Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciência
Instituto de Matemática e Estatística

João Pedro de Souza Gomes da Costa

Ressaltando o aspecto interdisciplinar da Matemática para o Ensino Médio: uma abordagem algébrica na solução de problemas sobre grafos

Rio de Janeiro
2021

João Pedro de Souza Gomes da Costa

Ressaltando o aspecto interdisciplinar da Matemática para o Ensino Médio: uma abordagem algébrica na solução de problemas sobre grafos

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luiz da Silva

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

C837 Costa, João Pedro de Souza Gomes da
Ressaltando o aspecto interdisciplinar da matemática para o ensino médio: uma abordagem algébrica na solução de problemas sobre grafos /João Pedro de Souza Gomes da Costa. – 2021.
90 f. : il.

Orientador: Sérgio Luiz da Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Grafos - Teoria - Teses. 2. Matemática - estudo e ensino - Teses. I. Silva, Sérgio Luiz da. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 004.42

Patrícia Bello Meijinhos – CRB7- 5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica.

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura   Data

João Pedro de Souza Gomes da Costa

Ressaltando o aspecto interdisciplinar da Matemática para o Ensino Médio: uma abordagem algébrica na solução de problemas sobre grafos

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 27 de Abril de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sérgio Luiz da Silva (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Ruben Edwin Lizarbe Monje
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Profª Drª Patricia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Profª Drª Walcy Santos
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Universidade Federal do Espírito Santo

Rio de Janeiro
2021

DEDICATÓRIA

Dedico o presente trabalho à minha irmã, Laura, com quem já era amor, antes mesmo de ser.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Carla e Vlamir, e à minha irmã, Laura, os quais me inspiraram a começar e, principalmente, a não desistir, fazendo uso, não de palavras, mas sim, de uma silenciosa ternura cotidiana. Em especial, agradeço à minha mãe, a qual reconheço o mérito em todas as conquistas que obtive até hoje. Agradeço e admiro seu esforço, sua força e sua coragem. Obrigado por tudo que você fez e continua fazendo por mim. Para tudo que eu fizer na vida, vocês sempre serão minha maior referência. Amo vocês!

Aos meus avós, Lourdes e Aureliano, por toda dedicação e disponibilidade para cuidar de mim nos momentos necessários, por tornarem a infância um local de doces lembranças e por terem investido em mim o mais caro ativo que qualquer pessoa tem, vosso tempo.

Ao meu orientador, professor Sérgio Luiz, o qual nutro profunda admiração pelo seu brilhantismo e por sua didática desde que fui seu aluno, em 2015. Agradeço por ter me acholhido e orientado.

Aos meus amigos Wanderson Lomenha, William Pereira, e Luiz Hoffmann por estarem sempre aliviando a gravidade das coisas.

Aos meus amigos do ProfMat Thiago Ribeiro e Paulo Vinicius, por constituírem importante rede de apoio durante todo o curso.

Chegar aqui de onde eu vim
É desafiar a lei da gravidade
Pobre morre ou é preso, nessa idade
Djonga - Junho de 94

RESUMO

COSTA, J. P. S. G. da.*Ressaltando o aspecto interdisciplinar da Matemática para o Ensino Médio:* uma abordagem algébrica na solução de problemas sobre grafos. 2021. 90 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

No presente trabalho, motivados por ressaltar o caráter interdisciplinar da Matemática para o aluno do ensino médio, são exploradas relações entre grafos, importante tópico de combinatória, e grupos, estrutura essencial no estudo da álgebra, aplicadas à resolução de certos problemas de contagem. Os conceitos e propriedades são estabelecidos a partir da formulação de problemas palpáveis e de linguagem acessíveis ao público-alvo. As importâncias dos conceitos de grafos e grupos, aqui conectados, justificam e relevam a exploração de tais relações. Os conceitos e propriedades relacionados aos grafos são estabelecidos a partir da representação gráfica de alguns dos problemas. O conceito de grupo é introduzido a partir da observação de propriedades relacionadas a objetos matemáticos que aparecem ao longo da educação básica. Ao final do trabalho, a conexão entre grafos e álgebra é feita por meio do grupo dos automorfismos de um grafo e é usada para resolver problemas de contagem e um problema de geometria.

Palavras-chave: Grafos. Grupos. Permutação. Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

COSTA, J. P. S. G. da.*Highlighting the interdisciplinary aspect of mathematics for high school:* an algebraic approach to the resolution of graph problems. 2021. 90 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

In this present work, motivated to emphasize the interdisciplinary character of mathematics to an high school level student, the relation between graphs, an important topic in combinatorics, and groups, an essential structure in algebra study, is explored while applied to some problem resolution . The concepts and properties are settled from formulation of tangible problems and accessible language to the target audience. The importance of graphs and groups concepts, connected in this work, justify and stress the use of such relations. The concept of a graph and related properties are formulated from the graphic representation of some problems. The group concept is introduced from the observation of the properties of mathematical objects studied all over the years at school. Finally, at the end, the connection between graphs and algebra is made by the study of an automorphism group of a graph. This connection is used to solve counting problems and a geometry problem.

Keywords: Graphs. Groups. Permutation. Interdisciplinarity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No presente trabalho, exploramos, além dos conceitos e propriedades básicas de grafos, a estrutura algébrica chamada grupo, aqui representada por grupos das permutações de um certo número de elementos, para modelar e resolver determinados problemas de contagem. Motivados por ressaltar o caráter interdisciplinar da Matemática para o aluno do ensino médio, o presente trabalho explora relações entre grafos e álgebra, que constituem a chamada "teoria algébrica dos grafos", para resolver alguns problemas de combinatória que, de forma simplificada, podem ser entendidos como problemas de contagem. A importância do estudo dos grafos - usados hoje em dia para resolver problemas práticos como os de fluxo de trânsito, de logística, de mapeamento de dados por uma empresa e, de uma forma geral, problemas onde há conexão entre objetos - e do conceito de grupo - usado, por exemplo, na Física, na Química e nas Ciências Computacionais - justificam e relevam a exploração de tais relações ao nível da educação básica com abordagem e linguagem acessíveis a esse público-alvo.

Dividimos o trabalho em três partes, cada uma contendo um capítulo:

No primeiro capítulo, introduzimos conceitos e estabelecemos propriedades básicas de grafos. O pioneirismo deste campo da matemática é atribuído a Leonhard Euler, por conta de um trabalho, publicado em 1736, em que resolve o famoso problema das sete pontes de Königsberg, abordado neste trabalho em 1.1.3. A estratégia para introduzir tais conceitos e estabelecer tais propriedades é a partir da abordagem de problemas. Mais especificamente, interpretando graficamente certos problemas, introduzimos os conceitos de vértice, aresta, grafo, grau de um vértice. Também é estabelecida uma noção de equivalência de grafos, chamada de isomorfismo, que estabelece quando dois grafos podem ser considerados o mesmo objeto apesar das naturezas um tanto diferentes. Destacamos que no final do capítulo são obtidos dois resultados básicos de grafos que estabelecem "em qualquer grafo, com dois ou mais vértices, há no mínimo dois vértices com o mesmo grau" e "a soma dos graus dos vértices de um grafo é par". Este último também é conhecido como "teorema do aperto de mãos".

No segundo capítulo, introduzimos o conceito de álgebra chamado grupo e focamos a nossa atenção no exemplo particular do grupo das permutações de um certo número de elementos. Apesar da aparente sofisticação do conceito de grupo, o mesmo está apoiado em exemplos bem palpáveis para os alunos da educação básica, particularmente os do ensino médio, tais como conjuntos numéricos e as operações de adição e multiplicação, conjunto de matrizes e as operações de adição e multiplicação e o conjunto das permutações de um determinado número de elementos. A partir de observações de certas propriedades de tais exemplos, apresentamos o conceito de grupo que é básico na área da Matemática chamada Álgebra. Acreditamos que tal abordagem permite que o conceito de grupo esteja ao alcance de alunos do ensino médio. Diferentemente da teoria de grafos, a teoria de grupos se desenvolveu paralelamente à medida que questões foram sendo colocadas em diferentes três áreas: geometria, teoria dos números e teoria das equações algébricas. O enfoque dado neste trabalho é do estudo de grupos a partir do estudo das permutações, que surgiu a partir do tentativa de resolução da *quíntica* por radicais. O aprofundamento deste tema culminou no brilhante estudo de Galois e no surgimento da teoria que leva seu nome. No presente trabalho, motivamos o uso das permutações a partir do problema de encontrar quadrados latinos. A partir daí, trabalhamos permutações como objetos matemáticos, cujo conjunto munido da operação de composição "$\circ$" é um grupo. Após isso, abordamos através de problemas, conceitos e propriedades dos grupos de permutações como: decomposição em ciclos e sinal de uma permutação.

No terceiro capítulo, exploramos o grupo de automorfismos de um grafo, que conecta grafos e grupos, para a resolução de problemas em grafos. Além disso, nosso último problema é sobre a determinação do grupo diedral, que corresponde ao grupo de simetrias de um polígono regular (aqui se encontra o surgimento histórico da teoria de grupos pela geometria).

1 GRAFOS

1.1 Definições

Introduziremos os conceitos a partir de problemas. Os dois problemas seguir tem como referência os trabalhos de (JUNIOR, 2019) e (MAURI, 2013).

Problema 1.1.1 *Oito turistas de nacionalidades diferentes estão fazendo uma excursão de barco em torno de uma ilha na Grécia. Alguns estão acostumados a viajar e falam mais de um idioma. Estão listados abaixo os idiomas que cada um fala:*

a) Alan: Português e Japonês

b) Bella: Italiano, Inglês e Chinês

c) Carlos: Espanhol e Português

d) Diego: Espanhol

e) Enzo: Italiano e Francês

f) Fuyuki: Japonês

g) Guy: Inglês, Francês e Alemão

h) Heidi: Alemão e Chinês.

No meio da excursão, Heidi decidiu que daria um mergulho, entretanto, só após estar toda molhada percebeu que não havia trazido toalha. Por sorte, Enzo possuía uma toalha sobrando. Embora não dominasse o idioma do colega, Heidi percebeu que poderia se comunicar com ele, desde que usasse Bella como sua intercessora para fazer o pedido. Mais tarde, Guy percebeu que seu celular estava descarregado, mas que o modelo do celular do Alan era semelhante ao dele e que, talvez, este tivesse um carregador na mochila para emprestar-lhe. Existiria alguma maneira de Guy e Alan se comunicarem diretamente ou indiretamente?

Problema 1.1.2 *No futuro, a viagem interplanetária será uma realidade viável. Pelas condições espaciais do sistema solar não serão possíveis viagens de todos os planetas entre si. Abaixo listamos as possibilidades de viagem:*

- *Mercúrio (Me) - Terra (T)*
- *Marte (Ma) - Saturno (S)*

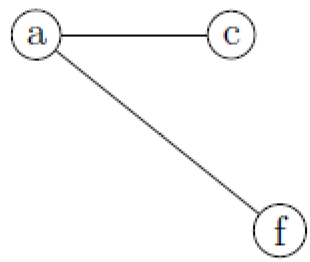
- *Netuno (N) - Urano (U)*
- *Terra (T) - Júpiter (J)*
- *Marte (Ma) - Urano (U)*
- *Saturno (S) - Netuno (N)*
- *Vênus (V) - Mercúrio (Me)*
- *Netuno (N) - Marte (Ma)*

Existe a possibilidade de um alienígena em Mercúrio chegar em Netuno?

Os problemas 1.1.1 e 1.1.2 tem em comum o fato que devemos considerar os elementos de um conjunto e alguma relação que estabelece uma conexão entre eles.

Em problemas desse tipo é conveniente abstrair os elementos para ganhar objetividade na resolução. Esquematizaremos o problema 1.1.1 por meio de círculos (chamados de vértices) representando os turistas e linhas (chamadas de arestas) ligando círculos de tal forma que uma linha ligará dois círculos quando os turistas representados pelos círculos falam um idioma em comum. Assim, o círculo representando o turista Alan (com a letra inicial do nome "a" em seu interior) será ligado por linhas aos círculos representando os turistas Carlos (ambos falam português) e Fuyuki (ambos falam japonês) como na figura abaixo:

Figura 1 - Conexões de Alan

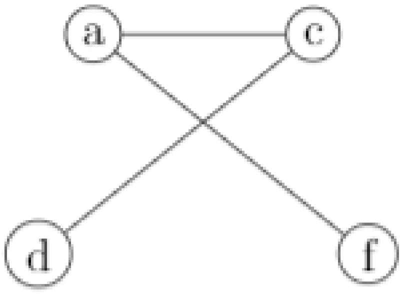


Fonte: O autor, 2021.

Para facilitar a sinalização dos círculos, colocaremos a letra inicial do nome do representado em seu interior.

O círculo que representa Carlos, além de estar ligado ao círculo que representa Alan, também é ligado por uma linha ao círculo representando Diego, pois ambos falam espanhol.

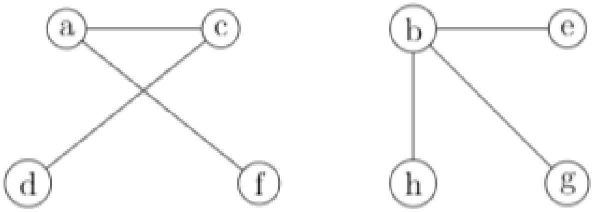
Figura 2 - Conexões de Alan, Carlos, Diego e Fuyuki



Fonte: O autor, 2021.

Feitas as representações das conexões estabelecidas através do idioma por Alan, Carlos, Diego e Fuyuki, olhemos para os outros turistas. O círculo representando Bella será ligado aos círculos que representam Enzo (ambos falam italiano), Guy (ambos falam inglês) e Heidi (ambas falam chinês).

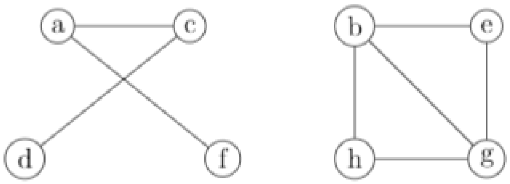
Figura 3 - Conexões de outros passageiros



Fonte: O autor, 2021.

O círculo que representa Guy também estará ligado aos círculos que representam Enzo (ambos falam francês) e Heidi (ambos falam alemão). Completa-se, então, o esquema de representação do problema 1.1.1:

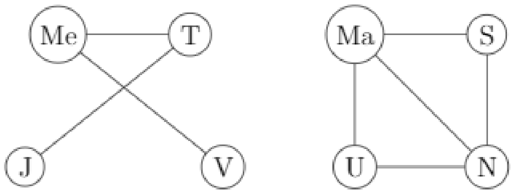
Figura 4 - Representação do problema 1.1.1



Fonte: O autor, 2021.

Para a representação do problema 1.1.2 consideraremos a mesma estrutura utilizada para representar o problema anterior. Os planetas serão representados por meio de círculos (vértices) e as linhas (arestas) ligando os círculos de maneira que dois círculos estarão ligados quando existir a possibilidade de viagem interplanetária entre os planetas que representam.

Figura 5 - Representação do problema 1.1.2



Fonte: O autor, 2021.

A partir de uma simples observação visual, constatamos que os objetos, devido às conexões formadas, podem ser separados em dois grupos, no qual dois objetos se relacionam apenas se estiverem no mesmo grupo.

Solução: No caso do primeiro problema, a representação evidencia a possibilidade de comunicação e divide os vianjantes em dois grupos. Um grupo é formado por Alan, Carlos, Diego e Fuyuki e outro por Bella, Enzo, Guy e Heidi. Um integrante só poderá se comunicar direta ou indiretamente com outro se, e só se, este estiver em seu grupo. Assim, Guy só poderia transmitir seu pedido a Bella, Enzo ou Heidi. Logo, ele não poderá pedir o carregador a Alan, pois este se encontra em um grupo diferente do seu.

No segundo problema, a representação evidencia a possibilidade de transporte.

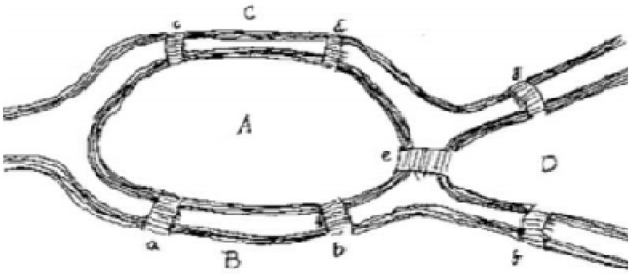
Um viajante que se localiza em determinado planeta do sistema solar só poderá viajar direta ou indiretamente até outro planeta se o planeta de origem e o planeta de destino estiverem no mesmo grupo. Partindo de Mercúrio só se pode chegar até a Terra, Vênus ou Júpiter. Assim, não será possível a viagem de Mercúrio até Netuno. ∎

Ressaltamos que a representação dos elementos como círculos e das conexões como linhas foi essencial para uma resolução simples e rápida dos problemas acima.

A seguir encontra-se outro problema em que pode-se aplicar a mesma estratégia de representação.

Problema 1.1.3 ***(Pontes de Königsberg)*** *No século XVIII havia na cidade de Königsberg um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel, como mostra a figura 6. Durante muito tempo, os moradores da cidade se questionaram a possibilidade de numa caminhada cruzar as sete pontes sem atravessar duas vezes qualquer uma delas. Seria isso possível?*

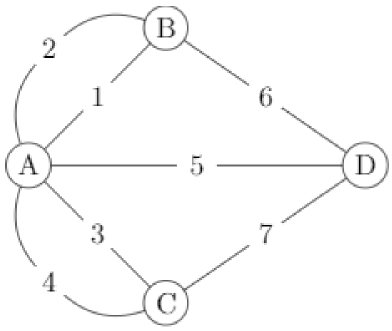
Figura 6 - Cidade de Königsberg



Fonte: Disponível em https://tarciziosilva.com.br/blog/pontos-linhas-e-metricas-05-o-grafo-de-konigsberg/.

Solução: Trata-se de um problema sobre objetos e suas conexões. Utilizaremos a mesma estratégia de antes, os pedaços de terra firme serão representados como círculos e as pontes como linhas.

Figura 7 - Representação do Problema 1.1.3



Fonte: O autor, 2021.

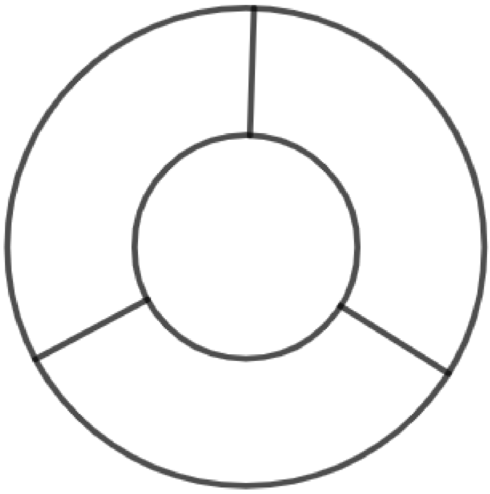
Por mais praticidade na resolução, enumeramos também as pontes (que foram representadas por linhas). Agora, suponha que seja possível realizar a caminhada desejada. Para acessar determinado pedaço de terra o caminhante deverá utilizar uma ponte. Pelas condições do problema, ele não poderá sair do pedaço de terra que se encontra utilizando a mesma ponte que havia utilizado pra chegar. Por exemplo, o caminhante que chegou ao pedaço de terra D utilizando a ponte 6 terá que utilizar a ponte 5 ou 7 para sair de D. Observe que pelas condições do problema o caminhante poderá retornar à B, porém deverá fazê-lo utilizando outra ponte. Assim, é uma condição necessária para a existência do passeio em questão que, excetuando-se os pontos de partida e de chegada, cada pedaço de terra tenha acesso a um número par de pontes. Observado isso, temos que no caso do problema 1.1.3 os pedaços B, C e D têm acesso a três pontes, enquanto A tem acesso a cinco pontes. Em todos os casos trata-se de uma quantidade ímpar. Conclui-se a impossibilidade de caminhar entre as pontes da maneira desejada.

