidos de que a proporcionalidade possa ser um elo entre os vários conhecimentos matemáticos estabelecidos no ensino fundamental e médio. E que a partir da compreensão de seu conceito os alunos possam refletir sobre questões de natureza matemática e reconhecer que tal conhecimento está presente no ensino de outras disciplinas.

> Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade, etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2017, p.268).

O trecho acima deixa claro o papel de destaque da proporcionalidade em todo o ciclo da vida de um estudante na escolaridade básica, sobretudo, no estudo da matemática. Basicamente, a ideia de proporcionalidade e tudo que a cerca é um conjunto de pensamentos e resultados essenciais para a aprendizagem da matemática.

Nessa conjuntura é possível notar a complexidade do atual tema e tudo que nele está envolvido. Abaixo, segue outro trecho da BNCC que fala de algo que nos interessa: o "Pensamento Proporcional".

> Outro ponto enfatizado no Ensino Fundamental é o desenvolvimento do pensamento proporcional. Isso pode ser feito pela exploração de situações que oportunizem a representação, em um sistema de coordenadas cartesianas, da variação de grandezas, além da análise e caracterização do comportamento dessa variação (diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional). (BRASIL, 2017, p.528).

O trecho acima deixa claro que desenvolver o pensamento proporcional é possível a partir do ensino do conceito de proporcionalidade, que permite a possibilidade de trabalhar ideias e explorar conteúdos diversos, o que contribui muito para a formação dos nossos alunos. A próxima seção desse capítulo é toda destina a reflexão sobre o tema raciocínio proporcional e como podemos desenvolver ideias a partir do ensino da proporcionalidade.

3.1 Raciocínio Proporcional

Nessa seção estamos interessados em entender e aproveitar das discussões sobre o conhecimento gerado sobre a temática proporcionalidade bem como reconhecer quais as relações e benefícios podemos traçar e construir com as situações de natureza proporcional no âmbito escolar e fora dele.

Mas antes de discutirmos o que realmente queremos, gostaríamos de ressaltar um ponto específico do debate que é o uso de dois termos para designar esse tipo de raciocínio matemático: pensamento proporcional e raciocínio proporcional.

O raciocínio proporcional e todo o conhecimento gerado sobre o tema tem sido objeto de reflexão de muitos autores. Alguns autores utilizam o termo "raciocínio proporcional" para designar esse tipo de raciocínio matemático, entre eles: Costa e Ponte (2008), Morton (2014), Ponte e Marques (2011) e Viana e Miranda (2016). Mas há aqueles que também fazem o uso do termo "pensamento proporcional", tais como: Lesh, Post e Behr (1988) e Maranhão e Machado (2011). E por vezes, alguns autores utilizam as duas nomenclaturas em um texto para expressar a mesma ideia.

Segundo Miranda (2009, p.20) "Desta forma, não há uma uniformidade quanto à definição de pensamento proporcional, e também é comum encontrarmos o termo raciocínio proporcional para designar este tipo de pensamento matemático".

Nesse trabalho faremos uso do termo "raciocínio proporcional" já que a maioria das referências aqui utilizadas fazem uso também do termo, mas reforçamos novamente que não há diferenças significativas para o que queremos destacar no texto, estamos apenas adotando um termo para padronizarmos essa designação. Como explicamos anteriormente, não queremos exercer qualquer tipo de preferência e não estamos interessados em discutir a etimologia dos termos, apenas buscamos reconhecer quais as relações e benefícios podemos traçar e construir com as situações de natureza proporcional no âmbito escolar e fora dele.

> O raciocínio proporcional é uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de co-variância e múltiplas comparações, assim como a aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação. O raciocínio proporcional está relacionado com inferência e predição e envolve o pensamento qualitativo e quantitativo. (LESH; POST; BEHR, 1988, p.1).

Chamamos atenção para o fato de que os autores nem mesmo citam a palavra *proporcionalidade* no trecho citado, o que diz muito a respeito do entendimento sobre o tema, pois podemos perceber que estão destacando o processo de entedimento de tais relações. Segundo Lesh, Post, Behr (1988, p. 1) "as principais características do raciocínio proporcional envolvem o raciocínio sobre as relações holísticas entre duas expressões racionais, tais como, taxa, razão, quociente e fracção".

> Lamon (2005) salienta que o raciocínio proporcional não é sinônimo de proporcionalidade, mas constitui-se na condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade. A autora afirma que o conceito de raciocínio proporcional vai muito além da mecanização de estratégias formais de resolução de problemas, estando associado à capacidade de analisar de forma consciente as relações entre quantidades, evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais. (LAMON, 2005 apud COSTA; NUNES, 2016, p. 48).

Essa citação lança luz às questões fundamentais sobre o raciocínio proporcional e o ensino da proporcionalidade. A grande questão aqui é entender o raciocínio proporcional como um conjunto de ideias que nos faz capaz de articular e interpretar situações que envolvam a propocionalidade. O trecho discute também uma questão muito importante, que é sobre o que podemos fazer no processo de ensinar proporcionalidade, quais estratégias podemos usar e como a resolução de problemas pode impactar e decidir sobre quanto conhecimento temos sobre proporcionalidade.

Mas mesmo com toda a relevância e profundidade sobre o tema, nossa prática em sala de aula revela que muitos alunos possuem dificuldade em encarar e identificar problemas de natureza proporcional. Esse é um ponto que merece bastante atenção e nos motiva, pois se constitui em um desafio no ensino da matemática básica.

Segundo Lesh, Post, Behr (1988, p.2) "todas as pessoas que resolvem um problema sobre proporções não usam necessariamente o raciocínio proporcional". Tal frase exprime bem a ideia que temos sobre o entedimento de situações proporcionais e as possibilidades que possuímos na resolução de tais situações. Acreditamos que encontrar um número não é sinônimo de pleno entendimento, os alunos podem sim utilizar um método para chegar no resultado correto, no entanto, podem não entender por qual motivo utilizam tal algoritmo ou o porquê ele funciona.

Na maioria das vezes ao tratar de situações proporcionais os professores e consequentemente os alunos adotam como única estratégia a utilização da regra de três, o que nos parece feito superficialmente, já que perdem a oportunidade de debater a profundidade e complexidade do tema. O que estamos querendo dizer é que a maioria do alunos podem fazer uso de métodos para solucionar problemas matemáticos e mesmo assim tais métodos podem não fazer sentido algum para eles. Muitas vezes, quando os alunos precisam resolver um problema na escola eles encaram a situação já querendo descobrir qual "tipo de exercício" se trata e, então, resgatam em suas memórias o algoritmo para chegar em um número.

É possível traçar estratégias diferentes com os alunos e recorrer a outras alternativas a não ser a regra de três ou a ideia de que proporcionalide é simplesmente uma igualdade entre razões. Nessa perspectiva, uma possibilidade é uma abordagem qualitativa, que pode ser trabalhada durante as resoluções com perguntas do tipo: O número encontrado deveria ser menor ou maior? Quão maior? Quanto menor? Essa resposta ou número obtido faz sentido? Como essa situação pode aparecer no meu cotidiano?

Ensinar os alunos a reproduzir uma técnica sem os fazer refletir sobre o que fazem é não os educar matematematicamente. A reprodução de um algoritmo não os prepara para encarrar situações que envolvam conhecimentos aprendidos, tão pouco os preparam para a tomada de decisões pautadas em conceitos matemáticos. A falta de diferentes abordagens pode fazer com que mudanças simples na apresentação de problemas ou mesmo o enfrentamento de situações reais que demandam algum conhecimento matemático sejam transformadas em problemas difíceis e por vezes insolucionáveis sob as perspectivas dos discentes.

Segundo a BNCC devemos educar e trabalhar os conteúdos e conceitos a fim de desenvolver competências e habilidades em nossos alunos.

> Na BNCC, **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p.8).

Acreditamos que essa preocupação em desenvolver competências dê aos alunos ferramentas intelectuais para que sejam capazes de formular ideias que possibilitem o entendimento de situações que tenham conecção com os conhecimentos aprendidos, fazendo a transoposição de tais conceitos para situações do dia a dia, estabelecendo novos elos para o aprendizado de novas teorias no futuro.

> Ao adotar esse enfoque, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por

> meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC. (BRASIL, 2017, p.13).

Com a leitura da BNCC podemos perceber que a proporcionalidade aparece no currículo de diferentes anos e disciplinas, o que torna correto afirmar que a proporcionalidade é um tema que faz parte do ciclo da educação básica de um aluno, presente do início ao fim e que pode ajudar os professores e alunos a alcançar os objetivos da educação.

Desde o 2º Ano de Ensino Fundamental podemos encontrar na BNCC algumas habilidade e competências que estão diretamente relacionadas ao conceito de proporcionalidade. Os alunos devem, segundo BRASIL (2017, p.283) "Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais".

Essa é uma das evidências de que a noção de proporcionalidade pode e deve começar a ser explorada desde os primeiros anos do ensino fundamental. O documento também mostra a importância de se trabalhar tais conceitos em séries mais avançadas como por exemplo, no estudo de funções, tema importante e recorrente no Ensino Médio.

> A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?". (BRASIL, 2017, p.270).

Podemos ver que desde o 2º ano do ensino fundamental até o ensino médio a proporcionalidade pode ser tema e servir de elemento base para desenvolver habilidades e competências nos alunos. Mas antes do ensino médio a proporcionalidade é um conteúdo trabalhado nos anos do ensino fundamental II. Segundo a BNCC, no Currículo do 7º Ano do Ensino Fundamental, na unidade temática: Álgebra, um dos conteúdos a serem trabalhados são "Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais". No 6º ano do mesmo ciclo, uma das habilidades a ser atingida é:

> Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. (BRASIL, 2017, p.301).

Essa última habilidade apresentada mostra o quanto o raciocínio proporcional é importante no ciclo da vida escolar dos alunos. Queremos chamar atenção também para o fato do conceito proporcionalidade possuir ampla aplicação nas situações do dia a dia, algumas vezes solucionadas a partir de cálculos mentais por exemplo.

Outro ponto a ser enfatizado é sobre o racicínio proporcional ser tema a ser trabalhado desde os primeiros anos do ensino fundamental, pois, para que os alunos possam compreender o conceito de proporcionalidade e terem compreensão sobre o tema é necessário o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Essa compreensão mais esclarecida sobre o tema depende de ideias matemáticas, algumas delas básicas, o que reforça mais uma vez a importância em se trabalhar o assunto desde os primeiros anos do ensino básico.

Para se manifestar o raciocínio proporcional é necessário o entendimento e formação de algumas ideias básicas, como por exemplo, as ideias de multiplicação e divisão. Uma vez que os alunos dominem essas ideias, mais adiante poderão travar discussões a respeito de razão, proporção, taxas, variáveis e função. Nesse contexto, o aluno acostumado a trabalhar com estruturas matemáticas relacionadas a porporcionalidade está fazendo o uso do raciocínio proporcional quando, consegue reconhecê-las e relacioná-las a partir de conhecimentos já obtidos.

> Por exemplo, a nossa intuição diz-nos que uma equação como "$\frac{6}{2} = 4 - 1$" não devia ser chamada uma proporção (mesmo que os seus dois lados sejam iguais) porque os dois lados da equação não são estruturalmente similares; isto é, não envolvem o mesmo padrão de relações ou de operações e as suas componentes não estão multiplicativamente relacionadas. (LESH; POST; BEHR, 1988, p.9).

A formulação acima exprime bem nossa noção sobre proporção, em poucas palavras e de maneira bem simples, podemos dizer que uma proporção consiste na igualdade entre pelo menos duas frações. Nesse contexto, fica claro que a noção de multiplicação e divisão é fundamental, pois, para que o raciocínio proporcional seja desenvolvido, os alunos precisam antes reconhecer as situações em que esse conhecimento é relevante. O que nos permite dizer que para a compreensão da ideia de propocionalidade e raciocínio proporcional é necessário diferenciar situações proporcionais das não-proporcionais, além de ideias básicas como as de multiplicação e divisão.

No intuito de encerrar o presente capítulo, citamos Lesh, Post, Behr (1988, p.2) "Consideramos o raciocínio proporcional como um conceito pivot. Por um lado, é o culminar dos alunos da escola primária e por outro lado, é o alicerce de tudo o que segue".

Podemos tratar tal raciocínio como uma espécie de pensamento crítico que possui seus alicerces em regras matemáticas e que faz com que os alunos sejam capazes de debater com autonomia problemas relacionados a proporcionalidade, além de os ajudar na aprendizagem das diversas áreas da matemática.

Concluímos que o raciocínio proporcional é algo maior do que simplesmente resolvermos questões relacionadas à proporcionalidade. Entedemos que para utilizarmos o raciocínio proporcional não estamos somente interessados em encontrar um número (a resposta do problema), mais importante do que resolver o problema é entender qual o processo para obter as soluções.

Acreditamos que seja fundamental a forma pela qual os alunos conseguem resolver os problemas. Em outras palavras, os meios importam e o entendimento deve ser valorizado e priorizado no processo de aprendizagem. Devemos saber como e porquê realizamos determinadas ações, uma vez que os algoritmos sem essa noção perdem seu valor. Essas ideias são fundamentais para o ensino da proporcionalidade, sobretudo, quando estamos lidando com crianças e adolescentes.

Devemos valorizar os diferentes métodos de resolução para um mesmo tipo de problema, seja ele um problema de proporcionalidade ou não. Não queremos reprodutores de métodos, o aluno deve estar apto a resolver problemas proporcionais, sem nunca ter ouvido o termo "regra de três", por exemplo. Podemos e devemos discutir os conceitos relacionados a proporcionalidade, mas acreditamos que possamos fazer isso buscando o desenvolvimento do raciocínio proporcional, educando-os para que sejam capazes de entender e discutir ideias, como: razões, taxas e porcentagens, dentro e fora do âmbito escolar.

4 Proporcionalidade e Função Afim

Nesse capítulo buscaremos nos aprofundar na relação intrínseca que existe entre as situações proporcionais e a função afim, em particular, a função linear. Queremos explorar o uso das funções na resolução de problemas, na tentativa de romper com o padrão de resoluções que na maioria das vezes só faz uso da regra de três. Para tal, acreditamos que seja relevante definirmos, mesmo que brevemente, o conceito de função afim e função linear, bem como alguns teoremas importantes.

4.1 Função Afim e Função Linear

Definição 4.1.1. *Chamamos de função afim uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vamos começar abordando o gráfico de uma função afim. Antes, porém, devemos saber que o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a representação no plano do conjunto dos pontos do tipo (x, y), em que $y = f(x)$.

No caso das funções afim, os pontos do seu gráfico são do tipo $(x, ax + b)$, em que os valores de x variam de acordo com o domínio da função. Da mesma forma, temos que os pontos do gráfico de uma função $g(x) = x^2$ são do tipo (x, x^2).

A seguir vamos apresentar uma importante proposição sobre o gráfico das funções afim.

