UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Um estudo sobre equações polinomiais dedicado ao Ensino Básico

Patrícia Casaroto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

2013

510.07 Casaroto, Patrícia
C335e Um estudo sobre equações polinomiais dedicado ao ensino básico / Patrícia Casaroto. - Rio Claro, 2013
71 f. : il., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Suzete Maria Silva Afonso

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Resolução de equações polinomiais. 3. Polinômios. 4. Atividades didáticas. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Patrícia Casaroto
Um estudo sobre equações polinomiais dedicado ao Ensino Básico

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Orientadora

Prof. Dr. Everaldo de Mello Bonotto
ICMC/USP - São Carlos - SP

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizziolli
IGCE/ UNESP - Rio Claro - SP

Rio Claro, 20 de agosto de 2013

À minha família, aos meus amigos e aos meus alunos.

Agradecimentos

À Deus por me acompanhar em todos os momentos.

À minha família, em especial os meus pais, João Batista e Maria Helena que, através dos seus esforços, me deram oportunidade de estudos, permitindo a realização desse sonho.

Às minhas irmãs, Alessandra e Cristiane, pelos conselhos e companheirismo.

Ao meu marido, Heraldo, o qual dedicou os seus fins de semana a me acompanhar nessa jornada com muita paciência, sempre me incentivando.

À minha filha, Alice, e meu sobrinho, João Victor, que tornam os meus dias mais felizes.

Aos meus amigos do PROFMAT, pela troca de experiências e a amizade.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Aos meus alunos, fonte de inspiração na busca por um ensino melhor.

Aos professores do Departamento de Matemática da Unesp Rio Claro, em especial a minha professora orientadora, Dra. Suzete Maria Silva Afonso, por me transmitir segurança, tranquilidade, sabedoria, com muita paciência e dedicação.

"Os que se apaixonam pela prática, sem se valer da ciência, são como os navegadores que embarcam num navio sem timão e bússola e nunca têm certeza para onde vão. Sempre a prática deve ter seu pensamento na teoria."(Leonardo da Vinci).

Resumo

A grande dificuldade de ensinar Matemática aos alunos do Ensino Básico se dá pela falta de interesse dos alunos com os conteúdos, que muitas vezes são ensinados de forma descontextualizada. Na maioria dos livros didáticos, os conceitos relacionados a polinômios são apresentados na forma de algoritmos, visando a fixação na forma de repetição sem desenvolver uma situação do dia-a-dia para ilustrar o problema. Diante dessa realidade, pretendemos estimular a curiosidade e incentivar o conhecimento sobre os conceitos básicos de polinômios e sobre as técnicas para resolver equações polinomiais. A proposta didática contempla um plano de aula que relaciona os conteúdos com Física, Economia e Administração.

Palavras-chave: Polinômios, Equações polinomiais, Ensino Básico.

Abstract

The difficulty of teaching Mathematics to students of Basic Education is given by the lack of interest of the students with the contents, which are often taught in a decontextualized way. In many books, the concepts related to polynomials are presented in the form of algorithms, without developing a situation of the daily routine to illustrate the problem. Given this reality, we want to stimulate the curiosity and encourage the knowledge about the basics of polynomials and on techniques for solving polynomial equations. The proposal comprises a didactic lesson plan that lists the contents with Physics, Economics and Administration.

Keywords: Polynomials, Polynomial equations, High School.

Sumário

Introdução

No Capítulo VIII do Regimento do ProfMat, consta:

"Artigo 28 - O Trabalho de Conclusão de Curso deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula".

Dentro dessas diretrizes, o tópico desenvolvido neste trabalho foi: **Equações polinomiais**.

O conteúdo específico do trabalho foi desenvolvido a partir de conceitos, propriedades e resultados essenciais sobre polinômios até chegar nas técnicas de resolução de equações de segundo, terceiro e quarto grau. Os métodos apresentados para resolução de equações de terceiro e quarto grau não costumam ser abordadas no Ensino Básico, mas as ferramentas são conhecidas pelos alunos, sendo essa a justificativa por incluir tais métodos no trabalho.

Para aplicação do conteúdo, propomos, no último capítulo, um plano de aula com situações-problema envolvendo Física, Administração e Economia. A fim de diversificar e dinamizar as aulas, sugerimos o uso da calculadora e do recurso computacional Winplot.

A finalidade desse material é estimular e auxiliar o aluno a adquirir o conhecimento sobre o tema desenvolvido. Partindo do princípio que a Matemática levou milênios para ser construída, espera-se que o leitor-aluno não desista de aprendê-la, se encontrar dificuldades.

Informamos que, mesmo que nem todas tenham sido citadas ao longo do texto, todas as referências presentes ao final do trabalho foram utilizadas para a construção do mesmo.

Notas históricas sobre equações polinomiais

À medida que o homem começou a calcular, contando rebanhos, trocando produtos, contabilizando impostos ou construindo os primeiros monumentos e obras de engenharia, as formas mais simples das chamadas equações algébricas apresentaram-se quase que de forma natural aos antigos matemáticos.

Equações algébricas são aquelas em que a incógnita aparece apenas submetida às chamadas operações algébricas, a saber **soma** ou **adição**, **subtração**, **multiplicação**, **divisão**, **potenciação inteira** (que é um caso particular de multiplicação de n fatores iguais) e **radiciação**. Como exemplos de equações algébricas, temos:

$$ax + b = c,$$

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$x^5 + \sqrt{4x^5} + 9 = 10x,$$
$$x^4 + 3x^{-2} = \sqrt[3]{x^5} + 14.$$

Por outro lado,

$$x^2 + 5x + 3 = e^{-x},$$
$$\cos x + x^2 \cos 2x = 8,$$
$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4},$$

não são equações algébricas.

Quando uma equação algébrica é colocada sob a forma

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = 0 \qquad (n \text{ número inteiro positivo}),$$

diz-se que ela está em sua **forma canônica** e é denominada **equação polinomial**.

O maior expoente da incógnita x em uma equação algébrica em sua forma canônica é denominado **grau** da referida equação, como veremos no Capítulo2.

Embora as equações algébricas já tenham merecido a atenção dos egípcios, cerca de 2000 anos a.C. na busca de soluções de problemas práticos, como os relacionados com a divisão de terras e heranças, foram os estudos puramente teóricos realizados pelos gregos, cerca de 300 anos a.C., que criaram as condições para que se encontrasse um método geral para resolução das equações de 1° grau. Tal método foi deduzido a partir dos postulados enunciados na conhecida obra *Os Elementos*, de Euclides.

A fórmula que conhecemos como Fórmula de Bhaskara, na verdade, não foi descoberta por Bhaskara (1114-1185), ela foi publicada pelo matemático Sridhara um século antes de Bhaskara em uma obra que não chegou até nós.

Foi a partir da Fórmula de Bhaskara que surgiram duas curiosidades importantes:

i. Equações de grau maior do que 1 poderiam ter mais de uma solução;

ii. Em alguns casos, a fórmula fornecia a raiz quadrada de um número negativo, o que na época não fazia sentido, pois ainda não se conheciam os números complexos. Nesses casos, tais situações eram interpretadas como a não existência de solução para a equação.

Conforme registros de 1510, Scipione del Ferro, um matemático italiano, encontrou uma fórmula para resolver as equações de 3° grau, mas ele morreu antes que pudesse publicar sua descoberta. Porém, ele a revelou ao seu aluno Antônio Maria Fior que, por sua vez, tentou se apropriar do mérito do seu mestre.

Sendo frequente o lançamento de desafios entre os sábios naquela época, Fior elegeu o talentoso matemático italiano Niccolò Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. O desafio consistia na solução de diversos problemas que um deveria propor ao outro e Fior, naturalmente, pretendia apresentar questões que dependessem daquele tipo de equação de 3° grau, da qual ele já detinha a solução. Porém, Tartaglia, com sua genialidade, além de resolver todas as questões propostas pelo desleal oponente, desafiou-o a apresentar a solução geral para as equações do 3° grau do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Fior, ao contrário de Tartaglia, não foi capaz de apresentar tal solução.

Na mesma época, o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576), estava escrevendo uma obra que envolvia conceitos de Álgebra, Aritmética e Geometria, então procurou Tartaglia e pediu que ele revelasse o método para ser publicado. Tartaglia não aceitou a proposta, mas após juras de fidelidade, Cardano conseguiu que ele revelasse o segredo.

Cardano traiu os juramentos feitos a Tartaglia e, em 1545, publicou na *Ars Magna* a sua fórmula. Tartaglia denunciou Cardano e publicou a sua versão dos fatos. Após trocar ofensas, o que prevaleceu foi a Fórmula de Tartaglia, embora ela seja conhecida como Fórmula de Cardano.

Anos depois, dentro do costume vigente entre os matemáticos de proporem problemas uns aos outros, um certo Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano uma questão que envolvia a equação:

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0.$$

Cardano tentou resolver mas não obteve êxito, então passou a questão para o jovem Ludovico Ferrari (1522 - 1560), que encontrou uma fórmula geral para a equação de 4° grau.

Após esses resultados, os matemáticos começaram a suspeitar que as equações do 2° grau poderiam ter duas soluções e as de 4° grau, quatro soluções e assim por diante. Foi em 1799 que o brilhante alemão Carl Fredich Gauss (1777-1855) apresentou, em sua tese de doutorado, o famoso Teorema Fundamental da Álgebra, confirmando o que fora suspeitado.

O desafio dos matemáticos passou a ser buscar um método para resolução de equações de grau 5. Muitas foram as tentativas do matemático Norueguês Niels Henrik Abel (1802- 1829), mas, em 1823, ele demonstrou que, exceto em casos particulares, é impossível resolver equações do 5° grau utilizando apenas operações algébricas.

Evariste Galois (1811-1832) provou em sua teoria que as equações de grau superior a 4 não podem ser resolvidas, em geral, por métodos algébricos e porquê as de grau inferior a 5 podem ser resolvidas por tais métodos.

1 Polinômios com coeficientes reais

1.1 Polinômios e operações

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e seja x um símbolo não necessariamente pertencente ao conjunto $\mathbb{R}$, denominado **indeterminada** ou **variável** sobre $\mathbb{R}$.

Para cada número natural $j \geq 1$, designaremos a $j-$potência de x por x^j e escreveremos $x^1 = x$.

Definição 1.1. *Um* ***polinômio*** *com coeficientes em* $\mathbb{R}$ *(ou com coeficientes reais) é uma expressão do tipo*

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = {}^1\sum_{j=0}^{n} a_jx^j,$$

onde n *é um número natural e* $a_j \in \mathbb{R}$*, para* $j \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$*.*

Para $j \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$*, os elementos* a_j *são denominados* ***coeficientes****, as parcelas* a_jx^j *são denominadas* ***termos*** *e os termos* a_jx^j *tais que* $a_j \neq 0$ *são denominados* ***monômios de grau j*** *do polinômio* $p(x)$*. O coeficiente* a_0 *é denominado* ***termo constante****.*

Para cada número natural n*, o polinômio* $0(x) = 0 + 0x + 0x^{n-1} + \cdots + 0x^n$ *será dito* ***identicamente nulo*** *e será denotado por* $0(x) = 0$*.*

Um polinômio será dito ***constante*** *quando* $p(x) = a_0$*.*

Informamos ao leitor que, ao longo do texto, faremos as seguintes convenções:

1) Desprezando a ordem dos fatores, escreveremos o polinômio $p(x)$ com as $j-$ésimas potências de x em ordem crescente ou em ordem decrescente, a saber $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ ou $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$.

2) Por não ser necessário, não escreveremos o termo a_jx^j sempre que $a_j = 0$, quando houver algum termo não-nulo no polinômio.

Note que o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ também pode ser expresso da forma $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + 0x^{n+3} +$

[1] Lê-se o símbolo $\sum$ como somatória ou soma e convenciona-se escrever $a_0x^0 = a_0$.

$\cdots + 0x^{n+m}$, onde m é um número natural maior do que ou igual a 1. Por conseguinte, quando compararmos dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$, poderemos assumir que os termos de ambos têm as mesmas potências de x.

Definição 1.2. *Os polinômios* $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *e* $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$ *serão iguais se, e somente se,* $a_j = b_j$*, para todo* $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$*. Neste caso, escreveremos* $p(x) = q(x)$*.*

Ou seja, a igualdade entre dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ se dará apenas quando todos os coeficiente das correspondentes potências de x em $p(x)$ e $q(x)$ forem iguais.

Então, observe que se $p(x)$ e $q(x)$ não forem iguais, existirá algum número natural j, com $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$, tal que $a_j \neq b_j$. Neste caso, diremos que $p(x)$ e $q(x)$ são diferentes e escreveremos $p(x) \neq q(x)$.

Exemplo 1.1. Os polinômios $p(x) = 5 - x^2 + 4x - 5x^3 + 6x^4 + x^5$ e $q(x) = x^5 - 5x^3 + 5 + 4x - x^2 + 6x^4$ são iguais, porque os seus coeficientes a_j da $j-$ésima potência x^j, com $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, são: $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = -1$, $a_3 = -5$, $a_4 = 6$, $a_5 = 1$.

Se escrevermos os polinômios acima com as potências de x em ordem crescente, visualizaremos imediatamente a igualdade entre eles, pois

$$p(x) = q(x) = 5 + 4x - x^2 - 5x^3 + 6x^4 + x^5.$$

Exemplo 1.2. Os polinômios $p(x) = -x+4x^2-3x^3+5x^4$ e $q(x) = 4-x+4x^2-3x^3+5x^4$ são diferentes, visto que os coeficientes dos termos constantes dos polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são diferentes, $a_0 = 0$ e $b_0 = 4$.

Em todo polinômio não identicamente nulo, $p(x) \not\equiv 0$, [2] algum coeficiente deverá ser diferente de zero, portanto haverá um maior número natural n tal que $a_n \neq 0$. Definiremos **o grau do polinômio** por n e, neste caso, a_n será denominado **coeficiente líder** de $p(x)$.

Os polinômios de grau n com coeficiente líder $a_n = 1$ serão denominados **polinômios mônicos**.

Observação 1.1. Não se define o grau do polinômio identicamente nulo $(0(x) \equiv 0)$. [3]

Usaremos o símbolo $\text{grau}(p(x))$ para denotar o grau do polinômio $p(x)$.

