Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

A Pirâmide e seu Volume †

por

Sandro Antônio Godeiro de Andrade

sob orientação do

Prof. Dr. Pedro Antonio Gomez Venegas

sob coorientação do

Prof. Me. Carlos Alexandre Gomes da Silva

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da CAPES.

A Pirâmide e seu Volume

por

Sandro Antônio Godeiro de Andrade

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria.

Aprovado por:

Prof. Dr. Pedro Antonio Gomez Venegas - UFPB (Orientador)

Prof. Me. Carlos Alexandre Gomes da Silva - UFRN (Coorientador)

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera - UFPB

Prof. Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN - Câmpus Mossoró

Agosto/2013

Agradecimentos

A Deus, por ter me abençoado com saúde e iluminado os meus passos na conquista desse objetivo.

Ao Professor Antônio Roberto, por ter observado que a minha vocação não seria em outra área, e sim estaria ligada à Matemática.

Aos idealizadores do PROFMAT, que em parceria com a CAPES viabilizaram este projeto grandioso dando oportunidade de uma educação continuada ao professor de matemática para aperfeiçoar seu conhecimento prático pedagógico.

Aos meus amigos e companheiros dessa jornada de dois anos, Natal – João Pessoa, Aldrin Rufino, Thiago Velentim e Andreilson Oliveira.

A toda equipe do PROFMAT/UFPB, Coordenadores, Professores e Funcionários, pela dedicação em conduzir os desafios desse mestrado de maneira competente.

Aos colegas do PROFMAT da UFRN e UFERSA que participaram das aulas com o Professor Carlos Gomes: Emanuel Gomes, Felipe Arrais, Jorge Pontes, Leonardo Andrade, Luciano Nóbrega e Gilberto Fernandes.

A todos os colegas do PROFMAT/UFPB em especial, Antônio Geraldo, Herbert de Souza, Sívio Orleans, Fernando Viana, Ambrósio Elias, Halisson e Aurílio Guedes, pela forma de companheirismo e amizade com que eles nos receberam em sua cidade João Pessoa.

Aos professores Márcio Flávio e Anderson, à Fotógrafa Cida, a Desing Patrícia Melo e ao Artesão Rogério Cabral, que em função de sua arte deram excelente contribuição para o enriquecimento desse trabalho.

Ao Professor Carlos Alexandre Gomes (Coorientador), por ter apresentado e sugerido o tema dessa trabalho e seus ensinamentos valiosos ao longo dessa jornada.

Ao Professor Pedro Venegas (Orientador) pela disponibilidade em ajudar, pela excelente colaboração em contribuir, melhorando de forma eficaz o tratamento matemático desse trabalho.

Aos amigos Thiago Valentim e Emanuel Lourenço pelo apoio nessa fase final do trabalho e uma gratidão especial ao Professor Aldrin Rufino e sua Família por me receber em sua residência, aos domingos, normalmente durante muitas horas para discutir e melhorar a apresentação desse trabalho, na intenção de representar uma referência para o professor de matemática do ensino básico.

Dedicatória

Dedico este trabalho:

Aos meus Pais, Antônio Andrade e Maria de Lourdes, que me deram a vida e estão ao meu lado, incentivando, em todos os momentos.

A minha esposa e companheira, Silvana Pinheiro, por compreender o meu esforço em trabalhar e continuar estudando.

Aos meus filhos, Sofia e Kleberson, que me ajudam, de forma indireta, a jamais desistir.

Resumo

Nesse trabalho, objetiva-se apresentar alternativas didáticas que facilitem e possibilitem ao professor, ao aluno de matemática e ao aluno do ensino básico, o aprendizado de métodos de justificar e demonstrar a validade da fórmula do volume da pirâmide. Procede-se a uma abordagem dessas justificativas e demonstrações dentro de perspectivas de ordens geométrica, algébrica e lúdicas no cálculo da fórmula do volume da pirâmide. Assim, em cinco capítulos, discorre-se acerca dos aspectos históricos e algébricos da pirâmide. Realizamos uma pesquisa com professores sobre como é abordado o volume da pirâmide em sala de aula. Apresentamos alguns dos principais métodos usados para demonstrar a validade da fórmula do volume da pirâmide. Usamos o material concreto como ferramenta para verificação intuitiva da fórmula do volume da pirâmide, e, finalmente apresentamos alguns problemas que envolvem o estudo do tema pirâmide presentes no ensino básico.

Palavras-chave: Geometria Espacial. Pirâmide, Volume.

Abstract

This study aims to present alternative didactic that facilitate and make possible the teacher, the student of mathematics and the student's primary education, learning methods to justify and demonstrate the validity of the formula for the volume of the pyramid. It proceeds to approach these reasons and demonstrations within orders prospects for geometric, algebraic and ludic when calculating formula of volume of the pyramid. Therefore, in five chapters, we discuss the historical aspects and algebraic pyramid,a survey of teachers on how we approach the volume of the pyramid in the classroom. There are some of the main methods used to demonstrate the validity of the formula for the volume of the pyramid. Solid material was used as a tool to verify intuitive formula for the volume of the pyramid, and finally we have presented some problems involving the subject in this pyramid education.

Keywords: Space Geometry, Pyramid, Volume.

Sumário

Introdução

A proposta desse trabalho é de, após investigar a forma de como é abordado pelos professores do ensino básico o cálculo do volume de uma pirâmide, apresentar alternativas didáticas que facilitem e possibilitem ao professor, ao aluno de matemática e ao aluno do ensino básico, o aprendizado de métodos de justificar e demonstrar a validade da fórmula do volume da pirâmide. Nesse sentido, foram abordados métodos com enfoque Geométrico, Algébrico e Lúdico para diversificar a maneira de apresentar o volume da pirâmide.

No primeiro capítulo desse trabalho, destacamos aspectos históricos e geométricos da pirâmide, dando enfase à definição, aos elementos, à classificação, às áreas ao volume e ao tronco da pirâmide.

No segundo capítulo, foi registrada uma pesquisa com professores de escolas públicas federais, escolas públicas estaduais e escolas particulares. O objetivo da pesquisa era verificar a forma como o cálculo do volume de uma pirâmide é abordado em sala de aula. Os dados foram catalogados e registrados em gráficos de colunas com resultados percentuais.

Baseado no resultado da pesquisa, no terceiro capítulo, abordamos, o princípio de Cavalieri como o método mais usado pelos professores pesquisados para justificar a fórmula do volume da pirâmide, além do cálculo do volume de uma pirâmide, usando integrais. No entanto, neste mesmo capítulo sugerimos passo a passo uma alternativa de demonstrar a fórmula do volume da pirâmide, usando o método do limite da soma de uma série geométrica. Julgamos que tal alternativa venha facilitar a abordagem pelo professor do volume de uma pirâmide em sala de aula.

No quarto capítulo, procuramos diversificar os métodos lúdicos para justificar a validade da fórmula do volume da pirâmide, utilizando material manipulável. Um dos métodos busca esclarecer como um prisma de base triangular é dividido em três pirâmides de mesma base e mesma altura. Da mesma forma um cubo se transforma em três pirâmides de base igual à face do cubo e altura igual à aresta do cubo. Para facilitar o trabalho do professor, colocamos no final deste capítulo a planificação das três pirâmides de base triangular que, quando unidas, formam um prisma de base triangular e da mesma forma colocamos também a planificação de três pirâmides de base quadrangular que, quando unidas, formam um cubo. Convém destacar também que para enriquecer a demonstração da fórmula do volume da pirâmide através do limite da soma de uma série geométrica visto no capítulo 3, foi apresentado um material manipulável formado por uma pirâmide de base triangular e 14 prismas em que a soma de seus volumes de forma alinhada, representa uma série geométrica, e quando colocamos os 14 prismas no interior da pirâmide, verificamos de forma intuitiva que a soma infinita dos volumes dos primas é igual ao volume da pirâmide.

Por fim, apresentamos, no quinto capítulo, alguns problemas que envolvem o estudo do tema pirâmide presentes no ensino básico. Todas as questões estão resolvidas com a finalidade de que o leitor aprenda ou aprimore mais sobre os conceitos ou procedimentos envolvidos.

Capítulo 1

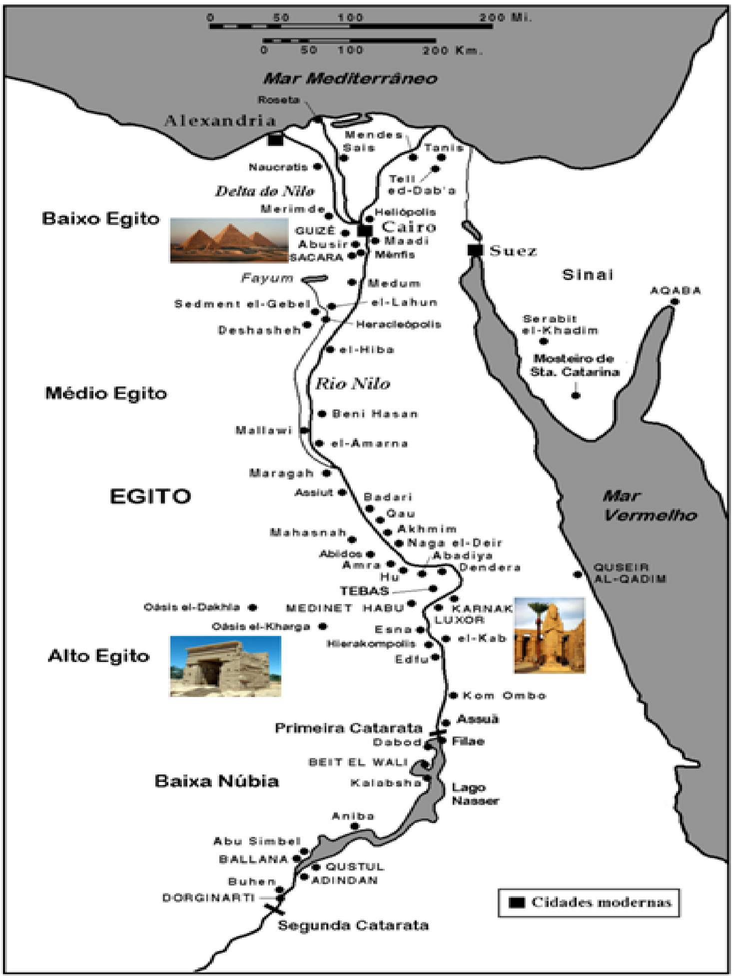
Pirâmides: Aspectos Históricos e Geométricos

1.1 Aspectos Históricos das Pirâmides do Egito

O Egito é o berço de uma das mais antigas civilizações, onde se desenvolveu ao longo de uma extensa faixa de terra fértil que ficava na margem do rio Nilo.

Os historiadores dividem a história do Egito em três períodos: Antigo Império, Médio Império e o Novo Império. Ao longo desses três períodos, o Egito atingiu o seu apogeu. Porém, a partir do século VII a.C., o Egito foi invadido por vários povos e perdeu o seu antigo esplendor.

O Egito Antigo desenvolveu-se no nordeste africano às margens do rio Nilo por volta do ano 3.100 a.C., época em que as regiões do Alto e do Baixo Egito foram unificadas, e termina no ano 30 a.C., quando a rainha Cleópatra VII foi derrotada na Batalha de Ácio, passando o Egito a ser uma província do Império Romano. Durante esse período, a mais importante e fascinante civilização da antiguidade utilizava seus conhecimentos para resolver problemas do cotidiano, tais como: controle das inundações, construção de sistemas hidráulicos, preparação da terra para a semeadura, mumificação de cadáveres, etc.



Fonte: http://www.infoescola.com/historia/piramides-do-egito/
Acesso em: 15 de junho de 2013.

Figura 1.1: Mapa antigo do Egito

A sua sociedade era extremamente rígida e estava dividida em várias camadas composta por: o faraó, que era a autoridade máxima, Sacerdotes, militares e escribas. Era sustentada pelo trabalho e impostos pagos por camponeses, artesãos e pequenos comerciantes. Os escravos também compunham a sociedade egípcia e, geralmente, eram pessoas capturadas em guerras que trabalhavam apenas por comida e água.

Nesse trabalho destacamos as contribuições valiosas dos egípcios na matemática, desenvolvendo as quatro operações matemáticas básicas - adição, subtração, multiplicação e divisão. Inventaram o sistema numeração totalmente desenvolvido, usavam frações, calculavam volumes de caixas e pirâmides, além de calcularem áreas de retângulos, triângulos, círculos e até mesmo da superfície de esferas.

Porém, o maior destaque dos egípcios foi na construção de pirâmides, túmulos, erguidos como um monumento à memória dos faraós já mortos.

Fonte: http://www.infoescola.com/historia/piramides-do-egito/
Acesso em: 15 de junho de 2013.

Figura 1.2: Pirâmides do Egito

Ao falarmos de pirâmides, geralmente nos restringimos ao estudo dos três grandes monumentos de Gizé: Quéops[1], Quéfrem e Miquerinos. As pirâmides foram construídas pelos egípcios há certa de 2.600 anos a.C., (desde o início do antigo reinado até perto do período ptolomaico). Nota-se, a partir da construção destas pirâmides, o grande avanço de engenharia e da matemática nas construções do Egito para a época.

Segundo consta, o erro relativo, envolvendo os lados da base quadrada é inferior a $\frac{1}{14.000}$ e o erro relativo envolvendo os ângulos retos dos vértices da base não excede $\frac{1}{27.000}$. Em EVES (vide[5]).

Baseado neste e em outros dados, diversos matemáticos fascinados com esses dados dedicaram-se ao estudo da pirâmide.

[1]Uma das sete maravilhas do mundo antigo.

Assim, vamos nos basear na demonstração, dada pelo professor SARAIVA (vide[14]) denominada "As pirâmides do Egito e a razão áurea", vejamos:

Sabemos que um ponto B divide um segmento $\overline{AC}$ em média e extrema razão quando:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

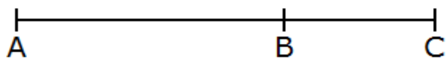


Figura 1.3: Segmento de reta

Considere $\Phi = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Temos que:

$$\Phi = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow$$

$$\Phi = 1 + \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Obtendo uma equação de segundo grau:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Resolvemos a equação e encontramos duas raízes: $\Phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Desprezamos a raiz negativa, obtemos:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$$

A razão $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é denominada *razão áurea*.

Seja o retângulo $ABCD$ de lados a e b com $(b < a)$ tal que o retângulo $ADEF$ de lados b e $a - b$ seja semelhante ao retângulo $ABCD$.

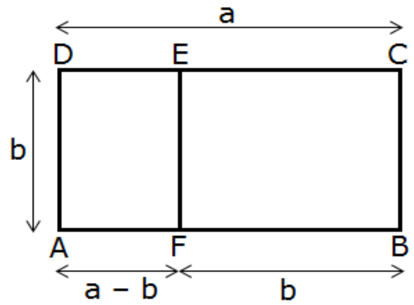


Figura 1.4: Retângulo áureo

Resulta que $a - b < b$ e que $\frac{a}{b}$ é igual à razão áurea. Um retângulo $ABCD$ com estas propriedades é chamado retângulo áureo.

A equação $\Phi^2 = \Phi + 1$ nos mostra que um triângulo de lados 1, $\sqrt{\Phi}$ e Φ é um triângulo retângulo com catetos 1 e $\sqrt{\Phi}$ e hipotenusa Φ.

Definição 1 *Um triângulo é áureo quando ele é semelhante ao triângulo retângulo com hipotenusa Φ e catetos 1 e $\sqrt{\Phi}$.*

Proposição 1 *Um triângulo retângulo com hipotenusa a e catetos b e c com $(b > c)$ é áureo se, e somente se, $\frac{b}{c} = \sqrt{\Phi} = 1,272...$.*

Definição 2 *Seja uma pirâmide reta de altura h com base quadrada de lado a e seja H a altura de suas faces. Dizemos que a pirâmide é áurea quando o triângulo de lados H, h e $\frac{a}{2}$ for um triângulo áureo.*

O historiador grego Heródoto (cerca de 500 a.C.) relata que aprendeu com os sacerdotes que as grandes pirâmides do Egito satisfazem a seguinte propriedade: (P) : *A área de cada face triangular é igual à área de um quadrado cujo lado é a altura da pirâmide.* SARAIVA (vide[14]).

Com a notação da definição 2, uma pirâmide reta de base quadrada satisfaz a propriedade (P) se e somente se $\frac{aH}{2} = h^2$.

Proposição 2 *Uma pirâmide reta com base quadrada satisfaz a propriedade (P) se, e somente se, ela for uma pirâmide áurea.*

Demonstração:

Suponha que a pirâmide é áurea, isto é, que o triângulo retângulo com hipotenusa H e catetos h e $\frac{a}{2}$, (supondo $h > \frac{a}{2}$) é áureo.

Então temos que:

$$h = \frac{a\sqrt{\Phi}}{2},$$
$$H = \frac{a\Phi}{2}$$

e portanto,

$$h = \frac{aH}{2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \Phi = \left(\frac{a\sqrt{\Phi}}{2}\right)^2,$$

isto é, a pirâmide satisfaz a propriedade (P).

Reciprocamente, suponhamos que a pirâmide satisfaça a propriedade (P).

Das relações:

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

e

$$aH = 2h^2$$

obtemos

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} = h^2 + \frac{4h^4}{4H^2},$$

que implica

$$\left(\frac{H}{h}\right)^4 = \left(\frac{H}{h}\right)^2 + 1.$$

Resulta que

$$\left(\frac{H}{h}\right)^2 = \Phi$$

ou

$$\left(\frac{H}{h}\right) = \sqrt{\Phi}.$$

Logo,

$$h\frac{2}{a} = \frac{H}{h} = \sqrt{\Phi}$$

e, portanto, o triângulo de lados H, h e $\frac{a}{2}$ é áureo (ver Proposição 1).

Voltando a história da pirâmide de Quéops, considerada uma das sete maravilhas do mundo antigo, de dimensões (em metros): altura $146,59$ e dimensões de base $(230,33 \times 230,33)$.

Para a pirâmide de Quéops temos que:

$$\frac{2h}{a} = \frac{2 \times 146,59}{230,33} = 1,272.$$

Portanto, a pirâmide de Quéops é, de fato, uma pirâmide áurea (Proposição 1).

Agora abordaremos a definição, os elementos, a classificação, as áreas, volume da pirâmide e do tronco da pirâmide, segundo alguns autores contemporâneos.

1.2 Aspectos Geométricos da Pirâmide

1.2.1 Definição, elementos e nomenclatura

Definição 3 *Consideremos um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$ situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se pirâmide a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono. O ponto V é chamado de vértice e o polígono $A_1A_2A_3...A_n$, a base da pirâmide.*

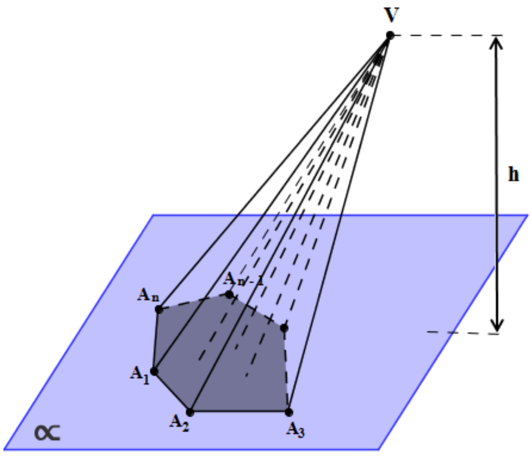


Figura 1.5: Pirâmide

Na Figura 1.5, temos que:

✓a distância do vértice V ao plano da base, que indicamos por **h**, é chamada *altura* da pirâmide;

✓os segmentos $\overline{A_1V}$, $\overline{A_2V}$, $\overline{A_3V}$, ..., $\overline{A_{n-1}V}$ e $\overline{A_nV}$ são chamados de *arestas laterais*;

✓e as regiões triangulares A_1A_2V, A_2A_3V, A_3A_4V, ..., $A_{n-1}A_nV$ e $A_{n-1}A_1V$ são chamadas *faces laterais* da pirâmide.