Proposição 4.1.1. *O gráfico de uma função afim f(x) = ax+b é uma reta.*

Demonstração

Para mostrar que o gráfico de uma função afim é uma reta é necessário e suficiente provar a colinearidade de três pontos dessa função. Então, dados três pontos distintos do gráfico temos que mostrar que a maior distância entre cada dois pontos é igual à soma das outras duas distâncias menores.

Sejam P_1, P_2 e P_3 três pontos do gráfico de $f(x) = ax + b$, tal que:

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b), \ P_2 = (x_2, ax_2 + b) \text{ e } P_3 = (x_3, ax_3 + b).$$

Para calular as distâncias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ no plano podemos fazer o uso do Teorema de Pitágoras, no entanto, faremos o uso de uma fórmula decorrente do famoso teorema que é a Fórmula da Distância entre dois pontos, muito utilizada na Geometria Analítica.

Sem perda de generalidade, vamos supor $x_1 > x_2 > x_3$. Utilizando a fórmula para P_1 e P_2, temos:

$$\begin{aligned}
d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (ax_1 + b - ax_2 - b)^2} \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (a^2x_1^2 - 2a^2x_1x_2 + a^2x_1^2x_2^2)} \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + a^2(x_1 - x_2)^2} \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2\ (1 + a^2)}\ .
\end{aligned}$$

Como $x_1 > x_2$, extraindo a raíz, ficamos com:

$$d(P_1, P_2) = (x_1 - x_2)\sqrt{1 + a^2}\ .$$

Repetindo o mesmo processo para $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$, segue que:

$$\begin{aligned}
d(P_2, P_3) &= (x_2 - x_3)\sqrt{1 + a^2} \\
d(P_1, P_3) &= (x_1 - x_3)\sqrt{1 + a^2}\ .
\end{aligned}$$

Repare que todos os resultados obtidos para $d(P_1, P_2)$, $d(P_1, P_3)$ e $d(P_2, P_3)$ se diferem uns dos outros apenas pela diferença entre os valores respectivos de x.

Assim, como $x_1 > x_2$ temos que $(x_1 - x_3) > (x_2 - x_3)$, isso é suficiente então para afirmarmos que $d(P_1, P_3) > d(P_2, P_3)$. Da mesma forma, como $x_2 > x_3$, segue que $(x_1 - x_3) > (x_1 - x_2)$, e por isso temos $d(P_1, P_3) > d(P_1, P_2)$. Logo:

$$\begin{aligned}
d(P_1, P_3) &= (x_1 - x_3)\sqrt{1 + a^2} \\
&= (x_1 - x_2 + x_2 - x_3)\sqrt{1 + a^2} \\
&= \underbrace{(x_1 - x_2)\sqrt{1 + a^2}}_{d(P_1, P_2)} + \underbrace{(x_2 - x_3)\sqrt{1 + a^2}}_{d(P_2, P_3)} \\
&= d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).
\end{aligned}$$

Portanto, mostramos que os pontos são colineares, provando então que o gráfico de qualquer função afim é uma reta.

A Figura 2 é um exemplo no plano da demonstração da Proposição 4.1.1. Já a Figura 3 é um exemplo de três pontos não alinhados.

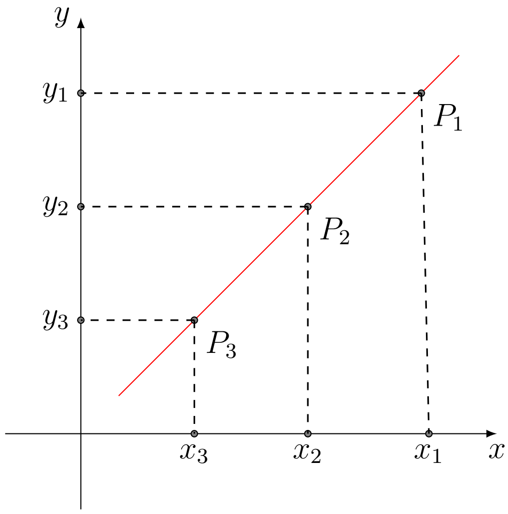


Figura 2 – Alinhamento de três pontos.

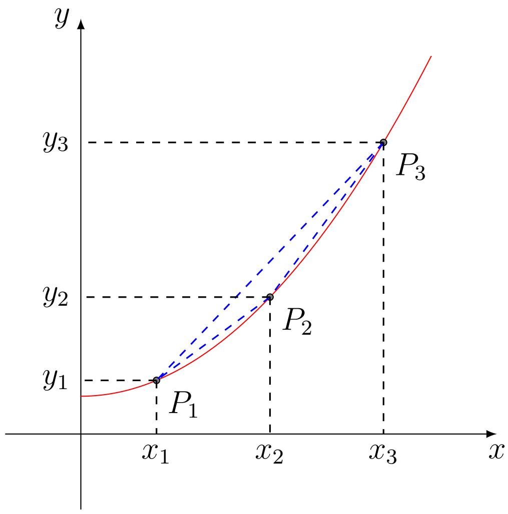


Figura 3 – Três pontos não alinhados.

4.2 Pontos de interseção de $f(x) = ax + b$ com o eixos do plano

É fundamental para o entendimento do gráfico de uma função afim conhecermos os pontos de encontros do gráfico com o eixo x e eixo y. Além da notoriedade de tais pontos, devemos estar atentos para o fato de que por dois pontos só se passa uma reta. Portanto, podemos dizer que dados dois pontos de uma função afim, temos definido seu gráfico.

Ponto de encontro com Eixo das Ordenadas

Para generalizar o ponto de encontro de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ com o eixo y devemos sempre fazer $x = 0$, já que no eixo y todos os valores de x são 0.

Então, para $x = 0$ temos sempre:

$$f(0) = a(0) + b = b.$$

Ou seja, o ponto de encontro de $f(x) = ax + b$ com o eixo y é sempre $(0, b)$

Ponto de encontro com Eixo das Abscissas

Para generalizar o ponto de encontro do gráfico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ com o eixo x devemos ter $y = 0$, pois, no eixo das abscissas todos os valores de y são 0.

Assim, para $y = 0$, temos:

$$0 = ax_1 + b \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{-b}{a}$$

o que nos dá o ponto $(x_1, 0)$, que é sempre o encontro do gráfico de $f(x) = ax + b$ com o eixo x, onde x_1 é chamado de raíz da equação $ax + b = 0$.

Note que x_1 é o valor tal que $f(x_1) = 0$.

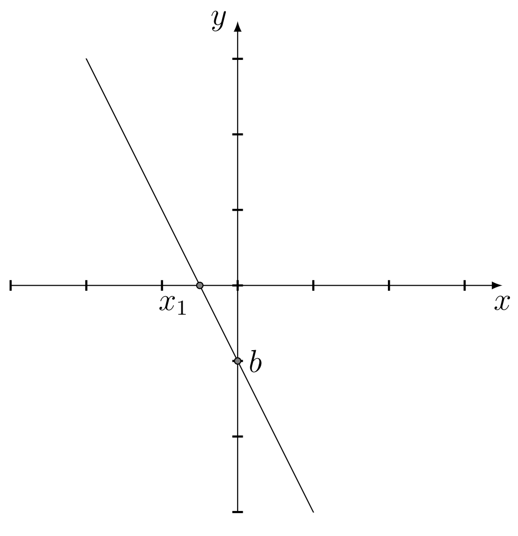


Figura 4 – Gráfico de uma função afim com os pontos $(0, b)$ e $(x_1, 0)$ marcados.

No exemplo apresentado pela Figura 4 temos a função $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ e os pontos $b = (0, 1)$ e $x_1 = (2, 0)$ marcados.

A seguir vamos apresentar alguns exemplos de gráficos de funções afim.

Exemplo 4.2.1. *Gráfico da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 2x + 3$.

Para gerar os pontos do gráfico devemos atribuir valores reais para x ou y, respeitando sempre o dominío e contradomínio da função. Nesse caso, faremos $x = 0$ e $y = f(x) = 0$.

x	$f(x) = 2x + 3$
0	3
$-3/2$	0

Tabela 1 – Dois pontos do gráfico de $f(x) = 2x + 3$.

Sejam A $= (0, 3)$ e B $= (-3/2, 0)$, marcando esses pontos no plano vamos construir o gráfico de $f(x) = 2x + 3$.

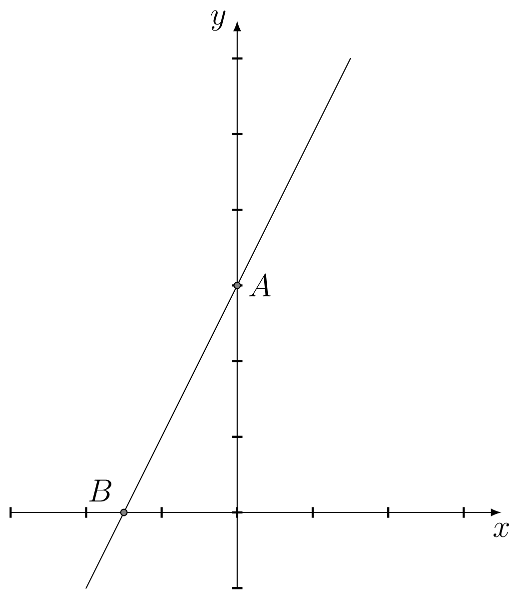


Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = 2x + 3$.

Analisando o gráfico da Figura 5 vale a pena falarmos sobre os pontos marcados, A e B.

Percebam que o ponto de encontro da reta com o eixo das ordenadas é justamente o ponto $(0, b)$, representado por A no plano. Como $f(x) = 2x + 3$ temos $b = 3$, o que resulta no ponto A $= (0, 3)$. Por outro lado, temos ponto B $= (-3/2, 0)$, que é o ponto de encontro do gráfico com o eixo das abscissas, obtido fazendo $f(x) = 0$.

Outro aspecto importante a se destacar é a inclinação da reta, como $a = 2$ e portanto, $a > 0$, temos o que chamamos de inclinação positiva, o que gera no uma reta “tombada"para a direita (sentido em que o valores de x são cada vez maiores).

Exemplo 4.2.2. *Gráfico da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = -2x - 1$.

Como sabemos, precisamos de dois pontos para gerar o gráfico dessa função. Novamente, vamos atribuir os valores $x = 0$ e $y = 0$ para obtermos dois pontos desse gráfico.

x	$f(x) = -2x - 1$
0	-1
$1/2$	0

Tabela 2 – Dois pontos do gráfico de $f(x) = -2x - 1$.

Sejam A = $(0, -1)$ e B = $(1/2, 0)$ esses pontos, agora somos capazes de construir o gráfico de $f(x) = -2x - 1$.

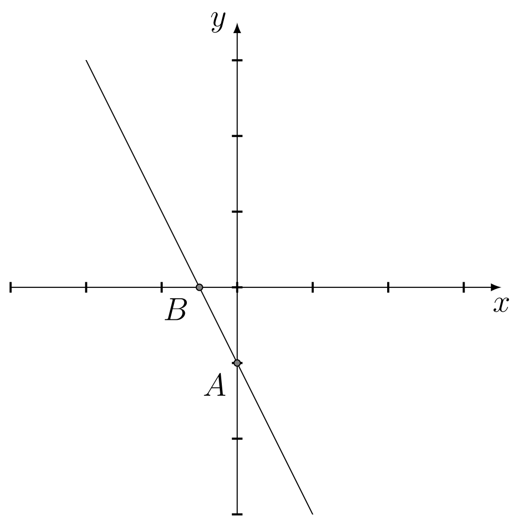


Figura 6 – Gráfico da função $f(x) = -2x - 1$.

Observando o gráfico presente na Figura 6, podemos notar que a inclinação da reta é outra, isso se deve ao fato do valor de a na nossa função $f(x) = -2x - 1$ ser negativo, isto é, $a = -2 < 0$. Assim, temos uma inclinação negativa, o que gera no plano uma reta "inclinada" para a esquerda (sentido em que o valores de x são cada vez menores).

Exemplo 4.2.3. *Gráfico da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 3x$.

Atribuindo os valores de $x = 0$ e $y = 3$, temos que:

x	$f(x) = 3x$
0	0
1	3

Tabela 3 – Dois pontos de $f(x) = 3x$.

A escolha pelo valor de $y = 3$ ao invés de $y = 0$ (adotada nos exemplos anteriores) se deve ao fato de que para $f(x) = 3x$ se $y = 0$ temos $x = 0$, por isso precisamos construir outro ponto. Para a representação de $f(x) = 3x$ vamos adotar A = $(0, 0)$ e B = $(1, 3)$.

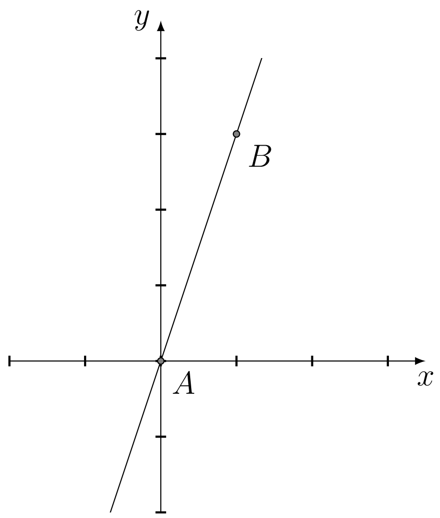


Figura 7 – Gráfico da função $f(x) = 3x$.

O fato de $b = 0$ em $f(x) = 3x$ faz com que o ponto de interseção da reta com o eixo $\overleftrightarrow{OY}$ seja justamente a origem do plano, o ponto A $= (0, 0)$, que é também o encontro com o eixo das abscissas.

Esse tipo de função afim em que $b = 0$ é um dos casos particulares mais importantes dessa família de funções.

Definição 4.2.1. *Chamamos de função linear a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$. Ou seja, uma função linear é o caso particular da função afim com $b = 0$.*

Definição 4.2.2. *Dizemos que $f(x)$ e x são grandezas proporcionais quando essa relação pode ser definida por meio de uma função linear. Ou seja, se essa relação pode ser definida por meio da expressão $f(x) = ax$.*

A função linear é a função que define as relações de proporcionalidade. Nesses casos a constante a é o que chamamos de *constante de proporcionalidade*. Tal número é fundamental para uma compreensão mais profunda das situações envolvendo esse tipo de relação entre as grandezas. No entanto, em alguns tipos de resoluções de problemas de natureza proporcional, a *constante* perde o seu valor, e pode nem mesmo aparecer (resoluções via regra de três por exemplo).

Salientamos que não podemos discutir proporcionalidade sem reconhecer os aspectos multiplicativos entre as grandezas envolvidas e, para isso, reconhecer a constante é fundamental. O fato de tal número ser esquecido pode ser um dos motivos para que o desenvolvimento e entendimento das situações de proporcionalidade não seja alcançado entre os estudantes.

Sem parecermos repetitivos, o que queremos dizer é que, esse número fixo sempre estará presente nas variações das grandezas nos problemas de proporcionalidade, isto é, qualquer variação em $f(x)$ ou x estará relacionada **direta** ou **indiretamente** com o valor de a.