■

Para uma resolução mais detalhada, com abordagem mais profunda sobre os conceitos que envolvem a resolução do problema, pode-se consultar (MAURI, 2013). Deixamos ao leitor um exercício que pode ser resolvido utilizando a mesma estratégia aplicada nos problemas anteriores.

Exercício 1.1.1 *É possível colorir o desenho abaixo utilizando três cores de maneira que regiões vizinhas tenham cores diferentes?*

Figura 8 - Desenho



Fonte: O autor, 2021.

Observação 1.1.4 *Represente as regiões como círculos ligando (preferencialmente por uma linha reta) as regiões que são vizinhas. Observe que cada círculo está ligado aos outros três e que, pintando 3 deles com cores distintas, o quarto terá a mesma cor de um dos três. Daí, sempre teremos dois vizinhos com a mesma cor.*

Os problemas e o exercício acima lidam com uma estrutura chamada *grafo* que definimos abaixo:

Definição 1.1.5 *Um* ***grafo*** $G = (V, E)$ *é uma estrutura combinatória em que* V *é um conjunto cujos os elementos são chamados de vértices e um conjunto* E *cujos elementos são chamados de arestas, cada uma delas estabelecendo relações chamadas de adjacências entre os elementos (pares não ordenados) de* V *(vértices). Na maioria das vezes* $G = (V, E)$ *é denotado por* $G(V, E)$ *ou apenas por* G *quando não houver ambiguidade sobre os conjuntos* V *e* E.

Observação 1.1.6 *Também utilizamos as notações $V(G)$ e $E(G)$ para nos referir ao conjunto de vértices e de arestas, respectivamente, de um grafo G, quando em determinado contexto estejam presentes dois ou mais grafos.*

Exemplo 1.1.7 *Pela definição 1.1.5 a estrutura de um grafo fica completamente determinada pelo seu conjunto de vértices e o conjunto de arestas. Observando o grafo $G(V, E)$ representado na figura 4, seu conjunto de vértices (V) é dado por:*

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

Uma aresta, sendo um par não ordenado de elementos de V, é completamente determinada pelos vértices os quais ela conecta. Assim, a aresta que liga os vértices a e c na figura 4 é representada por $\{a, c\}$. Dito isso, o conjunto de arestas E do grafo em questão é dado por:

$E = \{\{a, c\}, \{a, f\}, \{c, d\}, \{b, e\}, \{b, g\}, \{b, h\}, \{e, g\}, \{g, h\}\}$.

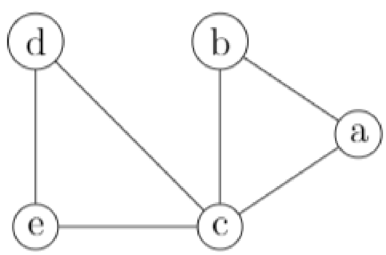
Na figura 5 é representado o grafo $G(V, E)$, em que:

$V = \{Me, T, J, V, Ma, S, U, N\}$ *e*
$E = \{\{Me, T\}, \{Me, V\}, \{T, J\}, \{Ma, S\}, \{Ma, N\}, \{Ma, U\}, \{S, N\}, \{N, U\}\}$.

Exemplo 1.1.8 *Considere $G = (V, E)$, com:*

$V = \{a, b, c, d, e\}$ *e*
$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$.

Figura 9 - Grafo de 5 vértices



Fonte: O autor, 2021.

Normalmente, usamos n para denotar o número de vértices e m para o número de arestas. No grafo do exemplo 1.1.8 temos que $n = 5$ e $m = 6$ e nos grafos do exemplo 1.1.7 temos $n = 8$ e $m = 8$.

Uma aresta $\{v, w\} \in E$, com $v, w \in V$, poderá também ser denotada por $e = vw = wv$. Diremos que a aresta $e = vw$ incide em v e em w que são os **extremos** da aresta. Se $e = vw$ é uma aresta, diremos que os vértice v e w são **vizinhos** ou **adjacentes**. O conjunto $N(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ é o conjunto de vértices adjacentes a v ou **vizinhança** de v. A cardinalidade da vizinhança de um vértice v é chamada de **grau** de v e denotada por $d(v)$. Denotamos por $\Delta(G)$ o maior grau de um vértice de G e por $\delta(G)$ o menor grau. A **sequência de graus** de um grafo é a sequência não crescente dos graus de seus vértices.

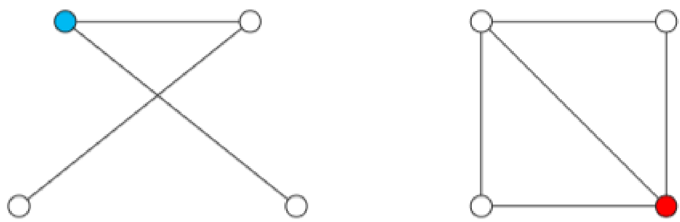
Exemplo 1.1.9 *Em relação ao grafo do exemplo 1.1.8 temos que* $d(a) = 2$*,* $d(b) = 2$*,* $d(c) = 4$*,* $d(d) = 2$ *e* $d(e) = 2$ *e a sua sequência de graus é* $(4, 2, 2, 2, 2)$*. No mesmo grafo em questão, temos que* $\Delta(G) = 4$ *e* $\delta(G) = 2$*.*

Um grafo que não tem nenhum laço (aresta com extremos iguais) e nem mais de uma aresta ligando dois vértices é dito grafo **simples**.

1.2 Isomorfismos

Podemos observar que apesar dos problemas 1.1.1 e 1.1.2 serem de natureza distintas, os diagramas desenhados em suas representações são praticamente iguais. Se apagarmos os rótulos dos vértices não é possível distinguir o problema ao qual se refere o diagrama. Inclusive, em ambos os problemas desejava-se saber se era possível estabelecer uma conexão direta ou indireta entre o objeto marcado em azul (Mercúrio no problema 1.1.2 e Alan no problema 1.1.1) e o objeto marcado em vermelho (Netuno no problema 1.1.2 e Guy no problema 1.1.1).

Figura 10 - Representação dos problemas sem rótulos



Fonte: O autor, 2021.

Observando a figura acima fica claro que pode-se estabelecer uma correspondência entre os vértices segundo a sua posição. Ao compara-las, por exemplo, vemos que Bella e Marte ocupam posições equivalentes em seus respectivos problemas. Temos as seguintes correspondências:

- Alan (a) - Mercúrio (Me);
- Carlos (c) - Terra (T);

- Diego (d) - Júpiter (J);
- Fuyuki (f) - Vênus (V);
- Bella (b) - Marte (Ma);
- Heidi (h) - Urano (U);
- Enzo (e) - Saturno (S);
- Gabriel (g) - Netuno (N).

Formulando matematicamente, existe uma bijeção entre os conjuntos de vértices dos grafos representados nas figuras 4 e 5.

Existem no total $8! = 40.320$ bijeções entre esses dois conjuntos. Entretanto, a bijeção estabelecida, através das correspondências, tem uma característica interessante: ela preserva as relações de adjacência. Por exemplo, na figura 4, o vértice b é adjacente a e, h e g. Vimos acima, que o vértice b é correspondente ao vértice Ma. O vértice Ma, na figura 5, é adjacente aos vértices S, U e N, que correspondem aos vértices e, h e g, respectivamente.

Observe que todo tratamento e resultado obtido em relação ao primeiro grafo pode ser atribuído ao segundo. Isto nos motiva a seguinte definição que dá uma noção de igualdade entre dois grafos:

Definição 1.2.1 *Dois grafos $G(V_1, E_1)$ e $H(V_2, E_2)$ são ditos isomorfos quando existe uma bijeção $\phi : V_1 \to V_2$ tal que x e y são adjacentes em G se e somente se $\phi(x)$ e $\phi(y)$ são adjacentes em H. Neste caso, a função ϕ é chamada de isomorfismo.*

1.3 Primeiros Resultados

Como motivação para estabelecer um resultado a respeito de grafos relacionando os graus de seus vértices, consideremos o seguinte problema:

Problema 1.3.1 *Em toda reunião com duas ou mais pessoas existem duas pessoas que têm o mesmo número de conhecidos.*

Solução: Num primeiro momento resolveremos o problema para os casos específicos de uma reunião com 2, 3 ou 4 pessoas. Modelaremos a situação a partir de grafos em que os vértices representam o conjunto de pessoas e "conhecer" será a relação de adjacência ilustrada, ou seja, existirá uma aresta ligando dois vértices sempre que as pessoas representadas se conhecerem.

- Para *n=2*:
  Sendo o caso de duas pessoas temos duas possibilidades: ou elas se conhecem ou não se conhecem. Ambos os casos estão ilustrados abaixo.

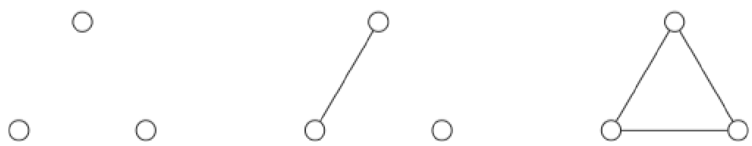
Figura 11 - Grafos para o caso $n = 2$

Fonte: O autor, 2021.

Caso as duas pessoas se conheçam, ambas possuem um conhecido. Caso não se conheçam, ambas possuem zero conhecidos.

- Para *n=3*:
  Sendo três pessoas, temos três possibilidades que mutuamente se excluem: ninguém se conhece, apenas duas pessoas se conhecem ou todos se conhecem. Ilustremos os três casos abaixo:

Figura 12 - Grafos para o caso $n = 3$

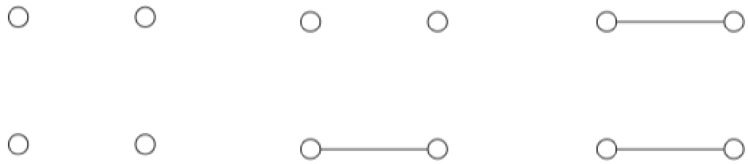


Fonte: O autor, 2021.

Caso ninguém se conheça, temos três pessoas com zero conhecidos. Caso apenas duas pessoas se conheçam, temos duas pessoas com um conhecido. Por fim, caso todos os três se conheçam, temos três pessoas com dois conhecidos.

- Para *n=4*:
  Dividiremos em casos quanto ao maior grau do grafo G que representa a situação.
  - Para $\Delta(G) = 0$:
    Temos uma única configuração possível: Ninguém se conhece. Neste caso, todos possuem zero conhecidos.
  - Para $\Delta(G) = 1$:
    Para este caso existe apenas um par de pessoas que se conhecem ou dois pares de pessoas que se conhecem. Em ambos os casos temos pelo menos duas pessoas com um conhecido. A seguir, ilustramos os casos em que $\Delta(G) = 0$ e $\Delta(G) = 1$.

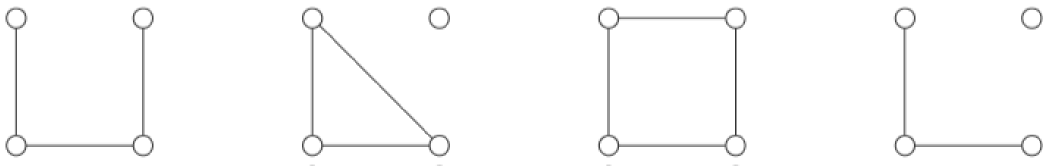
Figura 13 - Grafos para caso $n = 4$, $\Delta(G) = 0$ e $\Delta(G) = 1$



Fonte: O autor, 2021.

– Para $\Delta(G) = 2$: Temos duas possibilidades: duas ou mais pessoas têm dois conhecidos ou apenas uma pessoa tem dois conhecidos. As possibilidades estão ilustradas na figura 14

Figura 14 - Grafos para o caso $n = 4$ e $\Delta(G) = 2$

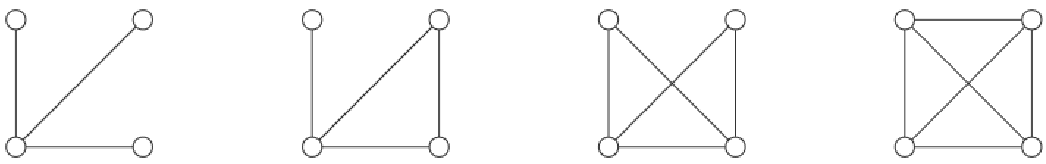


Fonte: O autor, 2021.

Os casos em que pelo menos duas pessoas tem dois conhecidos está automaticamente resolvido. Para o caso em temos apenas uma pessoa com dois conhecidos, basta observar que os dois em questão não conhecem nenhuma outra pessoa, caso contrário seriam pelo menos duas pessoas pessoas com dois conhecidos. Temos, então, duas pessoas pessoas com um conhecido.

– Para $\Delta(G) = 3$: Em primeiro lugar, observemos que a existência de alguém com três conhecidos, implica na impossibilidade de ter alguém sem conhecidos. Dito isto, temos que ou existe apenas uma pessoa com três conhecidos ou existem duas ou mais pessoas com três conhecidos.

Figura 15 - Grafos para o caso *n=4* e $\Delta(G) = 3$



Fonte: O autor, 2021.

Os casos com duas ou mais pressoas que têm três conhecidos mostra que há

pelo menos duas pessoas com 3 conhecidos.
Para os casos em que exatamente uma pessoa tem três conhecidos, temos que cada uma das pessoas restantes deverá ter exatemente um ou dois conhecidos. Assim, teremos ou duas pessoas dentre os três com um conhecido (consequentemente o terceiro também deverá ter apenas um conhecido) ou duas dentre os três com dois conhecidos.

■

Ao compararmos os três casos resolvidos observamos o aumento da complexidade da resolução conforme aumentamos o número de pessoas do problema. Com cinco pessoas, teríamos de abrir em muito mais casos que os outros e a argumentação seria mais extensa e trabalhosa.

É necessário, então, a obtenção de uma solução geral independente do número de pessoas. Para isto faremos uso do Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Teorema 1.3.2 ***(Princípio das Gavetas)*** *Se $n + 1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.*

Prova: Sejam $x_1, \ldots x_k$, em que x_i, com $1 \leq i \leq k$, é a quantidade de objetos na gaveta i e que $k \leq n$.

$$x_1 + \ldots + x_k \geq n + 1 \tag{1}$$

O número médio (M) de objetos por gaveta é maior que ou igual a $\frac{n+1}{n}$, que é maior que 1. Pois,

$$M = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{k} \geq \frac{n+1}{k} \geq \frac{n+1}{n} = 1 \tag{2}$$

Suponha por contradição que cada uma das gavetas tenha um ou menos objetos por gaveta. Temos então:

$$M = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{k} \leq \frac{k}{k} = 1 \tag{3}$$

Contradição. Logo, pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto. ■

Convém também apresentar a versão generalizada do princípio citado acima. A referência para este resultado encontra-se em (LIMA et al., 2006).

Teorema 1.3.3 ***(Princípio das Gavetas Generalizado)*** *Se $Nk+1$ ou mais objetos são colocados em N ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de k objetos.*

Antes de apresentar a solução do problema 1.3.1, iremos resolver um exercício.

Exercício 1.3.1 *Em uma reunião com seis pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou se desconhecem mutuamente.*

Solução: Considere o grafo cujos vértices representam as pessoas e que "conhecer" é a relação de adjacência ilustrada. Tomemos um vértice v. Suponhamos v adjancente a pelo menos três vértices a, b e c. Caso dentre os três vértices tenhamos dois adjacentes, digamos a e b, então v, a e b são adjacentes entre si, o que quer dizer que as pessoas que representam se conhecem mutuamente. Caso contrário, teremos que a, b e c não são adjacentes entre si, o que quer dizer que as pessoas que representam se desconhecem mutuamente. O caso em que v não é adjacente a pelo menos três vértices é de argumentação análoga. Temos apenas que garantir que esses dois casos esgotam todas as possibilidades referente ao problema, ou seja, que o vértice v é adjacente a pelo menos três vértices ou não é adjacente a pelo menos três vértices. Considerando os cinco vértices restantes, diferentes de v, como objetos e as propriedades "ser adjacente a v" e "não ser adjacente a v" como gavetas, é garantido pelo Princípio das Gavetas Generalizado que v é adjacente a pelo menos três vértices ou que v não é adjacente a pelo menos três vértices.

$\blacksquare$

Passemos agora para a solução geral do problema 1.3.1.

Solução: Quando resolvemos o caso $n = 4$ e $\Delta(G) = 3$, observamos que a existência de alguém com três conhecidos implicava na impossibilidade da existência de alguém sem conhecidos. Generalizando, temos que em uma reunião com n pessoas ($n > 2$), se alguém conhece $n-1$ pessoas, implica que todas as outras pessoas tem pelo menos um conhecido e, portanto, ninguém tem zero conhecidos.

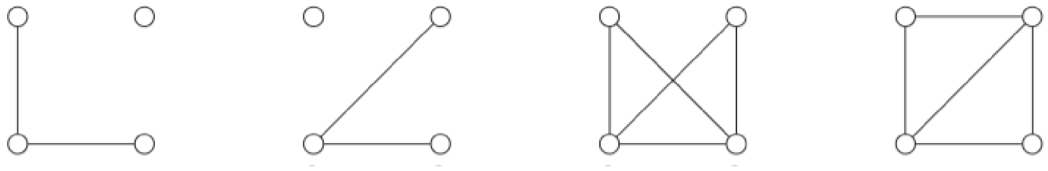
Assim, caso exista alguém com $n-1$ conhecidos, a quantidade de conhecidos de cada uma das pessoas da reunião pertencerá ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Caso não exista ninguém com $n-1$ conhecidos, a quantidade de conhecidos de cada uma das pessoas da reunião pertencerá ao conjunto $\{0, 1, \ldots, n-2\}$. Em qualquer um dos dois casos, temos $n-1$ possibilidades para a quantidade de conhecidos de cada uma das pessoas da reunião.

Tomemos as n pessoas como objetos e as $n-1$ possibilidades para a quantidade de conhecidos como gavetas. O Princípio das Gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, ou seja, haverá duas pessoas com o mesmo número de conhecidos nessa reunião. $\blacksquare$

Cabe comentar a utilidade do conceito de isomorfismo na resolução. Na figura abaixo temos dois pares de grafos com o mesmo número de arestas. Na resolução, utilizamos apenas o grafo do lado esquerdo de cada um dos pares. Isso se deve ao fato de, em cada um dos pares, os grafos serem isomorfos.