Exemplo 1.3. O polinômio constante $p(x) = 7$ não é identicamente nulo e $\text{grau}(p(x)) = 0$. O polinômio $w(x) = 5 - x^2 + 4x - 5x^3 + 6x^4 + x^5$ tem grau 5 e é mônico, enquanto que o polinômio $v(x) = 4 - x + 4x^2 - 3x^3 + 5x^4$ tem grau 4 e coeficiente líder $a_4 = 5$.

Levando em conta a Observação 1.1, salientamos que:

$$\boxed{\text{grau}(p(x)) = 0 \text{ se, se somente se, } f(x) = a_0 \neq 0,\ a_0 \in \mathbb{R}\ .}$$

[2]O símbolo $\not\equiv$ lê-se como *não é idêntico*.
[3]O símbolo $\equiv$ lê-se como *é idêntico*.

1.1.1 Adição de polinômios

Definição 1.3. *Definiremos a **adição** dos polinômios* $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ *e* $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ *por*

$$p(x) + q(x) = \sum_{j=0}^{M} (a_j + b_j) x^j,$$

onde $M =$ [4] $\max\{grau(p(x)), grau(q(x))\}$.

Para o aluno, é importante lembrar que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $a - b = a + (-b)$. Vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 1.4. Sejam $p(x) = 4x^4 - 3x^2 + 7x + 1$, $q(x) = 5x^4 - 6x - 1$ e $w(x) = -3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 3$. Então,

$$p(x) + q(x) = (4+5)x^4 + (-3+0)x^2 + (7-6)x + (1-1) = 9x^4 - 3x^2 + x,$$

$$p(x)+w(x) = (4-3)x^4+(0+6)x^3+(-3+2)x^2+(7+0)x+(1+3) = x^4+6x^3-x^2+7x+4,$$

$$q(x)+w(x) = (5-3)x^4+(0+6)x^3+(0+2)x^2+(-6+0)x+(-1+3) = 2x^4+6x^3+2x^2-6x+2.$$

Exemplo 1.5. Sejam $p(x) = 4x^4 - 3x^2 + 7x + 1$, $q(x) = 5x^2 - 6x - 1$ e $w(x) = 4x^5 + 6x^3 + 2x^2 + 3$. Então,

$$p(x) + q(x) = (4+0)x^4 + (-3+5)x^2 + (7-6)x + (1-1) = 4x^4 + 2x^2 + x,$$

$$p(x)+w(x) = (0+4)x^5+(4+0)x^4+(0+6)x^3+(-3+2)x^2+(7+0)x+(1+3) = 4x^5+4x^4+6x^3-x^2+7x+4,$$

$$q(x)+w(x) = (0+4)x^5+(0+6)x^3+(5+2)x^2+(-6+0)x+(-1+3) = 4x^5+6x^3+7x^2-6x+2.$$

No Exemplo 1.4, somamos polinômios que possuem o mesmo grau (grau($p(x)$) = grau($q(x)$) = grau($w(x)$) = 4), enquanto que, no Exemplo 1.5, somamos polinômios que possuem graus diferentes (grau($p(x)$) = 4, grau($q(x)$) = 2, grau($w(x)$) = 5).

Na adição de polinômios, vale a seguinte propriedade do grau:

Proposição 1.1. *Sejam* $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, *com* $a_n \neq 0$, *e* $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, *com* $b_m \neq 0$. *Se* $p(x) + q(x) \neq 0$, *então*

$$grau\,(p(x) + q(x)) \leq \max\{grau\,(p(x)), grau\,(q(x))\} = \max\{n, m\}.$$

A igualdade será válida sempre que $grau\,(p(x)) \neq grau\,(q(x))$.

[4] O símbolo $\max\{a, b\}$ significa o máximo entre os números a e b, com $a, b \in \mathbb{R}$.

No Exemplo 1.5, a veracidade da Proposição 1.1 é facilmente constatada.

A adição de polinômios tem diversas propriedades, que são consequências das propriedades da adição no conjunto $\mathbb{R}$, conforme veremos a seguir.

Propriedades da adição

Consideremos os polinômios $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ e $w(x) = \sum_{j=0}^{l} c_j x^j$.

A1. **Comutativa:**

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x),$$

pois, para quaisquer $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, com $0 \leq j \leq \max\{n, m\}$, temos $a_j + b_j = b_j + a_j$.

A2. **Associativa:**

$$(p(x) + q(x)) + w(x) = p(x) + (q(x) + w(x)),$$

pois, para quaisquer $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, com $0 \leq j \leq \max\{n, m, l\}$, temos $(a_j + b_j) + c_j = a_j + (b_j + c_j)$.

A3. **Existência de elemento neutro:**

O polinômio identicamente nulo $0 = \sum_{j=0}^{n} 0x^j$ satisfaz $p(x) + 0 = 0 + p(x)$ pois, para $0 \leq j \leq n$ e $a_j \in \mathbb{R}$, temos $a_j = 0 + a_j$.

A4. **Existência de simétrico**

Dado $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, o polinômio $-p(x) = \sum_{j=0}^{n}(-aj)x^j$ é o simétrico de $p(x)$, sendo

$$p(x) + (-p(x)) = \sum_{j=0}^{n} 0x^j,$$

pois $(a_j) + (-a_j) = 0$, para qualquer $a_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq n$.

Exemplo 1.6. Consideremos os polinômios $p(x) = 4x^4 - 3x^2 + 7x + 1$, $q(x) = 5x^2 - 6x - 1$ e $w(x) = 4x^5 + 6x^3 + 2x^2 + 3$ do Exemplo 1.5.

No Exemplo 1.5, determinamos $p(x) + q(x) = 4x^4 + 2x^2 + x$. Assim,

$$\begin{aligned}
(p(x) + q(x)) + w(x) &= (4x^4 + 2x^2 + x) + (4x^5 + 6x^3 + 2x^2 + 3) \\
&= (0 + 4)x^5 + (4 + 0)x^4 + (0 + 6)x^3 + (2 + 2)x^2 + (1 + 0)x + 3 \\
&= 4x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + 3.
\end{aligned}$$

Determinamos, também, $q(x) + w(x) = 4x^5 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
p(x) + (q(x) + w(x)) &= (4x^4 - 3x^2 + 7x + 1) + (4x^5 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 2) \\
&= (0 + 4)x^5 + (4 + 0)x^4 + (0 + 6)x^3 + (-3 + 7)x^2 + (7 - 6)x + (2 + 1) \\
&= 4x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + 3.
\end{aligned}$$

Ou seja, $(p(x)+q(x))+w(x)=p(x)+(q(x)+w(x))$, como nos diz a propriedade associativa. As outras propriedades também são facilmente verificadas considerando os polinômios acima.

1.1.2 Multiplicação de Polinômios

Definição 1.4. *Definiremos a **multiplicação** dos polinômios* $p(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ *e* $q(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ *por*

$$p(x).q(x)=\sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j,$$

sendo

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0.b_0\\ c_1 &= a_0.b_1+a_1.b_0\\ c_2 &= a_0.b_2+a_1.b_1+a_2.b_0\\ &\vdots\\ c_j &= a_0.b_j+a_1.b_{j-1}+\cdots+a_j.b_0=\sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda.b_\mu\\ &\vdots\\ c_{n+m} &= a_n.b_m. \end{aligned}$$

Na multiplicação de polinômios, vale a seguinte propriedade do grau:

Proposição 1.2. *Sejam* $p(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$*, com* $a_n\neq 0$*, e* $q(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$*, com* $b_m\neq 0$*. Então,*

$$grau\,(p(x).q(x))=n+m,$$

pois o coeficiente líder de $p(x).q(x)$ *é* $c_{n+m}=a_n.b_m\neq 0$.

A multiplicação de polinômios tem as seguintes propriedades:

Propriedades da Multiplicação

Sejam $p(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $q(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ e $w(x)=\sum_{j=0}^{l} c_j x^j$ polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$.

M1. **Comutativa:**

$$p(x).q(x) = q(x).p(x),$$

pois, para todo $j \in \{0, 1, \cdots, n+m\}$, vale a identidade:

$$\sum_{\lambda+\mu=j} a_\lambda b_\mu = \sum_{\lambda+\mu=j} b_\mu.a_\lambda.$$

M2. **Associativa:**

$$(p(x).q(x)).w(x) = p(x).(q(x).w(x)).$$

Cabe observar que, em virtude da definição da operação de multiplicação, temos:

- Para quaisquer $j, k \in \mathbb{N}$, vale a identidade: $x^j.x^k = x^{j+k}$.
- Se $p(x) = a_0$ e $q(x) = b_0 + b_1.x + \cdots + b_m.x^m$, então

$$\begin{aligned} p(x).q(x) &= a_0.q(x) = a_0.\sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{k=0}^{m} a_0 b_k x^k \\ &= (a_0.b_0) + (a_0.b_1)x + \cdots + (a_0.b_m)x^m, \end{aligned}$$

pois, neste caso, $n = 0$ e $c_j = a_0 b_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Em particular, considerando $p(x) = 1$, a multiplicação de polinômios tem a seguinte propriedade:

M3. **Existência de elemento neutro multiplicativo:**

1. q(x) = q(x), para qualquer polinômio $q(x)$.

O elemento neutro multiplicativo é também denominado **unidade**.

Combinando as propriedades da multiplicação com o fato da adição de polinômios corresponder a adicionar os coeficientes das potências de x de mesmo expoente em ambos os polinômios, obtemos mais uma propriedade, a qual envolve as duas operações.

Propriedade de adição e multiplicação

Sejam $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ e $w(x) = \sum_{j=0}^{l} c_j x^j$ polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$.

AM. **Distributiva:**

$$(p(x) + q(x)).w(x) = p(x).w(x) + q(x).w(x).$$

Para o aluno, é importante lembrar que a adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$ têm a propriedade distributiva, ou seja, $(a+b).c = a.c + b.c$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Finalizamos esta seção vendo um exemplo que aborda a multiplicação e a adição de polinômios.

Exemplo 1.7. Sejam $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ e $q(x) = 2x^2 - 5x - 2$. Então, utilizando as propriedades das duas operações, obtemos:

$$\begin{aligned}
p(x).q(x) &= (4x^3 - 3x^2 + 4x + 5).(2x^2 - 5x - 2) \\
&\overset{1}{=} 4x^3.(2x^2 - 5x - 2) + (-3x^2).(2x^2 - 5x - 2) + 4x.(2x^2 - 5x - 2) + 5.(2x^2 - 5x - 2) \\
&\overset{2}{=} (8x^5 - 20x^4 - 8x^3) + (-6x^4 + 15x^3 + 6x^2) + (8x^3 - 20x^2 - 8x) + (10x^2 - 25x - 10) \\
&\overset{3}{=} 8x^5 + (-20 - 6)x^4 + (-8 + 15 + 8)x^3 + (6 - 20 + 10)x^2 + (-8 - 25)x - 10 \\
&\overset{4}{=} 8x^5 - 26x^6 + 15x^3 - 4x^2 - 33x - 10.
\end{aligned}$$

Observamos que as igualdades acima foram obtidas das seguintes formas:

1. Distribuindo as parcelas de $p(x)$ na multiplicação por $q(x)$;
2. Distribuindo a multiplicação de cada termo de $p(x)$ por $q(x)$;
3. Utilizando a definição de adição de polinômios;
4. Fazendo a adição dos coeficientes das potências de x de mesmo expoente.

1.2 Divisão de polinômios

Nas próximas seções, aprenderemos o conceito de divisibilidade e o algoritmo euclidiano para polinômios. Veremos, também, o conceito de raiz real de um polinômio com coeficientes reais e relacionaremos a existência de uma raiz real α com a divisibilidade por $x - \alpha$. Mais ainda, relacionaremos a existência de n raízes reais distintas $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, quando o polinômio tiver grau maior do que ou igual a n, com a divisibilidade por $(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$. Por fim, mostraremos como determinar as possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros.

No conjunto dos polinômios com coeficientes reais, temos o seguinte conceito de divisibilidade.

Definição 1.5. *Sejam $p(x)$e $q(x)$ polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$, com $q(x) \neq 0$. Diremos que $q(x)$ **divide** $p(x)$ se existir um polinômio $h(x)$ tal que*

$$p(x) = q(x).h(x).$$

*Diremos também que $p(x)$ é **múltiplo** de $q(x)$ ou que $p(x)$ é **divisível** por $q(x)$.*

Exemplo 1.8.

1. Como $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$, pela Definição 1.5, $x - 4$ divide $x^2 - 16$. Neste caso, $h(x) = x + 4$. Note que, da mesma forma, $x + 4$ divide $x^2 - 16$.

2. O polinômio $x^4 + 5x^5 + 6$ pode ser escrito como

$$x^4 + 5x^2 + 6 = (x^2 + 3)(x^2 + 2).$$

Portanto, $x^2 + 3$ e $x^2 + 2$ dividem $x^4 + 5x^2 + 6$.

3. Dados números naturais $m \leq n$, o polinômio x^m divide x^n pois, tomando $r = n - m \geq 0$, podemos escrever

$$x^n = x^{m+r} = x^m.x^r.$$

Na subseção precedente, mais precisamente na Proposição 1.2, vimos que se $p(x)$ e $q(x)$ forem polinômios não nulos, então

$$\text{grau}\,(p(x).q(x)) = \text{grau}\,(p(x)) + \text{grau}\,(q(x)).$$

Em virtude desta propriedade, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.3. *Se $p(x)$ e $q(x)$ forem polinômios não nulos e $q(x)$ dividir $p(x)$, então grau $(p(x)) \geq$ grau $(q(x))$.*

Demonstração: Com efeito, como $q(x)$ divide $p(x)$ e ambos são não nulos, existe um polinômio $h(x)$ não nulo tal que $p(x) = q(x).h(x)$. Pela propriedade do grau supracitada, temos

$$\text{grau}\,(p(x)) = \text{grau}\,(q(x).h(x)) = \text{grau}\,q(x) + \text{grau}\,h(x) \geq \text{grau}\,q(x),$$

como queríamos demonstrar. ■

Que fique claro que nem sempre um polinômio é múltiplo de um outro polinômio qualquer de grau inferior. Veremos, a seguir, um exemplo onde essa afirmação será constatada. Informamos, de antemão, que a estratégia usada para responder a pergunta do exemplo seguinte é a Redução ao Absurdo. Embora essa estratégia não seja explicitamente contada aos alunos do ensino secundário, não identificamos problemas ao apresentá-la aos mesmos. Além disso, julgamos que a apresentação do método de Redução ao Absurdo seja bem pertinente ao ensino de Matemática em todas as escolas.

