UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO DE BRITO COELHO

SOMAS DE NEWTON: UMA ANÁLISE PARA APLICAÇÃO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

FORTALEZA – CEARÁ

2021

FRANCISCO DE BRITO COELHO

SOMAS DE NEWTON: UMA ANÁLISE PARA APLICAÇÃO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

FORTALEZA – CEARÁ

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Estadual do Ceará
Sistema de Bibliotecas

Coelho, Francisco de Brito.
Somas de newton: uma análise para aplicação em resolução de problemas [recurso eletrônico] / Francisco de Brito Coelho. - 2021.
66 f. : il.

Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional Em Matemática Rede Nacional - Profissional, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro.
1. Somas de Newton. Polinômios. Resolução de Problemas.. I. Título.

FRANCISCO DE BRITO COELHO

SOMAS DE NEWTON: UMA ANÁLISE PARA APLICAÇÃO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de Concentração: Matemática

Aprovada em: 18 de Junho de 2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Valberto Rômulo Feitosa Pereira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

À minha esposa Jeane Coelho e aos meus filhos, Geovane Coelho e Mariana Coelho. Aos meus pais: Francisco Coelho, Francisca Rodrigues e Maria Iva.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse na minha vida.

A minha esposa e filhos, que compreenderam que passaria um tempo longe deles me dedicando ao Mestrado.

Às minhas Mães (Maria Iva e Francisca Rodrigues), que sempre estiveram ao meu lado me orientando e não deixando eu desistir.

Ao meu Pai (Francisco Coelho), que sempre acreditou em mim e na minha capacidade e investiu financeiramente no meu estudo.

Aos meus avós paternos (Antônio e Maria) In-Memoria e avós Maternos (Júlio e Mamede) In-Memória. Sempre estarão na minha memória.

Ao meu tio Luis Damião Coelho que patrocinou meus estudos por dois anos quando meus pais estavam em outro estado da federação e eu estava sozinho aqui em Fortaleza. Inspirei-me nele para ser professor de Matemática e foi ele quem me deu o meu primeiro emprego na profissão.

A Mauro Petri Feitosa que me disse que o meu futuro estava nos estudos.

A todo corpo docente de Doutores e mestres do Profmat - UECE por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e no processo de aperfeiçoamento profissional.

Ao meu orientador Professor Doutor Claudemir Silvino Leandro pela oportunidade de realizar este trabalho, pela confiança e por me atender com paciência todas as vezes que o procurei.

Ao coordenador do curso professor João Montenegro, que sempre estava solícito a resolver algum problema técnico ou matemático.

Aos colegas de curso que hoje posso chamar de amigos.

Todos os envolvidos nesse processo terão os meus eternos agradecimentos.

”A vida é como a matemática, criamos raízes que a vida tenta subtrair de nós, porém o que é somado de bom nos ajudará a ter a solução exata do que precisamos.”

(Ester Menezes)

RESUMO

O presente projeto tem como principal finalidade a apresentação das ditas Somas de Newton, cujo intuito fundamental é para a resolução de problemas de Olimpíadas Matemáticas mundo afora, os quais abordam soma de potências de números complexos. Para tal, apresentaremos conceitos iniciais abordando polinômios e alguns de seus teoremas básicos, de modo a apresentarmos, logo após, os casos de Somas de Newton com 2 e 3 parcelas, cujas ideias dependem inteiramente na análise feita sobre polinômios. Por fim, apresentaremos e demonstraremos o caso geral das Somas de Newton com n parcelas, a partir de onde faremos problemas retirados de diversas Olimpíadas de Matemática para mostrar a robustez da teoria abordada. Concluímos, assim, o raciocínio sobre as Somas de Newton e o uso de ideias de sua teoria do caso geral para situações onde não se tem necessariamente a soma de potências de números complexos, como será feito em alguns dos exercícios. O valor disso está em como esta abordagem pode servir de introdução para a análise dos chamados Polinômios Simétricos, assunto o qual é ainda mais profundo no estudo dos polinômios.

Palavras-chave: Somas de Newton. Polinômios. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

The present project has as its main goal the presentation of the said Newton's Sums, whose fundamental purpose is for worldwide Mathematical Olympiads problem solving, which tackles the sum of powers of complex numbers. For such, we'll show initial concepts about polynomials and some of its basic theorems, so as to present, right after, the cases of Newton's Sums with 2 and 3 summands, whose ideas depends entirely in the analysis made over polynomials. Finally, we present and demonstrate the general case of Newton's Sums with n summands, from where we'll solve problems taken from miscellaneous Mathematical Olympiads to show the strength of the theory addressed. We conclude, that way, the reasoning about Newton's Sums and the use of ideas from the theory of its general case for situations where we don't necessarily have the sum of powers of complex numbers, as will be done in some exercises. The value of this resides on how this approach might serve as an introduction to the analysis of the called Symmetric Polynomials, subject which is deeper in the study of polynomials.

Keywords: Newton's Sums. Polynomials. Problem Solving.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O problema do qual estamos abordando pode-se ser retirado a partir da pergunta "Como podemos resolver problemas que envolvem soma de potências de números complexos?". A partir disto, tem-se a problemática que se apresenta em como deduzirmos uma teoria com a qual utilizar para a resolução de questões que abordam soma de potências de números complexos.

A justificativa pela qual se dá este projeto é exatamente a ausência em grande parte da apresentação das chamadas Somas de Newton para a resolução de tais problemas matemático, pois encontra-se poucas referências brasileiras sobre elas. Além disso, pelas interações com as quais tive com meu filho, ex-aluno de turma ITA/IME e olimpíadas matemáticas, este era um assunto do qual ele me falava com entusiasmo e com o qual me interessei, de modo que tentei ir atrás sobre o assunto e encontrei escassas referências brasileiras sobre tal. Dessa maneira, pensei em como poderia contribuir para acrescentar mais conteúdo para o público brasileiro sobre o assunto, abordando a teoria necessária para deduzir o caso geral das Somas de Newton e como utilizar partes de tal prova para resolver problemas mais gerais os quais não envolvem necessariamente soma de potências de números complexos.

Tem-se como objetivo geral do projeto a apresentação, dedução e aplicação das Somas de Newton e algumas de suas generalizações mais simples. Como objetivos específicos, tem-se em primeiro lugar apresentar definições relativas a polinômios e provar teoremas clássicos acerca deles. Em segundo lugar, a análise de casos mais simples de Soma de Newton, as quais envolvem apenas somas de potências com duas e três parcelas para, logo após, provar o caso geral. Por fim, a aplicação dos conhecimentos adquiridos das Somas de Newton para a resolução de problemas que advém de Olimpíadas Matemáticas mundo afora.

A metodologia deste projeto é focada na pesquisa bibliográfica em suas referências, cuja abordagem é em sua maior parte quantitativa na análise e deduções de teoremas e resultados de polinômios para se chegar à prova do caso geral das Somas de Newton. Isto fora feito com o estudo em diversas fontes para o embasamento nos vários conceitos necessários para compreender profunda e intuitivamente as ideias das somas de Newton.

O percurso metodológico faz-se por meio da análise dedutiva sobre polinômios, suas definições e consequências, para ser adquirido o alicerce necessário para se provar as Somas de Newton, ao particularizar o estudo para polinômios com coeficientes no corpo dos números complexos. Para tal, são vistas definições e provas de teoremas clássicos relativos à polinômios no segundo capítulo. Logo após, no terceiro capítulo, analisamos os casos mais simples das

Somas de Newton, os quais são os mais importantes, para depois provarmos o caso geral delas. Por fim, no quarto capítulo, há a aplicação dessa teoria para a resolução de problemas, tanto relativos às Somas de Newton de verdade como para situações que não necessariamente são Somas de Newton, mas se pode aplicar o mesmo processo da prova do caso geral delas para a resolução desses problemas. No quinto capítulo, há a conclusão do texto, onde falamos como toda esta análise pode ser considerada como uma introdução ao estudo dos polinômios simétricos, dado que as Somas de Newton usam, implicitamente, um de seus principais resultados, como exposto em (BRILLIANT, [201-]). Dessa maneira, incita-se leitores a se motivarem e irem atrás de tal conteúdo por conta própria pela profundidade de resultados interessantes relativos aos polinômios simétricos, finalizando assim a dissertação.

2 POLINÔMIOS

Nos próximos subtópicos faremos uma breve abordagem sobre anéis, corpos e domínios de integridade, de modo a, logo após, falarmos de polinômios com coeficientes em um anel ou em um corpo, para, por fim, particularizarmos a análise aos números complexos, com o intuito de mostrarmos as relações de Girard.

Toda a análise aqui feita em cada subtópico está produzida de maneira mais aprofundada e exemplificada em (HEFEZ; VILLELA, 2018).

2.1 Anel, Corpo e Domínio de Integridade

Primeiramente, para estudarmos a ideia do que seria a definição de um anel, devemos definir o que é uma **operação**, partindo de algumas definições preliminares:

Sejam os conjuntos A e B, definimos o produto cartesiano de A e B pelo conjunto $A \times B$ dos pares ordenados (a,b) com $a \in A$ e $b \in B$.

Dessa maneira, sendo K um conjunto, temos que $K \times K$ representa o produto cartesiano de K com ele mesmo e, desse modo, definimos uma *operação* $(*)$ em K como uma função:

$$\begin{aligned} * : K \times K &\to K \\ (a,b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

Dito isso, seja tal conjunto K possuidor de duas operações $(+)$ e $(\cdot)$ chamadas adição e multiplicação, respectivamente. Chamamos K de **anel** se tais operações obedecerem às subsequentes propriedades:

a) As operações de adição e multiplicação são comutativas, ou seja, para quaisquer $x, y \in K$, temos que:

$$x + y = y + x \text{ e } x \cdot y = y \cdot x$$

b) As operações de adição e multiplicação são ambas associativas, ou seja, para quaisquer $x, y, z \in K$, temos que:

$$x + (y + z) = (x + y) + z \text{ e } x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

c) As operações de adição e multiplicação possuem elementos neutros, ou seja, existem elementos 0 e 1, respectivamente, em K tais que para qualquer x em K, temos:

$$x+0 = x \text{ e } x\cdot 1 = x$$

d) A multiplicação é distributiva com relação à adição, ou seja, para quaisquer $x,y,z \in K$, temos que:

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

e) Todo elemento $x \in K$ possui um inverso aditivo, isto é, existe $-x \in K$ tal que $x+(-x) = 0$ [1]

Por essa definição, vemos que conjuntos como os dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$), reais ($\mathbb{R}$) e complexos ($\mathbb{C}$) se enquadram como anéis dadas suas operações usuais de adição e multiplicação.

Além dessas propriedades, se o conjunto K for tal que suas operações também obedecem a:

- Todo elemento $x \in K - \{0\}$ possui um inverso multiplicativo, isto é, existe x^{-1} tal que $x\cdot x^{-1} = 1$ [2]

dizemos que K é um **corpo**. Por essa definição, vê-se como todos os exemplos de conjuntos numéricos anteriores seguem essa propriedade, exceto $\mathbb{Z}$ [3].

Vamos agora mostrar um lema que nos será útil:

Lema: Seja $a \in K$, onde K é um anel, tem-se portanto $0\cdot a = a\cdot 0 = 0$.

Prova:

Veja inicialmente que $0\cdot a = a\cdot 0$ pela propriedade comutativa do anel A. Logo, basta mostrarmos que $a\cdot 0 = 0$.

Note que, pelas propriedades de elemento neutro da adição em A, temos $0 = 0+0$ e, daí, $a\cdot 0 = a\cdot(0+0)$.

Pela propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição em A, temos portanto $a\cdot 0 = a\cdot 0 + a\cdot 0$.

Por fim, pela propriedade do inverso aditivo em A e pela propriedade associativa em A, $a\cdot 0$ possui inverso aditivo $-a\cdot 0$ tal que $a\cdot 0+(-a\cdot 0) = 0$ e somando-se pela direita dos dois lados da igualdade $-a\cdot 0$, temos $a\cdot 0+(-a\cdot 0) = (a\cdot 0+a\cdot 0)+(-a\cdot 0) = a\cdot 0+(a\cdot 0+(-a\cdot 0)) \iff 0 = a\cdot 0+0 \iff a\cdot 0 = 0$, pela propriedade do elemento neutro em A, demonstrando-se assim o lema.

[1] Este inverso aditivo é único.

[2] Este inverso multiplicativo é único.

[3] Os únicos elementos que possuem inverso multiplicativo em $\mathbb{Z}$ são os números 1 e -1

Além disso, vamos definir o que é um domínio de integridade:

Um anel A é dito **domínio de integridade** quando:

$$\forall\, a,b \in A, a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Ou, equivalentemente,

$$\text{Se } a,b \in A - \{0\}, \text{ então } a \cdot b \neq 0$$

Note que todo corpo K é um domínio de integridade, pois, como todo elemento diferente de $0 \in K$ possui inverso multiplicativo, necessariamente se $a,b \in K$ e $ab = 0$, devemos ter $a = 0$ ou $b = 0$, dado que, por exemplo, se $a \in K - \{0\}$, existe a^{-1} de forma que $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 \Rightarrow (a^{-1}a)b = 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$ (pelas propriedades associativa, inverso multiplicativo, elemento neutro da multiplicação em K e pelo Lema).

Se $a = 0$, temos $ab = 0 \cdot b = 0$, pelo Lema.

Dessa maneira, vemos como todo conjunto que é um corpo é também um domínio de integridade.

Mas a recíproca não é verdadeira, isto é, nem todo domínio de integridade é corpo. De fato, o conjunto $\mathbb{Z}$ é um domínio de integridade, pois a única maneira com a qual $ab = 0$ para $a,b \in \mathbb{Z}$ é se $a = 0$ ou $b = 0$. De fato, como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, temos então que $a,b \in \mathbb{Q}$ com $ab = 0$, desse modo, devemos ter $a = 0$ ou $b = 0$ dado que $\mathbb{Q}$ é domínio de integridade (por ser um corpo). No entanto, $\mathbb{Z}$ não é um corpo.

