

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ - UNIFAP



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT



**PROFMAT**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SISTEMAS DINÂMICOS E A TEORIA DO CAOS:  
UMA ABORDAGEM A PARTIR DO MAPA  
LOGÍSTICO E DO SISTEMA DE LORENZ

HELINGTON FRANZOTTI ARAÚJO DE SOUZA

Macapá - AP

JANEIRO DE 2021

# SISTEMAS DINÂMICOS E A TEORIA DO CAOS: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO MAPA LOGÍSTICO E DO SISTEMA DE LORENZ

HELINGTON FRANZOTTI ARAÚJO DE SOUZA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Fundação Universidade Federal do Amapá.

**Área de concentração:** Matemática.

**Orientador:** Prof. Dra. Simone de Almeida Delphim Leal.

**Coorientador:** Prof. Me. Neylan Leal Dias.

Macapá - AP

Janeiro de 2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá  
Elaborada por Cristina Fernandes – CRB-2/1569

---

Souza, Helington Franzotti Araújo de.

Sistemas dinâmicos e a teoria do caos: uma abordagem a partir do mapa logístico e do sistema de Lorenz. / Helington Franzotti Araújo de Souza; orientadora, Simone de Almeida Delphim Leal; coorientador, Neylan Leal Dias. – Macapá, 2021.

69 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT).

1. Sistemas dinâmicos. 2. Teoria do caos. 3. Mapa Logístico. 4. Sistema de Lorenz. 5. Lyapunov. I. Leal, Simone de Almeida Delphim, orientadora. II. Dias, Neylan Leal, coorientador. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

530.1 S729s

CDD. 22 ed.

---

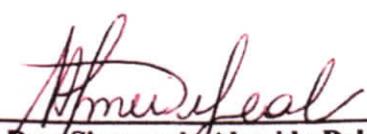
**FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ**  
**DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL – PROFMAT**

**TERMO DE APROVAÇÃO**

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP, foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **HELINGTON FRANZOTTI ARAÚJO DE SOUZA** intitulada: **SISTEMAS DINÂMICOS E A TEORIA DO CAOS: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO MAPA LOGÍSTICO E DO SISTEMA DE LORENZ**. Após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-graduação.

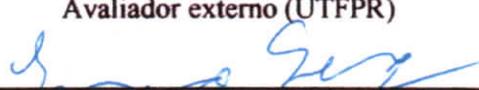
Macapá, 01 de fevereiro de 2021.

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dra Simone de Almeida Delphim Leal**  
Presidente da Banca e Orientadora (UNIFAP)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Me. Neylan Leal Dias**  
Coorientador (PEM/FEB/UNESP)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. José Manoel Balthazar**  
Avaliador externo (UNESP)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Mauricio Aparecido Ribeiro**  
Avaliador externo (UTFPR)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Erasmo Senger**  
Avaliador interno (UNIFAP)

*Dedico este trabalho a Deus e à minha família, com amor.*

# Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e que em tudo nos inspira e sustenta em todos os momentos.

A toda a minha família, em especial à minha mãe Maria pelo incentivo constante, pelas orações incessantes e pelo apoio incondicional que sempre faz questão de explicitar, torcendo por mim e vibrando a cada vitória e conquista. A senhora sempre foi e será parte fundamental em minha trajetória de vida.

À minha esposa Aurivani, pelo amor e companheirismo, pela paciência e pelas palavras de encorajamento, mesmo nos momentos mais difíceis, sendo compreensiva quando precisava dedicar-me um pouco mais à pesquisa. Por me ouvir com toda a paciência do mundo quando durante o trabalho explicava a ela com entusiasmo sobre sistemas caóticos.

Ao meu filho Gabriel Felipe, por ser a minha inspiração e motivo de orgulho e alegrias, meu amor incondicional.

A minha professora e orientadora, Prof<sup>a</sup>. Dra. Simone de Almeida Delphim Leal pelas valiosas orientações e direcionamentos sem os quais este trabalho não teria sido realizado. Deixo aqui expressa a minha gratidão por tudo!

Ao professor Me. Neylan Leal Dias pela coorientação dedicada a esta pesquisa; suas observações e sugestões foram extremamente relevantes e proveitosas.

A todos os professores do PROFMAT da Universidade Federal do Amapá, pelos ensinamentos.

Aos nobres colegas de curso pelo companheirismo e auxílio, nos momentos mais difíceis, em que seguramos as mãos uns dos outros e nos guiamos juntos até a linha de chegada. Acima de tudo, conquistei grandes amizades que levarei para a vida toda!

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá, pelo apoio e incentivo financeiro direcionado a esta pesquisa.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho.

*“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre  
ombros de gigantes.”*

*Sir. Isaac Newton*

# Resumo

SOUZA, Helington Franzotti Araújo de. **SISTEMAS DINÂMICOS E A TEORIA DO CAOS: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO MAPA LOGÍSTICO E DO SISTEMA DE LORENZ**. 2021. 69 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – UNIFAP – Fundação Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2021.

Este trabalho aborda a Teoria do Caos, um tópico importante dentro da Matemática, mais precisamente, na teoria dos sistemas dinâmicos. O caos é observado em muitos fenômenos na natureza, desde a evolução de espécies e o crescimento populacional em biologia, até o movimento de corpos celestes pelo universo. Sistemas dinâmicos que apresentam comportamentos caóticos podem ser analisados e caracterizados por meio de teoremas e métodos de análise matemática, tanto analítica quanto numericamente, dependendo da sua natureza. Um dos objetivos do estudo da Teoria do Caos é atuar no controle de tais sistemas, por meio de previsões sobre seu comportamento futuro com base na medida dos parâmetros de um espaço de estados. Nesse sentido, neste trabalho foi feita uma abordagem teórica inicial e caracterização do caos por meio da análise de dois sistemas dinâmicos: o Mapa Logístico e o Sistema de Lorenz. Foram utilizados os expoentes de Lyapunov para analisar o comportamento caótico no Mapa Logístico e uma função de Lyapunov para mostrar que o sistema de Lorenz é dissipativo. A partir daí, observou-se como tais sistemas evoluem para o caos em função de seus parâmetros.

**Palavras-chave:** Sistemas dinâmicos. Caos. Mapa Logístico. Sistema de Lorenz. Lyapunov.

# Abstract

This work deals with Chaos Theory, an important topic within Mathematics, more precisely, in the theory of dynamic systems. Chaos is observed in many phenomena in nature, from the evolution of species and population growth in biology, to the movement of celestial bodies throughout the universe. Dynamic systems that exhibit chaotic behaviors can be analyzed and characterized by means of theorems and methods of mathematical analysis, both analytically and numerically, depending on their nature. One of the objectives of the study of Chaos Theory is to act in the control of such systems, through predictions about their future behavior based on the measurement of the parameters of a state space. In this sense, in this work an initial theoretical approach and chaos characterization was made through the analysis of two dynamic systems: the Logistic Map and the Lorenz System. Lyapunov exponents were used to analyze the chaotic behavior on the Logistic Map and a Lyapunov function to show that the Lorenz system is dissipative. From there, it was observed how such systems evolve into chaos due to their parameters.

**Keywords:** Dynamic systems. Chaos. Logistic Map. Lorenz system. Lyapunov.

# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| <b>INTRODUÇÃO</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS,<br/>EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E SISTEMAS DINÂMICOS</b> | <b>4</b>  |
| 1.1 Equações diferenciais . . . . .   | 5         |
| 1.2 Sistemas de equações diferenciais . . . . .                                 | 7         |
| 1.3 Equações de diferenças . . . . .  | 8         |
| 1.4 Pontos fixos de uma equação . . . . .                                       | 11        |
| 1.5 Sistemas dinâmicos . . . . .  | 13        |
| 1.5.1 Sistemas dinâmicos contínuos . . . . .                                    | 14        |
| 1.5.2 Sistemas dinâmicos discretos . . . . .                                    | 16        |
| 1.5.3 Comportamento caótico de um sistema não linear . . . . .                  | 18        |
| <b>2 O MAPA LOGÍSTICO</b>   | <b>21</b> |
| 2.1 Equação logística e mapa logístico . . . . .                                | 21        |
| 2.1.1 Pontos fixos e estabilidade . . . . .                                     | 23        |
| 2.2 O caos no mapa logístico . . . . .  | 33        |
| 2.3 Janelas periódicas . . . . .  | 35        |
| 2.4 Expoente de Lyapunov . . . . .  | 36        |
| 2.4.1 Cálculo do expoente de Lyapunov . . . . .                                 | 39        |
| <b>3 O SISTEMA DE LORENZ</b>  | <b>42</b> |
| 3.1 Sistema de Lorenz . . . . .   | 43        |
| 3.2 Propriedades do sistema de Lorenz . . . . .                                 | 43        |
| 3.2.1 i. Simetria das soluções em $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ . . . . .       | 43        |
| 3.2.2 ii. <b>Contração do volume no espaço de estados</b> . . . . .             | 44        |

|                                   |   |           |
|-----------------------------------|---|-----------|
| 3.3                               | Pontos fixos do sistema de Lorenz . . . . .   | 47        |
| 3.4                               | Estabilidade dos pontos fixos do sistema de Lorenz . . . . .                        | 48        |
| 3.4.1                             | Estabilidade da origem . . . . .  | 49        |
| 3.4.2                             | Função de Lyapunov . . . . .  | 52        |
| 3.4.3                             | Estabilidade dos pontos fixos $C^+$ e $C^-$ . . . . .                               | 54        |
| 3.5                               | Simulações das trajetórias no Octave . . . . .                                      | 55        |
| <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>       |   | <b>62</b> |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> |   | <b>64</b> |
| <b>4</b>                          | <b>APÊNDICE A</b>   | <b>67</b> |
| 4.1                               | Métrica e espaços métricos. . . . .   | 67        |
| 4.2                               | Definição de compacidade . . . . .  | 68        |
| 4.3                               | O operador diferencial $\vec{\nabla}$ e o divergente de um campo vetorial . . . . . | 68        |
| 4.4                               | Teorema da divergência ou de Gauss . . . . .  | 69        |
| 4.5                               | Autovalores e autovetores de uma matriz . . . . .                                   | 69        |

# Lista de Figuras

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Ilustração dos conceitos de pontos de equilíbrio estável e instável. Fonte: Jesus, 2016, p.13. . . . .                 | 13 |
| 1.2  | Gráfico do mapa da Tabela 1.1. Fonte: O autor. . . . .   | 18 |
| 2.1  | Gráfico da Equação 2.1 para $\alpha = 3, 2$ . Fonte: O autor. . . . .  | 22 |
| 2.2  | Órbita do mapa logístico para $X_0 = 0, 4$ e $\alpha = 0, 79$ . Fonte: O autor. . . . .                                | 25 |
| 2.3  | Órbita do mapa logístico para $X_0 = 0, 4$ e $\alpha = 0, 995$ . Fonte: O autor. . . . .                               | 25 |
| 2.4  | Órbita do mapa logístico para $X_0 = 0, 4$ e $\alpha = 2$ . Fonte: O autor. . . . .                                    | 26 |
| 2.5  | Órbita do mapa logístico para $X_0 = 0, 4$ e $\alpha = 3$ . Fonte: O autor. . . . .                                    | 27 |
| 2.6  | Órbita de período 4 obtida iterando o mapa logístico para $\alpha = 1 + \sqrt{6}$ .<br>Fonte: O autor. . . . .         | 31 |
| 2.7  | Órbita do mapa logístico para $\alpha = 3, 9$ . Fonte: O autor. . . . .  | 32 |
| 2.8  | Órbita do mapa logístico para $\alpha = 4$ . Fonte: O autor. . . . .   | 32 |
| 2.9  | Órbitas caóticas no mapa logístico. Fonte: O autor. . . . .  | 33 |
| 2.10 | Diagrama de bifurcação do Mapa Logístico. Fonte: O autor. . . . .  | 34 |
| 2.11 | Janelas periódicas no mapa logístico. Fonte: O autor. . . . .  | 35 |
| 2.12 | Espectro do expoente de Lyapunov para o mapa logístico. Fonte: O autor. . . . .  | 37 |
| 2.13 | Espectro do expoente de Lyapunov sobreposto ao diagrama de bifurcação<br>do mapa logístico. Fonte: O autor. . . . .    | 38 |
| 2.14 | Algoritmo para a estimação do expoente de Lyapunov do mapa logístico.<br>Fonte: O autor. . . . .                       | 39 |
| 2.15 | Janela periódica quando $\alpha = 3, 82999$ . Fonte: O autor. . . . .  | 41 |
| 3.1  | Algoritmo desenvolvido no Octave para simular o sistema de Lorenz. . . . .   | 56 |
| 3.2  | Sistema de Lorenz para $\sigma = 10$ , $b = 8/3$ , $r = 0, 9$ e condição inicial (1, 1,<br>1). Fonte: O autor. . . . . | 57 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.3 | Projeção da trajetória do sistema de Lorenz no plano $xz$ para $\sigma = 10$ ,<br>$b = 8/3$ , $r = 0,9$ e condição inicial $(1, 1, 1)$ . Fonte: O autor. . . . .   | 57 |
| 3.4 | Sistema de Lorenz para $\sigma = 10$ , $b = 8/3$ , $r = 15$ e condição inicial $(1, 1, 1)$ .<br>Fonte: O autor. . . . .  | 58 |
| 3.5 | Projeção da trajetória do sistema de Lorenz no plano $xz$ para $\sigma = 10$ ,<br>$b = 8/3$ , $r = 15$ e condição inicial $(1, 1, 1)$ . Fonte: O autor. . . . .    | 58 |
| 3.6 | Sistema de Lorenz para $\sigma = 10$ , $b = 8/3$ , $r = 24,74$ e condição inicial $(1, 1,$<br>$1)$ . Fonte: O autor. . . . .                                       | 59 |
| 3.7 | Projeção da trajetória do sistema de Lorenz no plano $xz$ para $\sigma = 10$ ,<br>$b = 8/3$ , $r = 24,74$ e condição inicial $(1, 1, 1)$ . Fonte: O autor. . . . . | 59 |
| 3.8 | Atrator estranho de Lorenz; $\sigma = 10$ , $b = 8/3$ , $r = 28$ e condição inicial $(1,$<br>$1, 1)$ . Fonte: O autor. . . . .                                     | 60 |
| 3.9 | Projeção no plano $xz$ do atrator estranho de Lorenz; $\sigma = 10$ , $b = 8/3$ ,<br>$r = 28$ e condição inicial $(1, 1, 1)$ . Fonte: O autor. . . . .             | 60 |

# Lista de Tabelas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Comportamento do sistema descrito pela Equação 1.19 para quatro estados iniciais. . . . . | 16 |
|-----|---|----|

# Introdução

São muitos os fenômenos observados no universo e na natureza que são modelados por meio de equações que evoluem com o tempo. Desde a antiguidade, os seres humanos começaram a idealizar a possibilidade de se fazer previsões sobre o clima, sobre o movimento dos corpos celestes, entre outros fenômenos naturais. Tais previsões eram úteis, pois a partir delas era possível planejar a melhor época e os locais mais adequados para o plantio de alimentos, por exemplo, já que a agricultura era influenciada pelas cheias de rios e pelas estações do ano.

Isto foi possível, pela observação durante milhares de anos que uma grande parte dos fenômenos geralmente apresenta uma certa regularidade. A partir dessas regularidades, muitos estudiosos dedicaram esforço e tempo na busca pela compreensão das leis e modelos que governam o universo, desde os gregos antigos com ideias e explicações sobre o movimentos dos corpos celestes, Isaac Newton com a invenção do cálculo infinitesimal e suas leis do movimento e da gravitação universal, até cientistas mais contemporâneos como Albert Einstein com a Teoria da Relatividade.

Um aspecto comum em todo o processo de descobertas e avanços na compreensão das leis que governam a natureza é a presença essencial da matemática, por meio de modelos e equações, sem a qual o estudo e compreensão do universo sob este ponto de vista não seriam possíveis. A área da matemática que estuda e elabora modelos que evoluem com o tempo é chamada de Sistemas Dinâmicos, tendo início com os estudos de Pierre Simon Laplace<sup>1</sup> (1749 - 1827) e de Jules Henri Poincarè<sup>2</sup> (1854 - 1912), sendo este último considerado um dos mais relevantes dentro deste campo de estudo.

Dentro desse contexto, historicamente emergiram duas correntes de pensamento na ciência: o **Determinismo** e o **Indeterminismo**. A concepção determinística, presente

---

<sup>1</sup>Matemático, astrônomo e físico francês.

<sup>2</sup>Matemático, físico e filósofo francês.

sobretudo nos trabalhos de Laplace supõe que o universo é sempre previsível e, portanto, de posse do modelo adequado e das condições iniciais, seria possível prever o futuro de qualquer sistema, pois o estado presente seria um efeito dos estados passados e o futuro, causado pelo estado presente.

Devemos considerar o estado presente do universo como efeito dos seus estados passados e como causa dos que se vão seguir. Suponha-se uma inteligência que pudesse conhecer todas as forças pelas quais a natureza é animada e o estado em um instante de todos os objetos - uma inteligência suficientemente grande que pudesse submeter todos esses dados à análise -, ela englobaria na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e também dos menores átomos: nada lhe seria incerto e o futuro, assim como o passado, estaria presente ante os seus olhos (Laplace. 1990, p. 326, *apud.* SILVEIRA, 1993, p. 138).

Esta "inteligência" que seria capaz de prever o futuro bem como conhecer o passado mencionada por Laplace ficou conhecida posteriormente como **o demônio de Laplace** (SILVEIRA, 1993, p. 138) e é um exemplo do pensamento determinístico dominante na época. Vale ressaltar que o determinismo era a concepção mais aceita não apenas na matemática e nas ciências naturais como a física e a química, mas também nas ciências sociais e humanas. Assim sendo, de posse do modelo adequado e do conhecimento preciso das variáveis do estado presente, o futuro não seria um mistério, o que contrariava a percepção da vida cotidiana, corroborada pelo senso comum (SILVEIRA, 1993).

De acordo com Moraes (2014), com o avanço do conhecimento no início do século XX, sobretudo nos estudos relacionados à mecânica quântica, ficou evidente que tanto as medidas das grandezas quanto a tentativa de determinar o estado futuro de um sistema eram tarefas limitadas em precisão. Assim sendo, pequenas imprecisões nas medidas das variáveis acarretavam grandes erros a longo prazo em um sistema não linear. Um dos precursores no estudo de tais sistemas, foi Jules Henri Poincaré, ao perceber que os sistemas não lineares tinham grande sensibilidade às condições iniciais, e que pequenas mudanças nestas acarretavam diferenças drásticas de comportamento do sistema conforme o tempo avançava. Iniciava-se então a Teoria do Caos.

Como tema principal deste trabalho, a Teoria do Caos será aqui apresentada no estudo do comportamento de dois sistemas dinâmicos específicos, o Mapa Logístico e o sistema de Lorenz. Para atingir este objetivo, além desta introdução e das considerações finais este trabalho está dividido em três capítulos organizados da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos algumas definições de conceitos matemáticos que servem de base para a compreensão dos tópicos abordados nos capítulos seguintes, começando este trabalho com uma revisão sobre as equações diferenciais, as equações de diferenças e os sistemas dinâmicos de forma geral. Como o objetivo deste trabalho não é revisar e discutir toda a teoria das equações diferenciais especificamente, tampouco das equações de diferenças, muitos conceitos são aqui apresentados de forma resumida e breve apenas para que o leitor possa situar-se a respeito do assunto tratado, podendo este recorrer às referências se houver a necessidade de um aprofundamento maior nestes temas. Finalizamos o capítulo 1 com tópicos base da teoria dos sistemas dinâmicos, abordando sistemas contínuos, discretos e o que caracteriza o comportamento caótico de um sistema.

No capítulo 2 temos um estudo do Mapa Logístico, analisando seus parâmetros, diagrama de bifurcação, pontos fixos, sua estabilidade e caos. O estudo do comportamento caótico no Mapa Logístico, foi feito com a aplicação dos expoentes de Lyapunov.

O capítulo 3 trata do modelo conhecido como Sistema de Lorenz, famoso pela expressão "efeito borboleta". Neste capítulo há um estudo sobre este sistema, apresentando algumas de suas propriedades e analisando a existência e estabilidade de pontos de fixos. Por fim, novamente voltaremos ao estudo do comportamento caótico simulando o atrator estranho de Lorenz.

Finalmente, concluímos este trabalho com as considerações finais, vislumbrando possíveis continuações e desdobramentos dentro da temática. Há também as referências bibliográficas utilizadas na pesquisa e um apêndice com alguns resultados e teoremas que julgamos necessários, mas que optamos por apresentar apenas de maneira sucinta ao final do trabalho, podendo o leitor recorrer a eles se achar necessário para a compreensão de algum tópico específico.

# 1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS E SISTEMAS DINÂMICOS

Neste capítulo será feita uma abordagem das equações diferenciais, das equações de diferenças e de alguns conceitos, definições e propriedades importantes sobre os sistemas dinâmicos, que são necessárias para a compreensão dos capítulos subsequentes.

Em matemática uma das variáveis mais presentes no estudo e modelagem dos fenômenos é o tempo. Enquanto variável independente, o tempo pode ser considerado de duas formas: há situações em que considerar um fluxo de tempo contínuo é mais adequado ao modelo a ser estudado, enquanto que em outras deve-se lidar com grandezas que mudam temporalmente o seu estado não de forma contínua, mas discretamente. Isto não significa que o tempo passa de forma discreta, mas simplesmente que as amostras do sistema analisado são tomadas em intervalos de tempo distantes um do outro por um certo intervalo  $\Delta t$ , ou seja, em instantes isolados e não de forma contínua.

Considere por exemplo o modelo para o cálculo da velocidade instantânea de um objeto que se move no espaço em uma determinada direção. Pode-se expressar a velocidade do objeto em um determinado instante pela equação

$$v = \frac{dx(t)}{dt} \tag{1.1}$$

em que  $x(t)$  é a função que descreve a posição do objeto no espaço em função do tempo representado pela variável  $t$ , que neste caso é uma variável contínua.

Para exemplificar o caso discreto, consideremos dois exemplos clássicos de situações em que isto ocorre: primeiramente uma aplicação financeira em que os juros sobre o

capital são calculados em intervalos discretos de tempo, por exemplo, a cada mês e para o segundo caso, pode-se citar o estudo do crescimento e decréscimo de uma população, em que número de indivíduos aumenta ou diminui não de forma fluida, contínua, mas de maneira discreta, o que pode ser medido em intervalos adequados, como anualmente, mensalmente, ou mesmo a cada hora ou minuto se for uma população de bactérias.

Para descrever fenômenos em que o tempo é considerado como contínuo são usadas as *equações diferenciais*, e para os casos em que o tempo é medido discretamente os modelos são elaborados geralmente por meio de *equações de diferenças* que são objetos matemáticos adequados à modelagem no domínio discreto e que em muito se assemelham às equações diferenciais no domínio temporal contínuo. Nos tópicos seguintes, será feita uma breve revisão sobre tais equações, pois elas são a base dos sistemas dinâmicos.