Exemplo 1.9. O polinômio $q(x) = x + 4$ divide o polinômio $p(x) = x^2 + 3x + 2$? Ou seja, há algum polinômio $h(x)$ tal que $x^2 + 3x + 2 = (x + 4)h(x)$?

Ora, suponha que exista o tal polinômio $h(x)$. Como grau $(x^2 + 3x + 2) = 2$ e grau $(x + 4) = 1$, este polinômio $h(x)$ deve ter grau igual a 1. Então, podemos dizer que

$$h(x) = ax + b, a \neq 0 \quad \text{e} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 4)(ax + b) = ax^2 + 4ax + bx + 4b = ax^2 + (4a + b)x + 4b.$$

Devemos, pois, ter:

$$a = 1, \quad 4a + b = 3, \quad 4b = 2 \left(b = \frac{1}{2}\right).$$

Como $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$, a equação $4a + b = 3$ nos diz que $3 = 4a + b = 4.1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, o que é absurdo.

Concluímos, dessa forma, que $x + 4$ não divide $x^2 + 3x + 2$.

O próximo resultado nos apresenta o Algoritmo de Euclides. Parte da demonstração do mesmo será feita por indução sobre o grau de um determinado polinômio. Sendo a Indução Matemática um método restrito ao ensino superior de Matemática, informamos que apresentamos a prova deste resultado apenas para auxiliar o leitor - professor de Matemática do Ensino Básico, já familiarizado com tal método, na revisão da teoria de polinômios. Indicamos a referência [8], para o leitor-aluno interessado em entender no que consiste uma prova por indução.

Teorema 1.1 (Divisão euclidiana)**.** *Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$, com $q(x) \neq 0$. Então, existem polinômios $h(x)$ e $r(x)$, unicamente determinados, tais que*

$$p(x) = h(x)q(x) + r(x), \tag{1.1}$$

onde $r(x) = 0$ ou $grau\,(r(x)) < grau\,(q(x))$.

Demonstração: Como $q(x) \neq 0$, podemos dizer que $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m$, onde $m = \text{grau}\, q(x)$.

Devemos, então, mostrar a existência e a unicidade dos polinômios $h(x)$ e $r(x)$ para os quais tenhamos (1.1). Pois bem, começaremos mostrando a existência.

(Existência) Se $p(x) = 0$, basta tomar $h(x) = r(x) = 0$.

Suponhamos que $p(x) \neq 0$. Sejam $n = \text{grau}\, p(x)$ e $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$.

• Se $n < m$, tome $h(x) = 0$ e $r(x) = p(x)$.

• Suponhamos que $n \geq m$. Neste caso, a fim de concluirmos o desejado, argumentaremos por indução sobre $n = \text{grau}\, p(x)$.

Com efeito, se $n = 0$, então $0 = n \geq m = \text{grau}\, q(x)$ e, portanto, $m = 0$, $p(x) = a_0$ e $q(x) = b_0$. Assim, $p(x) = a_0b_0^{-1}q(x)$, com $h(x) = a_0b_0^{-1}$ e $r(x) = 0$.

Suponhamos que o resultado seja válido para polinômios de grau menor do que $n = \text{grau}\,(p(x))$ e vamos mostrar que vale para $p(x)$, que tem grau n.

Definamos

$$p_1(x) = p(x) - a_nb_m^{-1}x^{n-m}q(x). \tag{1.2}$$

Observe que $\text{grau}\,(p_1(x)) < \text{grau}\,(p(x))$, uma vez que o polinômio $a_nb_m^{-1}x^{n-m}q(x)$ tem grau n e coeficiente líder a_n. Por hipótese de indução, existem polinômios $h_1(x)$ e $r_1(x)$ tais que

$$p_1(x) = h_1(x).q(x) + r_1(x), \tag{1.3}$$

com $r_1(x) = 0$ ou $\text{grau}\,(r_1(x)) < \text{grau}\,(q(x))$.

Por (1.2) e (1.3), temos

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}q(x) \\ &= (h_1(x)q(x) + r_1(x)) + a_nb_m^{-1}x^{n-m}q(x) \\ &= (h_1(x) + a_nb_m^{-1}x^{n-m})q(x) + r_1(x). \end{aligned}$$

Então, basta tomar $h(x) = h_1(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m}$ e $r(x) = r_1(x)$.

Agora, mostraremos a unicidade.

(Unicidade) Sejam $h_1(x), r_1(x), h_2(x), r_2(x)$ polinômios tais que

$$p(x) = h_1(x)q(x) + r_1(x) \overset{(\star)}{=} h_2(x).q(x) + r_2(x), \tag{1.4}$$

onde

$$\begin{cases} r_1(x) = & 0 \text{ ou grau}\,(r_1(x)) < \text{grau}\,(q(x)) \text{ e} \\ r_2(x) = & 0 \text{ ou grau}\,(r_2(x)) < \text{grau}\,(q(x)). \end{cases} \tag{$\star\,\star$}$$

De $(\star)$, segue que $(h_1(x) - h_2(x))q(x) = r_2(x) - r_1(x)$.

Se $h_1(x) \neq h_2(x)$, então $h_1(x) - h_2(x) \neq 0$, logo $r_2(x) - r_1(x) \neq 0$ e, pela Proposição1.2, concluímos que

$$\text{grau}\,(q(x)) \leq \text{grau}\,(r_2(x) - r_1(x)) \overset{(\star\star)}{<} \text{grau}\,(q(x)).$$

Eis, pois, uma contradição. Então, $h_1(x) = h_2(x)$ e, por conseguinte, $r_2(x) = r_1(x)$. ■

Definição 1.6. *Sejam $p(x)$, $q(x)$, $h(x)$ e $r(x)$ como no teorema anterior. Chamaremos $p(x)$ de **dividendo**, $q(x)$ de **divisor**, $h(x)$ de **quociente** e $r(x)$ de **resto**.*

Devemos prestar atenção aos graus do dividendo, do divisor e do resto para efetuar a divisão.

Veremos como determinar o quociente $h(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão euclidiana do polinômio $p(x)$ por $q(x) \neq 0$. Elaboraremos uma tabela, ilustrando os cálculos passo a passo. Os exemplos a seguir consistem de *armar* e *efetuar*, conforme o modelo:

$$\begin{array}{r|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} \vdots & h(x) \\ \cline{1-1} r(x) & \end{array}$$

Exemplo 1.10. Sejam $p(x) = 5x+2$ e $q(x) = x^3+2x+1$. Como grau $(p(x)) = 1 < 3 =$ grau $(q(x))$, nada temos a fazer. O quociente é $h(x) = 0$ e o resto é $r(x) = p(x) = 5x+2$.

$$\begin{array}{r|l} 5x+2 & x^3+2x+1 \\ \cline{2-2} -0 & 0 \\ \cline{1-1} 5x+2 & \end{array}$$

Exemplo 1.11. Sejam $p(x) = 2x^2 + 4x + 3$ e $q(x) = x^2 + 3x + 1$.

1. O monômio de maior grau de $p(x)$ é $2x^2$ e o monômio de maior grau de $q(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $2x^2$ por x^2 é $h_1(x) = 2$.

2. Fazendo o cálculo, obtemos:

$$r_1(x) = p(x) - h_1(x)q(x) = (2x^2 + 4x + 3) - 2x^2 - 6x - 2 = -2x + 1$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+4x+3 & x^2+3x+1 \\ \cline{2-2} -2x^2-6x-2 & 2 \\ \cline{1-1} -2x+1 & \end{array}$$

3. Como grau$\,(r_1(x)) = 1 < 2 =$ grau$\,(q(x))$, não podemos continuar a divisão e, portanto, paramos os cálculos.

4. Obtemos, pois, $h(x) = h_1(x) = 2$ e $r(x) = r_1(x) = -2x + 1$.

Exemplo 1.12. Sejam $p(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 2x - 3$ e $q(x) = x^2 + 3x + 1$.

1. O monômio de maior grau de $p(x)$ é $3x^4$ e o monômio de maior grau de $q(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $3x^4$ por x^2 é $h_1(x) = 3x^2$.

2. Fazendo o cálculo, obtemos:

$$r_1(x) = p(x) - h_1(x)q(x) = (3x^4+5x^3+x^2+2x-3) - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2 = -4x^3 - 2x^2 + 2x - 3.$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 2x - 3 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2} -3x^4 - 9x^3 - 3x^2 & 3x^2 \\ \cline{1-1} -4x^3 - 2x^2 + 2x - 3 & \end{array}$$

3. Como grau$\,(r_1(x)) = 3 > 2 =$ grau$\,(q(x))$, devemos continuar a divisão, dividindo $r_1(x)$ por $q(x)$, pois $r_1(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

4. O monômio de maior grau de $r_1(x)$ é $-4x^3$ e o monômio de maior grau de $q(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $-4x^3$ por x^2 é $h_2(x) = -4x$.

5. Fazendo o cálculo, obtemos:

$$r_2(x) = r_1(x) - h_2(x)q(x) = (-4x^3 - 2x^2 + 2x - 3) + 4x^3 + 12x^2 + 4x = 10x^2 + 6x - 3.$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 2x - 3 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2} -3x^4 - 9x^3 - 3x^2 & 3x^2 - 4x \\ \cline{1-1} -4x^3 - 2x^2 + 2x - 3 & \\ 4x^3 + 12x^2 + 4x & \\ \cline{1-1} 10x^2 + 6x - 3 & \end{array}$$

6. Como grau$\,(r_2(x)) = 2 =$ grau$\,(q(x))$, devemos continuar a divisão, dividindo $r_2(x)$ por $q(x)$, pois $r_2(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

7. O monômio de maior grau de $r_2(x)$ é $10x^2$ e o monômio de maior grau de $q(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $10x^2$ por x^2 é $h_3(x) = 10$.

8. Fazendo o cálculo, obtemos:

$$r_3(x) = r_2(x) - h_3(x)q(x) = (10x^2 + 6x - 3) - 10x^2 - 30x - 10 = -24x - 13.$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 2x - 3 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2} -3x^4 - 9x^3 - 3x^2 & 3x^2 - 4x + 10 \\ \cline{1-1} -4x^3 - 2x^2 + 2x - 3 & \\ 4x^3 + 12x^2 + 4x & \\ \cline{1-1} 10x^2 + 6x - 3 & \\ -10x^2 - 30x - 10 & \\ \cline{1-1} -24x - 13 & \end{array}$$

9. Como grau$(r_3(x)) = 1 < 2 =$ grau$(q(x))$, não podemos continuar a divisão e, portanto, paramos os cálculos.

10. Obtemos, pois, $h(x) = h_1(x) + h_2(x) + h_3(x) = 3x^2 - 4x + 10$ e $r(x) = r_3(x) = -24x - 13$.

1.3 Raiz de um polinômio

Seja α um número real. A avaliação de um polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ em α é definida por

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n \in \mathbb{R},$$

o que equivale a substituição da variável x do polinômio $p(x)$ por α.

Definição 1.7. *Seja $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes em $\mathbb{R}$ tal que grau$(p(x)) \geq 1$. Diremos que um número real α é uma* ***raiz*** *de $p(x)$ quando $p(\alpha) = 0$.*

Exemplo 1.13. 1 é raiz do polinômio $p(x) = x^5 - 3x^2 + 2x$, pois $p(1) = 0$.

Como consequência da divisão euclidiana, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.4. *Seja $p(x)$ um polinômio não nulo tal que grau$(p(x)) \geq 1$. Então, $\alpha \in \mathbb{R}$ será uma raiz de $p(x)$ se, e somente se, $(x - \alpha)$ dividir $p(x)$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $p(\alpha) = 0$. Fazendo a divisão euclidiana de $p(x)$ por $(x - \alpha)$ (veja Teorema 1.1), obtemos

$$p(x) = (x - \alpha)h(x) + r(x),$$

onde $r(x) \equiv 0$ ou $0 \leq gr(r(x)) < 1$.

Assim, podemos escrever $r(x) = c \in R$ e

$$p(x) = (x - \alpha)h(x) + c.$$

Avaliando $p(x)$ em α, temos

$$0 = p(\alpha) = h(\alpha)(\alpha - \alpha) + c,$$

ou seja, $r(x) = c = 0$, o que mostra que $(x - \alpha)$ divide $p(x)$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que $(x - \alpha)$ divida $p(x)$. Então, existe um polinômio $h(x)$ tal que $p(x) = h(x)(x - \alpha)$. Logo, $p(\alpha) = h(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0$. ■

A seguir, veremos que o grau de um polinômio limita o seu número de raízes reais. A demonstração deste resultado utiliza o método de Indução Matemática. De acordo com argumentos anteriores, esta não convém ser apresentada aos alunos do ensino secundário, a menos que o professor julgue por bem explicar tal método aos alunos, uma vez que o entendimento da Indução Matemática no Ensino Médio é possível.

Proposição 1.5. *Seja $p(x)$ um polinômio não nulo. Se $p(x)$ tiver grau n, então $p(x)$ terá, no máximo, n raízes reais.*

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre $n = grau\,(p(x))$.

Se $n = 0$, então $p(x) = a_0 \neq 0$ não terá raízes reais e o resultado será válido.

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para polinômios de grau $n \geq 0$ e consideremos $p(x)$ um polinômio tal que grau $(p(x)) = n + 1$.