2.2 Definições iniciais

Seja A um anel e $a : \mathbb{N} \to A$ uma função de números naturais $\mathbb{N} = \{0,1,2,...,n,...\}$ para o conjunto A. Chamamos uma tal função "a"de sequência de termos (ou coeficientes) em A e a representamos por $(a(0),a(1),a(2),...,a(n),...) = (a_0,a_1,a_2,...,a_n,...) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a(j) = a_j \in A, \forall j \in \mathbb{N}$. Denotaremos, por simplicidade, essa sequência como (a_n) e outras de modo análogo. Consideraremos doravante que as sequências terão domínio igual a $\mathbb{N}$ e contradomínio igual ao anel A para nossa análise.

Vamos definir um polinômio como uma sequência (a_n) com uma quantidade finita de elementos não nulos em sua representação. Isto é, após certo $q \in \mathbb{N}$, temos $a_j = 0 \in A$ para todo $j > q$.

A partir dessa definição de polinômio, podemos definir a adição e multiplicação de dois polinômios:

Sejam (a_n) e (b_n) dois polinômios, definimos $(a_n)+(b_n)$ como a sequência (a_n+b_n), isto é, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos que o j-ésimo elemento de $(a_n)+(b_n)$ é igual a a_j+b_j, onde usamos adição no anel A.

Note que $(a_n)+(b_n)$ também será um polinômio, dado que, como (a_n) e (b_n) são polinômios, existem $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ tais que $a_j = 0, \forall j > q_1$ e $b_j = 0, \forall j > q_2$, logo, tomando $q = max\{q_1, q_2\}$, onde $max\{x,y\}$ representa o maior valor dentre x e y, teremos $a_j + b_j = 0, \forall j > q$, já que $j > q$ implica $j > q_1$ e $j > q_2$ por q o máximo dentre os dois valores.

A partir disso, iremos mostrar a seguinte propriedade:

Propriedade P1 (Comutatividade da adição): Sejam (a_n) e (b_n) dois polinômios. Temos portanto $(a_n)+(b_n) = (b_n)+(a_n)$.

Prova:

Pela definição da soma de dois polinômios, temos $(c_n) = (a_n)+(b_n)$ com $c_j = a_j + b_j, \forall j \in \mathbb{N}$, no entanto, pela comutatividade da adição no anel A, temos $c_j = a_j + b_j = b_j + a_j, \forall j \in \mathbb{N} \iff (c_n) = (b_n)+(a_n) \iff (a_n)+(b_n) = (b_n)+(a_n)$, como queríamos.

Definiremos também a multiplicação (ou produto) entre os dois polinômios $(a_n)\cdot(b_n)$ como a sequência (c_n) definida por:

$$(c_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

Essa definição faz uso, portanto, da soma e multiplicação do anel A, de modo que os termos do produto $(a_n)\cdot(b_n)$ fiquem da seguinte forma:

$$\begin{gathered} c_0 = a_0 b_0 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ \dots \\ c_j = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + a_2 b_{j-2} + \dots + a_{j-1} b_1 + a_j b_0 \\ \dots \end{gathered}$$

Nota-se, como anteriormente, que $(a_n)\cdot(b_n)$ é também um polinômio. De fato, como (a_n) e (b_n) são polinômios, existem $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ tais que $a_j = 0, \forall j > q_1(*)$ e $b_j = 0, \forall j > q_2(**)$. Tomando $q = q_1 + q_2$ e analisando os termos c_j com $j > q$, temos:

$$c_j = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} = \sum_{\alpha+\beta=j} a_\alpha b_\beta$$

Onde fizemos a troca na variável de somatório para ter duas variáveis no lugar de k, em que as duas estão correlacionadas entre si e a j.

O motivo dessa mudança é que, como $j > q = q_1 + q_2$, não podemos ter $\alpha \leq q_1$ e $\beta \leq q_2$, pois, caso o fosse, teríamos $\alpha + \beta = j \leq q_1 + q_2 = q$, que não é o caso. Logo devemos ter $\alpha > q_1$ ou $\beta > q_2$.

Desse modo, caso $\alpha > q_1$, temos necessariamente $a_\alpha = 0$ por $(*)$ e caso $\beta > q_2$, temos necessariamente $b_\beta = 0$ por $(**)$.

Dessa maneira, como em ambos os casos iremos ter que $a_\alpha b_\beta = 0$ para $\alpha + \beta = j$, necessariamente teremos $\sum_{\alpha+\beta=j} a_\alpha b_\beta = 0$, ou seja, $c_j = 0, \forall j > q$.

Após ambas as definições de operações entre 2 polinômios, vamos agora provar uma propriedade das duas em conjunto:

Propriedade P2 (Distributiva): Dados 3 polinômios $(a_n), (b_n)$ e (c_n), temos que $(a_n) \cdot ((b_n) + (c_n)) = (a_n) \cdot (b_n) + (a_n) \cdot (c_n)$.

Prova:

Pelas definições, temos que $((b_n) + (c_n))$ será o polinômio (d_n) tal que $d_j = b_j + c_j, \forall j \in \mathbb{N}$. Logo, $(a_n) \cdot ((b_n) + (c_n)) = (a_n) \cdot (d_n)$ será o polinômio (e_n) tal que $e_j = \sum_{k=0}^{j} a_k \cdot d_{j-k} = \sum_{k=0}^{j} a_k \cdot (b_{j-k} + c_{j-k}) = \sum_{k=0}^{j} (a_k \cdot b_{j-k} + a_k \cdot c_{j-k}) = \sum_{k=0}^{j} a_k \cdot b_{j-k} + \sum_{k=0}^{j} a_k \cdot c_{j-k}, \forall j \in \mathbb{N}$ pela propriedade distributiva e associativa no anel A.

Vejamos os polinômios $(a_n) \cdot (b_n)$ e $(a_n) \cdot (c_n)$:

$(a_n) \cdot (b_n)$ será o polinômio $(l(n))$ tal que $l_j = \sum_{k=0}^{j} a_k \cdot b_{j-k}, \forall j \in \mathbb{N}$ e $(a_n) \cdot (c_n)$ será o polinômio (p_n) tal que $p_j = \sum_{k=0}^{j} a_k \cdot c_{j-k}, \forall j \in \mathbb{N}$. Assim temos portanto que $e_j = l_j + p_j, \forall j \in \mathbb{N} \iff (e_n) = (l_n) + (p_n) \iff (a_n) \cdot ((b_n) + (c_n)) = (a_n) \cdot (b_n) + (a_n) \cdot (c_n)$, o que conclui a prova.

Vamos agora definir o polinômio $x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (0, 1, 0, 0, ..., 0, ..)$, onde apenas o segundo termo, x_1, é o elemento neutro da multiplicação em A e os restantes são o elemento neutro da adição em A. Vamos analisar o que ocorre ao multiplicarmos o polinômio x por ele mesmo:

$x \cdot x = (c_n)$ em que $c_j = \sum_{k=0}^{j} x_k x_{n-k}, \forall j \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, como apenas $x_1 = 1$ e $x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N} - \{1\}$, apenas o termo c_2 possui parcela $x_1 x_1 = 1$, enquanto todos os outros vão ter suas parcelas de soma zeradas. Logo, $c_2 = 1$ enquanto $c_j = 0, \forall j \in \mathbb{N} - \{2\}$. Ou seja:

$$x \cdot x = (0, 0, 1, 0, 0, ..., 0, ...)$$

Com isso, podemos definir recursivamente $x^j = x^{j-1} \cdot x$, onde convencionamos $x^1 = x$. Desse modo, temos:

$$x^2 = x^1 \cdot x = x \cdot x$$
$$x^3 = x^2 \cdot x$$
$$x^4 = x^3 \cdot x$$
$$\ldots$$

Como $x^2 = x \cdot x$, temos então $x^2 = (0,0,1,0,...,0,...)$.

Fazendo-se o cálculo de x^3 pela definição dada e pelo produto de polinômios encontraremos $x^3 = (0,0,0,1,0,...,0,...)$ onde apenas o quarto termo é igual a 1 e todo o restante é nulo. Dessa maneira, procedendo analogamente para cada $x^j, j \geq 2$, encontraremos $x^j = (0,0,...,0,1,0,...)$, onde apenas o $(j+1)$-ésimo termo é igual a 1 e todo o restante é nulo. Cada j será chamado potência de x.

Além disso, pode-se verificar pela definição da multiplicação de polinômios que ao fazermos o produto $x^a \cdot x^b$, onde $a, b \in \mathbb{N} - \{0\}$ obteremos exatamente x^{a+b}, cuja consequência será vista mais adiante.[4].

Vamos nesse momento definir o que significa multiplicarmos uma sequência de termos em a por uma constante k no anel A, ou seja, $k \in A$:

A multiplicação da constante k por (a_n), isto é, $k \cdot (a_n) = k(a_n)$, pode ser definida como a sequência $(c_n) = (ka_n)$, isto é $c_j = k \cdot a_j, \forall j \in \mathbb{N}$. Veja que, se (a_n) é um polinômio, então $k(a_n)$ também será, dado que se $a_j = 0, \forall j > q$ para algum $q \in \mathbb{N}$, então $k \cdot a_j = 0, \forall j > q$ pelo lema da seção 2.1.

Com isso, vamos provar a próxima propriedade:

Propriedade P3: Sejam $k_1(a_n)$ e $k_2(b_n)$ dois polinômios, com $k_1, k_2 \in A$ constantes, temos então que $k_1(a_n) \cdot k_2(b_n) = k_1k_2((a_n) \cdot (b_n))$

Prova:

Seja $(c_n) = k_1(a_n)$ e $(d_n) = k_2(b_n)$, isto é, $c_j = k_1a_j, \forall j \in \mathbb{N}$ e $d_j = k_2b_j, \forall j \in \mathbb{N}$, daí temos:

$k_1(a_n) \cdot k_2(b_n) = (c_n) \cdot (d_n)$, o qual será o polinômio (e_n) tal que $e_j = \sum_{k=0}^{j} c_k d_{j-k} = \sum_{k=0}^{j} (k_1a_k)(k_2b_{j-k}) = \sum_{k=0}^{j} k_1k_2a_kb_{j-k} = k_1k_2 \sum_{k=0}^{j} a_kb_{j-k}, \forall j \in \mathbb{N}$, pelas propriedades associativa e comutativa do anel A.

[4] Aqui excluímos o 0 pois x^0 ainda não foi definido, no entanto, após sua definição, tal expressão continua valendo mesmo se $a = 0$ ou $b = 0$

Dessa maneira, temos então $e_j = k_1k_2\sum_{k=0}^{j} a_kb_{j-k}, \forall j \in \mathbb{N} \iff (e_n) = k_1k_2((a_n) \cdot (b_n))$, ou seja, $k_1(a_n) \cdot k_2(b_n) = k_1k_2((a_n) \cdot (b_n))$, como queríamos.

Como últimas definições, vamos definir $x^0 = 1 = (1,0,0,...,0,...)$, $0 = (0,0,...,0,...)$ e $a = a(1,0,0,...,0,...) = (a,0,0,...,0,...), a \in A$, de modo que nos será útil para o seguinte teorema:

Teorema: Todo polinômio $(a_n) = (a_0,a_1,a_2,...,a_n,...)$ pode ser escrito na forma $(a_n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n_0}x^{n_0}$, onde n_0 representa o **grau do polinômio** e é o menor natural com a propriedade que $a_j = 0, \forall j > n_0$.

Prova:

Por (a_n) ser um polinômio, temos que existe algum $q \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0, \forall n > q$. Como o conjunto dos naturais com essa propriedade é limitado inferiormente, ele vai possuir um natural mínimo com tal propriedade. Chame-o de n_0, ou seja, temos $a_n = 0, \forall n > n_0$ e n_0 é o menor natural com tal propriedade.

Assim, o polinômio (a_n) na realidade pode simplesmente ser representado por $(a_0,a_1,a_2,...,a_{n_0},0,0,...)$, onde após a (n_0+1)-ésima posição teremos apenas 0. Dessa maneira, pela definição de soma de polinômios, vamos escrever o polinômio (a_n) como uma soma de outros polinômios do seguinte modo:

$$(a_0,a_1,a_2,...,a_{n_0},0,0,...) = (a_0,0,0,...,0,...) + (0,a_1,0,...,0,...) + (0,0,a_2,...,0,...) + ... + \\ + (0,0,0,...,0,a_{n_0},0,0,...)$$

Pela definição de multiplicação de uma sequência por uma constante em A, podemos reescrever a expressão acima:

$$(a_n) = a_0(1,0,0,...,0,...) + a_1(0,1,0,...,0,...) + a_2(0,0,1,...,0,...) + ... + a_{n_0}(0,0,...,0,1,0,...),$$

onde 1 está na (n_0+1)-ésima posição para a última parcela.

Pelas definições e resultados de $a = (a,0,0,...,0,...) = a(1,0,0,...,0,...)$, $x = (0,1,0,,0,...,0,...)$ e x^j para $j \geq 2$, teremos portanto:

$$(a_n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n_0}x^{n_0}, \text{ como queríamos.}$$

Dessa maneira, x não pertencente ao anel A será chamado de uma *indeterminada* sobre A. [5]

Dessa maneira, pelo teorema, podemos chamar um *polinômio* de $f(x)$ em vez de (a_k) (trocamos n por k para não causar confusão, mas (a_k) não deixa de ser o polinômio definido pelo seus respectivos termos) para simplificar a escrita e temos:

[5] Em próximos tópicos abordaremos a ideia da função polinomial, em que x, o qual pelas definições anteriores era uma sequência, irá ser trocado por valores de algum anel, como dos conjuntos numéricos, em lugar da sua ideia de sequência.

$$(a_k) = f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$$

Onde, por simplicidade, em vez de usarmos n_0 usamos n no lugar e utilizamos as convenções explicitadas mais acima para x^0 e x^1.