## 1.1 Equações diferenciais

Uma *equação diferencial* é uma equação em que as incógnitas não são números como em uma equação comum, mas funções que aparecem na equação diferencial expressas por meio de suas derivadas ou suas diferenciais, daí o seu nome. Por exemplo, a Equação 1.1 é uma equação diferencial, pois é dada em função da derivada  $\frac{dx}{dt}$  e  $x$  não é um número, mas a função horária  $x(t)$  do espaço, que descreve a posição do objeto no decorrer do tempo. É comum também usar-se a notação  $\dot{x}$  ou  $x'$  para expressar a derivada de  $x$ . No decorrer deste trabalho utilizaremos as notações  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ , e assim por diante; derivadas de ordem superior são denotadas com mais de um ponto ou apóstrofe sobre a letra que representa a função, como a seguir:

$$\ddot{x} = x'' = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \dddot{x} = x''' = \frac{d^3x}{dt^3}$$

e assim por diante, o mesmo valendo para as variáveis  $y$  e  $z$ .

Se a incógnita da equação diferencial for uma função de apenas uma variável independente, a equação apresentará apenas derivadas ordinárias e será chamada de **equação diferencial ordinária** ou simplesmente EDO. Por outro lado, se a incógnita for uma função de múltiplas variáveis independentes, as derivadas serão parciais e, portanto, a equação será chamada **equação diferencial parcial** ou EDP.

**Definição 1.1.1.** *Seja  $x$  uma função de uma variável. Uma equação da forma*

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0 \quad (1.2)$$

*em que  $x$  é a incógnita é chamada equação diferencial ordinária de ordem  $n$ .*

**Exemplo 1.1.1.** *A equação  $F = ma$  que expressa a Segunda Lei de Newton pode ser reescrita como uma equação diferencial. Lembrando que a aceleração é a taxa de variação da velocidade no tempo, isto é,*

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad (1.3)$$

*temos que*

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (1.4)$$

*em que  $F$  é a força e  $m$  é a massa do corpo.*

**Definição 1.1.2.** *A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação.*

**Exemplo 1.1.2.** *A Equação 1.4 é uma **equação diferencial ordinária de 1ª ordem**, pois possui apenas derivadas ordinárias e a derivada de maior ordem da equação é de 1ª ordem.*

**Exemplo 1.1.3.** *A equação*

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t) \quad (1.5)$$

*é uma **equação diferencial ordinária de 2ª ordem** e é usada para modelar um circuito elétrico do tipo RLC em que  $R$  é a resistência elétrica,  $L$  é a indutância e  $C$  é a capacitância do circuito. Neste caso,  $Q(t)$  é a carga elétrica em Coulombs no capacitor e  $E(t)$  é o campo elétrico.*

Note que na Equação 1.5 a maior derivada é de 2ª ordem,  $\frac{d^2 Q(t)}{dt^2}$ , o que classifica a EDO como de 2ª ordem.

**Exemplo 1.1.4.** *Um exemplo de equação diferencial parcial é a equação de continuidade de Navier-Stokes para o escoamento de fluidos, abaixo*

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1.6)$$

Como  $v$  é uma função de três variáveis, ou seja,  $v(x, y, z)$ , as diferenciais que aparecem na equação são derivadas parciais de  $v$  em relação a cada uma das variáveis; assim, a Equação 1.6 é uma EDP.

Além destas, as equações diferenciais recebem ainda outras classificadas, como por exemplo **homogêneas** e **não-homogêneas**, e **lineares** e **não-lineares**.

**Definição 1.1.3.** *Uma equação diferencial linear de ordem  $n$  é da forma*

$$p_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + p_n(t)x = g(t) \quad (1.7)$$

em que  $p_0(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), p_n(t)$  e  $g(t)$  são funções lineares. Caso contrário, a equação diferencial é dita não-linear.

**Exemplo 1.1.5.** A equação

$$\frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x \quad (1.8)$$

é uma equação linear, enquanto que a equação

$$\frac{d^3 x}{dt^3} + 2e^t \frac{d^2 x}{dt^2} + x \frac{dx}{dt} = t^4 \quad (1.9)$$

é não-linear, devido ao termo  $x \frac{dx}{dt}$ .

## 1.2 Sistemas de equações diferenciais

Dependendo do problema, há situações em que apenas uma função é desconhecida, enquanto que em outros casos há mais de uma função a ser determinada. Fazendo uma analogia com as equação numéricas, há aquelas de apenas uma incógnita e outras de duas ou mais incógnitas. Da mesma forma que para resolver equações de mais de uma incógnita precisamos de um sistema de equações, para resolver equações diferenciais em que há várias "funções incógnitas", também será necessário um **sistema de equações diferenciais**, pois neste caso apenas uma equação não será suficiente.

**Exemplo 1.2.1.** *Por exemplo, abaixo temos as equações de Lotka-Volterra conhecidas como modelo predador-presa, que formam um sistema de equações diferenciais de duas*

equações em que as funções incógnitas são  $x(t)$  e  $y(t)$  e  $a$ ,  $\alpha$ ,  $c$ , e  $\gamma$  são parâmetros.

$$\dot{x} = ax - \alpha xy$$

$$\dot{y} = -cy - \gamma xy$$

O sistema de equações mostrado no Exemplo 1.2.1 é não-linear, pois apresenta os termos  $\alpha xy$  na primeira equação e  $\gamma xy$  na segunda. No Capítulo 4 estudaremos o Sistema de Lorenz que também é um sistema não-linear de equações diferenciais.

Conforme já mencionado anteriormente, neste trabalho nosso objetivo é o estudo do comportamento dos sistemas dinâmicos não-lineares e sua sensibilidade às condições iniciais, o que pode levar ou não ao caos, dependendo do valor dos seus parâmetros. Vale ressaltar que aqui não é o nosso objetivo discutir a existência ou não de soluções das equações diferenciais ou dos sistemas, o que pode ser feito utilizando diferentes métodos, dependendo do tipo de equação. Por exemplo, algumas equações e sistemas podem ser resolvidos com métodos analíticos, enquanto outras só podem ser resolvidas por métodos numéricos, o que geralmente é feito com a implementação de um algoritmo utilizando-se técnicas computacionais; há também equações e sistemas que simplesmente não possuem solução. As discussões a respeito da solução das equações diferenciais podem ser encontradas em detalhes em Boyce e Dippima (1999).

### 1.3 Equações de diferenças

Nesta seção iremos discorrer sobre alguns conceitos elementares das **relações de recorrência** ou **equações de diferenças**. Como já mencionado no início deste capítulo, tais equações são úteis para estudar modelos em que as variáveis são discretas, sendo as equivalentes no domínio discreto das equações diferenciais estudadas nas seções anteriores. Apesar de serem chamadas também de *relações de recorrência*, neste trabalho utilizaremos o termo *equações de diferenças*.

**Definição 1.3.1.** *Equação de diferenças é uma expressão ou equação que define cada termo de uma sequência em função de um ou mais termos anteriores e pode ser representada matematicamente como*

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}) \quad (1.10)$$

em que  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 1.3.1.** A equação

$$x_n = x_{n-1} - 5x_{n-2} \quad (1.11)$$

é uma equação de diferenças e, para calcular o termo  $x_n$  é necessário que conheçamos os dois termos anteriores, ou seja,  $x_{n-1}$  e  $x_{n-2}$ .

**Definição 1.3.2.** Se  $f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$  é uma função linear em todas as variáveis  $x_{n-1}$  até  $x_{n-k}$  então a equação  $x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$  é linear. Caso contrário, ela será dita uma equação de diferenças não-linear.

Uma equação de diferenças linear pode ser escrita como

$$x_n = p_1(n)x_{n-1} + p_2(n)x_{n-2} + \dots + p_k(n)x_{n-k} + p_{k+1}(n) \quad (1.12)$$

onde os  $p_i(n)$  são os coeficientes da equação.

Se o termo independente da variável  $x$ , isto é,  $p_{k+1}(n)$ , for igual a zero, então a equação será **homogênea**. Caso contrário, ela será **não-homogênea**. Uma equação de diferenças homogênea de ordem  $k$  pode então ser escrita da forma

$$x_n = p_1(n)x_{n-1} + p_2(n)x_{n-2} + \dots + p_k(n)x_{n-k} \quad (1.13)$$

**Exemplo 1.3.2.** A sequência de Fibonacci é dada por uma equação de diferenças linear, sendo o primeiro e o segundo termos ambos iguais a 1, isto é,  $x_0 = x_1 = 1$ , e cada termo a partir do terceiro é obtido pela soma dos dois termos imediatamente anteriores:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 1 + 1 = 2 \\
x_3 &= 2 + 1 = 3 \\
x_4 &= 3 + 2 = 5 \\
&\dots \\
x_n &= x_{n-1} + x_{n-2}.
\end{aligned}$$

**Exemplo 1.3.3.** *O Mapa Logístico é um modelo descrito por uma equação de diferenças não-linear dada por*

$$x_{n+1} = \alpha x_n - \alpha x_n^2 \quad (1.14)$$

em que  $\alpha x_n^2$  é o termo não-linear da equação. O Mapa Logístico será o objeto de estudo do próximo capítulo.

Se o termo  $x_n$  de uma sequência é dado em função do termo anterior  $x_{n-1}$ , dizemos que a equação de diferenças é de **1ª ordem** e é expressa por

$$x_n = f(n, x_{n-1}) \quad (1.15)$$

Se o termo  $x_n$  é dado em função dos dois termos anteriores  $x_{n-1}$  e  $x_{n-2}$ , dizemos que a equação de diferenças é de **2ª ordem**

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}) \quad (1.16)$$

**Definição 1.3.3.** *Seja uma sequência recursiva em que o  $n$ -ésimo termo  $x_n$  é dado em função dos termos  $x_{n-1}$  até  $x_{n-k}$ . A equação de diferenças que gera a sequência será dada por  $x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$  e será de ordem  $k$ .*

O Exemplo 1.3.3 apresenta o Mapa Logístico que é descrito por uma equação de diferenças de 1ª ordem, pois o termo  $x_{n+1}$  é dado em função apenas do termo anterior  $x_n$ . Por outro lado, o Exemplo 1.3.2 que mostra a sequência de Fibonacci trata-se de uma equação de diferenças de 2ª ordem, já que um termo qualquer da sequência é dado em

função dos dois termos anteriores. Note que ambas são homogêneas, pois não apresentam termos independentes da variável  $x$ .

## 1.4 Pontos fixos de uma equação

Em seu trabalho sobre sistemas dinâmicos discretos, Jesus (2016, p.11) destaca a importância de determinar-se pontos fixos de uma equação e classificar a sua estabilidade. Citando exemplos na Biologia, a autora ressalta que parâmetros como a temperatura e a salinidade de um habitat podem atingir pontos de equilíbrio, favorecendo uma determinada população. Contudo, como os seres vivos são frágeis e sensíveis a grandes mudanças ambientais, conhecer a estabilidade de tais pontos fixos é de grande importância para prever mudanças bruscas que podem ocorrer, causando o desequilíbrio do ambiente e, conseqüentemente, acarretando na morte de muitos indivíduos de determinada espécie.

Apenas este exemplo de aplicação citado no parágrafo anterior já é suficiente para justificar a relevância do estudo dos pontos fixos, mas além disso, determinar pontos fixos de uma equação é uma técnica bastante útil em diversos métodos numéricos e analíticos, entre eles para determinar as raízes de equações, por exemplo. Mas, o que é um ponto fixo de uma equação? Vejamos a definição a seguir.

**Definição 1.4.1.** *Seja  $f$  uma função e  $x^*$  um ponto de seu domínio. Se  $x^*$  satisfaz a equação  $x^* = f(x^*)$ , então ele é chamado de **ponto fixo, estado estacionário ou ponto de equilíbrio** da equação.*

A Definição 1.4.1 é válida tanto para as equações numéricas quanto no contexto das equações diferenciais e de diferenças. De acordo com a definição acima, um ponto fixo é um valor que ao ser inserido como entrada na equação a imagem é ele próprio. É chamado também de estado estacionário, pois iterando-se a equação várias vezes, a resposta não muda, permanecendo no ponto fixo.

**Exemplo 1.4.1.** *Seja a aplicação  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \sqrt{x}$ . Temos que  $x = 0$  e  $x = 1$  são pontos fixos de  $f$ , pois  $f(0) = \sqrt{0} = 0$  e  $f(1) = \sqrt{1} = 1$ .*

Aqui devemos mencionar o fato de que encontrar um ponto fixo de uma equação nem sempre é uma tarefa fácil. Dependendo do modelo, pode inclusive acontecer que a equação não possua pontos fixos. Existem teoremas que garantem a existência de pontos

fixos em uma equação dependendo de certas condições; são os chamados *teoremas de ponto fixo*. Entre estes, há o teorema de ponto fixo de Brouwer, o teorema de ponto fixo de Schauder e o teorema de ponto fixo de Banach, mencionados em Trindade (2019, pp. 30-31), tendo sido feito um estudo mais detalhado do teorema do ponto fixo de Banach pela autora.

Como um ponto fixo representa um estado estacionário de um sistema, se este atingir o ponto fixo, permanecerá nele para sempre. Mas o comportamento do sistema fica interessante se observarmos o que ocorre nas proximidades de um ponto fixo. Analizando determinados modelos, uma das seguintes condições pode acontecer: o ponto fixo atrai o sistema para si ou o repele. No primeiro caso o ponto fixo é chamado de **atrator** e no segundo **repulsor**. Se um ponto fixo for atrator, dizemos que ele é **estável** e se for repulsor, diremos que ele é **instável**.

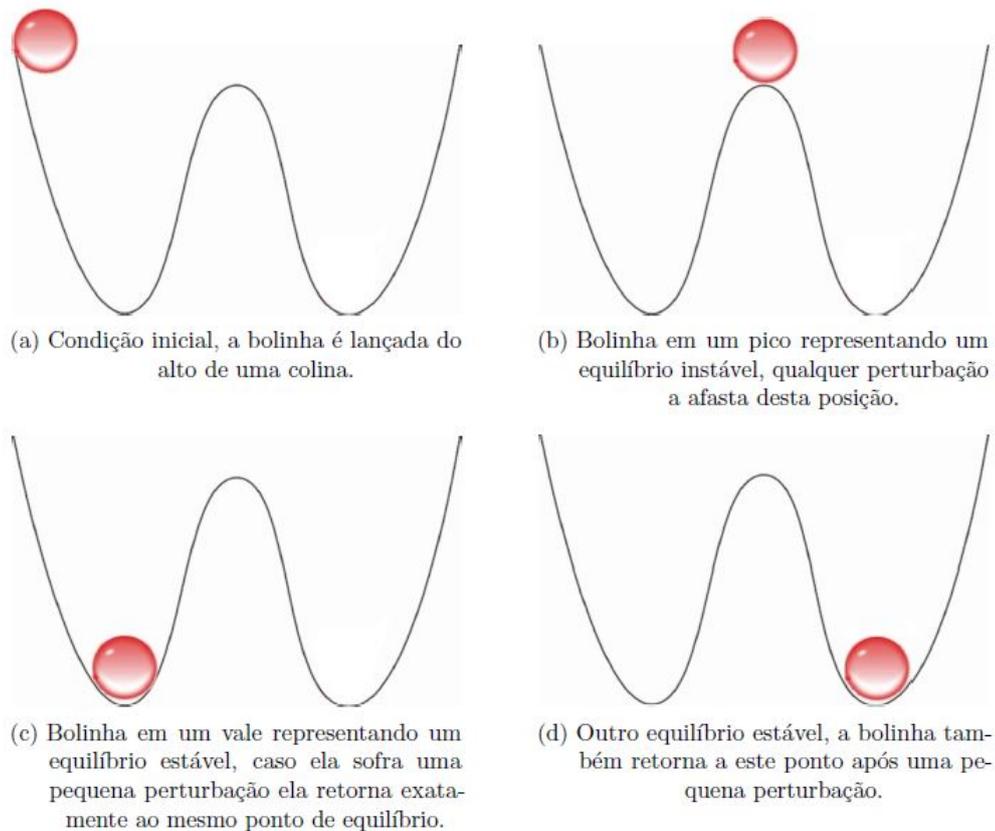
**Definição 1.4.2.** *Seja  $f(x)$  uma aplicação e  $x^*$  um ponto fixo de  $f$ . Se para todo  $\epsilon > 0$  existir um  $\delta > 0$  tal que  $|x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x_n - x^*| < \epsilon$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então o ponto fixo  $x^*$  será chamado **estável**. Caso contrário, ele será **instável**.*

**Definição 1.4.3.** *Seja  $x^*$  um ponto fixo e  $r > 0$ . Se  $|x_0 - x^*| < r \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ , então o ponto fixo é dito **atrator**.*

**Definição 1.4.4.** *Um ponto fixo  $x^*$  é **repulsor** se existe  $\epsilon > 0$  e existe  $N \in \mathbb{N}$  tais que  $|x_0 - x^*| < \epsilon \Rightarrow |x_n - x^*| > |x_0 - x^*|$ ,  $\forall n \geq N$ .*

Na Figura 1.1 temos representados os conceitos de pontos de equilíbrio estável e instável em que Jesus (2016, p. 13) faz uma descrição intuitiva: em (a) está ilustrada uma condição inicial, em que uma bolinha é lançada do alto de uma colina em direção ao vale. Em (b) a bolinha está equilibrada em um pico, posição em que permanece parada, ou seja, o pico possui uma posição de equilíbrio ou um estado estacionário. Todavia, qualquer perturbação que afete a posição de equilíbrio da bolinha, fará com que ela se afaste da posição de equilíbrio, caindo no vale; logo, o pico representa um ponto fixo instável. Em (c) e (d) temos os dois vales que representam pontos fixos estáveis, pois qualquer perturbação na posição da bolinha não a afasta do ponto de equilíbrio, retornando esta novamente ao vale.

Figura 1.1: Ilustração dos conceitos de pontos de equilíbrio estável e instável. Fonte: Jesus, 2016, p.13.



Pode-se dizer também que o ponto fixo representado pelo pico é repulsor e o representado pelo vale é atrator. Nos capítulos seguintes, serão analisados os pontos fixos no Mapa Logístico e no Sistema de Lorenz; veremos que alterando-se certos parâmetros dos sistemas, um mesmo ponto fixo pode ser estável e perder a sua estabilidade causando bifurcações no sistema. As bifurcações podem ir duplicando-se até chegar em um ponto em que o sistema entra em regime caótico.

## 1.5 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico é um modelo geral que evolui de acordo com uma regra que associa o estado presente do sistema a estados passados. Dependendo do seu comportamento e previsibilidade, os sistemas dinâmicos podem ser classificados em estocásticos ou determinísticos e quanto à variação temporal, podem ser contínuos ou discretos. Sistemas dinâmicos contínuos são aqueles em que a evolução do tempo no modelo ocorre de forma contínua, sendo modelados geralmente por meio de equações diferenciais enquanto que

os discretos são aqueles em que a sua evolução temporal é tomada em passos discretos, sendo sua modelagem geralmente feita por meio de equações de diferenças.

Os sistemas dinâmicos estocásticos não têm um comportamento determinado ou previsível, isto é, se conhecemos seu estado inicial, não podemos prever com certeza o seu estado futuro. Mas é possível obter a probabilidade de um estado futuro, baseado em um conjunto de possibilidades chamado de espaço amostral; tais sistemas dinâmicos são modelados com base em equações estocásticas, que envolvem conceitos probabilísticos. Por outro lado, sistemas dinâmicos determinísticos possuem previsibilidade, ou seja é possível prever a resposta do sistema se forem satisfeitas duas condições: conhecermos o seu estado inicial e possuímos o modelo que o descreve.

Dentre os sistemas dinâmicos determinísticos, há aqueles que não apresentam grande sensibilidade às condições iniciais, por exemplo, os sistemas lineares. Isto significa que nestes sistemas, uma variação no seu estado inicial provoca uma resposta proporcional em seu estado futuro. No entanto, observa-se na natureza um grande número de sistemas dinâmicos que possuem alta sensibilidade às condições iniciais, de modo que qualquer mudança em seu estado inicial, por menor que seja, é capaz de provocar comportamentos totalmente diferentes com o passar do tempo.

Os sistemas que apresentam esta característica, isto é, a alta sensibilidade aos estados iniciais, são denominados de *sistemas caóticos* e devido à impossibilidade de realizar-se medidas com precisão absoluta, estes apresentam comportamentos irregulares, tornando-se imprevisíveis ao longo do tempo. Isto nos parece como um paradoxo já que o sistema é em sua natureza determinístico, todavia ao mesmo tempo seu comportamento é imprevisível. Mas este aspecto é verificado na realidade pelo fato já mencionado, de ser impossível fisicamente obter-se medidas com precisão infinita dos estados de um sistema, por exemplo pela limitação dos instrumentos de medida. Em tais sistemas uma pequena alteração nas condições iniciais já é suficiente para acarretar respostas exponencialmente distintas no decorrer do tempo.

### 1.5.1 Sistemas dinâmicos contínuos

No tópico 1.2 introduzimos o conceito de sistemas de equações diferenciais exemplificando com um modelo conhecido como "predador-presa" ou equações de Lotka-Volterra (Ver a Equação 1.2.1), que é um sistema dinâmico de tempo contínuo. Conforme já

mencionado, sistemas dinâmicos contínuos são modelados por meio de equações diferenciais, pois a sua evolução ocorre de forma fluida, considerando-se o tempo uma variável contínua. Um sistema dinâmico contínuo pode ser descrito por uma equação diferencial apenas ou por um sistema de equações, como no exemplo anteriormente citado.

Considere o sistema dado por

$$\dot{x} = F(t, x(t)) \quad (1.17)$$

em que  $F$  é uma aplicação que modela a dinâmica de evolução do sistema,  $t$  é a variável independente de  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , que é o vetor das **variáveis de estado**. Pode-se reescrever 1.17 como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

**Exemplo 1.5.1.** *O sistema*

$$\dot{x} = \cos(x) \quad (1.18)$$

é um sistema dinâmico contínuo de primeira ordem, formado por apenas uma equação diferencial em que  $f(x) = \cos(x)$  e  $x = x(t)$ . Apesar de parecer simples, este sistema é não-linear devido à função cosseno.

**Exemplo 1.5.2.** *O modelo a seguir é o Sistema de Lorenz (ou equações de Lorenz) que será estudado em detalhes no Capítulo 3 e é um sistema dinâmico de tempo contínuo dado pelas equações diferenciais*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned}$$

As equações de Lorenz compõem um sistema tridimensional, ou seja, cada ponto no espaço de estados possui três coordenadas,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que são determinadas por cada uma das equações diferenciais  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$ .