Deixamos um exerício ao leitor:

Figura 16 - Pares de Grafos Isomorfos



Fonte: O autor, 2021.

Exercício 1.3.2 *Em um campeonato cada dois times jogam entre si uma única vez. Mostre que em qualquer momento há sempre dois times que disputaram o mesmo número de partidas*

Utilizamos um grafo para modelar o problema acima. Até este momento do texto estamos fazendo a passagem de um problema na linguagem formal para a linguagem de grafos, resolvendo-o e trazendo as considerações novamente para a linguagem formal. Entretanto, também podemos fazer o caminho inverso. Um resultado de um problema formal pode ser reformulado para a linguagem de teoria de grafos. No problema 1.1.1 consideremos as pessoas como vértices de um grafo e o número de conhecidos como o grau do vértice que a representa. Obtemos o seguinte:

Afirmação 1.3.4 *Todo grafo com dois ou mais vértices tem pelo menos dois vértices de mesmo grau.*

Outro exemplo em que podemos supor uma situação real para provar um resultado da teoria de grafos encontra-se no teorema abaixo:

Teorema 1.3.5 (Aperto de mãos) *Para todo grafo G, $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, onde $m = |E(G)|$.*

Prova: Suponhamos que o grafo G esteja representando uma reunião. Os vértices simbolizam as pessoas e uma aresta ligará dois vértices se as pessoa que representam tiverem apertado as mãos.

Uma maneira de contar a quantidade de apertos de mãos da reunião (consequentemente, o número de arestas do grafo G) é perguntar a cada pessoa quantas vezes ela apertou a mão de alguém e somar (computar o grau de cada vértice e somar). Ao fazer isso, contamos a quantidade de apertos de mãos duas vezes, logo $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$.

■

Corolário 1.3.6 *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Prova: Suponha por contradição que tenhamos um grafo G com a quantidade ímpar de vértices de grau ímpar.

Seja $I \subset V$ o conjunto de vértices de G que tem grau ímpar. Se I é vazio, temos zero vértices com grau ímpar. Podemos supor, então, que I é não-vazio. Sendo I não-vazio, podemos separar a soma dos graus dos vértices como

$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in I} d(v) + \sum_{v \in V \setminus I} d(v)$

O primeiro somatório resulta em um número ímpar, já que é a soma de uma quantidade ímpar de parcelas que são números ímpares, enquanto o segundo resulta em um número par, já que é a soma de parcelas pares. Consequentemente a soma dos graus dos vértices deste grafo é um número ímpar. Contradição ao Teorema 1.3.5.

Concluímos que todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar. ■

Os teoremas acima e sua demonstração tem como referência (FEOFILOFF; KOHAYAKAWA; WAKABAYASHI, 2011).

Deixamos dois exercícios ao leitor.

Exercício 1.3.3 *Em um certo reino, existem* 50 *cidades. De* 20 *dessas cidades partem* 4 *estradas e das outras, partem* 6 *estradas. Quantas estradas existem no reino?*

Exercício 1.3.4 *Em determinado país existem* 25 *aeroportos. É possível ligar estes aeroportos por linhas de tráfego aéreo, de maneira que cada aeroporto esteja ligado a exatos outros* 15*?*

2 PERMUTAÇÕES E GRUPOS

2.1 Permutações

Começaremos com um problema.

Problema 2.1.1 *Um jardineiro deseja fazer o plantio de três variedades de hortaliças em três tipos de solos diferentes. Sabe-se que leva um mês para verificar a adaptabilidade das plantas em cada tipo de solo. Uma possível solução seria plantar uma mesma espécie em todos os solos a cada mês. Porém, essa solução não é considerada boa, pois o tempo muda a cada mês na região. Assim, ele deseja fazer isso de maneira que cada variedade seja testada em todos os tipos de solos ao longo dos meses de teste. Será possível fazer tal experimento?*

Observação 2.1.2 *Iremos assumir que a relação clima/solo não influencia a cultura da hortaliça.*

Solução: A partir do texto do problema, percebe-se que desejamos relacionar o plantio de cada uma das hortaliças com possíveis combinações mês-solo para plantio de maneira que todas hortaliças sejam plantadas em cada um dos solos e em cada um dos meses. Para simplificar a solução, podemos criar um quadro com todas as combinações mês-solo possíveis e preenchê-lo com as plantas. Nomearemos os solos por A, B e C e os meses por JAN, FEV e MAR, representando Janeiro, Fevereiro e Março, respectivamente. Teremos, assim, a seguinte tabela:

Tabela 1 - Tabela Mês/Solo

Solo/Mês	JAN	FEV	MAR
A			
B			
C			

Fonte: O autor, 2021.

Enumeramos as hortaliças por 1, 2 e 3. Uma forma de completar a tabela seria preencher cada coluna com um único número, como se encontra a seguir:

Tabela 2 - Tabela Mês/Solo

Solo/Mês	JAN	FEV	MAR
A	1	2	3
B	1	2	3
C	1	2	3

Fonte: O autor, 2021.

Entretanto, o próprio texto aponta para esta solução como uma solução ruim, pois, por exemplo, não seria possível verificar a adptabilidade da hortaliça 1 sob as condições climáticas que se apresentem em Fevereiro e Março. Se não desejamos plantar uma hortaliça mais de uma vez em um mesmo mês, devemos preencher a tabela de maneira a não termos números repetidos em uma coluna. Como também não desejamos plantar uma hortaliça mais de uma vez no mesmo tipo de solo, devemos preencher a tabela de maneira a não termos números repetidos em uma linha. Dito isto, podemos preencher a tabela utilizando da seguinte estratégia:

1. Preencher a primeira linha com os números 1, 2 e 3 em qualquer ordem. Escolhemos colocá-los em ordem crescente:

Tabela 3 - Tabela Mês/Solo

Solo/Mês	JAN	FEV	MAR
A	1	2	3
B			
C			

Fonte: O autor, 2021.

2. Preencher a segunda linha com os números 1, 2 e 3, cada um em uma posição diferente da que ocupou na linha acima. Escolhemos colocá-los na ordem 3, 1, 2:

Tabela 4 - Tabela Mês/Solo

Solo/Mês	JAN	FEV	MAR
A	1	2	3
B	3	1	2
C			

Fonte: O autor, 2021.

3. Preencher a terceira linha com os números 1, 2 e 3, cada um em uma posição diferente da que ocupou nas duas linhas acima. Escolhemo-os na ordem 2, 3, 1:

Tabela 5 - Tabela Mês/Solo

Solo/Mês	JAN	FEV	MAR
A	1	2	3
B	3	1	2
C	2	3	1

Fonte: O autor, 2021.

Desta maneira, completamos o quadro permitindo avaliar cada uma das hortaliças em cada uma das configurações mês/solo.

■

Problema 2.1.3 *Um veterinário deseja experimentar cinco rações (A, B, C, D e E) em cinco vacas diferentes e avaliando o equilíbrio da dieta de cada uma das vacas combinando com cinco capins diferentes. Determine uma maneira do experimento ser realizado.*

Solução: Nessa resolução podemos proceder de maneira semelhante a anterior: criar uma tabela relacionando as vacas com os tipos de capim.

Basta então preencher a tabela com as rações A, B, C, D e E de maneira que não tenha repetição de ração em cada linha e nem em cada coluna. Aplicando a mesma estratégia de resolução que foi utilizada no problema 2.1.1, temos a seguinte tabela:

Tabela 6 - Tabela Vaca/Capim

Vaca/Capim	Capim 1	Capim 2	Capim 3	Capim 4	Capim 5
Vaca 1	A	B	C	D	E
Vaca 2	B	C	D	E	A
Vaca 3	C	D	E	A	B
Vaca 4	D	E	A	B	C
Vaca 5	E	A	B	C	D

Fonte: O autor, 2021.

■

Deixamos um exercício ao leitor.

Exercício 2.1.1 *O **Sudoku** é um quebra-cabeça de* 81 *casas dispostas em uma grade* 9×9. *Essa grade é dividida em nove subgrades de tamanho* 3×3. *Observe a figura abaixo:*

Figura 17 - Sudoku

Fonte: O autor, 2021.

Dada uma configuração inicial, o jogo consiste em preencher as casas com os algarismos de 1 a 9 de modo que em cada uma das linhas, colunas e subgrades não se encontrem números repetidos.

Figura 18 - Sudoku

6						2	9	5
7			4	9		6		
2	8			5				
			9	2	7		3	
	9	2	8		5	7	1	
	4		1	6	3			
				3			5	9
		3		7	8			2
4	2	8						7

Fonte: O autor, 2021.

Deixamos para o leitor o exercício de preencher o Sudoku acima.

Observe que em todos os problemas trabalhamos com a mesma estrutura, um quadrado que em cada uma de suas linhas e colunas não deve se afigurar elementos repetidos. Isto nos motiva a seguinte definição:

Definição 2.1.4 *Um **quadrado latino** de ordem n é um quadrado $n \times n$ preenchido com os elementos de um conjunto S, em que $|S| = n$, de maneira que em cada uma das linha e em cada uma das coluna não se encontrem elementos repetidos.*

Para maiores informações sobre quadrados latinos, bem como referências sobre os dois primeiros exemplos desta seção, consultar (NEGRINI, 2018) e (FARIAS, 2017).

Exemplo 2.1.5 *No problema 2.1.1 nos deparamos com um quadrado latino de ordem* 3 *e no problema 2.1.3 com um quadrado latino de ordem* 5*. Apresentamos abaixo um exemplo de quadrado latino de de ordem* 6*:*

Figura 19 - Quadrado Latino 6×6

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

Fonte: O autor, 2021.

O primeiro questionamento que pode surgir é sobre a existência de quadrados latinos de ordem n. A próxima proposição responde essa pergunta:

Proposição 2.1.6 *Seja $n \in N$, existe um quadrado latino de ordem n formado pelos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Prova: Considerando o conjunto dos números $\{1, \ldots, n\}$, iremos criar um quadrado latino de ordem n com esses elementos.

Começaremos preenchendo a primeira linha com os números em ordem crescente.

Figura 20 - Quadrado Latino $n \times n$

1	2	$\ldots$	$n-1$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: O autor, 2021.

Da segunda linha em diante seguiremos a seguinte estratégia:

- O elemento que ocupava a primeira posição na linha k ocupará a última posição na linha $k + 1$.
- O elemento que ocupava uma posição i na linha k, com $1 < i \leq n$, ocupará a posição $i - 1$ na linha $k + 1$, isto é, o que se encontrava na segunda posição passará a ocupar a primeira, o que se encontrava na terceira passará a ocupar a segunda e assim por diante.

Ao final do processo, obteremos o seguinte quadrado latino:

Figura 21 - Quadrado Latino $n \times n$

1	2	$\dots$	$n-1$	n
2	3	$\dots$	n	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	n	$\dots$	$n-3$	$n-2$
n	1	$\dots$	$n-2$	$n-1$

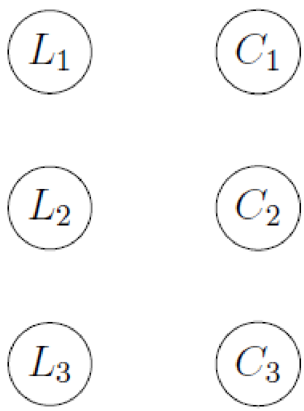
Fonte: O autor, 2021.

Exibimos um quadrado latino com os elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ e isso conclui a nossa prova.

$\blacksquare$

Podemos, neste momento, apontar uma interseção entre a teoria dos grafos e os quadrados latinos: é possível utilizar um grafo para representar um quadrado latino. Para isso, devemos considerar as linhas e colunas como vértices. Tomando como exemplo o quadrado latino referente a resolução do problema 2.1.1, temos:

Figura 22 - Vértices

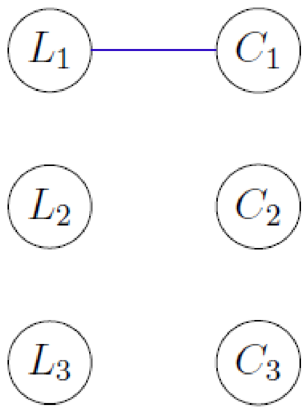


Fonte: O autor, 2021.

Para facilitar o acompanhamento da resolução pelo leitor, reproduziremos o quadrado latino referente a resolução do problema 2.1.1.

Utilizaremos arestas coloridas para conectar os vértices do grafo em questão procedendo da seguinte maneira: O vértice que representa uma coluna será ligado ao vértice que representa uma linha por uma aresta da cor correspondente ao número que se encontra na interseção da linha e da coluna em questão. O número 1 será representado pela cor azul, o número 2 pela cor vermelha e o número 3 pela cor verde. Assim o vértice C_1 será ligado ao vértice L_1 por uma aresta de cor azul.

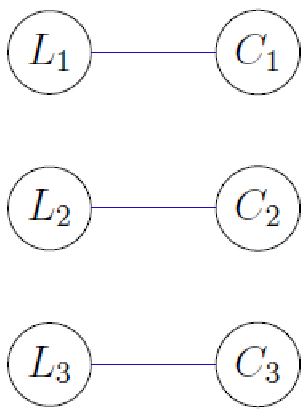
Figura 23 - Vértices e arestas



Fonte: O autor, 2021.

Da mesma maneira, a aresta que liga os vértices L_2 e C_2 e a que liga L_3 e C_3 terão cor azul.

Figura 24 - Vértices e aresta

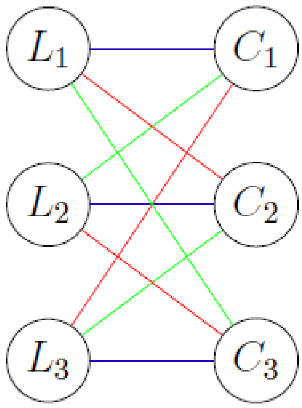


Fonte: O autor, 2021.

Assim completamos o grafo ligando os vértices L_1 e C_2, L_2 e C_3, L_3 e C_1 com arestas da cor vermelha e os vértices L_1 e C_3, L_2 e $C1$, L_3 e C_2 com arestas da cor verde.

Em relação ao grafo da figura 25 podemos repartir o conjunto de vértices em dois subconjuntos próprios e disjuntos $\{L_1, L_2, L_3\}$ e $\{C_1, C_2, C_3\}$ de maneira que vértices

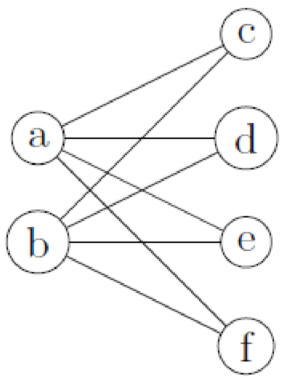
Figura 25 - Grafo



Fonte: O autor, 2021.

pertencentes ao mesmo subconjunto não são adjacentes entre si. Grafos com esta propriedade são chamados de **bipartidos**. Ou seja, quando podemos particionar o conjunto de vértices $V(G)$ em dois subconjuntos próprios e disjuntos, L e R, de modo que $V = L \cup R$ e $vw \notin E(G)$, para todos $v, w \in L$ ou $v, w \in R$. Dizemos que um grafo é **bipartido completo**, denotado por $K_{p,q}$, quando é um grafo bipartido onde $|L| = p$, $|R| = q$ e $lr \in E$ para todo $l \in L$ e $r \in R$. O grafo da figura 25 é um $K_{3,3}$.

Figura 26 - Grafo $K_{2,4}$



Fonte: O autor, 2021.

Observe que nos problemas 2.1.1 e 2.1.3 nossa tarefa foi basicamente encontrar determinadas ordenações de elementos de um conjunto (no problema 2.1.1 nos referimos ao conjunto $\{1, 2, 3\}$ e no problema 2.1.3 ao conjunto $\{A, B, C, D, E\}$) que satisfaziam uma condição específica. No caso, buscamos um determinado conjunto de ordenações em que dadas duas ordenações quaisquer deste conjunto, ambas não tinham elementos que ocupassem a mesma posição.

Uma ordenação de todos os elementos de um conjunto sem repeti-los é chamada de **permutação**, elas constituem objeto de estudo muito importante na matemática. Vejamos agora uma definição mais rigorosa do que é uma **permutação**.

2.2 Grupos

A área da Matemática chamada Álgebra tem como um dos objetivos estabelecer propriedades de operações definidas em conjuntos, por exemplo, estabelecer as propriedades da adição ou da multiplicação nos conjuntos numéricos. Nessa linha de estudo, surge na Álgebra o conceito de "grupo" que introduziremos à frente. Para motivar, vejamos algumas propriedades de operações em conjuntos numéricos começando com o conjunto dos números inteiros (Z) e a operação de adição:

Observação 2.2.1 *O conjunto dos números inteiros é a união dos números naturais* $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *com os números negativos* $\{-1, -2, -3 \ldots\}$*, ou seja,*

Z={...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...}

Dentre todas as propriedades, a mais básica que é exigida de uma operação em um conjunto é a **associatividade** que, no caso de uma operação de adição, estabelece que $a + (b + c) = (a + b) + c$ para quaisquer elementos a, b e c, no conjunto onde a adição está definida. Para qualquer outra operação, a propriedade associativa é traduzida simplesmente trocando-se na igualdade anterior, o símbolo de adição "+" pelo símbolo correspondente da operação. Todos os conjuntos numéricos com a operação de adição ou de multiplicação têm a propriedade associativa.

Vejamos outras propriedadades da adição no conjunto dos números inteiros:

- **(Fechamento)** Dados dois números inteiros, a sua soma ainda é um número inteiro.

  Exemplos: $2 + 4 = 6$; $(-3) + 2 = -1$; $(-2) + (-3) = -5.$ (4)

- **(Elemento Neutro)** Existe um número inteiro, chamado de **elemento neutro**, tal que todo inteiro somado ao elemento neutro resulta nele mesmo. No caso da operação de adição no conjunto dos inteiros, o elemento neutro é o número 0.

  Exemplos: $2 + 0 = 2$; $(-3) + 0 = -3.$

- **(Oposto)** Dado um número inteiro, existe um número chamado **oposto**, tal que a adição de ambos tem como resultado zero que é o elemento neutro da adição.

  Exemplos: $2 + (-2) = 0$; $(-7) + 7 = 0$; $0 + 0 = 0.$

- **(Comutatividade)** Dados dois números inteiros, não importa a ordem em que façamos a adição, o resultado é o mesmo.

  Exemplos: $2+4=4+2=6$; $(-3)+2=2+(-3)=-1$.

Consideremos, ainda, o mesmo conjunto, agora com a operação de multiplicação. As propriedades do fechamento, associatividade, existência do elemento neutro e comutatividade são válidas em relação à essa operação. Como já mencionamos o fato de as operações de adição e multiplicação em conjuntos numéricos terem a propriedade associativa, não nos estenderemos sobre ela ao longo do texto.

- **(Fechamento)** Dados dois números inteiros, o seu produto ainda é número inteiro.

  Exemplos: $2\cdot 4=8$; $(-3)\cdot 2=-6$; $(-2)\cdot(-1)=2$.

- **(Elemento Neutro)** Existe um número inteiro, tal que todo inteiro multiplicado pelo elemento neutro resulta nele mesmo. No caso da multiplicação, no conjunto dos inteiros, o elemento neutro é o número 1.