Definição 4.2.3. *Uma relação de proporcionalidade direta é uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números $c, x \in \mathbb{R}$, em que x é a variável e c é uma constante arbitrária, tem se*

$$f(cx) = cf(x).$$

Isso significa dizer que quanto maior o valor de $f(x)$ maior será o valor de x. Por exemplo, se dobrarmos o valor de x, então o valor de $f(x)$ também seria dobrado. Da mesma forma, se reduzirmos o valor de x pela metade, o valor de $f(x)$ também seria reduzido pela metade. Ou seja, quando multiplicamos o valor x por um número n, o valor de $f(x)$ também é multiplicado por n.

Definição 4.2.4. *Uma relação de proporcionalidade inversa é uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números $c, x \in \mathbb{R}^*$, em que x é a variável e c é uma constante arbitrária, tem se*

$$f(cx) = \frac{f(x)}{c}.$$

Com isso queremos dizer que quanto maior o valor de $f(x)$ menor será o valor de x. Por exemplo, se reduzirmos o valor de x pela metade, o valor de $f(x)$ será multiplcado por dois. Da mesma forma, se dobrarmos o valor de x, o valor de $f(x)$ seria reduzido pela metade. Ou seja, quando multiplicamos o valor de x por um número n, o valor de $f(x)$ é dividido por n.

Exemplo 4.2.4. *A área A de um retângulo de lados l e x é diretamente proporcional a um dos seus lados?*

Bom, antes de resolvermos o exemplo 4.2.4 devemos ter em mente que a área de um retângulo cujos lados são x e l é dada por $A = xl$.

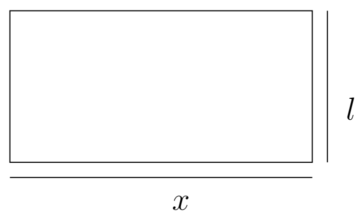


Figura 8 – Retângulo de lados: x e l

Agora verificaremos o que ocorre com o valor de A quando dobramos o valor de x (o valor de l não será alterado).

Tomemos $y = 2x$:

$$\begin{aligned} A &= xl \quad \Rightarrow \text{ trocando } x \text{ por } y = 2x \\ A &= yl \quad = 2xl \end{aligned}$$

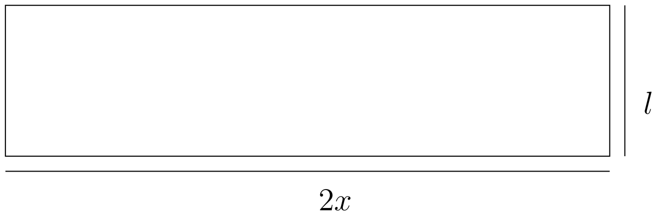


Figura 9 – Retângulo de lados: $2x$ e l

Podemos notar que o valor de A foi duplicado, o que nos permite afirmar que a área do retângulo é diretamente proporcional à um dos seus lados, pois, dobrando um dos lados dobramos também a área do retângulo.

Exemplo 4.2.5. *O tempo gasto por um automóvel para percorrer uma distância é direta ou inversamente proporcional à sua velocidade média?*

Da Física sabemos que a velocidade média v_m, intervalo de tempo t e distância percorrida d se relacionam pela expressão

$$t = \frac{d}{v_m}.$$

Agora, vejamos o que acontece com o valor do tempo se dobramos o valor da velocidade, isto é, trocaremos v_m por $2v_m$

$$t = \frac{d}{2v_m}.$$

Notem que tivemos um tempo reduzido pela metade, isso significa que quando a velocidade dobra o tempo é dividido por dois. Portanto, essas são grandezas inversamente proporcionais.

Exemplo 4.2.6. *A área de um círculo é direta ou inversamente proporcional ao valor de seu raio?*

Sejam, respectivamente, A e r o valor da área de um circulo e a medida do raio. Sabemos que:

$$A = \pi r^2. \tag{4.1}$$

Se por exemplo, o valor do raio dobrar, isto é, tivermos $2r$ no lugar de apenas r, o que acontece com o valor de A?

$$A = \pi\ (2r)^2 = 4r^2\pi.$$

O resultado acima mostra que o valor de A passou a ser 4 vezes maior do que (4.1), provando que esse valor não foi divido por dois nem multiplicado por dois (para ser direta ou inversamente proporcional precisaríamos da ocorrência de um desses casos). Portanto, concluimos que a área A do círculo não é proporcional ao valor de seu raio r.

Observação: Embora o exemplo acima não seja de natureza proporcional achamos ser mais conveniente inseri-lo, pois, estamos convencidos que um aluno deve ser capaz de estabelecer as diferenças entre situações proporcionais e não proporcionais, sejam elas quantitativas ou qualitativas.

4.3 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

A seguir vamos tratar de um teorema muito importante, que trata de três afirmações. O conteúdo desse teorema é capaz de nos fazer concluir se estamos trabalhando com uma função linear ou não, ou seja, podemos saber se dada situação é ou não proporcional.

Teorema 4.3.1. *Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função crescente, ou seja, se $x < y$ então $f(x) < f(y)$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

2) $f(kx) = kf(x), \quad \forall k \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$;

3) Pondo $a = f(1)$, tem se $f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Para provar que as afirmações acima são equivalentes, é suficiente mostrarmos que 1) implica 2), que 2) implica 3) e que 3) implica 1).

Vamos mostrar primeiro que 1) $\Rightarrow$ 2). Assim, por hipótese, $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Primeiramente, note que:

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} & 0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x), \\ \Rightarrow \quad & 0 = f(x) + f(-x), \\ \Rightarrow \quad & f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suponha agora que $m \in \mathbb{N}$. Por hipótese

$$f(mx) = f(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{m \text{ vezes}}) = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{m \text{ vezes}} = mf(x). \tag{4.2}$$

Assim, pela equação (4.2) e pelo fato de $f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ainda para $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$f(-mx) = -f(mx) = -mf(x),$$

o que significa dizer,

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.3}$$

Suponha agora $q \in \mathbb{Q}$, ou seja, suponha

$$q = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0.$$

Como $qn = m$, então

$$\begin{aligned}
& mf(x) = f(mx) = f(qnx) = nf(qx),\\
\Rightarrow \quad & mf(x) = nf(qx),\\
\Rightarrow \quad & \frac{m}{n}f(x) = f(qx),\\
\Rightarrow \quad & f(qx) = qf(x).
\end{aligned}$$

Logo, para todo $q \in \mathbb{Q}$ tem-se que $f(qx) = qf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Para mostrar que o mesmo vale para os reais, só precisamos mostrar que vale para os irracionais. Ou seja, queremos mostrar que, se $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ então

$$f(rx) = rf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para isso, suponha que a afirmação acima não é verdadeira, o que equivale dizer que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ (irracional) tal que

$$f(rx_0) \neq rf(x_0).$$

Sem perda de generalidade, suporemos $f(rx_0) < rf(x_0)$ e $x_0 > 0$. Dessa forma, temos que $\dfrac{f(rx_0)}{f(x_0)} < r$. Mas sabemos que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{f(rx_0)}{f(x_0)} < q < r \quad \Rightarrow$$

$$f(rx_0) < qf(x_0) < rf(x_0). \tag{4.4}$$

Por outro lado, $q < r$ implica $qx_0 < rx_0$, pois supomos $x_0 > 0$. Como f é crescente,

$$qx_0 < rx_0 \Rightarrow \underbrace{f(qx_0)}_{qf(x_0)} < f(rx_0) \Rightarrow qf(x_0) < f(rx_0),$$

o que contradiz (4.4). Logo a suposição $f(rx_0) \neq rf(x_0)$ não pode ser verdadeira. O que prova o fato de que (1) $\Rightarrow$ (2).

Observação: Os casos em que $x_0 < 0$ e $f(rx_0) > rf(x_0)$ são análogos.

Vamos mostrar agora que 2) $\Rightarrow$ 3). Para tal, supomos que f verifica 2), o que significa dizer que

$$f(kx) = kf(x), \quad \forall k \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ora, basta observar que

$$f(x) = f(x.1) = xf(1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $f(1) = k$, temos então que $f(x) = kx$. Portanto, (2) $\Rightarrow$ (3).

Por fim, nos resta agora mostrar que 3) $\Rightarrow$ 1). Estamos supondo que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$. Sendo assim

$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

Está provado o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Observação: A demonstração do teorema para f descrescente é análoga.

Segundo LIMA et. al. (2000), em resumo, podemos concluir do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que precisamos verificar apenas duas coisas para afirmar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função linear:

i) f deve ser crescente ou decrescente,

ii) $f(nx) = nf(x)$ *para quaisquer* $x, n \in \mathbb{R}$.

4.4 Teorema da Caracterização de uma Função Afim

A seguir apresentamos o Teorema da Caracterização da Função Afim. Tal teorema nos dá condições de afirmarmos se uma situação pode ou não ser modelada por meio de uma função afim. Utilizaremos esse teorema em situações apresentadas no capítulo seguinte.

Antes de apresentarmos o teorema e sua respectiva demonstração, acreditamos ser conveninente explicar algo que será citado em seu enunciado, sendo assim parte fundamental para o entendimento da situação.

O que significa dizer que dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a diferença $f(x + h) - f(x)$ depende apenas de h e não de x?

Queremos tratar dessa questão antes de nos aprofundarmos no teorema. Para isso, separamos dois exemplos na tentativa de ilustrar a discussão.

Exemplo 4.4.1. *Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x+1$. A diferença $f(x+h)-f(x)$ depende apenas de h e não de x?*

Vamos calcular $f(x+h) - f(x)$. Note que:

$$f(x+h) = 2(x+h) + 1 = 2x + 2h + 1$$

Ou seja,

$$f(x+h) - f(x) = 2x + 2h + 1 - (2x+1) = 2h$$

Isso significa que a diferença $f(x+h) - f(x)$ é uma função que depende somente de h e não de x.

Exemplo 4.4.2. *Considere agora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$. A diferença $f(x+h)-f(x)$ depende apenas de h e não de x?*

Para isso, devemos calcular $f(x+h) - f(x)$.

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

Ou seja,

$$f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = h^2 + 2xh$$

O que nos mostra que a diferença $f(x+h) - f(x)$ nesse caso é uma função que depende tanto de h como de x.

Acreditamos que esteja claro o que gostaríamos de explicar. Vamos agora ao teorema da caracterização da função afim.

Teorema 4.4.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente, ou seja, se $x < y$ então $f(x) < f(y)$. Se a diferença $f(x+h) - f(x)$ depender apenas de h mas não de x, então f é uma função afim.*

Demonstração

Seja g uma outra função tal que $f(x+h)-f(x) = g(h)$, perceba que para g a diferença $f(x+h) - f(x)$ não depende de x, mas apenas de h.

Note que: $g(0) = f(x-0) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$

Vamos calcular agora $g(k+h)$, para valores de k e h quaisquer,

$$g(k+h) = f(x + (h+k) - f(x) = f((x+k)+h) - f(x) \Rightarrow$$

Somando e subtraindo $f(x+k)$ da linha acima, obtemos:

$$\begin{aligned} g(k+h) &= f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x), \\ &= \underbrace{[f((x+k)+h) - f(x+k)]}_{g(h)} + \underbrace{[f(x+k) - f(x)]}_{g(k)} \\ &= g(h) + g(k). \end{aligned}$$

Chegamos a conclusão de que a função g satisfaz a seguinte relação:

$$g(k+h) = g(h) + g(k), \text{ para quaisquer } k, \, h.$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade sabemos que a função g é uma função linear.

Então, pondo $g(1) = a$, tem se que $g(h) = ah \quad \forall h \in \mathbb{R}$. Isso implica em

$$f(x+h) - f(x) = ah.$$

Fazendo $x = 0$ e $f(0) = b, \; b \in \mathbb{R}$ chegamos em

$$f(h) = ah + b, \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim.

Exemplo 4.4.3. *Um taxista cobra por suas corridas da seguinte forma: R\$ 3,50 como valor fixo (bandeirada), mais R\$ 2,00 por quilômetro rodado. Qual o tipo de função que modela matematicamente essa situação?*

Primeiramente, devemos notar que quanto mais longa a corrida, maior será o valor a ser pago, então, seja qual for a função que estamos trabalhando ela é uma função crescente.

Por exemplo, se considerarmos duas corridas: uma de 8 km e uma de 10 km sabemos que a corrida de 10 km será mais cara que a corrida de 8 km.

Vamos calcular o preço dessas corridas:

km	$km \times 2$	Bandeirada	Total (R\$)
10	20	$+\,3,50$	$23,50$
8	16	$+\,3,50$	$19,50$

Tabela 4 – Corridas de 8 e 10 km.

A diferença de valor de uma corrida para a outra é de R\$ $4,00$. Note que de 10 para 8 km, a diferença é apenas de 2 km e isso gerou um acréscimo de R\$ $4,00$. Ora, mas R\$ $4,00$ é o valor a ser pago por mais 2 km em qualquer corrida com esse taxista.

Todo desenvolvimento até aqui nos faz pensar que tal situação se trata de uma função afim, do tipo, $f(x) = ax + b$, mais especificamente, $f(x) = 2x + 3,5$. No entanto, devemos provar isso e para tal vamos utilizar o teorema 4.4.

Sejam x a quantidade de km rodados, $f(x)$ o valor a ser pago na corrida e h um valor real positivo, temos que:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= 2(x+h) + 3,50 - [2(x) + 3,50], \\ &= 2x + 2h + 3,50 - 2x - 3,50, \\ &= 2h. \end{aligned}$$

O que significa que a diferença $f(x+h) - f(x)$ depende apenas de h, portanto, $f(x)$ é uma função afim, tal que $f(x) = 2x + 3,5$.

Em outras palavras, com o teorema 4.4 mostramos que acrescidos h km em qualquer corrida sempre teremos um acréscimo de $2h$ no valor a ser pago.

5 Situações Problemas

5.1 RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

Nessa seção apresentaremos situações problemas que são ligadas direta ou indiretamente ao tema proporcionalidade. Na escolha das situações buscamos privilegiar temas que fossem comuns ao dia a dia da maioria das pessoas e variar as questões.

A proposta aqui é apresentar cada uma das situações, discutir maneiras de analisar e solucionar os problemas, buscando sempre debater o conceito de proporcionalidade e desenvolver o raciocínio proporcional.

Nosso propósito é mostrar diferentes maneiras de resolver e enxergar uma mesma situação, já que quase sempre situações ligadas a proporcionalidade são solucionadas apenas por um método (regra de três na maioria delas) o que, ao nosso ver, não favorece o amadurecimento de ideias e a compreensão total desse tipo de situações. Com múltiplas interpretações acreditamos que seja possível fazer o conhecimento se expandir, além de facilitar as soluções.

Buscamos também explorar a relação que tais situações possuem com as funções afim, bem como descrever uma situação proporcional por por meio de uma função linear.

Para uma abordagem desse tipo, nos inspiramos em Lima et. al. (2005) que tratam de situações proporcionais de diferentes maneiras e as relacionam com os gráficos de suas funções.