## 1.5.2 Sistemas dinâmicos discretos

**Definição 1.5.1.** (*Sistemas dinâmicos discretos*) Dada uma função  $F : R \rightarrow R$ , um sistema dinâmico discreto é uma sequência de números reais denotados por  $X_n$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , onde cada termo da sequência após o primeiro é relacionado ao anterior pela equação

$$X_{n+1} = F(X_n). \quad (1.19)$$

A aplicação  $F(X_n)$  é chamada de densidade dependente e representa uma iteração sobre  $X_n$ . Note-se que o estado futuro do sistema, i.e.,  $X_{n+1}$ , depende de seu estado passado  $X_n$ .

Suponha que na Equação 1.19,  $F(X_n) = 0,5X_n$ . Daí, tem-se que  $X_{n+1} = 0,5X_n$ . De acordo com o estado inicial do sistema, ou seja, quando  $n = 0$ , obtém-se uma sequência de valores que são obtidos iterando-se repetidas vezes o sistema por meio da aplicação  $F$ . Na Tabela 1.1 temos a evolução do sistema para quatro estados iniciais diferentes:  $X_0 = 10, 5, 2$  e  $0,5$ .

| $X_n$    | $X_{n+1} = 0,5X_n$ |             |             |             |
|----------|--------------------|-------------|-------------|-------------|
| $X_0$    | 10                 | 5           | 2           | 0,5         |
| $X_1$    | 5                  | 2,5         | 1           | 0,25        |
| $X_2$    | 2,5                | 1,25        | 0,5         | 0,125       |
| $X_3$    | 1,25               | 0,625       | 0,25        | 0,0625      |
| $X_4$    | 0,625              | 0,3125      | 0,125       | 0,03125     |
| $X_5$    | 0,3125             | 0,15625     | 0,0625      | 0,015625    |
| $X_6$    | 0,15625            | 0,078125    | 0,03125     | 0,0078125   |
| $X_7$    | 0,078125           | 0,0390625   | 0,015625    | 0,00390625  |
| $X_8$    | 0,0390625          | 0,01953125  | 0,0078125   | 0,001953125 |
| $X_9$    | 0,01953125         | 0,009765625 | 0,00390625  | 0,000976563 |
| $X_{10}$ | 0,009765625        | 0,004882813 | 0,001953125 | 0,000488281 |

Tabela 1.1: Comportamento do sistema descrito pela Equação 1.19 para quatro estados iniciais.

Note que o sistema mostrado na Tabela 1.1 é modelado por uma equação de diferenças linear de 1ª ordem. A seguir definiremos dois conceitos importantes que não

foram mencionados no subtópico sobre as equações de diferenças, que são as **órbitas** e os **mapas**.

**Definição 1.5.2. (Órbita):** Chamamos de **órbita do ponto**  $X_0$ , à sequência de números reais  $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ , que é gerada pelas iterações sucessivas de uma equação de diferenças. Dado um ponto  $X_0$ , denotaremos a órbita de  $X_0$  por  $O_{(X_0)}$ .

Observando a Tabela 1.1, tem-se que a órbita de  $X_0 = 10$  é a sequência  $(10, 5, 2.5, 1.25, 0.625, \dots)$ .

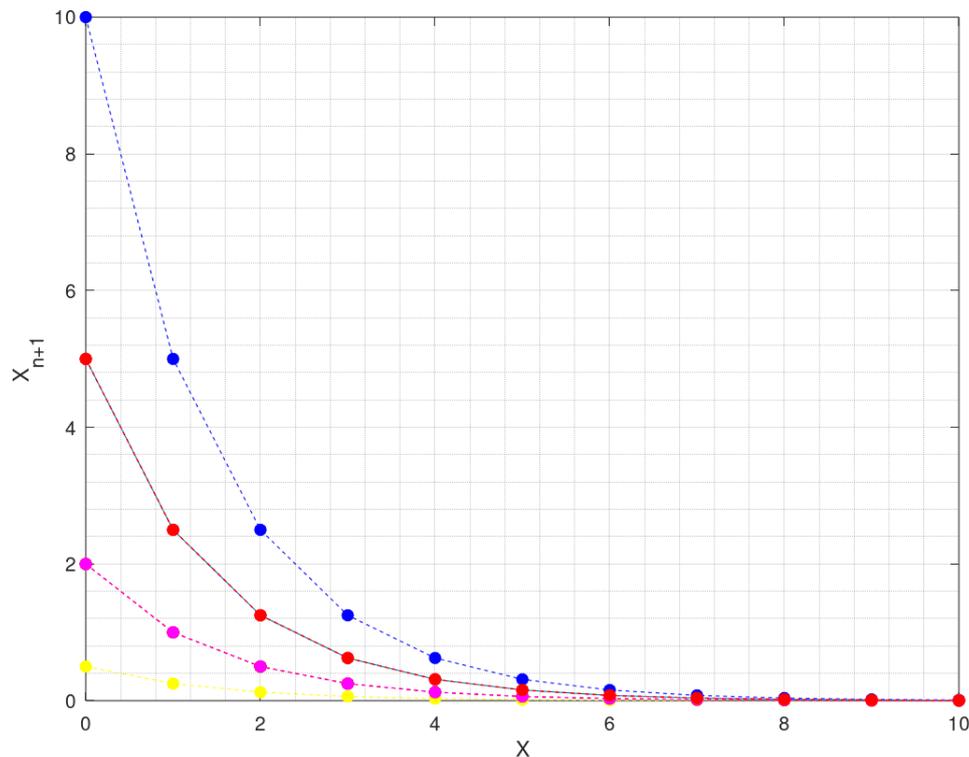
Para  $X_0 = 5$  a órbita é a sequência  $(5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, \dots)$ , e assim por diante.

**Definição 1.5.3. (Mapa)** Dada uma equação de diferenças, um ponto  $X_0$  e a sua órbita, denomina-se **mapa** o conjunto de pontos  $(n, X_n)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , em que  $X_n$  é o  $n$ -ésimo termo da órbita  $O_{(X_0)}$ .

Um mapa pode ser representado de várias maneiras. As duas principais são por meio de valores organizados em uma tabela, ou por gráficos que podem ser de linhas, colunas, pontos (também chamados gráficos de dispersão), entre outros. A representação gráfica tem a vantagem de fornecer uma visualização imediata sobre o comportamento dos sistemas dinâmicos, sendo uma ferramenta indispensável nas análises.

Neste trabalho, usaremos sempre gráficos do tipo linha ou gráficos de dispersão para representar os mapas dos sistemas estudados. Na Figura 1.2 tem-se a representação do mapa das quatro órbitas da Equação 1.19, apresentadas na Tabela 1.1. Os pontos em azul correspondem ao valor inicial  $X_0 = 10$ ; os pontos na cor vermelha correspondem à órbita para o estado inicial  $X_0 = 5$ ; na cor magenta, para  $X_0 = 2$  e na cor amarela, para  $X_0 = 0,5$ . Nota-se que este sistema aproxima-se de zero a cada iteração, independente do seu estado inicial. De fato, zero é um ponto fixo da Equação  $X_{n+1} = 0,5X_n$ , e, portanto, um ponto de equilíbrio do sistema exemplificado.

Figura 1.2: Gráfico do mapa da Tabela 1.1. Fonte: O autor.



**Observação 1.5.1.** A órbita de um ponto também é chamada de *trajetória* do ponto.

Nos sistemas dinâmicos é importante determinar a existência de pontos de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio é um estado em que o sistema atinge a estabilidade, ou seja, iterações sucessivas aplicadas ao sistema não mais alteram o seu estado futuro. Determinar os pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico equivale a encontrar pontos fixos das equações que o modelam. Os pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico podem ser **estáveis** ou **instáveis** conforme as definições anteriormente apresentadas para os pontos fixos de uma equação. No sistema exemplificado, zero é um ponto de equilíbrio estável.

### 1.5.3 Comportamento caótico de um sistema não linear

Durante muito tempo acreditou-se que a previsibilidade do estado final de um sistema não era afetada por pequenas mudanças ou incertezas em relação ao seu estado inicial ou presente. A título de exemplo, em seus trabalhos sobre astronomia em que estudou o sistema solar, Laplace afirmou que este era estável e que os planetas manteriam

para sempre as suas distâncias médias em relação ao Sol, o que na época era um problema em aberto para a ciência (LAPLACE, 1829; SILVEIRA, 1993). Entretanto, outros pesquisadores discordavam dessa hipótese. Vejamos o que menciona Silveira (1993) sobre o que achava Newton a respeito do sistema solar:

Newton pensava que ele fosse instável, a ponto de que Deus devesse intervir para manter a ordem (Verdet, 1991); os cartesianos discordaram de Newton, argumentando que Ele, infinitamente perfeito, teria criado o universo sem necessidade de ter que intervir posteriormente. (SILVEIRA, 1993, p. 140).

Neste contexto fica evidente que as duas correntes de pensamento, a saber, o **determinismo** e o **indeterminismo** eram corroboradas por importantes cientistas da época. Contudo, ainda não tinha sido elaborada uma teoria com os alicerces matemáticos para a correta compreensão do comportamento indeterminado aparentemente observado na natureza, como por exemplo, no objeto de estudo mencionado, o sistema solar. Além disso, a ideia de um mundo indeterminado, caótico, ia de encontro a questões religiosas, o que contribuiu para que a concepção determinista fosse mais proeminente.

Posteriormente, com os trabalhos de Henri Poincaré, sobretudo no que se refere ao famoso **problema dos três corpos**, ficou provado que imprecisões nas medidas ou pequenas variações nas condições iniciais de um sistema, impossibilitavam qualquer previsão futura sobre o seu comportamento.

Se conhecêssemos perfeitamente as leis da natureza e a situação do universo no instante inicial, estaríamos aptos a prever a situação do mesmo universo em um instante subsequente. Mas mesmo quando as leis da natureza não são um segredo para nós, podemos conhecer a situação inicial apenas aproximadamente. Se tal nos permitisse prever a situação subsequente com o mesmo grau de aproximação, isto seria tudo o que desejaríamos e diríamos que o fenômeno foi previsto, que ele é regido por leis. Mas não é sempre assim; pode acontecer que pequenas diferenças na situação inicial produzam grandes diferenças nos fenômenos finais; um erro antecedente pode produzir um erro enorme depois. A predição se torna impossível e temos um fenômeno fortuito (Poincaré, 1990, p307, *apud. SILVEIRA, 1993, p. 146*).

A esta alta sensibilidade de um sistema às condições iniciais deu-se o nome de **caos**. Em um sistema dinâmico, o comportamento caótico está relacionado à característica da não-linearidade. Sua sensibilidade às condições iniciais gera instabilidade, o que o

torna praticamente imprevisível no longo prazo. Nesse sentido, qualquer imprecisão nas medidas dos parâmetros de um sistema, poderia resultar no caos. Segundo proposto por Werner Karl Heisenberg<sup>1</sup> (1901 - 1976), "as precisões de medidas simultâneas de variáveis físicas conjugadas, como posição e momento, estão vinculadas por uma relação de desigualdade que estabelece um limite inferior para o produto das precisões dessas medidas." (MONTEIRO, 2006, p. 19). Este é o conhecido **princípio da incerteza** de Heisenberg.

Segundo este princípio, não há como eliminar totalmente a incerteza de uma medida, como caracteriza Monteiro (2006, p. 19): "Se  $\Delta x$  e  $\Delta p$  são as precisões das medidas da posição  $x$  e do momento  $p$ , respectivamente, o princípio de Heisenberg expressa-se pela relação  $\Delta x \Delta p > h/4\pi$ , sendo  $h \simeq 6,63 \times 10^{-34} J_s$  a constante de Planck". Assim, por exemplo, não há a possibilidade de aumentar-se indefinidamente e simultaneamente a precisão das medidas da posição e do momento de um corpo ou partícula, pois o aumento na precisão de uma das medidas acaba acarretando um erro na outra; portanto, sempre haverá erros associados à posição ( $x(t_0)$ ) ou ao momento ( $p(t_0)$ ), pelo princípio da incerteza.

Neste caso, se o sistema for caótico, ou seja, altamente sensível às condições iniciais, fica impossível fazer-se previsões conforme o tempo avança, pois as distorções devido às medidas imprecisas do estado do sistema começam a crescer exponencialmente, divergindo drasticamente do esperado.

---

<sup>1</sup>Físico teórico alemão, sendo um dos criadores da Mecânica Quântica; recebeu o prêmio Nobel de Física de 1932.

# 2 O MAPA LOGÍSTICO

Neste capítulo, será feito um estudo do Mapa Logístico que, dependendo das condições iniciais de seus parâmetros, pode apresentar o comportamento caótico.

## 2.1 Equação logística e mapa logístico

A equação logística ou modelo de Verhulst foi proposta pelo biologista e matemático Pierre François Verhulst<sup>1</sup> (1804 - 1849) para descrever a dinâmica populacional de espécies biológicas. Na equação logística, são consideradas as taxas de natalidade e mortalidade dos indivíduos da população, além de um fator atenuante de crescimento que é verificado quando o número de indivíduos ultrapassa um determinado limiar em que começa haver disputa por recursos naturais, território, alimento, etc.

**Definição 2.1.1.** *O mapa logístico é caracterizado por um sistema dinâmico que associa a um número real  $X_n$  o número real  $X_{n+1}$  por meio da equação*

$$X_{n+1} = \alpha X_n (1 - X_n). \quad (2.1)$$

O parâmetro  $\alpha$  representa a taxa de crescimento da população (também chamado potencial biótico) e  $X_n$ , o número de indivíduos em um determinado instante. Note que  $X_{n+1}$  é o tamanho da população após um determinado período, que pode ser caracterizado por ciclos de reprodução e depende do número de indivíduos do ciclo anterior e da taxa de reprodução ou crescimento. A Equação 2.1 pode ser reescrita como:

$$X_{n+1} = \alpha X_n - \alpha X_n^2. \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Matemático belga, Verhulst foi um estudioso da dinâmica populacional e propôs o modelo logístico, que também leva o seu nome.

O termo linear  $\alpha X_n$  representa a tendência de crescimento da população, enquanto que o termo não linear  $-\alpha X_n^2$  (quadrático neste caso) representa a tendência de decréscimo. Note que quanto maior o tamanho da população, mais relevante é o termo correspondente ao decréscimo na dinâmica populacional. No Mapa Logístico, a população deve ser considerada normalizada, ou seja, é considerada sempre uma porcentagem da população total; por exemplo, se  $X_n = 0,4$ , significa que  $X_n$  corresponde a 40% da população máxima. Assim, a população fica inserida no intervalo  $[0, 1]$  e além disso, resolvendo a equação 2.2 tem-se:

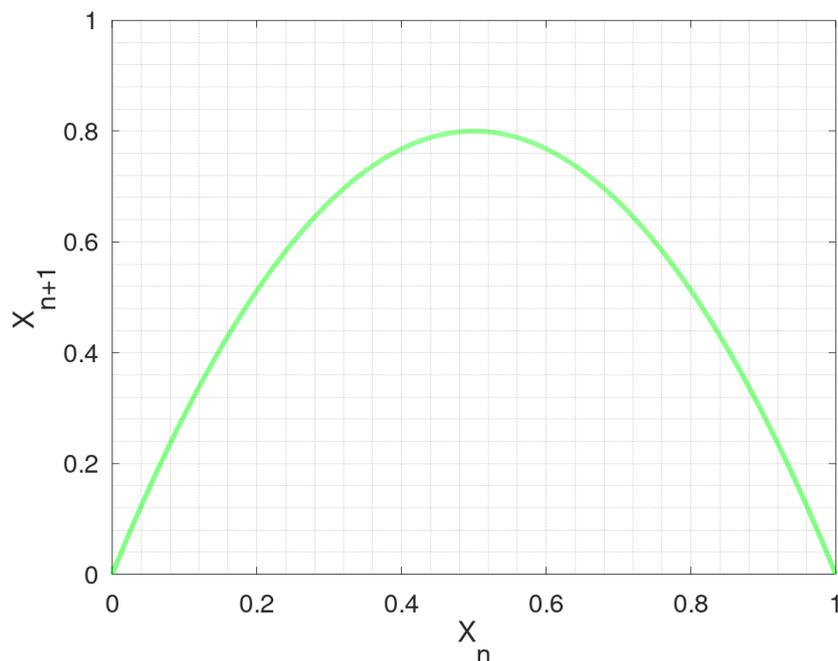
$$X_{máx} = \frac{-\alpha}{-2\alpha} \Rightarrow X_{máx} = \frac{1}{2} \quad (2.3)$$

e o valor máximo de  $X_{n+1}$  é dado por:

$$X_{n+1máx} = -\frac{\alpha^2}{4(-\alpha)} = \frac{\alpha}{4}. \quad (2.4)$$

A equação descreve um arco de parábola no intervalo  $[0, 1]$  cuja concavidade está voltada para baixo, conforme o gráfico da Figura 2.1. Observe no gráfico que a função assume valores não-negativos no intervalo  $[0, 1]$ , sendo que nos extremos a função se anula, o que representa a extinção da população. Para  $\alpha = 3,2$ , o valor máximo da função é  $\frac{\alpha}{4} = \frac{3,2}{4} = 0,8$ , como mostrado no gráfico.

Figura 2.1: Gráfico da Equação 2.1 para  $\alpha = 3,2$ . Fonte: O autor.



### 2.1.1 Pontos fixos e estabilidade

Para entender o comportamento do modelo logístico é necessário verificar a existência de pontos fixos e sua estabilidade. Para isso, considere  $X^*$  tal que  $F(X^*) = X^*$ ; tem-se que  $X^*$  é um ponto fixo da equação e, desde que o sistema atinja tal ponto, a sua órbita permanecerá nele para todas as futuras iterações. Nos interessa, entretanto, saber o que ocorre com o sistema mediante uma entrada muito próxima a  $X^*$ , deslocada por uma distância  $\delta_n$ , ou seja, consideremos a órbita  $X_n = X^* + \delta_n$  e verificaremos se o ponto fixo a atrai ou repele. Note-se que:

$$X^* + \delta_{n+1} = X_{n+1} = F(X^* + \delta_n) = F(X^*) + F'(X^*)\delta_n + O(\delta_n^2).$$

Como por hipótese  $X^*$  é um ponto fixo então  $F(X^*) = X^*$  e, portanto, obtem-se:

$$\delta_{n+1} = F'(X^*)\delta_n + O(\delta_n^2).$$

Desprezando os termos  $O(\delta_n^2)$ , resulta que  $\delta_{n+1} = F'(X^*)\delta_n$  e observa-se que:

a) Se  $|F'(X^*)| < 1$ , conforme  $n \rightarrow \infty$  a distância  $\delta_n \rightarrow 0$  e portanto, o ponto fixo é **linearmente estável**;

b) Se  $|F'(X^*)| > 1$ , conforme  $n \rightarrow \infty$  a distância  $\delta_n$  aumenta e portanto, o ponto fixo é **instável**.

c) Para o caso marginal em que  $|F'(X^*)| = 1$ , não há conclusão a respeito da estabilidade do ponto fixo, devendo ser utilizados os termos desprezados  $O(\delta_n^2)$ , que fornecerão a estabilidade local do ponto. (STROGATZ, 1994.)

Para o modelo logístico, temos que

$$F'(X^*) = (\alpha X^*(1 - X^*))' = (\alpha X^* - \alpha(X^*)^2)' = \alpha - 2\alpha X^*. \quad (2.5)$$

Os pontos fixos do modelo logístico satisfazem  $F(X^*) = X^*$ . Conseqüentemente, devemos ter  $X^*$  tal que  $X^* = \alpha X^*(1 - X^*)$ . Daí,

$$\begin{aligned} X^* &= \alpha X^* - \alpha(X^*)^2 \\ \Rightarrow -\alpha(X^*)^2 + \alpha X^* - X^* &= 0 \\ \Rightarrow -\alpha(X^*)^2 + (\alpha - 1)X^* &= 0 \\ \Rightarrow -(X^*)^2 + \frac{(\alpha-1)}{\alpha}X^* &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X^* = 0 \text{ ou } X^* = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha}. \quad (2.6)$$

Com base na Equação 2.6, nota-se que a origem, isto é,  $X^* = 0$  é sempre um ponto fixo, independentemente do valor de  $\alpha$ . A outra raiz da equação, ou seja, o outro ponto fixo, é dada em função de  $\alpha$ . Note-se que para todo  $X^* \geq 0$ , implica que  $1 - \frac{1}{\alpha} \geq 0$  e, portanto,  $\alpha \geq 1$ . Verifiquemos a estabilidade dos pontos fixos com base na Equação 2.5, que é a função derivada do mapa logístico, analisando caso a caso:

i) Para  $X^* = 0$ , tem-se que  $F'(X^*) = F'(0) = \alpha - 2\alpha \cdot 0 = \alpha$ . Então, para  $\alpha < 1$ , o ponto fixo é estável e para  $\alpha > 1$  ele é instável.

ii) Para  $X^* = 1 - \frac{1}{\alpha}$ , temos que  $F'(X^*) = \alpha - 2\alpha \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha - 2\alpha + 2 = 2 - \alpha$ . Logo, para que o ponto fixo seja estável, devemos ter  $|2 - \alpha| < 1$ , ou seja,  $-1 < (2 - \alpha) < 1$ . Consequentemente,

$$-1 - 2 < -\alpha < 1 - 2 \Rightarrow -3 < -\alpha < -1 \Rightarrow 1 < \alpha < 3. \quad (2.7)$$

Assim, a Equação 2.7 nos diz que se  $\alpha \in [1, 3]$  então o ponto fixo dado por  $X^* = 1 - \frac{1}{\alpha}$ , é estável. Do contrário, ele é instável.

Nas figuras a seguir, temos representadas várias órbitas do mapa logístico usando diferentes taxas de crescimento, por meio de gráficos de *tempo vs população*. Como o modelo que estamos trabalhando é discreto, a representação está feita por meio de gráficos de dispersão, sendo cada iteração representada por pontos no respectivo gráfico. Contudo, sem perda de rigor e usando de uma pequena liberdade, optamos por ligar os pontos do gráfico apenas para que o leitor possa ter uma melhor visualização da evolução do sistema.

Na Figura 2.2 está representada uma órbita a partir de um estado inicial  $X_0 = 0,4$  e taxa de crescimento  $\alpha = 0,79$ . Após algumas iterações observa-se que a órbita aproxima-se cada vez mais do ponto fixo  $X^* = 0$ , como era esperado, visto que  $\alpha < 1$ , o que nos diz que o ponto fixo é estável e a cada iteração a órbita é atraída para ele. O mesmo ocorre na Figura 2.3 em que a condição inicial é a mesma, todavia com um valor de  $\alpha = 0,995$  que é um pouco maior do que o anterior e mais próximo de 1. Novamente o ponto fixo da origem atrai a órbita, desta vez mais lentamente.

Figura 2.2: Órbita do mapa logístico para  $X_0 = 0,4$  e  $\alpha = 0,79$ . Fonte: O autor.