  Exemplos: $2\cdot 1=2$; $(-3)\cdot 1=-3$.

- **(Comutatividade)** Dados dois números inteiros, não importa a ordem que os multipliquemos, o resultado é o mesmo.

  Exemplos: $2\cdot 4=4\cdot 2=8$; $(-3)\cdot 2=2\cdot(-3)=-6$.

Entretanto, nem todo número inteiro possui um inverso, ou seja, não existe um número inteiro que multiplicado por ele tenha resultado (produto) igual a 1. Por exemplo, o inverso de 2 é $\frac{1}{2}$, pois $2\cdot\frac{1}{2}=1$. Os únicos números inteiros que possuem inverso são -1 e 1. No caso desses números, ambos são seus próprios inversos.

As propriedades abordadas acima podem ser encontradas em outros conjuntos. Vejamos outros exemplos.

Consideremos o conjunto dos números racionais Q e a operação de adição.

- **(Fechamento)** Dados dois números racionais, a sua soma ainda é número racional.

  Exemplos: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$; $(-1)+\dfrac{2}{5}=-\dfrac{3}{5}$; $(-0,3)+0,05=-0,25$.

- **(Elemento Neutro)** Neste caso, é o mesmo elemento neutro da operação de adição no conjunto dos inteiros.

Exemplos: $(-1,7) + 0 = -1,7$; $\dfrac{3}{7} + 0 = \dfrac{3}{7}$.

- **(Oposto)** Dado um número racional, existe um número chamado **oposto**, tal que somando ambos o resultado é o elemento neutro.

  Exemplos: $\dfrac{1}{2} + (-\dfrac{1}{2}) = 0$; $(-0,47) + 0,47 = 0$.

- **(Comutatividade)** Dados dois números racionais, não importa a ordem que os somemos, o resultado é o mesmo.

  Exemplos: $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{11}{12}$; $(-3,4) + 2 = 2 + (-3,4) = -1,4$.

Semelhante ao que fizemos acima, consideremos, ainda, o mesmo conjunto, agora com operação de multiplicação. Assim como no caso dos números inteiros, as propriedades do fechamento, associatividade, existência do elemento neutro e comutatividade são válidas em relação à essa operação.

- **(Fechamento)** Dados dois números racionais, o seu produto ainda é número racional.

  Exemplos: $\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$; $(-3,5) \cdot 2,25 = -7,875$.

- **(Elemento Neutro)** Neste caso, é o mesmo elemento neutro da operação de multiplicação nos números inteiros.

  Exemplos: $\dfrac{2}{9} \cdot 1 = \dfrac{2}{9}$; $(-3,45) \cdot 1 = -3,45$.

- **(Comutatividade)** Dados dois números inteiros, não importa a ordem que os multipliquemos, o resultado é o mesmo.

  Exemplos: $\dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}$; $(-3,5) \cdot 2,25 = 2,25 \cdot (-3,5) = -7,875$.

No caso da operação de multiplicação no conjunto dos números racionais, acontece o mesmo problema, em relação à existência do inverso, que encontramos acima. O zero é o único número racional que não possui um inverso. Fora este, todo número racional não nulo representado na forma $\frac{p}{q}$ tem como inverso $\frac{q}{p}$.

Todas as propriedades verificadas para os números racionais com relação às operações de adição e multiplicação também são válidas para os conjuntos dos números reais (R) e dos números complexos (C). Em ambos os conjuntos o único número que não possui inverso é o zero.

Ao trabalharmos na escola essas propriedades, temos a impressão de que são naturais e surgem espontaneamente ao munirmos qualquer conjunto de uma operação. Em muitos casos, entretanto, essas propriedades não ocorrem.

Exemplo 2.2.2 *Considerando o conjunto dos números naturais* $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Neste conjunto, munido da operação adição, não é verificada a existência do oposto para um dado natural. Ainda assim, são verificadas as propriedades do fechamento, associatividade, existência do elemento neutro e comutatividade.

Vejamos um exemplo de conjunto munido de operação que não satisfaz a propriedade comutativa.

Exemplo 2.2.3 *No ensino médio, estudamos matrizes e aprendemos a fazer o produto dentre duas delas, quando possível. Consideremos aqui o conjunto* $\mathcal{I}$ *das matrizes* 2×2 *que são invertíveis. Em outras palavras, o conjunto das matrizes da forma*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tais que $ad - bc \neq 0$.

Lembremos que a multiplicação de duas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

é dada por

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

Temos que a operação acima é associativa e a inversa da matriz A *(verifique) é dada por*

$$A^{-1} = \tfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Além disso, o produto de duas matrizes invertíveis ainda é invertível. Basta observar que o inverso de $A \cdot B$ *é* $B^{-1} \cdot A^{-1}$, *com* $A, B \in \mathcal{I}$. *O elemento neutro da operação multiplicação no conjunto é a matriz chamada de identidade*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como foi dito acima, a comutatividade é a única propriedade que é satisfeita para conjuntos numéricos e não é satisfeita para a multiplicação de matrizes invertíveis acima. Vejamos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Os conjuntos com operações que satisfazem essas quatro propriedades constituem uma estrutura algébrica que foi e ainda é muito estudada em matemática e que apresentamos abaixo. Antes, façamos um curto comentário.

Dizemos que G está munido de uma operação $*$ quando a cada par ordenado (a, b) de elementos $a, b \in G$ está associado um único elemento $a*b$ em G, chamado de o resultado da operação de a e b.

Definição 2.2.4 *Todo conjunto G munido de uma operação $*$, que satisfaz as três condições abaixo é chamado de **Grupo**:*

- *Associatividade: Para todos $a, b, c \in G$, temos que $(a * b) * c = a * (b * c)$*
- *Elemento neutro: Existe $e \in G$, tal que para todo $a \in G$, $a * e = e * a = a$*
- *Elemento simétrico: Para todo $a \in G$ existe $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.*

*Todo grupo $(G, *)$ cuja operação $(*)$ é comutativa é chamado de **grupo abeliano** ou **comutativo**.*

Observação 2.2.5 *O simétrico de uma operação de adição é chamado de oposto e o resultado da adição de dois elementos em um conjunto é chamado de soma. No caso de uma multiplicação, chamamos o oposto de inverso e o resultado de produto.*

Dos exemplos que abordamos, temos que $(Z, +)$, $(Q, +)$, $(R, +)$,$(C, +)$ $(Q - \{0\}, \cdot)$, $(R - \{0\}, \cdot)$, $(C - \{0\}, \cdot)$ e $(\mathcal{I}, \cdot)$ são grupos. Enquanto que $(N, +)$, $(Z, \cdot)$, $(Q, \cdot)$, $(R, \cdot)$, $(C, \cdot)$ não são grupos. Todos os grupos que vimos são abelianos, exceto $(\mathcal{I}, \cdot)$. Para um estudo mais abstrato da Teoria de Grupos, consultar (GARCIA; LEQUAIN, 2015).

As permutações também podem ser vistas como um grupo, para isto devemos proceder da seguinte maneira, primeiro consideremos todas as permutações dos n primeiros inteiros positivos. Para representá-las de modo que venham a formar um grupo, devemos criar uma matriz $2 \times n$ em que a primeira linha seja composta dos n primeiros números inteiros e na segunda uma permutação dos n primeiros números inteiros.

Exemplo 2.2.6 *Consideremos o conjunto das permutações de dois elementos S_2. Colocamos os números $1, 2$ na primeira linha em todas as matrizes e preenchemos a linha debaixo com permutações dos elementos $1, 2$.*

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2.2.7 *Pelo mesmo processo também podemos exibir todos os elementos do conjunto de permutações de* $\{1,2,3\}$. *Este conjunto é chamado de* S_3.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2.2.8 *Para o conjunto* S_4 *podemos também podemos criar o grupo das permutações de* 4 *objetos. Considerando o conjunto* $\{1,2,3,4\}$, *temos que observar que em todo elemento do grupo de permutações de* 4 *elementos teremos que a segunda linha basta ser uma permutação dos elementos do conjunto* $\{1,2,3,4\}$, *enquanto na primeira linha da matriz colocamos os elementos do mesmo conjunto em ordem crescente. Tomemos como exemplo a seguinte permutação do conjunto* $\{1,2,3,4\}$:

$(3,1,4,2)$

Representamos a permutação desta maneira:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Chamamos de **permutações** os elementos do grupo das permutações. Para nosso estudo das permutações, tomamamos como referência (GARCIA; LEQUAIN, 2015) e (MORAES, 2013).

Algumas vezes será usada uma letra para representar uma permutação da seguinte forma:

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Agora que determinamos os elementos dos grupos S_2, S_3 e S_4, devemos muni-los de uma operação. A operação entre permutações é chamada de composição e representada pelo símbolo $\circ$.

Tomemos dois elementos de S_4 e façamos a operação entre eles:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Começamos a fazer a operação da direita para a esquerda, visualizando como se fosse um “prédio”, da seguinte maneira:

- Na primeira permutação, a da direita, o 4 está embaixo do 1, enquanto na segunda, a da esquerda, o 2 está embaixo do 4. Devemos ter, então, no resultado dessa operação, o 2 embaixo do 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \downarrow \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

Assim, como resultado, teremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & & & \end{pmatrix}$$

- Na primeira permutação, a da direita, o 3 está embaixo do 2, enquanto na segunda, a da esquerda, o 4 está embaixo do 3. Devemos ter, então, no resultado dessa operação, o 4 embaixo do 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \downarrow & & \\ & 3 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & \downarrow & \\ & & 4 & \end{pmatrix}$$

Assim, como resultado, teremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 4 & & \end{pmatrix}$$

- Na primeira permutação, a da direita, o 1 está embaixo do 3, enquanto na segunda, a da esquerda, o 3 está embaixo do 1. Devemos ter, então, no resultado dessa operação, o 3 embaixo do próprio 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & \downarrow & \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & & & \\ 3 & & & \end{pmatrix}$$

Assim, como resultado, teremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 3 & \end{pmatrix}$$

- Na primeira permutação, a da direita, o 2 está embaixo do 4, enquanto na segunda, a da esquerda, o 1 está embaixo do 2. Devemos ter, então, no resultado dessa operação, o 1 deverá ficar embaixo do 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \downarrow \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \downarrow & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}$$

Assim, como resultado, teremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Juntando cada um dos pedaços, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Com as mesmas permutações, façamos a composição na ordem inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Na primeira permutação, a da direita, o 3 está embaixo do 1, enquanto na segunda, a da esquerda, o 1 está embaixo do 3. Devemos ter, então, no resultado dessa operação, o 1 embaixo do próprio 1.

- Na primeira permutação, a da direita, o 1 está embaixo do 2, enquanto na segunda, a da esquerda, o 4 está embaixo do 1. Devemos ter, então, no resultado dessa operação, o 4 embaixo do 2.

- Na primeira permutação, a da direita, o 4 está embaixo do 3, enquanto na segunda, a da esquerda, o 2 está embaixo do 4. Devemos ter, então, no resultado dessa operação, o 2 embaixo do 3.

- Por fim, na primeira permutação, a da direita, o 2 está embaixo do 4, enquanto na segunda, a da esquerda, o 3 está embaixo do 2. Devemos ter, então, no resultado dessa operação, o 3 embaixo do 4.

O resultado final será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Prezando pela concisão do texto, nos referiremos à permutação mais à direita como sendo a primeira da operação e a mais à esquerda como sendo a segunda. Ao trabalhar, com mais de duas permutações em relação a operação, começaremos nos referindo à da direita como primeira, aumentando a posição conforme mais à esquerda as outras forem se localizando.

Exemplo 2.2.9 *Assim, como munimos o conjunto S_4 com a operação de composição, podemos fazer o mesmo para S_3. Consideremos duas permutações pertencentes ao conjunto S_3 e sua composição:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A operação é feita de maneira semelhante:

- *Na primeira permutação, o 3 está embaixo do 1, enquanto na segunda, o 2 está embaixo do 3. Assim, no resultado, devemos ter o 2 embaixo do 1.*

- *Na primeira permutação, o 2 está embaixo do 2 e, na segunda, o 1 está embaixo do 2. No resultado, teremos o 1 embaixo do 2.*

- *Na primeira permutação, o 1 está embaixo do 3 e, na segunda, o 3 está embaixo do 1. No resultado, teremos o 3 embaixo do 3.*

Juntando tudo, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Fazendo o mesmo processo aplicado até aqui obtemos também o resultado da composição das mesmas permutações na ordem contrária a que já foi feita.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Observemos que a operação de composição também não é comutativa em S_3.

Exercício 2.2.1 *Deixamos ao leitor a tarefa de calcular a composição de algumas permutações abaixo:*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$

A operação composição é associativa, vejamos abaixo:

Considere as permutações $p, q, s \in S_4$, com

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} ;\ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Em primeiro lugar computamos $p \circ q$:

$$p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculando $(p \circ q) \circ s$, obtemos:

$$(p \circ q) \circ s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Computemos $p \circ (q \circ s)$, começando por calcular $q \circ s$:

$$q \circ s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando $p \circ (q \circ s)$, obtemos:

$$p \circ (q \circ s) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Verificamos que $(p \circ q) \circ s = p \circ (q \circ s)$. Apesar da verificação de um simples exemplo não constituir generalização, podemos argumentar a validade da propriedade associativa a partir dele. Para isto, vejamos o processo de cálculo do número que ficará embaixo do 1 no resultado. No primeiro caso, o cálculo feito foi o seguinte:

- Na operação $p \circ q$, observamos que na primeira permutação, o 2 está embaixo do 2 e na segunda o 3 está embaixo do 2. Consequentemente, o 3 deverá se localizar embaixo do 2.

- Na operação $(p \circ q) \circ s$, na primeira permutação, o 2 está embaixo do 1 e, na segunda, o 3 está embaixo do 2. Logo, o 3 deverá ficar embaixo do 1.

Vejamos o processo de cálculo do segundo caso:

- Na operação $q \circ s$, observamos que na primeira permutação, o 2 está embaixo do 1 e que, na segunda, o 2, está embaixo do 2. Assim, no resultado, o 2 deverá ficar embaixo do 1.

- Na operação $p \circ (q \circ s)$, temos que na primeira permutação, o 2 está embaixo do 1, enquando que, na segunda $p \circ (q \circ s)$, o 3 está embaixo do 2. Por isso, no resultado, o 3 deverá ficar embaixo do 1.

Observe que, no fundo, seguimos a seguinte hierarquia:

1. O 2 está embaixo do 1 na primeira permutação.

2. O 2 está embaixo do 2 na segunda permutação.

3. O 3 está embaixo do 2 na terceira permutação.

Observe que, quando realizamos a operação $(p \circ q) \circ s$, temos que agrupamos o segundo item com o terceiro, para depois agrupar com o primeiro. Já para $p \circ (q \circ s)$ agrupamos o primeiro item com o segundo e depois agrupamos com o terceiro. Como, no fundo, se trata de um jogo de palavras, a ordem das operações não altera o resultado final.

Observado, então, que a composição é uma operação associativa no conjunto das permutações. Falta verificar a existência do elemento neutro e do inverso. Comecemos pelo elemento neutro:

Considere a permutação p para nos auxiliar.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Designando o elemento neutro por e_4, iremos preencher a linha debaixo da segunda permutação na operação a seguir

$$e_4 \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Observe que na primeira permutação o 3 está embaixo do 1 e, na segunda, o valor desconhecido está embaixo do 3. Sabendo que no resultado o 3 está embaixo do 1, concluímos que o valor desconhecido deverá ser o próprio 3.

$$e_4 \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 3 & \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Continuando o processo, podemos observar que na primeira permutação o 1 está embaixo do 2 e, na segunda, um valor desconhecido está embaixo do 1. Como no resultado o 1 está embaixo do 2, podemos concluir que o valor desconhecido deverá ser o próprio 2.

$$e_4 \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 3 & \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Com o mesmo raciocínio podemos completar a permutação e_4.

$$e_4 \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Operando na ordem inversa temos que

$$p \circ e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Uma vez que em e_4 a primeira linha é idêntica à segunda, essa permutação tem apenas a função de repetir a ordenação da permutação com a qual opera. A permutação e_4 é chamada de **permutação identidade**.

Exemplo 2.2.10 *As permutações e_2 e e_3 são, respectivamente, os elementos neutros dos conjuntos S_2 e S_3, com respeito a operação de composição.*

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Falemos agora do elemento inverso de uma permutação com respeito à operação composição. Novamente, consideremos a permutação p para nos auxiliar.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Se estamos interessados em determinar o elemento inverso de p, devemos, então, completar a linha debaixo da segunda permutação na operação a seguir

$$p^{-1} \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Na primeira permutação o 3 está embaixo do 1 e, na segunda, o valor desconhecido está embaixo do 3. Sabendo que no resultado o 1 está embaixo do 1, concluímos que o valor embaixo do 3 deverá ser o próprio 1.

$$p^{-1} \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & 1 & \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Podemos observar, também, que na primeira permutação o 1 está embaixo do 2 e, na segunda, o valor desconhecido está embaixo do 1. Como no resultado o 2 está embaixo do 2, podemos concluir que o valor desconehcido embaixo do 1 deverá ser o próprio 2.

$$p^{-1} \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & & 1 & \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Continuando o processo, obtemos

$$p^{-1} \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Operando as permutações na ordem inversa da que foi operada anteriormente, obtemos

$$p \circ p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Assim, concluímos que

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

É interessante notar que enquanto na permutação p, o 1 está embaixo do 2, em p^{-1}, o 2 está embaixo do 1. Essa inversão acontece com todos os outros números. Uma vez observado isso, podemos concluir que a determinação do inverso de uma permutação pode ser feita trocando-se as linhas e, posterioremente, reordenando as colunas. Computemos a permutação inversa de q, descrita abaixo:

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Trocando-se as linhas obtemos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Reordenando as colunas, obtemos q^{-1}

$$q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Deixamos ao leitor a tarefa de verificar que a permutação obtida acima é, de fato, a permutação inversa de q. Abaixo encontram-se também outros exercícios ao leitor.

Exercício 2.2.2 *Determine a inversa das permutações abaixo:*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Feitas todas essas observações, podemos concluir que $(S_2, \circ)$, $(S_3, \circ)$ e $(S_4, \circ)$ são grupos.

Para além do que vimos, existem permutações com uma quantidade maior de objetos. Podemos ter, por exemplo, uma permutação de 8 objetos, como se encontra abaixo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 6 & 1 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Todas as observações feitas acima, podem ser generalizadas para uma quantidade maior de objetos, isto é, o conjunto das permutações de n objetos, com n inteiro e maior que 4, munido da operação composição $\circ$ também é um grupo. Seguindo a notação que temos utilizado, o conjunto das permutações de n objetos é denotado por S_n.

Deixamos abaixo alguns exercícios ao leitor.

Exercício 2.2.3 *Calcule a composição das permutações abaixo:*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$

Exercício 2.2.4 *Calcule a inversa de cada uma das permutações abaixo:*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

O número de elementos dos conjuntos S_n vai crescendo a passos largos conforme o crescimento do n considerado, isso porque o número de elementos de S_n pode ser obtido calculando o número de filas dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sendo assim, temos que $|S_n| = n!$.