Importante ressaltar que não queremos sugerir a "forma mais adequada" de resolver problemas, mostraremos apenas que a pluralidade de abordagens e diferentes perspectivas podem ajudar os alunos a desenvolverem um raciocínio proporcional.

Problema 5.1.1. *Em um posto de combustível o preço de 1 litro de gasolina é R\$ 5,00. Alguém que deseja abastecer seu veículo com 40 litros de gasolina terá que pagar quanto por isso?*

O problema 5.1.1 constitui-se de uma situação clássica que lida com proporcionalidade e com a relação entre o preço e litros de gasolina. A seguir apresentaremos algumas abordagens para a solução do problema.

Primeira adordagem

Uma abordagem muito útil é pensar na unidade, isto é, conhecer a relação que uma unidade de uma das grandezas possui com a outra. Como sabemos que R\$ $5,00$ equivale a 1 litro de gasolina, podemos então dizer que conhecemos uma relação em que uma unidade de uma das grandezas (no caso 1 l) está presente. No Problema 5.1.1 em específico o enunciado já nos forneceu essas informações, mas é fácil descobrir tal relação de unidade uma vez que podemos sempre dividir as quantidades buscando o quociente igual a um para uma das grandezas.

Já que nos foi dado o preço de 1 litro de gasolina é fácil reconhecer que 40 litros é 40 vezes mais do que 1 litro, então podemos admitir que o preço a ser pago por 40 litros será 40 vezes maior, ou seja, para comprar 40 litros de gasolina deveríamos possuir 40 vezes mais dinheiro que o valor referente à compra de 1 litro. Assim:

$$40 \times 5 = 200.$$

Então chegamos a resposta: por 40 litros de gasolina será pago R\$ $200,00$.

Repare que nessa abordagem exploramos o fato de sabermos quanto custa uma unidade. Tal raciocínio é muito utilizado pois nos permite resolver questões de maneira rápida e prática podendo realizar os cálculos até mesmo mentalmente. Nessa perspectiva, consideramos que o uso do cálculo mental é uma estratégia a ser incentivada, sobretudo em situações em que tratamos com números "pequenos", múltiplos ou divisores. Por vezes em situações do dia a dia podemos recorrer a tal método, sobretudo em casos em que a tomada de decisão precisa ser rápida.

Por fim, queremos destacar que essa resolução poderia ser realizada por alunos do Fundamental I que soubessem efetuar cálculos de multiplicação. Isso evidencia a importância de conhecermos as estrutas multiplicativas das proporções para conseguirmos entender situações ligadas a proporcionalidade.

Segunda adordagem

Outra solução para o problema 5.1.1 seria lançar mão de contas ou estruturas de algoritmos e construir uma solução mais visual, por exemplo, uma tabela que relaciona as duas grandezas. Observe a Tabela 5.

Litros de Gasolina	Preço R$
1 l	5
10 l	50
20 l	100
30 l	150
40 l	200

Tabela 5 – Relação entre litros de Gasolina e Preço em R$

É evidente que a construção da Tabela 5 faz a abordagem ser diferente da primeira, no entanto, o leitor pode se perguntar e questionar a relevância de uma tabela dessas, já que há a presença dos valores: 10 l, 20 l e 30 l, que não são relevantes para responder o que o enunciado do problema.

É nesse ponto que devemos reconhecer a importância da pluridade no modo de enxergar e resolver a mesma situação e, entender que a partir da construção de uma simples tabela podemos estabelecer discussões pertinentes que talvez antes não pudessem ser tão evidentes.

Por exemplo, observando a Tabela 5, o aluno seria capaz de responder as seguintes perguntas: Há um número constante na tabela? Qual o valor dessa constante?

As duas questões postas aqui levantam a discussão da presença da constante de proporcionalidade (que abordamos no capítulo anterior), um número que está presente em qualquer situação proporcional. Acreditamos que muitos alunos não seriam capazes de reconhecer tal número mesmo possuindo uma tabela como essa, já que não estão acostumados a debater os temas matemáticos e discutirem perguntas sobre a natureza dos problemas. Além da construção do objeto podemos sempre debater tais situações fazendo o uso de desse tipo de pergunta, pois elas podem fazer com que os alunos observem além dos números explicitos.

Através da tabela 5 podemos tomar como referência a primeira linha horizontal e mostrar que a segunda linha por exemplo é o resultado da primeira multiplicada por 10, que a terceira é o resultado da multiplicação por 20, a quarta por 30 e a quinta por 40 e que todos esses números são múltiplos de 5, que é a constante, já que de uma em uma unidade de litro é adicionado R\$ $5,00$ ao preço.

Tal abordagem pode deixar mais clara a ideia sobre o conceito da constante de proporcionalide e corroborar para a apresentação de um conceito bastante útil que é o da função linear.

Terceira adordagem

Podemos também reconhecer que essa situação pode ser resolvida a partir da construção de uma função linear.

Costumeiramente problemas parecidos com o problema 5.1.2 são apresentados no primeiro ano do Ensino Médio no estudo de funções do primeiro grau, quase sempre exigindo que os alunos sejam capazes de escrever a função matemática que define a relação entre as grandezas, ou seja, encontrar a função que descreve o problema.

Mas seriam os alunos capazes de descrever a função através da leitura do enunciado, ou seriam capazes de utilizar o gráfico da função para obter respostas? Nós, professores, sabemos que nesse caso uma estratégia útil é a modelagem matemática, já que partindo do problema 5.1.2 podemos interpretá-lo e descrevê-lo por meio da função linear $y = 5x$. Podemos dizer que esse é o modelo matemático que descreve a situação apresentada pelo problema (5.1.2).

Seja então a função $f(x) = 5x$ em que x é a quantidade de litros de gasolina desejada e $f(x)$ é o valor pago em R\$, podemos construir o gráfico da reta $y = 5x$.

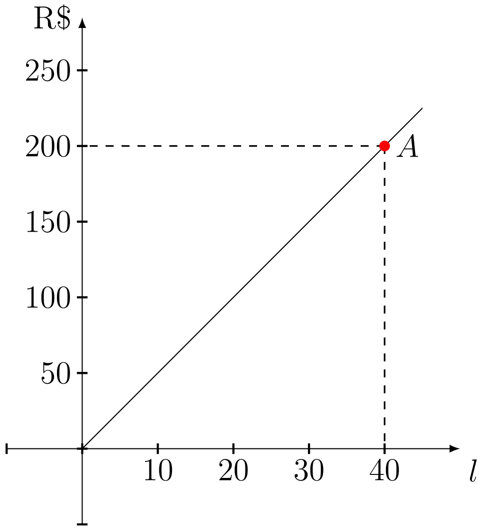


Figura 10 – Gráfico da função $f(x) = 5x$.

Observação: O gráfico presente na Figura 10 está fora de escala, queremos destacar que o primeiro valor marcado no eixo das abscissas é o 10 com um passo de 10 em 10, já o eixo das ordenadas possui a primeira marcação em 50 e aumenta de 50 em 50 entre as marcações.

Observando a Figura 10 podemos perceber que quando $x = 40$ o valor assumido na função é 200. Acreditamos que o uso de gráfico da função mais do que uma alternativa se constitui em um olhar diferente sobre tais questões, sendo muito útil no desenvolvimento e entendimento de situações proporcionais.

Quarta abordagem

Podemos também usar uma proporção simples. Seja x a quantidade em R\$ que desejamos encontrar podemos afirmar que 1 l está para 40 l da mesma forma que R\$ $5,00$ está para x, isso pode ser relacionado matematicamente por:

$$\begin{array}{rcl} \text{litros } (l) & - & R\$ \\ 1 & - & 5,00 \\ 40 & - & x \end{array}$$

aplicando a multiplicação cruzada, segue que:

$$\frac{1}{40} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 40 \times 5 = 200.$$

Portanto, para abastecer 40 litros o valor a ser pago é R\$ $200,00$.

Problema 5.1.2. *Felipe deseja realizar uma festa e para isso comprará 30 latas de refrigerante com capacidade de 210 ml cada uma, no intuito de evitar desperdício. Caso ele decida comprar latas de 630 ml, quantas ele deverá comprar?*

Primeira adordagem

Lendo o enunciado do Problema 5.1.2 é possível notar uma relação de dependência entre as grandezas: Latas e Capacidade de cada lata (ml). Essa relação faz com que qualquer variação em uma das grandezas também produza uma variação em outra.

No entanto, sabemos para que esse seja um problema proporcional, essa variação deve depender de um número fixo (constante de proporcionalidade).

Uma boa estratégia para solucionar o problema é primeiro nos perguntarmos duas coisas: O número de latas de 630 ml será maior ou menor que o número de latas de 210 ml? Quão maior ou menor?

É fácil respondermos a primeira pergunta: sim, será menor a quantidade de latas se essas tiverem a capacidade de 630 ml.

Agora para respondermos a segunda pergunta, podemos pensar o seguinte: possuir uma lata de 630 ml equivale a possuir quantas latas de 210 ml? Podemos notar que:

$$630\ ml \ = \ 3 \times 210\ ml.$$

Portanto, possuir uma lata de 630 ml é o equivalente a possuir 3 latas de 210 ml.

Agora sabemos que para cada lata de 630 ml possuímos três latas de 210 ml, ou seja, podemos dizer que possuir uma lata de 630 ml é o mesmo que possuir 3 latas de 210 ml. Matematicamente, podemos calcular isso de maneira bem simples:

$$30 \div 3 = 10,$$

o que significa que utilizando as latas com maior capacidade, Felipe precisará de 10 latas.

Segunda adordagem

Uma outra solução seria calcular primeiro a quantidade total de refrigerante (em ml) que Felipe deseja comprar para festa. Podemos fazer isso da seguinte maneira:

$$30 \times 210 = 6300\ ml.$$

Agora sabemos que Felipe precisa comprar 6300 ml. Então, para sabermos qual a quantidade de latas de 630 ml que ele precisará comprar, devemos fazer:

$$\frac{6300}{630} = 10.$$

Portanto, Felipe deverá comprar 10 latas de 630 ml para a festa.

Repare que o aluno que utilizasse uma abordagem parecida com à apresentada aqui resolveria este problema sem fazer uso de nenhum algoritmo, ou sem recorrer a termos geralmente ligados à proporcionalidade. Somente por meio das operações de multiplicação e divisão é possível resolver o problema.

Terceira adordagem

Podemos fazer o uso de uma proporção simples, relacionando as grandezas: *Latas* e *ml*.

$$\begin{array}{rcl} \text{Latas} & - & ml \\ 30 & - & 210 \\ x & - & 630 \end{array}$$

Como sabemos que optar pelas latas de 630 *ml* fará Felipe comprar menos latas, podemos afirmar que essas grandezas são inversamente proporcionais. Então:

$$\frac{x}{30} = \frac{210}{630} \;\Rightarrow$$

$$630\; x = 30 \times 210 \;\Rightarrow$$

$$x = \frac{6300}{630} \;=\; 10.$$

Portanto, Felipe precisará comprar apenas 10 latas de refrigerante se optar pelas latas de 630 *ml* de capacidade.

Quarta adordagem

Vamos construir os gráficos das funções $y = 210x$ e $y = 630x$, em que y é a quantidade de refrigente em *ml* e x é o número de latas.

Para construir os gráficos, atribuiremos a cada uma das funções $x = 0$ e $x = 1$ para calcular dois pontos.

Para $y = 210x$:

$$\begin{array}{lcl} \text{Se } x = 0 & \Rightarrow & y = 0. \\ \text{Se } x = 1 & \Rightarrow & y = 210. \end{array}$$

Para $y = 630x$, temos que:

$$\begin{array}{lcl} x = 0 & \Rightarrow & y = 0. \\ x = 1 & \Rightarrow & y = 630. \end{array}$$

O gráfico da função $y = 210x$ está representado na Figura 11 pela reta azul e $y = 630x$ está representado pela reta vermelha.

Observação: O gráfico da Figura 11 está fora de escala, o eixo das abscissas possui um passo de 10 em 10, já o eixo das ordenadas aumenta suas marcações de 1000 em 1000.

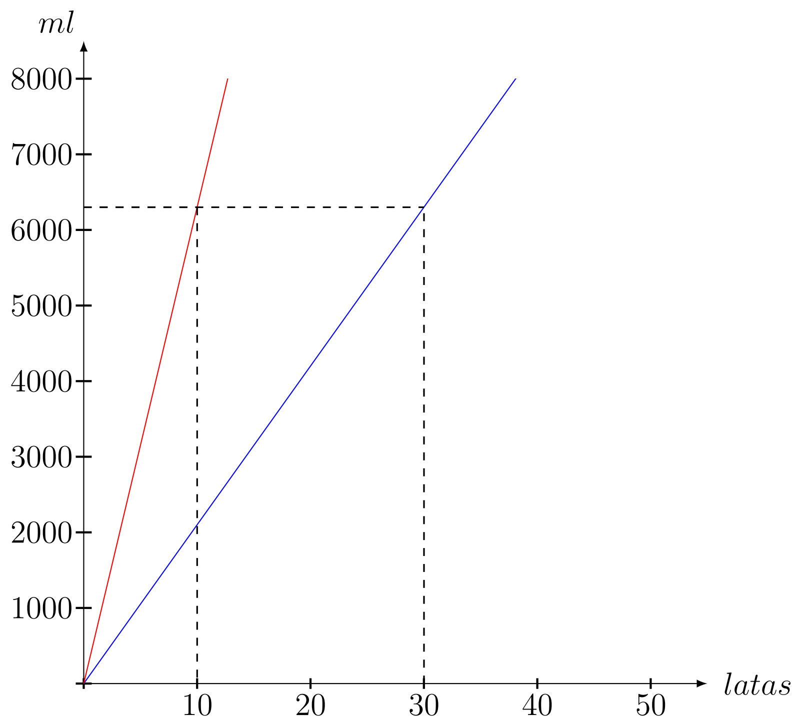


Figura 11 – Gráfico das funções $y = 210x$ e $y = 630x$.

Observando o gráfico da Figura 11, podemos concluir a partir da reta azul que são necessárias 30 latas para atingir 6000 ml (quantidade desejada por Felipe), em contrapartida, a reta vermelha atinge essa marca com apenas 10 unidades. O que nos permite responder o Problema 5.1.2 dizendo que Felipe deverá comprar 10 latas de 630 ml.

Problema 5.1.3. *Construindo Escalas Termométricas*

A seguir apresentaremos uma situação que faz parte do currículo de Fisíca do primeiro ano do Ensino Médio. Trouxemos esse problema por dois motivos: mostrar que a proporcionalidade extrapola a matemática e entender um pouco mais a relação da função afim com a proporcionalidade.

Mesmo que o modelo matemático para a proporcionalidade seja a função linear, as situações modeladas por funções afim apresentam um aumento constante depois de certo ponto e isso pode levar algumas pessoas a pensar que estão diante de uma situação proporcional. Essas questões podem ser chamadas de pseudoproporcionais, abordaremos esse tema mais adiante.