Cada $a_j \in A$ com $j \in \{0,1,2,...,n\}$ é chamado *coeficiente* do polinômio $f(x)$, as parcelas a_jx^j são ditas *termos* e os termos a_jx^j tais que $a_j \neq 0$ são *monômios de grau j* do polinômio $f(x)$. O coeficiente a_0 é chamado de *termo independente*. [6]

Chamamos $A[x]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes no anel A, ou seja:

$$A[x] = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n; a_j \in A, 0 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

Dizemos que $f(x) = a_0$ é um *polinômio constante* e quando $f(x) = 0 = (0,0,...,0,...)$ chamamos $f(x)$ de *polinômio nulo*. Note que o polinômio nulo é tal que $a_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Quando $a_j = 0$ costuma-se não se escrever o termo a_jx^j quando houver termo não nulo no polinômio, já que $a_jx^j = (0,0,...,0,...) = 0$ e quando fazemos $(a_k) + 0$, obtemos (a_k).

Além disso, podemos dizer que que o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in A[x]$ pode ser escrito como $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + ... + 0x^m$ para qualquer natural $m > n$, dado que, pela simplificação que tomamos que de n representa n_0 e como $a_j = 0, \forall j > n_0$. Assim, ao comparar dois polinômios $f(x), g(x) \in A[x]$ podemos supor que ambos têm a mesma quantidade de termos (embora o coeficiente de determinados termos possa ser nulo para algum dos polinômios).

Dois polinômios $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$, ambos em $A[x]$, são ditos *polinômios iguais* se, e somente se, $a_j = b_j$ para $0 \leq j \leq n$, de modo que escrevemos $f(x) = g(x)$.

Com a notação de $f(x)$, chamamos o grau de $f(x)$ de $gr(f(x))$, isto é, $gr(f(x)) = n$, e dizemos que a_n é o *coeficiente líder* de $f(x)$. Se o coeficiente líder do polinômio for igual a 1, ele é dito *polinômio mônico*. Observe que, pelo que fora dito, o grau do polinômio nulo não estaria definido, no entanto, doravante tomaremos $gr(0) = -\infty$ como convenção, pois isso nos será útil para uma propriedade na próxima seção. Além disso, temos que se $gr(f(x)) = 0$, então $f(x) = a = (a,0,0,...,0,...)$ já que a maior potência de x de termo não nulo de $f(x)$ é 0.

Exemplos: $f(x) = \pi + ex + 5x^2 + \sqrt{3}x^3$, $g(x) = 1 + 2x^{10} + \sqrt{5}x^3 + log_2(3)x^7$, $h(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $s(x) = 25x^{10} - 15x^5 + 20$, $l(x) = 20 - 15x^5 + 25x^{10}$, $p(x) = 9$

[6] Pois ele está junto a potência nula de x, isto é, $x^0 = 1 = (1,0,0,...,0,...)$.

Vê-se que $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $h(x), s(x), l(x), p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Note que podemos dizer que cada polinômio pertence a $\mathbb{C}[x]$ se quisermos, no entanto, dependendo do contexto, pode ser que seja melhor considerar um anel menos abrangente para análise ou considerar, de fato, o contexto geral.

Podemos escrever os monômios do polinômio em qualquer ordem com a qual desejarmos, mas considerando-se as potências de x, pelo que definimos, temos, por exemplo, que $s(x) = l(x)$, pois seus coeficientes nos respectivos termos são iguais, temos que os termos independentes de $f(x), g(x), h(x), s(x), l(x)$ e $p(x)$ são, respectivamente, $\pi, 1, 1, 20, 20$ e 9 e seus coeficientes líderes são $\sqrt{3}, 2, 1, 25, 25$ e 9, respectivamente, o que caracteriza apenas $h(x)$ como polinômio mônico.

Nota-se que, do exposto anteriormente, podemos dizer que $gr(f(x)) = 3$, $gr(g(x)) = 10$, $gr(h(x)) = 4$, $gr(s(x)) = gr(l(x)) = 10$ e $gr(p(x)) = 0$ já que observamos o coeficiente líder de cada polinômio no seu respectivo termo.

2.3 Outra perspectiva sobre soma e multiplicação de polinômios

As operações de adição e multiplicação de polinômios já foram definidas anteriormente na seção anterior, no entanto, vamos olhá-las pela perspectiva de $f(x)$ e $g(x)$ em vez da perspectiva de sequência propriamente dita:

Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, ambos em $A[x]$, pela definição da soma de polinômios, temos naturalmente:

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j, \text{ em que } c_j = a_j + b_j, \text{ para } 0 \leq j \leq n$$

Ou seja, para somar dois polinômios, basta somar seus respectivos coeficientes para cada monômio de grau j.

Pela definição que demos, é válida a propriedade $gr(f(x)+g(x)) \leq max\{gr(f(x)), gr(g(x))\}$. A igualdade é válida sempre que os graus de $f(x)$ e de $g(x)$ forem distintos, pois, dessa maneira, não é possível anular o coeficiente do monômio de maior grau dentre $f(x)$ e $g(x)$ ao se realizar a soma. Caso $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$, já que o grau do respectivo polinômio nulo será $-\infty$, sempre teremos que o grau do outro polinômio será maior ou igual que isso e logo teremos a igualdade novamente. Se os graus dos polinômios forem iguais a n, a igualdade ainda pode ocorrer, mas apenas se os coeficientes dos monômios de grau n de $f(x)$ e de $g(x)$ não são inversos aditivos em A.

Pela definição que fora dada para o produto de dois polinômios e pela propriedade de potências $x^a x^b = x^{a+b}, \forall a, b \in \mathbb{N}$ citada anteriormente, pode-se ver que pela perspectiva de $f(x)$ e $g(x)$ como será o produto de um pelo outro pelas operações de soma e multiplicação do anel A:

Dados os polinômios $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, ambos em $A[x]$, sua multiplicação será:

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j, \text{ em que:}$$
$$c_0 = a_0 b_0$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$\ldots$$
$$c_j = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + \ldots + a_{j-1} b_1 + a_j b_0 = \sum_{\alpha+\beta=j} a_\alpha b_\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$$
$$\ldots$$
$$c_{n+m} = a_n b_m$$

De fato, essa perspectiva faz sentido, podendo-se mostrar com um exemplo a partir das propriedades P1, P2 e P3 da seção passada e da propriedade de potências:

Exemplo: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ e $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$, temos:

$$f(x) \cdot g(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$$

Pela propriedade P2 e P3:

$$f(x) \cdot g(x) =$$
$$a_0(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) + a_1 x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) + a_2 x^2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) + a_3 x^3(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)$$
$$f(x) \cdot g(x) = a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + a_1 b_0 x + a_1 b_1 x \cdot x + a_1 b_2 x \cdot x^2 + a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^2 \cdot x +$$
$$a_2 b_2 x^2 \cdot x^2 + a_3 b_0 x^3 + a_3 b_1 x^3 \cdot x + a_3 b_2 x^3 \cdot x^2$$

Utilizando $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$:

$$f(x) \cdot g(x) = a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 +$$
$$a_3 b_0 x^3 + a_3 b_1 x^4 + a_3 b_2 x^5$$

Por fim, reagrupando por potências de x pela propriedade P1 e P2, temos:

$$f(x) \cdot g(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 +$$
$$(a_2 b_2 + a_3 b_1) x^4 + a_3 b_2 x^5$$

Note que $a_4 = a_5 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$ pelas nossas convenções, de modo que podemos reescrever:

$$f(x) \cdot g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + (a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0)x^4 + (a_0b_5 + a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b_0)x^5$$

Desse modo, vemos como faz sentido a perspectiva de somatório para o termo geral c_j pela definição dada na seção anterior e a atual, mesmo para valores de α e β maiores que o grau de $f(x)$ ou de $g(x)$, pois temos daí que $a_\alpha = 0$ ou $b_\beta = 0$, não influenciando em nada no coeficiente c_j. Assim, na prática, podemos ter momentos em que nem α nem β zeram em alguma parcela da soma ao aplicarmos o somatório com coeficientes não nulos.

Vamos agora enunciar uma importante propriedade relativa ao grau do polinômio que representa o produto de dois polinômios com coeficientes num domínio de integridade:

Propriedade P4: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios em $A[x] - \{0\}$, em que A é um domínio de integridade. Se os coeficientes líderes de $f(x)$ e de $g(x)$ são a_n e b_m (ou seja, $gr(f(x)) = n$ e $gr(g(x)) = m$), respectivamente, pela definição de produto, temos que o coeficiente líder do polinômio $f(x) \cdot g(x)$ é a_nb_m.

Prova:

Como a_n e b_m são os coeficientes líderes, eles são não nulos, logo, $a_n, b_m \in A - \{0\}$, o que significa, pela definição de domínio de integridade, que $a_nb_m \neq 0$. Pela definição da multiplicação de dois polinômios, temos:

$c_{n+m} = \sum_{\alpha+\beta=m+n} a_\alpha b_\beta$

Note que não podemos ter $\alpha < n$ e $\beta < m$, pois, caso o fosse, $\alpha + \beta < m + n$, o que não convém. Logo $\alpha \geq n$ ou $\beta \geq m$. Temos $\alpha = n \iff \beta = m$ por $\alpha + \beta = n + m$. Além disso, temos também $\alpha > n \iff \beta < m$ para termos $\alpha + \beta = m + n$. Analogamente, $\beta > m \iff \alpha < n$. Logo, podemos separar o somatório acima em 3 somatórios menores:

$$c_{n+m} = \sum_{\alpha>n} a_\alpha b_\beta + \sum_{\alpha=n} a_\alpha b_\beta + \sum_{\alpha<n} a_\alpha b_\beta, \alpha + \beta = n + m$$

Mas pelas equivalências acima, temos $\sum_{\alpha<n} a_\alpha b_\beta = \sum_{\beta>m} a_\alpha b_\beta$ e $\sum_{\alpha=n} a_\alpha b_\beta = a_nb_m$, o que nos gera:

$$c_{n+m} = \sum_{\alpha>n} a_\alpha b_\beta + a_nb_m + \sum_{\beta>m} a_\alpha b_\beta, \alpha + \beta = n + m$$

No entanto, como para $\alpha > n$ temos $a_\alpha = 0$ por n ser o grau de $f(x)$ e como para $\beta > m$ temos $b_\beta = 0$ por m ser o grau de $g(x)$, teremos portanto que a soma acima simplesmente se torna:

$$c_{n+m} = a_n b_m$$

Temos assim, pelo que fora mencionado no início, que $c_{n+m} \neq 0$.

Vamos analisar c_j para $j > n+m$:

$$c_j = \sum_{\alpha+\beta=j} a_\alpha b_\beta$$

Note que se $\alpha \leq n$ e $\beta \leq m$, teremos $\alpha + \beta = j \leq n+m$, que não é o caso. Logo devemos ter $\alpha > n$ ou $\beta > m$ para termos $j > n+m$. Note que se $\alpha \leq n \iff \beta > m$ já que uma das duas afirmações anteriores devem ser verdadeiras, logo se a primeira é falsa, a segunda tem de ser verdadeira, assim, podemos separar o somatório em 2 somatórios:

$$c_j = \sum_{\alpha>n} a_\alpha b_\beta + \sum_{\alpha \leq n} a_\alpha b_\beta, \alpha + \beta = j$$

No entanto, pelo que fora explicado anteriormente, temos que $\sum_{\alpha \leq n} a_\alpha b_\beta = \sum_{\beta > m} a_\alpha b_\beta$. Assim, c_j se torna:

$$c_j = \sum_{\alpha>n} a_\alpha b_\beta + \sum_{\beta > m} a_\alpha b_\beta, \alpha + \beta = j$$

Mas, como exposto anteriormente, temos $a_\alpha = 0, \forall \alpha > n$ e $b_\beta = 0, \forall \beta > m$, logo, em ambos os casos temos $a_\alpha b_\beta = 0$, assim os somatórios irão se anular e teremos $c_j = 0, \forall j > n+m$. Como $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$, temos portanto que $n+m$ é o grau de $f(x) \cdot g(x)$ e seu coeficiente líder é $a_n b_m$.

Dessa maneira, retiramos o importante resultado:

$$gr(f(x) \cdot g(x)) = gr(f(x)) + gr(g(x))$$

Essa propriedade é chamada de *propriedade multiplicativa do grau*. Uma observação importante a ser feita é que a condição de que A seja domínio de integridade não é a única condição que causa a propriedade multiplicativa do grau:

Proposição: Se A é um anel que não é domínio de integridade, mas algum dos dois polinômios $f(x)$ ou $g(x)$ possui coeficiente líder com inverso multiplicativo em A, então a propriedade multiplicativa do grau continua a ser válida.

Prova:

Sem perda de generalidade, podemos supor que a_n possui inverso multiplicativo em A e $b_m \in A - \{0\}$, então $a_n b_m \neq 0$, pois, se $a_n b_m = 0$, como a_n possui inverso multiplicativo, então existe $a \in A$ tal que $a \cdot a_n = 1$, dessa maneira, multiplicando pelos dois lados por a na equação, ficamos com $a \cdot (a_n b_m) = (aa_n) \cdot b_m = 1 \cdot b_m = b_m = a \cdot 0 = 0$, pelo Lema da seção 2.1 e propriedades de anéis, o que não pode ocorrer pois $b_m \in A - \{0\}$. Isto prova a proposição.

Pelas definições dadas de soma e multiplicação de polinômios, podemos mostrar que $A[x]$ possui as propriedades que o tornam um anel, isto é:

Para quaisquer $f(x), g(x)$ e $h(x)$ em $A[x]$, temos que as seguintes propriedades são válidas:

a) Associatividade: $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$ e $(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x))$

b) Comutatividade: $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ e $f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x)$

c) Distributividade: $f(x) \cdot (g(x) + h(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x)$

d) Existência do elemento neutro (adição): O polinômio nulo é tal que $f(x) + 0 = f(x), \forall\, f(x) \in A[x]$

e) Existência do inverso aditivo: Dado $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, seu inverso aditivo é $-f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-a_j) x^j$

f) Existência do elemento neutro (multiplicação): O polinômio constante 1 é tal que $1 \cdot f(x) = f(x), \forall\, f(x) \in A[x]$

As Demonstrações para algumas dessas propriedades podem ser encontradas em (HEFEZ; VILLELA, 2018), assim como as propriedades $P1$ e $P2$ da seção anterior representam provas de parte de algumas das propriedades mencionadas acima.