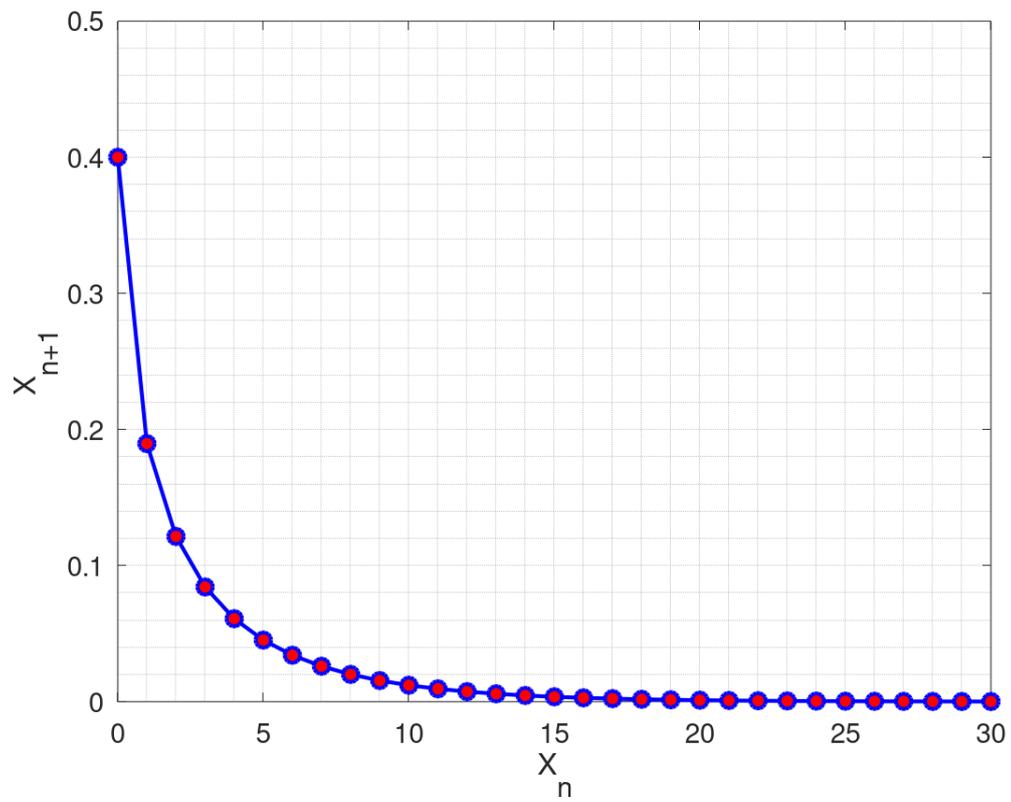
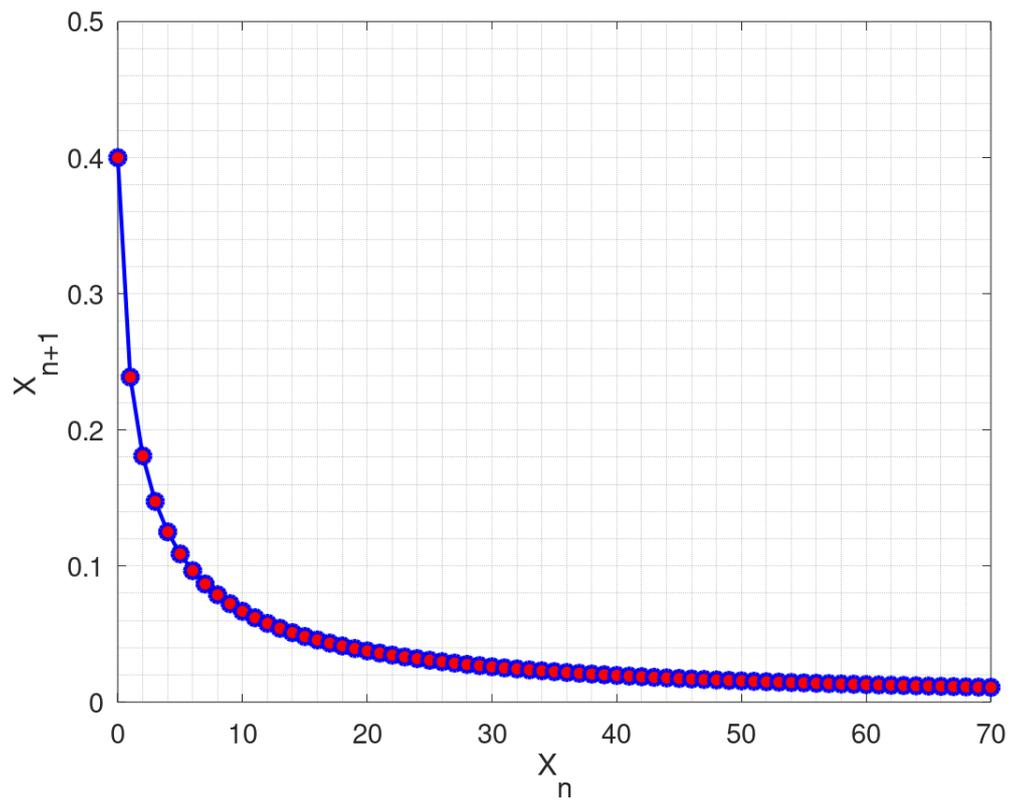


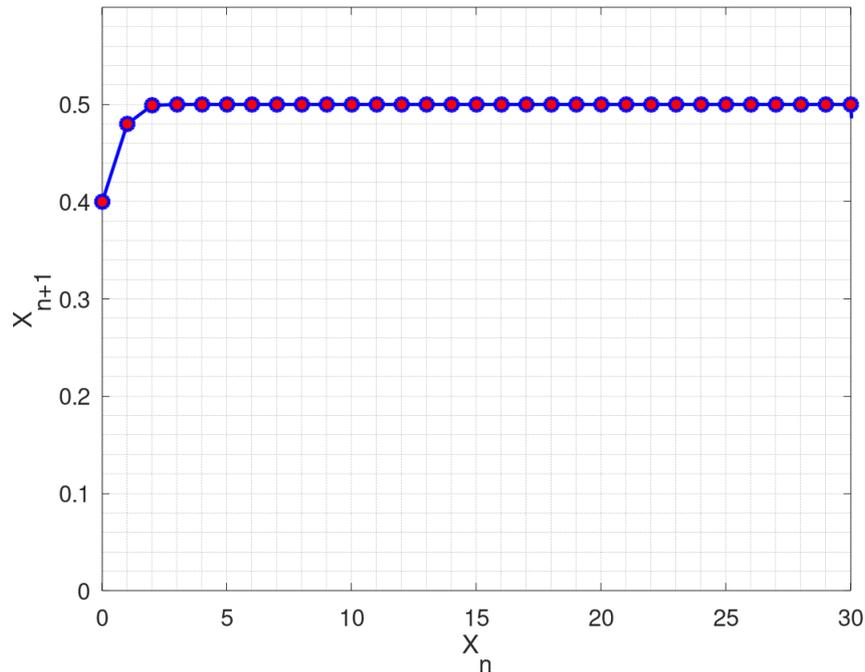
Figura 2.3: Órbita do mapa logístico para  $X_0 = 0,4$  e  $\alpha = 0,995$ . Fonte: O autor.



O que essas duas figuras evidenciam, com base nos resultados mostrados anteriormente, é que sempre que a taxa de crescimento  $\alpha$  for menor do que 1, o sistema irá aproximar-se cada vez mais de 0, que é o único ponto fixo nestas condições e representa a extinção da população. A rapidez com que a população é extinta depende do parâmetro  $\alpha$ .

Nas duas figuras anteriores mostramos dois casos em que a taxa de reprodução é menor do que 1, intervalo dentro do qual o ponto fixo da origem é estável. Aumentando-se a taxa de reprodução, a partir do ponto em que  $\alpha > 1$ , o ponto fixo da origem perde a sua estabilidade e surge então outro ponto fixo conforme o resultado da Equação 2.6. Para observar o que acontece nesse caso, veja a iteração do mapa logístico com o mesmo estado inicial das Figuras 2.2 e 2.3, ou seja,  $X_0 = 0,4$ , mas desta vez com  $\alpha = 2$ , apresentado na Figura 2.4.

Figura 2.4: Órbita do mapa logístico para  $X_0 = 0,4$  e  $\alpha = 2$ . Fonte: O autor.



Note que a órbita não é mais atraída para a origem, visto que  $X^* = 0$  perdeu a sua estabilidade. Entretanto, após algumas iterações a população cresce e estabiliza-se em  $X_n = 0,5$ . Conforme mostrado na Equação 2.7, desde que  $1 < \alpha < 3$ , este ponto fixo é estável (ou atrator). De fato,

$$X^* = 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{2} = 0,5.$$

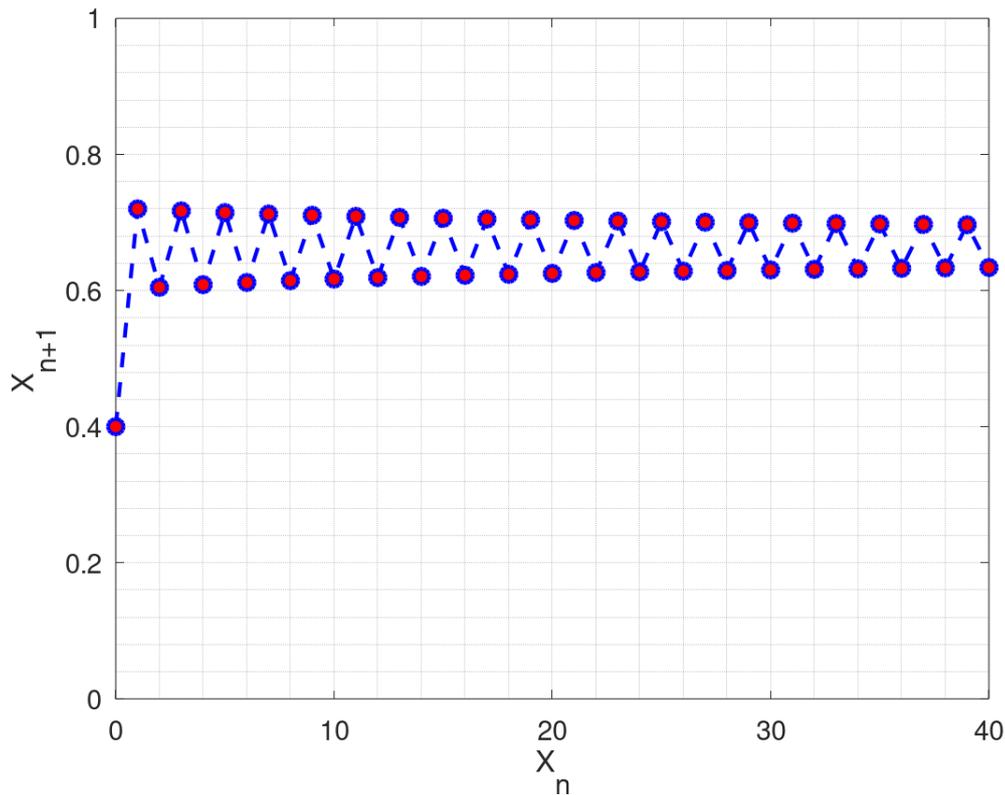
Usando a Equação 2.5, obtém-se que

$$|F'(X^*)| = |F'(0,5)| = |2 - 2 \times 2 \times 0,5| = |0| < 1$$

e, portanto, o ponto fixo é estável. Vale ressaltar que o ponto fixo não depende da condição inicial do sistema, mas unicamente de seu potencial biótico, ou seja, do parâmetro  $\alpha$ .

Analisando agora a órbita mostrada no gráfico da Figura 2.5 nota-se um fato interessante: após algumas iterações a população começa a oscilar entre dois valores apresentado periodicidade. O estado inicial é o mesmo usado anteriormente e desta vez o parâmetro  $\alpha = 3$ . Como mostra o gráfico, o ponto fixo não é mais estável, ocorrendo a primeira bifurcação local. Neste caso, a órbita é periódica de período 2, já que a população oscila entre dois valores conforme as iterações acontecem.

Figura 2.5: Órbita do mapa logístico para  $X_0 = 0,4$  e  $\alpha = 3$ . Fonte: O autor.



De fato, vejamos o que ocorre para  $\alpha = 3$ :

$$X^* = 1 - \frac{1}{3}.$$

Usando a Equação 2.5 calculamos  $F'(X^*)$ :

$$F'(X^*) = F'(1 - \frac{1}{3}) = 3 - 2 \times 3 \times (1 - \frac{1}{3}) = -1 \Rightarrow |F'(X^*)| = 1.$$

Aqui, temos um caso marginal  $|F'(X^*)| = 1$  em que não é possível fazer afirmações sobre a estabilidade local do ponto fixo utilizando o módulo da sua derivada. Para tanto, deve-se recorrer a outro método. O valor dos dois pontos em que a órbita oscila pode ser determinado iterando-se o mapa logístico duas vezes, que representaremos por  $F^2(X_n)$ , e a partir daí, pode-se determinar a sua estabilidade.

Assim,

$$\begin{aligned} F^2(X_n) &= F[F(X_n)] = \alpha F(X_n)(1 - F(X_n)) \\ \Rightarrow F^2(X_n) &= \alpha[\alpha X_n(1 - X_n)][1 - (\alpha X_n(1 - X_n))] \\ \Rightarrow F^2(X_n) &= \alpha^2 X_n(1 - X_n)[1 - (\alpha X_n(1 - X_n))] \\ \Rightarrow F^2(X_n) &= (\alpha^2 X_n - \alpha^2 X_n^2)(1 - \alpha X_n + \alpha X_n^2) \\ \Rightarrow F^2(X_n) &= \alpha^2 X_n - \alpha^3 X_n^2 + \alpha^3 X_n^3 - \alpha^2 X_n^2 + \alpha^3 X_n^3 - \alpha^3 X_n^4 \\ \Rightarrow F^2(X_n) &= -\alpha^3 X_n^4 + 2\alpha^3 X_n^3 - (\alpha^3 + \alpha^2)X_n^2 + \alpha^2 X_n \end{aligned} \quad (2.8)$$

Usando o fato que se  $X^*$  é um ponto fixo, então  $X^* = F(X^*) = F^2(X^*)$ , podemos rescrever a Equação 2.8 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} X^* &= -\alpha^3 X^{*4} + 2\alpha^3 X^{*3} - (\alpha^3 + \alpha^2)X^{*2} + \alpha^2 X^* \\ \Rightarrow -\alpha^3 X^{*4} + 2\alpha^3 X^{*3} - (\alpha^3 + \alpha^2)X^{*2} + \alpha^2 X^* - X^* &= 0 \\ \Rightarrow -\alpha^3 X^{*4} + 2\alpha^3 X^{*3} - (\alpha^3 + \alpha^2)X^{*2} + (\alpha^2 - 1)X^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

A Equação 2.9 possui quatro raízes, pois é do 4º grau, sendo cada raiz real um ponto fixo do sistema.

Uma das raízes, que denotaremos por  $X_1^*$  é a solução trivial, ou seja,  $X_1^* = 0$ . Para calcular as outras raízes, resolvemos o polinômio de terceiro grau em  $X^*$ :

$$-\alpha^3 X^{*3} + 2\alpha^3 X^{*2} - (\alpha^3 + \alpha^2)X^* + (\alpha^2 - 1) = 0 \quad (2.10)$$

Dividindo a Equação 3.17 por  $\alpha^3$  e multiplicando por  $(-1)$ , resulta

$$X^{*3} - 2X^{*2} + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) X^* + \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha}\right) = 0 \quad (2.11)$$

Usando o resultado da Equação 2.6, tem-se que  $(1 - \frac{1}{\alpha})$  é raiz da Equação 2.11, pois é ponto fixo do mapa logístico e portanto satisfaz  $F^2(X^*) = X^*$  automaticamente

(STROGATZ, 1994). Para determinar as outras raízes, fatoramos a Equação 2.11 por  $[X^* - (1 - \frac{1}{\alpha})]$  obtendo a seguinte expressão

$$\left[ X^* - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \left[ X^{*2} - \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) X^* + \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] = 0 \quad (2.12)$$

e portanto,

$$\left[ X^* - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = 0 \quad \text{ou} \quad \left[ X^{*2} - \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) X^* + \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] = 0 \quad (2.13)$$

Resolvendo o polinômio do segundo grau em (2.13), tem-se:

$$\begin{aligned} X^* &= \frac{\left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) \pm \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right)}}{2} \\ &= \frac{\left( \frac{\alpha+1}{\alpha} \right) \pm \sqrt{\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2} - 4 \left( \frac{\alpha+1}{\alpha^2} \right)}}{2} \\ &= \frac{\alpha + 1 \pm \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 4(\alpha + 1)}}{2\alpha} \\ &= \frac{\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 1 - 4\alpha - 4}}{2\alpha} \\ &= \frac{\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha - 3}}{2\alpha} \\ &= \frac{\alpha + 1 \pm \sqrt{(\alpha + 1)(\alpha - 3)}}{2\alpha} \end{aligned}$$

Portanto, as raízes da Equação 2.9, e que correspondem aos pontos fixos do sistema, são:

$$X_1^* = 0; \quad X_2^* = 1 - \frac{1}{\alpha}; \quad X_3^* = \frac{\alpha+1+\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha}; \quad X_4^* = \frac{\alpha+1-\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha}.$$

Note que a condição de existência das raízes  $X_3^*$  e  $X_4^*$  é que  $(\alpha + 1)(\alpha - 3) \geq 0$  e portanto,  $\alpha \leq -1$  ou  $\alpha \geq 3$ . A primeira condição, ou seja,  $\alpha \leq -1$ , não faz sentido para a descrição de uma população real, pois  $\alpha \in [0, 4]$  e por este motivo não será considerada (JESUS, 2016.). Neste caso interessa-nos a segunda condição  $\alpha \geq 3$ , caso em que, como mostrado anteriormente, o ponto fixo  $(1 - \frac{1}{\alpha})$  perde a sua estabilidade. Note ainda que

para  $\alpha \in [0, 3]$  as raízes  $X_3^*$  e  $X_4^*$  são complexas, o que mostra que não existem ciclos de período 2 para  $\alpha < 3$  (STROGATZ, 1994, p. 359).

Então, analisemos a estabilidade dos pontos fixos  $X_3^*$  e  $X_4^*$ . Para  $\alpha = 3$ ,

$$X_3^* = X_4^* = \frac{\alpha + 1}{2\alpha} = \frac{2}{3} = X_2^* = 1 - \frac{1}{\alpha} \quad (2.14)$$

Conforme observado por Strogatz (1994), o resultado da Equação 2.14 que denota a igualdade entre os pontos fixos  $X_2^*$ ,  $X_3^*$  e  $X_4^*$  mostra que o ciclo de período 2 se bifurca continuamente a partir do ponto fixo se  $\alpha = 3$ . A partir daí, deve-se verificar a estabilidade do ciclo de período 2 e analisar para que valor de  $\alpha$  ocorre uma nova bifurcação. Para isso, usando a regra da cadeia calculemos a derivada de  $F^2(X)$  nos pontos fixos  $X_3^*$  e  $X_4^*$ .

$$(F^2(X))' = (F(F(X)))' = F'(F(X))F'(X) \quad (2.15)$$

Como  $X_3^*$  e  $X_4^*$  são pontos fixos do mapa de período 2, satisfazem as equações  $F(X_3^*) = X_4^*$  e  $F(X_4^*) = X_3^*$ . Assim, usando a Equação 2.15, calculemos a derivada do ponto fixo  $X_3^*$ :

$$\begin{aligned} (F^2(X_3^*))' &= (F(F(X_3^*)))' = F'(X_4^*)F'(X_3^*) = (\alpha - 2\alpha X_4^*)(\alpha - 2\alpha X_3^*) \\ &= \alpha(1 - 2X_4^*)\alpha(1 - 2X_3^*) \\ &= \alpha^2(1 - 2X_4^*)(1 - 2X_3^*) \\ &= \alpha^2(1 - 2X_4^* - 2X_3^* + 4X_4^*X_3^*) \\ &= \alpha^2(1 - 2(X_4^* + X_3^*) + 4X_4^*X_3^*) \\ &= \alpha^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{\alpha+1-\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha} + \frac{\alpha+1+\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha} \right) + 4 \left( \frac{\alpha+1-\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha} \times \frac{\alpha+1+\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha} \right) \right] \\ &= \alpha^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{\alpha+1}{\alpha} \right) + 4 \left( \frac{\alpha+1}{\alpha^2} \right) \right] \\ &= \alpha^2 - 2\alpha(\alpha + 1) + 4\alpha + 4 \\ &= \alpha^2 - 2\alpha^2 - 2\alpha + 4\alpha + 4 \\ &= -\alpha^2 + 2\alpha + 4 \end{aligned} \quad (2.16)$$

O ciclo de período 2 será estável se  $|\alpha^2 - 2\alpha + 4| < 1$ . Daí, tem-se:

$$|\alpha^2 - 2\alpha + 4| < 1 \Rightarrow -1 < -\alpha^2 + 2\alpha + 4 < 1$$

$$\Rightarrow -\alpha^2 + 2\alpha + 5 > 0 \quad e \quad -\alpha^2 + 2\alpha + 3 < 0 \quad (2.17)$$

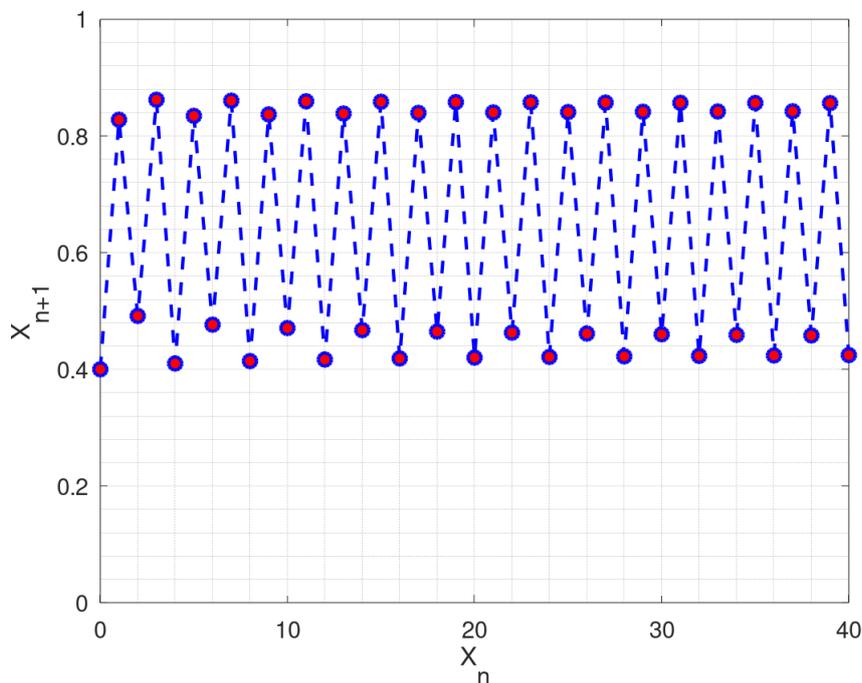
Resolvendo as inequações, obtemos:

$$\begin{aligned} -\alpha^2 + 2\alpha + 5 > 0 &\Rightarrow 1 - \sqrt{6} < \alpha < 1 + \sqrt{6} \\ -\alpha^2 + 2\alpha + 3 > 0 &\Rightarrow \alpha < -1 \text{ ou } \alpha > 3 \end{aligned}$$

Como no mapa logístico  $\alpha$  é sempre positivo, desconsideramos os intervalos em que  $\alpha < 0$  e daí, concluímos que o intervalo de estabilidade do ciclo de período 2 ocorre para  $3 < \alpha < 1 + \sqrt{6}$ . Consequentemente, quando  $\alpha = 1 + \sqrt{6}$  os pontos fixos perdem a estabilidade e ocorre nova bifurcação. O mesmo ocorre para o ponto fixo  $X_4^*$ . Portanto, a partir desse valor da taxa de crescimento, o mapa logístico passa a apresentar um ciclo de período 4.