Sabemos que há mais de uma unidade para medir temperatura, a mais utilizada no mundo é a escala Celsius (de Anders Celsisus, 1701 – 1744), mas há também a escala Fahrenheit (de Daniel Gabriel Fahrenheit, 1686 – 1736) e a escala Kelvin (desenvolvida por William Thomson, também conhecido como lorde Kelvin, 1824 – 1907).

Para construir essas escalas termométricas foi utilizado um modelo antigo, de escolha de dois pontos fixos: a temperatura de fusão do gelo e da ebulição da água. Essas escalas tem como referência a altura de uma coluna de mercúrio, que aumenta ou diminui conforme temperatura varia.

Queremos estabelecer a relação entre duas escalas: Celsius e Fahrenheit. Para isso atribuimos os pontos fixos aos valores numéricos de temperaturas em cada uma das escalas. Fazendo isso, teremos na escala Celsius os pontos $100^0\ C$ e $0^0\ C$, calculando a diferenças entre esses pontos temos $100 - 0 = 100$, que é o número de divisões igual que essa escala possui. Realizando o mesmo procedimento para a escala Fahrenheit temos $212^0\ F$ e $32^0\ F$, cuja diferença $212 - 32 = 180$, número de divisões iguais da escala.

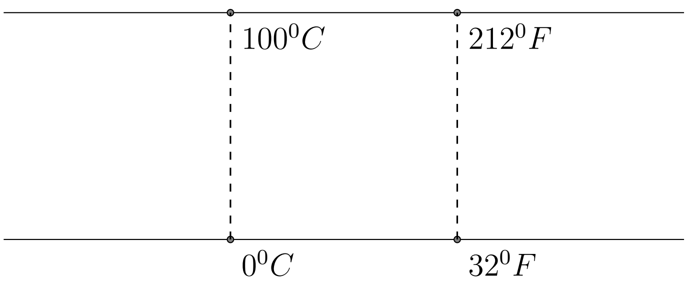


Figura 12 – Escalas: Celsius e Fahrenheit.

Percebam que há uma equivalência entre essas temperaturas, $100^0\ C$ e $212^0\ F$, assim como entre $0^0\ C$ e $32^0\ F$. Portanto, podemos dizer que as 100 partes da escala ^0C equivalem as 180 partes da escala ^0F. O tamanho da escala Celsius é 100 e o tamanho da escala Fahnreint é 180, isso quer dizer a relação entre a variação das escalas é uma relação proporcional, pois, para essas escalas, pra cada variação de uma unidade na escala Celsius temos uma variação de $1,8$ na escala Fahrenheit. Isso nos leva a pensar e discutir uma outra questão, se conseguimos relacionar essas variações enxergando proporcionalidade, poderíamos então afirmar que a relação matemática entre a temperatura em Celsius e Fahnreint também é uma relação proporcional?

Sabemos que os pontos fixos nos grantem que há uma lei que relaciona cada temperatura em graus ^0C à uma única temperatura em ^0F, basta agora descobrirmos se estamos trabalhando com uma situação proporcional.

Chamando de x a temperatura em ^0C, $f(x)$ a temperatura correspondente à x na escala ^0F e de h uma constante positiva; Podemos admitir que para uma certa temperatura x em ^0C temos uma temperatura correspondente $f(x)$ em ^0F e para uma certa temperatura $x + h$ em ^0C teremos uma temperatura correspondente $f(x + h)$ em ^0F.

Vamos primeiro descobrir se estamos trabalhando com uma função afim e a partir daí descobrir a natureza da situação, para isso iremos utilizar o teorema 4.4, que caracteriza as funções afim.

$Celsius$ (C)	$Fahrenheit$ (F)
100	212
$x+h$	$f(x+h)$
x	$f(x)$
0	32

Tabela 6 – Relação entre ${}^0C$ e ${}^0F$.

Observando a Tabela 6, notamos que na escala ${}^0C$ temos que a diferença entre $x+h$ e x é exatamente h, e sabemos que o tamanho dessa diferença representada por h é equivalente a diferença apresentada entre $f(x+h)$ e $f(x)$, ou seja, $f(x+h) - f(x) = h$.

Mas notem que estamos lidando com a diferença entre a variação das escalas, já falamos anteriormente que para cada variação em ${}^0C$ temos uma variação de $1,8$ em ${}^0F$, assim, para uma variação igual a h em ${}^0C$ temos uma variação correspondente a $1,8h$ em ${}^0F$.

Com isso, chegamos ao fato de que :

$$f(x+h) - f(x) = 1,8h,$$

o que significa dizer que a diferença entre $f(x+h) - f(x)$ depende apenas de h.

Logo, pelo teorema 4.4 podemos afirmar que a lei que relaciona a correspondência entre a temperatura x (marcada na escala ${}^0C$) e $f(x)$ (marcada na escala ${}^0F$) é uma função afim, ou seja, f é do tipo $f(x) = ax + b$.

Como 0^0C corresponde a 32^0F, temos:

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow f(0) = 32.$$

Portanto, $b = 32$ e $f(x) = ax + 32$.

Observação: O fato de $b = 32$ é suficiente para mostrarmos que a relação entre as temperaturas nas escalas termométricas não é proporcional.

Continuando, utilizando o fato de que $b = 32$ e $f(100) = 212$, temos:

$$\begin{aligned} f(100) &= 100a + 32 \ , \\ 212 &= 100a + 32 \ , \\ a &= 1,8 \ . \end{aligned}$$

Assim, $f(x) = 1,8x + 32$.

Realmente não se tratava de uma situação proporcional já que a função que estabelece as relações entre as grandezas é uma função afim e não uma função linear.

> [...] durante a aprendizagem formal da proporcionalidade direta os alunos devem trabalhar também com problemas que não envolvem a proporcionalidade direta. Em particular, o trabalho de sala de aula deve envolver problemas pseudoproporcionais, isto é, problemas que não envolvem proporcionalidade direta, mas geram nos alunos uma forte tendência para assumir a sua existência. (SILVESTRE; PONTE, 2013 apud COSTA; NUNES, 2016, p. 57).

A citação justifica o motivo pelo qual escolhemos inserir o problema 5.1.3 nesse capítulo, pois, reforça o nosso entendimento de que embora os problemas modelados por funções afim não sejam o mesmo modelo que define a proporcionalidade, essas situações servem de ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio proporcional e são de grande valor para a solução de diversos problemas que a princípio parecem ser proporcionais.

Podemos ver que apesar da correspondência entre as escalas não seja proporcional, alunos menos acostumados a trabalhar com proporcionalidade direta podem ser levados a pensar que estão diante de uma proporção, já que a variação de temperatura em uma escala está proporcionalmente ligada a variação de temperatura na outra.

No entanto, observando a variação entre essas temperaturas o aluno poderia descobrir o valor de $1,8$ e a partir daí utilizar de ferramentas e de um raciocínio proporcional para compreender e relacionar essas grandezas, mesmo que o resultado final não seja exatamente uma relação proporcional.

Escolhemos essa situação pois acreditamos que trabalhar com situações que parecem ser proporcionais, mas não são, fazem parte do estudo da proporcionalidade. Uma das habilidades que nossos alunos precisam desenvolver é reconhecer situações proporcionais e não proporcionais, identificando as diferenças entre elas.

Observação: Para que o leitor possa refletir ainda mais, separamos exemplos de situações pseudoproporcionais.

- Em um chiqueiro, um porco come sua porção de ração diária no cocho (comum e com espaço para manter a ração de todos os porcos) em 40 segundos. Assim, dois porcos comeriam suas porções diárias em quantos segundos?

- Praticando um determinado ritmo de corridas consigo emagrecer 2 kg por semana. Considerando que tenho 120 kg, se eu manter essse mesmo ritmo durante 50 semanas vou chegar aos 0 kg?

- Gabriela colocou uma toalha no varal e esta demorou 30 minutos para secar. Quanto tempo 3 toalhas demoram para secar?

Problema 5.1.4. *Uma pessoa deseja adquirir um plano de telefonia celular e está avaliando 3 propostas. As empresas são: A, B e C, a seguir os valores e funcionamento de cada plano.*

O plano A cobra uma taxa fixa de R\$ 5,00 e mais R\$ 0,40 para cada minuto falado. O plano B cobra R\$ 10,00 de valor fixo mais o custo de R\$ 0,30 por minuto falado. E, por fim, o plano C oferece a seguinte condição: o cliente paga R\$ 0,50 por cada minuto falado, sem taxa fixa.

Analisando a situação, responda:

a) Qual o plano mais vantajoso para a pessoa falar apenas 25 minutos?

b) A partir de qual minuto o plano B se torna o mais vantajoso?

c) Possuindo R\$ 25,00, a pessoa fala mais em qual plano?

A essa altura podemos perceber que os planos descritos no problemas são situações que podem ser modeladas utilizando funções afim, onde x são os minutos falados e y é valor a ser pago em Reais.

Dessa maneira, o plano A pode ser modelo pela função $y = 0,4x + 5$, o plano B por $y = 0,3x + 10$ e o plano C por $y = 0,50x$.

Repare que embora só uma das funções seja linear (plano C), podemos reconhecer que há um valor constante em todas as situações, já que o acréscimo que cada minuto falado acumula no preço a ser pago no plano A é sempre 40 centavos, da mesma forma, no plano B é 30 centavos, isso revela um padrão.

De qualquer maneira, somente a situação referente ao plano C estabelece uma relação de proporcionalidade entre o preço a ser pago (em R\$) e os minutos falados, doravante vamos explorar um pouco mais essa ideia.

Para responder as questões faremos uso dos gráficos dessas funções. Na construção dos gráficos precisamos de dois pontos de cada uma das funções, para isso, vamos atribuir os valores de $x = 0$ e $y = 25$ em todos os casos. Isso porque para $x = 0$, temos o ponto de encontro com o eixo y e fazendo $y = 25$ seremos capazes de responder o item c) do Problema 5.1.3.

Começando pela função $y = 0,4x + 5$, segue que:

$$\text{se } x = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Quando $y = 25$, temos que:

$$25 = 0,4x + 5,$$

$$20 = 0,4x,$$

$$50 = x.$$

Para o gráfico da situação B: $y = 0,4x + 5$ temos os pontos $(0, 5)$ e $(50, 25)$, que está representado na Figura 14 na cor verde.

Tomando $y = 0,3x + 10$ que representa a situação B temos que:

$$\text{se } x = 0, \text{ então } y = 10.$$

Por outro lado, se $y = 25$, temos que:

$$25 = 0,3x + 10,$$

$$15 = 0,3x,$$

$$50 = x.$$

Assim, para o gráfico da situação B: $y = 0,3x + 10$ temos os pontos $(0, 10)$ e $(50, 25)$, que está representado na Figura 13 na cor azul.

Repetindo o mesmo processo para $y = 0,5x$, então:

$$\text{se } x = 0, \text{ então } y = 0.$$

Se $y = 25$, temos que:

$$25 = 0,4x + 5,$$

$$20 = 0,4x,$$

$$50 = x.$$

Por fim, chegamos nos pontos $(0, 0)$ e $(50, 25)$ para o gráfico de $0,5x$, que está representado na Figura 13 na cor vermelha.

Observação: Destacamos que no gráfico presente na Figura 13, o eixo das abscissas tem a primeira marcação no valor 10 com um passo de 10 em 10, já o eixo das ordenadas possui a primeira marcação em 5 com um aumento de 5 entre as marcações.

Analisando a Figura 13 podemos responder os itens de a) à c) e debater questões significativas a respeito da situação.

Respondendo o item a) o plano B se mostra mais vantajoso para alguém que pretende falar apenas 25 minutos, podemos observar que o maior valor alcançado no eixo das ordenada quando $x = 25$ é o valor da reta azul, que representa o plano B.

Para o item b) devemos observar a reta azul pois, queremos saber a partir de qual minuto o plano B se apresenta mais vantajoso; Para tanto, é preciso observar o ponto de encontro entre as três retas marcado no gráfico, já que sabemos que nesse ponto os planos

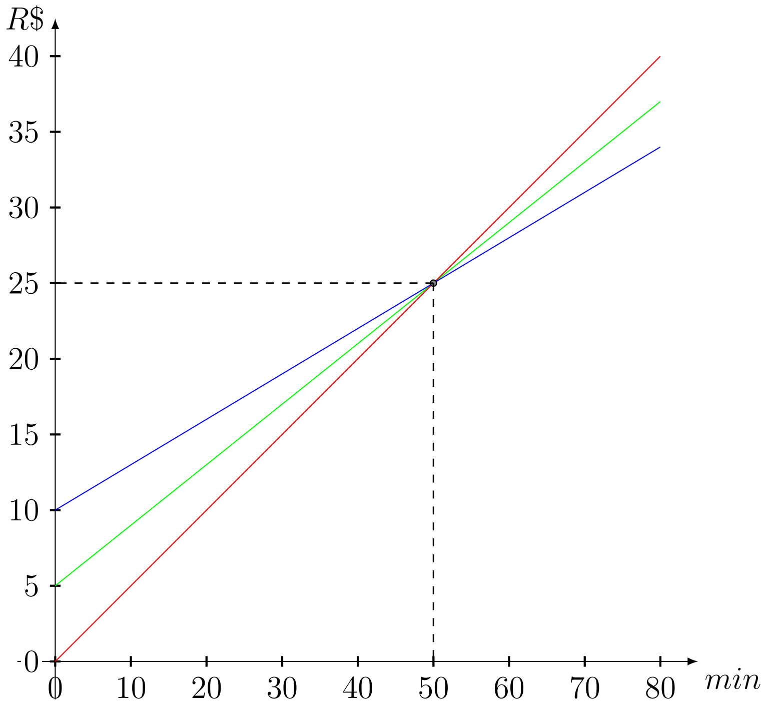


Figura 13 – Gráfico dos planos A, B e C.

custam a mesma quantia. No entanto, a partir desse ponto em diante a reta do plano B está sempre “abaixo” das outras retas, assumindo valores menores para y, o que significa uma quantia em R\$ menor, o que nos permite dizer que a partir do minuto 50 em diante é preferível optar pelo plano B.

Para responder o item c) temos que analisar o valor de R\$ $25,00$ do eixo das ordenadas e ver qual reta possui o maior valor de x para tal correspondência em y.

Talvez essa seja a resposta mais simples de ser extraída com posse do gráfico, já que há um ponto de encontro entre as três retas quando $x = 50$, ou seja, isso significa que para falar 50 minutos todos os três planos vão cobrar a mesma quantia.

Mais uma vez, fizemos o uso dos gráficos das funções para solucionarmos um problema. No entanto, gostaríamos de propor um debate sob a perspectiva de uma abordagem qualitativa, já que nessa situação construímos as respostas sem refletir sobre os números encontrados. Muitas vezes a abordagem qualitativa é fundamental para sabermos se os números encontrados são de fatos as respostas corretas.

Por exemplo, o Problema 5.1.4 no item b) nos pergunta sobre a possibilidade do plano B ser mais vantajoso em algum momento. Nessa situação, o aluno mais atento talvez fosse capaz de reconhecer, mesmo sem executar cálculos que é muito provável que isso ocorra, já que o coeficiente multiplicativo de x na função que representa o plano B é menor se comparado aos coeficientes de x das funções do plano A e C.