2.3 Ciclos e Permutações

Comecemos com o seguinte problema

Problema 2.3.1 *Para um espetáculo de ballet, o coreógrafo diretor posicionou oito bailarinas em oito pontos diferentes do palco. Durante o espetáculo, as bailarinas deveriam trocar de posição várias vezes e, para que não fosse difícil a memorização de tantas trocas, o coreógrafo estabeleceu uma sequência em que as trocas se basearia e que as bailarinas deveriam segui-la sempre que fosse o momento de trocar de posição:*

A sequência de trocas determinada pelo coreógrafo será:

- *A bailarina na posição* 1 *deverá dirigir-se para a posição* 3.
- *A bailarina na posição* 2 *deverá dirigir-se para a posição* 1.
- *A bailarina na posição* 3 *deverá dirigir-se para a posição* 2.
- *A bailarina na posição* 4 *deverá dirigir-se para a posição* 8.
- *A bailarina na posição* 5 *deverá dirigir-se para a posição* 6.
- *A bailarina na posição* 6 *deverá dirigir-se para a posição* 7.
- *A bailarina na posição* 7 *deverá dirigir-se para a posição* 4.
- *A bailarina na posição* 8 *deverá dirigir-se para a posição* 5.

O coreógrafo deseja que ao final cada bailarina se encontre exatamente na posição onde começou. Assim, para que seja feita a escolha da música do espetáculo, é preciso saber quantas vezes as bailarinas deverão trocar de posição para que se encontrem na posição de início. Quantas trocas serão necessárias?

Solução: Para resolver este problema, utilizaremos a notação de permutação. Teremos que o problema será representado por uma permutação de S_8, em que a relação da primeira com a segunda linha será o deslocamento de uma posição inicial para outra final. Por exemplo, no texto é dito que a bailarina na posição 8 deverá dirigir-se para a posição 5, então na permutação que representa o problema, teremos que o número 5 deverá ficar embaixo do 8. Seguindo assim, teremos a seguinte permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Uma solução para resolver o problema seria compor a permutação com ela mesma até encontrarmos a identidade. Esse processo não é prático e no final da nossa resolução você entenderá o motivo. Podemos adotar outra estratégia. Observemos que existem posições que não se relacionam umas com as outras. Podemos dividi-las em dois conjuntos: $\{1,2,3\}$ e $\{4,5,6,7,8\}$.

Assim, podemos trabalhar com os conjuntos $\{1,2,3\}$ e $\{4,5,6,7,8\}$ independentemente. A permutação relativa às trocas de posição do primeiro e segundo conjuntos são, respectivamente,

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Observe que

$$a \circ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bem como

$$b \circ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Como $a \circ b = b \circ a$, podemos concluir que as permutações a e b comutam.

Calculemos agora as potências da primeira permutação até encontrarmos a identidade:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Isso nos diz que a cada realização de três movimentos propostos pelo diretor, as bailarinas das posições 1, 2 e 3 repetem determinada posição.

Deixamos ao leitor calcular as potências da segunda permutação e observar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Concluindo que a cada realização de cinco movimentos propostos pelo diretor, as bailarinas das posições 4, 5, 6, 7, e 8 repetem determinada posição.

Agora, como as permutações comutam, para resolver o problema, basta calcular o mínimo múltiplo comum entre 3 e 5. Logo, partindo da posição inicial, após a realização de 15 movimentações todas as bailarinas se encontram na posição inicial novamente.

$\blacksquare$

Observação 2.3.2 *Caso você tivesse escolhido resolver pelo método inicialmente abordado, teria de calcular* 14 *potências de uma permutação. Com o segundo método, foi necessário o cálculo de apenas* 6 *potências, menos da metade. Na verdade, com a teoria que desenvolveremos abaixo, não será necessário o cálculo de nenhuma potência, será necessário realizar apenas a separação das permutações e o cálculo do mínimo múltiplo comum.*

Na questão acima, uma ferramenta facilitadora da resolução, foi decompor a permutação que representava o problema em permutações "independentes". Explicitaremos melhor o processo de separação e, posteriormente, introduziremos o conceito através de uma definição formalizada. Tomemos como exemplo a permutação abaixo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 1 & 7 & 6 & 8 & 3 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Podemos imaginar que a permutação acima também descreva um cenário de deslocamentos. A ideia para realizar a decomposição é percorrer o "caminho"a partir de um número, até chegar nele mesmo. Por exemplo, observemos que quem está na posição 1 deve deslocar-se para a posição 4, quem está na posição 4 deve deslocar-se para a posição 7, quem está na posição 7 deve deslocar-se para posição 3 e quem está na posição 3 deve deslocar-se para a posição 1, terminando, asssim, aquilo que chamaremos de **ciclo**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Aplicando o mesmo processo, obtemos que os outros dois ciclos que compõem a permutação em questão serão

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Definição 2.3.3 *Uma permutação p de S_n é denominada um r-ciclo se existem elementos distintos $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \in \{1, \dots, n\}$ tais que a_2 se localiza embaixo de a_1, a_3 se localiza embaixo de a_2 e assim por diante, enquanto a_1 se localiza embaixo de a_r e tal que para todo $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, j se localiza embaixo de j; tal r-ciclo será escrito como $(a_1 \dots a_r)$. Os elementos do conjunto $\{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ são ditos fixados.*

Exemplo 2.3.4 *Vejamos alguns exemplos:*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ *é um* 5*-ciclo, que pode ser escrito como* $(\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ )$*; também poderia ser escrito como* $(\ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 1\ )$*, ou* $(\ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 1\ \ 2\ )$*, ou* $(\ 4\ \ 5\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ )$*, ou* $(\ 5\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ )$*. Neste ciclo não temos elementos fixados.*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ *é um* 3*-ciclo, que pode ser escrito como* $(\ 2\ \ 4\ \ 6\ )$*; também poderia ser escrito como* $(\ 4\ \ 6\ \ 2\ )$*, ou* $(\ 6\ \ 2\ \ 4\ )$*. Neste ciclo os elementos fixados são* 1*,* 3 *e* 5*.*
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *não é um ciclo. Não é possível satisfazer a exigência da definição, pois vemos que* 2 *está embaixo do* 3 *e o* 3 *embaixo do* 2*, sendo o mesmo para* 1 *e* 4 *e ambos os pares não relacionam.*

O número r é chamado de comprimento do r-ciclo. Os 2-ciclos são também chamados de transposições. Em geral utilizamos a notação (i), com $i \in \{1, \dots n\}$ para representar a permutação identidade do conjunto S_n.

Exemplo 2.3.5 *No exemplo 2.3.4, o ciclo do primeiro item tem comprimento* 5 *e do segundo item tem comprimento* 3*.*

Dois ciclos são ditos disjuntos se nenhum elemento é movido por ambos ou, de maneira equivalente, quando cada elemento do conjunto $\{1, ..., n\}$ é fixado por pelo menos um dos ciclos.

- O 4-ciclo $(\ 1\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ )$ e o 3-ciclo $(\ 6\ \ 7\ \ 8\ )$ são ciclos disjuntos.
- Os 3-ciclos $(\ 1\ \ 4\ \ 3\ )$ e $(\ 2\ \ 4\ \ 5\ )$ não são ciclos disjuntos, pois o 4 é movido por ambos.

Toda permutação pode ser decomposta em ciclos disjuntos, a partir da aplicação do processo que descrevemos acima. É interessante observar que ciclos disjuntos comutam entre si. Isso se dá pelo fato de, como são disjuntos, um elemento que não está fixado em uma permutação deverá estar fixado, automaticamente, na outra.

Considerando novamente a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 1 & 7 & 6 & 8 & 3 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Observando o "caminho" percorrido no ciclo abaixo, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

vai da posição 1 para 4, da 4 para 7, da 7 para 3 e da 3 de volta para 1, enquanto os outros elementos estão fixados. Assim, o ciclo pode ser escrito da seguinte maneira: $(\ 1\ \ 4\ \ 7\ \ 3\ )$

Os outros ciclos que compõem a permutação podem ser escritos como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 2 & 9 \end{pmatrix} = (\ 2 \quad 10 \quad 9\ )$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} = (\ 5 \quad 6 \quad 8\ )$$

Desta maneira podemos decompor a permutação em ciclos como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 1 & 7 & 6 & 8 & 3 & 5 & 2 & 9 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 4 \quad 7 \quad 3\ ) \circ (\ 2 \quad 10 \quad 9\ ) \circ (\ 5 \quad 6 \quad 8\ )$$

Consideremos outra permutação e sua decomposição

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 8 & 6 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 3 \quad 8 \quad 5\ ) \circ (\ 2\ ) \circ (\ 4 \quad 6 \quad 7\ ) \circ (\ 9\ )$$

Em muitos casos, quando o conjunto de permutações está subentendido ou pode ser facilmente extraído do contexto, costumamos omitir os elementos fixados na decomposição. Desse jeito, sabendo que estamos trabalhando com uma permutação em S_9, temos que podemos representar a permutação da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 8 & 6 & 1 & 7 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 3 \quad 8 \quad 5\ ) \circ (\ 4 \quad 6 \quad 7\ )$$

Deixamos ao leitor as seguintes tarefas:

Exercício 2.3.1 *Decomponha as seguintes permutações em ciclos disjuntos:*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 8 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 6 & 7 & 2 & 8 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 10 & 3 & 9 & 7 & 8 & 6 & 5 & 11 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 2.3.2 *Expresse as seguintes decomposições em ciclos como permutações na notação usual.*

- $(\ 1 \quad 5 \quad 8 \quad 7\ ) \circ (\ 2 \quad 6 \quad 9\ ) \circ (\ 10 \quad 4 \quad 3\ ) \in S_{10}$.
- $(\ 1 \quad 3 \quad 7 \quad 4 \quad 6\ ) \circ (\ 2 \quad 8\ ) \in S_9$.

Outro conceito que abordamos foi a quantidade de vezes que tivemos de operar uma permutação com ela mesma até encontrar a identidade. Essa é a noção de ordem de uma permutação.

Definição 2.3.6 *Definimos como ordem de uma permutação $p \in S_n$, o menor inteiro positivo k tal que $p^k = e_n$, em que e_n é a permutação identidade de S_n. Escrevemos $ord(p) = k$.*

Exemplo 2.3.7 *Levando em conta as permutações da resolução do problema 2.3.1, temos:*

- *A ordem da permutação* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ *é* 3.
- *A ordem da permutação* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *é* 5.
- *A ordem da permutação* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *é* 15.

Observação 2.3.8 *A ordem de um ciclo é igual ao seu comprimento. A ordem de uma permutação decomposta em ciclos disjuntos é igual ao mínimo múltiplo comum entre as ordem dos ciclos.*

Exercício 2.3.3 *Determine a ordem das permutações do exercício 2.3.1.*

Vejamos outro problema interessante.

Problema 2.3.9 *Um embaralhamento perfeito de um baralho com um número par de cartas consiste no seguinte conjunto de passos*

- *Dividir o baralho em duas partes iguais (corte), as quais nomearemos partes **I** e **II**;*
- *Juntar ambas as partes de maneira que no topo fique a primeira carta da parte **I**, embaixo dela fique a primeira carta da parte **II**, que, por sua vez, embaixo dela fique a segunda carta da parte **I**, que, por sua vez, embaixo dela fique a segunda carta parte **II**, assim por diante.*

Marcelo, um viciado em jogos de azar e dono de excelente memória estava jogando cartas com seus amigos. No seu momento de embaralhar, ele havia visto e memorizado a ordem das cartas do baralho. Para que pudesse utilizar a memorização das cartas, ele deveria fazer sucessivos embaralhamentos perfeitos até o momento que as cartas se encontrem na posição inicial, que ele memorizou. Quantos embaralhamentos perfeitos deverão ser realizados para que isso ocorra?

Solução:

Por questões de espaço, utilizaremos uma tabela para representar as trocas de posições, relacionando a posição de uma carta antes e depois de um embaralhamento perfeito. Dividiremos a tabela em 4 partes de maneira a aproveitar melhor o espaço.

Tabela 7 - Tabela do Emabaralhamento Perfeito

Antes	Depois	Antes	Depois	Antes	Depois	Antes	Depois
1	1	14	33	27	14	40	46
2	27	15	8	28	40	41	21
3	2	16	34	29	15	42	47
4	28	17	9	30	41	43	22
5	3	18	35	31	16	44	48
6	29	19	10	32	42	45	23
7	4	20	36	33	17	46	49
8	30	21	11	34	43	47	24
9	5	22	37	35	18	48	50
10	31	23	12	36	44	49	25
11	6	24	38	37	19	50	51
12	32	25	13	38	45	51	26
13	7	26	39	39	20	52	52

Fonte: O autor, 2021.

Escreveremos, utilizando a notação de ciclos, a permutação que corresponde ao embaralhamento perfeito.

Temos que a carta de número 1 permanece na posição 1 e, como sabemos o domínio que estamos trabalhando, S_{52}, não existe necessidade de explicitar o ciclo (1). O mesmo ocorre para o ciclo (52). Observando a tabela, vejamos agora as outras cartas:

- A carta que antes estava na posição 2, após o embaralhamento perfeito, vai para a posição 27.
- A carta na posição 27, após o embaralhamento perfeito, vai para a posição 14.
- A carta na posição 14, após o embaralhamento perfeito, vai para a posição 33.
- A carta na posição 33, após o embaralhamento perfeito, vai para a posição 17.
- A carta na posição 17, após o embaralhamento perfeito, vai para a posição 9.
- A carta na posição 9, após o embaralhamento perfeito, vai para a posição 5.
- A carta na posição 5, após o embaralhamento perfeito, vai para a posição 3.
- A carta na posição 3, após o embaralhamento perfeito, vai para a posição 2, assim fechando um ciclo.

$$(\ 2\quad 27\quad 14\quad 33\quad 17\quad 9\quad 5\quad 3\ )$$

Com o mesmo processo, podemos descobrir os outros ciclos que compõem a permutação que corresponde ao embaralhamento perfeito

(4 28 40 46 49 25 13 7)

(6 29 15 8 30 41 21 11)

(10 31 16 34 43 22 37 19)

(12 32 42 47 24 38 45 23)

(50 51 26 39 20 36 44 48)

(18 35)

Temos que a permutação que representa o embaralhamento perfeito é composta de seis ciclos de comprimento 8 e um ciclo de comprimento 2. A ordem da permutação será 8, pois $mmc(8, 2) = 8$. Assim, após oito embaralhamentos perfeitos as cartas retornam para sua posição inicial.

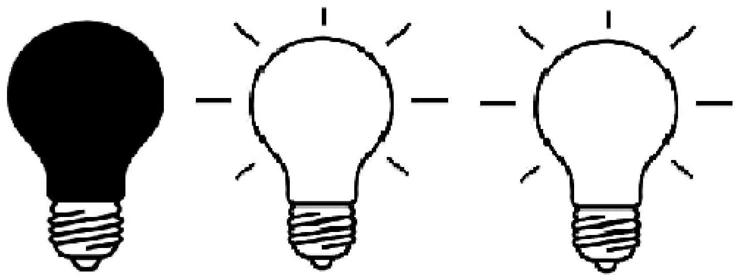
■

2.4 Sinal de uma permutação

Comecemos trabalhando o seguinte problema:

Problema 2.4.1 (Problema das Lâmpadas) *Sobre uma mesa encontram-se três lâmpadas de maneira que apenas duas encontram-se acesas, como na figura abaixo:*

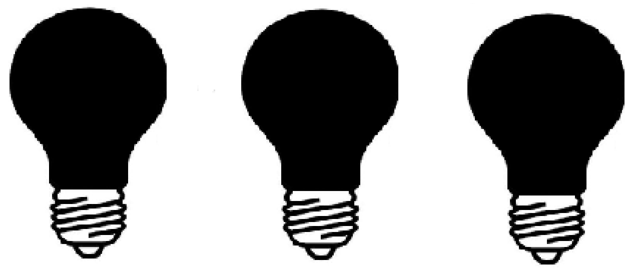
Figura 27 - Estado inicial das lâmpadas



Fonte: O autor, 2021.

Por algum mecanismo, que se desconhece, só conseguimos alterar o estado de uma lâmpada se, simultaneamente, também trocarmos o estado de outra. Assim, por exemplo, a partir do estado inicial, só podemos apagar a lâmpada do meio se também apagarmos a lâmpada da direita, ou se acendermos a lâmpada da esquerda.

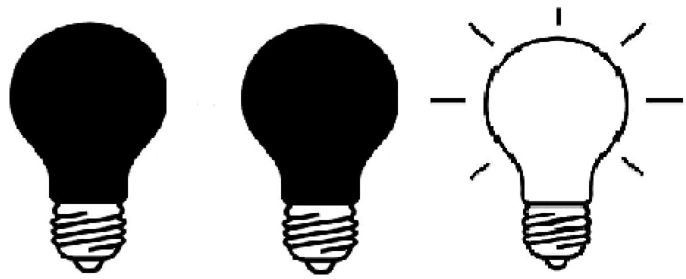
Figura 28 - Configuração possível para as lâmpadas



Fonte: O autor, 2021.

Mas não conseguimos passar, diretamente, do estado inicial para o descrito abaixo

Figura 29 - Configuração impossível para as lâmpadas



Fonte: O autor, 2021.

É possível deixar todas as lâmpadas acesas ao mesmo tempo?

Solução: Sendo possível, devemos mostrar um caminho para atingir o objetivo. Caso contrário, devemos argumentar o motivo da impossibilidade. Após algumas tentativas sem sucesso, somos levados a desconfiar que não é possível deixar todas as lâmpadas acesas simultaneamente. Sendo assim, devemos ter uma estratégia ou algum instrumento que nos permita concluir que é impossível. Experimentemos contar a quantidade de lâmpadas em cada estado. Podemos observar que, após algumas mudanças de estado das lâmpadas, temos duas possibilidades quanto à paridade das quantidades de lâmpadas em cada estado: ou temos duas lâmpadas acesas e uma apagada ou três lâmpadas apagadas. Mas será que realmente só teremos esses dois estados? O que explica isso é a condição do problema de só podermos mudar o estado de uma lâmpada tendo de alterar também o estado de outra. Suponha que estejamos diante do estado inicial com duas lâmpadas acesas e uma apagada. Ao mudar o estado temos duas possibilidades, desligar uma lâmpada acesa e ligar uma apagada ou desligar as duas acesas. Temos que no final teremos duas acesas e uma apagada ou três apagadas. Avaliemos o que ocorre quando temos o cenário com três lâmpadas apagadas. Nesse caso, só podemos acender duas lâmpadas, restando uma apagada ao trocar os estados. Concluímos que sempre teremos um número par de lâmpadas acesas e um número ímpar de lâmpadas apagadas. Assim, podemos apenas transitar entre esses dois estados, explicando a impossibilidade de obtermos três lâmpadas acesas.