O gráfico da Figura 2.6 apresenta uma órbita de período quatro. Isto significa que a cada quatro gerações o ciclo se repete, sempre oscilando entre os quatro valores. O período-4 ocorre quando a órbita de período 2 perde a estabilidade e cada um dos dois valores se bifurca novamente em outros dois. Este fato acontece para um valor de  $\alpha$  no limiar da estabilidade da órbita de período 2, que como foi mostrado anteriormente, corresponde ao valor  $1 + \sqrt{6}$ .

Figura 2.6: Órbita de período 4 obtida iterando o mapa logístico para  $\alpha = 1 + \sqrt{6}$ . Fonte: O autor.



Até aqui os exemplos apresentados têm tido um comportamento previsível, estabilizando em um ponto fixo atrator ou oscilando entre valores periódicos. Vejamos agora dois casos em que isto não acontece. Nas Figuras 2.7 e 2.8, observa-se dois exemplos em que o mapa logístico apresenta órbitas que não são periódicas. Na primeira figura, o parâmetro  $\alpha$  adotado é de 3,9 e na segunda tem-se  $\alpha = 4$ .

Figura 2.7: Órbita do mapa logístico para  $\alpha = 3,9$ . Fonte: O autor.

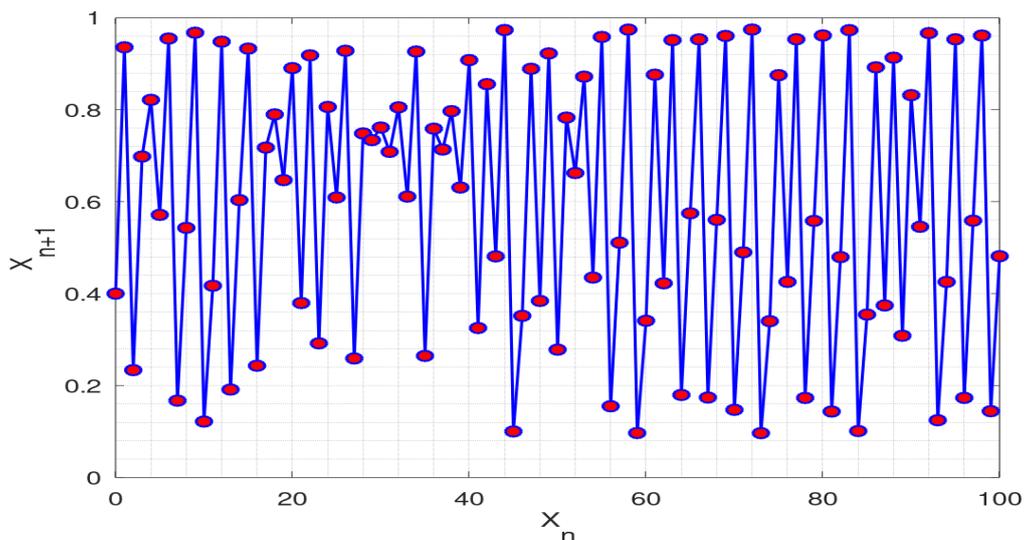
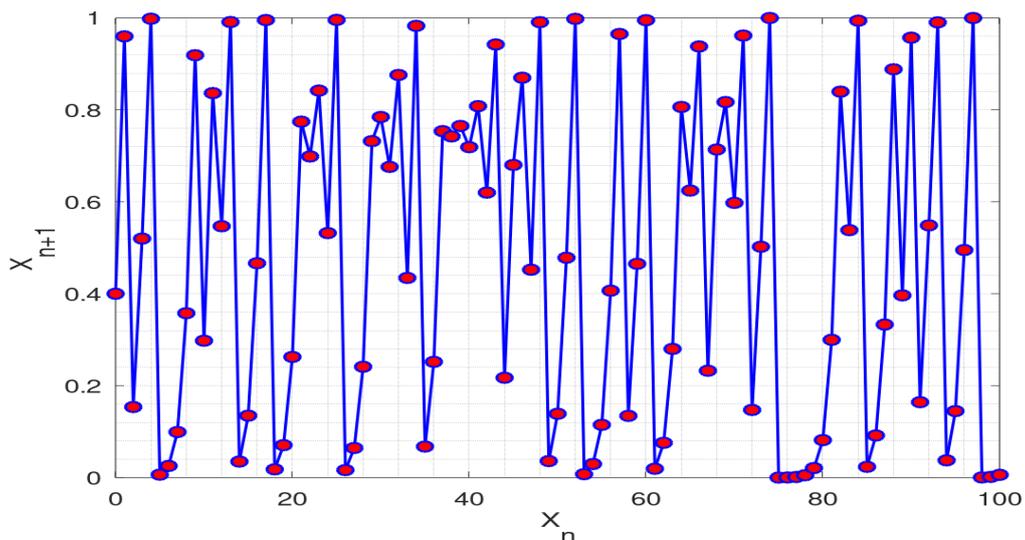


Figura 2.8: Órbita do mapa logístico para  $\alpha = 4$ . Fonte: O autor.



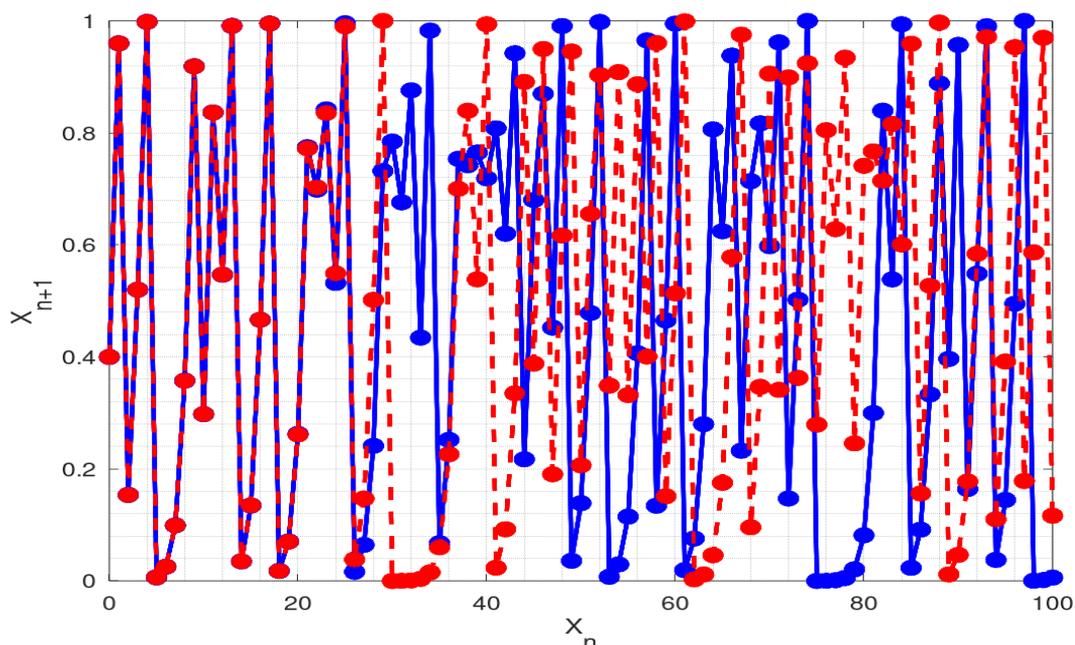
Nestes dois casos o sistema não converge para um ponto fixo, tampouco apresenta órbita periódica. Na verdade, nestes dois exemplos o comportamento do mapa é caótico, o que detalharemos no tópico a seguir.

## 2.2 O caos no mapa logístico

De acordo com o que já foi mencionado neste trabalho, a ideia de caos está associada à grande sensibilidade de um sistema dinâmico às condições iniciais. Portanto, dadas duas ou mais condições iniciais muito próximas umas das outras, um sistema caótico apresentará órbitas completamente divergentes para cada condição inicial conforme o tempo passa, por menor que seja a diferença entre seus estados iniciais.

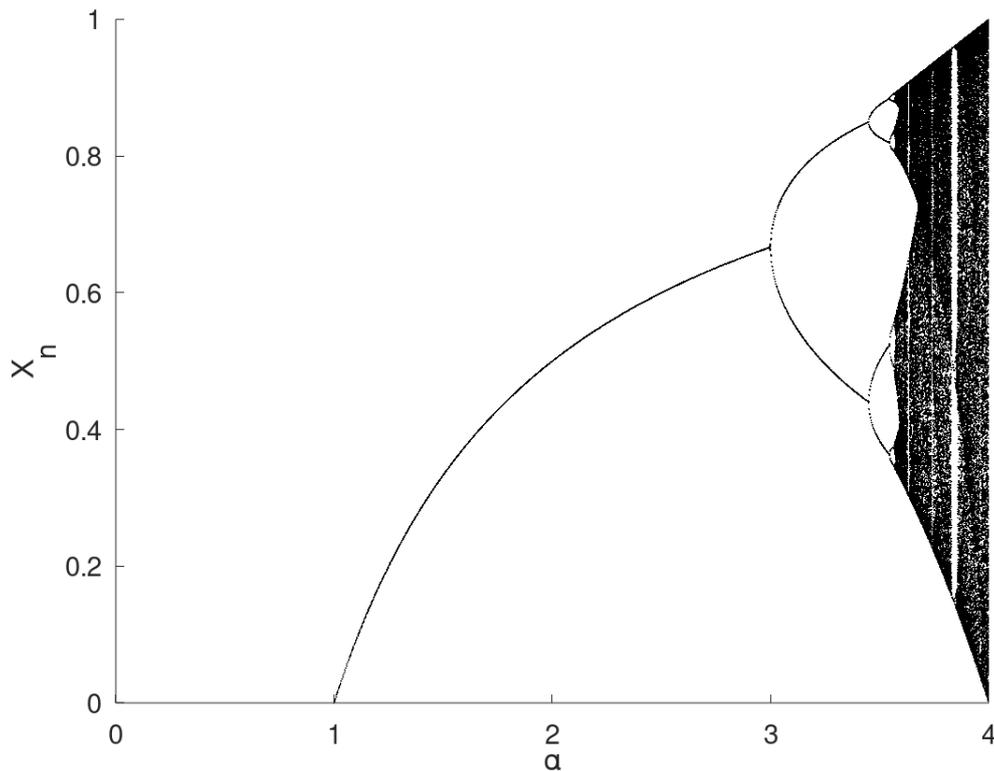
Para exemplificar, na Figura 2.9 iterou-se o mapa logístico com taxa de crescimento  $\alpha = 3,9$  e duas condições iniciais distintas, porém muito próximas. A primeira condição, representada pelos pontos e linha na cor azul foi a mesma utilizada para gerar o gráfico da Figura 2.7, ou seja,  $X_0 = 0,4$ . A segunda órbita foi gerada aplicando-se um erro da ordem de  $10^{-9}$  na condição inicial, que passou a ser  $X_{0*} = 0,399999999$ , representada pelos pontos e linha na cor vermelha. Nota-se que, inicialmente, as duas órbitas são praticamente idênticas, não havendo discrepâncias significativas nas respostas do sistema às duas entradas. Entretanto, conforme o tempo avança, observa-se que a partir da 28ª iteração as órbitas começam a apresentar valores completamente diferentes uma da outra. Isto mostra que um pequeno erro inicial é suficiente para descrever uma evolução totalmente inesperada no futuro, o que caracteriza o comportamento caótico.

Figura 2.9: Órbitas caóticas no mapa logístico. Fonte: O autor.



Uma maneira de observar como o mapa logístico se comporta em função dos valores da taxa de crescimento  $\alpha$  é por meio do seu diagrama de bifurcação, mostrado no gráfico da Figura 2.10. Utilizaremos simplesmente a expressão **mapa logístico** sempre que nos referirmos a esta representação gráfica. No eixo vertical tem-se o tamanho da população normalizada e no eixo horizontal, a taxa de crescimento  $\alpha$ .

Figura 2.10: Diagrama de bifurcação do Mapa Logístico. Fonte: O autor.



Por esta imagem é possível observar que para  $0 < \alpha < 1$ , o ponto fixo da origem é atrator, indicando que a população se extingue, conforme já mencionado nas análises feitas com base nas órbitas mostradas nas Figuras 2.2 e 2.3. Se  $1 < \alpha < 3$ , então a população estabiliza-se em um único valor, pois para este intervalo de  $\alpha$ , a origem perde a sua estabilidade e um outro ponto fixo estável surge (Ver a Figura 2.4).

Quando  $\alpha > 3$ , o mapa começa a apresentar bifurcações locais. À medida que  $\alpha$  aumenta, novas bifurcações locais vão surgindo em decorrência da perda de estabilidade dos pontos fixos que duplicam-se, surgindo assim órbitas de período 4, 8, 16, 32, e assim, sucessivamente.

Cada nova bifurcação no mapa acontece mais rapidamente em relação à anterior até chegar a um ponto em que o número de bifurcações é infinito e portanto, o atrator

passa a ser um conjunto infinito de pontos. Neste caso, não há mais periodicidade e o sistema entra em caos.

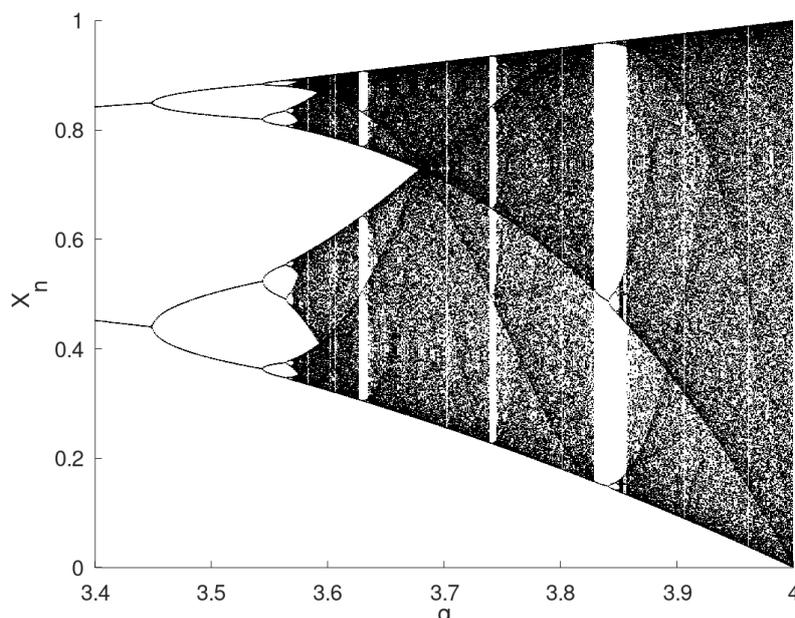
O valor de  $\alpha$  em que o caos ocorre é conhecido na literatura como *ponto de acumulação*; é indicado por  $\alpha_\infty$  e corresponde a  $\alpha_\infty = 3,569946\dots \approx 3,57$ . Tal valor numérico é determinado experimentalmente utilizando-se métodos computacionais para a sua estimativa (STROGATZ, 1994, p. 355; MAY, 1976, p. 461).

Naturalmente, um questionamento pode surgir sobre o que acontece com o mapa logístico se aumentarmos ainda mais o valor de  $\alpha$ . Intuitivamente, uma das possibilidades para esta questão é supor que uma vez que o sistema atinja o caos, permaneça caótico se o parâmetro  $\alpha$  aumentar. No próximo tópico abordaremos esta situação.

## 2.3 Janelas periódicas

Algo muito interessante e contraintuitivo acontece no mapa logístico para  $\alpha > \alpha_\infty$ . Para alguns valores específicos de  $\alpha$  ocorrem ciclos periódicos, também chamados de *janelas periódicas* que surgem em meio ao comportamento caótico do sistema. Se aproximarmos a imagem do diagrama de bifurcação (como em um zoom) será possível notar a existência de regiões esbranquiçadas e vazias, correspondendo a ciclos de período 3, 5 e etc. (Ver a Figura 2.11.)

Figura 2.11: Janelas periódicas no mapa logístico. Fonte: O autor.



Já que janelas periódicas aparecem no mapa para valores maiores do que  $\alpha_\infty$ , como então saber se uma órbita aparentemente aperiódica é caótica ou não? No próximo tópico abordaremos este problema com a aplicação dos expoentes de Lyapunov, que correspondem a um indicador do caos.

## 2.4 Expoente de Lyapunov

Conforme observado, o mapa logístico pode apresentar órbitas periódicas e aperiódicas de acordo com o valor dos parâmetros. Para que seja possível afirmar que uma dada órbita aperiódica é caótica, é necessário que o sistema apresente alta sensibilidade às condições iniciais, como já mencionado anteriormente. Deve haver, todavia, uma maneira de medir-se o quanto o sistema é sensível às condições iniciais e por meio desta afirmar se ele tem comportamento caótico ou não. Isto pode ser feito utilizando-se a técnica de **linearização** (Ver Strogatz, 1994.) ou então por meio dos **expoentes de Lyapunov**, que definiremos a seguir.

**Definição 2.4.1.** *Considere uma condição inicial  $X_0$  e um ponto  $X_0 + \delta_0$  na vizinhança de  $X_0$ , tal que  $\delta_0$  seja tão pequeno quanto se queira. Seja  $\delta_n$  a separação após  $n$  iterações. Tomando  $|\delta_n| \approx |\delta_0|e^{n\lambda}$ , então  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov.*

**Observação 2.4.1.** *O sinal do expoente de Lyapunov, indica se o sistema se comporta de forma caótica ou não. Se  $\lambda > 0$  o sistema é caótico. Se  $\lambda < 0$  o sistema é periódico e se  $\lambda = 0$  o sistema é dito quase periódico.*

$$|\delta_n| \approx |\delta_0|e^{n\lambda} \Rightarrow e^{n\lambda} = \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right|$$

Usando propriedades de logaritmos, obtem-se:

$$\ln e^{n\lambda} = \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \Rightarrow n\lambda = \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \Rightarrow \lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right|$$

Perceba que pela Definição 2.4.1,  $\delta_n = f^n(X_0 + \delta_0) - f^n(X_0)$  e, portanto, o expoente de Lyapunov é dado por

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(X_0 + \delta_0) - f^n(X_0)}{\delta_0} \right| \quad (2.18)$$

Como por hipótese  $\delta_0$  pode ser infinitamente pequeno, fazemos  $\delta_0 \rightarrow 0$  e daí, a Equação 2.18 torna-se

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \lim_{\delta_0 \rightarrow 0} \frac{f^n(X_0 + \delta_0) - f^n(X_0)}{\delta_0} \right| \Rightarrow \lambda \approx \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(X_0)| \quad (2.19)$$

Conforme Strogatz (1994), o logaritmando da Equação 2.19 pode ser expandido utilizando-se a regra da cadeia para derivadas, resultando na seguinte notação:

$$(f^n)'(X_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(X_i) \quad (2.20)$$

Substituindo a Equação 2.20 na Equação 2.19 e usando as propriedades de logaritmos, temos:

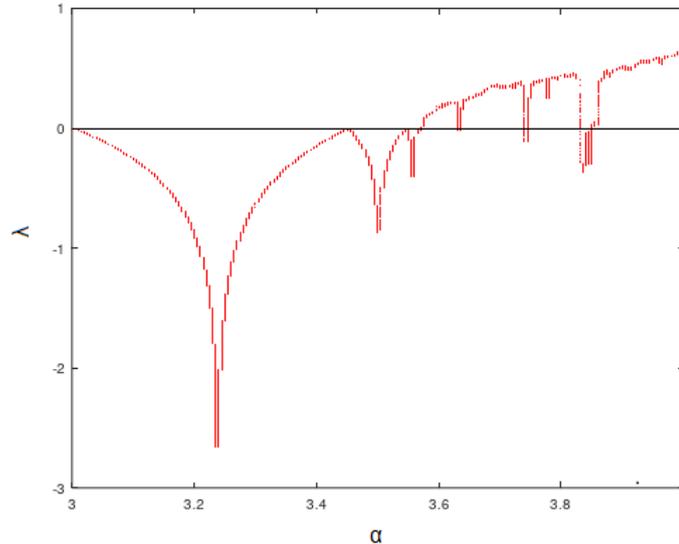
$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(X_i) \right| \Rightarrow \lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(X_i)| \quad (2.21)$$

Se existir o limite da Equação 2.21 quando  $n \rightarrow \infty$ , então este limite será o expoente de Lyapunov da órbita gerada a partir da condição inicial  $X_0$ , ou seja:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(X_i)| \right\} \quad (2.22)$$

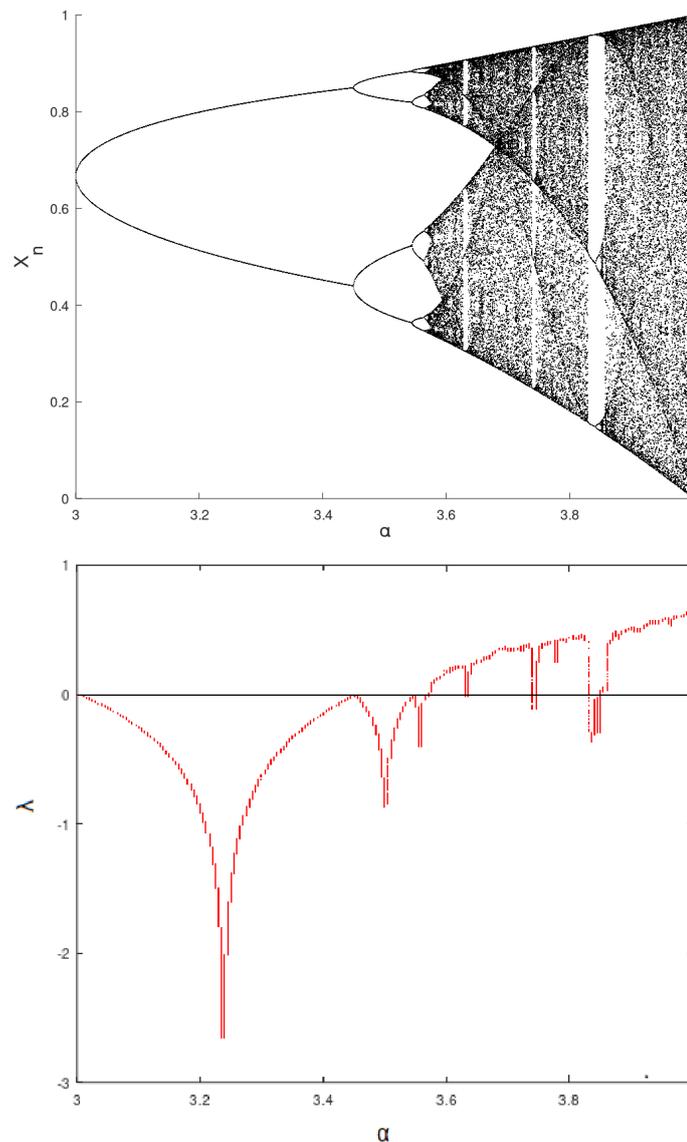
O espectro do expoente de Lyapunov está representado na Figura 2.12 para valores de  $\alpha$  entre 3 e 4. Se  $\alpha < 3$  o sinal do expoente é sempre negativo, pois a órbita é convergente para o ponto fixo atrator.