Note que a pirâmide da definição possui uma base, n faces laterais (triângulos), $n+1$ faces, n arestas laterais, $2n$ arestas e $n+1$ vértices.

Vejamos alguns exemplos de pirâmides:

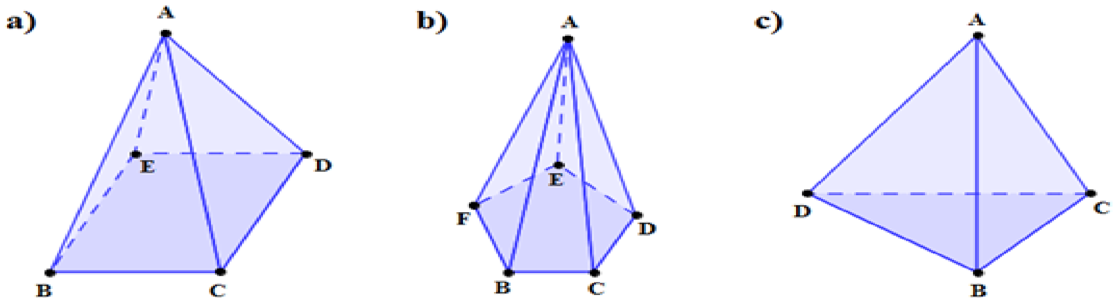


Figura 1.6: Exemplos de pirâmides

A nomenclatura das pirâmides depende da sua base. Baseando-se na Figura 1.6 temos que:

✓ a pirâmide $ABCDE$ é chamada de pirâmide de base quadrangular (pirâmide quadrangular), pois a sua base é um quadrilátero;

✓ a pirâmide $ABCDEF$ é chamada de pirâmide de base pentagonal (pirâmide pentagonal), pois a sua base é um quadrilátero;

✓ e a pirâmide $ABCD$ é chamada de pirâmide de base triangular (pirâmide triangular ou tetraedro), pois a sua base é um triângulo.

1.2.2 Pirâmide regular

Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. (Numa pirâmide regular as arestas laterais são congruentes, e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes).

Definição 4 *Chama-se apótema da base de uma pirâmide regular a reta traçada do centro do polígono da base até o meio de sua aresta.*

Definição 5 *Chama-se apótema da pirâmide de uma pirâmide regular a altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral.*

Na figura abaixo, ilustramos uma pirâmide hexagonal, destacando o apótema da base, o apótema da pirâmide e a altura da pirâmide.

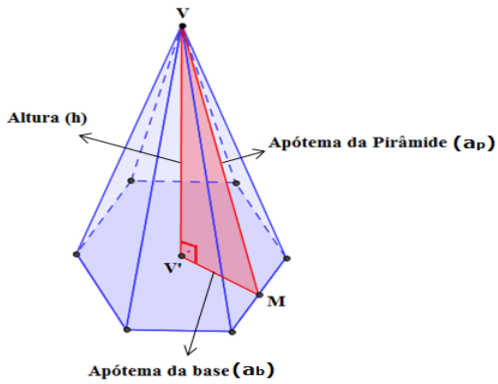


Figura 1.7: Pirâmide hexagonal regular

Na Figura 1.7, do triângulo retângulo $VV'M$, em que $VM = a_p$ (apótema da pirâmide), $V'M = a_b$ (apótema da base) e $VV' = h$ (altura da pirâmide), concluímos que:

$$a_p^2 = a_b^2 + h^2$$

Esta relação vale em qualquer pirâmide regular.

Definição 6 *Um tetraedro regular (pirâmide triangular regular) é um tetraedro que tem as seis arestas congruentes entre si, ou seja, é uma pirâmide cujas 4 faces são triângulos equiláteros.*

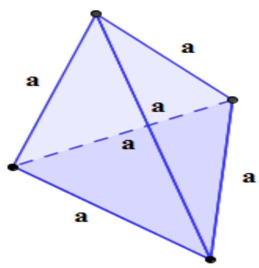


Figura 1.8: Tetraedro regular

Como todas as quatro faces de um tetraedro são congruentes, qualquer delas pode ser a base da pirâmide. Dessa forma, podemos obter a medida da altura do tetraedro em função da medida de suas arestas.

Agora, vamos utilizar a relação entre o apótema da base, o apótema da pirâmide e a altura da pirâmide para obter a altura de um tetraedro regular em função de suas arestas.

Seja a a medida das arestas de um tetraedro regular. A base do tetraedro é um triângulo equilátero e a medida do seu apótema é igual a um terço da medida de sua altura, pois o ponto G, sendo o centro de um triângulo equilátero, é o chamado baricentro, logo:

$$\begin{cases} MG = \frac{1}{3}a_p \\ GB = \frac{2}{3}a_p \end{cases}.$$

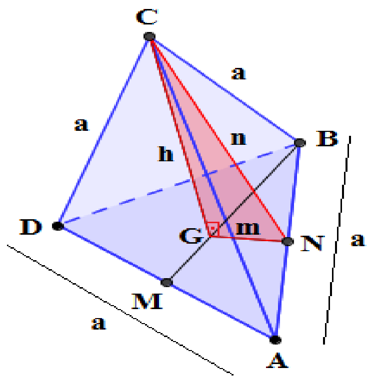


Figura 1.9: Elementos do tetraedro regular

Note que

$$a_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ e } a_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

daí

$$a_p^2 = a_b^2 + h^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3a^2}{4} = \frac{3a^2}{36} + h^2 \Rightarrow$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Portanto, a altura de um tetraedro regular em função da medida de sua aresta a é $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

✓Área da base:

$$S_b = \frac{a.h}{2} \Rightarrow S_b = a \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

✓Área da total:

$$S_t = 4 \cdot S_b \Rightarrow S_t = 4 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow S_t = a^2\sqrt{3}.$$

✓Volume:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right) \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

1.2.3 Área lateral e área total de uma pirâmide

Definição 7 *A reunião das faces laterais de uma pirâmide é chamada de superfície lateral, sendo a sua área indicada por S_l e a reunião da superfície lateral com a superfície da base, cuja área é representada por (S_b), da pirâmide é chamada de superfície total, sendo a sua área indicada por S_t.*

Logo a área total da pirâmide é dada por:

$$S_t = S_l + S_b$$

1.2.4 Volume de uma pirâmide

Teorema 1: *O volume de qualquer pirâmide é um terço do produto da área de sua base pela medida de sua altura.*

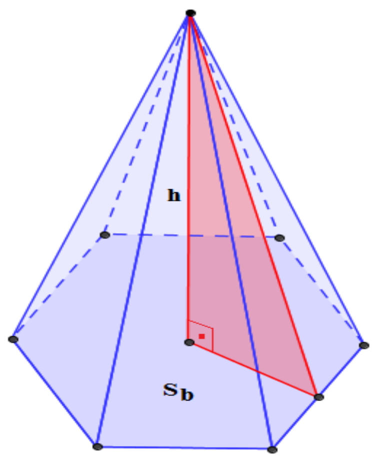


Figura 1.10: pirâmide

Logo, se a área da base da pirâmide é S_b e a altura h, o volume, V, é dado por:

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

O foco principal do nosso trabalho é descrever justificativas (demonstrações) da validade do teorema da fórmula para o cálculo do volume da pirâmide. Entre as demonstrações citaremos: o princípio de Cavalieri, o método algébrico usando integrais e o método algébrico, usando o limite da soma de uma série geométrica que serão apresentados no capítulo 3 desde trabalho.

1.2.5 Secção transversal e tronco de uma pirâmide

Definição 8 *A secção determinada numa pirâmide por um plano paralelo à base é denominada secção transversal. Essa secção transversal divide a pirâmide em duas partes: a que contém o vértice, que também é uma pirâmide e a outra é denominada tronco de pirâmide de base paralelas.*

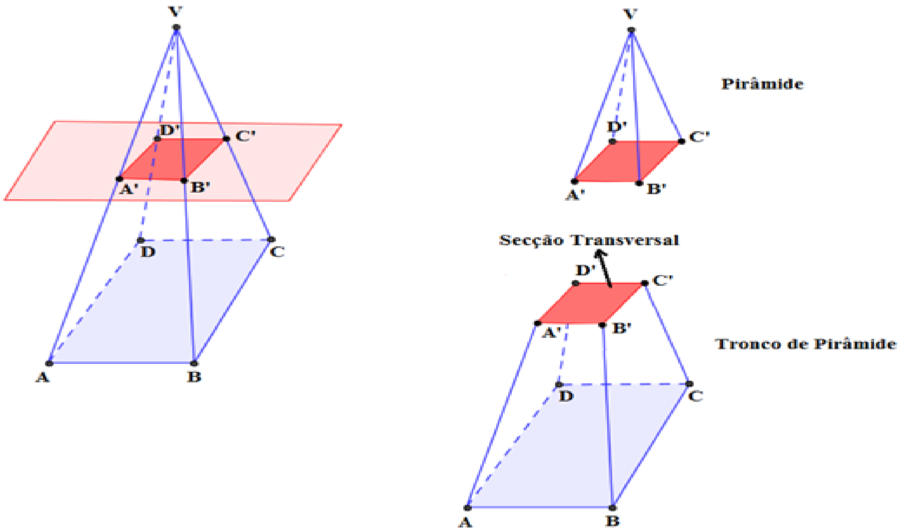


Figura 1.11: Secção transversal e tronco de pirâmide

Consideremos que a pirâmide $ABCDV$ tenha altura h e a secção transversal seja feita a uma distância d do vértice V.

Da Figura 1.12 temos que os triângulos $VO'B'$ e VOB são semelhantes, pois apresentam ângulos congruentes e os triângulos $VA'B'$ e VAB também são semelhantes, ou seja, $\triangle VO'B' \sim \triangle VOB$ e $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$. Veja Figura 1.13.

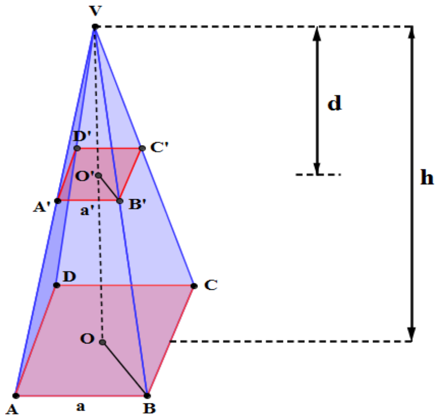


Figura 1.12: Pirâmide

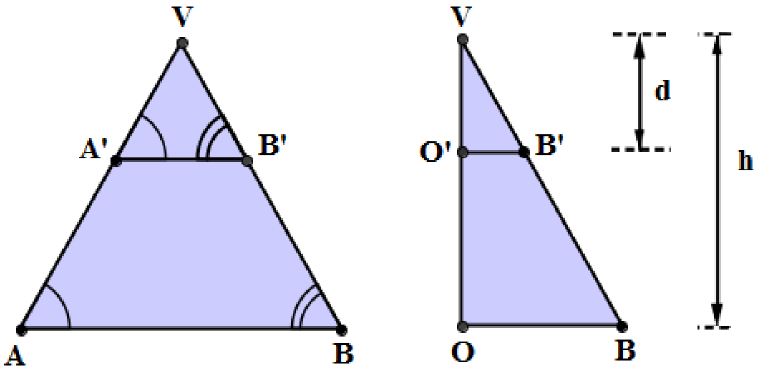


Figura 1.13: Triângulos semelhantes

Com a notação indicada na Figura 1.12 e Figura 1.13, podemos tirar as seguintes conclusões:

I) Como $\triangle VO'B' \sim \triangle VOB$, então:

$$\frac{VB'}{VB} = \frac{VO'}{VO} = \frac{d}{h}.$$

Logo, *a razão entre duas arestas laterais correspondentes nas duas pirâmides é* $\frac{d}{h}$.

II) Como $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$, então:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{d}{h}.$$

Logo, *a razão entre duas arestas correspondentes nas duas bases é* $\frac{d}{h}$.

III) As bases $A'B'C'D'$ e $ABCD$ são semelhantes, então:

$$\frac{\text{área}(A'B'C'D')}{\text{área}(ABCD)} = \frac{S_{b'}}{S_b} = \left(\frac{d}{h}\right)^2.$$

Logo, *as áreas das bases das duas pirâmides estão na razão* $\left(\frac{d}{h}\right)^2$.
IV) Os volume das pirâmides $VA'B'C'D'$ e $VA'B'C'D'$ são:

$$\begin{cases} V_{(VA'B'C'D')} = \frac{1}{3}S_{b'} \cdot d \\ V_{(VABCD)} = \frac{1}{3}S_b \cdot h \end{cases}.$$

Como $\frac{S_{b'}}{S_b} = \left(\frac{d}{h}\right)^2$, vem:

$$\frac{V_{(A'B'C'D')}}{V_{(ABCD)}} = \frac{\frac{1}{3}S_{b'}.d}{\frac{1}{3}S_b.h} = \left(\frac{d}{h}\right)^2 \cdot \frac{d}{h} = \left(\frac{d}{h}\right)^3.$$

Logo, *o volume das duas pirâmides está na razão* $\left(\frac{d}{h}\right)^3$.

Observamos que a fórmula para o cálculo do volume do tronco de pirâmide é obtida, fazendo a diferença entre o volume de pirâmide maior e o volume da pirâmide obtida após a secção transversal que produziu o tronco, ou seja, $V_{\text{tronco}} = V_p - V_{p'}$.

Consideremos uma pirâmide cuja base tem área S_B e cuja secção, paralela à base, à distância h_t da base, tem área S_b. Vamos representar por d a distância da secção ao vértice da pirâmide.

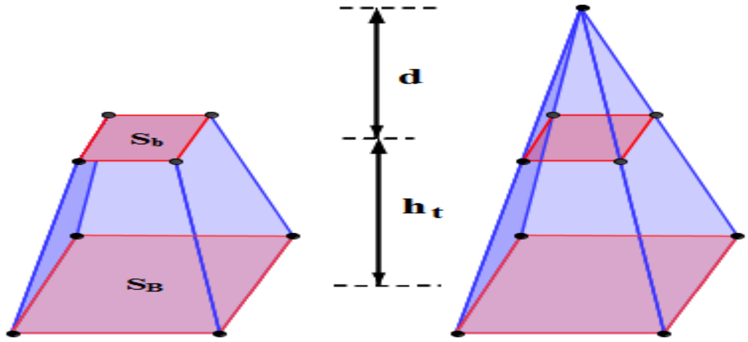


Figura 1.14: tronco da pirâmide

Colocando em função de sua altura e das áreas de suas bases, a fórmula para calcular o volume do tronco V_t é dado por:

$$V_t = V_p - V_{p'} \Rightarrow$$

$$V_t = \frac{1}{3}S_B(d + h_t) - \frac{1}{3}S_b d \tag{1.1}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{S_B}{S_b} &= \left(\frac{d}{d+h_t}\right)^2 \\
\frac{d}{d+h_t} &= \frac{\sqrt{S_b}}{\sqrt{S_B}} \\
d\sqrt{S_B} &= d\sqrt{S_b} + h_t\sqrt{b} \\
d\sqrt{S_B} - d\sqrt{S_b} &= h_t\sqrt{S_b} \\
d\left(\sqrt{S_B} - \sqrt{S_b}\right) &= h_t\sqrt{S_b} \\
d &= \frac{h_t\sqrt{S_b}}{\sqrt{S_B} - \sqrt{S_b}}
\end{aligned}$$

Substituindo d na equação (1.1). Temos:

$$
\begin{aligned}
V_t &= \frac{1}{3}S_B\left(\frac{h_t\sqrt{S_b}}{\sqrt{S_B}-\sqrt{S_b}}+h_t\right)-\frac{1}{3}S_b\frac{h_t\sqrt{S_b}}{\sqrt{S_B}-\sqrt{S_b}}\\
&= \frac{1}{3}S_B\left(\frac{h_t\sqrt{S_b}+h_t\sqrt{S_B}-h_t\sqrt{S_b}}{\sqrt{S_B}-\sqrt{S_b}}\right)-\frac{1}{3}S_b\frac{h_t\sqrt{S_b}}{\sqrt{S_B}-\sqrt{S_b}}\\
&= \frac{1}{3}S_B\frac{h_t\sqrt{S_B}}{\sqrt{S_B}-\sqrt{S_b}}-\frac{1}{3}S_b\frac{h_t\sqrt{S_b}}{\sqrt{S_B}-\sqrt{S_b}}\\
&= \frac{1}{3}h_t\left(\frac{S_B\sqrt{S_B}-S_b\sqrt{S_b}}{\sqrt{S_B}-\sqrt{S_b}}\right)\\
&= \frac{1}{3}h_t\left(\frac{\left(\sqrt{S_B}\right)^3-\left(\sqrt{S_b}\right)^3}{\sqrt{S_B}-\sqrt{S_b}}\right)\\
&= \frac{1}{3}h_t\frac{\left(\sqrt{S_B}-\sqrt{S_b}\right)\left(S_B+\sqrt{S_B}\sqrt{S_b}+S_b\right)}{\sqrt{S_B}-\sqrt{S_b}}
\end{aligned}
$$

Portanto, $V_t = \frac{1}{3}h_t\left(S_B+\sqrt{S_BS_b}+S_b\right)$ é o volume do tronco da pirâmide.

Depois de conhecermos um pouco da história das pirâmides e suas características, iremos agora apresentar os dados referentes à uma pesquisa feira com professores do ensino média das escolas públicas estaduais, federais e particulares.

Capítulo 2

Pesquisa com Professores sobre como é Abordado o Volume da Pirâmide em Sala de Aula

Considerando a importância da temática *"A Pirâmide e seu Volume"*, desenvolvemos uma pesquisa com a finalidade de verificar a maneira que os professores do Ensino Básico abordam e quais os métodos por eles utilizados na abordagem desse conteúdo a seus alunos.

Para efeitos estatísticos, tomou-se como amostragem a quantidade de 30 professores, distinguindo-se quanto ao tempo de atuação no cenário pedagógico.

O aspecto de maior relevância dessa pesquisa foi certamente a divisão desses profissionais quanto à área de atuação na medida em que houve uma preocupação em selecioná-los em três setores: Escolas Públicas Federais, Escolas Públicas Estaduais e Escolas Particulares, sendo o número de pesquisados divididos em partes iguais para cada um dos três setores. Veja Quadro 1.

Tempo de Atuação	Escola Pública Federal	Escola Pública Estadual	Escola Particular
De 0 a 5 anos	40%	50%	50%
De 6 a 10 anos	30%	30%	40%
Mais de anos	30%	20%	10%

Quadro 1: Tempo de atuação dos docentes por setor de trabalho a que estão vinculados

No nosso questionário foram feitas as seguinte perguntas. Ver (Apêndice A.1).