Se $p(x)$ não tiver raízes em $\mathbb{R}$, não temos nada a demonstrar. Então, digamos que $p(x)$ tenha uma raiz $\alpha \in \mathbb{R}$. Pela proposição anterior, $x - \alpha$ divide $p(x)$. Daí, existe um polinômio $h(x)$ tal que $p(x) = h(x)(x - \alpha)$, onde grau $(h(x)) = n$. Por hipótese de indução, $h(x)$ tem, no máximo, n raízes. Observemos que:

$$\begin{aligned} \beta \in \mathbb{R} \text{ é raiz de } p(x) &\iff 0 = p(\beta) = h(\beta)(\beta - \alpha) \\ &\iff h(\beta) = 0 \text{ ou } \beta = \alpha \\ &\iff \beta \in \mathbb{R} \text{ é raiz de } h(x) \text{ ou } \beta = \alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $p(x)$ tem, no máximo, $n + 1$ raízes. ■

Proposição 1.6. *Um polinômio $p(x)$ será divisível por $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_j)\cdots(x-\alpha_n)$, onde $\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ são números reais distintos se, e somente se, $\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ forem raízes distintas de $p(x)$.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) Se $(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_j)\cdots(x - \alpha_n)$ dividir $p(x)$, existirá um polinômio $h(x)$ com coeficientes em $\mathbb{R}$ tal que

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_j)\cdots(x - \alpha_n)h(x).$$

Dessa igualdade segue que $p(\alpha_1) = p(\alpha_2) = \cdots = p(\alpha_j) = \cdots = p(\alpha_n) = 0$.

Logo, $\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ são raízes reais distintas de $p(x)$, já que $\alpha_1, \cdots, \alpha_j, \cdots, \alpha_n$ são números reais distintos.

($\Longleftarrow$) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ raízes reais distintas de $p(x)$.

Como α_1 é raiz de $p(x)$, podemos escrever

$$p(x) = (x - \alpha_1)q_1(x).$$

Como α_2 também é uma raiz de $p(x)$, substituindo x por α_2 na igualdade anterior, obtemos:

$$0 = p(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)q_1(\alpha_2).$$

Como $(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0$, pois α_1 e α_2 são raízes distintas e o produto de dois números reais é zero se, e somente se, um dos fatores é zero, devemos ter $q_1(\alpha_2) = 0$. Portanto, α_2 é raiz do polinômio $q_1(x)$, donde podemos dizer que $q_1(x) = (x - \alpha_2)q_2(x)$ e, por conseguinte,

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q_2(x).$$

Como α_3 também é uma raiz de $p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q_2(x)$, então

$$0 = p(\alpha_3) = (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)q_2(\alpha_3).$$

Sabendo que $(\alpha_3 - \alpha_1) \neq 0$ e $(\alpha_3 - \alpha_2) \neq 0$, concluímos que $q_2(\alpha_3) = 0$, ou seja, α_3 é raiz do polinômio $q_2(x)$. Daí, podemos escrever

$$q_2(x) = (x - \alpha_3)q_3(x)$$

e

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)q_3(x).$$

Continuando o processo para $j = 4, 5, \cdots, n$, obteremos

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)q(x).$$

■

Exemplo 1.14. Pela Proposição 1.5, o polinômio $p(x) = x^5 - 3x^2 + 3x - 1$ tem, no máximo, 5 raízes reais.

Exemplo 1.15. Seja $p(x) = x^3 - 7x + 6$. Note que $p(1) = 0$, $p(2) = 0$ e $p(-3) = 0$. Então, pela Proposição 1.6, podemos concluir que $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

Definição 1.8. *Diremos que um número real α será uma raiz de $p(x)$ de multiplicidade r se, e somente se, $(x - \alpha)^r$ dividir $p(x)$ mas $(x - \alpha)^{r+1}$ não dividir $p(x)$, onde r é um número natural maior do que ou igual a 1. Neste caso, r é a maior potência de $x - \alpha$ que divide $p(x)$ e*

$$p(x) = (x - \alpha)^r q(x), \text{ com } q(\alpha) \neq 0.$$

Diremos que α será uma raiz simples de $p(x)$ quando $r = 1$, e será uma raiz múltipla de $p(x)$ quando $r \geq 2$.

Exemplo 1.16. Sejam $p(x) = x^2 - 2x + 1$ e $q(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Afirmamos que $x = 1$ é uma raiz múltipla de $p(x)$ de multiplicidade 2.

   • Considerando $p(x) = x^2 - 2x + 1$ e $w(x) = x - 1$, vemos que o monômio de maior grau de $p(x)$ é x^2 e o monômio de maior grau de $w(x)$ é x. O quociente da divisão de x^2 por x é $h_1(x) = x$.

   • Fazendo o cálculo, obtemos:

$$r_1(x) = p(x) - h_1(x)w(x) = (x^2 - 2x + 1) - x^2 + x = -x + 1.$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x \\ \hline -x + 1 & \end{array}$$

- Como grau $(r_1(x)) = 1 =$ grau $(w(x))$, devemos continuar a divisão, dividindo $r_1(x)$ por $w(x)$, pois $r_1(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

- O monômio de maior grau de $r_1(x)$ é $-x$ e o monômio de maior grau de $w(x)$ é x. O quociente da divisão de $-x$ por x é $h_2(x) = -1$.

- Fazendo o cálculo, obtemos:

$$r_2(x) = r_1(x) - h_2(x)w(x) = (-x+1) - (-1)(x-1) = -x+1+x-1 = 0.$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 2x + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x - 1 \\ \cline{1-1} -x + 1 & \\ +x - 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

- Pelo Teorema 1.1, obtemos $p(x) = h(x)w(x)$, onde $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, ou seja, $p(x) = (x-1)(x-1) = (x-1)^2$, comprovando a afirmação feita.

2. Afirmamos que $x = 1$ é uma raiz múltipla de $q(x)$ de multiplicidade 2 e $x = 2$ é uma raiz simples de $q(x)$.

- Vejamos que $p(x)$ divide $q(x)$. Com efeito, o monômio de maior grau de $q(x)$ é x^3 e o monômio de maior grau de $p(x)$ é x^2. O quociente da divisão de x^3 por x^2 é $h_1(x) = x$.

Fazendo o cálculo, obtemos:

$$r_1(x) = q(x) - h_1(x)p(x) = (x^3 - 3x + 2) - x(x^2 - 2x + 1) = 2x^2 - 4x + 2.$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x + 2 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + 2x^2 - x & x \\ \cline{1-1} 2x^2 - 4x + 2 & \end{array}$$

Como grau $(r_1(x)) = 2 =$ grau $(q(x))$, devemos continuar a divisão, dividindo $r_1(x)$ por $q(x)$, pois $r_1(x)$ não é o resto da divisão euclidiana.

O monômio de maior grau de $r_1(x)$ é $2x^2$ e o monômio de maior grau de $q(x)$ é x^2. O quociente da divisão de $2x^2$ por x^2 é $h_2(x) = 2$.

Fazendo o cálculo, obtemos:

$$r_2(x) = r_1(x) - h_2(x)q(x) = (2x^2 - 4x + 2) - 2x^2 + 4x - 2 = 0.$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x + 2 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 + 2x^2 - x & x + 2 \\ \cline{1-1} 2x^2 - 4x + 2 & \\ -2x^2 + 4x - 2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Pelo Teorema 1.1, obtemos $q(x) = h(x)p(x)$, onde $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$, ou seja, $q(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 1)$. Mas, vimos acima que $(x^2 - 2x + 1) = (x-1)^2$. Portanto, $q(x) = (x+2)(x-1)^2$, donde $x = 1$ é uma raiz múltipla de $q(x)$ de multiplicidade 2 e $x = -2$ é uma raiz simples de $q(x)$.

Determinar, se existirem, as raízes reais de um polinômio com coeficientes reais pode ser, por vezes, uma tarefa árdua, principalmente se as raízes forem números irracionais.

Quando o polinômio tiver coeficientes inteiros, saberemos exatamente onde procurar essas raízes, caso elas existam. Sem mágica alguma, podemos afirmar, por exemplo, que as possíveis raízes racionais do polinômio $p(x) = 4x^3 - 16x^2 + 13x - 3$ estão no conjunto

$$\left\{-1, 1, -3, 3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right\}.$$

Avaliando $p(x)$ nos valores desse conjunto, vemos que as suas raízes são 3 e $\frac{1}{2}$, sendo $\frac{1}{2}$ uma raiz de multiplicidade 2.

Como fizemos essa afirmação com tanta convicção, ou melhor, como encontramos esse conjunto de possíveis raízes de $p(x)$? Isso é o que veremos a seguir; aprenderemos como determinar as possíveis raízes de um polinômio qualquer com coeficientes inteiros.

Inicialmente, observamos que todo polinômio não nulo

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

com coeficientes reais e $a_0 = 0$, tem a raiz $\alpha = 0$, pois

$$p(0) = a_10 + a_20^2 + \cdots + a_{n-1}0^{n-1} + a_n0^n = 0.$$

Teorema 1.2. *Seja $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ um polinômio não nulo com coeficientes inteiros. Suponhamos que o número racional $\frac{p}{q}$, onde p e q são primos entre si, seja uma raiz de $w(x)$. Então, p divide a_0 e q divide a_n.*

Demonstração: Consideremos a equação polinomial de coeficientes inteiros:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0.$$

Supondo que o número $\frac{p}{q}$ (com p e q primos entre si) seja raiz da equação anterior, temos:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando a igualdade acima por q^n, obtemos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q^1 + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0, \tag{1.5}$$

ou seja,

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q^1 + \cdots + a_1pq^{n-1} = -a_0q^n.$$

Colocando p em evidência no lado esquerdo dessa igualdade, obtemos:

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q^1 + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n. \tag{1.6}$$

O primeiro membro da Equação (1.6) é um número inteiro, pois $p, q, a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1$ são números inteiros. Portanto, $a_0 q^n$ deve ser um número inteiro e também múltiplo de p, uma vez que p é fator do primeiro membro de (1.6). Digamos que $kp = a_0 q^n$, com $k \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\frac{a_0 q^n}{p} = k.$$

Como p e q são números primos entre si, p e q^n também o são. Logo, p é divisor de a_0.

Agora, observemos que, da Equação (1.5), obtemos também:

$$a_{n-1}p^{n-1}q^1 + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = -a_n p^n.$$

Colocando q em evidência no lado esquerdo dessa igualdade, obtemos:

$$q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n.$$

Através de argumentos anteriores, concluímos que q é divisor de a_n. ■

Convém ressaltar que o teorema anterior apenas nos permite fazer uma previsão sobre as possíveis raízes racionais de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, não garante a existência de raízes racionais. Mas, no caso de elas existirem, mostra como obtê-las. Mais precisamente, este resultado nos conduz a formar um conjunto de possíveis raízes racionais obtidas dos divisores de a_n e a_0. Se nenhum elemento desse conjunto for raiz da equação, então esta não admitirá raízes racionais.

Note que se o polinômio $w(x)$ com coeficientes inteiros tiver coeficiente líder $a_n = 1$ e uma raiz racional $\alpha \neq 0$, escrevendo α como uma fração irredutível, ou seja, $\alpha = \frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, saberemos que q divide 1, pelo Teorema 1.2. Portanto, $q = 1$ ou $q = -1$ e $\alpha = \pm p$. Este fato nos permite formalizar o seguinte resultado.

Corolário 1.1. *Seja $p(x)$ um polinômio mônico com coeficientes inteiros. Então, toda raiz racional de $p(x)$ é um número inteiro.*

Exemplo 1.17. Como encontrar as possíveis raízes racionais do polinômio $w(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$? Para isso, vamos utilizar o teorema anterior. As possíveis raízes de $w(x)$ são escritas sob a forma $\alpha = \frac{p}{q}$, onde p pertence ao conjunto dos divisores de $a_0 = 2$ e q pertence ao conjunto dos divisores de $a_3 = 5$, ou seja, $p \in \{-1, 1, -2, 2\}$ e $q \in \{-1, 1, -5, 5\}$. Portanto,

$$\alpha = \frac{p}{q} \in \left\{-1, 1, -2, 2, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}.$$

Avaliando $w(x)$ nos valores do conjunto acima, temos:

α	-2	-1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	2
$w(\alpha)$	-48	-4	$\frac{56}{25}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{32}{25}$	$\frac{12}{25}$	0	20

Então, 1 é a única raiz racional de $w(x)$.

1.4 Dispositivo de Briot-Ruffini

O **Dispositivo de Briot-Ruffini** é um algoritmo eficiente e prático para determinar o quociente $h(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão euclidiana de um polinômio $p(x)$ por $(x - \alpha)$.

Atentamos para o seguinte fato:

$$\boxed{p(x) = (x - \alpha)h(x) + r, \text{ onde } r(x) = r \in \mathbb{R} \text{ e grau}\,(h(x)) = \text{grau}\,(p(x)) - 1.}$$

Para entendermos esse algoritmo, vamos considerar a divisão de um polinômio de grau 3, $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, por $x - \alpha$. Neste caso, $r(x) = r \in \mathbb{R}$ e $h(x) = q_2x^2 + q_1x^1 + q_0$. Então,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \alpha)h(x) + r(x) \\ &= q_2x^3 + q_1x^2 + q_0x - \alpha q_2x^2 - \alpha q_1x^1 - \alpha q_0 + r \\ &= q_2x^3 + (q_1 - \alpha q_2)x^2 + (q_0 - \alpha q_1)x + (r - \alpha q_0). \end{aligned}$$

Portanto, $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = q_2x^3 + (q_1 - \alpha q_2)x^2 + (q_0 - \alpha q_1)x + (r - \alpha q_0)$.

Comparando os coeficientes do primeiro e do segundo membro dessa igualdade, obtemos

$$q_2 = a_3$$

$$q_1 - q_2\alpha = a_2 \Rightarrow q_1 = a_2 + q_2\alpha$$

$$q_0 - q_1\alpha = a_1 \Rightarrow q_0 = a_1 + q_1\alpha$$

$$r - q_0\alpha = a_0 \Rightarrow r = a_0 + q_0\alpha.$$

O Dispositivo de Briot-Ruffini consiste na elaboração de uma tabela com o objetivo de calcular, sucessivamente, os coeficientes do quociente e do resto, usando a fórmula recursiva acima. A tabela tem duas linhas. Na primeira, coloca-se α seguido dos coeficientes a_3, a_2, a_1 e a_0 do dividendo $p(x)$. Na segunda, coloca-se os coeficientes q_2, q_1 e q_0 do quociente $q(x)$ e o valor do resto que são calculados um após o outro. A forma da tabela é a seguinte:

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & q_2 & q_1 & q_0 & r \end{array}$$

O entendimento do algoritmo será favorecido se seguirmos o roteiro abaixo.

Roteiro:

I) Os polinômios $p(x)$ e $x - \alpha$ são dados do problema. Construímos a primeira linha da tabela com α seguido dos coeficientes a_3, a_2, a_1 e a_0, nessa ordem.