Figura 2.12: Espectro do expoente de Lyapunov para o mapa logístico. Fonte: O autor.



Na Figura 2.13, temos na parte superior o espectro do expoente de Lyapunov e na parte inferior o diagrama de bifurcação do mapa logístico onde é possível observar que sempre que o expoente de Lyapunov for positivo, o mapa é caótico e na direção das janelas periódicas, o expoente de Lyapunov é negativo. Como mostrado na figura, o sinal do expoente de Lyapunov permanece negativo enquanto o mapa logístico for periódico. A partir de  $\alpha > \alpha_\infty$  que corresponde a  $\alpha_\infty \approx 3,57$  o sinal fica positivo, indicando o início do caos. Conforme o valor de  $\alpha$  aumenta, observa-se a ocorrência de algumas quedas bruscas no valor de  $\lambda$ , que passa a ser momentaneamente negativo, correspondendo às janelas periódicas que aparecem em meio ao caos.

Figura 2.13: Espectro do expoente de Lyapunov sobreposto ao diagrama de bifurcação do mapa logístico. Fonte: O autor.



Nestas simulações do expoente de Lyapunov temos no gráfico um pouco do comportamento transiente, o que pode ser "filtrado" aumentando-se consideravelmente o número de iterações para cada valor de  $\alpha$ , por exemplo, 10.000 ou 100.000 iterações. Este melhoramento do algoritmo exige contudo um aumento significativo no esforço computacional, o que aumenta em muito o tempo para a geração do espectro.

### 2.4.1 Cálculo do expoente de Lyapunov

O cálculo do expoente de Lyapunov para a maioria dos sistemas dinâmicos, nem sempre é possível analiticamente, sendo muito comum recorrer-se a métodos numéricos e recursos computacionais para a sua estimação. Para isso podem ser desenvolvidos algoritmos em linguagens de programação como C, C++, Python, e etc. Dentre os softwares mais difundidos para este tipo de aplicação estão o MATLAB e o Octave. Para exemplificar, a seguir estimamos o expoente de Lyapunov referente a três órbitas do mapa logístico, duas já apresentadas anteriormente nas figuras 2.5 e 2.7 e outra mostrada na Figura 2.15 que corresponde a uma janela periódica em que  $\alpha = 3.82999$ . Foi utilizado o software Octave para a estimação do expoente de Lyapunov destes exemplos e na Figura 2.14 tem-se o algoritmo desenvolvido.

Figura 2.14: Algoritmo para a estimação do expoente de Lyapunov do mapa logístico.

Fonte: O autor.

```

1 clear all
2 clc
3 X(1) = input ('População inicial (entre 0 e 1): ');
4 r = input ('Taxa de crescimento r: ');
5 n = input ('Numero de iterações n: ');
6 for i=1:n
7     X(i+1)=r*X(i)*(1-X(i))
8     dX(1)=r-2*r*X(1);
9     dX(i+1)=r-2*r*X(i+1)
10    l(1)=log(abs(dX(1)));
11    l(i+1)=log(abs(dX(i+1)))
12    z=sum(l)*(1/n)
13 end

```

**Exemplo 2.4.1.** Estimar o expoente de Lyapunov da órbita apresentada no gráfico da Figura 2.5.

A população inicial é  $X_0 = 0,4$  e o parâmetro  $\alpha = 3$ . Portanto, para essa órbita o

mapa fica da forma  $X_{n+1} = 3X_n(1 - X_n)$ . Escolhemos  $n = 10000$ , o que significa que o algoritmo irá fazer 10000 iterações, o que exigirá um considerável esforço computacional, visto que a complexidade do algoritmo é exponencial.

Após o programa rodar, o valor estimado do expoente de Lyapunov da órbita é  $\lambda = -0,0010050$ , o que mostra que, como já esperado, o comportamento não é caótico haja vista que  $\lambda < 0$ .

**Exemplo 2.4.2.** *Estimar o expoente de Lyapunov da órbita apresentada no gráfico da Figura 2.7.*

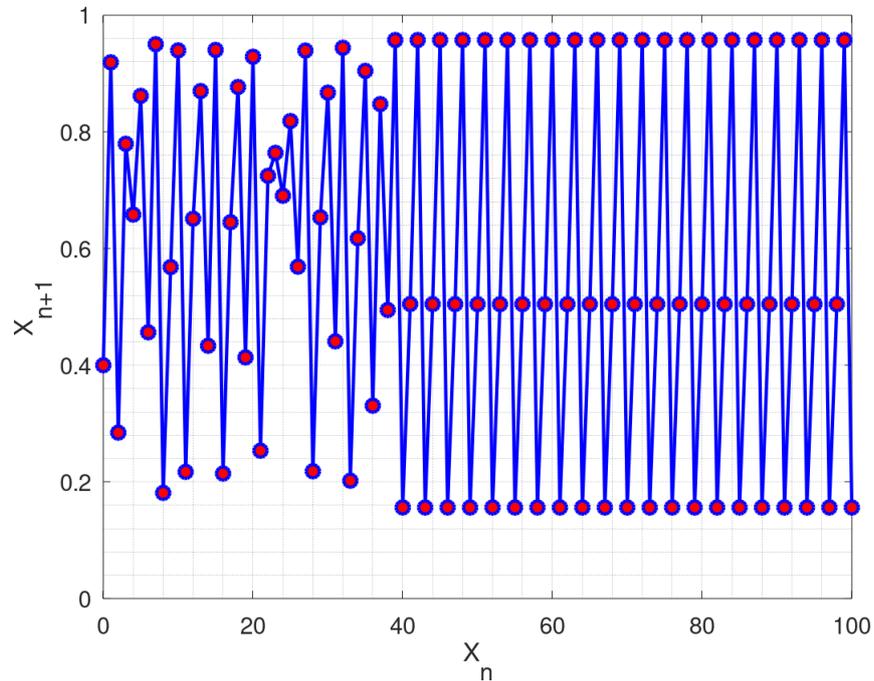
Para este exemplo, mantém-se o valor do estado inicial do exemplo anterior, ou seja,  $X_0 = 0,4$  e  $\alpha = 3,9$ . Assim, a equação resulta em  $X_{n+1} = 3,9X_n(1 - X_n)$ . Novamente escolhemos  $n = 10000$  e rodamos o programa. O expoente de Lyapunov estimado é  $\lambda = 0,50121$ . Como neste caso  $\lambda > 0$ , o comportamento é caótico.

**Exemplo 2.4.3.** *Estimar o expoente de Lyapunov do mapa logístico para a condição inicial  $X_0 = 0,4$  e taxa de crescimento  $\alpha = 3,82999$ .*

Nesta situação o sistema é dado por  $X_{n+1} = 3,82999X_n(1 - X_n)$  e sua órbita está representada no gráfico da Figura 2.15. Analisando o gráfico, percebe-se que após algumas iterações o mapa torna-se cíclico de período 3. Portanto, conjecturamos que para este valor de  $\alpha$  o sistema deve estar evoluindo em uma janela periódica, já que  $\alpha > \alpha_\infty$ .

Após executar o algoritmo, obtivemos a estimação do expoente de Lyapunov da órbita que é igual a  $-0,36417$ . Conseqüentemente, conclui-se que o comportamento não é caótico, pois  $\lambda < 0$  e, portanto, este valor corresponde a uma janela periódica.

Figura 2.15: Janela periódica quando  $\alpha = 3,82999$ . Fonte: O autor.



Com o exposto até aqui, pode-se perceber que sistemas relativamente simples, como é o caso do Mapa Logístico, podem apresentar comportamentos complexos. As aplicações do mapa logístico são inúmeras e vão desde o estudo de dinâmica populacional, circuitos elétricos e microeletrônica, mecânica, economia e muitas outras.

No próximo capítulo, será estudado o sistema de Lorenz que, diferentemente do mapa logístico, trata-se de um sistema dinâmico de tempo contínuo composto por três equações diferenciais e que possui propriedades interessantes e também pode evoluir para o caos.

## 3 O SISTEMA DE LORENZ

”Pode o bater das asas de uma borboleta causar um tornado no Texas?”. Esta é uma famosa frase que está listada entre os acontecimentos que deram origem à conhecida expressão *efeito borboleta*, que tem tudo a ver com a teoria do caos e com o conteúdo deste capítulo.

Em 1963 um meteorologista do MIT<sup>1</sup> publicou um artigo sobre hidrodinâmica intitulado *Fluxo Determinístico Não-periódico* em um jornal chamado Journal of the Atmospheric Sciences, um periódico dos Estados Unidos; seu nome era Edward N. Lorenz (1917 - 2008), um matemático e meteorologista norte-americano. O objeto de estudo do trabalho de Lorenz era um sistema de equações diferenciais que poderia ser utilizado como um modelo ideal, isto é, simplificado, para estudos envolvendo fluxos forçados de camadas de convecção atmosféricas (STROGATZ, 1994, p. 301, LORENZ, 1962, p. 130).

Lorenz observou que para certos valores dos parâmetros o sistema era altamente sensível às condições iniciais, de maneira que uma diferença mínima em duas condições iniciais resultavam em trajetórias totalmente divergentes, o que sugeriu que o clima é caótico e conseqüentemente, não é possível fazer-se previsões com exatidão a longo prazo. Neste contexto surgiu a expressão *efeito borboleta*, ou seja, ela remete à ideia de que até mesmo a interferência das asas de uma borboleta no ar, por mais insignificante que possa parecer, poderia desencadear um ciclone ou um tornado do outro lado do mundo, por exemplo.

O sistema posteriormente ficou conhecido como **Sistema de Lorenz** e possui grande aplicabilidade e relevância dentro da teoria de sistemas dinâmicos, não limitando-se apenas a estudos atmosféricos, mas a outras aplicações também, como por exemplo em engenharia, telecomunicações, economia, biologia, e muitas outras, especialmente nos estudos mais recentes sobre a Teoria do Caos como veremos nos tópicos a seguir.

---

<sup>1</sup>Massachusetts Institute of Technology.

## 3.1 Sistema de Lorenz

**Definição 3.1.1.** *O Sistema de Lorenz (ou equações de Lorenz) é um sistema de equações diferenciais dado por*

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

em que  $\sigma, r, b$  são números reais positivos chamados de **parâmetros**, sendo  $\sigma$  o número de Prandtl e  $r$  é o número de Rayleigh. O parâmetro  $b$  não possui um nome específico e é dado de acordo com certas características do problema em cada caso.

As equações de Lorenz formam um sistema não linear, pois apresentam duas não-linearidades:  $xy$  e  $xz$ . Vejamos a seguir algumas propriedades e características importantes deste sistema.

## 3.2 Propriedades do sistema de Lorenz

O sistema de Lorenz possui certas propriedades que resultam em resultados importantes sobre o comportamento do sistema. A seguir serão destacadas duas dessas propriedades, a saber: a simetria das soluções em  $x$  e  $y$  e a contração dos volumes no espaço de estados.

### 3.2.1 i. Simetria das soluções em $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ .

Esta propriedade nos diz que se o sistema possui uma solução  $(x(t), y(t), z(t))$ , então  $(-x(t), -y(t), z(t))$  também é uma solução. Note que, substituindo  $x$  e  $y$  nas equações diferenciais do sistema por  $-x$  e  $-y$ , obtém-se:

$$-\dot{x} = \sigma(-y - (-x)) = \sigma(x - y) = -\sigma(y - x) \Rightarrow \dot{x} = \sigma(y - x);$$

$$-\dot{y} = r(-x) - (-y) - (-x)z = -rx + y + xz = -(rx - y - xz) \Rightarrow \dot{y} = rx - y - xz;$$

$$\dot{z} = (-x)(-y) - bz = xy - bz.$$

Como pode-se perceber,  $\dot{x}$  inverte o seu sinal assim como  $\sigma(y - x)$ ;  $\dot{y}$  também tem o seu sinal invertido da mesma forma que  $(rx - y - xz)$  e, além disso,  $\dot{z}$  não altera o seu sinal. Consequentemente, para toda solução  $(x(t), y(t), z(t))$  haverá outra simétrica dada por  $(-x(t), -y(t), z(t))$ .

### 3.2.2 ii. Contração do volume no espaço de estados

Antes de explicar o significado da propriedade (ii) vamos definir alguns conceitos importantes para a sua compreensão.

Os sistemas dinâmicos podem ser **conservativos**, **dissipativos** ou **expansivos** dependendo de como a energia do sistema evolui, ou seja, se ela é conservada, dissipada, ou ainda absorvida pelo sistema. Uma maneira de saber se um sistema é dissipativo ou conservativo, é pelo cálculo do divergente de um campo vetorial característico do sistema. Por não ser o objetivo deste trabalho, não será feito aqui um estudo aprofundado sobre elementos da teoria de espaços e campos vetoriais. Tais conceitos podem ser encontrados em Hoffman (1971), Boldrini *et. al.* (1980), Stewart (2007), Leithold (1994) e Guidorizzi (2013). No apêndice A estão definidos o operador diferencial  $\vec{\nabla}$ , o divergente de um campo vetorial além do teorema da divergência, que será usado para mostrar a propriedade da contração do volume do sistema de Lorenz.

Feitas estas considerações, pode-se retornar ao enunciado da propriedade para compreendê-la. Esta nos diz que dado um volume definido no espaço de estados, este se contrai, à medida que o sistema evolui no tempo, o que significa que o sistema de Lorenz é **dissipativo**.

Para mostrar que isto acontece, considere uma superfície fechada  $S(t)$  cujo volume é  $V(t)$  tomada arbitrariamente no espaço de estados. Considere também que os pontos de  $S$  são condições iniciais para trajetórias do sistema. Fazendo o sistema evoluir por um instante infinitesimal de tempo  $dt$ , a superfície  $S(t)$  evolui para  $S(t + dt)$ . Aqui faz-se necessário calcular o volume desta nova superfície, i.e.,  $V(t + dt)$ .

Então, seja  $\vec{n}$  a normal à superfície  $S$  e  $\vec{f}$  a velocidade instantânea dos pontos de  $S$ , tem-se que o produto escalar  $\vec{f} \cdot \vec{n}$  corresponde à componente normal da velocidade. Portanto, no tempo  $dt$  uma área infinitesimal  $dA$  gera um volume infinitesimal dado por  $(\vec{f} \cdot \vec{n} dt) dA$ . Logo, o volume total decorrido o tempo  $dt$  é igual a

$$V(t + dt) = V(t) + (\text{somatório de todos os volumes infinitesimais na superfície } dA).$$

Assim, reescrevendo  $V(t + dt)$  na forma de integral de superfície, tem-se:

$$\begin{aligned}
V(t + dt) &= V(t) + \iint_S (\vec{f} \cdot \vec{n} dt) dA \\
V(t + dt) - V(t) &= \iint_S (\vec{f} \cdot \vec{n} dt) dA \\
\frac{V(t + dt) - V(t)}{dt} &= \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dA.
\end{aligned}$$

Notando que  $\frac{V(t + dt) - V(t)}{dt} = \dot{V}$ , tem-se que  $\dot{V} = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} dA$  e, usando o teorema da divergência, resulta que

$$\dot{V} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV. \quad (3.1)$$

Para o sistema de Lorenz,  $\vec{f} = (\sigma(y - x), rx - y - xz, xy - bz)$  e portanto, o divergente é dado por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} [\sigma(y - x)] + \frac{\partial}{\partial y} [rx - y - xz] + \frac{\partial}{\partial z} [xy - bz] \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = -\sigma - 1 - b. \quad (3.3)$$

Como os parâmetros  $\sigma, r, b > 0$ , segue da Equação 3.3, que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} < 0$  e consequentemente, pela Definição 4.3.3 (Ver o Apêndice 4) o sistema de Lorenz é dissipativo.

Como a divergência do campo é constante, então a Equação 3.1 resulta em

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV \\
&= \iiint_V (-\sigma - 1 - b) dV \\
&= (-\sigma - 1 - b) \iiint_V dV \\
&= (-\sigma - 1 - b)V.
\end{aligned}$$

Separando as variáveis e resolvendo a equação diferencial  $\dot{V} = (-\sigma - 1 - b)V$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (-\sigma - 1 - b)V \\ \Rightarrow \frac{dV}{V} &= (-\sigma - 1 - b)dt.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Integrando ambos os membros da Equação 3.4, resulta que

$$\begin{aligned}\int \frac{dV}{V} &= \int (-\sigma - 1 - b)dt \\ \Rightarrow \ln V &= (-\sigma - 1 - b)t + k, \quad k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow V(t) &= e^{(-\sigma - 1 - b)t + k} \\ \Rightarrow V(t) &= e^{(-\sigma - 1 - b)t} \cdot e^k \\ \Rightarrow V(t) &= e^{-(\sigma + 1 + b)t} \cdot e^k\end{aligned}$$

Para  $t = 0$ ,  $V(0) = e^k$ . Portanto, a solução é

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma + 1 + b)t}.\tag{3.5}$$

A Equação 3.5 mostra que o volume no espaço de estados converge exponencialmente para zero no sistema de Lorenz à medida que o tempo avança. De fato, analisando o limite do fator exponencial quando  $t \rightarrow +\infty$ , resulta que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\sigma + 1 + b)t} = 0\tag{3.6}$$

e conseqüentemente,  $V(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

A propriedade da contração do volume do sistema de Lorenz é comparada por Strogatz (1994, p. 313) com o que ocorre com um balão inflado do qual o ar é sugado de seu interior: imaginando que o volume  $V(0)$ , correspondente às condições iniciais do sistema, seja tal balão cheio de ar, à medida que o tempo passa e o ar é expelido do balão, o seu volume diminui.

O mesmo acontece com qualquer volume que represente uma condição inicial para o sistema de Lorenz: todas as trajetórias convergem para um conjunto limitante cujo volume é zero. Tais conjuntos podem consistir de pontos fixos, ciclos limites ou um

atrator estranho (STROGATZ, 1994).

Na próxima seção serão abordadas algumas considerações sobre pontos fixos no sistema de Lorenz.

### 3.3 Pontos fixos do sistema de Lorenz

Para determinar pontos fixos no sistema de Lorenz vamos lembrar, dos capítulos anteriores, que um ponto fixo representa um estado em que o sistema não varia desde que o atinja e, conseqüentemente, como não há variação alguma, as derivadas no ponto fixo devem ser iguais a zero, já que um dos significados físicos da derivada é a taxa de variação de uma grandeza no tempo.

Com base nesta ideia, vamos resolver o sistema igualando as diferenciais a zero:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \sigma(y - x) = 0; \quad (1)$$

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow rx - y - xz = 0; \quad (2)$$

$$\dot{z} = 0 \Rightarrow xy - bz = 0. \quad (3)$$

Notemos que a origem  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  é uma solução trivial de (1), (2) e (3) quaisquer que sejam os valores dos parâmetros  $\sigma$ ,  $b$  e  $r$ . Conseqüentemente, a origem é sempre um ponto fixo do sistema de Lorenz. Vejamos então a existência de outros pontos fixos situados fora da origem.

De (1), resulta que

$$\sigma(y - x) = 0 \Rightarrow y = x. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.7) em (2), temos:

$$rx - y - xz = 0 \Rightarrow rx - x - xz = 0 \Rightarrow xz = rx - x = (r - 1)x \Rightarrow z = r - 1. \quad (3.8)$$

Fazendo a substituição de (3.7) e (3.8) em (3), tem-se que

$$xy - bz = 0 \Rightarrow x^2 - b(r - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{b(r - 1)}, \quad r > 1. \quad (3.9)$$

De maneira análoga e fazendo as mesmas substituições em (3), segue que

$$y = \pm \sqrt{b(r-1)}, \quad r > 1. \quad (3.10)$$

Assim, os pontos fixos  $(x^*, y^*, z^*)$  do sistema de Lorenz correspondem à origem  $(0, 0, 0)$  para quaisquer valores dos parâmetros e, se  $r > 1$ , surgem outros dois pontos fixos:  $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$  e  $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ , chamados por Lorenz de  $C^+$  e  $C^-$  (STROGATZ, 1994, p. 314), notação que utilizaremos neste trabalho.

No capítulo anterior, foi feito um estudo sobre a estabilidade dos pontos fixos do mapa logístico para diferentes valores da taxa de crescimento  $\alpha$ . Analogamente, é necessária uma análise sobre a estabilidade dos pontos fixos do sistema de Lorenz, com o objetivo de entender o comportamento das trajetórias de acordo com os valores dos parâmetros  $\sigma$ ,  $b$  e  $r$ . Isto será feito no tópico a seguir.

### 3.4 Estabilidade dos pontos fixos do sistema de Lorenz

A estabilidade em torno de um ponto de um sistema dinâmico pode ser estudada utilizando-se diversas técnicas. Dentre estas, para o sistema que está sendo discutido neste capítulo, o estudo será feito a partir da linearização do sistema e com o auxílio de uma função de Lyapunov.

A linearização fornece a estabilidade local do ponto, pois apresenta boas aproximações para valores muito próximos do ponto em questão, baseando-se na inclinação da reta tangente à curva no ponto dado. Por outro lado, uma função de Lyapunov mostra a estabilidade global do ponto, sendo uma abordagem mais abrangente.