Outra solução seria tentar atribuir sinais, negativo ou positivo, a cada um dos estados das lâmpadas. Por exemplo, à lâmpada acesa atribuímos o sinal positivo (+1) e à lâmpada apagada atribuímos o sinal (-1). E atribuímos um sinal ao estado que se encontra todo o conjunto das lâmpadas, que é feito multiplicando o sinal de todas elas. Teremos que o sinal do estado inicial é

$$(+1) \times (-1) \times (+1) = -1$$

Observe que trocar o estado de uma lâmpada significa multiplicar o seu sinal por (-1). Como, pela regra do problema, devemos sempre alterar o estado de duas lâmpadas ao mesmo tempo, cada mudança no estado geral do conjunto de lâmpadas significa multiplicar o seu sinal por (-1) duas vezes. Como, temos que $(-1) \times (-1) = +1$, não alteramos o sinal do conjunto de lâmpadas a cada movimento. Isso significa que só podemos atingir estados com o sinal negativo. O sinal do conjunto das três lâmpadas acesas é $(+1) \times (+1) \times (+1) = +1$. Assim, não é possível, a partir do estado inicial, deixar as três lâmpadas acesas.

■

Inspirado no problema que acabamos de resolver acima, propomos abaixo um exercício ao leitor.

Exercício 2.4.1 *Sobre uma mesa encontram-se 5 moedas viradas com a face "cara" para cima.*

Figura 30 - Configuração inicial das moedas

Fonte: O autor, 2021.

É possível deixar todas as moedas com a face "coroa" virada para cima, tendo a condição de que só podemos virar 3 *moedas simultaneamente?*

Os dois últimos problemas foram elaborados tomando como inspiração o trabalho de (JÚNIOR, 2014).

Da mesma maneira que atribuímos um sinal ao conjunto de moedas e ao conjunto de lâmpadas, também podemos atribuir um sinal às permutações do grupo S_n. Para entender a ideia, comecemos com e_4, o elemento neutro de S_4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Como foi natural atribuir um sinal positivo (+1) ao conjunto de lâmpadas, no momento em que todas as lâmpadas estão acesas, e ao conjunto de moedas, no momento em que todas estão com a face "cara"virada pra cima (no caso, porque o problema as apresenta assim inicialmente). Convém, também, atribuir o sinal positivo ao elemento neutro de S_4.

Observe que da maneira que procedemos, caso mudássemos o estado de uma única moeda ou uma única lâmpada, o sinal do conjunto iria se alterar. Por exemplo, o sinal da Figura 28 é negativo, pois $(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$, enquanto que o sinal da Figura 29 é positivo, pois $(-1) \times (-1) \times (+1) = +1$. A única mudança da Figura 28 para a Figura 29 foi o estado da lâmpada da direita que estava apagada e foi acesa. De maneira parecida, estabelecemos que uma troca de posição entre os elementos de uma mesma linha na permutação, altera o seu sinal. Como já foi comentado, as mudanças de posição serão restritas aos elementos da segunda linha.

Por essa lógica, à permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

será atribuído o sinal negativo, uma vez que trocamos o 2 e o 4 de posição, tomando como referência inicial a permutação e_4.

Ficando definido que o sinal da permutação a partir da quantidade de vezes que trocamos de lugar os elementos da segunda linha de uma permutação, tendo como referência o elemento neutro, podemos determinar o sinal de qualquer permutação fazendo o caminho inverso, ou seja, rearrumando os elementos da segunda linha a fim de obter o elemento neutro. Vejamos a permutação abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Comecemos colocando o número 1 na primeira posição da segunda linha. De maneira bem simples, podemos trocá-lo de lugar com o número 2. Desta maneira, o número 2 ficará embaixo do 3 e o número 1 embaixo do 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para colocar o número 2 na segunda posição da segunda linha podemos trocá-lo de lugar com o número 4. Desta maneira, o número 4 ficará embaixo do três e o número 2 embaixo do 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Por fim, basta trocar o 3 e o 4 de lugar para obter o elemento neutro. Desta maneira, temos que o número de vezes que a permutação mudou de sinal foi 3, isso nos diz que o sinal deste elemento é negativo.

Vejamos um outro exemplo de cálculo do sinal de uma permutação.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Repetiremos o processo feito acima:

Trocaremos o 1 e o 4 na segunda linha, de maneira que o 1 ficará embaixo de 1 e o 4 embaixo do 6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Trocaremos o 2 e o 5 na segunda linha, de maneira que o 2 ficará embaixo de 2 e o 5 embaixo do 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Trocaremos o 4 e o 6 na segunda linha, de maneira que o 4 ficará embaixo de 4 e o 6 embaixo do 6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Assim, como fizemos 3 trocas de números na segunda linha, temos que a permutação trocou de sinal 3 vezes. Concluímos que seu sinal é negativo.

Dizemos que uma permutação com sinal negativo é uma permutação ímpar e uma permutação com sinal positivo é uma permutação par.

Deixaremos ao leitor um exercício sobre o cálculo do sinal da permutação

Exercício 2.4.2 *Calcule o sinal das permutações abaixo:*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemplo 2.4.2 *Considerando todos os elementos de S_3, temos que as permutações pares são*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e as permutações ímpares são

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Agora que sabemos o que é a paridade de uma permutação, vejamos uma maneira prática de determiná-la. Para isto, usaremos o fato de que podemos decompor uma permutação em ciclos disjuntos. Considere em primeiro lugar, o ciclo abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 6 \quad 5\ )$$

Trocamos o número na primeira posição do ciclo pelo número da segunda posição.

- Trocamos o número 1 pelo número 3 na segunda linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (\ 3 \quad 4 \quad 2 \quad 6 \quad 5\ )$$

Ao trocar a posição do elemento na primeira posição com o da segunda, reduzimos o tamanho do ciclo. Repetimos o processo até chegarmos na posição identidade. Assim,

- Trocamos o número 3 pelo número 4 na segunda linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (\ 4 \quad 2 \quad 6 \quad 5\ )$$

- Trocamos o número 4 pelo número 2 na segunda linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (\ 2 \quad 6 \quad 5\ )$$

- Trocamos o número 2 pelo número 6 na segunda linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (\ 6 \quad 5\ )$$

- Trocamos o número 6 pelo número 5 na segunda linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (\ 5\ ) = e_6$$

Como realizamos cinco trocas, concluímos que o 6-ciclo em questão é uma permutação ímpar. Observe que qualquer 6-ciclo será uma permutação ímpar, pois este processo pode ser repetido para todo 6-ciclo, independente dos elementos que o formem. Abstraindo o processo, observamos que para um r-ciclo qualquer ser transformado em um ciclo de tamanho 1, a identidade, deve-se repetir o processo de trocar $r - 1$ vezes. Sabemos que se r é par, $r-1$ é ímpar e se r é ímpar, $r-1$ é par. Desta forma todo r-ciclo, com r par, é uma permutação ímpar e todo r-ciclo, com r ímpar, é uma permutação par.

Em outras palavras, temos o seguinte teorema

Teorema 2.4.3 *Seja ρ um r-ciclo, o sinal da permutação ρ, representado por $sgn(\rho)$ é dado pela fórmula*

$sgn(\rho) = (-1)^{r-1}$

Vejamos agora o sinal de uma permutação e a relação da sua decomposição com ciclos disjuntos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (\ 1 \quad 3 \quad 7\ ) \circ (\ 2 \quad 4 \quad 8 \quad 5\ )$$

Deixamos ao leitor a tarefa de determinar o sinal da permutação acima pelo método de verificar quantas trocas foram feitas. Ao fazer isso, temos que a permutação tem sinal negativo, ou seja, é uma permutação ímpar.

Esta permutação pode ser decomposta como um 3-ciclo e um 4-ciclo, ou seja, uma permutação par, em que foram realizadas duas trocas de posições na segunda linha para atingir a identidade, e uma permutação ímpar, em que foram realizadas 3 trocas para atingir a identidade. Como os elementos movidos por uma permutação não são movidos pela outra, temos que uma maneira de, a partir da permutação original, atingir a identidade é realizando as duas trocas de posições relativas ao 3-ciclos e mais três trocas de posições relativas ao 4-ciclo, totalizando cinco trocas de posições. Vemos que a permutação é uma permutação ímpar, ou seja, possui sinal negativo.

Em geral, quando decompomos uma permutação em ciclos disjuntos, temos uma ferramenta para determinar a sua paridade/sinal. Já sabemos como determinar o sinal de um ciclo, por sua vez é fácil ver que, como os ciclos são disjuntos, que dados os elementos de um ciclo particular, as únicas trocas que serão feitas na permutação, em relação a esses elementos, serão as trocas feitas dentro do ciclo. Isto porque, lembrando mais uma vez, dado um conjunto de ciclos disjuntos, um número será movido por no máximo um deles. Podemos concluir, o total de trocas de números na segunda linha de uma permutação é a soma das trocas de números na segunda linha realizada em cada um dos ciclos da sua decomposição em ciclos disjuntos. Como a adição é uma operação que pode ser dita bem definida para as paridades das parcelas, temos que a paridade de uma permutação será a paridade da soma dos ciclos de sua decomposição em ciclos disjuntos e, consequentemente, a soma das paridades dos ciclos de sua decomposição em ciclos disjuntos.

Observação 2.4.4 *Lembre-se que:*

- *PAR + PAR = PAR*
- *PAR + ÍMPAR = ÍMPAR*
- *ÍMPAR + ÍMPAR = PAR*

Utilizando a definição de sinais, podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 2.4.5 *Seja uma permutação π decomposta em ciclos disjuntos $\pi = \rho_1 \circ \ldots \circ \rho_n$, temos que*

$sgn(\pi) = \prod_{i=1}^{n} sgn(\rho_i)$

Deixamos ao leitor o seguinte exercício:

Exercício 2.4.3 *Utilizando a decomposição em ciclos disjuntos, determine o sinal de cada uma das permutações abaixo.*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 9 & 4 & 10 & 2 & 5 & 1 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 7 & 5 & 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 10 & 8 & 1 & 7 & 12 & 9 & 2 & 3 & 11 & 6 \end{pmatrix}$

Os resultados vistos nessa seção podem ser encontrados, com uma demonstração matemática rigorosa, em (GARCIA; LEQUAIN, 2015).

Problema 2.4.6 (ITA-2002) *O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas: "Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança,* *seguido de perto por David e Rubinho, nessa ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado a lado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mãos nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes; aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para os nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pode ultrapassá-lo no final da corrida." Determine a alternativa correta:*

A) David ganhou a corrida.

B) Ralph ganhou a corrida.

C) Rubinho chegou em terceiro lugar.

D) Ralph chegou em segundo lugar.

E) Não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

Solução: Para facilitar, atribuíremos o número 1 ao Ralf, o número 2 ao David e o número 3 ao Rubinho. Como as três primeiras posições ficaram entre os três, ao longo de toda corrida, trabalharemos apenas com as três primeiras posições. Em nossa resolução iremos trabalhar com permutações em que na linha de cima estão elencadas as posições e na linha debaixo estão elencados os jogadores.

Assim, a permutação que representa o estado da corrida após a largada é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ela nos diz que Ralf que é o número 1 está em primeiro, David que é o número 2 está em segundo e Rubinho que é o número 3 está em terceiro.

Suponha que, por exemplo, após algumas mudanças David ultrapasse Ralf e que, em seguida, Rubinho o ultrapasse também. A permutação que representaria a nova disposição da corrida seria

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Como vimos, a cada troca de elementos em uma das linhas da permutação temos que é alterado o seu sinal, ou paridade. Pelos dados do problema, houve a troca entre a primeira posição e a segunda nove vezes e entre a segunda e a terceira houve oito trocas. Como o nosso problema trata-se de uma corrida, não houve troca de posição direta entre o primeiro e o terceiro. Assim, houve 17 trocas de posições durante a corrida. Isso nos diz, então, que a permutação que representa o resultado final da corrida é uma permutação ímpar. Como dito no exemplo 2.4.2 as permutações ímpares de três objetos são

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como o texto do problema nos diz que Rubinho estava logo atrás de David, temos que na segunda linha da permutação que representa o resultado final da corrida o número 3 deve estar exatamente atrás do número 2. Como nenhuma das permutações apresenta esta característica, temos que a resposta da questão é a letra E.

■

Vejamos um último problema em que a determinação da existência ou não de uma solução pode ser feita utilizando o conceito de sinal/paridade da permutação. Para maior aprofundamento sobre o problema abaixo, pode-se consultar (ZAGO, 2017).

Problema 2.4.7 (Jogo dos 15) *O jogo dos 15 é um jogo que consiste em uma grade quadrada* 4×4*, em que os números de* 1 *até* 15 *são distribuídos aleatoriamente nos* 16 *quadrados menores, devendo um desses quadradados, necessariamente, ficar vazio após a distribuição. Vejamos um exemplo de distribuição*

Figura 31 - Jogos dos 15

1	2	3	5
7	10	12	9
15		8	13
11	6	14	4

Fonte: O autor, 2021.

O princípio do jogo consiste em mover para o quadrado vazio um dos números que estejam imediatamente à sua direita, esquerda, abaixo ou acima. Assim, na configuração apresentada acima, podemos mover para o espaço vazio os números 8, 15, 6 *ou* 10.

O objetivo é a partir de dada configuração chegar à configuração abaixo:

Figura 32 - Jogo dos 15

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Fonte: O autor, 2021.

Com base nisso, é possível resolver o jogo apresentado acima?

Solução: Para resolver o problema, devemos começar associando o jogo à uma permutação. Faremos isso ordenando os quadrados em ordem crescente da esquerda para a direita nas linhas 1 e 3 e da direita para esquerda nas linhas 2 e 4, de cima para baixo. Assim, teremos as seguintes posições correspondente a cada um dos quadrados do jogo

Figura 33 - Configuração do jogo

1	2	3	4
8	7	6	5
9		10	11
15	14	13	12

Fonte: O autor, 2021.

A ordenação dos quadrados da configuração objetivo se encontra na figura 34.

Assim, a permutação que corresponde ao jogo é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 9 & 12 & 10 & 7 & 15 & 8 & 13 & 4 & 14 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Enquanto que a permutação que corresponde a configuração solução é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

Figura 34 - Configuração objetivo

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
	15	14	13

Fonte: O autor, 2021.

Aqui, em semelhança ao problema 2.4.1, devemos avaliar o caráter dos movimentos em relação à paridade da permutação. No caso do problema em questão cabe distinguir dois tipos de movimentos: os verticais e os horizontais.

Comecemos trabalhando com um movimento vertical. Neste caso, trabalharemos de cima para baixo.

Figura 35 - Movimento Vertical

1	2	3	5
7		12	9
15	10	8	13
11	6	14	4

Fonte: O autor, 2021.

A permutação desta nova configuração será

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 9 & 12 & 7 & 15 & 10 & 8 & 13 & 4 & 14 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Observe que apesar da mudança nas configurações dos números, não houve mudança de sinal das permutações. Isso se dá pelo fato de uma mudança vertical, tanto para cima quanto para baixo, irá afetar um número par de quadrados e por consequência apenas um número ímpar de numerações de posições, dado o fato que um dos quadrados estará vazio. Assim, de uma permutação para outra mudamos de posição uma quantidade ímpar de números. Em termos de operação entre permutações isto quer dizer que compomos a permutação da configuração inicial com um ciclo de tamanho ímpar e obtivemos a permutação da nova configuração. Sabemos que todo ciclo ímpar é uma permutação par. Podemos concluir que a permutação da configuração inicial e a permutação da configuração obtida após o movimento tem a mesma paridade.

No caso do movimento horizontal é fácil ver que ele não altera a permutação. Assim, concluímos que um movimento do jogo não altera a paridade da permutação que representa a configuração inicial. Desta maneira, é condição necessária para que um jogo tenha solução que a paridade da permutação que representa as configurações inicial e final sejam iguais.

A configuração objetivo pode ser decomposta em ciclos da seguinte maneira:

$(\ 5\quad 8\ ) \circ (\ 6\quad 7\ ) \circ (\ 13\quad 15\ )$

Como é formada por três transposições, a configuração objetivo é representada por uma permutação ímpar. Concluímos que é condição necessária para que o jogo tenha solução que a permutação que representa a sua configuração seja ímpar. Vejamos a decomposição em ciclos da permutação que representa o jogo

$(\ 4\quad 5\quad 9\quad 15\quad 11\quad 13\quad 14\quad 6\quad 12\ ) \circ (\ 7\quad 10\quad 8\ )$

Como é formada por um ciclo de tamanho 9 e outro de tamanho 3, ela é uma composição de duas permutações pares e, portanto, uma permutação par. Assim, a paridade da permutação que representa a configuração final é diferente da que representa a configuração inicial. Concluímos que o jogo em questão não tem solução.

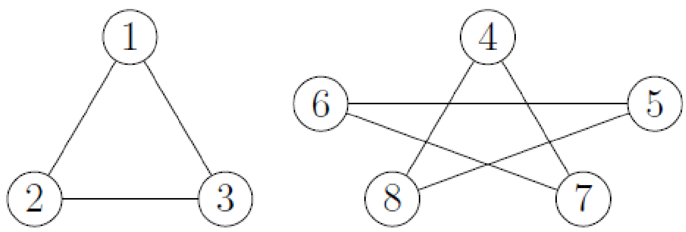
■

3 GRAFOS E PERMUTAÇÕES

3.1 Automorfismos

Comecemos observando que ao longo do Capítulo 1 usamos o fato de que em muitos casos temos situações diferentes que podem ser representadas pelo mesmo grafo, bem como muitos problemas podem ser resolvidos de maneira mais célere se observamos que grafos podem ser representados de formas diferentes, mas exibirem a mesma relação intrínseca entre os seus conjuntos de vértices, uma vez que estabelecemos uma correspondência entre eles. O conceito abordado foi o de isomorfismo, isto é, uma relação biunívoca entre os conjuntos de vértices de maneira a preservar as adjacências. Apesar de não ter sido expresso, passamos por este assunto indiretamente no problema 2.3.1 ao falarmos das trocas de posição. Antes cabe observar que o esquema de trocar pode ser representado através de um grafo.

Figura 36 - Grafo das Bailarinas



Fonte: O autor, 2021.

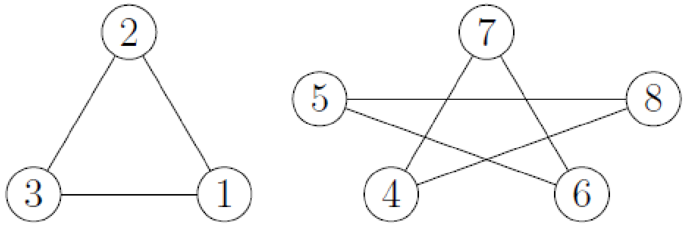
Na resolução do problema observamos que podemos dividir os vértices em dois grupos que irão interagir entre si separadamente com relação ao movimento: $\{1,2,3\}$ e $\{4,5,6,7,8\}$. Tomemos, também, a permutação que descreve o movimento.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Observemos o que acontece com o conjunto de vértices quando realizamos uma vez o movimento:

Observe que, estruturalmente, ambos os grafos tem a mesma forma, ou utilizando o termo técnico, são isomorfos (com a correspondência sendo feita pela permutação anteriormente exibida). Além disso, existe um componente adicional, ambos os grafos são isomorfos e possuem o mesmo conjunto de vértices. Estamos diante de um isomorfismo de um grafo nele mesmo. O objeto matemático em questão é de importância central na teoria algébrica de grafos e o definimos a seguir:

Figura 37 - Grafo das Bailarias após o movimento



Fonte: O autor, 2021.

Definição 3.1.1 *Um isomorfismo de um grafo G nele mesmo é chamado de* ***automorfismo*** *de G. Denotamos o conjunto de automorfismos de G por $Aut(G)$.*

Dado um grafo G, com $|V| = n$, é fácil ver que temos $e_n \in Aut(G)$.