Reflexões desse tipo podem ser uma estratégia para o desenvolvimento do raciocínio proporcional por parte dos alunos. As vezes temos situações em que os números obtidos podem até ser extraídos de maneira matematicamente correta mas não fazem sentido no final. Por exemplo, se extrapolarmos os modelos obtidos aqui para todos o conjunto dos $\mathbb{Z}$ poderíamos chegar a conclusões de que alguém falando -20 minutos no plano C teria uma conta igual a R\$ $10,00$ negativos, mas é claro que esses valores são impossíveis. Isso mostra a necessidade sempre de interpretar e enxergar o contexto ao qual as situações estão submetidas.

O questionamento dos números e até mesmo das respostas ajuda muito no desenvolvimento de uma maturidade matemática. Nessa perspectiva, acreditamos que o aluno que seja capaz de ter essas percepções poderá manifestar um maior esclarecimento sobre problemas matemáticos.

Problema 5.1.5. *Um batalhão de um Exército com 100 soldados deve realizar uma missão em 14 dias. Seu suprimento de água permite que cada soldado consuma 2,5 litros de água por dia. Após 10 dias, 50 novos soldados se juntam ao grupo para a realização da missão.*

Responda:

a) Quantos litros de água por dia cada soldado deverá consumir agora se o Exército seguir com a mesma missão planejada?

b) Se os 150 soldados continuarem consumindo água como antes, em quantos dias, no máximo, será necessário mais água?

Na busca por solucionar o Problema 5.1.5 e responder os itens a) e b) devemos antes entender que houve uma alteração no número de soldados após os primeiros 10 dias.

De acordo com a primeira estratégia do Exército, a quantidade de água para a realização da missão, deveria ser de:

$$100 \times 2,5 \times 14 = 3500.$$

O que significa que esse exército tinha disponível 3500 l de água para a realização da missão.

Sabemos que durante os 10 primeiros dias, cada um dos 100 soldados consumiu diariamente $2,5$ l de água. Assim,

$$100 \times 2,5 \times 10 = 2500,$$

ou seja, nos 10 primeiros dias o exercíto consumiu 2500 dos 3500 litros de água disponíveis. O que resulta em:

$$3500 - 2500 = 1000.$$

Portanto, há 1000 l de água disponíveis para os soldados nos próximos 4 dias de missão.

Agora, de posse desses dados podemos começar a responder o item a).

Gostaríamos de começar refletindo sobre uma questão: Após o acréscimo de 50 soldados no grupo, cada um poderá beber mais ou menos água por dia?

É evidente que o número de água disponível diariamente para cada soldado será menor, já que são mais pessoas consumindo. Sendo assim, podemos ter certeza de que depois da chegada dos novos soldados, todos vão consumir menos que $2,5\ l$ de água por dia.

Importante notar que a resposta para uma pergunta dessas é natural e não depende do conhecimento de algoritmos. Por isso acreditamos que esse tipo pergunta deve ser feita pelos alunos e para os alunos.

Como sabemos que há $1000\ l$ de água ainda disponíveis, devemos dividir essa quantia para 150 soldados durante 4 dias. Então:

$$\frac{1000\ l}{4\ dias} = 250\ l \text{ por } dia$$

Há então $250\ l$ para que todos os 150 soldados possam consumir.

$$\frac{250}{150} = 1,666\ldots$$

Ou seja, cada soldado deverá consumir $1,666\ldots$ litros de água por dia nos 4 dias restantes.

Vamos solucionar o item b) graficamente, para isso devemos ter em mente que para os 4 dias restantes sobraram $1000\ l$ de água, que devem ser divididos agora entre 150 soldados.

Agora, com mais soldados no batalhão é fácil perceber que se os soldados continuarem bebendo a mesma quantidade que estava prevista anteriormente, faltará água antes do final da missão. Então, vamos calcular quantos litros de água serão necessários por dia se os 150 soldados continuarem consumindo $2,5\ l$ de água.

$$2,5 \times 150 = 375,$$

o que significa que por dia serão consumidos 375 litros de água.

Sejam, x e y, o número de dias e a quantidade de água consumida, respectivamente. Temos que $y = 375x$ é a função que representa o consumo de água por dia desse batalhão.

Para a construção da reta $y = 375x$ no plano precisamos de dois pontos. Então, fazendo $x = 0$ e $x = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \text{se } x = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = 0, \\ \text{se } x = 1 \quad &\Rightarrow \quad y = 375. \end{aligned}$$

Dessa forma, possuimos os pontos $(0,0)$ e $(1,375)$.

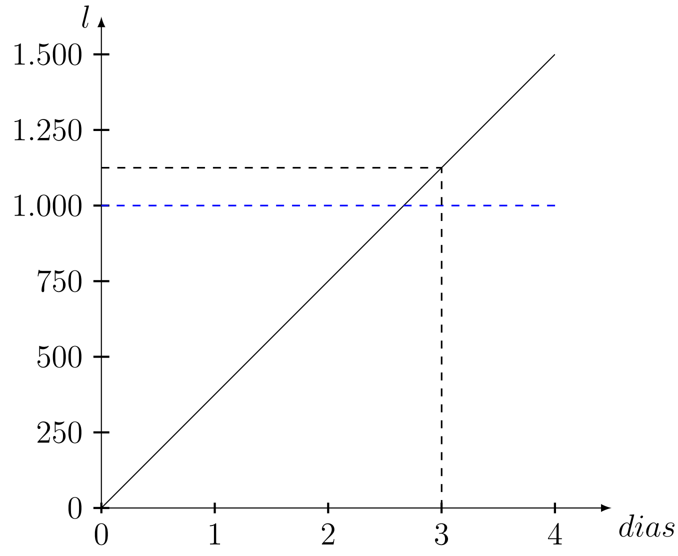


Figura 14 – Quantidade de água em l por dia.

Podemos perceber observando o gráfico da Figura 14 que o valor $y = 1000$ é atingido pela reta antes do final de dias da missão. Mais precisamente, podemos notar que para $x = 3$, temos um valor de y maior do que 1000 (limite de água restante), o que significa, que já no terceiro dia seria necessário mais água.

Problema 5.1.6. *Luna está interessada em uma coleção de histórias em quadrinhos que possui 16 volumes. Sabendo que cada volume dessa coleção custa R$ 13,50 e que ela possui R$ 212,00, Luna conseguirá comprar toda a coleção?*

Por se tratar também de uma situação de proporcionalidade direta entre a quantidade de volumes comprados e o preço pago, todas as abordagens utilizadas anteriormente em problemas de mesma natureza são válidas.

No entanto, aqui queremos apresentar uma maneira um pouco diferente das anteriores, mas que também faz uso de conceitos e ideias relacionadas a proporcionalidade.

Podemos pensar na razão entre a quantidade de dinheiro possuído por Luna e o preço de cada unidade de quadrinho:

$$\frac{212}{16} = 13,25.$$

Antes de mais nada, devemos estar cientes que o valor encontrado representa o preço que cada volume do quadrinho deve custar para que R\$ $212,00$ seja suficiente para adquirir exatamente 16 unidades.

Observe que o valor encontrado, R\$ $13,25$ é menor do que o R\$ $13,50$, isso significa que ela não conseguirá comprar toda a coleção. Para que fosse possível comprar 16 unidades, o valor de cada volume teria que ser no máximo R\$ $13,25$.

Evidente que com apenas esse cálculo não podemos afirmar a quantidade de unidades de volumes que Luna poderá comprar, no entanto, esse não é o conteúdo da pergunta do problema 5.1.6.

A fim de representar no plano cartesiano o gráfico da função que modela o problema 5.1.6, chamaremos de x a quantidade de volumes comprados e de y o preço total a ser pago em R\$, como essa é uma situação proporcional, temos certeza de que a função será uma função linear, nesse caso, mais especificamente $y = 13,5x$.

Precisamos de dois pontos para construir o gráfico de $f(x) = 13,5x$. Temos que o $(0,0)$, origem do plano, faz parte da reta $y = 13,5x$, já que se Luna não comprar nenhum volume do quadrinho então não terá que pagar nada também.

O outro ponto calcularemos a partir do preço de 16 volumes, isto é, o valor de $f(x)$ para a situação em que $x = 16$, então:

$$
\begin{aligned}
f(x) = &\quad 13,50x,\\
f(16) = &\quad 13,50 \times 16,\\
f(16) = &\quad 216.
\end{aligned}
$$

O que nos fornce o ponto $(16,216)$. Agora marcaremos os dois pontos no gráfico para que possamos construir a reta $y = 13,5x$.

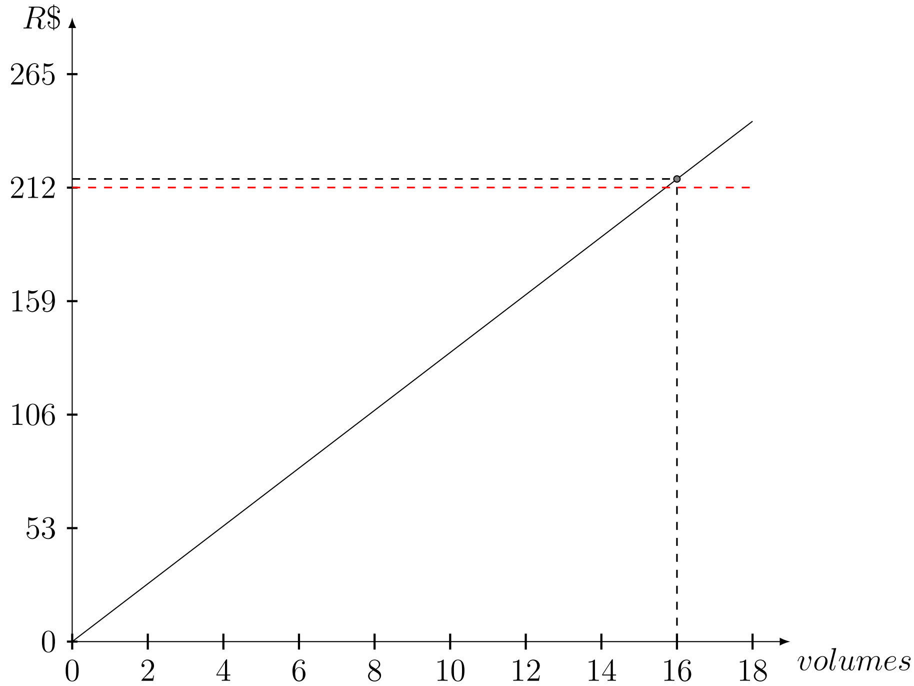


Figura 15 – Gráfico que relaciona o preço por volume comprado.

Podemos ver que o gráfico presente na Figura 15 possui uma marcação que varia de 2 em 2 no eixo das abscissas e de 53 em 53 no eixo das ordenadas.

É sabido, pois já calculamos, que para comprar 16 volumes do quadrinho Luna precisará de R\$ $216,00$, esse valor é superior a R\$ $212,00$ (quantidade possuída por ela). Notem que tracejado vermelho no gráfico destaca esse valor. Observando a figura 15 também podemos verificar que Luna não conseguirá comprar toda coleção.

Esse é mais um exemplo da relação entre as representações gráficas de funções que modelam os problemas de variação e dependência entre grandezas diretamente proporcionais.

Esperamos que os alunos, ao se depararem com situações semelhantes ao problema 5.1.6, sejam capazes de criar e interpretar as representações das funções que modelam esses problemas no plano.

6 Proporcionalidade Inversa e sua Função

Nesse capítulo vamos explorar o conceito de proporcionalidade inversa e o gráfico dessa relação no plano cartesiano através de alguns exemplos. Em capítulos anteriores exploramos a relação de proporcionalidade e os gráficos das funções afins, sobretudo as lineares. No entanto, as grandezas inversamente proporcionais não se traduzem por meio de retas no plano.

Trataremos de situações sobre proporcionalidade inversa na tentantiva de entender e solucionar os exemplos por meio da construção dos gráficos, mostrando que com os conhecimentos sobre grandezas inversamente proporcionais podemos estabelecer relações com outros tipos de representações gráficas que não se resumem a retas.

No capítulo 3 do atual texto definimos proporcionalidade inversa como sendo a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números $c, x \in \mathbb{R}^*$, em que x é a variável e c é uma constante arbitrária, tem se

$$f(cx) = \frac{f(x)}{c}. \tag{6.1}$$

Sejam x, y e $a \in \mathbb{R}^*$, trocando $f(cx)$ por y, $f(x)$ por a e c por x na equação 6.1, temos:

$$y = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x \cdot y = a.$$

Note que o valor a é o produto entre x e y. A partir dessa ideia podemos apresentar uma outra definição (equivalente) de grandezas inversamente proporcionais.

Definição 6.0.1. *Duas variáveis x e y são inversamente proporcionais se o produto $x.y$ é uma constante não nula. Ou seja,*

$$x \cdot y = a.$$

O importante de se destacar é o fato de a ser um valor não nulo, isto é, diferente de 0, faz com que os fatores x e y sejam diferentes de 0 também.

Note que a definição 6.0.1 é equivalente a definição 4.2.4 anteriormente apresentada, ou seja, não há uma definição mais ou menos correta que a outra, apenas abordagens diferentes. Como já abordado, naquela ocasião estávamos tratando de funções e dos casos de proporcionalidade em geral, fossem elas inversa ou diretamente proporcionais. Já nesse capítulo, nosso foco é inteiramente nas relações de proporcionalidade inversa e sua função no gráfico.

Voltando a definição 6.0.1, escolhemos apresentá-la pois acreditamos que representar grandezas inversamente proporcionais como sendo um produto constante pode nos ajudar a construir a representação gráfica da situação (mesmo não conhecendo previamente sua função). Tentaremos mostrar através dos exemplos a seguir que pensar em grandezas inversamente proporcionais sob essa ótica pode ser um aliado no entendimento dessas situações e poderá trazer vantagens para a construção da representação gráfica. Acreditamos que um "olhar" diferente sobre essas situações pode gerar um novo entendimento para o aluno, e a partir daí construirmos um caminho para desenvolvimento de conceitos e ideias que antes poderiam soar desconexas ou difíceis.

6.1 O gráfico de $y = \dfrac{a}{x}$

Antes de partirmos para os exemplos, gostaríamos de apresentar brevemente o gráfico da função do tipo $y = \dfrac{a}{x}$. Até esse momento, trabalhamos somente com gráficos de retas no plano. No entanto, o gráfico de $y = \dfrac{a}{x}$, que é a relação que representa os casos de proporcionalidade inversa, não é uma reta.

A relação $y = \dfrac{a}{x}$ se trata de uma hipérbole, conceito que por sua vez é costumeiramente apresentado nos anos finais do ensino médio, muito posterior ao próprio conceito de proporcionalidade inversa. Nosso objetivo então é mostrar que os alunos que possuem conhecimentos a respeito de situações de proporcionalidade inversa (sejam eles do ensino médio ou não) podem sim aprender a construir o gráfico de uma hipérbole (ao menos do que chamamos de ramo positivo, parte destacada no gráfico da Figura 16) desde que usem como trampolim os conhecimentos já adquiridos.