O questionamento central da pesquisa, a abordagem do volume da pirâmide, buscou identificar o método aplicado em sala-de-aula, procurando observar se há necessidade de mudanças e inovações com o propósito de facilitar o entendimento do aluno. Vejamos resultados no Quadro 2 a seguir:

Método	Escola Pública Federal	Escola Pública Estadual	Escola Particular
Limita-se ao uso da fórmula e resolver problemas para aplicação da mesma.	30%	70%	40%
O professor já enfrentou questionamento dos alunos sobre a origem do 1/3.	90%	50%	80%
Faz o uso do princípio de Cavalieri.	70%	20%	50%
Usa métodos práticos: manipulação de material concreto.	70%	50%	80%
Faz uso do método do limite da soma de uma série geométrica para demonstração.	0%	0%	0%

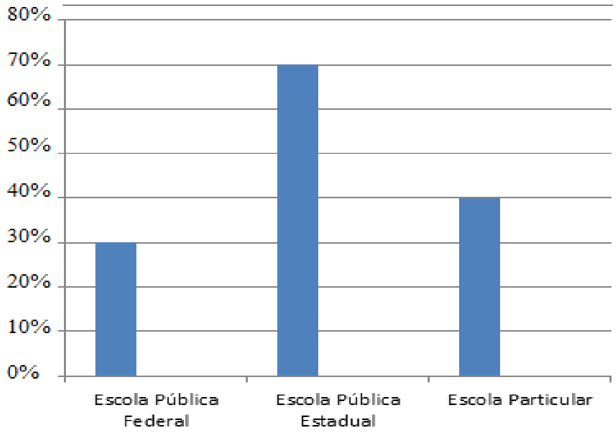
Quadro 2: Método de abordagem do volume da pirâmide em sala de aula

Observação: Como o item 4 da pesquisa, o professor poderia optar por mais de uma afirmativa, constatamos que 20% dos professores pesquisados das escolas públicas estaduais e das escolas particulares, mesmo atualmente limitando-se ao uso da fórmula do volume da pirâmide e resolvendo exercícios para a sua aplicação, esporadicamente faz uso de material manipulável para justificar a validade da fórmula do volume da pirâmide.

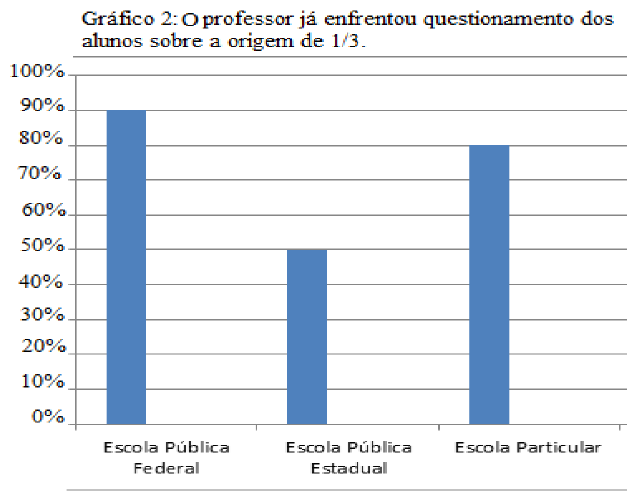
O primeiro questionamento abordou sobre o método de o professor limitar-se ao uso da fórmula $V = \frac{1}{3}S_B \cdot h$ para explicação do assunto, inserindo, a partir de tal explanação teórica, exercícios referentes ao uso da fórmula sem qualquer outro tipo de recurso metodológico.

Constatou-se que dos professores pesquisados na Escola Pública Federal apenas 30% utilizam dessa didática, enquanto que os pesquisados na Escola Pública Estadual é de 70% e finalmente entre os da Escola Particular, o percentual é de 40%. Uma explicação da aproximação percentual entre os pesquisados da Escola Federal e da Escola Particular é que nessas esferas há mais estrutura de laboratório e mais estímulos dos profissionais, que não querem limitar-se a uma explicação tradicional, gerando dificuldades de entendimento para os alunos. Veja o gráfico 1 a seguir:

Gráfico 1: Limita-se ao uso da fórmula do volume da pirâmide e apresenta exercícios de aplicação.



Um outro tópico da pesquisa envolve o percentual de profissionais que enfretam questionamento dos alunos sobre a origem da fração $\frac{1}{3}$ na fórmula do volume da pirâmide. O resultado percentual entre os profissionais da Escola Pública Federal e os da Escola Particular mais uma vez mostrou-se próxima 90% e 80% respectivamente. Essa equivalência constitui novamente uma equiparação qualitativa entre os dois setores educacionais, pois apresentam, em seus quadros, estudantes que questionam e buscam explicações acerca do conteúdo apresentado em sala de aula. A análise crítica dessa tiragem revela a discrepante condição entre os que estão inseridos na Escola Pública Estadual (alunos com limitações de conhecimentos ou pouco interesse) e os que estão em escolar mais qualificadas – Centros Federais e Rede Particular de Ensino.

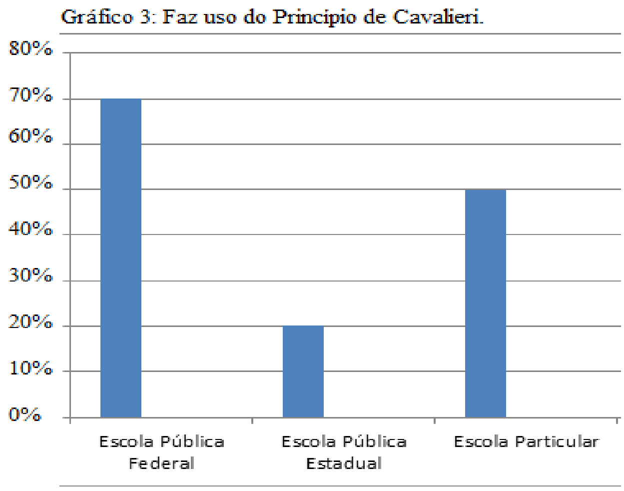


Na continuidade da pesquisa, pergunta-se sobre o uso do princípio de Cavalieri para esclarecer melhor o calculo do volume da pirâmide.

O retrospecto dessa abordagem foi surpreendente, pois demonstrou-se a explícita disparidade entre os professores pesquisados. Na rede pública estadual, apenas 20% utilizam o princípio - esse porcentual constitui um número ínfimo diante da importância da explicação de tal método, o que nos leva a uma análise de preocupação sobre o perfil do matemático e sua habilidade teórica e didática.

Os números referentes ao ensino privado não atenuam o prognóstico já que apenas 50% dos entrevistados afirmaram usar o princípio de Cavalieri.

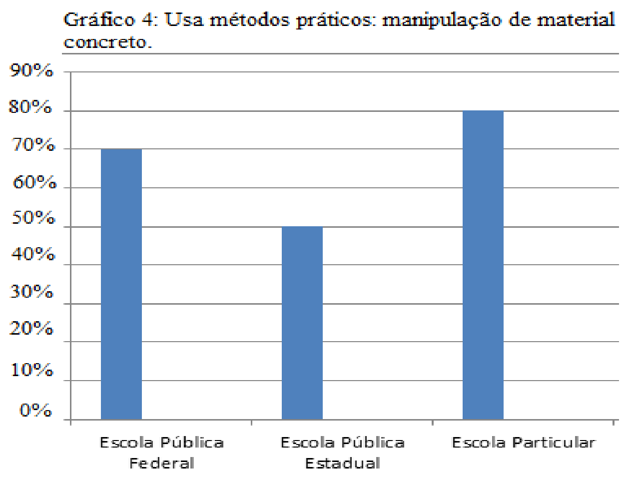
O resultado mais expressivo e animador decorreu das amostragens do ensino público federal: 70% dos pesquisados utilizam o princípio. Esse percentual revela o grau de preparação diferenciado desses profissionais e sua motivação pela estrutura que os envolve.



Também se questionou acerca da manipulação de objetos, que na prática facilitam o entendimento da fórmula do volume da pirâmide.

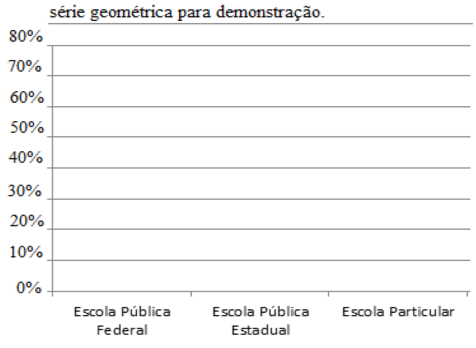
Novamente o ensino público federal e a escola particular sustentaram-se num grau de equivalência. De forma respectiva, houve apresentação percentual de 70% e 80%, esses números são estimulantes, revelaram a preocupação dos professores em demonstrar para o aluno, de forma visual, conceitos teóricos.

A fuga de um ensino burocrático e conservador representou-se por tal análise, e mesmo os resultados sendo animadores, ainda podem ser mais expressivos. Todavia, o percentual de 50%, que foi dado a escola pública estadual posiciona-a num patamar de limitação. Os professores que a compõem precisam ser estimulados a terem uma metodologia mais inovadora e criativa, utilizando mais elementos práticos e da vivência do aluno para gerar uma aprendizagem mais facilitada.



A demonstração da fórmula do volume da pirâmide usando o limite da soma de uma série geométrica é o tópico de maior relevância da pesquisa, pois constitui objeto direto desse trabalho diz respeito ao uso dos limites como método de demonstração que facilita, de forma didática, o entendimento do aluno relacionado a fórmula do volume da pirâmide. Será demonstrado que tal método é eficaz e gera resultados de aprendizagem para o aluno como também representa uma ferramenta simples e poderosa de ensino para o professor, apresentando uma demonstração algébrica, com conceitos matemáticos, e inserindo simultaneamente a aplicação prática com a manipulação de objetos. O que se percebeu na pesquisa é que nenhum professor pesquisado conhecia o método do limite da soma para poder utilizar em sala de aula. O uso de tal estratégia será um diferencial para abordagem do tema em questão.

Gráfico 5: Faz uso do método do limite da soma de uma série geométrica para demonstração.



Capítulo 3

Métodos de Demonstração da Fórmula do Volume da Pirâmide

Nesse capítulo, vamos descrever alguns dos principais métodos usados para demonstrar a fórmula do volume da pirâmide. Entre os métodos citaremos o princípio de Cavalieri, o método algébrico, usando integrais e o método algébrico, usando o limite da soma de uma série geométrica.

Essas demonstrações têm como finalidade que o leitor aprenda ou aprimore outros métodos de demonstração da fórmula do volume da pirâmide.

Todos os métodos se baseiam nos métodos já apresentados em livros didáticos ou sites e foram citados como forma de apresentação desse conteúdo pelos professores pesquisados.

3.1 O Princípio de Cavalieri e algumas aplicações

A forma mais comum apresentada no ensino médio para justificar a fórmula do volume da pirâmide é a que utiliza o Princípio de Cavalieri, que já era conhecido dos gregos, que o usavam para calcular áreas e volumes.

É importante deixar claro que o princípio de Cavalieri é um teorema, que pode ser demonstrado, no entanto sua demonstração não é feita no ensino médio por requerer conceitos avançados de teoria da medida (se o professor tivesse que demonstrá-lo, seria muito mais prático demonstrar a fórmula do volume da pirâmide por meio de integrais, sem se valer desse princípio). Sendo assim, ele é apresentado por meio de exemplos que tornem seu enunciado aceitável aos alunos desse nível de ensino, conforme veremos em seguida.

Se pusermos em cima de uma mesa uma resma de papel perfeitamente arrumada, ela formará um paralelepípedo retângulo, o qual podemos calcular seu volume sem dificuldades. Empurrando as folhas que o compõem lateralmente, o paralelepípedo retângulo que tínhamos ficará oblíquo e, se deformarmos mais um pouco, teremos ainda outros sólidos, conforme Figura (3.1.) a seguir

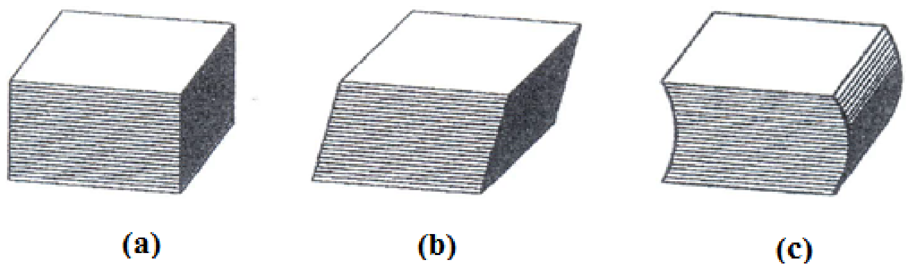
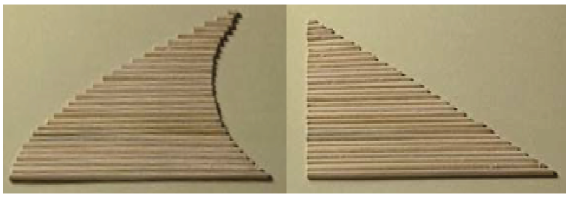


Figura 3.1: Princípio de Cavalieri (volume)

É natural intuirmos que o volume desses 3 sólidos acima é o mesmo, pois nenhuma folha foi retirada ou adicionada. Esse fato, que percebemos intuitivamente, pode ser comprovado pelo princípio de Cavalieri que diz:

I) *Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.*



Fonte: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/17046/TELA-volume_de_piramides---guia_do_professor.pdf?sequence=13
Acesso em: 20 de agosto de 2013.

Figura 3.2: Princípio de Cavalieri (área)

II) *Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão entre as áreas é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.*

3.1.1 O Volume do Prisma

Definição 9 *Um prisma é todo poliedro convexo formado por uma face superior e uma face inferior paralelas e congruentes (também chamadas de bases) ligadas por arestas paralelas entre si.*

Usando o Princípio de Cavalieri para obter facilmente o volume de um prisma.

Para isso, vamos considerar um prisma de altura h, cuja base seja um polígono de área S, contido e um plano horizontal α.

Construímos ao lado um paralelepípedo retângulo de mesma altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área S.

Se cortarmos esses dois prismas (o paralelepípedo também é um prisma) por um plano horizontal, teremos secões de área S_1 e S_2 em cada prisma. Mas sabemos que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente com essa base, portanto tem área igual a S, ou seja, $S_1 = S = S_2$.

Assim, pelo Princípio de Cavalieri, os dois prismas têm o mesmo volume, e como o volume do paralelpípedo retângulo é $V = Sh$, temos que:

$$\text{Volume do prisma} = (\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

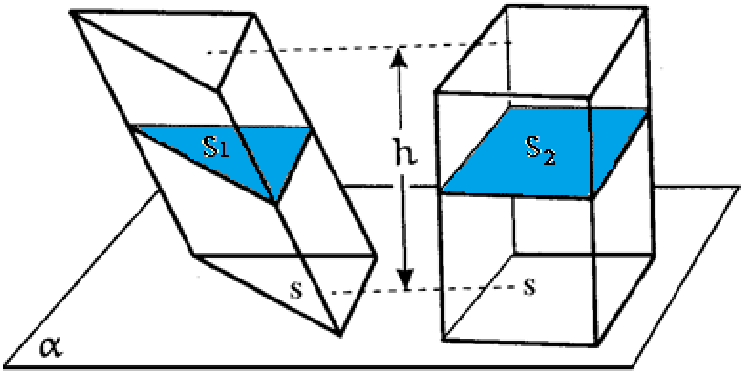


Figura 3.3: Prisma 1

3.1.2 O Volume da Pirâmide

Partindo também do Princípio Cavalieri, podemos determinar a fórmula do volume da pirâmide triangular, vejamos:

Considere uma pirâmide de base triangular ABC, altura H e vértice V. Seccionando a pirâmide por um plano paralelo a base ABC e a uma distância h do vértice V, temos a Figura 3.4 a seguir.

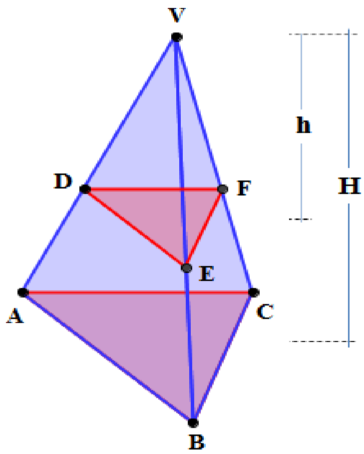


Figura 3.4: Pirâmide 1

Como $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AB}$ os triângulos VAB e VDE são semelhantes, assim temos que

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{VD}} = \frac{\overline{VB}}{\overline{VE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = k$$

para algum k.

Da mesma forma, nos triângulos VBC e VEF,

$$\frac{\overline{VB}}{\overline{VE}} = \frac{\overline{VC}}{\overline{VF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = k$$

e ainda,

$$\frac{\overline{VC}}{\overline{VF}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VD}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DF}} = k.$$

Das igualdades acima concluímos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = k$$

ou seja, os lados dos triângulos da seção e da base são proporcionais a uma mesma constante k, o que mostra que a seção e a base são figuras semelhantes.

Agora vamos determinar a razão entre H e h. Para isso tracemos um segmento de reta que desce de V perpendicularmente à base. Esse segmento determina dois pontos, um sobre a seção e outro sobre a base, Denotemos por Y e X respectivamente. Vejamos Figura 3.5 a seguir.

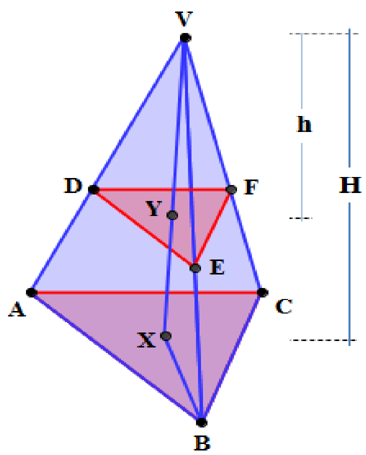


Figura 3.5: Pirâmide 2

Da figura, temos os triângulos VXB e VYE retângulos com alturas representadas por $H = \overline{VX}$ e $h = \overline{VY}$ respectivamente.

Note que esses triângulos são semelhantes (pois apresentam ângulos congruentes) e portanto temos

$$\frac{\overline{VX}}{\overline{VY}} = \frac{\overline{VB}}{\overline{VE}}.$$

Como $\frac{\overline{VB}}{\overline{VE}} = k$, temos que:

$$k = \frac{\overline{VX}}{\overline{VY}} = \frac{H}{h} \Rightarrow \frac{H}{h} = k.$$

Como os triângulos ABC e DEF são semelhantes, com razão de semelhança k, segue que:

$$\frac{S_{(\mathsf{Base})}}{S_{(\mathsf{Secção})}} = k^2 = \left(\frac{H}{h}\right)^2$$

donde concluímos que

$$S_{(\mathsf{Seção})} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \cdot S_{(Base)}.$$

Continuando com noção dedução, considere agora duas pirâmides de base triangular ABC e mesma altura H, com vértices V_1 e V_2. Veja Figura 3.6 a seguir:

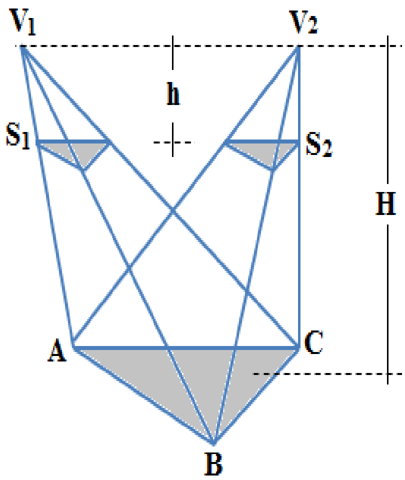


Figura 3.6: Pirâmide 3

Note que se secionando essas pirâmides por um plano paralelo a base, a uma distância h dos vértices V_1 e V_2, secções S_1 e S_2 obtidas têm mesma área, conforme pudemos ver anteriormente, ou seja:

$$S_{(S_1)} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \cdot S_{(Base)} = S_{(S_2)},$$

em que

$$\frac{S_{(S_1)}}{S_{(Base)}} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 < 1.$$

Do fato de as áreas das seções S_1 e S_2 serem iguais, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que as pirâmides têm mesmo volume e ainda, que pirâmides de mesma base triangular e mesma altura têm mesmo volume.