Exemplo 3.1.2 *Observemos que a permutação*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

também é um automorfismo do grafo G que representa a movimentação das bailarinas. É de fácil observação que se uma permutação é um automorfismo de G, todas as suas potências também serão. Mais a frente, argumentaremos este fato de maneira mais geral.

Podemos nos perguntar se toda permutação de S_8 é um automorfismo de nosso grafo G que representa a movimentação das bailarinas. Apresentamos abaixo uma permutação de S_8 que não é automorfismo de G.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & 7 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

A permutação acima não é um automorfismo pois os vértices 1 e 2 são vizinhos, enquanto os vértices 5 e 3 não são. De fato, todas as permutações de S_8 serão automorfismo de um grafo G se e somente se todos todos os vértices são vizinhos uns dos outros ou nenhum vértice possui vizinhos.

Será que todos os automorfismos do grafo G se resumem apenas às potências de $(\ 1\ \ 3\ \ 2\ ) \circ (\ 4\ \ 8\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ )$?

Em primeiro lugar podemos observar que como temos dois conjuntos que não interagem entre si, podemos fixar os elementos de um deles e permutar os elementos do outro. Desta maneira, teremos que $(\ 1\ \ 3\ \ 2\ )$ e $(\ 4\ \ 8\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ )$, bem como suas potências, serão automorfismos de G. Temos ainda o fato de que composição de quaisquer potências dessas duas permutações, será ainda um automorfismo de G, isto se dá pelo fato de potências de ciclos disjuntos permanecerem ciclos disjuntos.

Entretanto, apesar de termos encontrado tantos automorfismos de G, ainda não encontramos todos. Veja que a permutação $(\ 5\ \ 6\ ) \circ (\ 7\ \ 8\ )$ é um automorfismo do grafo G, pois também preserva as suas vizinhanças. Temos, entretanto que este elemento não pode ser descrito como uma composição de potências de $(\ 1\ \ 3\ \ 2\ )$ e $(\ 4\ \ 8\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ )$, pois qualquer composição destas duas permutações terá ordem 3, 5 ou 15, enquanto a permutação em questão tem ordem 2.

Podemos determinar outros automorfismos do grafo, mas para isto, precisaremos antes de alguns resultados.

Em primeiro lugar, considere os automorfismos do grafo G que representa as bailarinas

$(\ 1\ \ 3\ \ 2\ ) \circ (\ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 7\ \ 5\ )$ e $(\ 5\ \ 6\ ) \circ (\ 7\ \ 8\ )$

Operando-os

$((\ 1\ \ 3\ \ 2\ ) \circ (\ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 7\ \ 5\ )) \circ ((\ 5\ \ 6\ ) \circ (\ 7\ \ 8\ ))$

Temos que o resultado será

$(\ 1\ \ 3\ \ 2\ ) \circ (\ 4\ \ 6\ ) \circ (\ 5\ \ 8\ )$

Uma permutação que também preserva as adjacências do grafo G. Isso nos leva a questionar se a composição de duas permutações que são automorfismos de um grafo G ainda será um automorfismo do grafo G. A resposta é sim e vejamos o motivo. Imagine que tenhamos duas permutações f, g de vértices de um grafo G, que são automorfismos, em que os vértices 1 e 4 são adjacentes. Suponhamos que f, à esquerda, e g, à direita, tenham as seguintes expressões:

$$\begin{pmatrix} \dots & 2 & 3 & \dots \\ \dots & 7 & 5 & \dots \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 4 & \dots \\ 2 & \dots & 3 & \dots \end{pmatrix}$$

Como g é um automorfismo, temos que 2 e 3 são adjacentes no grafo G, bem como 5 e 7, pois f também um automorfismo de G. Assim, $f \circ g$ é um automorfismo de G.

De maneira geral, dadas duas permutações que são automorfismos de um grafo G, a sua composição também será um automorfismo de G.

Olhando novamente para o automorfismo

$(\ 1\ \ 3\ \ 2\ ) \circ (\ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 7\ \ 5\ )$,

consideremos o seu inverso (Verifique!)

$(\ 1\ \ 2\ \ 3\ ) \circ (\ 4\ \ 5\ \ 7\ \ 8\ \ 6\ )$

Observemos que esta permutação inversa também é um automorfismo de G, pois preserva a adjacência de seus vértices. Podemos nos questionar se a inversa de uma permutação que é um automorfismo de um grafo G ainda será um automorfismo do grafo G. Para verificar, imagine que tenhamos uma permutação f que seja um automorfismo dos vértices de um grafo G, em que os vértices 1 e 5 são adjacentes. Suponha que f tenha a seguinte expressão:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 5 & \dots \\ 6 & \dots & 4 & \dots \end{pmatrix}$$

Como f é um automorfismo de G e os vértices 1 e 5 são adjacentes em G, temos que os vértices 4 e 6 também serão. A permutação inversa de f terá a seguinte expressão

$$\begin{pmatrix} \dots & 4 & \dots & 6 & \dots \\ \dots & 5 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix}$$

Como 4 e 6 são adjacentes e por hipótese 1 e 5 também são, temos que a permutação preserva a adjacência desses dois vértices. Levando em conta que o mesmo argumento poderia ser repetido para qualquer par de vértices em qualquer permutação, concluímos que a permutação inversa de qualquer automorfismo de um grafo G também será um automorfismo de G.

Note que já verificamos que a operação composição "$\circ$" é fechada em $Aut(G) \subset S_n$, em que $n = |V|$. Além disso, temos que:

- **Elemento neutro**: $e_n \in Aut(G)$
- **Elemento inverso**: se $f \in Aut(G)$, então $f^{-1} \in Aut(G)$.
- **Associatividade**: se $f, g, h \in Aut(G)$, então $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Isso se dá pelo fato de $Aut(G)$ ser um subconjunto de S_n

Daí concluímos que $(Aut(G), \circ)$ é um grupo. Vejamos um problema:

Problema 3.1.3 *Durante a aula da Professora Laura, os alunos estavam falando muito. Ela decidiu mudar os alunos de lugar para que parassem de conversar. Após algum tempo, Joãozinho percebeu que a professora havia mudado os alunos de lugar de tal maneira que os alunos que estavam próximos antes da mudança continuaram próximos e, além disso, os lugares que estavam vazios continuaram vazios. Com isto, a bagunça continuou. Pedrinho, um aluno curioso, começou a refletir de quantas maneiras a professora poderia mudar os alunos de lugar, tendo em vista que alunos que estavissem próximos antes da mudança continuassem próximos e lugares vazios continuem vazios.*

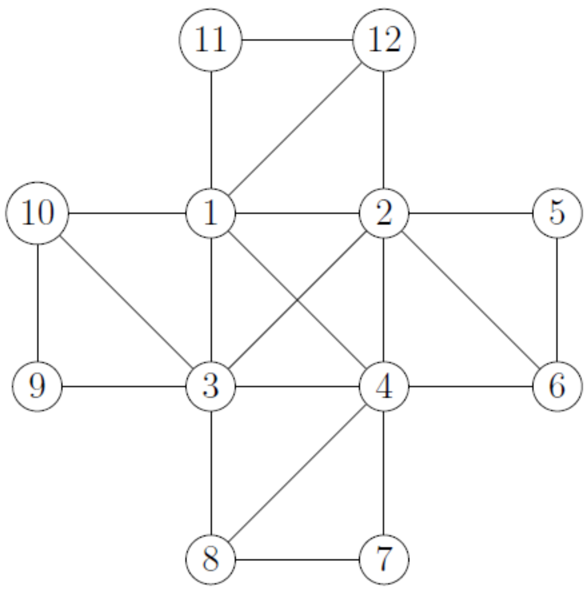
Figura 38 - Configuração

11	12		5
	1	2	6
10	3	4	
9		8	7

Fonte: O autor, 2021.

Solução: podemos criar um grafo G que represente a situação da sala antes da mudança. Os vértices do grafo serão os alunos e dois vértices serão vizinhos caso os alunos sejam vizinhos imediatos na horizontal, vertical ou diagonal.

Figura 39 - Grafo da Sala de Aula



Fonte: O autor, 2021.

Para resolver o problema, precisaremos antes de um resultado.

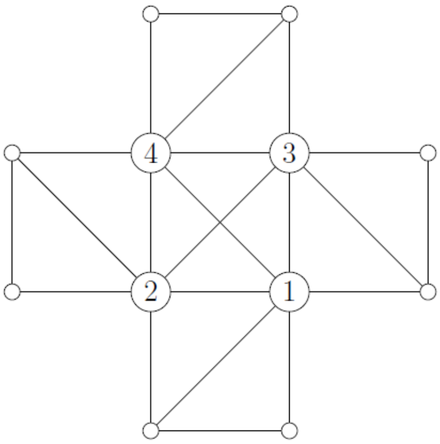
Teorema 3.1.4 *Seja G um grafo, v um vértice de G e v' a imagem de v por um automorfismo de G, temos que $d(v) = d(v')$*

Prova: Considere $N(v) = \{v_1, \ldots, v_k\}$, a vizinhança de v em G. Sejam $\{v_1', \ldots, v_k'\}$, as imagens dos elementos do conjunto $N(v)$ pelo automorfismo em questão. Como os automorfismos preservam adjacências, sendo $\{v, v_i\}$ uma aresta de G, teremos que $\{v', v_i'\}$ também deve ser um aresta de G. Temos então que $\{v_1', \ldots, v_k'\} \subset N(v')$. O mesmo argumento, só que aplicado ao automorfismo inverso, nos dá que $\{v_1', \ldots, v_k'\} \supset N(v')$. Concluímos que $N(v') = \{v_1', \ldots, v_k'\}$. Daí temos que $d(v) = k = d(v')$. ∎

Em outras palavras, o teorema nos diz que um automorfismo de um grafo G permuta seus vértices de mesmo grau. Comecemos então pelos vértices de maior grau do nosso grafo G da sala de aula: $\{1, 2, 3, 4\}$.

Em primeiro lugar, devemos reparar que uma vez determinada a posição dos elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, a posição de todos os outros estará determinada. Suponha que os coloquemos na seguinte posição

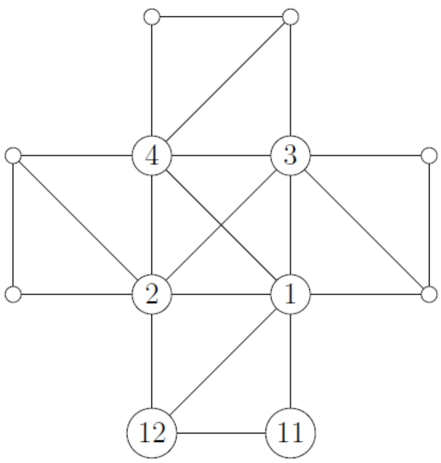
Figura 40 - Vértices $\{1, 2, 3, 4\}$



Fonte: O autor, 2021.

Temos que os vértices 11 e 12, como são vizinhos de 1 e 2, devem ocupar os vértices restantes do quadrado debaixo. Como o vértice 12 tem grau 3 e o vértice 11 tem grau 2 suas posições estão completamente determinadas.

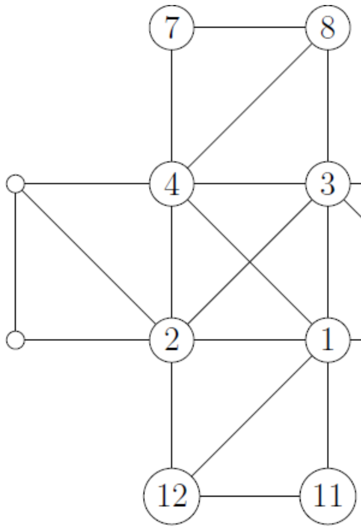
Figura 41 - Introdução dos vértices 11 e 12



Fonte: O autor, 2021.

Temos que os vértices 7 e 8, como são vizinhos de 3 e 4, devem ocupar os vértices restantes do quadrado de cima. Como o vértice 8 tem grau 3 e o vértice 7 tem grau 2 suas posições estão completamente determinadas.

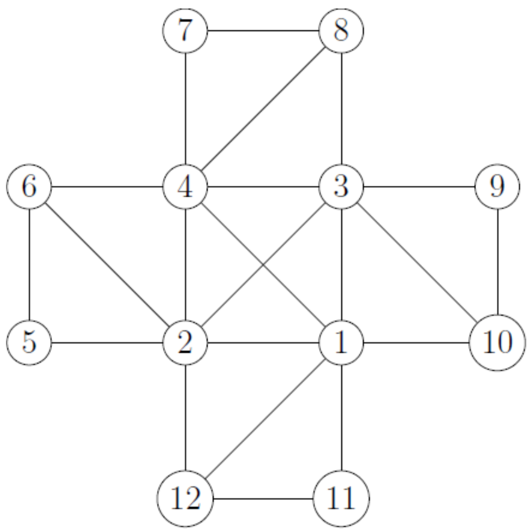
Figura 42 - Introdução dos vértices 7 e 8



Fonte: O autor, 2021.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para os pares de vértices $\{5, 6\}$ e $\{9, 10\}$, de maneira a completar a permutação.

Figura 43 - Permutação Completa



Fonte: O autor, 2021.

Assim, a permutação que representa esse automorfismo é

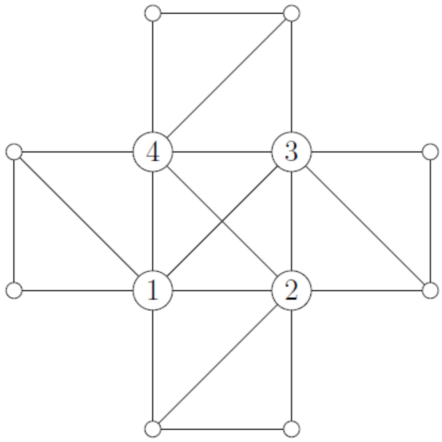
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 10 & 11 & 12 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que uma vez permutados os vértices do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, nosso automorfismo estará completamente determinado. Porém, é interessante observar que não é qualquer permutação dos elementos do conjunto que irá gerar um automorfismo. Por exemplo, tomando

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

teremos a seguinte disposição

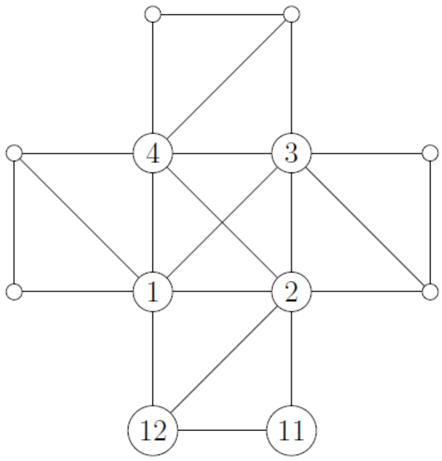
Figura 44 - Permutação (1423)



Fonte: O autor, 2021.

Observe que, tendo essa configuração, deveríamos preencher o quadrado debaixo com os vértices 11 e 12. Como 12 tem grau 3 e 11 tem grau 2 suas posições estão completamente determinadas.

Figura 45 - Adicionando os vértices 11 e 12



Fonte: O autor, 2021.

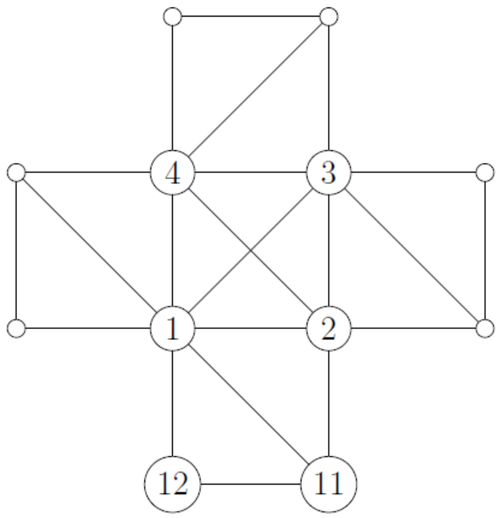
Entretanto observe que na figura 39, o 11 é vizinho do 1 e agora, ele é vizinho do 2, deixando de preservar adjacências. Desta forma, a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

não gera um automorfismo do grafo G.

Outra maneira de perceber isso é que para poder "encaixar" os vértices 12 e 11 de maneira a obtermos um automorfismo, teríamos de reverter a diagonal

Figura 46 - Revertendo diagonais



Fonte: O autor, 2021.

Porém, aumentaríamos o grau do vértice 1, que agora passaria a ser 7. Assim, não podemos ter nenhuma permutação dos elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ que reverta uma das diagonais. É fácil ver que as únicas permutações desse conjunto que não reverterão as diagonais são as rotações em um ângulo de 90°.

Assim, teremos que os automorfismos de G são

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 9 & 10 & 11 & 12 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 11 & 12 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

As permutações encontradas acima são a solução do problema.

∎

3.2 Grupo Diedral e Grafo Ciclo

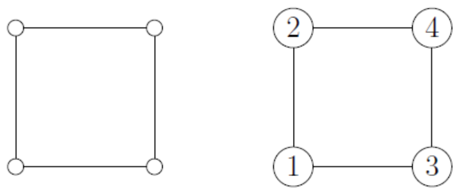
Problema 3.2.1 *Determine as simetrias de um polígono regular convexo de n lados.*

Solução: Em primeiro lugar, simetrias são transformações que preservam distâncias entre pontos. Pelo fato de preservar a distância entre dois pontos, temos que dois pontos cuja distância é a maior possível, devem vir a corresponder a dois pontos cuja distância também é a maior possível. Levando em conta que a maior distância em um polígono regular é a sua maior diagonal e, sendo, uma diagonal um segmento que conecta dois vértices, concluímos que, quando restrita ao conjunto de vértices, uma simetria é uma permutação dos mesmos.

Tomando um ponto do polígono que não seja um vértice, podemos ligá-lo aos outros vértices, de maneira a obter n distâncias. Não entraremos em detalhes, mas dada a distância de um ponto a outros três pontos não colineares, no plano, sua posição está totalmente determinada. Assim, como a simetria preserva distâncias, para resolver nosso problema, podemos focar apenas nos vértices. Para um estudo sobre as simetrias no plano euclidiano e sua relação com teoria de grupos consultar (LIMA, 2017).

Por outro lado, podemos considerar um polígono de n lados como um grafo, em que os vértices do grafo são os vértices do polígono que serão ligados quando forem extremos de um dos lados.

Figura 47 - Quadrado e seu grafo



Fonte: O autor, 2021.

Um grafo, constituído de uma única componente, cujos vértices têm grau 2 é chamado de **grafo ciclo** e representado por C_n, em que $n = |V|$.

Ao associar cada polígono com um grafo, nosso problema se transformou em determinar o grupo de automorfismos de um grafo C_n, ou seja, determinar $Aut(C_n)$.

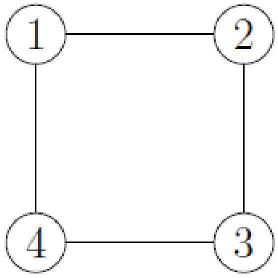
Para facilitar, em um primeiro momento, determinaremos apenas $Aut(C_4)$, ou seja, o grupo de automorfismos do grafo que representa um quadrado.