2.4 Divisão Euclidiana de polinômios

Neste tópico iremos mostrar que polinômios possuem divisão euclidiana de maneira extremamente similar ao conjunto dos inteiros, em que podemos fazer a divisão de modo único com resto controlado em $A[x]$, sempre que o coeficiente líder do divisor possuir inverso multiplicativo em A.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ em $A[x]$. Se existir um polinômio $h(x) \in A[x]$ tal que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, dizemos que $f(x)$ é múltiplo de $g(x)$. Nessa situação, se $g(x)$ não for o polinômio nulo, dizemos que $g(x)$ divide $f(x)$.

Assim, podemos enunciar um lema para demonstrar a divisão euclidiana, fazendo-se uso da propriedade multiplicativa do grau em $A[x]$:

Lema: Sejam A um anel e $f(x), g(x) \in A[x] - \{0\}$, temos que se $g(x)$ possuir coeficiente líder com inverso multiplicativo em A e $g(x)$ for divisor de $f(x)$, temos que $gr(g(x)) \leq gr(f(x))$.

Prova:

Como $g(x) \neq 0$ divide $f(x) \neq 0$, então existe $h(x) \in A[x]$ tal que $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, note que $h(x) \neq 0$ pois, caso o fosse, pelo Lema da seção 2.2 aplicado ao anel $A[x]$, teríamos $f(x) = 0$, que não é o caso. Pela propriedade multiplicativa do grau e pela Proposição da seção anterior, dado que o coeficiente líder de $g(x)$ possui inverso multiplicativo, nos implica:

$$gr(f(x)) = gr(g(x)h(x)) = gr(g(x)) + gr(h(x)) \geq gr(g(x))$$

Pois como $f(x) \neq 0$ e $h(x) \neq 0$, temos $gr(f(x)) \neq -\infty$ e $gr(h(x)) \neq -\infty$, logo $gr(f(x)), gr(h(x)) \in \mathbb{N}$ e assim podemos ter a desigualdade acima.

Com tal lema, agora somos capazes de provar a existência e unicidade da *Divisão Euclidiana*:

Teorema:(Divisão Euclidiana)

Seja A um anel e sejam $f(x), g(x) \in A[x]$ com $g(x) \neq 0$ e coeficiente líder com inverso multiplicativo em A. Então existem $q(x)$ e $r(x)$ em $A[x]$, ambos únicos, tais que $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ e $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(g(x))$.

Prova:

Seja $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$, em que b_m possui inverso multiplicativo $b_m^{-1} \in A$.

Primeiro, provaremos a **existência**:

Se $f(x) = 0$, basta tomarmos $q(x) = r(x) = 0$.

Suponhamos agora que $f(x) \neq 0$. Daí, seja $n = gr(f(x))$, logo temos $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$.

Se $n < m$, basta tomarmos $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$.

Se $n \geq m$, devemos fazer indução sobre n (ou seja, sobre o grau de $f(x)$):

Se $n = 0$, então $0 = n \geq m = gr(g(x))$, então temos $m = 0$, pois $m \in \mathbb{N}$, com $f(x) = a_0 \neq 0$ e $g(x) = b_0$ com $b_0^{-1} \in A$. Daí, temos então que $f(x) = a_0 = a_0(b_0^{-1}b_0) = a_0b_0^{-1}g(x)$, dessa maneira temos $q(x) = a_0b_0^{-1}$ e $r(x) = 0$

Logo, o resultado é válido para o caso inicial. Suponhamos válido agora o resultado para polinômios de grau menor do que $n = gr(f(x))$, de forma a mostrarmos que o resultado é válido para o polinômio $f(x)$.

Nesse momento, nossa ideia principal é de forçar cair o grau do polinômio $f(x)$ utilizando algum polinômio formado a partir de $g(x)$ para utilizar a hipótese de indução no novo polinômio de grau menor.

Desse modo, defina $h(x) \in A[x]$ por $h(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$. Note que isso é um polinômio válido em $A[x]$, pois, $n - m \geq 0$ e os coeficientes de $f(x)$ e $g(x)$ estão em A e $a_n, b_m^{-1} \in A$. Dessa maneira, vê-se que o polinômio $a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$ tem grau n (pois $x^{n-m} \cdot x^m = x^n$) e coeficiente líder $a_n b_m^{-1} b_m = a_n$, logo, ao subtrair tal polinômio de $f(x)$, temos que $h(x)$ possuirá grau menor que n, pois os termos $a_n x^n$ cancelam, podemos então aplicar a hipótese sobre ele:

$h(x) = q_0(x)g(x) + r_0(x)$, em que $r_0(x) = 0$ ou $gr(r_0(x)) < gr(g(x))$, dessa maneira:

$f(x) = h(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) = (q_0(x)g(x) + r_0(x)) + a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) \Rightarrow$

$f(x) = (q_0(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m}) g(x) + r_0(x)$

Onde foram utilizadas a igualdade para $h(x)$ e as propriedades comutativa, associativa e distributiva do anel $A[x]$. Daí, tomando $q(x) = q_0(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m}$ e $r(x) = r_0(x)$ e terminamos a prova da existência.

Agora, provando a **unicidade**:

Suponhamos agora que $f(x)$ possa ser escrito de duas formas distintas pela divisão euclidiana, isto é, exista $q_1(x), r_1(x), q_2(x), r_2(x)$, com $(r_1(x) = 0$ ou $gr(r_1(x)) \leq gr(g(x)))(*)$ e $(r_2(x) = 0$ ou $gr(r_2(x)) < gr(g(x)))(**)$ tais que:

$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x) \Rightarrow (q_1(x) - q_2(x))g(x) = r_2(x) - r_1(x)$

Se $q_1(x) \neq q_2(x)$, então $q_1(x) - q_2(x) \neq 0$, e como $g(x)$ possui coeficiente líder com inverso multiplicativo em A, então $(q_1(x) - q_2(x))g(x) \neq 0$ (pois possui coeficiente líder não nulo), logo $r_2(x) - r_1(x) \neq 0$

Dessa maneira, pelo lema que provamos, temos:

$gr(g(x)) \leq gr(r_2(x) - r_1(x))(***)$

Mas, se $r_1(x) \neq 0$ (que significa que $-r_1(x) \neq 0$) e $r_2(x) \neq 0$, por $(*)$, $(**)$ e pela propriedade da soma de polinômios, temos que $gr(r_2(x) - r_1(x)) = gr(r_2(x) + (-r_1(x))) \leq max\{gr(r_2(x)), gr(-r_1(x))\}$

Como o grau de um polinômio é igual ao grau do seu inverso aditivo em $A[x]$, temos $gr(-r_1(x)) = gr(r_1(x))$ e como $max\{gr(r_2(x)), gr(-r_1(x))\}$ é $gr(r_2(x))$ ou $gr(r_1(x))$ e ambos são menores que $gr(g(x))$, de $(***)$, tiramos:

$gr(g(x)) < gr(g(x))$, um absurdo! Logo, como supor que $q_1(x) \neq q_2(x)$ nos levou a um absurdo, devemos portanto ter $q_1(x) = q_2(x)$, daí, $q_1(x) - q_2(x) = 0$ e temos $(q_1(x) - q_2(x))g(x) = 0$, pelo Lema da seção 2.1 aplicado ao anel $A[x]$.

Logo, como $(q_1(x) - q_2(x))g(x) = 0$, temos então $r_2(x) - r_1(x) = 0 \Rightarrow r_2(x) = r_1(x)$ neste caso.

Se $r_1(x) = 0$ ou $r_2(x) = 0$, temos $gr(r_2(x) - r_1(x)) = gr(r_2(x))$ no primeiro caso e $gr(r_2(x) - r_1(x)) = gr(-r_1(x)) = gr(r_1(x))$ no segundo caso (dado que não podemos ter ao mesmo tempo $r_1(x) = r_2(x) = 0$ já que $r_2(x) - r_1(x) \neq 0$). No entanto, em ambos, temos que $gr(r_2(x) - r_1(x)) < gr(g(x))$ por $(*)$ e $(**)$, de modo que, novamente, teremos $gr(g(x)) < gr(g(x))$ e logo um absurdo. Dessa maneira como anteriormente, teremos $q_1(x) = q_2(x)$ e $r_1(x) = r_2(x)$, o que termina a prova da unicidade.

Dessa maneira, sendo $f(x), g(x), q(x)$ e $r(x)$ definidos da maneira como está no Teorema da Divisão Euclidiana, chamamos $f(x)$ de *dividendo*, $g(x)$ de *divisor*, $q(x)$ de quociente e $r(x)$ de resto.

2.5 Algoritmo de Briot-Ruffini

Neste subtópico iremos apresentar o algoritmo de Briot-Ruffini, o qual nos permite encontrar o quociente e o resto de uma divisão polinomial cujo divisor é da forma $x - \alpha$, em que $\alpha = (\alpha, 0, 0, ..., 0, ...) \in A[x]$ e $\alpha \in A$ nesta última sequência. Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in A[x]$, com $a_n \neq 0$. Logo, pela Divisão Euclidiana, temos que existe $q(x) \in A[x]$ e r, respectivamente, o quociente e resto da divisão de $f(x)$ por $x - \alpha$ (note que o resto só pode ser $r = 0$ ou, como $gr(x - \alpha) = 1$, devemos ter grau 0 para ele, ou seja, é um polinômio constante), daí:

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + r, \text{ com } gr(q(x)) = n - 1 \text{ (propriedade multiplicativa do grau)}$$

Dessa maneira, escrevendo $q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + ... + q_1 x + q_0$ e realizando a multiplicação termo a termo:

$$f(x) = (q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + ... + q_1 x + q_0)(x - \alpha) + r \Rightarrow$$
$$f(x) = q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - \alpha q_{n-1})x^{n-1} + ... + (q_0 - \alpha q_1)x + (r - \alpha q_0)$$

Como $f(x)$ e o polinômio à direita são iguais, isso significa que os respectivos coeficientes de cada termo são iguais, logo:

$$\begin{cases} a_n = q_{n-1} \\ a_{n-1} = q_{n-2} - \alpha q_{n-1} \\ a_{n-2} = q_{n-3} - \alpha q_{n-2} \\ \ldots = \ldots \\ a_2 = q_1 - \alpha q_2 \\ a_1 = q_0 - \alpha q_1 \\ a_0 = r - \alpha q_0 \end{cases}$$

O que nos implica:

$$\begin{cases} q_{n-1} = a_n \\ q_{n-2} = a_{n-1} + \alpha q_{n-1} \\ q_{n-3} = a_{n-2} + \alpha q_{n-2} \\ \ldots = \ldots \\ q_1 = a_2 + \alpha q_2 \\ q_0 = a_1 + \alpha q_1 \\ r = a_0 + \alpha q_0 \end{cases}$$

Dessa forma, com tal algoritmo conseguimos encontrar o quociente e o resto de $f(x)$ pela divisão por $x - \alpha$. O utilizaremos na dedução das somas de Newton para o caso geral em que o índice da soma de Newton é menor que o grau do polinômios cujas raízes estamos analisando.

2.6 Polinômios vistos como funções

A partir de agora, iniciaremos o tratamento de polinômios da perspectiva de funções num corpo K para ele mesmo, isto é, em vez de olhar $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \in K[x]$ como dependente de sequências x,x^2,x^3, etc, vamos trocar a respectiva sequência x^j por uma potência $x^j \in K$ de um valor $x \in K$ por meio da seguinte função:[7]

$$\begin{aligned} f : K &\to K \\ x &\mapsto \textstyle\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \end{aligned}$$

[7] No caso que $x = 0 \in K$, consideremos, apenas por convenção, que $0^0 = 1$, pelo simples motivo de continuarmos a usar a notação de somatório, embora não seja necessária esta consideração caso não escrevamos em tal notação.

Note que essa perspectiva é válida, pois, como $f(x) \in K[x]$, todos seus coeficientes estão em K e, utilizando $x \in K$ em vez da ideia de sequência, usamos as operações de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$ em K, levando portanto elementos de $K \times K$ para K. De fato, temos a aplicação de múltiplas adições e multiplicações em K, em quantidade finita, irão levar $x \in K$ um valor em K bem definido.

Por simplicidade, iremos utilizar a mesma notação $f(x)$ para representar tanto a função definida acima como o polinômio propriamente dito.

Uma importante observação a ser feita é que todos os resultados que nós provamos ou definimos anteriormente como a propriedade multiplicativa do grau, a divisão euclidiana, algoritmo de Briot-Ruffini, etc, continuam válidos com a perspectiva do polinômio como função. Isso se dá pois tais consequências advém principalmente da análise de um polinômio na sua forma $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ junto a propriedades de anel (tanto de A como $A[x]$ das seções anteriores). Assim, ao considerarmos K um corpo, podemos fazer uso de tais resultados naturalmente com a visão do polinômio como função, em que ele vale para qualquer $x \in K$ sem outras restrições.

Com essas considerações, dizemos que $x_0 \in K$ é raiz de $f(x)$ se, e somente se, $f(x_0) = 0$.

2.7 Quantidade de raízes de um polinômio

Agora, neste tópico, consideraremos que os coeficientes de um polinômio pertencem a um corpo K e, dessa maneira, provaremos o seguinte Teorema e um lema:

Teorema de D'Alembert: α é raiz de $f(x)$ se, e somente se, $x - \alpha$ divide $f(x)$. Ou seja, existe um polinômio $q(x)$ tal que $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.

Prova:

Ao utilizar a Divisão Euclidiana de $f(x)$ por $x - \alpha$, temos que existe $q(x)$ e r tais que $f(x) = (x - \alpha)q(x) + r$. Como $f(\alpha) = 0$ por α ser raiz, temos então $0 = f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + r = 0 \cdot q(x) + r \Rightarrow r = 0$ pelo lema da seção 2.1 aplicado a K. Portanto $f(x) = (x - \alpha)q(x)$, isto é, $x - \alpha$ divide $f(x)$.