Com essa conclusão vamos agora mostrar que o volume de uma pirâmide de base triangular é a terça parte do volume do prisma de mesma base e mesma altura. Para isso, considere o prisma de base triangular ABC e altura h da Figura 3.7.

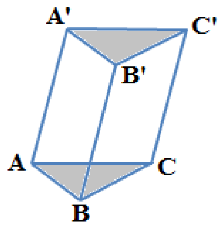


Figura 3.7: Prisma 2

Vamos agora dividir esse prisma em três pirâmides de mesma base triangular conforme Figura 3.8.

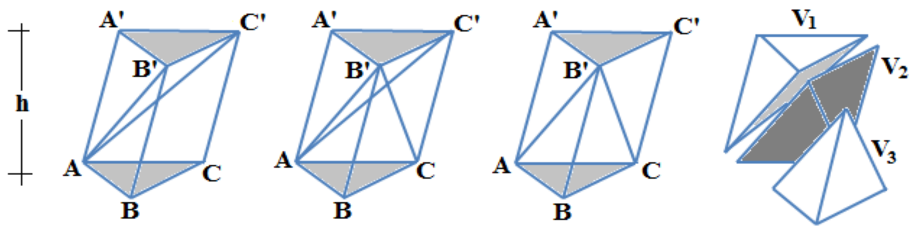


Figura 3.8: Pirâmides

Se denotarmos por V o volume do prisma e por V_1, V_2 e V_3 os volumes das três pirâmides. E mais, como as bases $A'AC = ACC' = B'BC$ das pirâmides são iguais, ou seja, possuem a mesma área e além disso $B' \perp \triangle A'AC = B' \perp \triangle ACC' = A \perp \triangle B'BC =$ e $HD \perp \triangle EHF$, pelo principio de Cavalieri $V_1 = V_2 = V_3$ e com isso $V = V_1 + V_2 + V_3$, o que implica $V_1 = V_2 = V_3 = \frac{1}{3}V$.

Lembrando que o volume do prisma é dado por $V = S_{(Base)} \cdot (Altura)$ o volume da pirâmide fica determinado por:

$$V = \frac{1}{3} S_{(Base)} \cdot (Altura).$$

Vamos agora generalizar para uma pirâmide de base qualquer. Para isso, o primeiro passo é observar que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Para fazer isso, basta que tracemos planos que passem pelo vértice da pirâmide que queremos dividir e pelas diagonais da base dessa pirâmide, como na Figura 3.9 a seguir.

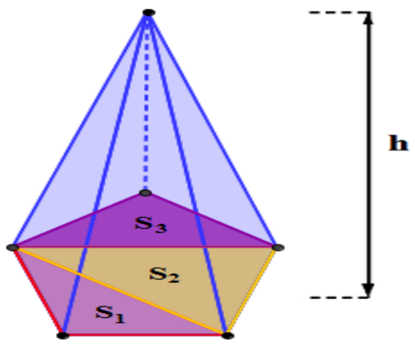


Figura 3.9: Pirâmide 4

Chamando de S a área da base pirâmide e dividindo ela em n triângulos (tantos quantos forem suas diagonais) de áreas $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$. O volume da pirâmide fica determinado pelo soma dos volumes das pirâmides triangulares, ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot S_2 \cdot h + ... + \frac{1}{3} \cdot S_n \cdot h \\ &= \frac{1}{3}(S_1 \cdot h + S_2 \cdot h + ... + S_n \cdot h) \\ &= \frac{1}{3} \cdot S \cdot h. \end{aligned}$$

Esse método é bastante aplicável (e costuma ser usado) no ensino médio, no entanto, não podemos caracterizá-lo com uma demonstração, pelo menos não em seu sentido completo, uma vez que fazemos uso do princípio de Cavalieri, o qual não demonstramos.

3.1.3 O Volume do Cone

Definição 10 *Consideremos uma figura plana fechada situada em um plano α e um ponto V fora de α. Chama-se cone a reunião dos segmentos de reta com uma extremidade de V, denominada vértice do cone, e a outra na figura plana, denominada base do cone.*

Um cone, cuja base é um círculo será denominado *cone circular*, veja figura 3.10 a seguir:

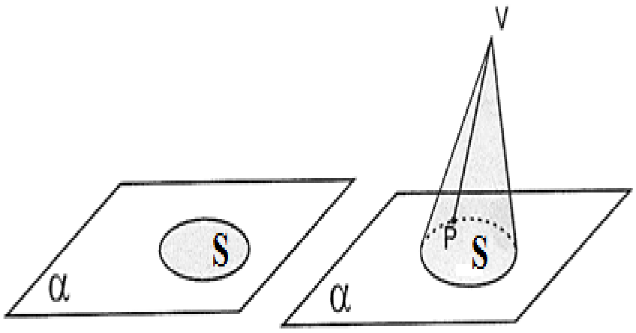


Figura 3.10: Cone Circular

Teorema 2: *O volume de um cone é um terço do produto de sua altura pela área da base.*

Usaremos o Princípio de Cavalieri para demonstrar o teorema 2.

Dado o cone com altura H e área da base S, consideremos uma pirâmide qualquer com a mesma altura e mesma área da base. Como mostra a figura 3.11, note que a base da pirâmide e a base do cone estão em um mesmo plano.

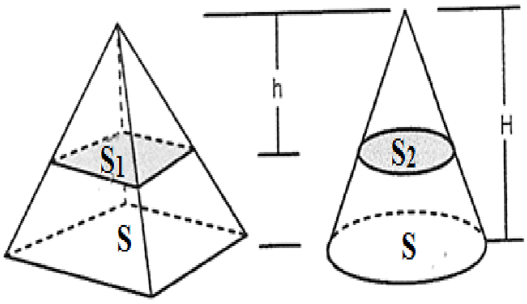


Figura 3.11: Volume do Cone

Se um plano paralelo ao plano que contém as bases intersectar os sólidos a uma altura h dos vértices destes sólidos, obteremos figuras de áreas S_1 e S_2.

As regiões S e S_2 são circunferências de raios R e r, respectivamente, ver figura 3.12.

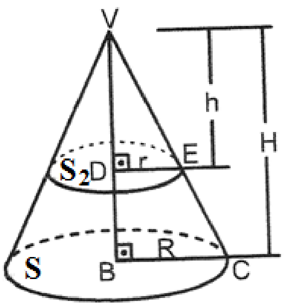


Figura 3.12: Razões entre as áreas

Traçando a perpendicular $\overline{VB}$ no cone, obtemos os triângulos $\triangle VBC$ e $\triangle VDE$ semelhantes.

Assim,

$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h}.$$

Então o quociente entre estas áreas é

$$\frac{S}{S_2} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{H}{h}\right)^2.$$

Portanto,

$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \frac{S}{S_2} \Rightarrow S_1 = S_2.$$

Pelo Princípio de Cavalieri, os volumes dos sólidos são iguais, isto é,

$$V_{\text{pirâmide}} = V_{cone} = \frac{Sh}{3}.$$

3.1.4 O volume da Esfera

Definição 11 *Uma esfera é formada pelo conjunto de pontos do espaço que equidistam de um ponto dado, denominado centro da esfera. A distância entre um ponto P da esfera e o centro da esfera é chamada de raio da esfera.*

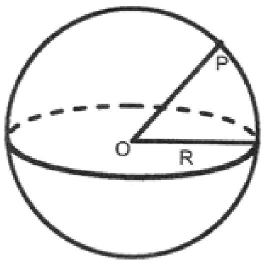


Figura 3.13: Esfera

Considere um plano qualquer que secciona uma esfera de raio R a uma distância h do seu centro.

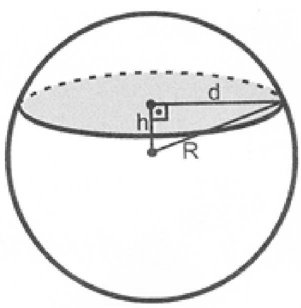


Figura 3.14: Área da secção

Para determinarmos a área da secção, temos:

$$h^2 + d^2 = R^2$$

$$d^2 = R^2 - h^2.$$

Então a área da secção será dada por:

$$\begin{aligned} A_{\text{secção}} &= \pi d^2 \\ &= \pi(R^2 - h^2). \end{aligned}$$

Teorema 3: *O volume de uma esfera de raio R é $\frac{4\pi R^3}{3}$.*

Demonstração:

Considere uma cilindro de raio R com altura $2R$ e uma esfera de raio R, e que o cilindro e a esfera estejam sobre um plano α. Devemos construir dois cones de raio R e altura R ambos com vértice no centro do cilindro, cujas bases sejam bases do cilindro.

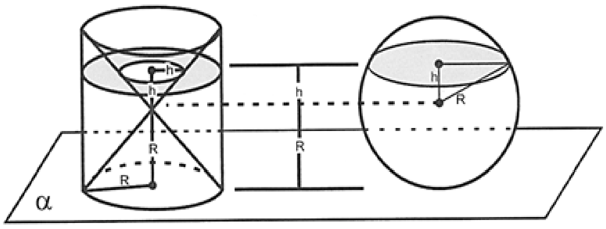


Figura 3.15: Área da secção

Traçamos um plano qualquer paralelo ao plano α intersectando os sólidos a uma altura $R + h$ como mostra a figura 3.15.

Observe que como já visto, a área da secção da esfera é dada por $A_{\text{secção}} = \pi(R^2 - h^2)$.

A área da secção que intersecta o cone e o cilindro é igual a área de uma coroa circular que é a diferença entre a área do círculo de raio R e a área do círculo de raio h, logo a área da coroa circular é dada por:

$$A_{coroa} = \pi R^2 - \pi h^2$$

$$A_{coroa} = \pi(R^2 - h^2).$$

Notamos que o plano paralelo ao plano α determina secções que apresentam a mesma área. Como as alturas dos sólidos são iguais, podemos concluir que, pelo Princípio de Cavalieri, os volumes dos sólidos também são iguais. Então,

$$\begin{aligned}
V_{(esfera)} &= V_{(\text{anti-clépsidra})} \\
&= V_{(cilindro)} - 2V_{(cone)} \\
&= A_{base} \cdot H - 2 \cdot \frac{1}{3} A_{base} \cdot H \\
&= \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R \\
&= 2\pi R^3 .2R - \frac{2}{3} \pi R^3 \\
&= \frac{4}{3} \pi R^3 .
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula do volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi R^3$.

3.1.5 A área da Elipse

Utilizando o Princípio de Cavalieri em dimensões dois (versão bidimensional) para calcular a área compreendida por uma elipse de semi-eixo a e b

Considere a elipse e a circunferência

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

e

$$x^2 + y^2 = a^2$$

vamos supor que $a \geq b$, veja figura 3.16.

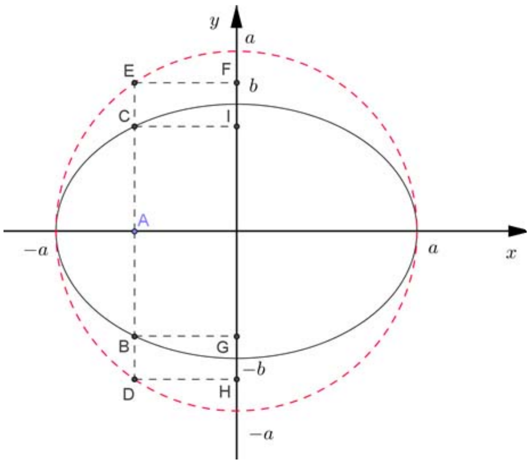


Figura 3.16: Elipse e Circunferência

Escrevendo y como função de x e considerando os pontos positivos temos:

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo a razão entre suas ordenadas quaisquer da elipse e da circunferência e $\frac{b}{a}$. Portanto a razão entre duas cordas verticais correspondentes da elipse e da circunferência é $\frac{b}{a}$.

Pelo Princípio de Cavalieri segue-se que

$$
\begin{aligned}
A_{(elipse)} &= \frac{b}{a} \cdot S_{(\text{círculo})} \\
A_{(elipse)} &= \frac{b}{a} \cdot (\pi a^2) = ab\pi.
\end{aligned}
$$

Essas demonstrações mostram que os Princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de área e volumes, além disso, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno.

3.2 O Volume de uma Pirâmide usando Cálculo Infinitesimal

Hoje, o método tido como mais geral e eficiente de se obter o volume é por meio do cálculo infinitesimal. Usando integração de funções elementares, podemos demonstrar a fórmula do volume da pirâmide para uma pirâmide de base específica dada. Faremos aqui a demonstração para a pirâmide de base quadrada, no entanto o raciocínio para chegarmos a fórmula é o mesmo para pirâmides com outras formas de base. Vejamos o caso citado a seguir:

Para essa demonstração, precisamos recordar o cálculo do volume de sólidos para os quais é possível expressar a área de qualquer seção plana perpendicular a uma reta fixa em função da distância da seção plana a um ponto fixo da reta citada.

Imaginemos o sólido da figura 3.17, no qual vemos seções perpendiculares ao eixo x com uma área conhecida $A(ki)$, sendo $A(k)$ uma função integrável em $[a, b]$, e uma sequência de números $x_0, x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ tais que $a < x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ e os números $k_1, k_2, ..., k_n$ tais que k_i é um ponto do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e sendo $y = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ é a espessura da i-ésima parte do volume, com $i = 1, 2, .., n$.

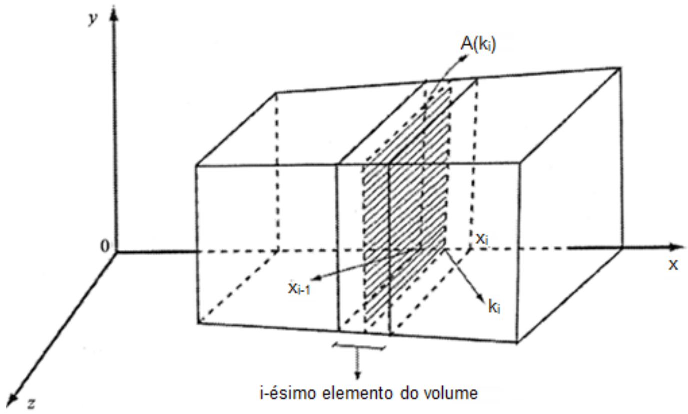


Figura 3.17:

O i-ésimo elemento de volume do sólido cuja base é a intersecção do plano perpendicular à reta fixa em a_i com o sólido é dado por:

$$V_i = A(k_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Assim,

$$V = A(k_1)(x_1 - x_0) + A(k_2)(x_2 - x_1) + ... + A(k_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} A(k_i)\Delta x_i.$$

Portanto,

$$V = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(k_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x).dx$$

Vamos agora determinar o volume da pirâmide de base quadrada e altura h. Para isso vamos imaginar a pirâmide sobre o eixo xy, e com altura sobre o eixo y, conforme figura 3.18.

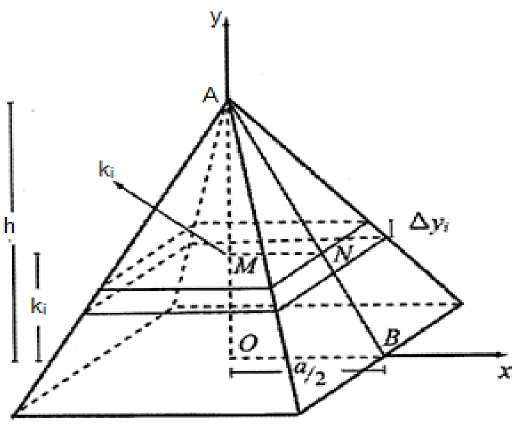


Figura 3.18: Pirâmide 5

Observemos que as seções planas perpendiculares ao eixo y representam quadrados e que os triângulos AMN e AOB são semelhantes.

Assim temos,

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}.$$

Da figura temos ainda que $\overline{OB} = \frac{a}{2}$, $\overline{AO} = h$ e $\overline{AM} = \overline{AO} - \overline{MO} = h - k_i$, substituindo na proporção anterior e isolando $\overline{MN}$ temos:

$$\overline{MN} = \frac{(h - ki)a}{2h}$$

Assim o lado do quadrado que estamos à procura será dado por $2\overline{MN} = \frac{(h-ki)a}{h}$ e seu volume será,

$$V = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{i}^{n} \left[\frac{(h-ki)a}{h}\right]^2 \Delta y_i$$

$$V = \int_0^h \left[\frac{(h-ki)a}{h}\right]^2 dy = \frac{a^2}{h^2} \int_0^h (h^2 - 2hy + y^2)dy = \frac{1}{3}a^2 h.$$

De maneira mais usual podemos determinar o volume da pirâmide utilizando noções básicas de geometria e cálculo, a fim de dar maior agilidade ao processo, da seguinte maneira.

Imaginemos a figura 3.18, nela, como já vimos, os triângulos AMN e AOB são semelhantes. Assim na Figura 3.19, temos que:

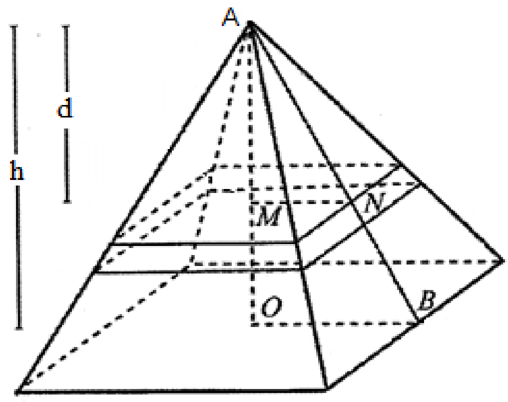


Figura 3.19: Pirâmide 6

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}.$$

Chamando $\overline{AM} = d$, $\overline{AO} = h$ a área do quadrado que contém $\overline{OB}$ de S_b, a área do quadrado que contém $\overline{MN}$ de $S_{b'}$, todos da figura 3.19, e lembrando da geometria plana que:

$$\frac{S_{b'}}{S_b} = \left(\frac{\overline{MN}}{\overline{OB}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}\right)^2 = \left(\frac{d}{h}\right)^2.$$

Assim,

$$S_{b'} = S_b \left(\frac{d}{h}\right)^2.$$

Chamando $d = x$,

$$S_{b'} = \left(\frac{S_b}{h^2}\right) x^2.$$

Portanto,

$$V = \int_0^h \frac{S_b}{h^2} x^2 dx = \frac{S_b}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \bigg|_0^h \right] = \frac{S_b h}{3}.$$

Assim finalizamos a demonstração do volume de uma pirâmide de base quadrada.

Cabe aqui ao professor comentar com os alunos que essa demonstração foi feita para o caso pirâmide de base quadrada, mas, por raciocínio análogo, se pode chegar à mesma fórmula. O que caracteriza que o volume V da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} S_{(base)} h.$$

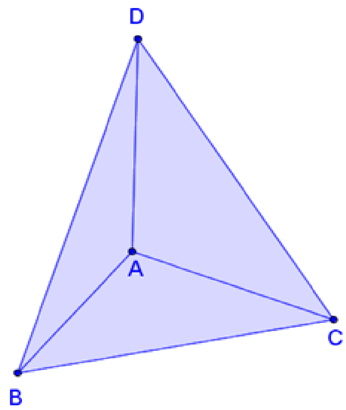
3.3 Método Algébrico usando Limite da Soma de uma Série Geométrica

Apresentaremos a seguir um método diferenciado para o cálculo do volume da pirâmide.

Teorema 4: *O volume de qualquer pirâmide é um terço do produto da área de sua base pela medida de sua altura, ou seja,* $V = \frac{1}{3}S_b \cdot h$.

Demonstração:

Seja uma pirâmide de base triangular ABC, com o ponto D sendo o vértice, de modo que a projeção ortogonal de D sobre o plano da base seja o vértice A.