Para termos um exemplo de como são os gráficos de uma hipérbole, vamos construir o gráfico da função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Notem que devemos ter $x \neq 0$ já que $y = 1/x$, portanto, o valor 0 não faz parte do domínio de f nesse caso.

Para gerar os pontos desse gráfico vamos calcular os valores respectivos de y para as situações em que os valores de x são cada vez maiores e para situações em que x são cada vez menores. Os resultados obtidos nesse processo estão na Tabela 7.

Considerando os valores da tabela 7, tomando os valores de x e y de cada linha, combinando negativos com negativo e positivo com positivo, temos os pontos (x, y) para construir a função $y = 1/x$.

Observação: Na Figura 16 podemos visualizar uma parte do gráfico em vermelho, trata-se da parte positiva do gráfico, chamada muitas vezes de ramo positivo. Detacamos o ramo positivo justamente por ser essa a parte do gráfico que traduz os problemas que envolvem proporcionalidade inversa.

Vale ressaltar que nesse capítulo não queremos explorar o conceito de hipérbole para além da construção do seu gráfico a partir das relações entre grandezas inversamente

x	$y = 1/x$
$\pm$ 1000	$\pm$ 0,001
$\pm$ 100	$\pm$ 0,01
$\pm$ 10	$\pm$ 0,1
$\pm$ 5	$\pm$ 0,2
$\pm$ 2	$\pm$ 0,5
$\pm$ 1	$\pm$ 1
$\pm$ 0.5	$\pm$ 2
$\pm$ 0.2	$\pm$ 5
$\pm$ 0,1	$\pm$ 10
$\pm$ 0,01	$\pm$ 100
$\pm$ 0,001	$\pm$ 1000

Tabela 7 – Pontos para construção do gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$.

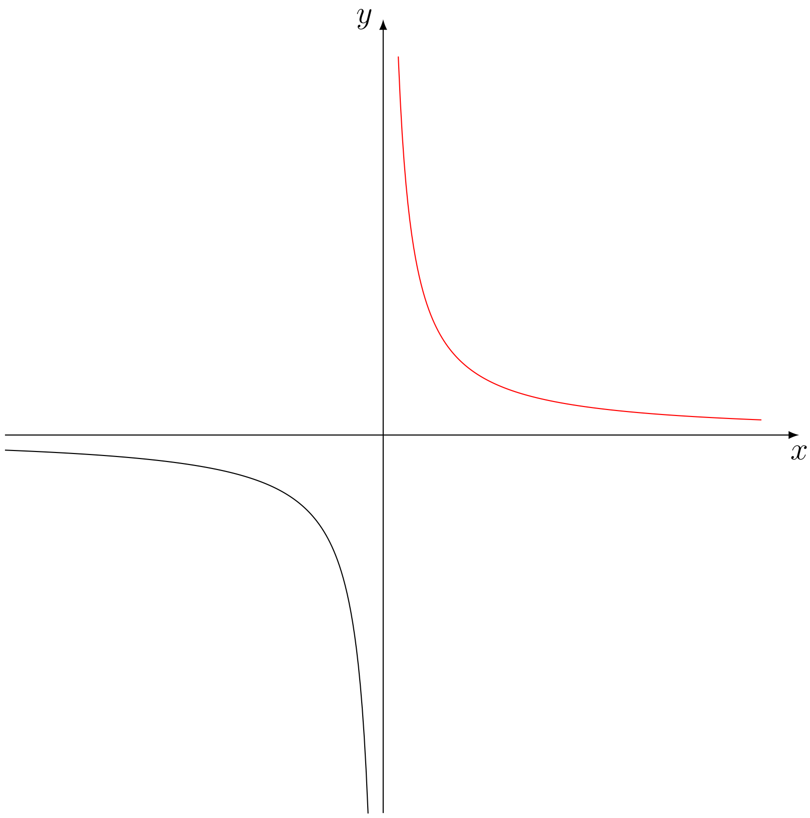


Figura 16 – Gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$.

proporcionais. Sugerimos ao leitor que desejar um maior entendimento sobre hipérboles buscar leituras que tratam o tema com a profundidade e atenção devida, uma recomendação é J. Delgado et al. (2017), livro que pertence a coleção PROFMAT e usado na disciplina MA23 do PROFMAT, que utilizei em minha formação no curso de mestrado.

De antemão, queremos esclarecer que costumeiramente a hipérbole é apresentada como cônica (pois sua curva pode ser obtida através da secção de um cone) nos anos finais do ensino médio dentro dos conteúdos de Geometria analítica. A hipérbole é um conceito matemático amplamente difundido e com aplicações em diversos campo, como por exemplo: na Arquiterura, Engenharia Civil, Navegação, na Física na modelagem de equações, como Lei de Boyle, na astronomia ajudando a construir telescópios refletores e descrever órbitas de cometas, entre muitas outras, e não se resume à geometria ou somente relação com os casos de proporcionalidade inversa.

Queremos chamar atenção para o fato de não ser comum ver o conceito de proporcionaliade inversa ser apresentado na escola acompanhado do conceito de hipérbole e vice-versa, portanto, apresentando ambos os conceitos concomitante podemos exemplificar mais uma vez a interpredisciplinaridade dentro da própria matemática, fazendo com que o aluno chegue à construção do gráfico da hipérbole discutindo as ideias de proporcionalidade inversa por meio de problemas.

A seguir apresentaremos alguns exemplos para que possamos entender a relação entre grandezas proporcionais e sua representação gráfica.

Exemplo 6.1.1. *Considere um retângulo de área* 24*. Mantendo a área constante, analise o que acontece com um dos lados desse retângulo quando alteramos o valor do outro lado.*

Nesse exemplo, devemos buscar vários retângulos cuja a área é sempre 24 e observar o comportamento de um dos lados quando aumentamos ou diminuimos o outro.

Sejam x e y, os lados dos retângulos devemos primeiramente, saber que como calcular a área de um retângulo, assim, temos que

$$x \cdot y = 24.$$

No caso, vamos utilizar a Tabela 8 e fazer uso apenas dos números naturais, meramente pela facilidade que tais números trazem aos cálculos, mas todo o processo que faremos também é válido para os números reais, desde que x e y sejam positivos e satisfaçam a condição $(x \cdot y = 24)$.

Comprimento (x)	*Largura* (y)	A
1	24	24
2	12	24
3	8	24
4	6	24
6	4	24
8	3	24
12	2	24
24	1	24

Tabela 8 – Retângulos de lados x, y e área 24.

Pelo fato do valor A se manter constante, quando dobramos o valor de x temos o valor de y dividido por 2, quando dividimos x por 2 temos o valor de y multiplicado por 2. Está claro que estamos trabalhando com uma situação de proporcionalidade inversa.

Já é sabido que $x \cdot y = 24$, portanto, podemos reescrever a relação como

$$y = \frac{24}{x}.$$

Vamos construir o gráfico de $y = 24/x$. Para isso, utilizaremos somente os nossos conhecimentos de propocionalidade inseridos no contexto de um problema de áreas de retângulos e nos apoiaremos nos resutados obtidos na Tabela 8.

No plano cartesiano construiremos os retângulos de área 24, o que será feito marcando um dos vértices na origem (para todos os retângulos) e o vértice oposto a esse será marcado na coordenada de valores de x e y da tabela. Ou seja, para marcar o retângulo de lados 1 e 24, marcaremos o ponto $(1, 24)$ e tracaremos as coordenadas. Depois disso, vamos ligar todos esses vértices e ver o que encontramos.

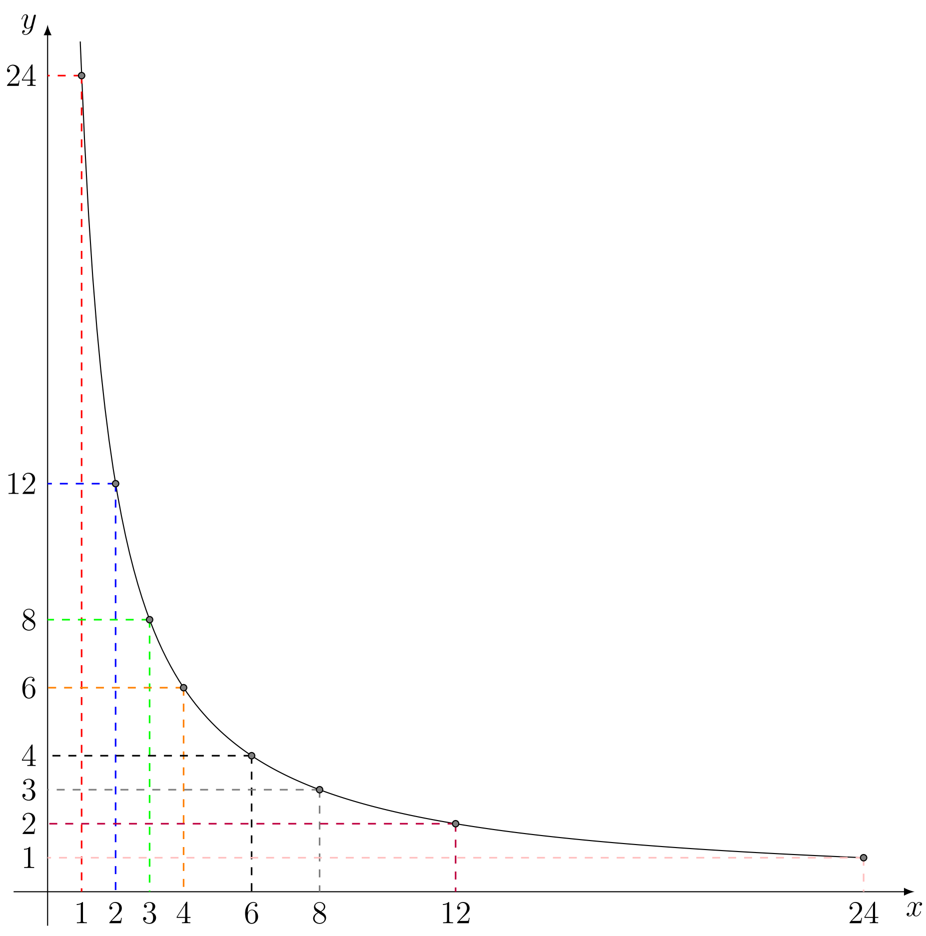


Figura 17 – Gráfico de $y = \dfrac{24}{x}$.

Podemos ver que quando ligamos os pontos temos uma curva muito diferente de uma reta (que é o gráfico que define a função da proporcionalidade direta). O gráfico da Figura

17 é uma hipérbole, mais precisamente, o ramo positvo da hipérbole de equação $y = \dfrac{24}{x}$ (dada a natureza do problema).

Como já mencionado, a hipérbole é um conceito estudado na geometria analítica, tema geralmente guardado para o ano final ensino médio. Nesse exemplo, mostramos que o aluno que conhecesse a relação de proporcionalidade inversa, bem como área de retângulos e marcações no plano cartesiano seria capaz de construir um ramo de uma hibérbole, um assunto mais avançado se comparados com os já citados.

Esse é mais um exemplo de que a proporcionalidade pode ser um elo entre os diversos temas estudados na matemática, pois, tivemos a relação de proporcionalidade entre duas grandezas sendo discutida de maneira conjunta a conhecimentos geométricos e o conceito de função no plano cartesiano, construindo o que sabemos ser uma hipérbole.

Basicamente, a estratégia aqui utilizada foi uma proposta de mediar e desenvolver a capacidade de relacionar os diversos conteúdos a partir de conhecimentos já adquiridos, o que acreditamos ser possível de ser replicada também em oportunidades futuras pelos alunos, para que possam partir de coisas já conhecidas e chegar a outros resultados.

Exemplo 6.1.2. *Marcela viaja todo final de semana para a casa dos seus pais, o percurso tem 200 km ao todo. O que acontece com o tempo de viagem se ela aumentar a velocidade?*

Da Física, conhecemos a seguinte relação entre velocidade (v), tempo (t) e distância(d),

$$v = \frac{d}{t}.$$

Nessa situação, substituindo $d = 200$, temos que:

$$v = \frac{200}{t} \;\Leftrightarrow\; v \cdot t = 200.$$

Vamos calcular os valores do tempo da viagem marcado em horas h e a velocidade em km/h, anotando os resultados na tabela 9 e depois vamos utilizar tais valores para marcar pontos no plano cartesiano e assim construir a função que representa essa situação

$$t = \frac{200}{v}.$$

Importante ressaltar que dado o que o exemplo 6.1.2 nos pede, queremos apenas entender a relação entre essas grandezas e representar esse comportamento no gráfico, isso nos fará calcular valores de t e v que na prática não fariam muito sentido numa situação real, como por exemplo, fazer uma viagem a 200 km/h ou a 20 km/h de velocidade média.

Agora, marcaremos os pontos utilizando os resultados obtidos na Tabela 9, representando os valores do tempo (h) no eixo das ordenadas e marcando os respectivos valores de km/h no eixo das abscissas.

km/h	$tempo(h)$
200	1
100	2
50	4
40	5
20	10

Tabela 9 – Relação entre velocidade e tempo em um viagem de 200 km.