Lema: Seja $f(x) \in K[x]$ e suponha que $gr(f(x)) = n$. Então a função $f(x)$ terá no máximo n raízes distintas em K.

Prova:

A prova se faz por indução em n. Para $n = 1$, temos que $f(x) = a_0 + a_1x$, com $a_1 \in K - \{0\}$, o qual sempre terá raiz, dado que $f(x) = 0 \iff x = -a_0a_1^{-1}$, pois a_1 possui inverso multiplicativo por K ser um corpo e esse elemento não ser nulo.

Suponha agora que o lema seja válido para polinômios de grau $n-1$. Se $f(x)$ não possuir raízes em K, está terminado. Do contrário, se $f(x)$ possuir uma raiz α em K, pela Teorema de D'Alembert provado acima, temos que $f(x) = (x-\alpha)q(x)$.

Logo, $gr(q(x)) = n-1$ pela propriedade multiplicativa do grau (pois 1 possui inverso multiplicativo em K). Além disso, se $\beta \neq \alpha$ é outra raiz de $f(x)$, então $0 = f(\beta) = (\beta-\alpha)q(\beta)$, o que implica que $q(\beta) = 0$ por $\beta-\alpha \neq 0$ e $\beta-\alpha \in K$. Ou seja, raízes de $f(x)$ distintas de α devem ser raízes de $g(x)$.

Como pela indução $q(x)$ tem no máximo $n-1$ raízes distintas, então $f(x)$ tem no máximo n raízes distintas, como queríamos.

Corolário: Seja $f(x), g(x) \in K[x]$ e $gr(f(x)) = gr(g(x)) = n$. Se $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$ para $n+1$ elementos distintos α_i com $i \in \{1,2,3,...,n,n+1\}$, então $f(x) = g(x)$.

Prova: De fato, ao aplicarmos o lema acima para o polinômio $f(x)-g(x)$, como $gr(f(x)-g(x)) \leq max\{f(x), g(x)\}$ pela propriedade de adição de polinômios já discutida, como $gr(f(x)) = gr(g(x)) = n$, necessariamente $gr(f(x)-g(x)) \leq n$, o que significa que, ao ter $n+1$ raízes distintas, deverá portanto ser o polinômio nulo para não ir de encontro ao lema (dado que grau não está definido para o polinômio nulo), logo $f(x)-g(x) = 0 \iff f(x) = g(x)$.

2.8 Particularizando para os complexos

Nesse momento, consideraremos que o conjunto K será o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, pois este conjunto em específico será o foco da nossa análise para a dedução das fórmulas das somas de Newton, devido ao *Teorema Fundamental da Álgebra*, o qual se pode encontrar a prova em (HEFEZ; VILLELA, 2018) e possui o seguinte enunciado:

Teorema Fundamental da Álgebra:

Todo polinômio não constante com coeficientes complexos possui uma raiz complexa.

A partir de tal Teorema, podemos provar o seguinte:

Teorema da fatoração polinomial: Seja $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, com $gr(f(x)) = n \geq 1$. Então existem $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{C}$, não necessariamente distintos, e $a \in \mathbb{C} - \{0\}$, tais que

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n), \forall x \in \mathbb{C}$$

Prova:

A demonstração se dá por indução sobre o grau n de $f(x)$. Se $gr(f(x)) = 1$, então $f(x) = ax+b$, com $a \in \mathbb{C}-\{0\}$ e $b \in \mathbb{C}$, logo, $f(x) = a(x+a^{-1}b)$ (pois $\mathbb{C}$ é corpo) e $x_1 = -a^{-1}b$.

Seja $n \geq 1$ e suponhamos que a propriedade seja válida para polinômios de grau n. Dessa maneira, seja $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ com $gr(f(x)) = n+1$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $f(x)$ tem uma raiz $\alpha \in \mathbb{C}$. Logo, pelo Teorema de D'Alembert, temos $f(x) = g(x)(x-\alpha), \forall x \in \mathbb{C}$.

Pela propriedade multiplicativa do grau (dado que $\mathbb{C}$ é um corpo e, portanto, domínio de integridade), temos $gr(g(x)) = n$ e, dessa maneira, aplicando a hipótese de indução, podemos fatorar $g(x)$ como $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, o que, substituindo na identidade para $f(x)$ nos confere $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)(x-\alpha)$

Basta então tomarmos $x_{n+1} = \alpha$ e a prova segue por indução.

2.9 Relações de Girard

Agora temos o conteúdo suficiente para provar as relações de Girard, isto é:

Relações de Girard:

Dado $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ com $a_n \in \mathbb{C}-\{0\}$ e sendo $x_1, x_2, ..., x_n$ suas raízes, temos:

$$e_1 = \sum x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$e_2 = \sum x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$e_3 = \sum x_i x_j x_t = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$
$$...$$
$$e_k = \sum \prod_{k-raizes} x_l = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$
$$...$$
$$e_n = x_1x_2...x_n = (-1)^{-n}\frac{a_0}{a_n}$$

Onde cada somatório é feito sobre as variáveis de somatório em ordem crescente, isto é, por exemplo, no segundo somatório temos $1 \leq i < j \leq n$ e no terceiro temos $1 \leq i < j < t \leq n$. O produtório no interior do somatório é feito tal que fazemos multiplicações de k raízes e somamos sobre cada multiplicação utilizando o que fora explicado acima.

Prova:

Pelo Teorema da fatoração polinomial e pela definição de polinômio, sabemos que:

$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n), \forall x \in \mathbb{C}$

Dessa maneira, podemos dar um argumento combinatório para encontrar o polinômio do lado direito ao multiplicar todos os termos nos parêntesis do seguinte modo:

Note que temos n parêntesis e, necessariamente, um termo após todas as multiplicações terem sido feitas terá um fator de cada parêntesis, o que significa que, por exemplo, se quisermos o termo independente do polinômio, basta escolhermos de cada parêntesis os termos sem x, o que nos daria $(-x_1)(-x_2)...(-x_n) = (-1)^n x_1 x_2 ... x_n$.

Se quisermos um termo que tem apenas um fator x, podemos escolher o parêntese que possui x e todos os outros parêntesis escolhemos os outros termos para a multiplicação, por exemplo, se escolhermos x do primeiro parêntesis, adquirimos o termo $x(-x_2)(-x_3)...(-x_n) = (-1)^{n-1} x_2 x_3 ... x_n x$, enquanto se escolhermos o x do último parêntesis, ficamos com $(-x_1)(-x_2)(-x_3)...(-x_{n-1})x = (-1)^{n-1} x_1 x_2 x_3 ... x_{n-1} x$

Dessa maneira, ao percorrermos todos os parêntesis escolhendo x de apenas um para gerar um termo, geraremos n termos que, ao somarmos, nos dão $((-1)^{n-1} \sum \prod_{(n-1)-raizes} x_l)x$

Da mesma forma, se quisermos os termos com x^2, devemos escolher 2 dos n parêntesis para usarmos o fator x e o restante dos parêntesis usamos os outros fatores, por exemplo, se escolhermos x no primeiro e segundo parêntesis, teremos o termo $x \cdot x(-x_3)(-x_4)...(-x_{n-1})(-x_n) = (-1)^{n-2} x_3 x_4 ... x_n x^2$, de tal modo que, ao percorrermos as $\binom{n}{2}$ possíveis escolhas de parêntesis, geramos a mesma quantidade de termos que, ao somarmos, nos dão $((-1)^{n-2} \sum \prod_{(n-2)-raizes} x_l)x^2$

Prosseguindo de maneira análoga, encontramos portanto que:

$$a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) =$$
$$a(x^n - (\sum x_i)x^{n-1} + (\sum x_i x_j)x^{n-2} + ... + ((-1)^{n-1} \sum \prod_{(n-1)-raizes} x_l)x + (-1)^n x_0 x_1 ... x_n)$$

Logo,

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n), \forall x \in \mathbb{C} \Rightarrow$
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a(x^n - (\sum x_i)x^{n-1} + (\sum x_i x_j)x^{n-2} + ... +$
$+ ((-1)^{n-1} \sum \prod_{(n-1)-raizes} x_l)x + (-1)^n x_0 x_1 ... x_n), \forall x \in \mathbb{C}$

Como tal equação é válida para qualquer $x \in \mathbb{C}$, devido ao Teorema da fatoração polinomial, ao se perceber que apenas desenvolvemos as multiplicações do lado direito, temos, em particular, que essa equação tem $n+1$ soluções complexas distintas para x (como, por exemplo, $x = 0, x = 1, x = 2, ..., x = n-1$ e $x = n$ são soluções). Disso e pelo corolário provado na seção 2.7, implica-se que os polinômios à esquerda e à direita da igualdade são iguais, ou seja, cada um de seus respectivos coeficientes são iguais, isto é:

$$a_n = a$$
$$a_{n-1} = -a(\sum x_i)$$

$$a_{n-2} = a(\sum x_i x_j)$$
$$...$$
$$a_{n-k} = (-1)^k a(\sum \prod_{k-raizes} x_l)$$
$$...$$
$$a_1 = (-1)^{n-1} a(\sum \prod_{(n-1)-raizes} x_l)$$
$$a_0 = (-1)^n a x_0 x_1 ... x_n$$

Trocando a primeira linha nas outras, sabendo que a_n possui inverso multiplicativo $a_n^{-1} = \frac{1}{a_n}$ e percebendo que $((-1)^k)^{-1} = (-1)^k$, pois $(-1)^k(-1)^k = (-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$, segue as relações de Girard.

Precisaremos dessas relações para simplificar nossa análise do polinômio para encontrar as somas de Newton, pois a usaremos para fazer com que ele se torne um polinômio mônico. De fato, definiremos um novo polinômio tal que ele é $\frac{f(x)}{a_n}$ para trocarmos cada coeficiente desse novo polinômio por cada e_k, para $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Desse modo, fazemos aparecer a fórmula de recorrência que representa tais somas, para o caso em que o índice da soma de Newton é menor que o grau do polinômio. Caso o índice dela seja maior ou igual, a prova só precisará dividir o valor do polinômio calculado em uma de suas raízes (dita x_i) por a_n, sem precisar definir um novo polinômio a ser tratado em seu lugar, pois o polinômio, ao trocarmos x pela raiz, é igual a 0. Por fim, para terminar, aplicamos somatório sobre as raízes.

3 SOMAS DE NEWTON

3.1 Somas de Newton para polinômios de grau 2

Aqui consideraremos polinômios da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \in \mathbb{C} - \{0\}, b, c \in \mathbb{C}$. Dessa maneira, pelas relações de Girard, sendo x_1 e x_2 raízes, temos:

$e_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $e_2 = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Vamos supor também que $c \neq 0$, de modo a evitar que alguma das raízes seja nula (pois, caso uma delas fosse nula, poderíamos reduzir o grau do polinômio e fazer a mesma análise para apenas a raiz não nula).

Defina $S_k = x_1^k + x_2^k$ (k-ésima Soma de Newton). Dessa maneira, vemos que $S_0 = 2$ (pois ambas as raízes são não nulas e temos $x^0 = 1$ para x não nulo) e $S_1 = e_1$ e vejamos o que acharemos a partir de S_2:

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_2) - 2x_1x_2$

Logo, temos que $S_2 = e_1 S_1 - e_2 S_0$.

E se quisermos S_3? Podemos seguir um raciocínio parecido, em que usamos uma incógnita y para encontrarmos o termo que devemos subtrair da multiplicação de e_1 pela Soma de Newton anterior (pois queremos gerar uma equação recorrente):

Logo,

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = e_1 S_2 - y = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - y \Rightarrow$$
$$y = (x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) - (x_1^3 + x_2^3) = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = e_2 S_1$$

Logo, trocando na equação inicial, encontramos $S_3 = e_1 S_2 - e_2 S_1$.

Assim, vemos que um padrão está ocorrendo para as fórmulas dos S_k para $k = 2$ e $k = 3$, será que tal padrão continuará o ocorrer para qualquer $k \geq 2$? A resposta é sim, pois, de fato:

$$S_k = x_1^k + x_2^k = e_1 S_{k-1} - y = (x_1 + x_2)(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - y \Rightarrow$$
$$y = (x_1^k + x_2^k + x_1^{k-1} x_2 + x_1 x_2^{k-1}) - (x_1^k + x_2^k) = x_1 x_2 (x_1^{k-2} + x_2^{k-2}) = e_2 S_{k-2}$$

Portanto, temos de fato que $S_k = e_1 S_{k-1} - e_2 S_{k-2}$ ao trocar y na equação inicial, o que nos mostra que a recorrência continua a ocorrer para qualquer S_k com $k \geq 2$.

Dessa maneira, vemos que, tendo os coeficientes de $f(x)$, conseguimos encontrar a soma S_k a partir deles por sempre acharmos e_1, e_2, S_0 e S_1 e utilizar as equação de recorrência. Equivalentemente, tendo as raízes x_1 e x_2, conseguimos montar tais 4 termos para formarmos as equações de recorrência e achar as k-ésima Soma de Newton a partir das 2 somas anteriores, e_1 e e_2 pelas equações montadas.

Além dessa forma de observar, se nos forem dadas equações que envolvem alguns S_k, podemos montar um sistema para colocarmos em função de e_1 e e_2 para, logo após, encontrar o valor pedido pelo problema.

3.2 Somas de Newton para polinômios de grau 3

De maneira análoga à anterior, seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a, d \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $b, c \in \mathbb{C}$ para que seja um polinômio de grau 3 e não possua 0 como raiz.

Logo, sendo x_1, x_2 e x_3 suas raízes, definimos a k-ésima soma de Newton como $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ e $e_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$, $e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ e $e_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$, pelas relações de Girard.

Desse modo, temos então que $S_0 = 3$ (pois não há raiz nula), $S_1 = e_1$.