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & \end{array}$$

II) A segunda linha é construída passo a passo. Primeiramente, colocamos embaixo de a_3 o valor de $q_2 = a_3$. Esse é o valor inicial.

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & q_2 = a_3 & & & \end{array}$$

III) Usando os valores de q_2, α e a_2, calculamos o valor de $q_1 = q_2\alpha + a_2$ e colocamos embaixo de a_2.

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & q_2 & q_1 = q_2\alpha + a_2 & & \end{array}$$

IV) Usando os valores de q_1, α e a_1, calculamos o valor de $q_0 = q_1\alpha + a_1$ e colocamos embaixo de a_1.

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & q_2 & q_1 & q_0 = q_1\alpha + a_1 & \end{array}$$

V) Finalmente, usando os valores de q_0, α e a_0, calculamos o valor de $r = q_0\alpha + a_0$ e colocamos embaixo de a_0.

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & q_2 & q_1 & q_0 & r = q_0\alpha + a_0 \end{array}$$

Vejamos um exemplo para fixarmos o algoritmo de Briot-Ruffini para polinômios de grau 3.

Exemplo 1.18. Vamos determinar o quociente $h(x)$ e o resto $r(x) = r$ da divisão euclidiana de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ por $x - 2$, seguindo o roteiro apresentado. Nesse caso, $\alpha = 2$ e os coeficientes de $p(x)$ são $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 4$.

I) A primeira linha da tabela é:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ \hline & & & & \end{array}$$

Construímos a segunda linha, a partir da segunda coluna, passo a passo. Como $p(x)$ tem grau 3, o quociente $h(x)$ tem grau 2. Começaremos determinando q_2.

II) O coeficiente do termo de maior grau do quociente é $q_2 = a_3 = 1$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

III) O coeficiente q_1 é dado por $q_1 = q_2\alpha + a_2 = 1.2 - 3 = -1$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

IV) O coeficiente q_0 é dado por $q_0 = q_1\alpha + a_1 = (-1).2 + 0 = -2$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \end{array}$$

IV) O resto r é dado por $r = q_0\alpha + a_0 = (-2).2 + 4 = 0$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Assim, obtemos o quociente $h(x) = x^2 - x - 2$ e o resto $r = 0$. Como $r = 0$, o polinômio $p(x)$ é divisível por $x - 2$. Dessa forma, $\alpha = 2$ é uma raiz de $p(x)$ e $p(x) = (x^2 - x - 2)(x - 2)$.

De uma maneira geral, consideremos o polinômio de grau n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Vamos efetuar a divisão de $p(x)$ por $x - \alpha$. Neste caso,

$$h(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0 \quad \text{e} \quad r(x) = r_0 \in \mathbb{R}.$$

Podemos usar a tabela do Dispositivo de Briot-Ruffini que, seguindo o mesmo procedimento utilizado para o caso de polinômios de grau 3, assume a forma:

$$\begin{array}{c|ccccccc} \alpha & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & r_0 \end{array}$$

Podemos, também, utilizar o Dispositivo de Briot-Ruffini, sucessivamente, para verificar se um polinômio $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$, $(x - \alpha)^2$, $(x - \alpha)^3$, $(x - \alpha)^4$ etc. Vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 1.19. O polinômio $p(x) = x^6 - 3x^2 + 2$ tem a raiz $\alpha = -1$. Os coeficientes de $p(x)$ são $a_6 = 1$, $a_5 = 0$, $a_4 = 0$,$a_3 = 0$,$a_2 = -3$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 2$. A divisão de $p(x)$ por $x + 1$, aplicando o dispositivo, é:

$$\begin{array}{c|ccccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

Logo, $p(x) = x^6 - 3x^2 + 2 = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 2)$. Para verificarmos se $(x + 1)^2$ divide $p(x)$, aplicaremos na segunda linha da tabela acima o valor de $\alpha = -1$ e faremos os cálculos:

-1	1	0	0	0	-3	0	2
-1	1	-1	1	-1	-2	2	0
	1	-2	3	-4	2	0	

O resto da divisão é 0. Portanto, $(x+1)^2$ divide $p(x)$.

Agora, para sabermos se $(x+1)^3$ divide $p(x)$, continuaremos o processo. Vamos acrescentar $\alpha = -1$ na terceira linha e aplicar, novamente, o algoritmo:

-1	1	0	0	0	-3	0	2
-1	1	-1	1	-1	-2	2	0
-1	1	-2	3	-4	2	0	
	1	-3	6	-10	12		

O resto encontrado é diferente de zero, sendo assim, $(x+1)^3$ não divide $p(x)$. Entretanto, na terceira linha da última tabela, podemos ler os coeficientes do quociente da divisão de $p(x)$ por $(x+1)^2$ e escrever

$$p(x) = (x+1)^2(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2).$$

O que podemos dizer a respeito do resto da divisão de um polinômio de grau maior do que ou igual a 1 por $x - \alpha$? Atente-se para o próximo resultado.

Teorema 1.3. *Seja $p(x)$ um polinômio de grau n, $n \geq 1$. O resto da divisão de $p(x)$ por $(x-\alpha)$ é igual a $p(\alpha)$.*

Demonstração: Pelo Algoritmo de Euclides, podemos escrever $p(x)$ da seguinte forma:

$$p(x) = (x-\alpha)h(x) + r(x),$$

onde $\text{grau}\,(h(x)) = n-1$ e $r(x) = r \in \mathbb{R}$.

Avaliando $p(x)$ em α, obtemos:

$$p(\alpha) = (\alpha - \alpha)h(\alpha) + r,$$

ou seja, $r = p(\alpha)$. ■

2 Equações polinomiais

Neste capítulo, estudaremos as equações algébricas em sua forma canônica.

Aqui, assumiremos que o leitor-aluno tenha familiaridade com o conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$. Embora não exploremos este tópico no presente trabalho, anexaremos uma nota sobre o mesmo (veja Apêndice).

Definição 2.1. *Denomina-se **equação polinomial** de grau n, na variável $x \in \mathbb{C}$, toda equação que pode ser reduzida à forma:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Na igualdade acima, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1$ e a_0 são números reais denominados coeficientes, n é um número natural diferente de zero e a_0 é o termo independente.

Definição 2.2. *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Dado $z \in \mathbb{C}$, definimos a avaliação de p em z como sendo o número complexo*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Definição 2.3. *Diremos que $z \in \mathbb{C}$ é uma **raiz** ou **zero** da equação polinomial $p(x) = 0$ se $p(z) = 0$.*

O próximo resultado afirma que as raízes complexas de um polinômio $p(x)$, quando existirem, ocorrerão aos pares. Mais precisamente, se z for uma raiz de $p(x)$, o conjugado de z, $\overline{z}$, também será uma raiz de $p(x)$.

Teorema 2.1. *Se um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, for raiz da equação polinomial $p(x) = 0$, de coeficientes reais, o seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ será também raiz da mesma equação.*

Demonstração: Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Para demonstrar este teorema precisamos relembrar a seguinte propriedade dos números complexos:

$$a_j \overline{z}^j = \overline{a_j} \overline{z}^j = \overline{a_j}\,\overline{z^j} = \overline{a_j z^j},$$

para cada $j = 0, 1, \cdots, n$ e $z \in \mathbb{C}$.

Então,

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{j-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \\ &= \overline{p(z)}, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é consequência do conjugado da soma ser igual a soma dos conjugados.

Em particular, como $0 = \overline{0}$ e $\overline{\overline{p(z)}} = p(z)$, concluímos que:

$$p(z) = 0 \Longleftrightarrow \overline{p(z)} = 0 \Longleftrightarrow p(\overline{z}) = 0,$$

como queríamos. ∎

Observe que o teorema anterior nos permite afirmar que todo polinômio de grau 3 tem pelo menos uma raiz real. Mais ainda, todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

Agora, vamos considerar polinômios com coeficientes complexos, a fim de abordar as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial de grau n, as conhecidas *Relações de Girard*. As operações de polinômios com coeficientes complexos são análogas às operações de polinômios com coeficientes reais. Por este trabalho estar destinado aos alunos do Ensino Básico, preferimos tratar apenas de polinômios com coeficientes reais no Capítulo 1. Porém, o estudo realizado anteriormente poderia ter sido feito de modo análogo - e mais abrangente - para os polinômios com coeficientes complexos, que são definidos de maneira similar, como segue abaixo.

Definição 2.4. *Um* ***polinômio*** *com coeficientes em $\mathbb{C}$ (ou com coeficientes complexos) é uma expressão do tipo*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

onde n é um número natural e $a_j \in \mathbb{C}$, para $j \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$.

A partir de agora, consideraremos equações polinomiais de grau n na variável x

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1$ e a_0 serão números complexos.

O próximo resultado, demonstrado em 1977 por Carl Friedrich Gauss em sua tese de Doutorado, é um importante alicerce da teoria de equações algébricas. Por estar além do nível do presente texto, não exibiremos uma demonstração do mesmo aqui.

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Toda equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$, tem pelo menos uma raiz complexa.*

Como consequência deste teorema, temos:

Corolário 2.1. *Todo polinômio* $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *de grau* $n \geq 1$ *pode ser fatorado na forma*

$$p(x) = c(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n),$$

onde c *é o coeficiente líder de* p *e* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *são as raízes de* p.

Para demonstrar este resultado, usaremos um resultado auxiliar, o qual é equivalente à Proposição 1.4 para o caso de polinômios com coeficientes complexos na variável $x \in \mathbb{C}$.

Proposição 2.1. *Seja* $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ *um polinômio com coeficientes complexos na variável* $x \in \mathbb{C}$. *Se* $z_0 \in \mathbb{C}$ *for uma raiz de* p, *existirá um polinômio* h *tal*

$$p(x) = (x - z_0)h(x) \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{C}.$$

Demonstração: Por hipótese,

$$p(z_0) = a_0 + a_1z_0 + \cdots + a_{n-1}{z_0}^{n-1} + a_n{z_0}^n = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(z_0) && (2.1)\\ &= a_1(x - z_0) + a_2(x^2 - z_0^2) + \cdots + a_{n-1}(x^{n-1} - z_0^{n-1}) + a_n(x^n - z_0^n). && (2.2) \end{aligned}$$

Agora,

$$x^k - z_0^k = (x - z_0)(x^{k-1} + x^{k-2}z_0 + \cdots + xz_0^{k-2} + z_0^{k-1})$$

para todo inteiro $k \geq 1$. Substituindo estas igualdades em (2.2) e colocando $(x - z_0)$ em evidência, vemos que

$$p(x) = (x - z_0)h(x),$$

onde h é o polinômio

$$h(x) = a_1 + a_2(x + z_0) + \cdots + a_n(x^{n-1} + x^{n-2}z_0 + \cdots + xz^{n-2} + z_0^{n-1}).$$

■

Voltemos, agora, à demonstração do Corolário 2.1.

Demonstração do Corolário 2.1: Faremos a prova por indução sobre n. Se $n = 1$ então $p(x) = c(x - z_1)$, onde $c = a_1$ e $z_1 = -\dfrac{a_0}{a_1}$. Suponhamos $n \geq 2$ e o resultado válido para polinômios de grau $n - 1$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existe $z_n \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_n) = 0$. Pela Proposição 2.1, existe um polinômio h tal que

$$p(x) = h(x)(x - z_n).$$

Como h tem grau $n-1$, a hipótese de indução garante que h pode ser escrito na forma

$$h(x) = c(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_{n-1}).$$

Portanto, $p(x) = c(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_n)$, e uma simples manipulação algébrica nos permite concluir que $c = a_n$. ∎

Note que, no Corolário 2.1, podem haver repetições nas raízes $z_1, z_2, \cdots, z_n$ de p. Agrupando as raízes repetidas, vemos que p pode ser fatorado na forma

$$p(x) = c(x - w_1)^{m_1}(x - w_2)^{m_2} \cdots (x - w_r)^{m_r},$$

onde $c = a_n$, $w_1, w_2, \ldots, w_r$ são as raízes distintas de p e $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}^*$, com $m_1 + \cdots + m_r = n$. O número m_j é a multiplicidade da raiz w_j, para $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Finalizamos esta seção observando que, a partir do que foi estabelecido no Teorema 2.2, é possível afirmar que todo polinômio com coeficientes complexos de grau $n \geq 1$ tem exatamente n raízes complexas.

2.1 Relações entre coeficientes e raízes

No século XVII, o matemático Albert Girard (1590-1633) apresentou um importante resultado que relaciona as raízes com os coeficientes reais ou complexos de uma equação polinomial. Estas relações são muito usadas quando, embora não se conheça raiz alguma da equação, são dadas informações acerca das mesmas como "uma raiz é o oposto da outra", "uma raiz é o inverso da outra" etc.

As relações entre coeficientes e raízes são também denominadas **Relações de Girad**. Vejamos como obtê-las.

Equações do 2° grau

Consideremos o polinômio de grau 2, $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, cujas raízes são α_1 e α_2 (reais ou complexas). Pelo Corolário 2.1, sabemos que

$$p(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

Dividindo ambos os termos por a, obtemos

$$p(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

Aplicando a distributiva no 2° membro, temos

$$p(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2.$$

Da identidade de polinômios, vem que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a},$$

$$\alpha_1.\alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

Equações do 3° grau

Consideremos o polinômio de grau 3, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, cujas raízes são α_1, α_2 e α_3 (três raízes reais ou uma raiz real e duas raízes complexas). Pelo Corolário 2.1, temos:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

Procedendo de forma análoga a anterior, obtemos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$$

e

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Da identidade de polinômios, vem que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a},$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 = \frac{c}{a},$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}.$$

Equações do 4° grau

Consideremos o polinômio de grau 4, $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, com $a \neq 0$, cujas raízes são α_1, α_2 , α_3 e α_4 (quatro raízes reais, ou duas raízes reais e duas raízes complexas ou quatro raízes complexas). Pelo Corolário 2.1, temos:

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4).$$

Procedendo de forma análoga a anterior, obtemos:

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$$

e

$$x^4+\frac{b}{a}x^3+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x+\frac{e}{a} = x^4-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x^3+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)x^2-$$

$$-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Da identidade de polinômios, vem que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{b}{a},$$

$$(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4) = \frac{c}{a},$$
$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4) = -\frac{d}{a},$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{e}{a}.$$

Equações de grau n

Para o caso geral de grau $n \geq 4$, o processo para encontrar as relações entre as raízes e os coeficientes é análogo aos anteriores.