Para termos ideia, comecemos montando um automorfismo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}$$

Fixemos as posições como apresentadas na Figura 48. Comecemos escolhendo a posição que colocaremos o número 1: como não temos nenhuma restrição, podemos escolher

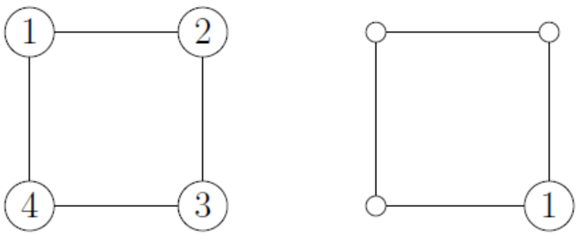
Figura 48 - Grafo C_4



Fonte: O autor, 2021.

qualquer uma delas no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Suponha que escolhamos a posição de número 3. Teremos a seguinte correspodência:

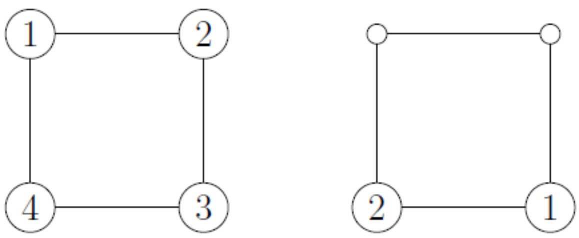
Figura 49 - Construindo um automorfismo de C_4



Fonte: O autor, 2021.

A partir daí, teremos que para escolher a posição do 2 já haverá uma restrição. Só poderemos escolher uma posição em que ele seja vizinho do 1, pois estamos interessados em preservar adjacências. Assim, devemos escolher entre a posição 2 ou a posição 4. Suponha que escolhemos a posição 4:

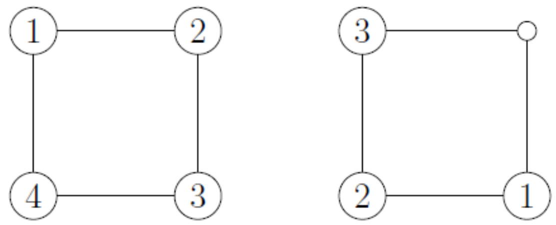
Figura 50 - Construindo um automorfismo de C_4



Fonte: O autor, 2021.

Para a posição do 3 devemos escolher uma das posições de maneira que ele seja vizinho do 2, como a posição 3 já está ocupada pelo 1, só podemos escolher a posição 1.

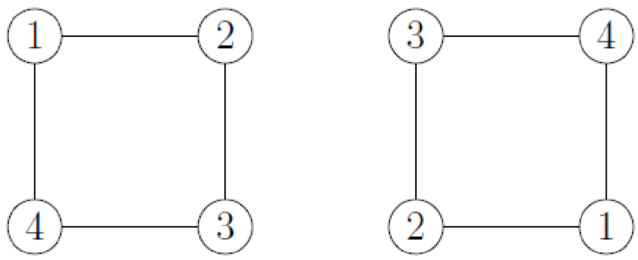
Figura 51 - Construindo um automorfismo de C_4



Fonte: O autor, 2021.

Por fim, o 4 deve ficar na posição 2.

Figura 52 - Construindo um automorfismo de C_4



Fonte: O autor, 2021.

Assim, teremos a seguinte permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ao escolher a posição do 2, após ter escolhido a posição do 1, tivemos restrição e não tivemos liberdade de escolher a posição de nenhum dos outros dois números. No nosso caso escolhemos colocar o número 1 na posição 3, mas qualquer outra posição escolhida teríamos uma restrição semelhante:

- Caso tivéssemos escolhido colocar o 1 na posição 1, deveríamos escolher uma posição vizinha do 1 para colocar o 2. Teríamos como opções as posições 2 e 4.
- Caso tivéssemos escolhido colocar o 1 na posição 2, deveríamos escolher uma posição vizinha do 2 para colocar o 2. Teríamos como opções as posições 1 e 3.
- Caso tivéssemos escolhido colocar o 1 na posição 4, deveríamos escolher uma posição vizinha do 4 para colocar o 2. Teríamos como opções as posições 1 e 3.

Peguemos o primeiro caso para poder desmembrar:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & & \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & & \end{pmatrix}$

- Na primeira permutação, para a posição do 3 devemos escolher uma posição vizinha do 2. Devemos, então, escolher a posição 3, pois foi o única posição vizinha do 2 que ainda não foi escolhida.
- Na segunda permutação, para a posição do 3 devemos escolher uma posição vizinha do 4. Devemos, então, escolher a posição 3, pois foi o única posição vizinha do 4 que ainda não foi escolhida.

Uma vez escolhidos os correspondentes dos três primeiros elementos, temos apenas uma posição para colocar o 4. Assim, teremos:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Podemos deduzir que no caso do C_4, a escolha das posições dos dois primeiros elementos, determina a permutação por completo. Assim, teremos as seguintes combinações para escolha das duas primeiras posições:

$(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)$

Dessa maneira, a partir das combinações acima, temos as seguintes permutações:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \; p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

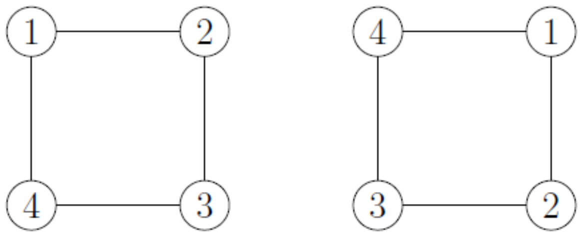
$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \; p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \; p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$p_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \; p_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uma observação é que, neste caso, temos duas simetrias chaves. Observe que p_4 é a rotação de ângulo $90°$ em torno do centro do quadrado e no sentido horário.

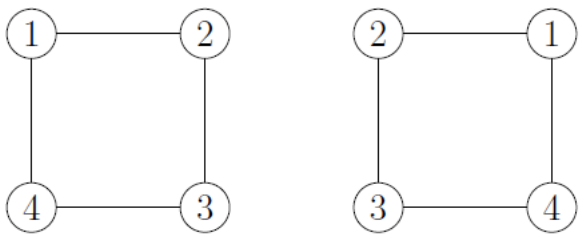
Figura 53 - Representação da transformação p_4



Fonte: O autor, 2021.

Enquanto p_3 é a reflexão em relação ao eixo vertical que passa pelos pontos médios das arestas $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$ do quadrado.

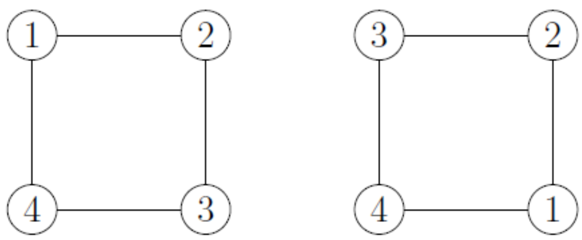
Figura 54 - Representação da transformação p_3



Fonte: O autor, 2021.

É interessante observar que todos os elementos podem ser constituídos a partir de uma combinação desses dois ou de suas potências. Por exemplo, ao tomarmos p_5, temos que ele pode ser obtido através de uma reflexão em torno do eixo vertical e, após isso, uma rotação de 90° no sentido horário.

Figura 55 - Representação da transformação p_5



Fonte: O autor, 2021.

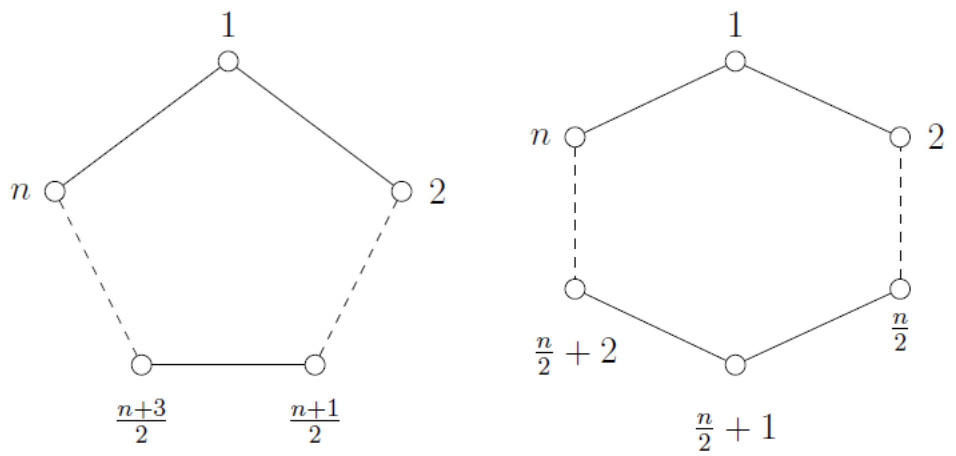
Para os outros elementos, temos

$p_4^2 = p_6$ $\qquad$ $p_4^3 = p_7$ $\qquad$ $p_4^4 = p_1$

$p_4 \circ p_3 = p_5$ $\qquad$ $p_4^2 \circ p_3 = p_8$ $\qquad$ $p_4^3 \circ p_3 = p_2$

Caso geral: o exemplo anterior nos dá uma dica para resolver o caso geral. Temos que todas as permutações do grupo de automorfimos de C_4 podiam ser escritas como uma combinação de uma rotação, ou uma de suas potências, e uma reflexão. Tomando um polígono de n vértices, e sua respectiva representação C_n, com seus vértices numerados de 1 a n.

Figura 56 - C_n para os casos em que n é ímpar e par, respectivamente



Fonte: O autor, 2021.

Temos que o ciclo

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

é a permutação que representa uma rotação de $\frac{360°}{n}$ em torno do centro do polígono e no sentido anti-horário é um automorfismo de C_n. Além disso, caso n seja ímpar

$$l = \begin{pmatrix} 2 & n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & n-1 \end{pmatrix} \circ \dots \circ \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2} & \frac{n+3}{2} \end{pmatrix}$$

ou, caso n seja par,

$$l = \begin{pmatrix} 2 & n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & n-1 \end{pmatrix} \circ \dots \circ \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & \frac{n}{2}+2 \end{pmatrix}$$

são permutações que representam uma reflexão em relação à reta vertical que passa pelo vértice 1.

É fácil ver que $r^n = l^2 = e_n$. Além disso, combinando as n potências de r com as 2 potências de l, conseguimos encontrar $2n$ automorfismos de C_n. Para terminar o problema, provaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 3.2.2 *Seja $n \geq 2$ um número natural, temos que $|Aut(C_n)| = 2n$.*

Prova: Começaremos preenchendo a permutação de maneira que seja um automorfismo de C_n.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Comecemos escolhendo a posição do vértice de número 1. Como é a nossa primeira escolha, não temos nenhuma restrição. Suponha que tenhamos escolhido a posição i para colocar o vértice de número 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i & & & & & \end{pmatrix}$$

Para escolher a posição de vértice de número 2, estamos restritos à duas posições: $i-1$ e $i+1$. Isso porque desejamos preservar as adjacências. Suponha que tenhamos escolhido $i-1$, teremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i & i-1 & & & & \end{pmatrix}$$

Para escolher a posição de vértice de número 3, estamos restritos à duas posições: $i-2$ e i. Entretanto, a posição i já está ocupada, nos obrigando a colocar o 3 na posição $i-2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i & i-1 & i-2 & & & \end{pmatrix}$$

Da mesma maneira, para escolher a posição de vértice de número 4, estamos restritos à duas posições: $i-3$ e $i-1$. Entretanto, a posição $i-1$ já está ocupada, nos obrigando a colocar o 4 na posição $i-3$. O mesmo ocorrerá com os números seguintes, de maneira que ao final teremos a seguinte permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i & i-1 & i-2 & \dots & i+2 & i+1 \end{pmatrix}$$

Suponha agora que tenhamos escolhido colocar o 2 na posição $i+1$. Teríamos a seguinte permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i & i+1 & & & & \end{pmatrix}$$

Para escolher a posição de vértice de número 3, estamos restritos à duas posições: $i+2$ e i. Entretanto, a posição i já está ocupada, nos obrigando a colocar o 3 na posição $i+2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i & i+1 & i+2 & & & \end{pmatrix}$$

Da mesma maneira, para escolher a posição de vértice de número 4, estamos restritos à duas posições: $i+3$ e $i+1$. Entretanto, a posição $i+1$ já está ocupada, nos obrigando a colocar o 4 na posição $i+3$. O mesmo ocorrerá com os números seguintes, de maneira que ao final teremos a seguinte permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i & i+1 & i+2 & \dots & i-2 & i-1 \end{pmatrix}$$

Desta maneira, vemos que temos n escolhas para a posição do vértice de número 1 e, uma vez feita a escolha da posição do vértice de número 1, temos duas escolhas para a posição do vértice de número 2. Uma vez escolhidas as posições dos vértices 1 e 2, o automorfismo estará completamente determinado. Pelo princípio multiplicativo podemos concluir que $|Aut(C_n)| = 2n$.

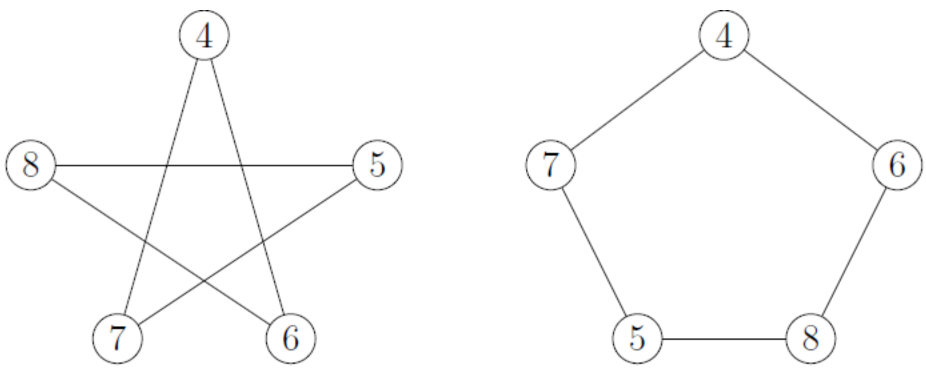
■

Repare que ao colocarmos o 1 na posição i estamos realizando uma rotação de um ângulo de $\frac{360°}{n} \cdot (i-1)$ em torno do centro do polígono e no sentido anti-horário. Ao escolher entre colocar o 2 na posição $i-1$ ou $i+1$ estamos escolhendo entre realizar ou não a reflexão em relação à reta vertical que passa pelo vértice na posição 1.

O grupo de simetrias de um polígono de n lados é chamado de **grupo diedral** e denotado por D_n.

Para finalizar, voltemos ao problema de determinar o grupo de automorfismos do grafo da figura 36. Facilmente observamos que uma das componentes é um grafo ciclo de tamanho 3. A segunda componente, apesar do desenho em forma de estrela, também é um grafo ciclo, basta observarmos que todos os seus vértices tem grau 2.

Figura 57 - Duas representações de C_5



Fonte: O autor, 2021.

Assim, sabemos que o grupo de automorfismos da componente com os vértices $\{1,2,3\}$ é D_3 e da componente com os vértices $\{4,5,6,7,8\}$ é D_5. Observe que qualquer autorfismo de G irá permutar os vértices $\{1,2,3\}$ e $\{4,5,6,7,8\}$ separadamente, pois não existe uma aresta que ligue dois vértices desses dois conjuntos e, além disso, ao pegarmos dois vértices e seus vizinhos no conjunto $\{1, 2, 3\}$ teremos 3 elementos, enquanto no conjunto $\{4, 5, 6, 7, 8\}$, teremos 4 elementos. Assim, teremos que o grupo de automorfismo do grafo G que representa o movimento das bailarinas é $D_3 \times D_5$.

É fácil ver que toda permutação dos vértices de G pode ser separada em duas permutações diferentes: uma que permuta apenas os vértices do conjunto $\{1, 2, 3\}$ e outra que permuta apenas os vértices do conjunto $\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Tomemos como exemplo a permutação p

$p = (\ 1 \quad 3 \quad 2\ ) \circ (\ 5 \quad 6\ ) \circ (\ 7 \quad 8\ )$

Ela pode ser repartida em

$p_1 = (\ 1 \quad 3 \quad 2\ )$ e $p_2 = (\ 5 \quad 6\ ) \circ (\ 7 \quad 8\ )$

Em que p_1 é um automorfismo da componente C_3 e p_2 é um automorfismo da componente C_5.

■

CONCLUSÃO

Durante o desenvolvimento do trabalho foram encontradas poucas referências sobre o teoria de grupos com uma linguagem adequada ao ensino médio e nenhuma sobre teoria algébrica de grafos que pudesse ser destinada a esse mesmo grupo. Com isso, este trabalho mostra uma possibilidade de uma linguagem mais direta para a introdução deste assunto na educação básica.

Ao longo do texto buscamos discorrer sobre os temas e explicitar conceitos fundamentais de maneira acessível ao público da educação básica. O trabalho oferece algumas técnicas para a resolução de determinados problemas, bem como mostra a interdisciplinaridade entre áreas da matemática aparentemente distintas.

Além disso, por outro lado, durante o desenvolvimento deste trabalho, constatou-se uma abundância de materiais sobre teoria de grafos, com linguagem acessível aos alunos da educação básica. Com tamanha variedade de trabalhos, questiona-se o motivo de não termos o ensino do tópico nas escolas, mesmo que de maneira superficial. Com tantos materiais somos levados a acreditar que seria possível trabalhar este tópico durante as aulas de combinatória no ensino médio.

Acreditamos que a conexão abordada neste trabalho motiva o aluno a se aprofundar mais na compreensão da matemática e dá-lhe a percepção de que por trás de conceitos básicos que ele aprende se encontram ideias extremamente interessantes que possibilitam as resoluções dos mais variados problemas e por diversos meios à medida que haja a capacidade de combinar conceitos que aparentemente não estão relacionados.

REFERÊNCIAS

FARIAS, F. G. *Quadrados Latinos e Quadrados Mágicos - Uma proposta didática.* 2017. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ProfMat) — Departamento de Matemática, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.

FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos.* [S.l.: s.n., 2011. 61 p. Disponível em: ⟨https://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/texto/TeoriaDosGrafos.pdf⟩. Acesso em: 3 abril. 2021.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra.* 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 326 p.

JUNIOR, A. G. S. *Introdução à teoria de grafos para o ensino médio.* 2019. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ProfMat) — Departamento de Matemática, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2019.

JÚNIOR, W. S. C. *Permutações.* 2014. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ProfMat) — Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2014.

LIMA, C. H. *Grupos de Simetrias no Plano Euclidiano.* 2017. 136 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ProfMat) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*: volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 308 p.

MAURI, R. *Uma abordagem da Teoria dos Grafos no Ensino Médio.* 2013. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ProfMat) — Departamento de Matemática, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

MORAES, W. J. R. *O estudo de determinantes sob a ótica do grupo de permutações.* 2013. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ProfMat) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

NEGRINI, M. V. *Quadrados Latinos.* 2018. 37 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) — Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2018.

ZAGO, S. O. *O Jogo dos 15 e a Teoria dos Grupos.* 2017. 43 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ProfMat) — Departamento de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiába, 2017.