Para encontrarmos $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, teremos de notar que:

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \Rightarrow S_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2e_2$, e portanto temos que $S_2 = e_1S_1 - 2e_2$ (pois $S_1 = e_1$)

Para $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, faremos uma estratégia parecida com a das Somas de Newton para grau 2, em que utilizamos e_1 multiplicado pela Soma de Newton anterior subtraído de um y, que desejamos encontrar:

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = e_1S_2 - y \Rightarrow y = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \Rightarrow$$
$$y = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1(x_2^2 + x_3^2) + x_2(x_1^2 + x_3^2) + x_3(x_1^2 + x_2^2)) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \Rightarrow$$
$$y = x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2x_1^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2 + x_3x_2^2 = x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1x_3^2 + x_1^2x_3 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 \Rightarrow$$
$$y = x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1x_3(x_1 + x_3) + x_2x_3(x_2 + x_3) =$$
$$x_1x_2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 + x_1x_3(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 + x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 \Rightarrow$$
$$y = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3) - 3x_1x_2x_3$$
$$y = e_2S_1 - e_3S_0$$

Portanto, ao trocar y na equação inicial, nos temos:

$S_3 = e_1S_2 - e_2S_1 + e_3S_0$.

De maneira análoga, podemos pensar S_4:

$$S_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = e_1S_3 - y \Rightarrow$$
$$y = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) \Rightarrow$$

$$y = (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_1(x_2^3 + x_3^3) + x_2(x_1^3 + x_3^3) + x_3(x_1^3 + x_2^3)) - x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \Rightarrow$$
$$y = x_1x_2^3 + x_1x_3^3 + x_2x_1^3 + x_2x_3^3 + x_3x_1^3 + x_3x_2^3 = x_1^3x_2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3 \Rightarrow$$
$$y = x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) + x_1x_3(x_1^2 + x_3^2) + x_2x_3(x_2^2 + x_3^2) \Rightarrow$$
$$y = x_1x_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1x_2x_3^2 + x_1x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1x_2^2x_3 + x_2x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1^2x_2x_3 \Rightarrow$$
$$y = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow$$
$$y = e_2S_2 - e_3S_1$$

Dessa forma, ao trocarmos y na equação inicial, encontramos:

$S_4 = e_1S_3 - e_2S_2 + e_3S_1$

Desse modo, percebemos um certo padrão que está aparecendo a partir das terceira e quarta Somas de Newton e, de fato, esse padrão ocorre para todas a equações de recorrência que envolvem as k-ésimas Somas de Newton para $k \geq 3$, pois:

$$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k = e_1S_{k-1} - y \Rightarrow$$
$$y = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^{k-1} + x_2^{k-1} + x_3^{k-1}) - (x_1^k + x_2^k + x_3^k) \Rightarrow$$
$$y = (x_1^k + x_2^k + x_3^k + x_1(x_2^{k-1} + x_3^{k-1}) + x_2(x_1^{k-1} + x_3^{k-1}) + x_3(x_1^{k-1} + x_2^{k-1})) - (x_1^k + x_2^k + x_3^k) \Rightarrow$$
$$y = x_1x_2^{k-1} + x_1x_3^{k-1} + x_2x_1^{k-1} + x_2x_3^{k-1} + x_3x_1^{k-1} + x_3x_2^{k-1} =$$
$$x_1^{k-1}x_2 + x_1x_2^{k-1} + x_1^{k-1}x_3 + x_1x_3^{k-1} + x_2^{k-1}x_3 + x_2x_3^{k-1} \Rightarrow$$
$$y = x_1x_2(x_1^{k-2} + x_2^{k-2}) + x_1x_3(x_1^{k-2} + x_3^{k-2}) + x_2x_3(x_2^{k-2} + x_3^{k-2}) \Rightarrow$$
$$y = x_1x_2(x_1^{k-2} + x_2^{k-2} + x_3^{k-2}) - x_1x_2x_3^{k-2} + x_1x_3(x_1^{k-2} + x_2^{k-2} + x_3^{k-2}) - x_1x_2^{k-2}x_3 +$$
$$+ x_2x_3(x_1^{k-2} + x_2^{k-2} + x_3^{k-2}) - x_1^{k-2}x_2x_3 \Rightarrow$$
$$y = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1^{k-2} + x_2^{k-2} + x_3^{k-2}) - x_1x_2x_3(x_1^{k-3} + x_2^{k-3} + x_3^{k-3}) \Rightarrow$$
$$y = e_2S_{k-2} - e_3S_{k-3}$$

Portanto, da mesma maneira como antes, chegamos a:

$$S_k = e_1S_{k-1} - e_2S_{k-2} + e_3S_{k-3}, k \geq 3$$

Desse modo, mostramos que, a partir dos coeficientes do polinômio (isto é, a, b, c e d) podemos montar a recorrência para a k-ésima Soma de Newton pelas relações de Girard e pelo que fora desenvolvido.

Assim como podemos, de modo análogo ao caso de grau 2, montar sistemas a partir de informações dadas de Somas de Newton no problema para encontrarmos o que se é pedido, e, como outro problema possível, caso nos sejam fornecidas as raízes, poderemos construir a equação de recorrência que precisarmos.

3.3 Somas de Newton para polinômios de grau n ≥ 2

Vamos mostrar que um resultado análogo aos anteriores ocorre ao considerarmos $f(x)$ com grau $n \geq 2$ em $\mathbb{C}[x]$ com coeficiente líder $a, a_0 \neq 0$, o qual possui n raízes complexas (não nulas) pelo que fora provado na seção 2.8. No entanto, para mostrar as equações de recorrências, iremos recorrer às seções 2.9, 2.5 e ao apêndice 5.

Seja $f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$. Logo, suas raízes são x_1, x_2,..., x_n, todas não nulas ao supormos que $a_0 \neq 0$.

Definimos $S_k = a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k$ como a k-ésima Soma de Newton. Para encontrarmos as equações de recorrência, devemos dividir o nosso problema em 2 casos:

1º caso) $k \geq n$:

Primeiramente, devemos perceber como o método com o qual estávamos abordando o problema agora se torna um tanto quanto problemático, vide a quantidade de termos que teríamos que reagrupar em nosso "y". Dessa maneira, vamos partir para outra abordagem mais simples:

Notando que para qualquer x_i, como este é raiz, temos:

$ax_i^n + a_{n-1}x_i^{n-1} + a_{n-2}x_i^{n-2} + ... + a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0 = 0$

Multiplicando ambos os lados por x_i^{k-n} (dado que $k-n \geq 0$), temos:

$ax_i^k + a_{n-1}x_i^{k-1} + a_{n-2}x_i^{k-2} ... + a_2x_i^{k-n+2} + a_1x_i^{k-n+1} + a_0x_i^{k-n} = 0$

Dividindo os dois lados por a, temos:

$x_i^k + \frac{a_{n-1}}{a}x_i^{k-1} + \frac{a_{n-2}}{a}x_i^{k-2} + ... + \frac{a_2}{a}x_i^{k-n+2} + \frac{a_1}{a}x_i^{k-n+1} + \frac{a_0}{a}x_i^{k-n} = 0$

Pelas relações de Girard, temos que:

$$e_1 = -\frac{a_{n-1}}{a}$$
$$e_2 = \frac{a_{n-2}}{a}$$
$$...$$
$$e_n = (-1)^n \frac{a_0}{a}$$

Daí, temos portanto que

$x_i^k - e_1x_i^{k-1} + e_2x_i^{k-2} - ... + (-1)^{n-2}e_{n-2}x_i^{k-n+2} + (-1)^{n-1}e_{n-1}x_i^{k-n+1} + (-1)^n e_n x_i^{k-n} = 0$

Aplicando somatório sobre $i = 1$ até n, nós teremos, já que cada $(-1)^k e_k$ para $k \in \{1, 2, ..., n\}$ não dependem de i:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k - e_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-1} + e_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-2} - ... + (-1)^{n-2} e_{n-2} \sum_{i=1}^{n} x_i^{k-n+2} +$$

$$+(-1)^{n-1}e_{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{k-n+1}+(-1)^n e_n\sum_{i=1}^{n}x_i^{k-n}=0$$

Daí, pela definição de S_k, temos:

$$S_k - e_1 S_{k-1} + e_2 S_{k-2} - ... + (-1)^{n-2}e_{n-2}S_{k-n+2} + (-1)^{n-1}e_{k-1}S_{n-k+1} + (-1)^n e_n S_{k-n} = 0$$

O que nos gera a equação de recorrência para $k \geq n$.

No próximo subtópico, falaremos do quão **importante** é essa abordagem para resolução de problemas.

2º caso) $k < n$

Este caso é mais complicado que o anterior e iremos, nesse momento requerer o que fora explicitado no Apêndice 5 para o polinômio $Q(x) = \frac{f(x)}{a}$:

$Q(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a}x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a}x^{n-2} + ... + \frac{a_2}{a}x^2 + \frac{a_1}{a}x + \frac{a_0}{a} = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \Rightarrow$
$Q(x) = x^n - e_1x^{n-1} + e_2x^{n-2} - ... + (-1)^{n-2}e_{n-2}x^2 + (-1)^{n-1}e_{n-1}x + (-1)^n e_n =$
$(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$

Derivando $Q(x)$ pelas considerações do Apêndice 5:

$Q'(x) = nx^{n-1} - (n-1)e_1x^{n-2} + ... + 2(-1)^{n-2}e_{n-2}x + (-1)^{n-1}e_{n-1} =$
$= (x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)...(x-x_n) + ... + (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-1}) =$
$(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + ... + \frac{1}{x-x_n}) = Q(x)(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + ... + \frac{1}{x-x_n}) =$
$\frac{Q(x)}{x-x_1} + \frac{Q(x)}{x-x_2} + ... + \frac{Q(x)}{x-x_n}$

Temos portanto que:

$nx^{n-1} - (n-1)e_1x^{n-2} + ... + 2(-1)^{n-2}e_{n-2}x + (-1)^{n-1}e_{n-1} = \frac{Q(x)}{x-x_1} + \frac{Q(x)}{x-x_2} + ... + \frac{Q(x)}{x-x_n} \Rightarrow$
$nx^{n-1} - (n-1)e_1x^{n-2} + ... + 2(-1)^{n-2}e_{n-2}x + (-1)^{n-1}e_{n-1} = \sum_{j=1}^{n}\frac{Q(x)}{x-x_j}$

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini para a divisão do polinômio $Q(x)$ por $x - x_j$, temos:

$Q(x) = (x-x_j)(q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + ... + q_1x + q_0) + r$

Em que:

$$\begin{cases} q_{n-1} = 1 \\ q_{n-2} = -e_1 + x_j q_{n-1} \\ q_{n-3} = e_2 + x_j q_{n-2} \\ \quad ... = ... \\ \quad q_1 = (-1)^{n-2} e_{n-2} + x_j q_2 \\ \quad q_0 = (-1)^{n-1} e_{n-1} + x_j q_1 \\ \quad\ r = (-1)^n e_n + x_j q_0 \end{cases}$$

Trocando cada um em cada linha abaixo, ficamos com:

$$\begin{cases} q_{n-1} = 1 \\ q_{n-2} = -e_1 + x_j \\ q_{n-3} = e_2 - e_1 x_j + x_j^2 \\ \quad ... = ... \\ \quad q_1 = (-1)^{n-2} e_{n-2} + (-1)^{n-3} e_{n-3} x_j + (-1)^{n-4} e_{n-4} x_j^2 + ... + e_2 x_j^{n-4} - e_1 x_j^{n-3} + x_j^{n-2} \\ \quad q_0 = (-1)^{n-1} e_{n-1} + (-1)^{n-2} e_{n-2} x_j + ... + e_2 x_j^{n-3} - e_1 x_j^{n-2} + x_j^{n-1} \\ \quad\ r = (-1)^n e_n + (-1)^{n-1} e_{n-1} x_j + (-1)^{n-2} e_{n-2} x_j^2 + ... + e_2 x_j^{n-2} - e_1 x_j^{n-1} + x_j^n = Q(x_j) = 0 \end{cases}$$

Note que, desse modo, temos que cada $q_i = q_i(j)$(isto é, cada coeficiente é uma função de j, pois depende de x_j) para $i \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, isto é,

$$\begin{cases} q_{n-1} = q_{n-1}(j) \\ q_{n-2} = q_{n-2}(j) \\ q_{n-3} = q_{n-3}(j) \\ \quad ... = ... \\ \quad q_1 = q_1(j) \\ \quad q_0 = q_0(j) \end{cases}$$

Cujas expressões já foram vistas acima. Dessa maneira, temos:

$\frac{Q(x)}{x-x_j} = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + ... + q_1 x + q_0 = q_{n-1}(j)x^{n-1} + q_{n-2}(j)x^{n-2} + ... + q_1(j)x + q_0(j)$

Aplicando o símbolo de somatório de $j = 1$ até n nos naturais, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{Q(x)}{x - x_j} = \sum_{j=1}^{n} (q_{n-1}(j)x^{n-1} + q_{n-2}(j)x^{n-2} + ... + q_1(j)x + q_0(j)) \iff$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{Q(x)}{x-x_j}=\sum_{j=1}^{n}(q_{n-1}(j)x^{n-1})+\sum_{j=1}^{n}(q_{n-2}(j)x^{n-2})+...+\sum_{j=1}^{n}(q_1(j)x)+\sum_{j=1}^{n}(q_0(j)) \iff$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{Q(x)}{x-x_j}=x^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(q_{n-1}(j))+x^{n-2}\sum_{j=1}^{n}(q_{n-2})+...+x\sum_{j=1}^{n}(q_1(j))+\sum_{j=1}^{n}(q_0(j))$$

Note que x^l, $0 \leq l \leq n-1$, pode sair do somatório por não depender de j.

Aplicando o somatório para cada $q_l = q_l(j)$ do sistema acima, para $0 \leq l \leq n-1$ e trocando $\sum_{j=1}^{n} x_j^k = S_k$ para $0 \leq k \leq n-l-1$, temos:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} q_{n-1}(j) = S_0 \\ \sum_{j=1}^{n} q_{n-2}(j) = -e_1S_0+S_1 \\ \sum_{j=1}^{n} q_{n-3}(j) = e_2S_0-e_1S_1+S_2 \\ \qquad ... = ... \\ \sum_{j=1}^{n} q_1(j) = (-1)^{n-2}e_{n-2}S_0+(-1)^{n-3}e_{n-3}S_1+(-1)^{n-4}e_{n-4}S_2+...+e_2S_{n-4}-e_1S_{n-3}+S_{n-2} \\ \sum_{j=1}^{n} q_0(j) = (-1)^{n-1}e_{n-1}S_0+(-1)^{n-2}e_{n-2}S_1+...+e_2S_{n-3}-e_1S_{n-2}+S_{n-1} \end{cases}$$

Note que pudemos retirar cada respectivo e_i de dentro dos somatórios em cada parcela de soma pois ele depende apenas dos coeficientes do polinômio $f(x)$ e não da variável j do somatório.