Se $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ for uma equação polinomial de grau n, $n \geq 1$, com $a_n \neq 0$ e raízes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
$$(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}.$$

Exemplo 2.1. Considere que a equação $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ com raízes a,b,c e d. Qual é a soma e o produto das suas raízes?

Aplicando as fórmulas de Girard, temos:

$$a + b + c + d = -\frac{a_3}{a_4} \Rightarrow a + b + c + d = -\frac{2}{1} = -2$$

e

$$a.b.c.d = \frac{(-1)^4 a_0}{a_4} = \frac{1.24}{1} = 24.$$

Portanto, a soma das raízes da equação dada é -2 e o produto é 24.

Exemplo 2.2. Calcule o valor de $\log_{10}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)$, sabendo que a, b, c são as raízes da equação $2x^3 - 30x^2 + 15x - 3 = 0$.

Pelas Relações de Girard, temos:

$$a + b + c = -\frac{a_2}{a_3} = \frac{30}{2} = 15$$

e

$$abc = \frac{(-1)^3 a_0}{a_3} = \frac{(-1)(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

Note que:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{c + a + b}{abc} = \frac{15}{\frac{3}{2}} = 15.\frac{2}{3} = 10.$$

Assim, $\log_{10}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = \log_{10} 10 = 1.$

2.2 Resolução de equações polinomiais

Nesta seção, vamos resgatar algumas técnicas desenvolvidas por grandes matemáticos para resolver equações de grau 2, 3 e 4.

Equações do 2° grau

Consideremos a equação de 2° grau

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Dividindo a equação por a, obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

ou seja,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Para obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro, adicionamos o termo $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os membros da equação acima:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Daí,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Extraindo as raízes quadradas dos dois membros da equação, obtemos

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

de onde concluímos que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

ou seja,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Chamando $\Delta = b^2 - 4ac$, temos a conhecida *Fórmula de Bhaskara* (que, na verdade, deveria ser denominada *Fórmula de Sridhara*):

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.}$$

Exemplo 2.3. Quais são as raízes da equação polinomial $x^2 - x + 3 = 0$?

Para responder a esta questão, vamos utilizar a Fórmula de Bháskara vista acima. Note que, nessa equação, os coeficientes são $a = 1$, $b = -1$ e $c = 3$.

Sabendo que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

temos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}.$$

Logo, as duas raízes da equação dada são:

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{11}}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{11}}{2}.$$

No exemplo anterior, os coeficientes são todos diferentes de zero e, neste caso, a equação é denominada **completa**. As equações incompletas são aquelas que possuem coeficientes b e/ou c iguais a 0 e podem ser resolvidas ou usando a Fórmula de Bhaskara ou de forma mais simples usando técnicas operatórias semelhantes às utilizadas na resolução de equações do 1° grau. Vejamos os próximos exemplos.

Exemplo 2.4. Determine as raízes de $x^2 + 2x = 0$.

Esta equação pode ser escrita na forma $x^2 + 2x + 0 = 0$ e os seus coeficientes são: $a = 1$, $b = 2$ e $c = 0$.

Para resolvê-la, podemos colocar o x em evidência e, assim, obteremos:

$$x(x + 2) = 0.$$

Sabemos que se um produto de dois números for igual a zero então um desses números será igual a zero. Deste fato, concluímos que as raízes da equação dada são:

$$x = 0 \text{ e } x = -2.$$

Exemplo 2.5. Determine as raízes da equação $x^2 + 8 = 0$.

A equação dada pode ser escrita na forma $x^2 + 0x + 8 = 0$ e os seus coeficientes são: $a = 1$, $b = 0$ e $c = 8$.

Para resolvê-la, basta subtrairmos 8 em ambos os membros da equação e depois extrairmos a raiz quadrada, também dos dois membros. Com efeito:

$$x^2 + 8 - 8 = 0 - 8$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 = -8$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-8}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}i.$$

Portanto, as raízes da equação $x^2 + 8 = 0$ são $2\sqrt{2}i$ e $-2\sqrt{2}i$.

Equações do 3° grau

Optamos por não apresentar a dedução da Fórmula de Cardano (na verdade, de Tartaglia) aqui. Para a verificação desta, indicamos a referência [6] . Informamos que a dedução da fórmula para resolução de equações do 3° grau, que será apresentada a seguir, foi realizada pelo matemático brasileiro Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira (Gugu) aos 14 anos [1], veja [9].

A ideia desenvolvida por Gugu para resolver equações do 3° grau se baseou em escrever as raízes destas como soma de raízes cúbicas das raízes de uma equação do 2° grau. Vejamos o desenvolvimento abaixo.

Consideremos a equação do 2° grau, $x^2 - Sx + P = 0$, com raízes x_1 e x_2 tais que $x_1 + x_2 = S$ e $x_1.x_2 = P$ (Relações de Girard).

Se $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$, então:

$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \Rightarrow$$

$$y^3 = S + 3\sqrt[3]{P}y. \tag{2.3}$$

Assim, para determinar y há que se resolver uma equação do 3° grau.

Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, procuramos uma substituição $x = y + t$ que anule o coeficiente do termo y^2:

$$(y+t)^3 + a(y+t)^2 + b(y+t) + c = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 + 3y^2t + 3yt^2 + t^3 + ay^2 + 2ayt + at^2 + by + bt + c = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 + (3t+a)y^2 + (3y+a)t^2 + t^3 + y(2at+b) + bt + c = 0.$$

Fazendo $t = -\dfrac{a}{3}$, obtemos uma equação do tipo:

$$y^3 + py + q = 0. \tag{2.4}$$

Comparando as Equações (2.3) e (2.4), determinamos números P e S tais que

$$p = -3\sqrt[3]{P} \text{ e } q = -S.$$

de forma que, se x_1 e x_2 forem raízes de $x^2 - Sx + P = 0$, então $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ satisfará a equação $y^3 + py + q = 0$.

Feito isso, obtemos

$$\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3} \Rightarrow P = -\frac{p^3}{27} \text{ e } S = -q.$$

Isso nos mostra que x_1 e x_2 são raízes de $x^2 + qx - \dfrac{p^3}{27} = 0$. Aplicando a Fórmula de Bhaskara, concluímos:

[1] Atualmente, Gugu é pesquisador titular do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), localizado no Rio de Janeiro.

$$x_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } x_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

de onde

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{2.5}$$

satisfaz a equação $y^3 + py + q = 0$.

Cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, todavia a equação $\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3}$ diz que o produto das duas raízes deve ser $-\frac{p}{3}$. Esta fórmula fornece as três raízes de $y^3 + py + q = 0$, que somadas a $t = -\frac{a}{3}$, nos permite obter as três raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Exemplo 2.6. Quais são as raízes da equação $y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = 0$?

Seguindo a ideia apresentada acima, devemos eliminar o termo y^2 e, para isso, fazemos a substituição $y = x + 1$:

$$(x+1)^3 - 3(x+1)^2 - 4(x+1) + 12 = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 - 4x - 4 + 12 = 0.$$

Assim, obtemos a equação

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Note que 1 é raiz dessa equação pois $1^3 - 7.1 + 6 = 0$.

Como uma raiz é conhecida, podemos escrever $p(x) = q(x)(x-1)$, onde grau $(q(x)) = 2$ e, para obter $q(x)$, utilizamos o Dispositivo de Briot-Ruffini. Temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Assim, $q(x) = x^2 + x - 6$.

Fazendo $q(x) = 0$, vamos determinar as outras duas raízes usando a Fórmula de Bhaskara.

Os coeficientes de $q(x)$ são $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$, então:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}.$$

Portanto, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = -3$ são as raízes da equação $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Agora, para obtermos as raízes da equação $y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = 0$, devemos somar 1 a x_1, x_2 e x_3; são elas:

$$y_1 = 1 + 1 = 2,$$

$$y_2 = 2 + 1 = 3$$

$$y_3 = -3 + 1 = -2.$$

Exemplo 2.7. Quais são as raízes da equação $y^3 - 30y - 133 = 0$?

- Observe que essa equação possui o coeficiente do termo y^2 igual a zero.
- Da igualdade $y^3 + py + q = y^3 - 30y - 133$, os coeficientes p e q são: -30 e -133, respectivamente.
- Substituímos nas fórmulas:

$$x_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad x_2 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$x_1 = \frac{-(-133)}{2} + \sqrt{\frac{(-133)^2}{4} + \frac{(-30)^3}{27}} \quad x_2 = \frac{-(-133)}{2} - \sqrt{\frac{(-133)^2}{4} + \frac{(-30)^3}{27}}$$

$$x_1 = 66,5 + 58,5 = 125 \qquad x_2 = 66,5 - 58,5 = 8$$

- Como $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ então $y = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8}$.

$$\sqrt[3]{125} = \begin{cases} 5 \\ -2,5 + 4,3i \\ -2,5 - 4,3i \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2 \\ -1 + 1,7i \\ -1 - 1,7i \end{cases}$$

- Usamos o fato que o produto de duas raízes deve ser $-\frac{p}{3}$, que nesse caso é igual a 10. Então as raízes da equação são:

  $y_1 = 2 + 5 = 7.$

  $y_2 = (-2,5 + 4,3i) + (-1 - 1,7i) = -3,5 + 2,6i.$

  $y_3 = -3,5 - 2,6i.$

Equações do 4° grau

Uma variação da técnica apresentada acima permite a resolução de equações do 4° grau, como veremos a seguir. Foi também o matemático Gugu quem percebeu este fato, embora o mesmo método tivera sido desenvolvido pelo matemático Euler em seu livro *Elements of Algebra.*

Consideremos a equação do 3° grau $x^3 - Sx^2 + S_d x - P = 0$, de raízes x_1, x_2 e x_3, que satisfazem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = S,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = S_d \text{ e}$$
$$x_1x_2x_3 = P.$$

Seja $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}) \Rightarrow$$
$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = (\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})^2 \Rightarrow$$
$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = S_d + 2\sqrt{P}y$$

ou

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}y + S^2 - 4S_d = 0. \tag{2.6}$$

Dada a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fazemos uma substituição do tipo $x = y + t$ e obtemos

$$y^4 + (4t + a)y^3 + \cdots = 0.$$

Fazendo $t = -\frac{a}{4}$, obtemos uma equação sem o termo y^3, como segue abaixo:

$$y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0.$$

Comparando a última equação com a Equação (2.6), tomamos S, P e S_d tais que

$$-2S = k_1;\ -8\sqrt{P} = k_2 \text{ e } S^2 - 4S_d = k_3 \Rightarrow S = -\frac{k_1}{2}\ P = \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 \text{ e } S_d = \frac{k_1^2 - 4k_3}{16}.$$

Assim, resolvendo a equação

$$x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_1^2 - 4k_3}{16}x - \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = 0, \tag{2.7}$$

obtemos raízes x_1, x_2 e x_3 tais que

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} \text{ satisfaz } y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0.$$

Para obter as raízes de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, basta subtrair $\frac{a}{4}$ das raízes de $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$. Observe que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação $\sqrt{P} = -\frac{k_2}{8}$ diz que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -\frac{k_2}{8}$. Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor de $\sqrt{x_3}$. Dessa forma, obtemos todas as quatro raízes da equação original.

Exemplo 2.8. Vamos determinar as raízes da equação $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$.

A fim de obter uma equação sem o termo y^3, fazemos a substituição $x = y' - 1$:

$$(y' - 1)^4 + 4(y' - 1)^3 + 8(y' - 1)^2 - 8(y' - 1) + 4 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$y'^4 - 4y'^3 + 6y'^2 - 4y' + 1 + 4y'^3 - 12y'^2 + 12y' - 4 + 8y'^2 - 16y' + 8 - 8y' + 8 + 4 = 0,$$

obtendo a equação:

$$y'^4 + 2y'^2 - 16y' + 17 = 0. \tag{2.8}$$

Para resolver essa equação, vamos organizar os procedimentos na forma de quatro passos:

- O primeiro passo é obter os coeficientes k_1, k_2 e k_3. Para isso, temos que comparar a Equação (2.8) com a equação $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

  Veja que os coeficientes k_1, k_2 e k_3 são: 2,-16 e 17, respectivamente.

- O segundo passo é obter a equação cúbica auxiliar.

  Confome visto anteriormente, a equação cúbica auxiliar é dada por

$$y^3 + \frac{k_1}{2}y^2 + \frac{k_1^2 - 4k_3}{16}y - \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = 0.$$

  Substituindo os valores de k_1, k_2 e k_3 obtidos acima, temos:

$$y^3 + \frac{2}{2}y^2 + \frac{2^2 - 4.17}{16}y - \left(\frac{(-16)}{8}\right)^2 = 0,$$

  ou seja,

$$y^3 + y^2 - 4y - 4 = 0.$$

- O terceiro passo é resolver a equação obtida no item anterior.

  Para isso, usaremos a técnica utilizada no Exemplo 2.6.

  Note que uma das raízes dessa equação é $y_1 = -1$, pois $(-1)^3 + (-1)^2 - 4.(-1) - 4 = 0$.

  Aplicando o Dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos os coeficientes de um polinômio $h(y)$ tal que $p(y) = h(y)(y + 1)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

  Portanto, $h(y) = y^2 - 4$. Fazendo $h(y) = 0$, temos as outras duas raízes :

$$y_2 = 2 \text{ e } y_3 = -2.$$

  As três raízes da equação auxilar são: $y_1 = -1$, $y_2 = 2$ e $y_3 = -2$.

- O último passo é obter a solução da Equação (2.8) que é dada por $y' = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$.