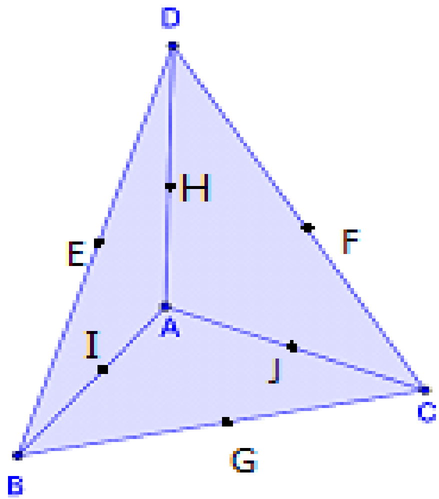
Tetraedro: $AD \perp \triangle ABC$

Sendo:

Área($\triangle ABC$)= S.

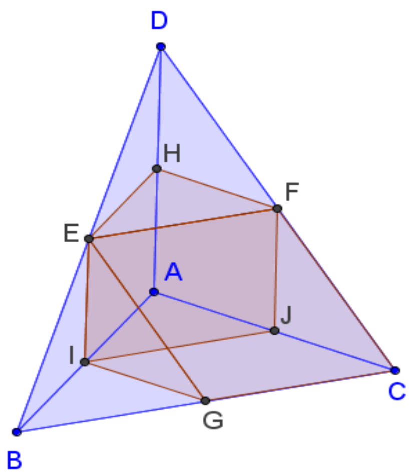
h a medida da altura da pirâmide ($h = AD$).

Marcamos os pontos médios E, F, G, H, I e J das arestas $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.



Traçamos os segmentos cujas extremidades são os pontos médios E, F, G, H, I e J e os vértices da pirâmide A, B, C e D.

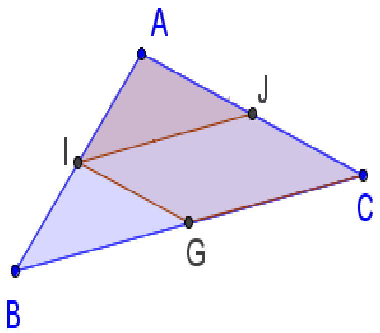
Formaremos os segmentos: $\overline{DH}$, $\overline{DF}$, $\overline{DE}$, $\overline{EH}$, $\overline{FH}$, $\overline{EF}$, $\overline{AH}$, $\overline{AI}$, $\overline{AJ}$, $\overline{JI}$, $\overline{BE}$, $\overline{EI}$, $\overline{FJ}$, $\overline{CF}$, $\overline{EG}$, $\overline{BI}$, $\overline{GI}$, $\overline{CJ}$, $\overline{CG}$ e $\overline{BG}$.



Formamos, assim, dois prismas a saber o de $IJAHEJ$ vértices e o de vértices $IEFG$ e duas pirâmides triangulares iguais $BIGE$ e $EFHD$, além disso $EI \perp \triangle IBG$ e $HD \perp \triangle EHF$.

Vamos analisar como a Área($\triangle ABC$) foi dividida:

A área da base do triângulo ABC foi dividido em dois triângulos e um paralelogramo.



Pelo teorema da base média, temos que:

$$\overline{IJ} = \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow \frac{\overline{IJ}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$$

e $\overline{IJ} // \overline{BC}$.

Portanto os triângulos AIJ e ABC são semelhantes, com razão de semelhança igual a $\frac{1}{2}$. Lembrando que a razão das áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Segue que:

$$\frac{A(\triangle AIJ)}{A(\triangle ABC)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{A(\triangle AIJ)}{S} = \frac{1}{4} \Rightarrow A(\triangle AIJ) = \frac{1}{4}S.$$

Como os triângulos $\triangle AIJ$ e $\triangle IBG$ são congruentes (caso LLL). Segue que a área$(\triangle IBG) = \frac{1}{4}S$.

Logo a área da base do triângulo ABC foi dividida em dois triângulos congruentes e um paralelogramo, temos que:

$$\text{Área}(\triangle AIJ) + \text{Área}(\triangle IBG) + \text{Área}(IJCG) = \text{Área}(\triangle ABC)$$

$$\frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S + \text{Área}(IJCG) = S$$

$$\text{Área}(IJCG) = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S$$

$$\text{Área}(IJCG) = \frac{4S - S - S}{4}$$

$$\text{Área}(IJCG) = \frac{1}{2}S.$$

Assim, a área do paralelogramo $IJCG$ é $\frac{1}{2}S$.

Agora vamos analisar como a altura $h = \overline{AD}$ foi dividida:

A altura $h = \overline{AD}$ foi dividida pelo ponto médio H.

Logo,

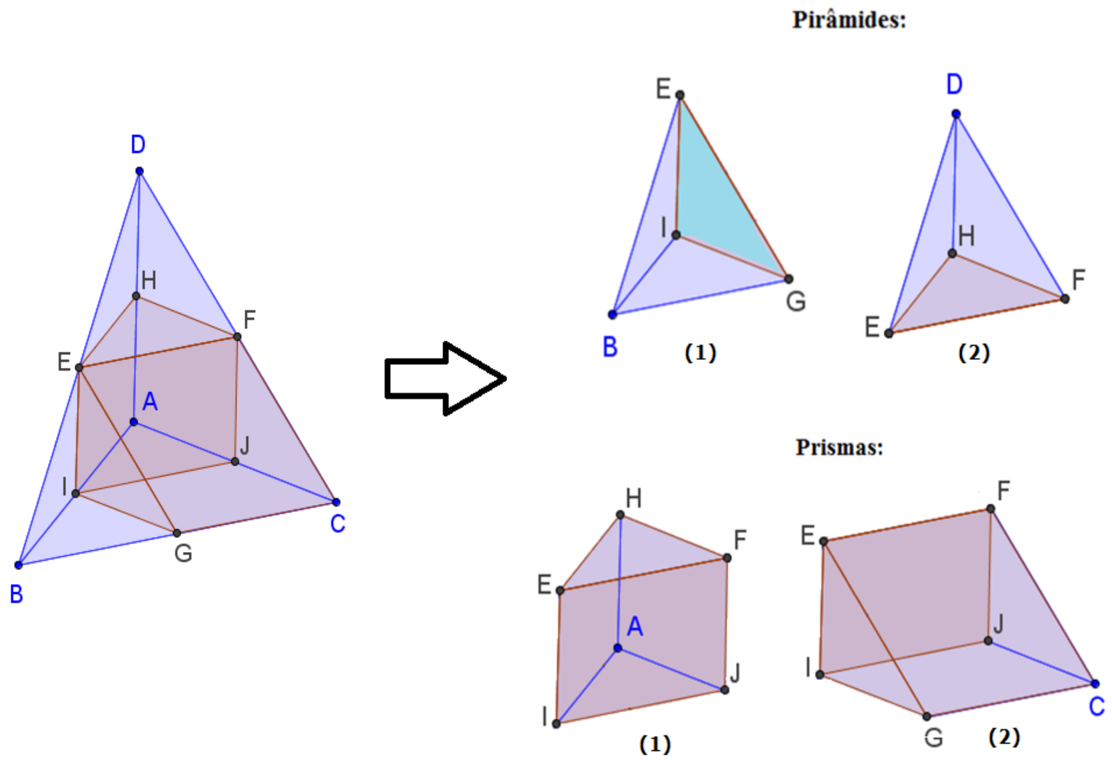
$$\overline{HD} + \overline{HA} = \overline{AD} \Rightarrow \overline{HD} + \overline{HD} = \overline{AD}$$

$$2\overline{HD} = \overline{AD} \Rightarrow \overline{HD} = \frac{\overline{AD}}{2}.$$

Agora sabemos que:

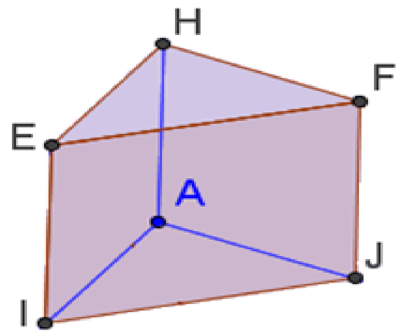
$$\begin{cases} \text{área}(\triangle AIJ) = \frac{1}{4}S \\ \overline{HD} = \frac{1}{2}h \end{cases}.$$

Observamos que a pirâmide de base ABC com vértice D foi dividida em duas pirâmides iguais e dois prismas, vejamos:



Vamos agora calcular os volumes dos dois prismas, temos:

Prisma (1): Prisma de base $\triangle AIJ$.

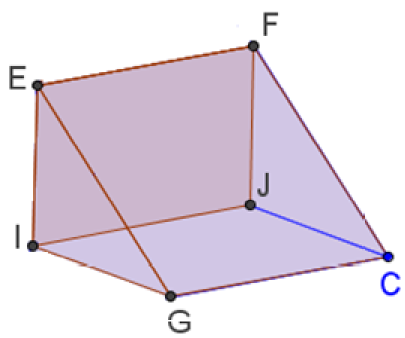


Sabendo que $\overline{AH} = \frac{1}{2}h$. e área$(\triangle AIJ) = \frac{1}{4}S$.

Logo o volume do **Prisma (1)** é dado por:

$$\begin{aligned} V_{Prisma(1)} &= A_{Base} \cdot \overline{AH} \\ &= \text{Área}(\triangle AIJ) \cdot \frac{1}{2}h \\ &= \frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{2}h \\ &= \frac{1}{8}Sh. \end{aligned}$$

Prisma (2): A metade de um paralelepípedo.



Sabendo que a área do paralelogramo $(IJCG) = \frac{1}{2}S$ e que $\overline{EI} = \overline{FJ} = \frac{1}{2}h$. Logo o volume do **Prisma (2)** é dado por:

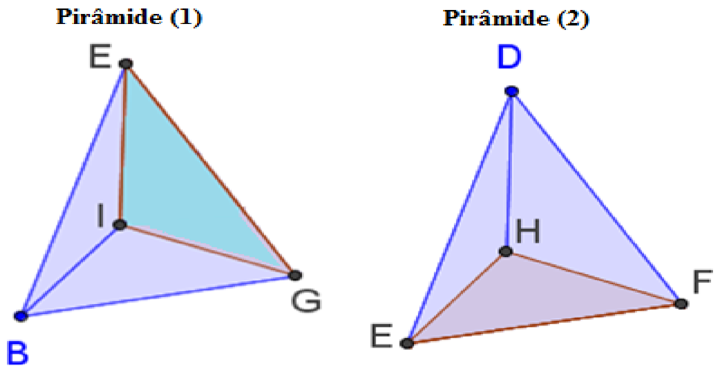
$$\begin{aligned} V_{Prisma(2)} &= \frac{1}{2}A_{Base} \cdot \overline{EI} \\ V_{Prisma(2)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}S\right) \cdot \frac{1}{2}h \\ V_{Prisma(2)} &= \frac{1}{8}Sh. \end{aligned}$$

De fato, provamos que ambos os prismas têm o mesmo volume, logo somando o volume do **Prisma (1)** e **Prisma (2)**, temos:

$$V_{Prisma(1)} + V_{Prisma(2)} = \frac{1}{8}Sh + \frac{1}{8}Sh$$

$$V_{Prisma(1)} + V_{Prisma(2)} = \frac{2}{8}Sh = \frac{1}{4}Sh.$$

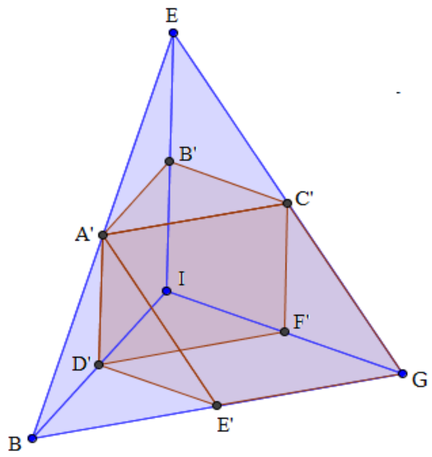
Ainda temos as duas pirâmides iguais, onde $\overline{EI} \perp \triangle(IBG)$ e $\overline{DH} \perp \triangle(HFE)$, sendo que $\overline{EI}$ e $\overline{DH}$ são as alturas das pirâmides (1) e (2) respectivamente. Veja as figuras a seguir:



Repetindo o procedimento de dividir cada pirâmide triangular em dois prismas e duas outras pirâmides triangulares iguais.

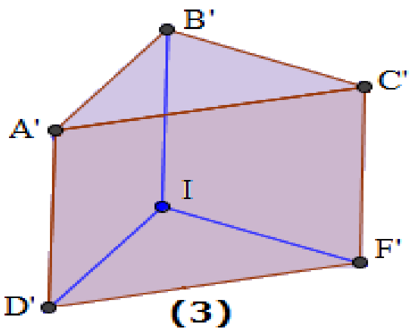
Marcamos os pontos médios A', B', C', D', E' e F' das arestas $\overline{BE}$, $\overline{EI}$, $\overline{EG}$, $\overline{BI}$, $\overline{BG}$ e $\overline{GI}$, respectivamente.

Pirâmide (1):



Vamos agora calcular os volumes dos prismas (3) e (4), temos:

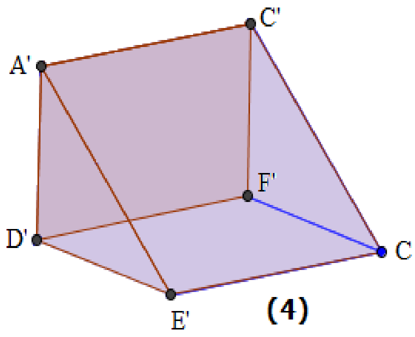
Prisma (3): Prisma de base $\triangle D'F'I$.



Sabendo que $\overline{B'I} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{4}h$ e $\text{área}(\triangle D'F'I) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}S\right) = \frac{1}{16}S$.
Logo o volume do **Prisma (3)** é dado por:

$$
\begin{aligned}
V_{Prisma(3)} &= A_{Base} \cdot \overline{B'I} \\
V_{Prisma(3)} &= \text{Área}(\triangle D'F'I) \cdot \frac{1}{4}h \\
V_{Prisma(3)} &= \frac{1}{16}S \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{64}Sh.
\end{aligned}
$$

Prisma (4): A metade de um paralelepípedo.



Sabendo que a área do paralelogramo $(D'F'CE') = \frac{1}{2} \cdot area(\triangle BIC) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}S\right) = \frac{1}{8}S$ e que $\overline{D'A'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EI} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{4}h$.

Logo a volume do **Prisma (4)** é dado por:

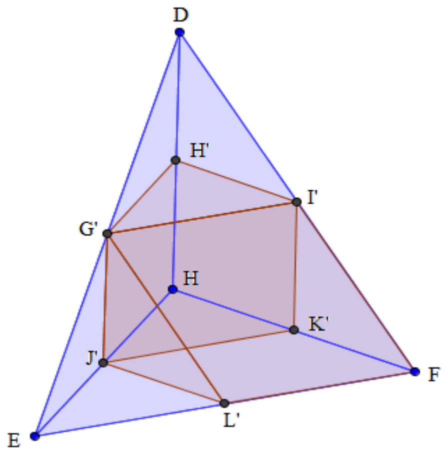
$$
\begin{aligned}
V_{Prisma(4)} &= \frac{1}{2} A_{Base} \cdot \overline{D'A'} \\
V_{Prisma(4)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}S\right) \cdot \frac{1}{4}h \\
V_{Prisma(4)} &= \frac{1}{64}Sh.
\end{aligned}
$$

Somando o volume do **Prisma (3)** e **Prisma (4)**, temos:

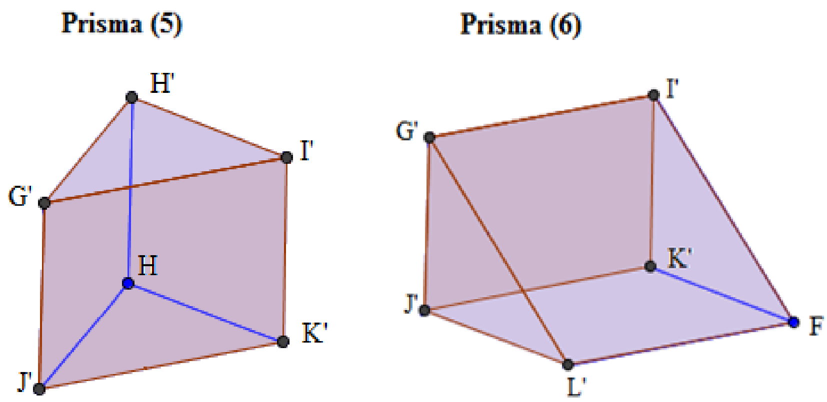
$$
\begin{aligned}
V_{Prisma(3)} + V_{Prisma(4)} &= \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh \\
V_{Prisma(3)} + V_{Prisma(4)} &= \frac{2}{64}Sh \\
V_{Prisma(3)} + V_{Prisma(4)} &= \frac{1}{32}Sh.
\end{aligned}
$$

Pirâmide (2):

Marcamos os pontos médios G', H', I', J', K' e L' das arestas $\overline{ED}$, $\overline{DH}$, $\overline{DF}$, $\overline{HE}$, $\overline{FH}$ e $\overline{EF}$, respectivamente.



Vamos agora calcular os volumes dos prismas (5) e (6), temos:



Como na pirâmide (1) $\overline{EI} \perp \triangle IBG$ e na pirâmide (2) $\overline{DH} \perp \triangle EHF$.
Então, o volume do **Prisma (5)** é igual ao volumes do **Prisma (3)**, ou seja,

$$V_{Prisma(5)} = V_{Prisma(3)} = \frac{1}{64}Sh.$$

E o volume do **Prisma (6)** é igual ao volume do **Prisma (4)**, ou seja,

$$V_{Prisma(6)} = V_{Prisma(4)} = \frac{1}{64}Sh.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
V_{Prisma(5)} + V_{Prisma(6)} &= \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh \\
V_{Prisma(5)} + V_{Prisma(6)} &= \frac{2}{64}Sh \\
V_{Prisma(5)} + V_{Prisma(6)} &= \frac{1}{32}Sh.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\underbrace{V_{Prisma(3)} + V_{Prisma(4)}} + \underbrace{V_{Prisma(5)} + V_{Prisma(6)}} &= \frac{1}{32}Sh + \frac{1}{32}Sh \\
\underbrace{V_{Prisma(3)} + V_{Prisma(4)}} + \underbrace{V_{Prisma(5)} + V_{Prisma(6)}} &= \frac{2}{32}Sh \\
\underbrace{V_{Prisma(3)} + V_{Prisma(4)}} + \underbrace{V_{Prisma(5)} + V_{Prisma(6)}} &= \frac{1}{16}Sh.
\end{aligned}$$

Continuando esse procedimento na próxima etapa, teríamos 8 prismas cuja soma dos volumes seria:

$$Soma\left[V_{Prismas(7,8,9,\ldots,14)}\right] = \frac{1}{64}Sh.$$

Continuando esse mesmo procedimento, infinitamente o volume da pirâmide original ($\overline{AD} \perp \triangle ABC$) correspondente à soma dos volumes de todos os prismas, ou seja,

$$V_{(\text{Pirâmide})} \cong \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} Sh.$$

A série é uma série geométrica, então ela converge.