Dessa maneira, como temos $nx^{n-1}-(n-1)e_1x^{n-2}+...+2(-1)^{n-2}e_{n-2}x+$ $(-1)^{n-1}e_{n-1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{Q(x)}{x-x_j}$ e as igualdades acima, como tais polinômios são iguais para todos $x \in \mathbb{C}$ em que o polinômio esteja definido (em particular, em n valores distintos), podemos portanto igualar os coeficientes dos respectivos termos polinomiais de cada lado, nos gerando:

$$\begin{cases} n = S_0 \\ -(n-1)e_1 = -e_1S_0+S_1 \\ (n-2)e_2 = e_2S_0-e_1S_1+S_2 \\ -(n-3)e_3 = -e_3S_0+e_2S_1-e_1S_2+S_3 \\ ... = ... \\ (-1)^k(n-k)e_k = (-1)^ke_kS_0+(-1)^{k-1}e_{k-1}S_1+...+e_2S_{k-2}-e_1S_{k-1}+S_k \\ ... = ... \\ 2(-1)^{n-2}e_{n-2} = (-1)^{n-2}e_{n-2}S_0+(-1)^{n-3}e_{n-3}S_1+(-1)^{n-4}e_{n-4}S_2+...+e_2S_{n-4}-e_1S_{n-3}+S_{n-2} \\ (-1)^{n-1}e_{n-1} = (-1)^{n-1}e_{n-1}S_0+(-1)^{n-2}e_{n-2}S_1+...+e_2S_{n-3}-e_1S_{n-2}+S_{n-1} \end{cases}$$

Levando todas as parcelas para o lado esquerdo, exceto a última parcela da soma à direita e agrupando os termos que possuem o mesmo e_k na $k+1$-ésima linha e trocando a primeira linha nas outras, teremos:

$$\begin{cases} S_0 = n \\ S_1 = e_1 \\ S_2 = e_1 S_1 - 2e_2 \\ S_3 = e_1 S_2 - e_2 S_1 + 3e_3 \\ ... = ... \\ S_k = e_1 S_{k-1} - e_2 S_{k-2} + ... + (-1)^k e_{k-1} S_1 + k(-1)^{k+1} e_k \\ ... = ... \\ S_{n-2} = e_1 S_{n-3} - e_2 S_{n-4} + ... + (-1)^{n-2} e_{n-3} S_1 + (n-2)(-1)^{n-1} e_{n-2} \\ S_{n-1} = e_1 S_{n-2} - e_2 S_{n-3} + ... + (-1)^{n-1} e_{n-2} S_1 + (n-1)(-1)^n e_{n-1} \end{cases}$$

Desse modo, encontramos todas as equações de recorrência necessárias para encontrar qualquer Soma de Newton S_k que desejarmos.

3.4 O grande ponto chave

O importante passo que devemos prestar maior atenção na dedução das Somas de Newton para um polinômio de grau n é quando temos que o índice k é maior que n. Isso se dá pela maneira com a qual utilizamos para montar a equação de recorrência poder ser utilizada para construir relações de recorrência mesmo para expressões que envolvam as raízes do polinômio (com expoentes k) em formato possivelmente distinto da soma das k-ésimas potências.

Além disso, a dedução como fora feita para os casos de grau 2 e 3 também possui seu valor de importância, dado que muitas questões envolvem especificamente as somas de Newton de 2 e 3 parcelas, e muitos resultados podem ser adquiridos da análise desses 2 casos.

Faremos diversos exemplos desse tipo de caso nos problemas, onde será percebida, de forma muito expressiva, o poder de como fora feita as deduções das somas de Newton nos casos citados.

Uma importante observação a ser feita sobre as somas de Newton é que suas equações continuam válidas mesmo que alguma das raízes seja nula, bastando não definirmos S_0 e utilizarmos $S_n = e_1 S_{n-1} - e_2 S_{n-2} + ... + (-1)^n e_{n-1} S_1 + (-1)^{n+1} e_n \cdot n$.

No entanto, muitas vezes nos problemas, queremos separar o caso de alguma das raízes (ou soluções de um sistema) ser nula do caso que todas são diferentes de 0. Isto se dá por termos de lidar com e_n que, no primeiro caso, será nulo enquanto que no segundo ele será diferente de 0, o que pode causar problemas quanto a divisão por e_n ou a multiplicação de alguma equação por e_n. Por isso, no decorrer das questões, analisamos primeiro a possibilidade de ocorrer alguma raiz nula para depois utilizar as Somas de Newton.

4 PROBLEMAS

Vamos iniciar a análise com alguns problemas que são utilização direta do que fora provado para as somas de Newton:

1. (Bulgária) Sejam x e y números reais que satisfazem as equações:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^3+y^3=2\sqrt{2} \end{cases}$$

Ache o valor de x^4+y^4.

a) 2

b) 3

c) 4

d) $4\sqrt{2}$

e) não pode ser determinado.

Solução:

Primeiro, temos que checar se $x=0$ ou $y=0$, notando-se que $x=y=0$ não é solução pois $x^2+y^2=0\neq 2$ em tal situação, logo não seria solução para o sistema.

Se $x=0$, temos $y^2=2$ e $y^3=2\sqrt{2}=(\sqrt{2})^3$, o que significa que $y=\sqrt{2}$, logo $x=0$ e $y=\sqrt{2}$ é solução para o sistema, o que nos gera $x^4+y^4=(\sqrt{2})^4=4$

Um tratamento análogo para $y=0$ também pode ser feito, o que nos implicaria que $x=\sqrt{2}$ e, da mesma maneira, teríamos $x^4+y^4=4$

Poderíamos pensar em parar aqui e dizer que está terminada a questão, no entanto, temos de notar que é possível que haja alguma solução tal que $x\neq 0$ e $y\neq 0$ de tal modo que a soma das quartas potências de x e y possa não dar 4. Logo temos de checar se existem tais soluções nos reais.

Como nessa situação temos $x\neq 0$ e $y\neq 0$, podemos aplicar o que aprendemos sobre somas de Newton, sendo $S_k=x^k+y^k$, $e_1=x+y$ e $e_2=xy$:

$$\begin{cases} S_2=2=e_1S_1-e_2S_0 \\ S_3=2\sqrt{2}=e_1S_2-e_2S_1 \end{cases}$$

Como sabemos que $S_0=2$, $S_1=e_1$ e $S_2=2$, temos portanto o sistema:

$$\begin{cases} 2 = e_1^2 - 2e_2 \\ 2\sqrt{2} = 2e_1 - e_1e_2 \end{cases}$$

Como $S_4 = e_1S_3 - e_2S_2 = 2\sqrt{2}e_1 - 2e_2$, podemos multiplicar a primeira equação do sistema acima por $-e_2$ e a segunda equação por e_1, o que nos gera:

$$\begin{cases} -2e_2 = 2e_2^2 - e_1^2e_2 \\ 2\sqrt{2}e_1 = 2e_1^2 - e_1^2e_2 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos então $S_4 = 2(e_1^2 + e_2^2 - e_1^2e_2)$

Como $e_1^2 = 2 + 2e_2$, pela primeira equação do sistema antes da multiplicação, temos: $S_4 = 2(2 + 2e_2 + e_2^2 - (2 + 2e_2)e_2) = 2(2 - e_2^2)$

Dessa maneira, só precisamos encontrar e_2 e, para isso, vamos voltar ao nosso sistema que envolve apenas e_1 e e_2:

$$\begin{cases} 2 = e_1^2 - 2e_2 \\ 2\sqrt{2} = e_1(2 - e_2) \end{cases}$$

Vamos fazer e_1 ser substituído por elevar a segunda equação ao quadrado e trocar a primeira equação (rearranjada) na segunda:

$$\begin{cases} e_1^2 = 2 + 2e_2 \\ 8 = e_1^2(2 - e_2)^2 = (2 + 2e_2)(2 - e_2)^2 \end{cases}$$

Desse modo, teremos a equação em e_2 que queríamos:
$2(1 + e_2)(e_2^2 - 4e_2 + 4) = 8 \iff e_2^3 - 3e_2^2 = 0 \iff e_2^2(e_2 - 3) = 0 \iff e_2 = 0$ ou $e_2 = 3$.

Note que $e_2 = xy = 0$ implicaria $x = 0$ ou $y = 0$, por $\mathbb{R}$ ser domínio de integridade, mas como ambos são não nulos, não precisamos analisar tal caso.

Se $e_2 = 3$, teríamos $e_1(2 - e_2) = -e_1 = 2\sqrt{2} \iff e_1 = -2\sqrt{2}$, o que concorda com a primeira equação pois $e_1^2 = 8 = 2 + 6 = 2 + 2e_2$

No entanto, tendo $e_2 = 3$ e $e_1 = -2\sqrt{2}$, podemos montar o polinômio $f(p) = p^2 + 2\sqrt{2}p + 3$ cujas raízes seriam x e y ao se utilizar as relações de Girard. No entanto, $\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 3 = 8 - 12 = -4 < 0$, ou seja, o discriminante da equação do segundo grau

$p^2+2\sqrt{2}p+3=0$ é menor que zero, logo, as raízes de $f(p)$ têm de ser pertencentes a $\mathbb{C}-\mathbb{R}$, o que vai contra o que o enunciado diz, isto é, $x,y\in\mathbb{R}$. Portanto, $e_2\neq 3$

Dessa maneira, para x e y serem reais, podemos apenas ter $S_4=4$ como havíamos calculado no começo, o que nos dá o item (c) como resposta.

2. (Peru/2001) A partir de

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

O valor de $\frac{4}{x^4+y^4+z^4}$ é igual a:

a) $\frac{1}{33}$

b) $\frac{2}{33}$

c) $\frac{4}{33}$

d) $\frac{16}{33}$

e) $\frac{64}{33}$

Solução:

Vejamos que $xyz\neq 0$. Caso contrário, por simetria, seja $z=0$. Dessa maneira, o sistema se tornaria:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=9 \\ x^3+y^3=1 \end{cases}$$

Daí, elevando a primeira equação ao quadrado, temos $x^2+2xy+y^2=1$, como $x^2+y^2=9$ pela segunda equação, temos portanto que $2xy=-8$, o que nos gera $xy=-4$

Mas como $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, teríamos $x^3+y^3=1\cdot(9-(-4))=13\neq 1$, logo a terceira equação não é satisfeita e, portanto, não podemos ter solução para esse sistema ao se supor $z=0$.

Analogamente, $x=0$ ou $y=0$ também não serão possíveis. Desse modo temos, de fato, $xyz\neq 0$.

Dessa maneira, agora ao notar que nenhuma das variáveis são nulas, podemos aplicar o que conhecemos sobre Somas de Newton, dessa maneira, definindo $e_1=x+y+z$, $e_2=xy+xz+yz$, $e_3=xyz$ e $S_k=x^k+y^k+z^k$, pelas relações de Newton, temos:

$$\begin{cases} S_0 = 3 \\ S_1 = e_1 = 1 \\ S_2 = e_1S_1 - 2e_2 = 9 \\ S_3 = e_1S_2 - e_2S_1 + e_3S_0 = 1 \\ S_4 = e_1S_3 - e_2S_2 + e_3S_1 = e_1 - 9e_2 + e_3 \end{cases}$$

Pela terceira equação, utilizando a segunda, temos $e_2 = -4$ e, pela quarta equação, utilizando o que acabamos de encontrar e a primeira e segunda equações, encontramos $e_3 = -4$, o que nos garante que $S_4 = 1 - 9\cdot(-4) + (-4) = 33$

Portanto, temos que

$$\frac{4}{x^4 + y^4 + z^4} = \frac{4}{S_4} = \frac{4}{33}$$

O que nos concede que o item correto é o item (c).

3. (Olimpíada Americana - adaptada) Se (a,b,c) são raízes do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

Determine o valor de $a^{2021} + b^{2021} + c^{2021}$.

Solução:

Para aplicarmos o que conhecemos sobre somas de Newton, vamos primeiro checar se a, b e c são não nulos, dessa maneira:

Suponha, sem perda de generalidade, que $z = 0$, dessa maneira o sistema se torna:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 3 \\ x^3 + y^3 = 3 \end{cases}$$

Mas da primeira equação, ao elevá-la ao quadrado e usar a segunda equação, temos $x^2 + 2xy + y^2 = 9 \iff 3 + 2xy = 9 \iff xy = 3$.

No entanto, pela terceira equação, como $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 3\cdot(3-3) = 3\cdot 0 = 0 \neq 3$, logo não podemos ter que $c = 0$

Analogamente, não podemos ter $a = 0$ ou $b = 0$.

Desse modo, podemos aplicar, finalmente, o que aprendemos sobre Somas de Newton, ao definir $e_1 = a+b+c$, $e_2 = ab+ac+bc$, $e_3 = abc$ e $S_k = a^k+b^k+c^k$, como a,b e c são solução do sistema, nós temos, pelas Somas de Newton:

$$\begin{cases} S_0 = 3 \\ S_1 = e_1 = 3 \\ S_2 = e_1S_1 - 2e_2 = 3 \\ S_3 = e_1S_2 - e_2S_1 + e_3S_0 = 3 \end{cases}$$

Rearranjando o sistema acima e trocando as primeiras equações nas próximas, nós temos:

$$\begin{cases} 3 = e_1 \\ 3 = 3e_1 - 2e_2 \\ 3 = 3e_1 - 3e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

Desse modo, encontramos portanto que:

$$\begin{cases} e_1 = 3 \\ e_2 = 3 \\ e_3 = 1 \end{cases}$$

Dessa maneira, podemos montar a equação de recorrência para $k \geq 3$ como $S_k = e_1S_{k-1} - e_2S_{k-2} + e_3S_{k-3}$ pelas somas de Newton. Temos portanto que $S_k = 3S_{k-1} - 3S_{k-2} + S_{k-3}$

A partir de tal equação, vamos provar, por indução que $S_k = 3, \forall k \in \mathbb{N}$:

Casos iniciais: Como vimos pelas equações, temos $S_0 = S_1 = S_2 = S_3 = 3$.