  Para obtê-las, substituimos os valores encontrados no terceiro item e usamos o fato que $\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} = 2$. Assim, concluímos que as raízes da Equação (2.8), são:

  $y_1' = \sqrt{-1} + \sqrt{2} - \sqrt{-2} = i + \sqrt{2} - \sqrt{2}i;$

  $y_2' = \sqrt{-1} - \sqrt{2} + \sqrt{-2} = i - \sqrt{2} + \sqrt{2}i;$

  $y_3' = -\sqrt{-1} + \sqrt{2} + \sqrt{-2} = -i + \sqrt{2} + \sqrt{2}i;$

$y_4' = \sqrt{-1} - \sqrt{2} - \sqrt{-2} = -i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$

Resolvemos a Equação (2.8), mas a equação inicial $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$, ainda não foi resolvida. Para obter suas raízes, fazemos $x = y' - 1$, obtendo:

$x_1 = i + \sqrt{2} - \sqrt{-2} - 1;$

$x_2 = i - \sqrt{2} + \sqrt{-2} - 1;$

$x_3 = -i + \sqrt{2} + \sqrt{-2} - 1;$

$x_4 = i - \sqrt{2} - \sqrt{-2} - 1.$

3 Propostas de atividades didáticas

Os polinômios e as equações polinomiais possuem muitas aplicações em áreas como Matemática, Economia, Física, Biologia e Administração. Neste capítulo, propomos atividades para serem aplicadas nas aulas de matemática da Educação Básica, a fim de desenvolver conceitos e resultados relacionados ao tema do presente trabalho.

Público Alvo: Alunos dos Ensinos Fundamental e Médio.

Pré-requisitos: Conceitos de Matemática Financeira, Noções de informática.

Materiais e tecnologias: Calculadora, Computador com o recurso multimídia Winplot.

Recomendações Metodológicas: Seguindo a metodologia de Ensino-Aprendizagem -Avaliação através da Resolução de Problemas, seguimos as etapas propostas por Allevato e Onuchic (2009). São elas:

- Preparação do Problema: Selecionar o problema que desenvolve o conteúdo a ser ensinado.
- Leitura individual: Solicitar que o aluno faça uma leitura individual detalhada.
- Leitura Coletiva: Solicitar que os alunos formem grupos, com até quatro alunos, e façam uma leitura coletiva.
- Observar e incentivar: Nesta etapa, o professor é mediador e incentiva os alunos a pensar e trocar ideias entre eles.
- Registro das resoluções na lousa: Os grupos podem apresentar as suas soluções sejam elas certas ou erradas para que todos possam analisar e discutir os caminhos.
- Discussão dos resultados: O professor deve guiar as discussões de forma que os alunos apresentem suas dúvidas.
- Formalização do conteúdo: Neste momento, o professor apresenta um registro "formal" do conteúdo de forma organizada, estruturada e na linguagem matemática, padronizando os conceitos e os procedimentos construídos através da resolução dos problemas, destacando as diferentes técnicas operatórias e demonstrando as propriedades.

Dificuldades previstas: A interpretação dos problemas, operações algébricas.

Tempo previsto: 8 aulas.

Descrição Geral: O plano de trabalho segue uma das abordagens mais indicadas para o ensino de matemática: a **Resolução de Problemas**. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), consta:

"A resolução de problemas é uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas" (p.41).

Nas próximas seções, estão propostas algumas situações-problema, com resoluções, que servem como sugestões para os planos de aula do professor de Matemática do Ensino Básico.

3.1 Financiamentos

Atualmente, os jovens (e também os adultos) têm bastante interesse em financiamentos, pois as lojas usam propagandas que incentivam o consumismo, oferecendo vantagens nas formas de pagamento.

Vejamos alguns exemplos. Mas antes, alertamos aos jovens que, quando a loja anuncia que os produtos podem ser parcelados sem juros, na verdade os juros já estão embutidos no valor da parcela.

Exemplo 3.1. Um iPad, cujo preço a vista é R$ 1299,00, pode ser financiado em 5 prestações mensais e iguais, com a primeira parcela ocorrendo um mês após a compra. Se a taxa de juros for de 8% ao mês, qual será o valor da parcela?

Lembre-se: 8% pode ser representado por $\frac{8}{100} = 0,08$.

No momento 1, a dívida será d_1 e ela é composta pela dívida mais os juros correspondente a 1 mês menos a parcela. Podemos representar d_1 por

$$d_1 = d + j - p,$$

onde d é a dívida, j é o juros e p é a parcela. Então,

$$d_1 = 1299 + 1299.0,08 - p$$

$$\Downarrow$$

$$d_1 = (1 + 0,08)1299 - p.$$

A fim de facilitar a notação da dívida nos outros meses, chamaremos $x = 1,08$. Assim, a igualdade anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$d_1 = 1299x - p.$$

No segundo mês, a dívida será d_2 e podemos obtê-la somando a dívida do mês anterior d_1 com os juros, que agora é $0,08.d_1$, menos a parcela. Assim,

$$d_2 = d_1 + 0,08d_1 - p$$

$$\Downarrow$$

$$d_2 = xd_1 - p,$$

$$\Downarrow$$

$$d_2 = 1299x^2 - px - p.$$

No terceiro mês, a dívida será d_3 e ela é a soma da dívida do mês anterior d_2 com os juros, $0,08d_2$, menos a parcela. Ou seja:

$$d_3 = d_2 + 0,08d_2 - p$$

$$d_3 = xd_2 - p$$

$$\Downarrow$$

$$d_3 = 1299x^3 - px^2 - px - p,$$

Com o mesmo raciocínio dos meses anteriores, obtemos o valor da dívida no 4° mês e no 5° mês, respectivamente d_4 e d_5:

$$d_4 = xd_3 - p$$

$$\Downarrow$$

$$d_4 = 1299x^4 - px^3 - px^2 - px - p,$$

e

$$d_5 = xd_4 - p$$

$$\Downarrow$$

$$d_5 = 1299x^5 - px^4 - px^3 - px^2 - px - p.$$

Note que a 5° parcela é a última, então nesse momento a dívida deve ser zero. Daí,

$$d_5 = 1299x^5 - px^4 - px^3 - px^2 - px - p = 0.$$

Fazendo operações algébricas na igualdade acima, obtemos:

$$1299x^5 = p(x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1).$$

Assim, para obter o valor da parcela, basta avaliarmos o polinômio acima em $x = (1,08)$. Usando uma calculadora, obtemos:

$$1299.1,47 = p(1,36 + 1,26 + 1,17 + 1,08 + 1)$$

$$\Downarrow$$

$$1909,53 = p(5,87)$$

$$\Downarrow$$

$$p = 325,30.$$

Então, cada parcela terá valor de R$ 325,30.

Note que, para obter o valor da prestação, foi necessário avaliar um polinômio de 4° grau.

Em geral, esse polinômio terá grau $n-1$, quando o número de prestações for n. Podemos simplificar os cálculos como mostraremos a seguir:

$$(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1) = x^5 - 1$$

ou

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$1299x^5 = p\frac{x^5 - 1}{x - 1}.$$

Para um polinômio qualquer de grau n , podemos obter a seguinte fórmula para o cálculo da parcela p de um valor D em parcelas fixas e iguais em n períodos com taxa de juros fixa:

$$p = \frac{x^n(x-1)D}{x^n - 1},$$

ou equivalentemente:

$$p = \frac{(1+t)^n tD}{(1+t)^n - 1}.$$

para $x = 1 + t$, onde t é a taxa de juros do período.

Exemplo 3.2. Um iPad, cujo preço a vista é R$ 1299,00 pode ser financiado em 5 prestações mensais e iguais, com a primeira parcela ocorrendo no ato da compra. Se a taxa de juros for de 8% ao mês, qual será o valor da parcela?

Chamamos D a dívida inicial, E o valor da entrada e $x = (1+t)$ com t igual a taxa de juros.

No momento da compra, chamaremos a dívida d_0 e podemos obtê-la através da fórmula:

$$d_0 = D - E.$$

Após 1 mês da compra, a dívida d_1, será a dívida d_0, mais os juros, $0,08.d_0$, menos a parcela, obtendo a expressão:

$$d_1 = d_0 + 0,08d_0 - p$$
$$\Downarrow$$
$$d_1 = xd_0 - p,$$
$$\Downarrow$$
$$d_1 = (D - E)x - p.$$

No segundo mês, a dívida d_2, será a dívida do mês anterior d_1, mais os juros, $0,08.d_1$, menos a parcela. Assim,

$$d_2 = d_1 + 0,08d_1 - p$$
$$\Downarrow$$
$$d_2 = xd_1 - p,$$
$$\Downarrow$$
$$d_2 = (D - E)x^2 - px - p.$$

Com o mesmo raciocínio, obteremos as dívidas nos meses posteriores:

$$d_3 = xd_2 - p$$
$$\Downarrow$$
$$d_3 = (D - E)x^3 - px^2 - px - p$$

e

$$d_4 = xd_3 - p$$
$$\Downarrow$$
$$d_4 = (D - E)x^4 - px^3 - px^2 - px - p.$$

A quarta parcela é a última, então nesse momento a dívida deve ser igual a zero. Portanto,

$$d_4 = (D - E)x^4 - px^3 - px^2 - px - p = 0,$$

resultando que

$$p(x^3 + x^2 + x + 1) = (D - E)x^4$$
$$\Downarrow$$
$$p\frac{(x^4 - 1)}{x - 1} = (D - E)x^4$$
$$\Downarrow$$
$$p = \frac{x^4(x - 1)(D - E)}{x^4 - 1}.$$

Observe que, na nossa situação, o valor da entrada é igual ao valor da parcela. Fazendo $x = 1,08$ e $D = 1299$, temos:

$$p = \frac{(1,08)^4(1,08-1)(1299-p)}{(1,08)^4-1}$$
$$\Downarrow$$
$$p = \frac{(1,36)(0,08)(1299-p)}{0,36}$$
$$\Downarrow$$
$$p = \frac{0,11(1299-p)}{0,36}$$
$$\Downarrow$$
$$0,36p + 0,11p = 142,89$$
$$\Downarrow$$
$$p = 304,02.$$

De uma maneira geral, a expressão para o cálculo das prestações fixas e iguais em n períodos com taxa t nesses períodos de um financiamento de uma dívida D com entrada E no ato da compra é dada por:

$$p = \frac{x^n(x-1)(D-E)}{x^n-1}.$$

Algumas lojas oferecem a compra para começar a pagar após 3 meses ou até um prazo maior. Convidamos o leitor a determinar o valor da parcela nessa situação.

3.2 Problemas de Otimização

Resolver problemas de otimização consiste em determinar pontos de Máximos ou Mínimos de funções. Para o nível de ensino para o qual o trabalho se destina, a proposta de solução é apresentada após a análise do gráfico que pode ser construído usando o software gratuito *Winplot*.[1]

A seguir, apresentamos questões que envolvem problemas de otimização e polinômios de grau 2 nas áreas de Matemática Financeira e Física.

Exemplo 3.3. (FGV) O lucro mensal, em reais, de uma empresa é dado por $L(x) = -x^2 + 30x - 5$, onde x é a quantidade mensal vendida. Qual é o lucro mensal máximo possível?

Solução:

Através do recurso Winplot, obtemos o gráfico dessa função, que segue abaixo.

[1]Disponível no seguinte endereço eletrônico: **www.baixaki.com.br/download/winplot.htm**.

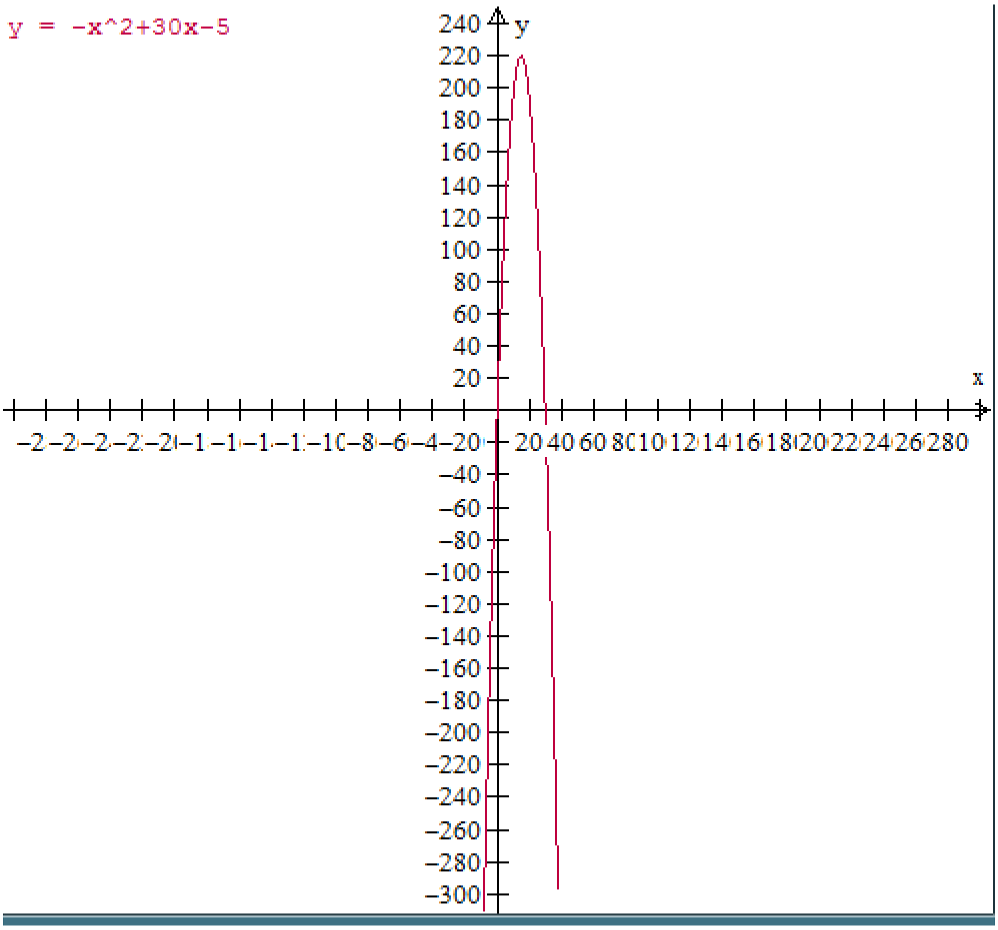

Figura 3.1: Gráfico da função lucro

Observando o gráfico, o aluno identificará que o lucro máximo corresponde ao pico positivo, ou seja, à coordenada y_v do vértice da parábola, e este pertence ao eixo de simetria da parábola. Então, o aluno concluirá que poderá obter a coordenada do vértice da parábola, x_v, procurando um ponto equidistante de pontos x_1 e x_2 tais que $L(x_1) = L(x_2)$. Ora, para que $L(x_1) = L(x_2)$, devemos ter

$$-x_1^2 + 30x_1 - 5 = -x_2^2 + 30x_2 - 5$$

$$\Downarrow$$

$$-x_1^2 + 30x_1 = -x_2^2 + 30x_2$$

$$\Downarrow$$

$$-x_1^2 + x_2^2 = -30x_1 + 30x_2$$

$$\Downarrow$$

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 30(-x_1 + x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$(x_2 + x_1) = 30$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(x_2 + x_1)}{2} = \frac{30}{2}.$$

Portanto, $x_v = 15$. Agora, para determinar o lucro máximo mensal, basta avaliarmos a função lucro em $x = 15$:

$$L(15) = -(15)^2 + 30(15) - 5 \Rightarrow L(15) = 220.$$

Então, o lucro máximo é de 220 reais, confirmando o que o gráfico nos induz a pensar.