Assim,

$$V_{\text{Pirâmide}} \cong \underbrace{V_{Prisma(1)} + V_{Prisma(2)}} + \underbrace{V_{Prisma(3)} + V_{Prisma(4)} + V_{Prisma(5)} + V_{Prisma(6)}} + \ldots$$

$$V_{\text{Pirâmide}} \cong \frac{1}{4}Sh + \frac{1}{16}Sh + \frac{1}{64}Sh + \ldots$$

$$V_{\text{Pirâmide}} \cong \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) Sh.$$

Usando o Limite da Soma dos termos de uma série geométrica de primeiro termo a_1 e de razão q tal que $|q| < 1$ que é dado por $\frac{a_1}{1-q}$, segue que:

$$V_{\text{Pirâmide}} = \left(\frac{a_1}{1-q}\right) \cdot Sh,$$

onde $a_1 = \frac{1}{4}$ e $q = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Logo,

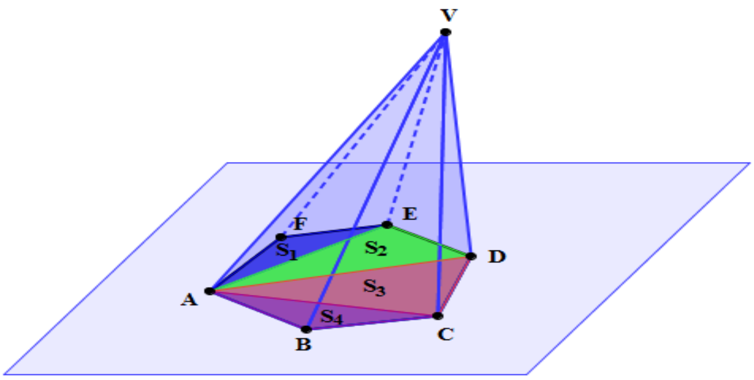
$$\begin{aligned} V_{\text{Pirâmide}} &= \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right) \cdot Sh \\ V_{\text{Pirâmide}} &= \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right) \cdot Sh \\ V_{\text{Pirâmide}} &= \frac{1}{3} \cdot Sh. \end{aligned}$$

Isso demonstra que o volume de uma piramide de base triangular cuja projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base coincide com um dos vértices da base é $\frac{1}{3}A_{base} \cdot h$.

Para concluir que o volume de uma pirâmide de base triangular qualquer também é $\frac{1}{3}A_{base} \cdot h$ devemos usar o princípio de Cavalieri.

Finalmente no caso de ser uma pirâmide com base qualquer de n lados, podemos partir de um único vértice, dividindo esta base em triângulos e pecorrer a demonstração anterior.

Vejamos a pirâmide a seguir:



Onde:

• Altura da pirâmide é igual a h;

• A área da base é igual a S, onde $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + ... + S_n$.

Neste caso o volume da pirâmide é dado por:

$$\begin{aligned} V_{\text{Pirâmide}} &= \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \frac{1}{3}S_3h + \frac{1}{3}S_4h + ... + \frac{1}{3}S_nh \\ V_{\text{Pirâmide}} &= \frac{1}{3}\left(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + ... + S_n\right)h = \frac{1}{3}Sh. \end{aligned}$$

Caro leitor, usando um procedimento análogo ao que foi usado neste trabalho para demonstrar o volume da pirâmide, pode-se demonstrar também que $V_{cone} = \frac{1}{3}A_{base} \cdot h$. Para maiores detalhes, veja o artigo do professor Vincenzo Bongiovanni (vide[1]) que propõe uma abordagem do cálculo da fórmula do volume do cone, apoiado no conceito intuitivo de limite.

E que também é possível demonstrar a fórmula do volume da esfera, ou seja, $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$, como está feito no livro Geometry. Em LANG (vide[9]).

Capítulo 4

Métodos Lúdicos para justificar a validade da fórmula do volume da Pirâmide

Neste capítulo, vamos apresentar o uso de material concreto como uma ferramenta para verificação intuitiva da fórmula do volume da pirâmide.

A utilização de material concreto torna as aulas mais interativas e atrativas, assim como incentiva a busca, o interesse, a curiosidade e o espírito de investigação, instigando os alunos na elaboração de perguntas, criação de hipóteses e a descoberta das próprias soluções.

Utilizar o material concreto para mostrar o volume da pirâmide, por si só, não garante aprendizagem. Assim, torna-se fundamental o papel do professor nesse processo, enquanto mediador da ação e articulador das situações experienciadas no material concreto e os conceitos matemáticos, para uma posterior abstração e sistematização do assunto.

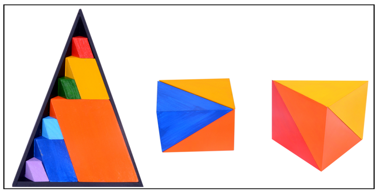


Figura 4.1: Sólidos manipuláveis

4.1 Volume da Pirâmide como Parte do Volume do Prisma

Vamos mostrar com o uso de material concreto que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual à terça parte do volume do prisma de mesma base e mesma altura, ou seja, $V = \frac{1}{3}S_B.h$.

Para ver isto, consideremos o prisma da figura a seguir:

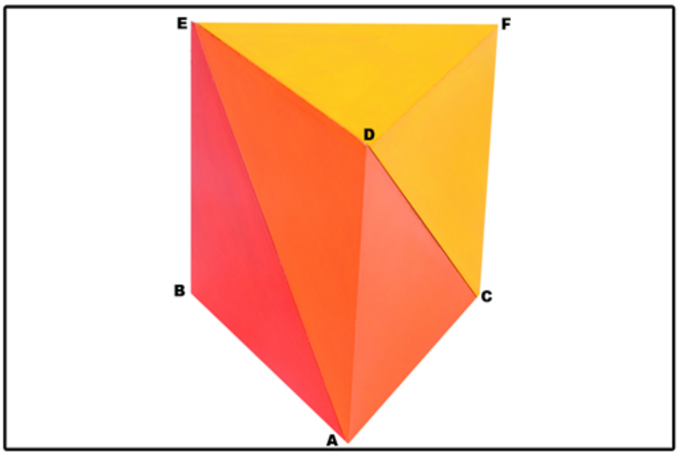


Figura 4.2: Prisma triangular

Seccionando o prisma, obtemos três pirâmides triangulares (tetraedro), como indica a figura a seguir:

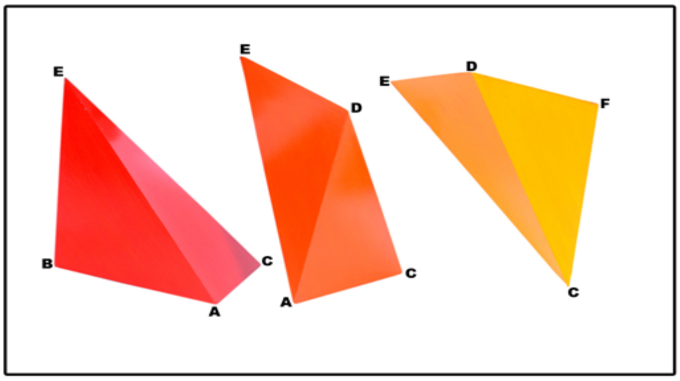


Figura 4.3: Pirâmides de bases triangulares 1

Notamos que:

Pirâmide 1 - Vermelha e **Pirâmide 2 - Amarela** têm bases congruentes e alturas iguais.

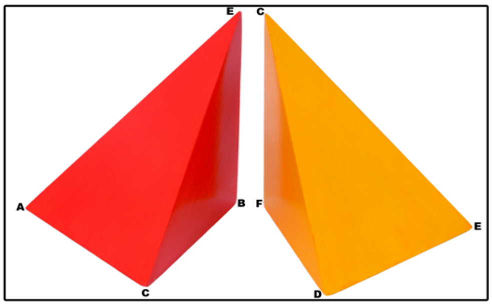


Figura 4.4: Pirâmides de bases triangulares 2

De fato, os triângulos ABC e DEF são congruentes e a distância de E ao plano (ABC) é igual à distância de C ao plano (DEF) que corresponde a altura do prisma original.

Portanto, as **Pirâmides 1 - Vermelha** e **2 - Amarela** têm mesmo volume.

Já as **Pirâmides 2 - Amarela** e **3 - Laranja** também têm bases congruentes e alturas iguais.

De fato, os triângulo CDF é congruentes ao triângulo (CDA), pois cada um deles é a metade do paralelogramo $(ACFD)$, e a altura de cada uma dessas pirâmides é a distância de E ao plano $(ACFD)$.

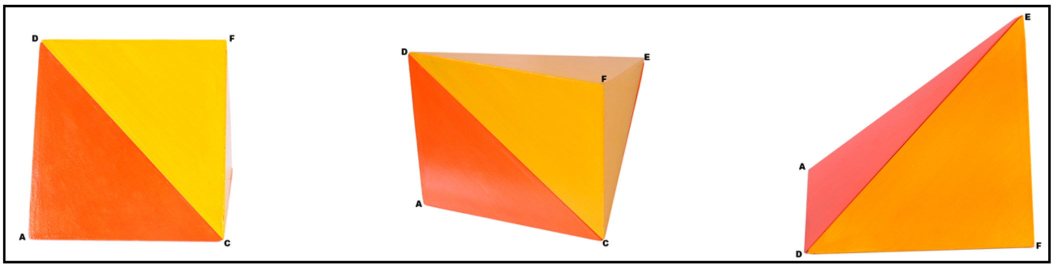


Figura 4.5: Sequência de posição das pirâmides mostrando mesma base e mesma altura

Portanto, as **Pirâmide 2 - Amarela** e **3 - Laranja** têm o mesmo volume.

Assim, $V_{\text{Pirâmide I}} = V_{\text{Pirâmide II}}$ e $V_{\text{Pirâmide II}} = V_{\text{Pirâmide III}}$ e, portanto, $V_{\text{Pirâmide I}} = V_{\text{Pirâmide II}} = V_{\text{Pirâmide III}}$.

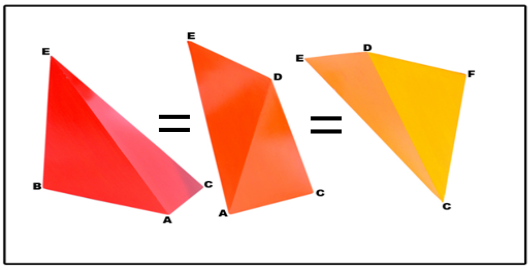


Figura 4.6: Pirâmides com mesmo volume

Como

$$V_{\text{Prisma}} = V_{\text{Pirâmide I}} + V_{\text{Pirâmide II}} + V_{\text{Pirâmide III}}$$

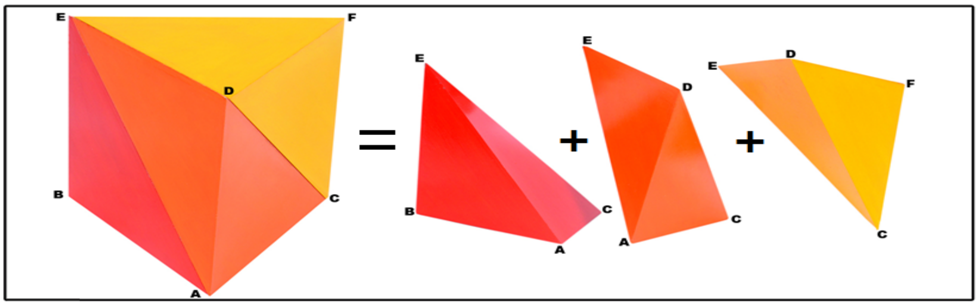


Figura 4.7: Volume do prisma é igual ao volume das três pirâmides

e fazendo

$$V_{\text{Pirâmide I}} = V_{\text{Pirâmide II}} = V_{\text{Pirâmide III}} = V, \text{ temos que:}$$

$$V_{\text{Prisma}} = 3V \Rightarrow V = \frac{V_{\text{Prisma}}}{3}.$$

Como $V_{\text{Prisma}} = S_B \cdot h$, temos:

$$V = V_{\text{Pirâmide triangular}} = \frac{S_B.h}{3}.$$

Portanto, o volume de uma pirâmide de base qualquer é dado por $V = \frac{1}{3}S_B \cdot h$.

4.2 Volume da Pirâmide como Parte do Volume do Cubo

Vamos verificar a mesma fórmula experimentalmente, utilizando o prisma cubo. Vejamos:

Temos o cubo sem tampa e três pirâmide. Ver figura abaixo:

Figura 4.8: Cubo 1

Pegamos a pirâmide amarela e a acomodamos dentro do cubo.

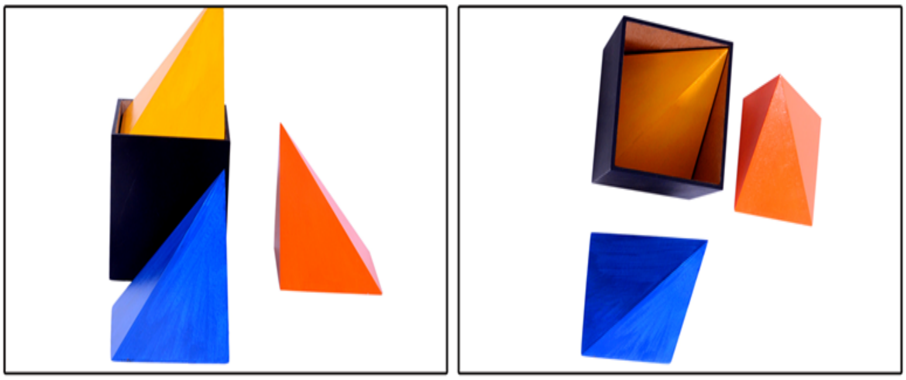


Figura 4.9: Cubo 2

Pegamos agora a pirâmide azul e acomodamos dentro do cubo.

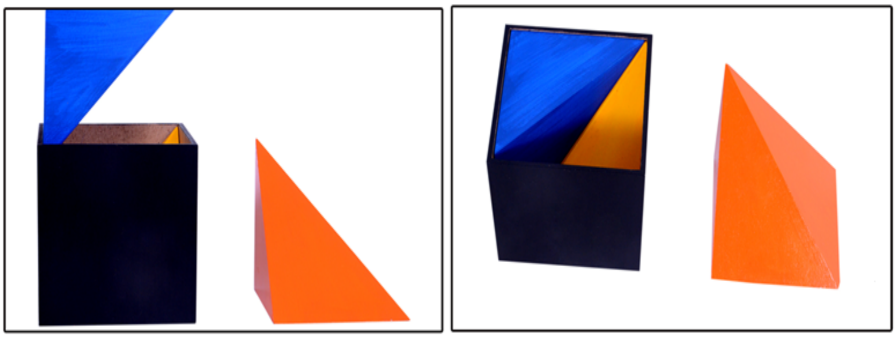


Figura 4.10: Cubo 3

Repetimos também com a pirâmide vermelha e completamos o cubo.

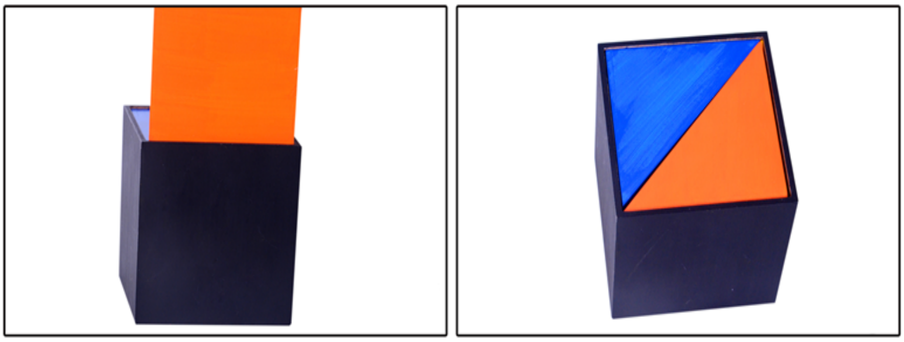


Figura 4.11: Cubo 4

Concluímos que a fórmula do volume da pirâmide corresponde a um terço do volume do cubo (prisma). Como cada pirâmide possui uma base igual a uma face do cubo e a altura relativa a essa base igual a altura (aresta) do cubo, segue que:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_B \cdot h.$$

4.3 Volume da Pirâmide usando Limite da Soma de uma série geométrica

Apresentaremos a seguir uma sequência de figuras, mostrando passo a passo com o uso de material manipulável a demonstração da validade da fórmula do volume da pirâmide, usando o limite da soma de uma série geométrica.

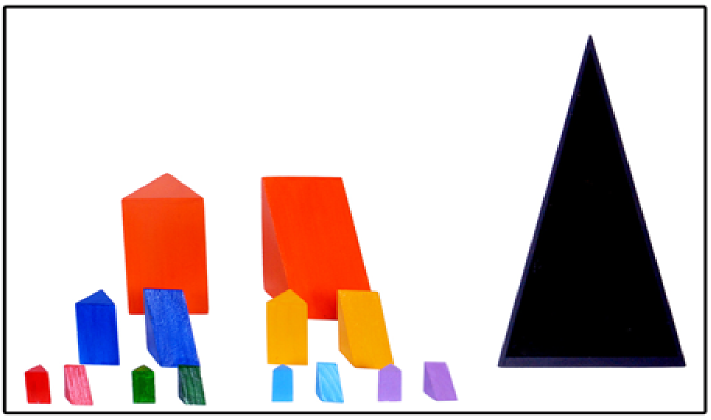


Figura 4.12: (14) Prismas e (01) pirâmide

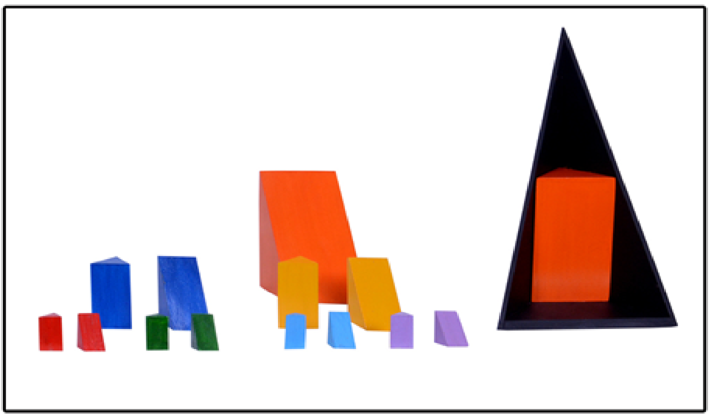


Figura 4.13: Prisma (1) colocado no interior da pirâmide correspondente a 1/8 de seu volume

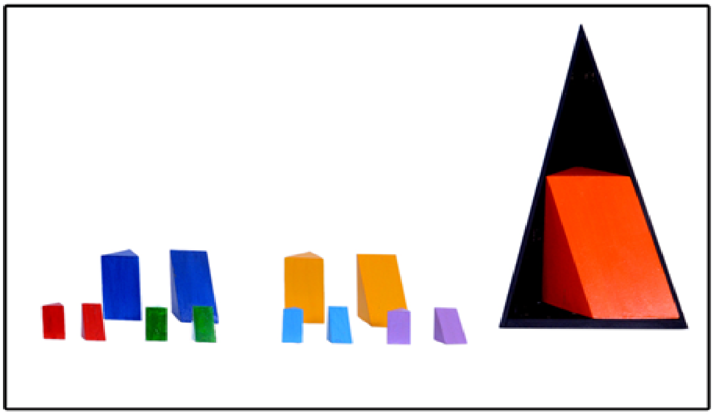


Figura 4.14: Prisma (2) colocado no interior da pirâmide correspondente a 1/8 de seu volume