Para melhor compreensão do que será desenvolvido a seguir sugerimos que o leitor revise alguns conhecimentos prévios de álgebra linear, sobretudo aqueles relacionados às propriedades de matrizes e determinantes, bem como de sistemas lineares. Além disso, é necessária uma revisão dos sistemas de equações diferenciais lineares, em que aplicam-se os conceitos de autovalores e autovetores, estudados na teoria de matrizes e espaços vetoriais. Como estes são temas extensos e não fazem parte do objetivo desta dissertação, deixamos algumas referências onde todos esses tópicos podem ser revisados. Tais referências estão

em Hoffman (1971), Boldrini *et. al.* (1980) e Boyce e Diprima (1999).

### 3.4.1 Estabilidade da origem

Para estudar a estabilidade dos pontos fixos do sistema de Lorenz, é necessário analisar caso a caso. Primeiramente, será estudando o ponto fixo da origem, ou seja,  $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$  e depois os outros pontos. Para linearizar a origem, deve-se desconsiderar os termos não lineares do sistema de Lorenz, resultando no sistema reduzido

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y \\ \dot{z} &= -bz\end{aligned}$$

Note que  $\dot{z}$  só depende de  $z$  e a sua solução é  $z(t) = z(0)e^{-bt}$ , o que mostra que a direção  $z$  tende exponencialmente para 0 conforme  $t$  aumenta. Vejamos então o comportamento do sistema em relação às direções  $x$  e  $y$ . Para isso, devemos analisar o sistema resultante:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= rx - y.\end{aligned}$$

Reescrevendo-o na forma matricial obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz  $A$  dos coeficientes do sistema é  $T(A) = -\sigma - 1 = -(\sigma + 1)$  e, portanto,  $T(A) < 0$ . Além disso, o seu determinante é  $\det A = \sigma - r\sigma = \sigma(1 - r)$ . Para  $r > 1$  tem-se  $\det A < 0$  e portanto, a origem é um ponto de sela. De fato, calculemos os autovalores da matriz  $A$  dos coeficientes. Pela Definição 4.5.2 (Ver o Apêndice 4), o seu polinômio característico é dado por

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma \\ r & -1 - \lambda \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P(\lambda) &= (-\sigma - \lambda)(-1 - \lambda) - r\sigma \\
&= \sigma + \sigma\lambda + \lambda + \lambda^2 - r\sigma \\
&= \lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + (1 - r)\sigma
\end{aligned}$$

Para determinar os autovalores, devemos calcular as raízes de  $P(\lambda)$  (Ver a Observação 4.5.1 no Apêndice 4.). Assim, devemos resolver a equação

$$\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + (1 - r)\sigma = 0 \quad (3.12)$$

que nos dá

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2} \\
&= \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{\sigma^2 + 2\sigma + 1 - 4\sigma + 4\sigma r}}{2} \\
&= \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{\sigma^2 - 2\sigma + 1 + 4\sigma r}}{2} \\
&= \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}}{2}.
\end{aligned}$$

Note que  $(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r > 0$ , o que implica que  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Para analisar o sinal dos autovalores retomemos a Equação 3.12:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2} \\
&= \frac{-(\sigma + 1)}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2} \\
&= \frac{-(\sigma + 1)}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma + 1)^2}{4} - \frac{4\sigma(1 - r)}{4}} \\
&= \frac{-(\sigma + 1)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma + 1}{2}\right)^2 - \sigma(1 - r)} \\
&= \frac{T(A)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{T(A)}{2}\right)^2 - \det A}.
\end{aligned}$$

Como para  $r > 1$  o determinante da matriz  $A$  é negativo, a expressão dentro da raiz é maior do que 0. Além disso, nestas condições

$$\sqrt{\left(\frac{T(A)}{2}\right)^2 - \det A} > \left|\frac{T(A)}{2}\right| \quad (3.13)$$

e, conseqüentemente,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm sinais contrários, sendo um deles positivo e o outro negativo. Assim, a cada um desses dois autovalores, correspondem dois autovetores linearmente independentes que definem duas direções no espaço de estados em que o sistema de Lorenz evolui sobre duas retas, cuja direção é dada pelos autovetores mencionados.

Ao autovalor positivo, corresponde um comportamento em que o sistema se afasta da origem na direção da reta associada ao autovetor correspondente e ao autovalor negativo, ocorre o contrário, ou seja, o sistema se aproxima da origem seguindo a direção dada pela reta direcionada pelo outro autovetor. Portanto, temos duas direções: uma repelindo o sistema para fora da origem e outra atraindo-o para ela. Este comportamento caracteriza a origem como um *ponto de sela*.

Vejam agora o que acontece caso tenhamos  $r < 1$ . Neste caso  $\det A > 0$  e a expressão

$$\sqrt{\left(\frac{T(A)}{2}\right)^2 - \det A}$$

pode ser positiva, negativa, ou igual a zero. Assim, podemos ter dois autovalores reais e diferentes, porém com o mesmo sinal do traço da matriz  $A$ , um par conjugado de autovalores complexos ou ainda dois autovalores reais e iguais.

Como já visto anteriormente,  $T(A) < 0$ . Conseqüentemente, os autovalores serão reais e negativos, o que indica que ambas as retas dadas pelas direções dos autovetores associados a cada autovalor são trajetórias atraídas pela origem. Assim, qualquer trajetória no espaço de estados é atraída também, o que mostra que a origem neste caso é um ponto classificado como *sumidouro*. De acordo com o que foi visto na análise da Equação 3.12, para o sistema de Lorenz a expressão dentro do radical da Equação 3.13 é sempre positiva, o que nos leva a concluir que a origem é um *nó estável* para  $r < 1$ .

Notemos que até aqui a prova da estabilidade da origem serve apenas para condições iniciais muito próximas dela. Esta é uma limitação do método de linearização utilizado, pois se a condição inicial estiver muito afastada do ponto crítico, não se pode aproximar o sistema por outro que seja linear, justamente pelo fato de que as trajetórias podem estar muito distantes da do ponto crítico e, devido ao comportamento não linear do sistema, sabe-se que as ferramentas para sistemas lineares não se aplicam.

Para verificar o que ocorre se a condição inicial estiver distante da origem, deve-se estudar a estabilidade global do ponto crítico, o que pode ser feito utilizando uma *função de Lyapunov*.

### 3.4.2 Função de Lyapunov

O estudo da teoria da estabilidade dos sistemas dinâmicos teve grandes contribuições do matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857 - 1918), sendo seus resultados aplicados atualmente em muitos campos do conhecimento, como por exemplo na engenharia de controle, na robótica e também na análise de sistemas dinâmicos caóticos.

No capítulo anterior, aplicamos os expoentes de Lyapunov para identificar quando uma órbita do mapa logístico é caótica ou não. Agora o que faremos é utilizar uma função de Lyapunov para verificar a estabilidade global da origem no sistema de Lorenz.

**Definição 3.4.1.** *Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio e  $V(x)$  uma função com as seguintes propriedades:*

(a)  $V(x)$  e todas as suas derivadas parciais são definidas e contínuas, ou seja,  $V$  é de classe  $C^1$ ;

(b)  $V(x^*) = 0$ ;

(c)  $V(x) > 0$ , para todo  $x \neq x^*$ ;

(d)  $\dot{V} < 0$ , para todo  $x \neq x^*$ .

*Se a função  $V$  existir, ela será chamada **função de Lyapunov** e o ponto de equilíbrio  $x^*$  será globalmente estável.*

Como destaca Strogatz (1994, p. 201), não existe uma maneira sistemática para encontrar-se uma função de Lyapunov, o que pode ser feito por tentativas. Para o estudo da estabilidade da origem no sistema de Lorenz usaremos a função de Lyapunov sugerida pelo autor que descreve o elipsoide

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2. \quad (3.14)$$

Calculemos a derivada  $\dot{V}$  de  $V(x, y, z)$  como segue:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{\sigma}2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} \\ &= 2 \left( \frac{1}{\sigma}x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \right) \end{aligned}$$

Substituindo  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$  de acordo com o sistema de Lorenz, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\dot{V} &= \frac{1}{\sigma}x\sigma(y-x) + y(rx-y-xz) + z(xy-bz) \\
 &= xy - x^2 + rxy - y^2 - xyz + xyz - bz^2 \\
 &= xy - x^2 + rxy - y^2 - bz^2 \\
 &= (r+1)xy - x^2 - y^2 - bz^2.
 \end{aligned}$$

Fazendo o completamento de quadrados nos dois primeiros termos, resulta:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\dot{V} &= (r+1)xy - x^2 - y^2 - bz^2 + \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 y^2 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 y^2 \\
 &= \left[-x^2 + (r+1)xy - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 y^2\right] - y^2 + \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 y^2 - bz^2 \\
 &= -\left[x^2 - (r+1)xy + \left(\frac{r+1}{2}\right)^2 y^2\right] - \left[1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right] y^2 - bz^2 \\
 &= -\left[x - \left(\frac{r+1}{2}\right)y\right]^2 - \left[1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right] y^2 - bz^2.
 \end{aligned}$$

Se  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , então  $\dot{V} = 0$  o que já era esperado, pois como sabemos, a origem é um ponto fixo do sistema. Note que para  $r < 1$  e  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , temos  $\left[1 - \left(\frac{r+1}{2}\right)^2\right] > 0$  e conseqüentemente,  $\dot{V} \leq 0$ , pois  $\dot{V}$  é uma subtração de quadrados e, além disso, por definição do sistema de Lorenz,  $b$  é um número real positivo.

Para mostrar a estabilidade global da origem, devemos provar que a igualdade só acontece na origem e que fora dela  $\dot{V}$  é estritamente negativo.

De fato, supondo que  $\dot{V} = 0$ , temos que cada termo desaparece separadamente, o que implica que  $y = 0$  e  $z = 0$  pelos segundo e terceiro termos de  $\dot{V}$ , pois, por hipótese, tanto o coeficiente de  $y^2$  quanto de  $z^2$  são positivos. Além disso, analisando o primeiro termo devemos ter

$$-\left[x - \left(\frac{r+1}{2}\right)y\right]^2 = 0 \Rightarrow -x^2 = 0 \Rightarrow x = 0. \quad (3.15)$$

Portanto,  $\dot{V} = 0 \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Caso contrário,  $\dot{V}$  é estritamente negativo, o que prova que a origem é globalmente estável para  $r < 1$ , pela Definição 3.4.1. Isto significa que nestas condições qualquer trajetória converge para a origem independente-

mente da condição inicial do sistema. Conseqüentemente, não há ciclos limites e nem comportamento caótico, para valores de  $r < 1$ .

### 3.4.3 Estabilidade dos pontos fixos $C^+$ e $C^-$

Neste subtópico, iremos estudar para que valores de  $r$ , onde  $r > 1$ , os pontos fixos  $C^+$  e  $C^-$  perdem a sua estabilidade, tornando-se instáveis e originando nova bifurcação.

Vimos anteriormente que para  $r > 1$  surgem outros dois pontos fixos no sistema de Lorenz além da origem, sendo estes:  $C^+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$  e  $C^- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ . Assim, em  $r = 1$ , tem-se a primeira bifurcação do sistema, que passa a apresentar três pontos fixos; além disso, para este valor de  $r$  a origem perde a sua estabilidade.

Pode-se aqui fazer um paralelo lembrando do que ocorre com o mapa logístico estudado no capítulo anterior em que, para valores específicos da taxa de crescimento  $\alpha$ , ocorriam bifurcações em que os pontos fixos duplicavam-se. Um comportamento parecido acontece com o sistema de Lorenz, à medida que o parâmetro  $r$  vai sendo modificado.

A matriz jacobiana  $J$  do sistema de Lorenz é

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}$$

e o seu polinômio característico é dado pelo cálculo do determinante

$$P(\lambda) = \det(J - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r-z & -1 - \lambda & -x \\ y & x & -b - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (-\sigma - \lambda)(-1 - \lambda)(-b - \lambda) - \sigma xy - [-x^2(-\sigma - \lambda) + \sigma(r - z)(-b - \lambda)] \\ &= -\lambda^3 - (\sigma + b + 1)\lambda^2 - [b + \sigma(1 + b - r + z) + x^2]\lambda - \sigma[xy + x^2 + b(1 - r + z)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para encontrar os autovalores aplicamos os pontos fixos  $C^+$  e  $C^-$  na Equação 3.16 e resolvemos  $P(\lambda) = 0$ , o que resulta

$$-\lambda^3 - (\sigma + b + 1)\lambda^2 - \left[ b + \sigma(1 + b - r + (r - 1)) + \left( \sqrt{b(r - 1)} \right)^2 \right] \lambda - \sigma \left[ \sqrt{b(r - 1)}\sqrt{b(r - 1)} + \left( \sqrt{b(r - 1)} \right)^2 + b(1 - r + (r - 1)) \right] = 0$$

$$\begin{aligned} -\lambda^3 - (\sigma + b + 1)\lambda^2 - [b + \sigma(1 + b - r + r - 1) + b(r - 1)] \lambda - 2\sigma b(r - 1) &= 0 \\ \Rightarrow -\lambda^3 - (\sigma + b + 1)\lambda^2 - [b + \sigma b + br - b] \lambda - 2\sigma b(r - 1) &= 0 \\ \Rightarrow -\lambda^3 - (\sigma + b + 1)\lambda^2 - [\sigma b + br] \lambda - 2\sigma b(r - 1) &= 0 \\ \Rightarrow -\lambda^3 - (\sigma + b + 1)\lambda^2 - (\sigma + r)b\lambda - 2\sigma b(r - 1) &= 0 \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (\sigma + r)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0 \quad (3.17)$$

Ao resolver a Equação 3.17, Lorenz observou (LORENZ, 1963, p. 136) que para  $r > 1$ , o polinômio possui uma raiz real negativa e duas raízes complexas conjugadas, sendo imaginários puros se o produto dos coeficientes de  $\lambda^2$  e  $\lambda$  forem iguais ao termo independente, isto é, se

$$(\sigma + b + 1)(\sigma + r)b = 2\sigma b(r - 1). \quad (3.18)$$

Isolando o parâmetro  $r$ , temos

$$r = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)} \quad (3.19)$$

que corresponde ao valor crítico de  $r$  para o qual o sistema perde total,mente a estabilidade, tornando-se caótico. Na próxima seção faremos algumas simulações atribuindo valores numéricos aos parametros  $\sigma$  e  $b$  e utilizaremos a Equação 3.19 para calcular o valor crítico de  $r$ .

### 3.5 Simulações das trajetórias no Octave

A seguir temos algumas simulações do sistema de Lorenz feitas com um algoritmo no software Octave em que é possível observar como as trajetórias comportam-se de acordo com os parâmetros do sistema, no decorrer do tempo. Os valores de  $\sigma$  e  $b$  escolhidos para

estas simulações são os valores clássicos que Lorenz utilizou em seu trabalho e que têm sido utilizados em trabalhos posteriores (LORENZ, 1963; STROGATZ, 1994; THOMPSON, J. M. T. STEWART, H. B., 2002), ou seja,  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$ . Usando a Equação 3.19 calculamos o valor crítico de  $r$ , que corresponde a:

$$r = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)} = \frac{10(10 + \frac{8}{3} + 3)}{(10 - \frac{8}{3} - 1)} \approx 24,74. \quad (3.20)$$

Em nossos testes o parâmetro  $r$  será modificado em cada simulação, pois é ele que determina a estabilidade dos pontos fixos e o surgimento de bifurcações até que o sistema atinja o caos. Na Figura 3.1 abaixo temos o algoritmo desenvolvido para fazer as simulações que se seguem.

Figura 3.1: Algoritmo desenvolvido no Octave para simular o sistema de Lorenz.

```

1 P = 10;
2 r = 15;
3 b = 8/3;
4 dy_dt = @(t,y) [-P*y(1)+P*y(2);...
5
6                 r.*y(1)-y(2)-y(1)*y(3);...
7
8                 y(1)*y(2)-b.*y(3)];
9
10 odeopt = odeset ('RelTol', 0.00000000001, 'AbsTol', 0.00000000001, 'InitialStep', 0.5, 'MaxStep', 0.5);
11
12 [t,y] = ode45(dy_dt,[0 250], [0.01 0.01 0.01],odeopt);
13
14 plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'b-', 'color', 'r'); xlabel('x'); ylabel('y');zlabel('z');
```

Na Figura 3.2 tem-se a trajetória que representa o comportamento do sistema ao longo do tempo para uma condição inicial igual a  $(1, 1, 1)$  e na Figura 3.3 temos a sua projecção no plano  $xz$ . Nesta simulação temos  $r = 0,9$  e, como já esperado, a trajetória converge para a origem, pois neste caso, como  $r < 1$ , ela é o único ponto fixo do sistema e, nestas condições, é estável. Assim, dada uma condição inicial arbitrária, a trajetória é sempre atraída para a origem.

Figura 3.2: Sistema de Lorenz para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 0,9$  e condição inicial  $(1, 1, 1)$ .

Fonte: O autor.

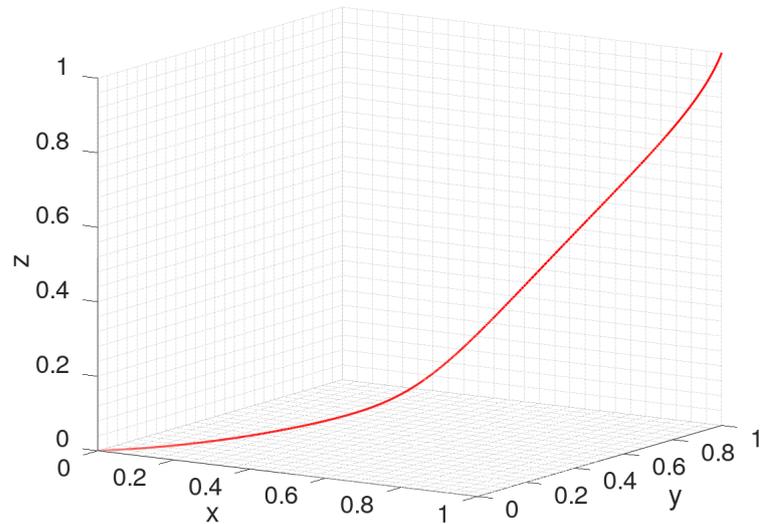
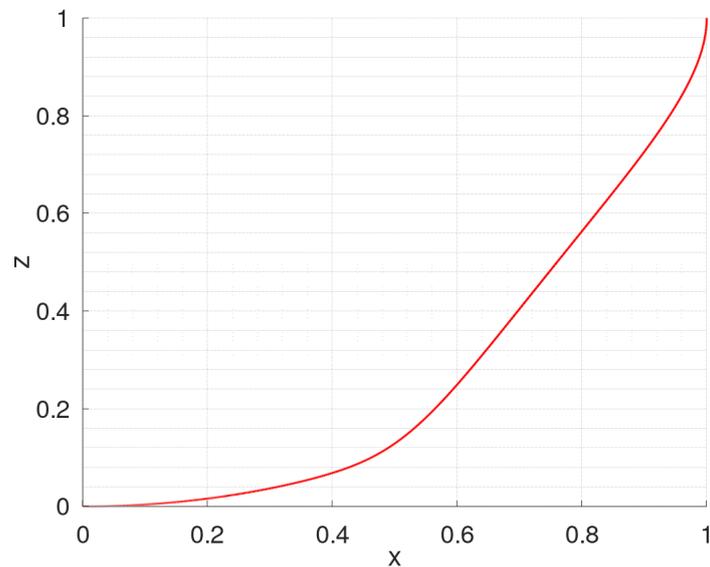


Figura 3.3: Projeção da trajetória do sistema de Lorenz no plano  $xz$  para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 0,9$  e condição inicial  $(1, 1, 1)$ . Fonte: O autor.



Veamos agora o que acontece para  $r = 15$ . Foi atribuído este valor, por ser maior do que 1 e menor do que 24,74, que é o valor crítico calculado anteriormente. Nas Figuras 3.4 e 3.5 temos novamente a trajetória no espaço tridimensional e sua projeção no plano  $xz$ , respectivamente, sob as mesmas condições iniciais anteriores, ou seja,  $(1, 1, 1)$ . Neste caso, nota-se que a origem não mais atrai o sistema para si, sendo este levado a convergir para outro ponto fixo. De acordo com o que foi explanado na Seção 3.4, como  $r > 1$ , a

origem não é mais um ponto fixo atrator, perdendo a sua estabilidade e repelindo a órbita que é atraída para outro ponto fixo do sistema.

Figura 3.4: Sistema de Lorenz para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 15$  e condição inicial  $(1, 1, 1)$ .

Fonte: O autor.

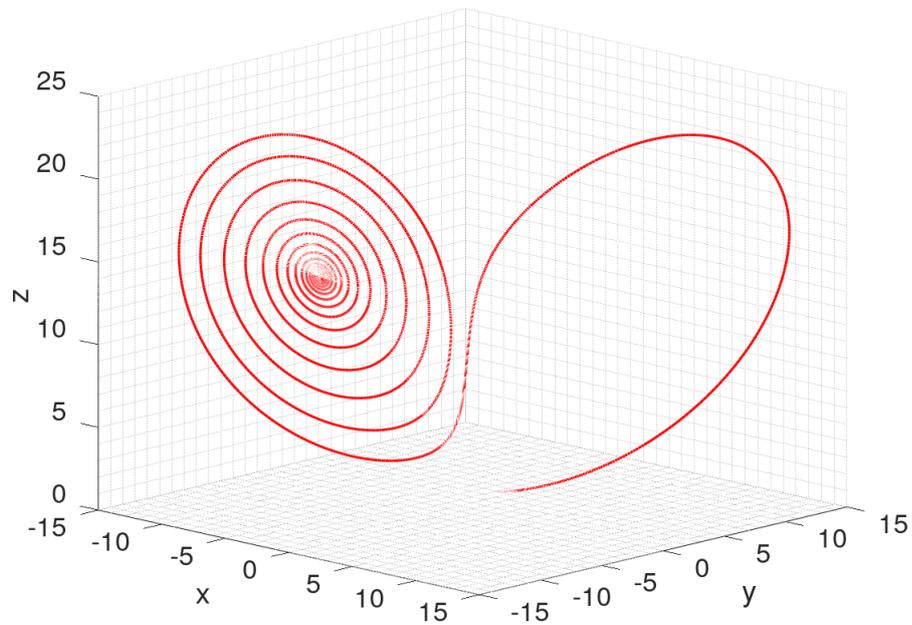
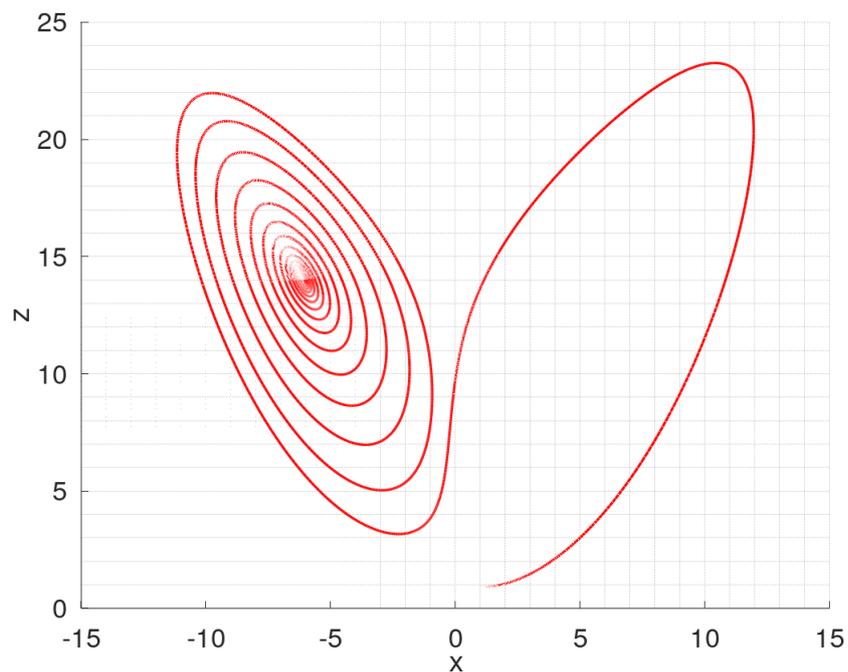


Figura 3.5: Projeção da trajetória do sistema de Lorenz no plano  $xz$  para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 15$  e condição inicial  $(1, 1, 1)$ . Fonte: O autor.