Exemplo 3.4. Uma empresa produz um determinado produto com o custo definido pela função $C(x) = x^2 - 100x + 2510$. Considerando o custo C em reais e x a quantidade de unidades produzidas, determine a quantidade de unidades para que o custo seja mínimo e o valor desse custo mínimo.

Solução:

Observando o gráfico, é fácil perceber que o custo mínimo corresponde a coordenada y_v do vértice da parábola.

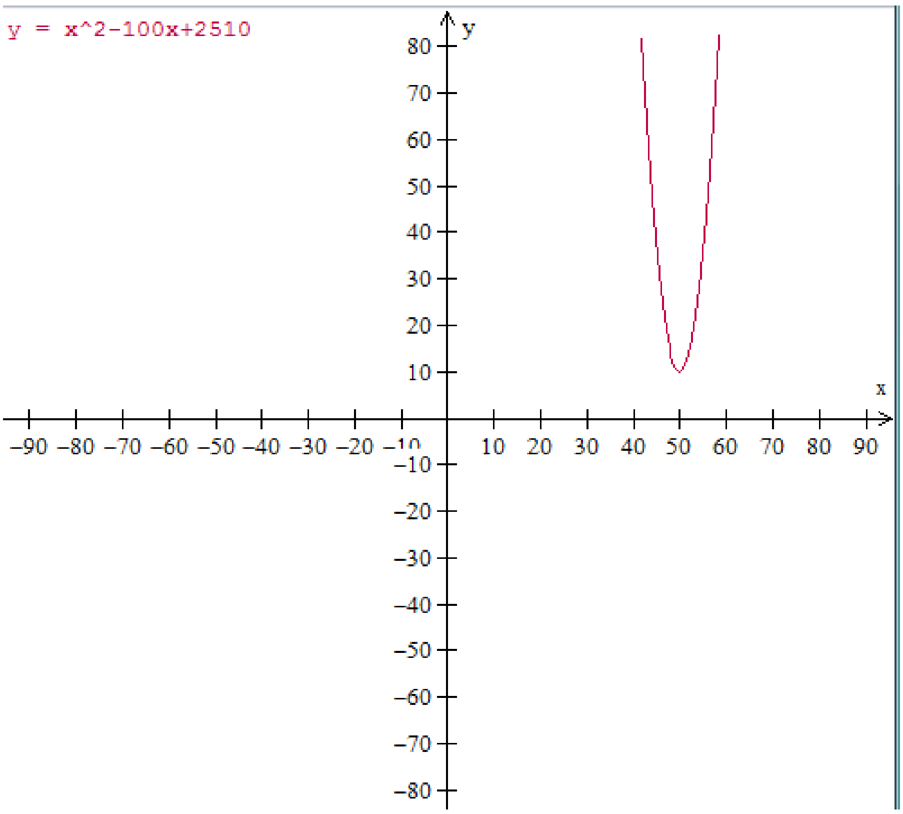

Figura 3.2: Gráfico da função custo

A coordenada desse ponto é obtida algebricamente, da mesma forma que no exemplo anterior, procurando um ponto equidistante de pontos de x_1 e x_2 com $C(x_1) = C(x_2)$. Para que $C(x_1) = C(x_2)$, devemos ter

$$x_1^2 - 100x_1 + 2510 = x_2^2 - 100x_2 + 2510$$

$$\Downarrow$$

$$x_1^2 - 100x_1 = x_2^2 - 100x_2$$

$$\Downarrow$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 100x_1 - 100x_2$$

$$\Downarrow$$

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 100(x_1 - x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$(x_2 + x_1) = 100$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(x_2 + x_1)}{2} = \frac{100}{2}.$$

Portanto, deverão ser produzidas 50 unidades do produto para que o custo seja mínimo.

Agora, para obter o custo mínimo, basta avaliarmos $C(x)$ em $x = 50$:

$$C(50) = 50^2 - 100.50 + 2510$$

$$\Downarrow$$

$$C(50) = 2500 - 5000 + 2510$$

$$\Downarrow$$

$$C(50) = 10.$$

Logo, o custo mínimo é de R$10,00.

Exemplo 3.5. De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L = R - C$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto.

Uma indústria de peças automotivas produziu x unidades e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 + 580x$ e a receita representada por $R(x) = 600x + 300$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

Solução:

A função lucro é dada por

$$L(x) = R(x) - C(x),$$

ou seja,

$$L(x) = 600x + 300 - x^2 - 580x \Rightarrow L(x) = -x^2 + 20x + 300.$$

Sendo assim, o lucro é máximo quando a quantidade de peças produzidas corresponde ao x_v. Para determinar x_v, procuramos um ponto equidistante de pontos x_1 e x_2 com $L(x_1) = L(x_2)$. Para que $L(x_1) = L(x_2)$, devemos ter

$$-x_1^2 + 20x_1 + 300 = -x_2^2 + 20x_2 + 300$$

$$\Downarrow$$

$$-x_1^2 + x_2^2 = -20x_1 + 20x_2$$

$$\Downarrow$$

$$-(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = -20(x_1 - x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$-(x_1 + x_2) = -20$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-(x_1 + x_2)}{2} = \frac{-20}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(x_1 + x_2)}{2} = \frac{-20}{-2}.$$

Então, $x_v = 10$ e, portanto, para se obter o lucro máximo deve-se produzir 10 peças.

Exemplo 3.6. Uma pedra é lançada verticalmente para cima em MUV e suas alturas variam no tempo de acordo com a função horária $S = 6 + 9t - 3t^2$, sendo t em segundos e S em metros. Desprezando-se a resistência do ar, qual é altura máxima atingida pela pedra?

Solução:

Se o aluno esboçar o gráfico no Winplot, perceberá que a altura máxima corresponde ao x_v, o qual poderá ser obtido de forma análoga aos exemplos anteriores; x_v é o ponto equidistante de pontos x_1 e x_2 com $S(x_1) = S(x_2)$. Para que $S(x_1) = S(x_2)$, devemos ter

$$6 + 9x_1 - 3x_1^2 = 6 + 9x_2 - 3x_2^2$$

$$\Downarrow$$

$$-3x_1^2 + 3x_2^2 = -9(x_1 - x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$3(x_1^2 - x_2^2) = 9(x_1 - x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$3(x_1 + x_2) = 9$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(x_1 + x_2)}{2} = \frac{3}{2}.$$

Então, $x_v = 1,5$.

Para obter a altura máxima atingida pela pedra, basta avaliarmos a função horária em $x = 1,5$:

$$S = 6 + 9.(1,5) - 3(1,5)^2$$

$$\Downarrow$$

$$S = 6 + 13,5 - 6,75$$

$$\Downarrow$$

$$S = 12,75.$$

Portanto, a altura máxima é de $12,75$ metros.

Observação 3.1. Consideremos um polinômio de grau 2 da forma $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Para determinar a coordenada do vértice, x_v, usamos o fato de x_v pertencer ao eixo de simetria da parábola e por isso é equidistante dos pontos x_1 e x_2 tais que $p(x_1) = p(x_2)$. Para que $p(x_1) = p(x_2)$, devemos ter:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$\Downarrow$$

$$ax_1^2 - ax_2^2 = -bx_1 + bx_2$$

$$\Downarrow$$

$$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = -b(x_1 - x_2)$$

$$\Downarrow$$

$$a(x_1 + x_2) = -b$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a(x_1 + x_2)}{2} = \frac{-b}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(x_1 + x_2)}{2} = \frac{-b}{2a}.$$

Portanto, $x_v = \dfrac{-b}{2a}$.

Para finalizar, esse ponto corresponde ao ponto de máximo da função quando a parábola tem concavidade para baixo, ou seja, $a < 0$. Caso contrário, o ponto é mínimo.

3.3 Matemágicas.

Exemplo 3.7. Se dois números de dois algarismos tiverem iguais os algarismos das dezenas, e os algarismos das unidades somarem 10, pode-se calcular o seu produto instantaneamente.

Para resolver 17×13, por exemplo, respondo 221. O "truque" é o seguinte, multiplica-se o algarismo das dezenas, 1, pelo sucessor 2, achando 2, esse seria o algarismo da centena. Acrescenta à direita do 2 o produto dos algarismos das unidades 7×3, obtendo-se o 221. Sem fazer a conta, quanto é 45×45? A resposta é 2025. Verifique!

Demonstração:

Represente o algarismo das dezenas dos dois números por a e considere o algarismo da unidade do primeiro número por b. Então o algarismo da unidade do segundo número é igual a $10 - b$.

Logo, $10a + b$ é o primeiro número e $10a + (10 - b)$ e o segundo número. O produto dos dois números é

$$(10a + b) \times (10a + 10 - b) = 100a(a + 1) + b(10 - b).$$

∎

Exemplo 3.8. Se você somar 1 ao produto de quatro números inteiros consecutivos, o resultado será sempre um quadrado perfeito.

Para exemplificar:

$$(3.4.5.6) + 1 = 360 + 1 = (19)^2;$$

$$(10.11.12.13) + 1 = 17161 = (131)^2.$$

Demonstração:

Para justificar este fato, vamos tomar os inteiros consecutivos: n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Então,

$$n.(n + 1).(n + 2).(n + 3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1. \tag{3.1}$$

Queremos mostrar que $n.(n + 1).(n + 2).(n + 3) + 1$ é um quadrado perfeito. Note que

$$(n^2 + an + 1)^2 = n^4 + 2n^2(an + 1) + (an + 1)^2 = n^4 + 2an^3 + (2 + a^2)n^2 + 2an + 1. \tag{3.2}$$

Comparando as Equações (3.1) e (3.2), obtemos:

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = n^4 + 2an^3 + (2 + a^2)n^2 + 2an + 1 \Rightarrow$$

$$2a = 6 \text{ e } 2 + a^2 = 11, \text{ ou seja, } a = 3.$$

Então, $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n + 3n + 1)^2$. ∎

Apêndice: Como surgiram os números complexos?

Raphael Bombelli (1526-1573), nascido em Bolonha, Itália, engenheiro hidráulico por profissão, era um admirador da *Ars Magna* de Cardano, mas achava que seu estilo de exposição do conteúdo não era claro, então ele escreveu um livro com os mesmos assuntos. Publicou *L'Algebra*, em três volumes, no ano de 1572, em Veneza.

No segundo volume dessa obra, ele considera a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ e aplica a Fórmula de Cardano para encontrar uma raiz, obtendo:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Por simples verificação, podemos concluir que $x = 4$ é raiz da equação considerada. Porém, através da Fórmula de Cardano, caímos não apenas na extração de raízes quadradas de números negativos como também na extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecida. Eis, então, uma questão séria que não poderia ser ignorada.

Cabe lembrar que, quando surgiram as primeiras raízes quadradas de números negativos na resolução de equações de 2° grau, os matemáticos da época consideravam a inexistência de solução.

Então, Bombelli supôs a existência de números $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, que deveriam ser iguais a $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, respectivamente.

Sabendo que 4 é raiz da equação considerada, se $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$ então $a = 2$. E, como $(a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$, temos $b = 1$. Daí,

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4.$$

Foi a partir dessa suposição que surgiram os números complexos. Observe que a origem dos números complexos foram as resoluções de equações de 3° grau e não as de 2° grau como, equivocadamente, citam alguns livros-textos.

Bombelli criou as seguintes regras para trabalhar com $\sqrt{-1}$:

$$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1;$$

$$(-\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = 1;$$

$$(-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = -1;$$

$$(\pm 1)(\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1};$$
$$(\pm 1)(-\sqrt{-1}) = \mp\sqrt{-1}.$$

E também a regra para somar dois números do tipo $a + b\sqrt{-1}$:

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}.$$

Assim, estavam lançadas as bases para o desenvolvimento de um gigantesco ramo da Matemática: **A Teoria dos Números Complexos**.

Nessa época, o símbolo i não existia, ele só foi usado pelo primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler em 1777, apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss em 1799.

Referências

[1] N. S. G. Allevato; L.R. Onuchic, Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas, *Boletim de Educação Matemática n°* 41, p.73-98, 2011.

[2] N. C. Bernardes; C. S. Fernandez, *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*, SBM Editora, Rio de Janeiro, 2006.

[3] J.R. Bonjorno; J.R. Giovani, *Matemática Completa*, Vol. 3, FTD , São Paulo, 2005.

[4] C. B. Boyer, *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1994.

[5] P.C.P. Carvalho; E.L. Lima; E. Wagner; A.C. Morgado, *A Matemática do Ensino Médio*, Vol. 1, Rio de Janeiro, 2006.

[6] G.G. Garbi, *O Romance das Equações Algébricas*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2010.

[7] R. B. Guerra; J.D.S.C.D. Silva; M.J.D.F. Mendes, *Fundamentos da Matemática para o Ensino Fundamental*, vol.38, Educimat, Pará, 2008. Disponível em: http://www.ufpa.br/par/files/Modulos/vol38.pdf.

[8] E.L. Lima, *Análise Real - Volume 1*, SBM Editora, Rio de Janeiro, 2001.

[9] C. G. T. A. Moreira, Uma solução das equações do 3° e 4° graus, *Revista Professor de Matemática*, SBM, Rio de Janeiro, 1994.

[10] C. H. Mulligan, Uso de polinômios para surpreender, *Revista do Professor de Matemática n°* 31, p.3 e 4, SBM, 1996.

[11] www.shiraicursos.com/marllon.