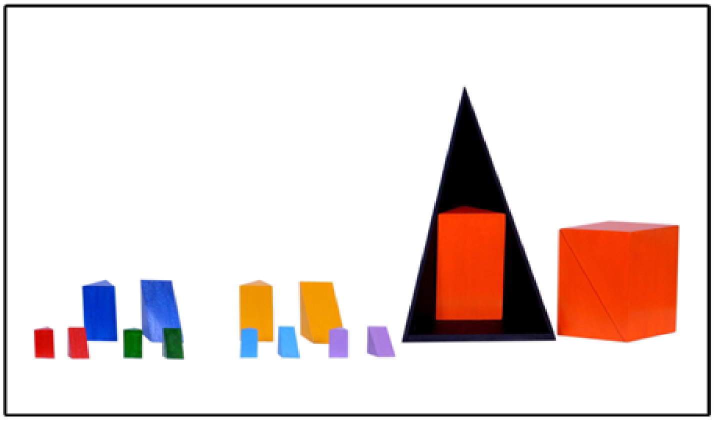


Figura 4.15: O volume do prisma (2) corresponde a metade de um paralelepípedo

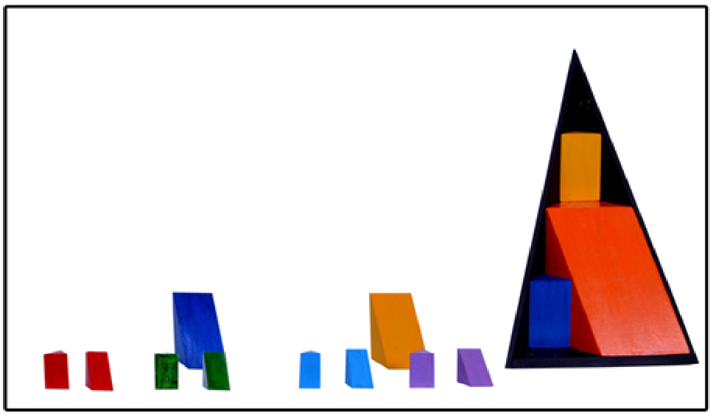


Figura 4.16: Cada um dos dois prismas colocado no interior da pirâmide corresponde a $1/64$ do volume da pirâmide inicial

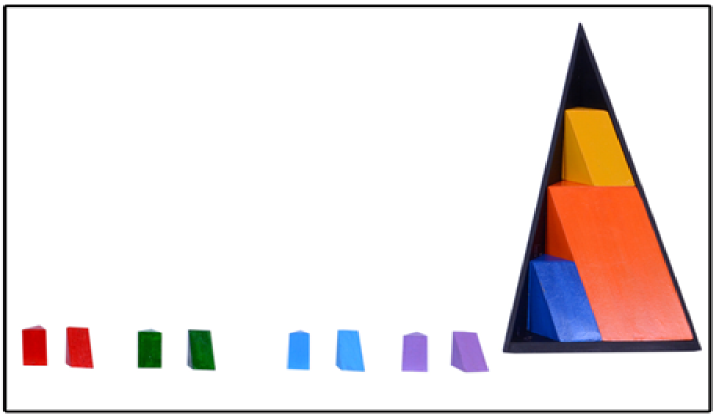


Figura 4.17: Acrescentamos mais dois prismas onde cada um corresponde a $1/64$ do volume da pirâmide inicial

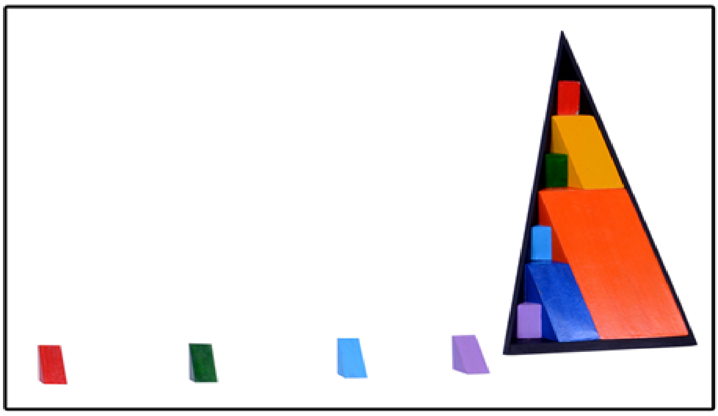


Figura 4.18: Cada um dos quatro prismas colocado no interior da pirâmide corresponde a 1/512 do volume da pirâmide inicial

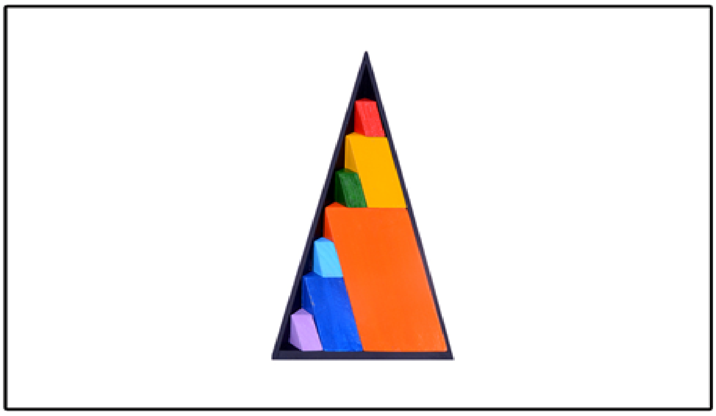
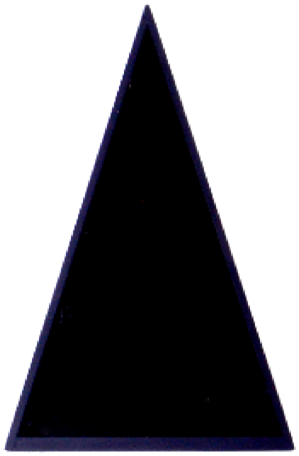
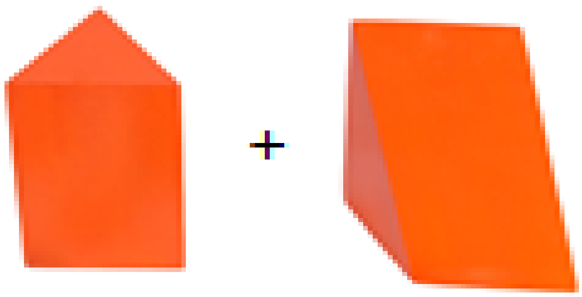


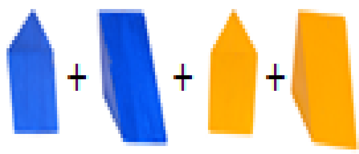
Figura 4.19: Acrescentamos mais quatro prismas onde cada um corresponde a 1/512 do volume da pirâmide inicial

A soma dos volumes dos prismas colocados no interior da pirâmide cuja área da base triangular é S e altura h é aproximadamente calculada por:





$$\frac{1}{8}Sh + \frac{1}{8}Sh = \frac{2}{8}Sh = \frac{1}{4}Sh.$$



$$\frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh = \frac{4}{64}Sh = \frac{1}{16}Sh.$$

$$\frac{1}{512}Sh+\frac{1}{512}Sh+\frac{1}{512}Sh+\frac{1}{512}Sh+\frac{1}{512}Sh+\frac{1}{512}Sh+\frac{1}{512}Sh+\frac{1}{512}Sh = \frac{8}{512}Sh = \frac{1}{64}Sh.$$

Daí, o volume da pirâmide é calculado pelo limite da soma da sequência geométrica, ou seja:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4}Sh + \frac{1}{16}Sh + \frac{1}{64}Sh + ... \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...\right) Sh \\ &= \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right) Sh \\ &= \frac{1}{3}Sh. \end{aligned}$$

Apresentamos no (Apêndice A.2) modelo planificado, para o leitor que quiser construir as três pirâmides de base triangular e as três de base quadrangular. Bastará recortar os desenhos, dobrar e colar. A justaposição das três pirâmides de base triangular para obter um prisma de base triangular e as de três pirâmides de base quadrangular para o cubo.

Capítulo 5

Sugestão para sala de aula

Apresentaremos, nesse capítulo, alguns problemas que envolvem o estudo do tema pirâmide presentes no ensino básico.

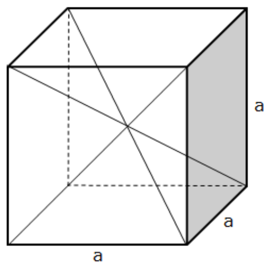
Há questões originais dos concursos de vestibulares, do ENEM e de livros; há questões que sofreram algum tipo de modificação para que pudessem servir mais à aprendizagem dos leitores dentro do contexto em que foram inseridas. Todas as questões estão resolvidas com a finalidade de que o leitor aprenda ou aprimore mais os conceitos ou procedimentos envolvidos.

A seguir, apresentamos e resolvemos questões de caráter abstrato ou situação problema sobre o assunto em estudo.

Questão 1) Usando um cubo mostre que a fórmula do volume de uma pirâmide (reta) de base quadrada é $V = \frac{1}{3}S_B \cdot h$.

Resolução:

Inicialmente considere um cubo de aresta a.



Se ligarmos por segmento o centro do cubo com cada um dos seus 8 vértices, formaremos 6 pirâmides congruentes cuja base corresponde à face do cubo e cuja altura corresponde à metade da aresta do cubo. Assim:

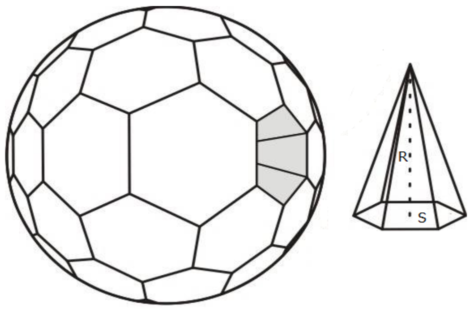
$$\begin{aligned} V_{(Cubo)} &= 6 \cdot V_{(\text{Pirâmide})} \\ a^3 &= 6 \cdot V_{(\text{Pirâmide})} \\ V_{(\text{Pirâmide})} &= \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2.a}{2} \\ V &= \frac{1}{3} \cdot S_B \cdot h \end{aligned}$$

pois $S_{(base)} = a^2$ e $h = \frac{a}{2}$.

Questão 2) Sabendo que a fórmula do volume da esfera é dado por $V_{(Esfera)} = \frac{4}{3}\pi R^3$. Usando a fórmula do volume da pirâmide, mostre que a fórmula da área da superfície esférica é $A = 4\pi R^2$.

Resolução:

Inicialmente imagine que você desenhe sobre a superfície externa da esfera n "polígonos regulares"congruentes entre si, por exemplo hexágonos regulares (que não são planos, por estarem sobre a superfície da esfera) e em seguida, tomando o centro O da esfera dada como vértice você construa n sólidos ligando o ponto O a cada um dos vértices dos hexágonos, conforme ilusta a figura a seguir:



É claro que para cada um dos n hexágonos que foram desenhados sobre a superfície da esfera teremos um sólido cujo vértice é o centro da esfera e portanto o volume da esfera corresponde a soma dos volumes destes n sólidos, ou seja, se denotarmos por $V_1, V_2, \cdots, V_n$ os volumes destes n sólidos, teremos

$$V_{esfera} = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

Além disso, perceba que a medida que tomamos valores de n cada vez maiores, duas coisas ocorrem: a primeira é que a altura de cada um dos n sólidos fica cada vez mais próxima da medida R do raio da esfera e a segunda é que os hexágonos regulares ficam cada vez menores e mais próximos de serem planos, e portanto cada um dos n sólidos se aproxima da uma pirâmide cujo volume é $V_i = \frac{1}{3}S_iR$ onde S_i (com $1 \leq i \leq n$) é a medida da área do $i-$ésimo polígono, o que intuitivamente, sugere que:

$$\begin{aligned} V_{esfera} &= \lim_{n\to\infty}(V_1+V_2+\cdots+V_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}S_1R+\frac{1}{3}S_2R+\cdots+\frac{1}{3}S_nR\right) \\ &= \frac{1}{3}R\lim_{n\to\infty}(S_1+S_2+\cdots+S_n) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi R^3 \quad e \quad \lim_{n\to\infty}(S_1+S_2+\cdots+S_n)=A_{esfera}$$

Assim,

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{3}R\lim_{n\to\infty}(S_1+S_2+\cdots+S_n)\Rightarrow$$
$$4\pi R^2=\lim_{n\to\infty}(S_1+S_2+\cdots+S_n)\Rightarrow A_{esfera}=4\pi R^2$$

Questão 3) (ITA-SP) Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e $5cm$. O volume, em cm^3, do sólido $VABC$ é?

(A) 2.

(B) 4.

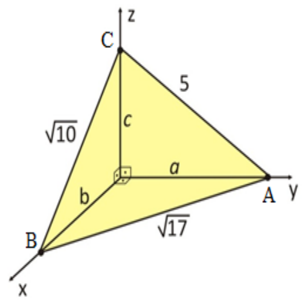
(C) $\sqrt{17}$

(D) 6

(E) $5\sqrt{10}$.

Resolução:

Vejamos a figura a seguir:



Consideremos a figura a seguir em que $VA = a$, $VB = b$ e $VC = c$.

Temos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 \\ a^2 + c^2 = 5^2 \\ b^2 + c^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 \end{cases}. \tag{5.1}$$

Somando as três equações, obtemos:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 52 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 26,$$

e substituindo em (5.1), vem:

$$\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Consequentemente, o volume da pirâmide $VABC$ é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1.4}{2} \cdot 3 = 2cm^3$.

Portanto, $V = 2cm^3$, alternativa **(A)**.

Questão 4) Uma pirâmide chama-se regular quando a sua base é um polígono regular e a projeção do vértice sobre o plano da base é o seu centro.

Uma pirâmide regular de altura $4cm$ tem por base um quadrado de lado $6cm$. Calcule o seu volume, sua área e os raios das esferas inscrita e circunscrita.

Resolução:

✓Cálculo do volume da pirâmide é:

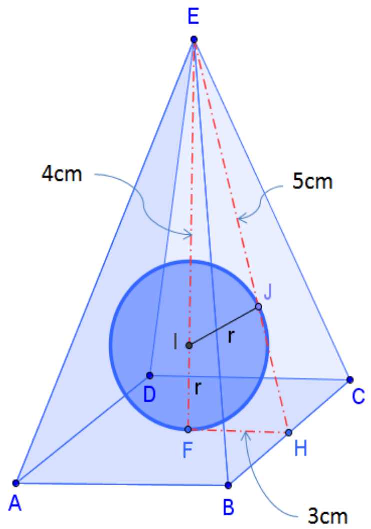
$$V = \frac{1}{3}A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 48cm^3.$$

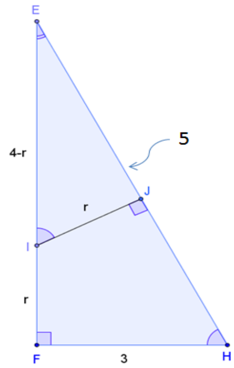
✓Cálculo da área total:

$$\begin{aligned} A_{total} &= A_{base} + A_{lateral} \\ A_{total} &= 6^2 + 4 \cdot \frac{6.5}{2} = 96cm^2. \end{aligned}$$

✓Cálculo do raio da esfera inscrita:

Perceba que o centro da esfera inscrita é o ponto do interior da pirâmide que é equidistante das suas quatro faces, conforme ilustra a figura a seguir:

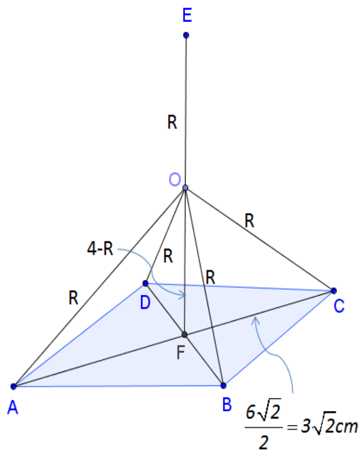




$$\begin{aligned}
\frac{r}{3} &= \frac{4-r}{5} \\
5r &= 12-3r \\
8r &= 12 \\
r &= 1,5cm.
\end{aligned}$$

✓Cálculo do raio da esfera circunscrita:

Perceba que o centro da esfera circunscrita é o ponto da reta suporte da altura da pirâmide que é equidistante das seus quatro vértices, conforme ilustra a figura a seguir:

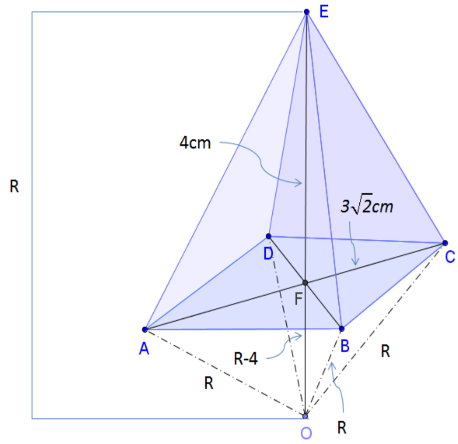


Aplicando o teorema de Pitágoras no Triângulo OFC obtemos:

$$
\begin{aligned}
(\overline{OC})^2 &= (\overline{OF})^2 + (\overline{FC})^2 \\
R^2 &= (4-R)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 \\
R &= \frac{17}{4} = 4,25.
\end{aligned}
$$

Note que $R > 4cm$, o que significa que o centro da circunferência circunscrita está, na verdade $0,25cm$ abaixo do ponto F.

Assim, na verdade o desenho correto é:

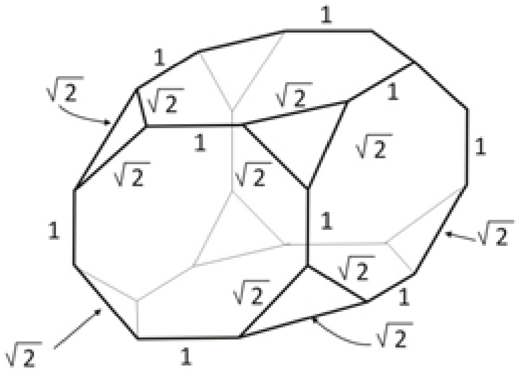


Note que o teorema de Pitágoras aplicado no triângulo OFC ficaria:

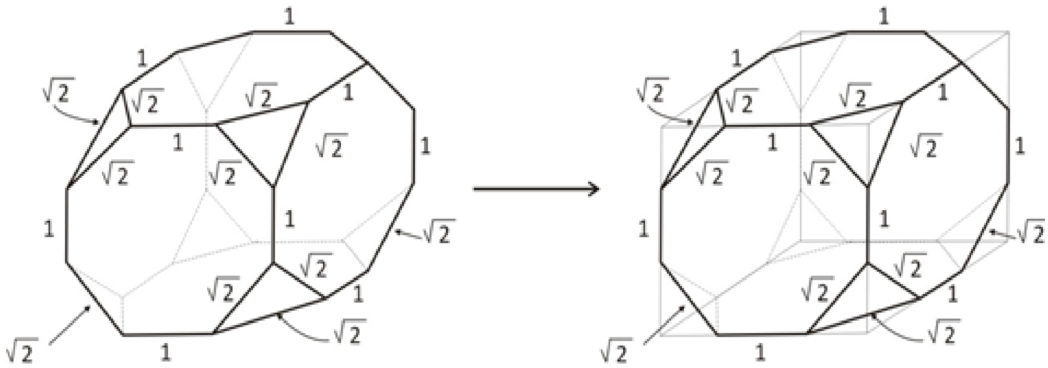
$$
\begin{aligned}
(\overline{OC})^2 &= (\overline{OF})^2 + (\overline{FC})^2 \\
R^2 &= (4-R)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 \\
R &= \frac{17}{4} = 4,25.
\end{aligned}
$$

o que não mudaria a resposta!

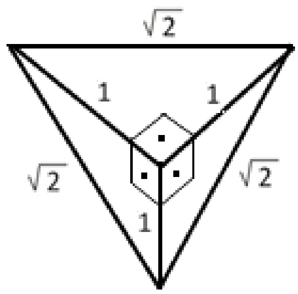
Questão 5) Calcule o volume do sólido a seguir:



Resolução:
Vamos construir um cubo de aresta 3 cincunscrito ao sólido dado.