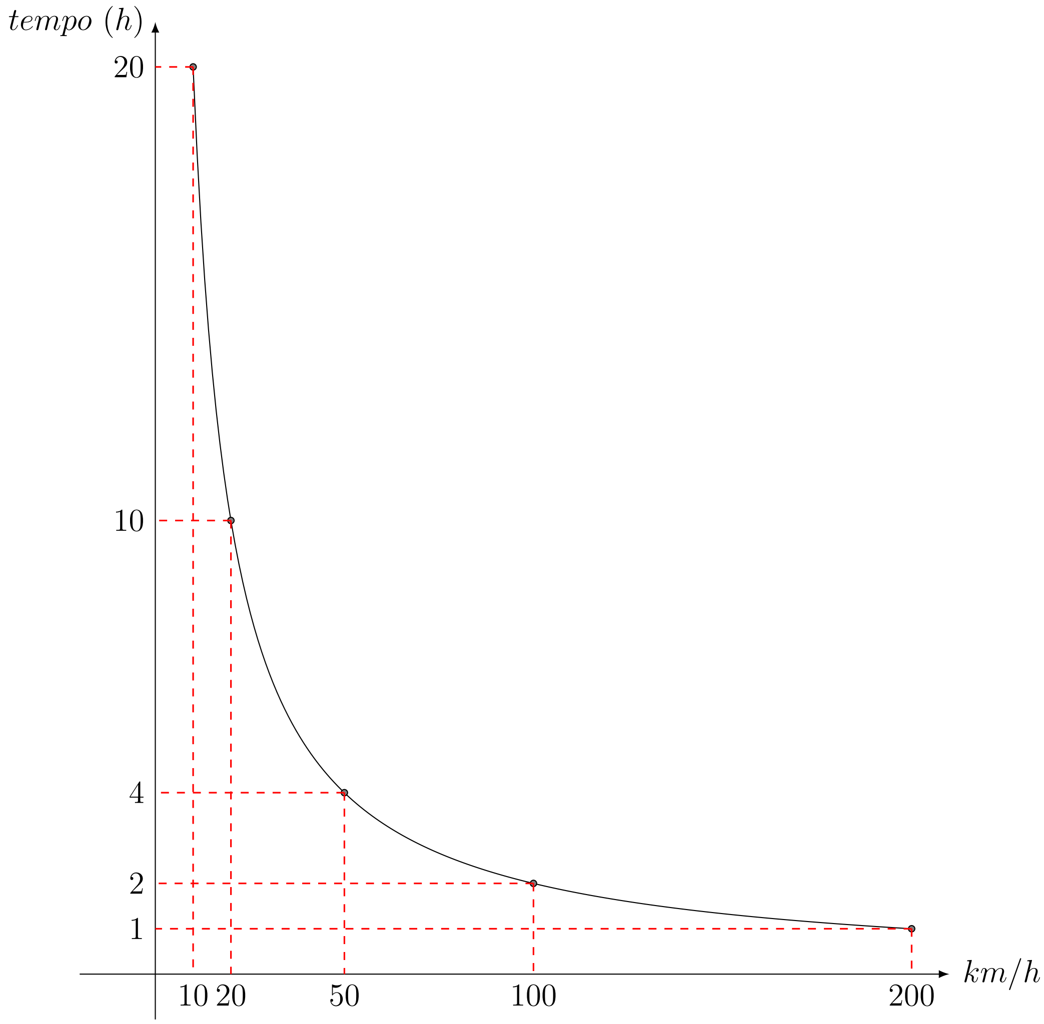


Figura 18 – Gráfico de $y = \dfrac{200}{x}$.

Observação: No gráfico da Figura 18 queremos destacar que os eixos coordenados não em mesma escala. Podemos perceber que em ambos eixos, sejam os das abscissas ou ordenadas, estão marcados os pontos obtidos na Tabela 9.

Queremos destacar que reconhecendo que as grandezas v e t são inversamente proporcionais e marcando apenas os retângulos e os 6 pontos, seríamos capazes de traçar o gráfico da hipérbole $y = 200/x$.

Concluímos e mostramos que a relação presente entre velocidade e tempo gasto numa viagem são inversamente proporcionais e os valores da Tabela 9 e o gráfico da Figura 18 representam isso com exatidão, mostrando que um aumento em uma das grandezas gera uma diminuição proporcional na outra e vice-versa.

Exemplo 6.1.3. *Para cumprir o prazo de entrega de uma obra, 25 pedreiros trabalham 10 horas por dia. O que acontece com o número horas trabalhadas se dimunuirmos a quantidade de pedreiros nessa obra, sem alterar o prazo de entrega.*

Pelo enunciado do problema, a primeira reflexão que devemos ter é reconhecer as grandezas e depois verificar se essas grandezas são direta ou inversamente proporcionais.

Estamos contando o número de pedreiros e horas trabalhadas por dia, então, essas são as duas grandezas do exemplo 6.1.3.

Na situação de uma obra, onde há um trabalho em conjunto a ser realizado, mais pessoas ajudando implica em menos horas trabalhadas por dia à todos, da mesma forma, uma redução na quantidade de pedreiros faria com que cada um deles trabalhassem mais horas durante os dias de serviço, portanto, nesse caso, as grandezas: pedreiros e horas trabalhadas por dia são inversamente proporcionais.

Assim, chamando y de horas trabalhadas por dia e de x a quantidade de pedreiros, podemos relacionar matemáticamente a situação da seguinte maneira:

$$y = \frac{250}{x}.$$

Vamos calcular alguns valores de y e x que satisfazem $y = 250/x$.

Para $x = 20$, temos:

$$y = \frac{250}{20} = 12,5.$$

Para $x = 15$, temos:

$$y = \frac{250}{15} = 16,666\ldots.$$

Para $x = 10$, temos:

$$y = \frac{250}{10} = 25.$$

Para $x = 5$, temos:

$$y = \frac{250}{5} = 50.$$

Para $x = 1$, temos:

$$y = \frac{250}{1} = 250.$$

Podemos concluir que o valor de y sempre aumenta na medida que o valor de x diminui.

Os valores encontrados nos ajuda a responder o que o exemplo 6.1.3 nos pede, já que nos é perguntado o que "acontece" com o valor de y quando diminuimos o valor de x, o que nos leva a pensar que devemos destacar o comportamento dessa situação e tentar explicar atráves de números ou outras representações a relação entre essas grandezas.

Já conseguimos perceber que o valor y sempre aumenta a medida que o valor de x diminui. Vamos agora construir o gráfico de $y = \dfrac{250}{x}$ para exemplificar a situação.

Antes, porém, há algo que queremos chamar atenção, calculando os valores para x e y vimos que com 10 pedreiros o número de horas a ser trabalhadas por dia é 25, ou seja, uma situação impossível (já que um dia possui 24 horas), da mesma maneira, qualquer valor menor que 10 pedreiros implica em um número de horas maior do que 25 e portanto, temos outras situações impossíveis no mundo real.

Os valores encontrados para y em cada caso de x que calculamos formaram para nós os pontos:

x	y
1	250
5	50
10	25
15	$16,666\ldots$
20	$12,5$
25	10

Tabela 10 – Pontos (x, y) da função $y = \dfrac{250}{x}$.

Marcaremos no plano cartesiano os pontos presentes na Tabela 10 para construir o gráfico da função

$$y = \frac{250}{x}.$$

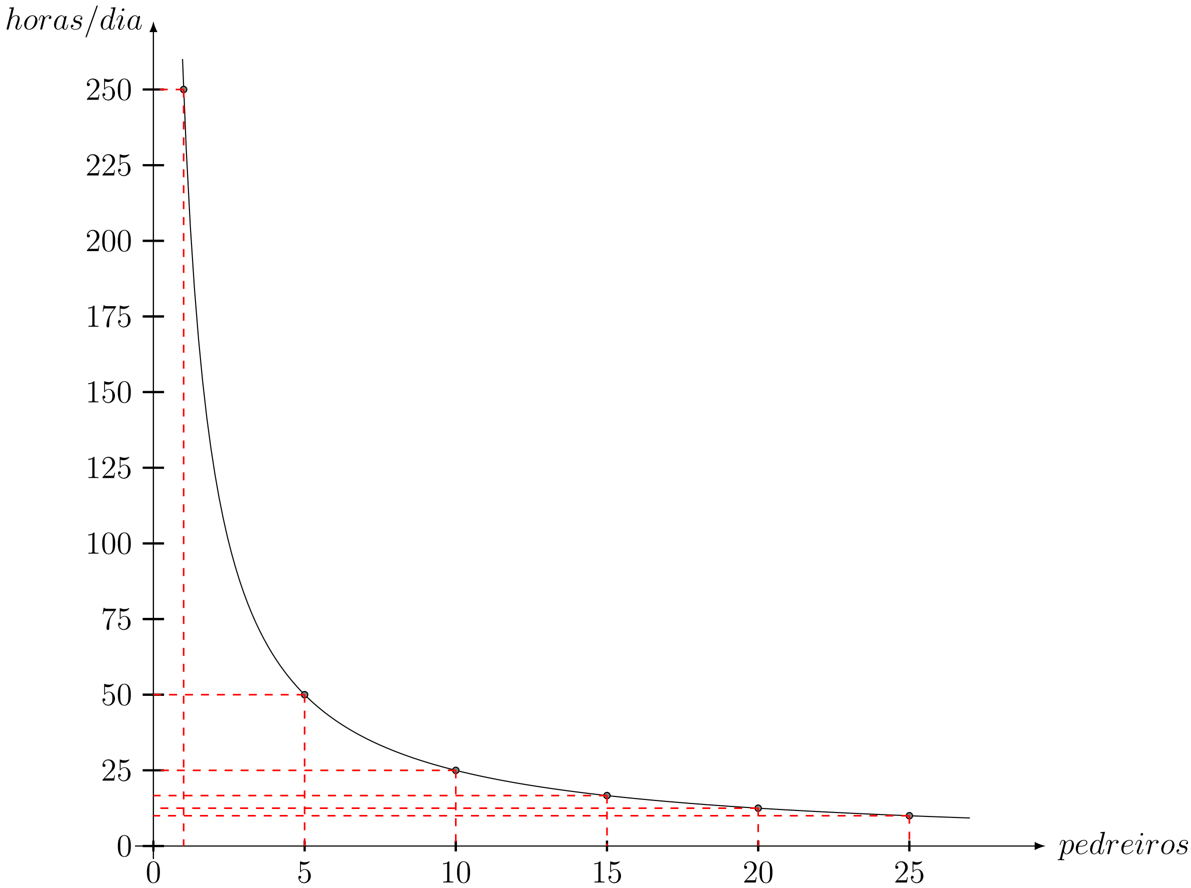


Figura 19 – Gráfico de $y = \dfrac{250}{x}$.

Observação: Na Figura 19 os eixos não estão em mesma escala. Podemos perceber que o eixo das abscissas aumenta gradativamente seu valores de 5 em 5 e o eixo das ordenadas tem um aumento de 25 para cada marcação.

Com o gráfico da figura 19 podemos ver a situação representada e o aumento siginificativo que há nos valores de y quando diminuimos os valores de x e vice-versa.

Com esse capítulo buscamos destacar que a proporcionalidade está envolvida em diversos assuntos da matemática e discutindo seu conceito podemos conectar esses diversos campos, inclusive assuntos teoricamente mais avançados ou que parecem não estar relacionados com grandezas proporcionais.

Fizemos isso com foco exclusivo nos casos de proporcionalidade inversa, e portanto, trabalhamos o conceito os gráficos de hipérboles, mostrando também que com os conhecimentos de proporcionalidade podemos construir representações gráficas importantes que não se resumem somente a construção de retas.

7 Conclusão

Ao longo de toda a pesquisa e estudos para a realização do atual trabalho, uma parte significativa desse tempo foi dedicada a aprender LaTex. Todo o texto incluindo figuras, tabelas e gráficos foi redigido por mim nesse sistema de edição. Desde o início essa foi uma preocupação, pois, o objetivo era entregar padronização de fomatação e um trabalho que possuísse um caráter visual verdadeiramente acadêmico. Aprender LaTex foi fruto de enorme esforço e ao final, uma grande satisfação.

Ao final do texto, esperamos que, entre outras coisas, o leitor consiga comprender as relações de proporcionalidade e sua presença nas situações do cotidiano, além de notar a relevância e importância da proporcionalidade ao longo da história da civilizações e na própria matemática.

Para os professores, queremos que ao final da leitura, possam aumentar a compreensão já existente sobre o tema e entender a necessidade e valor de se trabalhar o conceito de proporcionalidade de modo a proporcionar um ambiente e situações que desenvolvam e privilegiem o raciocínio proporcional.

Que os capítulos em que tratamos de situações problemas sirvam como acervo (mesmo que simples e pequeno) de exemplos sobre situações que possam ser trabalhadas no ensino fundamental e médio. Esperamos que cada abordagem apresentada seja relevante e incentive novas perguntas e situações para o desenvolvimento de habilidade em nossos alunos. Acreditamos que o aluno que entenda bem o tema da proporcionalidade, acaba por entender melhor ou mais facilmente os outros assuntos matemáticos.

Esperamos ter conseguido compartilhar com clareza as nossas ideias sobre proporcionalidade e de todos aqueles autores que pesquisamos para a construção desse trabalho.

Referências

[1] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, and A. C. Morgado, *A matemática do ensino médio*, vol. 1. Sociedade Brasileira de Matematica, 2000.

[2] C. B. Boyer and U. C. Merzbach, *História da matemática.* Editora Blucher, 2012.

[3] F. M. Bertato, "A falsa (su-) posição? tradução dos problemas 24, 25, 26 e 27 do papiro de rhind," *Revista Brasileira de História da Matemática*, vol. 18, no. 36, pp. 11–29, 2018.

[4] I. Bicudo *et al.*, *Os elementos.* Unesp, 2009.

[5] R. M. QUEIROZ, "Razão áurea," *Programa de desenvolvimento educacional(PDE)*, 2007.

[6] M. dos Santos Costa and N. S. G. Allevato, "Proporcionalidade: eixo de conexão entre conteúdos matemáticos," *Em Teia|Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, vol. 6, no. 1.

[7] R. Lesh, T. Post, and M. Behr, "Raciocínio proporcional," *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pp. 1–21, 1988.

[8] M. R. Miranda *et al.*, *Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações.* PhD thesis, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, 2009.

[9] C. B. Nunes and M. dos Santos Costa, "O raciocínio proporcional e a resolução de problemas na formação inicial de (futuros) professores de matemática," *REMATEC*, vol. 11, no. 21, pp. 47–63, 2016.

[10] O. A. Viana and J. A. Miranda, "O raciocínio proporcional e as estratégias de resolução de problemas de valor omisso e de comparação," *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, vol. 11, no. 1, pp. 194–213, 2016.

[11] C. Maranhão and S. Machado, "Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional," *Educar em revista*, no. SE1, pp. 141–156, 2011.

[12] M. R. Miranda *et al.*, *Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações.* PhD thesis, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Faculdade de Ciências Exatas, 2009.

[13] C. H. Morton, "An investigation into sixth grade students'understanding of ratio and proportion," *International Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 4, no. 1, pp. 68–80, 2014.

[14] S. Costa and J. P. d. Ponte, "O raciocínio proporcional dos alunos do 2. º ciclo do ensino básico," *Revista de Educação*, pp. 65–100, 2008.

[15] J. P. d. Ponte and S. Marques, "Proportion in school mathematics textbooks: A comparative study," *RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education*, pp. 36–53, 2011.

[16] J. Delgado, K. Frensel, and L. Crissaff, "Geometria analítica," *Rio de Janeiro: SBM*, 2017.

[17] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília. 2018.

[18] J. A. Fossa, "Razão e proporção: A herança antiga," *Revista Brasileira de História da Matemática*, vol. 11, no. 23, pp. 01–06, 2011.

[19] J. M. D. C. JUNIOR, "A matemática por trás de um número: Razão áurea," 2014.

[20] M. M. Lauro, "A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura," *Exacta*, no. 3, pp. 35–48, 2005.

[21] C. F. d. Medeiros and A. Medeiros, "O método da falsa posição na história e na educação matemática," *Ciência & Educação (Bauru)*, vol. 10, no. 3, pp. 545–557, 2004.

[22] L. R. Anastácio and F. N. Ferreira, *Razão Áurea um Rico Tesouro de Surpresas*. PhD thesis, Tese (Mestrado Profissional de Matemática) Universidade Federal de São João, 2015.

[23] BRASIL (2019). PISA 2018. Relatório Nacional. Brasília, DF: INEP/MEC.

[24] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, and A. C. Morgado, *Temas e problemas elementares*. Sociedade Brasileira de Matematica, 2005.

[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24]