Observados estes dois exemplos de como o sistema de Lorenz se comporta conforme o parâmetro  $r$  é variado, interessa-nos saber o que acontece para  $r$  igual ou maior do que o valor crítico. Nas duas figuras a seguir temos o sistema para  $r = 24,74$ . Aqui as trajetórias não são atraídas para nenhum ponto fixo, tampouco são periódicas, mas ficam contidas em um conjunto denso cujo volume é zero, chamado de *atrator estranho*.

Figura 3.6: Sistema de Lorenz para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 24,74$  e condição inicial  $(1, 1, 1)$ . Fonte: O autor.

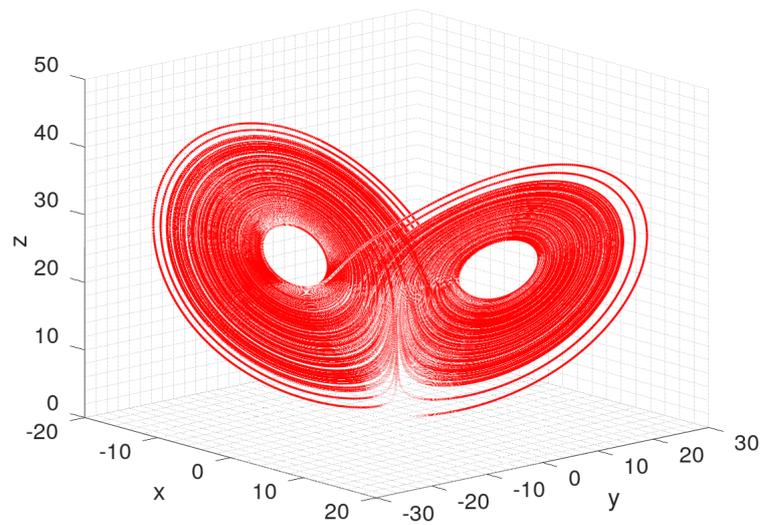
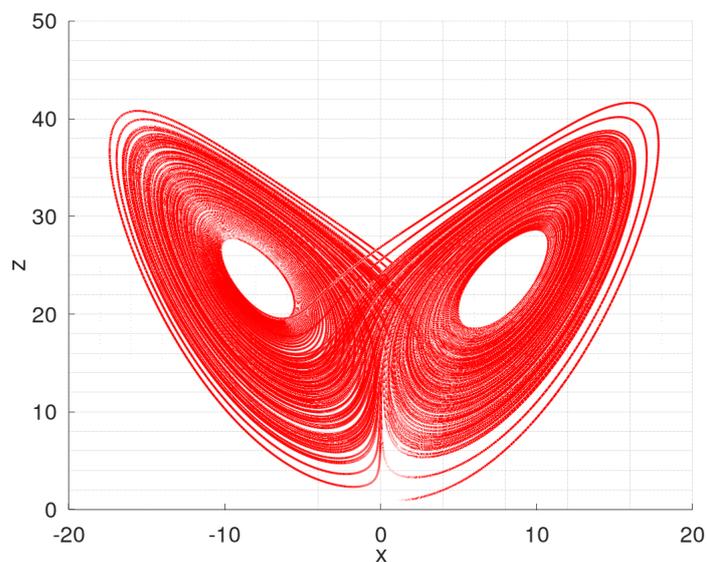


Figura 3.7: Projeção da trajetória do sistema de Lorenz no plano  $xz$  para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 24,74$  e condição inicial  $(1, 1, 1)$ . Fonte: O autor.



Em seu trabalho Lorenz utilizou  $r = 28$  por ser um valor um pouco acima dos 24,74 calculados. Na Figura 3.8 temos a simulação utilizando as mesmas condições iniciais anteriores e alterando-se apenas o parâmetro  $r$  em que observa-se novamente o atrator estranho no espaço 3D e na Figura 3.9, temos a sua projeção no plano  $xz$ .

Figura 3.8: Atrator estranho de Lorenz;  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$  e condição inicial  $(1, 1, 1)$ . Fonte: O autor.

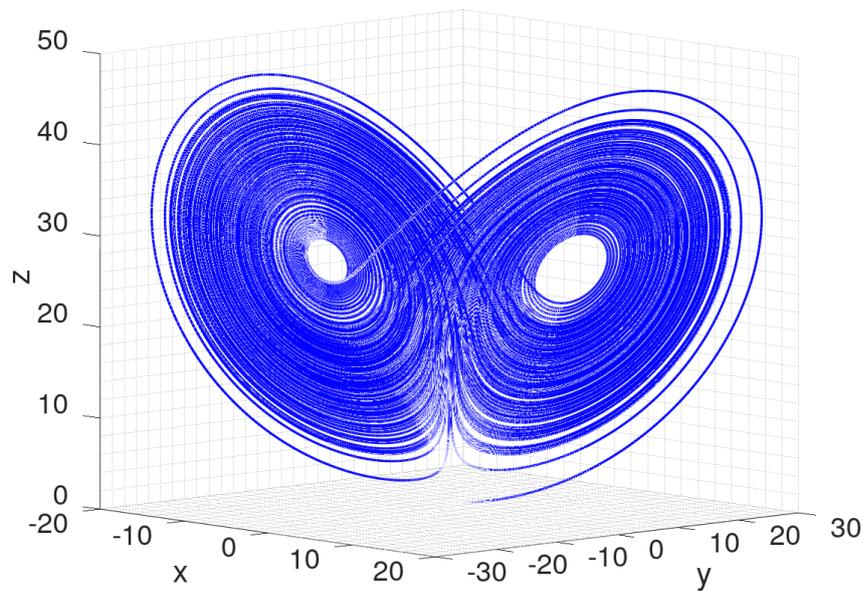
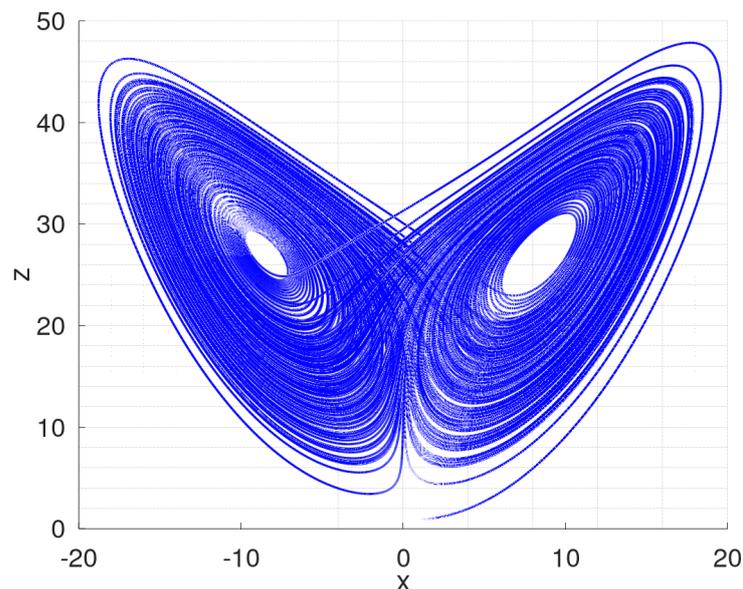


Figura 3.9: Projeção no plano  $xz$  do atrator estranho de Lorenz;  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$  e condição inicial  $(1, 1, 1)$ . Fonte: O autor.



A órbita no atrator estranho jamais retorna a um ponto onde já passou, ou seja, não há cruzamento entre duas trajetórias durante a evolução do sistema. Apesar de parecer contraintuitivo devido ao fato do volume do conjunto convergir para zero, conforme mostrado anteriormente, pois o sistema é dissipativo, isto acontece pois o atrator estranho de Lorenz é um conjunto compacto e cuja área é maior do que zero. Vale ressaltar que devido ao fato de não ser o objetivo deste trabalho, não abordamos os conceitos de topologia. Entretanto, sobre compacidade de espaços topológicos e conjuntos, veja o Apêndice 4.

Note a semelhança da projeção do atrator no plano  $xz$  com as asas de uma borboleta, o que também contribuiu na época em que o trabalho de Lorenz foi publicado para a ideia da expressão *efeito borboleta*, associada ao que foi mencionado na introdução deste capítulo.

Apesar de ter sido idealizado para modelar o clima, atualmente o sistema de Lorenz possui muitas outras aplicações, conforme já destacado. Sobretudo no que se refere à análise de sistemas não-lineares e seus comportamentos caóticos, as equações de Lorenz configuram-se um importante modelo a ser estudado, tanto para sua aplicação direta em problemas de modelagem, quanto para servir de base em um estudo introdutório sobre a teoria do Caos, partindo-se posteriormente para sistemas mais complexos, envolvendo um número maior de variáveis e parâmetros.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi feita uma abordagem elementar da teoria do caos, em que foram analisados dois modelos de sistemas dinâmicos, o Mapa Logístico e o Sistema de Lorenz. O comportamento caótico caracteriza-se pela alta sensibilidade dos sistemas às condições iniciais, o que pode levar um sistema que é em sua essência determinístico a trajetórias totalmente imprevisíveis diante da impossibilidade de se medir grandezas com precisão absoluta. De acordo com os resultados apresentados, verificou-se que sistemas dinâmicos (até mesmo os mais simples) podem evoluir para o caos dependendo dos valores de seus parâmetros. O Mapa Logístico foi utilizado como um exemplo de um sistema dinâmico discreto bidimensional que, apesar de consistir de um modelo bem simples do ponto de vista matemático, pode evoluir para comportamentos imprevisíveis, devido a sua não-linearidade, até atingir o caos. Já o Sistema de Lorenz, foi utilizado para mostrar como o caos é observado em um modelo de sistema dinâmico contínuo, neste caso, tridimensional.

Por tratar-se de um tema relativamente atual e que está ainda em fase de novas descobertas, muitas são as questões sobre este assunto que necessitam de um olhar científico e, portanto, há um campo vasto para novos trabalhos relacionados ao tema Teoria do Caos. Dentre os possíveis desdobramentos que possibilitem uma continuação deste trabalho, pode ser feito um estudo a partir da Teoria de Controle para verificar a possibilidade de controlar-se o caos em sistemas dinâmicos semelhantes aos abordados nesta pesquisa. O controle é geralmente implementado fazendo o sistema convergir para uma órbita escolhida de forma conveniente dentre as infinitas órbitas do sistema caótico em questão, de modo que a dinâmica do sistema permaneça dentro de um limite especificado. Estes conceitos podem ser aplicados em vários campos do conhecimento, como por exemplo, na engenharia elétrica, mecânica, eletrônica, genética, e etc.

Outra consideração que julgamos pertinente, diz respeito a possibilidades didáticas. Apesar do tema central deste trabalho não fazer parte do currículo do ciclo básico do

ensino de Matemática, é possível também fazer-se uma abordagem introdutória deste tema para alunos do Ensino Médio. Até mesmo nos cursos de graduação em Matemática ou Física estes temas são pouco explorados, pois geralmente não compõem a grade curricular obrigatória dos cursos, o que acaba ficando apenas dentro de disciplinas optativas ou mesmo por iniciativas individuais, por exemplo, em projetos de pesquisas ou nos trabalhos de conclusão de curso.

Ao trabalhar este tema em sala de aula, o professor de Matemática pode iniciar os alunos em algoritmos computacionais, já que todas as simulações mostradas neste trabalho foram feitas utilizando linguagem de programação estruturada, que geralmente é o primeiro contato de quem inicia em lógica de programação. Vale ressaltar que as simulações mostradas nesta pesquisa foram realizadas com o software Octave que é um programa gratuito e que em muito assemelha-se ao MatLab e pode ser utilizado em sala de aula pelo professor como ferramenta didática sem custos extras para a escola.

Ao mesmo tempo que exercita a análise gráfica de uma maneira mais aprofundada com os mapas bi e tridimensionais, o professor pode introduzir a modelagem matemática e computacional nas práticas escolares dos alunos do ciclo básico, sendo inclusive possível realizar atividades interdisciplinares como por exemplo, junto com as disciplinas de Física, Biologia e Informática. Além disso, a Teoria do Caos pode ser trabalhada juntamente com a Geometria Fractal, o que pode ser usado para conectar o ensino de geometria com o de sequências, tais como as progressões aritméticas e geométricas, por exemplo, já que fazem parte do currículo do ensino médio.

Estas atividades de aplicação sugeridas em ambientes de ensino e aprendizagem não puderam ser realizadas neste trabalho, devido ao ano atípico vivido em 2020 por todos nós, em meio à pandemia causada pelo Coronavírus, a Covid-19. Isto impossibilitou que houvesse a aplicação e experimentação em sala de aula destas atividades com alunos do ensino médio, haja vista que tal proposta parece carecer da presença física do professor como mediador para a construção destes conhecimentos, que geralmente não fazem parte da vida escolar dos alunos.

Assim, deixamos estas considerações como sugestão aos futuros pesquisadores que porventura desejem debruçar-se sobre esta temática e esperamos que este trabalho possa de alguma maneira contribuir para a evolução do conhecimento científico, sobretudo dentro deste ramo da Matemática.

# Referências Bibliográficas

- [1] BOLDRINI, José Luiz. *et al.* **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1980.
- [2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Tradução para o português: Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- [3] GLEICK, James. **Caos: a criação de uma nova ciência**. 16. ed. Tradução: Waltencir Dutra. Rio de Janeiro: Elsevier, 1989.
- [4] GONÇALVES, Daciberg Lima; KIIHL, José Carlos de Souza. **Teoria do Índice**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [5] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. v. 3. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- [6] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Linear algebra**. 2. ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1971.
- [7] JESUS, Eliane Alves de. **Sistemas dinâmicos discretos**. 2016. 78 f. Dissertação de mestrado - Universidade Federal de São João Del-Rei, 2016, 78 f.
- [8] LAPLACE, Pierre Simon Marquis de. **Mécanique Céleste**. v. 1. Tradução para o inglês: Nathaniel Bowditch. Boston: Hilliard, et al. 1829.
- [9] LAPLACE, Pierre Simon Marquis de. **Mécanique Céleste**. v. 2. Tradução para o inglês: Nathaniel Bowditch. Boston: Hilliard, et al. 1829.
- [10] LAPLACE, Pierre Simon Marquis de. **Mécanique Céleste**. v. 3. Tradução para o inglês: Nathaniel Bowditch. Boston: Hilliard, et al. 1829.

- [11] LAPLACE, Pierre Simon Marquis de. **Mécanique Céleste**. v. 4. Tradução para o inglês: Nathaniel Bowditch. Boston: Hilliard, et al. 1829.
- [12] LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. v. 2. 3. ed. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: HARBRA, 1994.
- [13] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1983.
- [14] LORENZ, Edward N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**. vol. 20. pp 130-141, mar. 1963. Disponível em: [doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2) Acesso em: 25 nov. 2020.
- [15] MAY, Robert M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**. vol. 261. pp 459-467, jul. 1976.
- [16] MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. **Sistemas dinâmicos**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [17] MORAES, Leonardo. **Equações de Diferenças, Caos e Fractais**. 2014. 117 f. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Florianópolis, 2014.
- [18] OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 3. ed. Tradução: Bernardo Severo. Rio da Janeiro: LTC, 1998.
- [19] SADIKU, Matthew. N. O. **Elementos do Eletromagnetismo**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.
- [20] SILVA, Priscilla dos Santos Ferreira. **Uma introdução ao estudo de sistemas dinâmicos discretos**. Revista Eletrônica do Colegiado de Matemática da UEFS Caderno de Orientação à Pesquisa. 2008.
- [21] SILVEIRA, Fernando Lang. **Determinismo, previsibilidade e caos**. Insituto de Física da UFRGS. Cad. Cat. Ens. Fís., v.10, n.2: p.137-147, ago.1993.
- [22] STEWART, James. **Cálculo**. v. 2. 5. ed. Tradução: Antônio Carlos Moeetti, Antônio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Tomson Learning, 2007.

- [23] STROGATZ, Steven H. **Nonlinear dynamics and chaos:** with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Nova Iorque: Addison-Wesley, 1994.
- [24] THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. **Nonlinear dynamics and chaos.** 2. ed. West Sussex: John Wiley & Sons, 2002.
- [25] TRINDADE, Ana Karoline dos Santos da. **O teorema do ponto fixo de Banach e aplicações.** 2019. 69 f. Trabalho de conclusão de curso - Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2019.
- [26] VILLATE, Jaime E. **Dinâmica e sistemas dinâmicos.** 5. ed. Faculdade de Engenharia - Universidade do Porto. Porto: Universidade do Porto, 2019.

# 4 APÊNDICE A

## 4.1 Métrica e espaços métricos.

**Definição 4.1.1.** *Dado um conjunto  $\mathbb{M}$ , com  $\mathbb{M} \neq \emptyset$ , uma métrica em  $\mathbb{M}$  é uma função  $d : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado  $(x, y)$ , em que  $x, y \in \mathbb{M}$ , um número real  $d(x, y)$ , chamado a distância de  $x$  a  $y$  tal que para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{M}$  devem ser satisfeitas as seguintes condições:*

D1.  $d(x, x) = 0$ ;

D2. Se  $x \neq y$  então  $d(x, y) > 0$  (a distância de  $x$  a  $y$  é sempre um número real não negativo);

D3.  $d(x, y) = d(y, x)$  (propriedade simétrica da distância);

D4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (propriedade da desigualdade triangular).

Pelas propriedades D1. e D2. tem-se que a distância  $d(x, y) \geq 0$  e a igualdade só é válida quando  $x = y$ , ou seja,  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .

**Definição 4.1.2.** *Chamamos de **espaço métrico** o par  $(\mathbb{M}, d)$ , em que  $\mathbb{M}$  é um conjunto e  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{M}$ .*

A natureza dos elementos de um espaço métrico qualquer pode ser arbitrária, como por exemplo: pontos, vetores, matrizes, conjuntos, números, etc. Chamaremos estes elementos simplesmente de *pontos do espaço métrico*, adotando a nomenclatura sugerida por Lima (1983).

## 4.2 Definição de compacidade

**Definição 4.2.1.** *Seja  $X$  um espaço topológico e seja  $B \subset X$ . Uma cobertura de  $B$  é uma família  $C = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$  de conjuntos  $C_\lambda \subset X$  tais que  $B \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ . Isto significa que para todo  $x \in B$ , existe algum  $\lambda \in L$  tal que  $x \in C_\lambda$ .*

**Definição 4.2.2.**  *$B \subset X$  é compacto quando toda cobertura aberta de  $B$  admitir uma subcobertura finita. Se  $X$  for compacto, então dizemos que  $X$  é um **espaço topológico compacto**.*

**Definição 4.2.3. (Definição de atrator)** *Seja  $B$  um conjunto compacto. Se  $B$  satisfaz às quatro propriedades a seguir, então  $B$  é um atrator de fluxo  $\Phi(t, x)$ :*

- $B$  é invariante segundo o fluxo  $\Phi$ ;
- $B$  tem uma vizinhança contraente;
- O fluxo  $\Phi$  é recorrente, ou seja, qualquer trajetória de estado inicial em qualquer subconjunto aberto de  $B$ , volta a esse subconjunto para valores de  $t$  suficientemente grandes;
- O fluxo  $\Phi$  não pode ser decomposto, ou seja,  $B$  é conexo.

## 4.3 O operador diferencial $\vec{\nabla}$ e o divergente de um campo vetorial

**Definição 4.3.1.** *O operador diferencial  $\vec{\nabla}$  é um vetor que envolve as derivadas parciais tomadas em cada variável de um espaço vetorial de dimensão finita. No espaço euclidiano tridimensional, o operador  $\vec{\nabla}$  é dado por*

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (4.1)$$

**Definição 4.3.2.** *Seja  $\vec{f}$  um campo vetorial de  $n$  dimensões dado por  $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ . O divergente de  $\vec{f}$ , representado por  $\text{div } \vec{f}$  ou  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ , é definido como*

$$\text{div } \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}. \quad (4.2)$$

No espaço euclidiano tridimensional, o divergente é dado por

$$\operatorname{div} \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \dots \frac{\partial f_z}{\partial z}. \quad (4.3)$$

O divergente de um campo vetorial corresponde a um escalar que representa o fluxo de um vetor característico deste campo por unidade de volume.

**Definição 4.3.3.** Se  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$  então o campo vetorial é conservativo. Se  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} < 0$ , o campo é dissipativo e se  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} > 0$ , o campo é dito expansivo.

## 4.4 Teorema da divergência ou de Gauss

**Teorema 4.4.1.** Seja  $V$  um sólido no  $\mathbb{R}^3$  limitado por uma superfície  $S$  suave e regular, ou regular por partes, fechada e orientada pela normal unitária exterior  $\vec{n}$ . Seja  $D \subset \mathbb{R}^3$  um aberto contendo  $V$  e seja  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vetorial tridimensional dado por  $\vec{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z) \vec{i} + f_2(x, y, z) \vec{j} + f_3(x, y, z) \vec{k}$  tal que suas componentes  $f_1, f_2, f_3$  sejam de classe  $C^1$  em  $D$ . Então,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dV. \quad (4.4)$$

## 4.5 Autovalores e autovetores de uma matriz

**Definição 4.5.1.** Seja a matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ . O número  $\lambda$  é chamado autovalor da matriz  $A$ , se existir  $\vec{v} \neq 0$ , com  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , tal que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}. \quad (4.5)$$

**Definição 4.5.2.** Seja a matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . O determinante  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  em que  $I$  é a matriz identidade, é chamado de polinômio característico da matriz  $A$ .

**Observação 4.5.1.** As raízes do polinômio característico  $P(\lambda)$  são os autovalores de  $A$ .