Em cada um dos oito vértices do cubo, forma-se uma pirâmide externa ao sólido e interna ao cubo, cuja base é um triângulo retângulo e isósceles de catetos iguais 1 e altura também igual a 1, veja a figura a seguir:



$$V_{(\text{Pirâmide})} = \frac{1}{3}S_{(base)}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1.1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Logo o volume do sólido é igual a:

$$\begin{aligned} V_{(\text{Sólido})} &= V_{(\text{Cubo})} - 8V_{(\text{Pirâmide})} \\ &= 3^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 27 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{77}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, o volume do sólido é $\frac{77}{3}$.
testes

Apêndice A

Apêndice

Trazemos aqui resultados de complementação do texto.

A.1 Questionário de Entrevista

1) Há quanto tempo você está atuando?
( ) De 0 a 5 anos.
( ) De 6 a 10 anos.
( ) Mais de 10 anos.

2) Sua atuação é em:
( ) Escola Pública Federal.
( ) Escola Pública Estadual.
( ) Escola Particular.

3) Você ja ensinou o volume da Pirâmide?
( ) Sim.
( ) Não.

4) Se a resposta da questão anterior for "SIM", de que maneira você apresenta para seus alunos o volume da Pirâmide:

( ) Limita-se ao uso da fórmula $V = \frac{1}{3}S_B.h$ e resolve problemas para aplicação da mesma.

( ) O professor já enfrentou questionamento dos alunos sobre a origem de $\frac{1}{3}$?

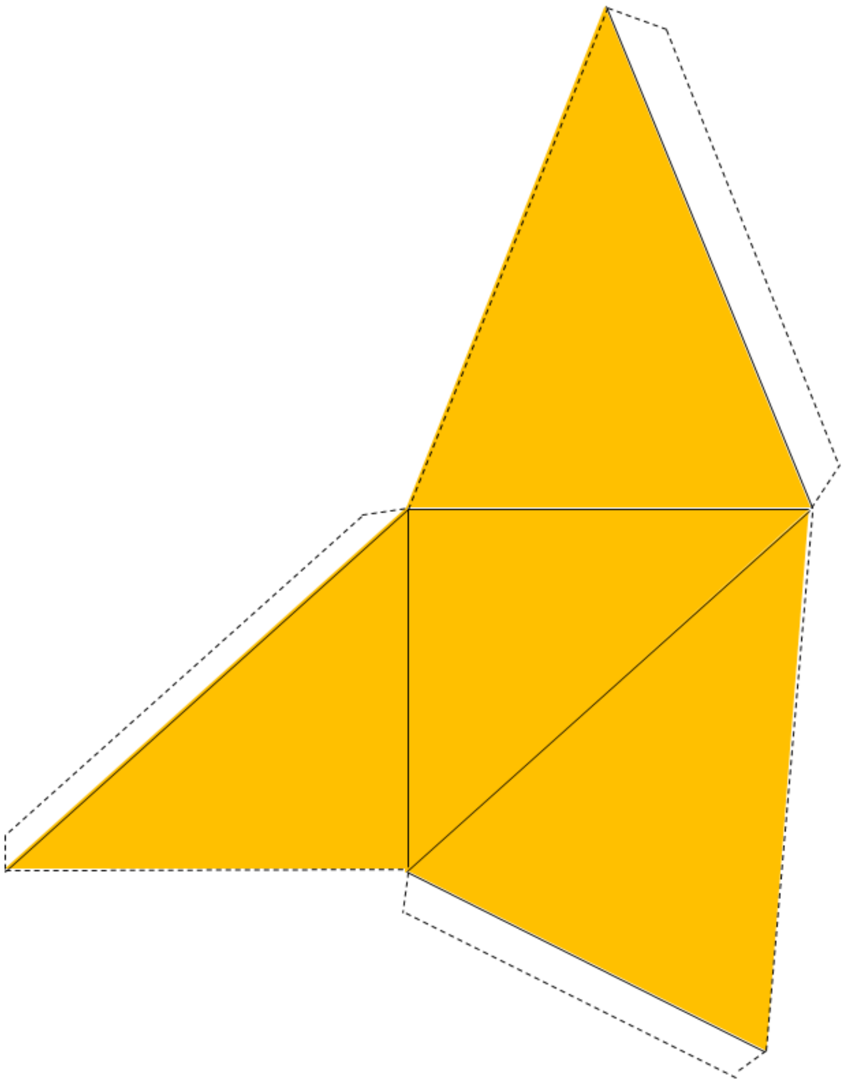
( ) Faz uso do princípio de Cavalieri.

( ) Usa métodos práticos: manipulação de material concreto.

( ) Faz uso do método do limite da soma de uma série geométrica para demonstração.

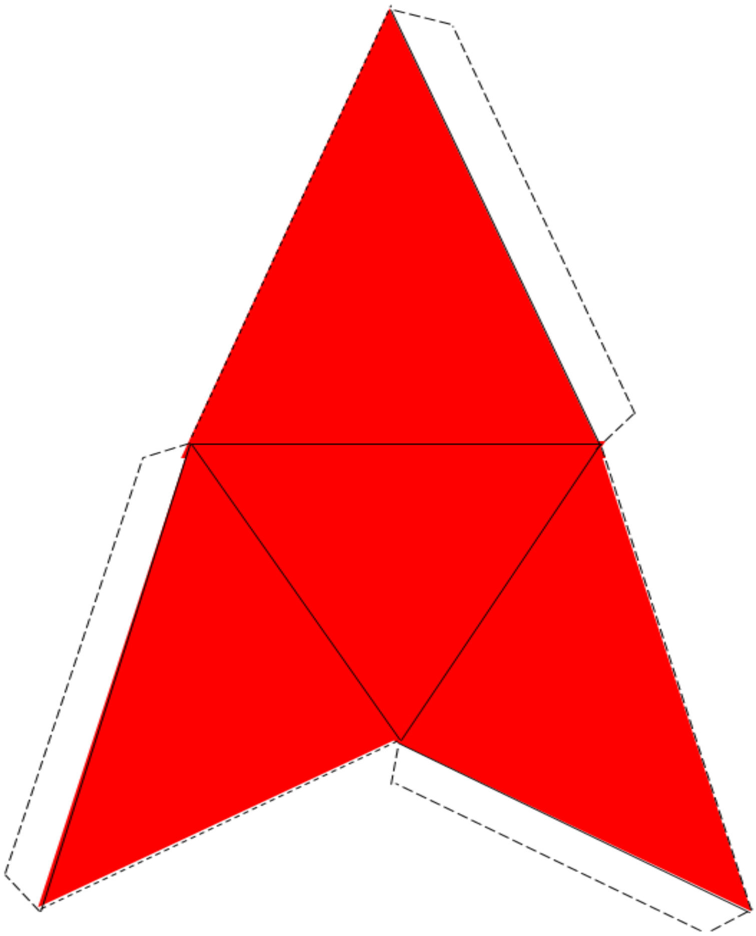
A.2 Planificação das três pirâmides de bases triangulares para formar um prisma de base triangular

PLANIFICAÇÃO DA PIRÂMIDE DE BASE TRIANGULAR



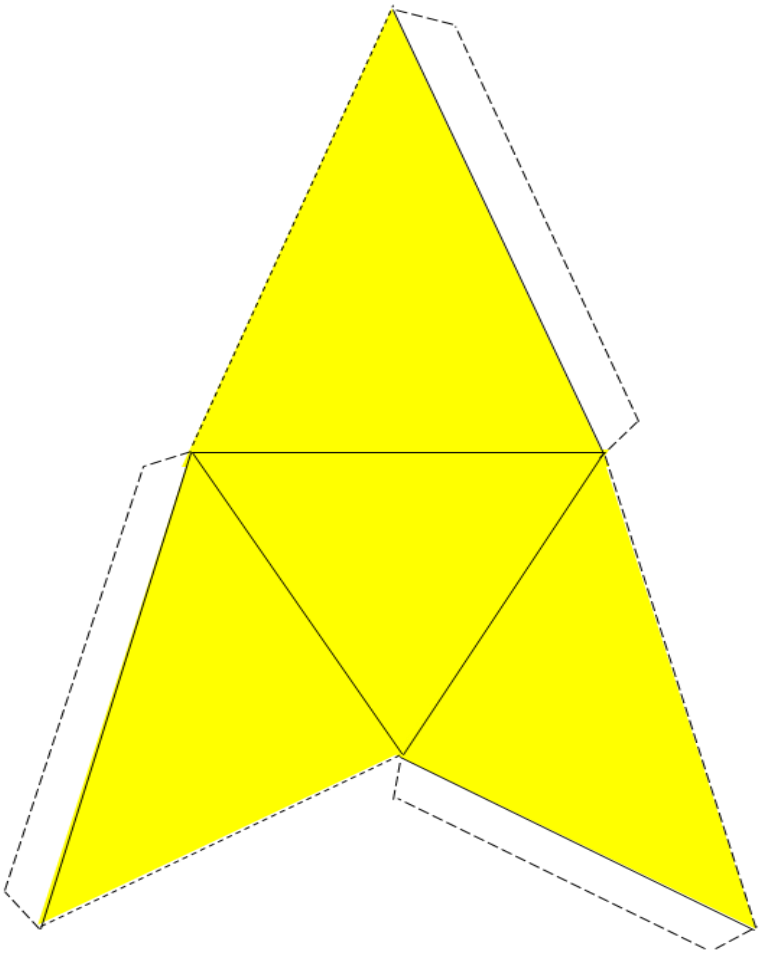
CORTE - - - - - - - - - -
DOBRE ___________

PLANIFICAÇÃO DA PIRÂMIDE DE BASE TRIANGULAR



CORTE - - - - - - - - - -
DOBRE ____________

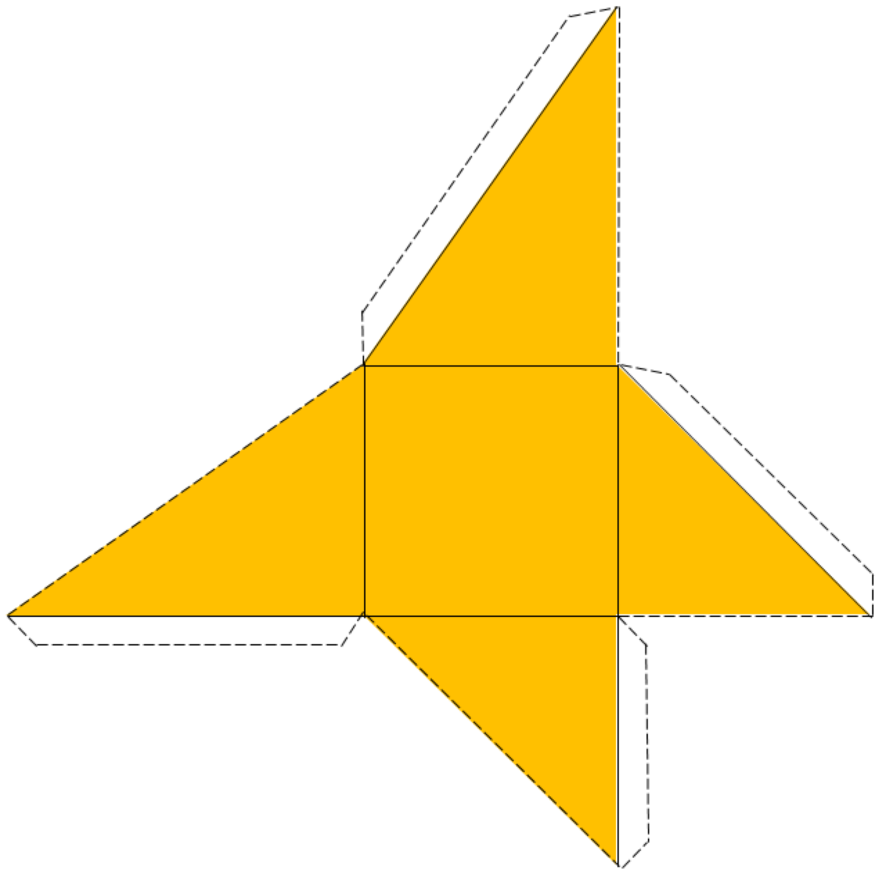
PLANIFICAÇÃO DA PIRÂMIDE DE BASE TRIANGULAR



CORTE - - - - - - - - - -
DOBRE ___________

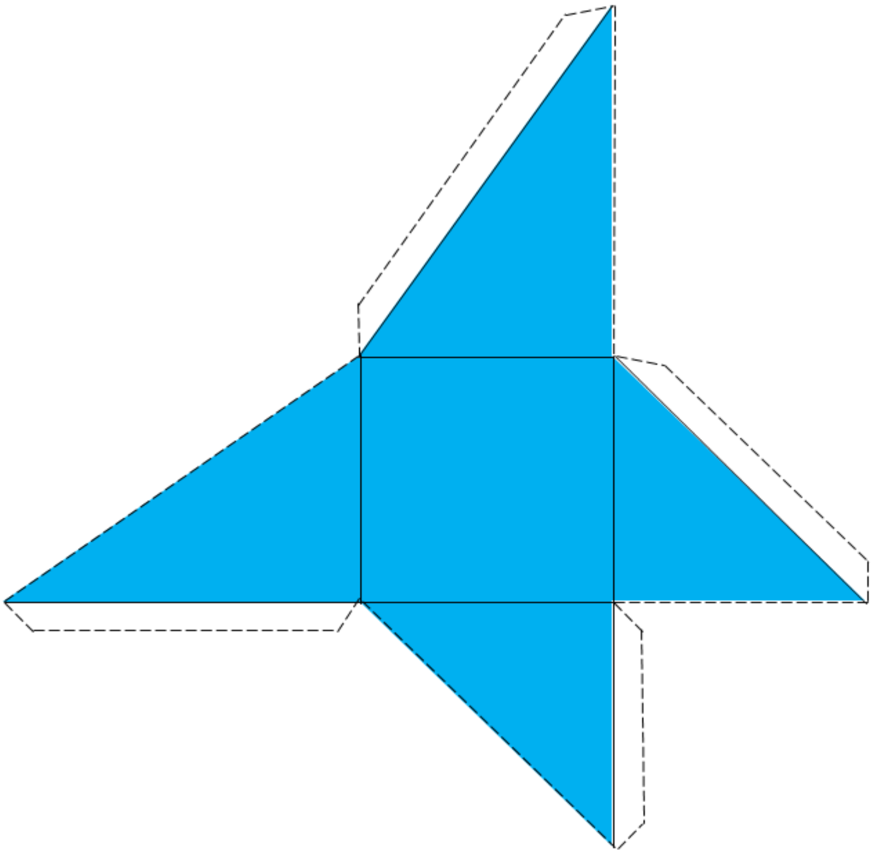
A.3 Planificação das três pirâmides de bases quadrangulares para formar um cubo

PLANIFICAÇÃO DA PIRÂMIDE DE BASE QUADRANGULAR



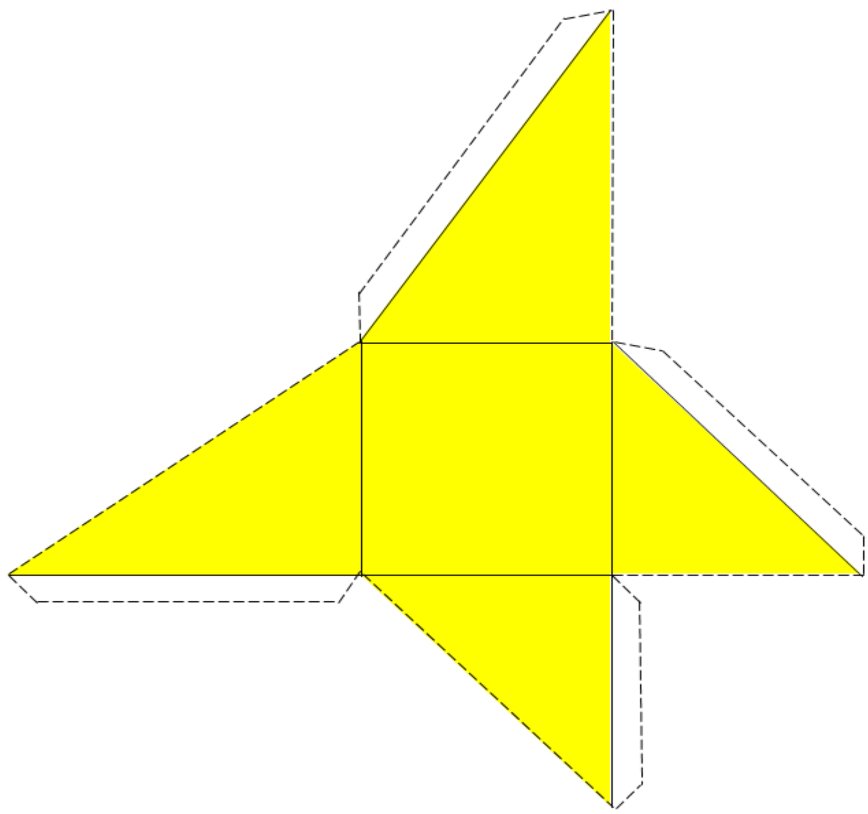
CORTE - - - - - - - - - -
DOBRE ___________

PLANIFICAÇÃO DA PIRÂMIDE DE BASE QUADRANGULAR



CORTE - - - - - - - - - -
DOBRE ___________

PLANIFICAÇÃO DA PIRÂMIDE DE BASE QUADRANGULAR



CORTE - - - - - - - - - -
DOBRE ___________

Referências Bibliográficas

[1] BONGIOVANNI, Vincenzo, *Revisitando a Fórmula do Volume do Cone. In.* Revista do Professor de Matemática, n^o 73 (2010).

[2] BOYER, Carl Benjamin, Uta C. Merzbach, *História da Matemática.* Trad. Helena de Castro. São Paulo: BLUCHER,(2012).

[3] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Contexto e Aplicações.* 1. ed., São Paulo: Ática, 2010.

[4] DOLCE, O. ; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar - Voluma 10: geometria espacial, posição e métrica.* 6. ed., São Paulo: Atual, 2005.

[5] EVES, Howard, *Introdução à História da Matemática.* Trad. Helena Castro. São Paulo: BLUCHER,(2012).

[6] FILHO, Daniel Cordeiro de Morais, *Manual de Redação Matemática: com um dicionário etimológico explicativo de palavras usadas na matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação*. Campina Grande, PB: UFCG,(2010).

[7] JANOS, Michel. *Matemática para pais (e) interessados - Volume 2.* 1. ed., São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

[8] KILHIAN, Kleber, *Demonstração da Fórmula do Volume de Pirâmide.* Blog O Baricentro da Mente. Disponível em: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/ Acesso em: 15 junho de 2013.

[9] LANG, Serge.; MURROW, Gene. *Geometry.* 2. ed., New York - USA: Ed. Springer, 1988.

[10] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*. 6. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[11] LULA, Kariton Pereira, *Aplicações do princípio de Cavalieri ao cálculo volumes e áreas. In.* Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2013.

[12] MACHADO, Antonio dos Santos, *Matemática: Temas e Metas - Volume 4: Áreas e Volumes.* São Paulo: Atual,(1988).

[13] MACHADO, Nilson José. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. 8. ed., São Paulo: Scipione, 2000.

[14] SARAIVA, José Cloves Verde, *As pirâmides do Egito e a razão áurea. In.* Explorando o ensino de Matemática: artigo - volume 1. Brasília : Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2004, p. 117-121.

[15] STILLWEL, John C. *Yerning for the impossible: the surprinsing trusths of mathematics.* : A. K. Peters, 2006.

[16] WANDERLINDE, Maria José, *Material concreto relacionando volumes de prisma e pirâmide. In.* Revista do Professor de Matemática, n^o 13 (1988).