Hipótese de indução: Para $k < n$ temos $S_k = 3$.

Passo indutivo: Vamos mostrar que para $k = n$ é válido que $S_n = 3$.

De fato, pela hipótese de indução, como $n-3, n-2, n-1 < n$, temos então que $S_{n-3} = S_{n-2} = S_{n-1} = 3$. Pela equação de recorrência, temos que $S_n = 3S_{n-1} - 3S_{n-2} + S_{n-3}$, logo, pelas igualdades que temos da hipótese, temos portanto que $S_n = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 3$, o que significa que $S_n = 3$, como queríamos.

Portanto, como a questão pede o valor de $a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}=S_{2021}$, temos $S_{2021}=3$.

Importante Observação: Um aluno atento poderia notar que $x=y=z=1$ seria solução para as três equações e tentar justificar a partir de tal observação que $a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}=3$. Com essa ideia, seria necessário apenas as duas primeiras equações para tal, pois, pela desigualdade de Cauchy-Schwars:

Desigualdade de Cauchy-Schwars: Sejam $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ números reais quaisquer, temos a seguinte desigualdade:

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$$

,cuja condição de igualdade se dá quando existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $a_j = kb_j, \forall j \in \{1,2,...,n\}$

No caso desta questão, tomando $n=3$, $b_1=b_2=b_3=1$ e $a_1=a, a_2=b, a_3=c$, temos:

$$(a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) \iff (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

Mas como $a+b+c=3$ e $a^2+b^2+c^2=3$ pelas duas primeiras equações, temos a ocorrência da igualdade na desigualdade acima, o que significa, pela condição de igualdade, que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $a=k\cdot 1=k, b=k\cdot 1=k, c=k\cdot 1$, ou seja, $a=b=c$.

Assim, como $a+b+c=3$, temos portanto que $a=b=c=1$ pelo exposto acima. E, de fato, tal solução é válida para a terceira equação e se faz ser única pelas duas primeiras equações do sistema.

4. (EUA/2003) Considere os polinômios $p(x)=x^6-x^5-x^3-x^2-x$ e $Q(x)=x^4-x^3-x^2-1$. Sabendo que z_1,z_2,z_3 e z_4 são as raízes de $Q(x)=0$, então encontre $p(z_1)+p(z_2)+p(z_3)+p(z_4)$.

Solução:

Primeiramente, note que z_1,z_2,z_3 e z_4 são todos não nulos (dado que o termo independente de $Q(x)$ é não nulo e por Girard) e logo, pelas Somas de Newton, podemos definir $e_1=z_1+z_2+z_3+z_4$, $e_2=z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4$, $e_3=z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4$, $e_4=z_1z_2z_3z_4$ e $S_k=z_1^k+z_2^k+z_3^k+z_4^k=\sum_{i=1}^4 z_i^k$

Pelas relações de Girard, nós temos que $e_1=-\frac{-1}{1}=1$, $e_2=\frac{-1}{1}=-1$, $e_3=-\frac{0}{1}=0$ e $e_4=\frac{-1}{1}=-1$

Agora, escrevendo $p(z_i)$ para algum $i \in \{1,2,3,4\}$:

$p(z_i)=x_i^6-x_i^5-x_i^3-x_i^2-x_i$. Aplicando somatório sobre i de $i=1$ até 4, nós teremos:

$$\sum_{i=1}^{4} p(z_i) = \sum_{i=1}^{4} (x_i^6 - x_i^5 - x_i^3 - x_i^2 - x_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} p(z_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i^6 - \sum_{i=1}^{4} x_i^5 - \sum_{i=1}^{4} x_i^3 - \sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \sum_{i=1}^{4} x_i$$

Pela definição de S_k, temos portanto:

$$p(z_1) + p(z_2) + p(z_3) + p(z_4) = S_6 - S_5 - S_3 - S_2 - S_1$$

Como temos um polinômio do quarto grau, as equações de recorrência das Somas de Newton serão dadas por:

$$\begin{cases} S_0 = 4 \\ S_1 = e_1 \\ S_2 = e_1 S_1 - 2e_2 \\ S_3 = e_1 S_2 - e_2 S_1 + 3e_3 \\ S_k = e_1 S_{k-1} - e_2 S_{k-2} + e_3 S_{k-3} - e_4 S_{k-4}, k \geq 4 \end{cases}$$

Dessa maneira, trocando e_1, e_2, e_3 e e_4 que encontramos, teremos:

$$\begin{cases} S_0 = 4 \\ S_1 = 1 \\ S_2 = 3 \\ S_3 = 4 \\ S_k = S_{k-1} + S_{k-2} + S_{k-4}, k \geq 4 \end{cases}$$

Dessa maneira, vamos calcular S_4, S_5 e S_6 pelas equação de recorrência:

$$\begin{cases} S_4 = S_3 + S_2 + S_0 = 4 + 3 + 4 = 11 \\ S_5 = S_4 + S_3 + S_1 = 11 + 4 + 1 = 16 \\ S_6 = S_5 + S_4 + S_2 = 16 + 11 + 3 = 30 \end{cases}$$

Logo, trocando as respectivas somas de Newton que encontramos para achar o valor da soma que queremos:

$$p(z_1) + p(z_2) + p(z_3) + p(z_4) = S_6 - S_5 - S_3 - S_2 - S_1 = 30 - 16 - 4 - 3 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(z_1)+p(z_2)+p(z_3)+p(z_4)=6$$

Portanto, o valor pedido é **6**.

5.(Croácia - adaptado) Se $x+y+z=0$ e o valor da expressão $\frac{x^7+y^7+z^7}{xyz(x^4+y^4+z^4)}$ pode ser escrito da forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são números primos entre si. Então o valor de $p+q$ é igual a:

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

Solução:

Primeiramente, deve-se notar que $xyz(x^4+y^4+z^4)\neq 0$ para que a fração esteja bem definida, o que nos implica $xyz\neq 0 \iff x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$. Desse modo, podemos aplicar as somas de Newton para resolver esse problema, definindo-se $e_1=x+y+z$, $e_2=xy+yz+zx$, $e_3=xyz$ e $S_n=x^n+y^n+z^n$:

$$\begin{cases} S_0=3 \\ S_1=e_1 \\ S_2=e_1S_1-2e_2 \\ S_3=e_1S_2-e_2S_1+e_3S_0 \\ S_4=e_1S_3-e_2S_2+e_3S_1 \\ S_5=e_1S_4-e_2S_3+e_3S_2 \\ S_6=e_1S_5-e_2S_4+e_3S_3 \\ S_7=e_1S_6-e_2S_5+e_3S_4 \end{cases}$$

Desse modo, pelo enunciado, temos $S_1=e_1=0$, o que muda nosso sistema do seguinte modo:

$$\begin{cases} S_0 = 3 \\ S_1 = e_1 = 0 \\ S_2 = -2e_2 \\ S_3 = e_3S_0 \\ S_4 = -e_2S_2 \\ S_5 = -e_2S_3 + e_3S_2 \\ S_6 = -e_2S_4 + e_3S_3 \\ S_7 = -e_2S_5 + e_3S_4 \end{cases}$$

O qual, trocando cada Soma de Newton anterior nas próximas, se torna:

$$\begin{cases} S_0 = 3 \\ S_1 = e_1 = 0 \\ S_2 = -2e_2 \\ S_3 = 3e_3 \\ S_4 = 2e_2^2 \\ S_5 = -3e_2e_3 - 2e_2e_3 = -5e_2e_3 \\ S_6 = -2e_2^3 + 3e_3^2 \\ S_7 = 5e_2^2e_3 + 2e_2^2e_3 = 7e_2^2e_3 \end{cases}$$

Dessa maneira, a fração pedida, pelas definições que demos, é igual a $\frac{S_7}{e_3S_4}$ que, pelas equações acima, se torna:

$$\frac{x^7 + y^7 + z^7}{xyz(x^4 + y^4 + z^4)} = \frac{7e_2^2e_3}{2e_2^2e_3} = \frac{7}{2}$$

Desse modo, como $\frac{7}{2}$ está no formato $\frac{p}{q}$ com p e q primos entre si, podemos tomar $p = 7$ e $q = 2$ de modo que, por fim, temos $p + q = 9$ que confere o item (e) como correto.

A partir das próximas questões, vamos abordar outros modos mais gerais de ver as somas de Newton. Iremos considerar outras formas de somas ou subtrações de potências das raízes, mas que, de qualquer modo, continuam a seguir a mesma equação recursiva quando as potências são maiores do que a quantidade de números complexos utilizados (ou, equivalentemente, maiores que o grau do polinômio que possui tais complexos como raízes). Será apenas necessário se modificar os valores iniciais necessários para definir unicamente a equação recursiva.

6. (Índia) Sejam **a**, **b** e **c** as raízes positivas de $x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$.

Sabendo que:

$$\begin{cases} \frac{a\sqrt{2}}{a} + \frac{b\sqrt{2}}{b} + \frac{c\sqrt{2}}{c} = \alpha \\ \frac{a\sqrt{2}}{a^2} + \frac{b\sqrt{2}}{b^2} + \frac{c\sqrt{2}}{c^2} = \beta \\ \frac{a\sqrt{2}}{a^3} + \frac{b\sqrt{2}}{b^3} + \frac{c\sqrt{2}}{c^3} = \theta \\ \qquad S = (\frac{a^{\sqrt{2}}+b^{\sqrt{2}}+c^{\sqrt{2}}+4\beta}{\alpha+\theta}) \cdot (a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}) \end{cases}$$

Então a soma dos algarismos de S é igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Solução:

Primeiramente, se a, b e c são raízes do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 + 4x - 1$, note que todas as raízes são não nulas pelo termo independente ser não nulo (e, pelo enunciado, temos que todas 3 são positivas), logo, definindo $q(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1$, note que:

$$q(\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a})^3 - 4(\frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{a}) - 1 = \frac{1}{a^3} - 4\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} - 1 = \frac{-a^3 + a^2 - 4a + 1}{a^3} = \frac{-p(a)}{a^3} = 0$$

Analogamente, teremos:

$$q(\frac{1}{b}) = \frac{-p(b)}{b^3} = 0$$

$$q(\frac{1}{c}) = \frac{-p(c)}{c^3} = 0$$

Logo, as raízes de $q(x)$ são $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$. Obviamente temos que tais raízes são não nulas.

Definindo agora $S_k = (\frac{1}{a})^k + (\frac{1}{b})^k + (\frac{1}{c})^k = a^{-k} + b^{-k} + c^{-k}$, vamos tentar simplificar o primeiro parêntese de S a partir do polinômio $q(x)$ ao se aplicar as suas raízes e depois calculemos S_2:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^3} - 4\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} - 1 = 0 \\ \frac{1}{b^3} - 4\frac{1}{b^2} + \frac{1}{b} - 1 = 0 \\ \frac{1}{c^3} - 4\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c} - 1 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por $a^{\sqrt{2}}$, a segunda por $b^{\sqrt{2}}$ e a terceira por $c^{\sqrt{2}}$ (note que podemos elevar tais números por um expoente irracional pois eles são positivos), temos:

$$\begin{cases} \frac{a^{\sqrt{2}}}{a^3} - 4\frac{a^{\sqrt{2}}}{a^2} + \frac{a^{\sqrt{2}}}{a} - a^{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{b^{\sqrt{2}}}{b^3} - 4\frac{b^{\sqrt{2}}}{b^2} + \frac{b^{\sqrt{2}}}{b} - b^{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{c^{\sqrt{2}}}{c^3} - 4\frac{c^{\sqrt{2}}}{c^2} + \frac{c^{\sqrt{2}}}{c} - c^{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

Agora, somando as 3 equações e usando a notação que nos fora dada no enunciado: $\theta - 4\beta + \alpha - (a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{2}} + c^{\sqrt{2}}) = 0 \iff (a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{2}} + c^{\sqrt{2}}) + 4\beta = \alpha + \theta$

Note que $\alpha > 0$ e $\theta > 0$ já que a, b e c são positivos, logo $\alpha + \theta > 0$ e portanto, podemos dividir os dois lados por tal expressão, o que nos gera:

$$\frac{(a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{2}} + c^{\sqrt{2}}) + 4\beta}{\alpha + \theta} = 1$$

Dessa maneira, a expressão de S simplifica para:

$S = a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} = S_2$

Desse modo, precisamos apenas calcular S_2, o que pode ser facilmente feito a partir das Somas de Newton ao se definir $e_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ e $e_2 = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$, precisando apenas das seguintes equações:

$$\begin{cases} S_1 = e_1 \\ S_2 = e_1 S_1 - 2e_2 \end{cases}$$

Veja que, por Girard no polinômio $q(x)$, temos que $e_1 = -\frac{-4}{1} = 4$ e $e_2 = \frac{1}{1} = 1$, o que nos gera $S_2 = e_1 S_1 - 2e_2 = e_1^2 - 2e_2 = 4^2 - 2 \cdot 1 = 14$

Portanto, $S = S_2 = 14$, cuja soma de algarismos é 5, conferindo o item (e) como correto.

Da questão anterior, vemos como tivemos que transformar o polinômio que nos foi dado de modo a adaptar as raízes do polinômio anterior para aplicar a "soma de Newton"nelas (embora os expoentes sejam, em tese, negativos). No entanto, não tivemos de utilizar a equação recursiva geral, dado que 2 é menor que a quantidade de números complexos utilizados para definir a Soma de Newton (3 complexos).

7. (IIT - Índia) Sejam r_1 e r_2 raízes da equação $x^2 - 6x - 2 = 0$, com $r_1 > r_2$. Se $x_n = r_1^n - r_2^n$ então o valor de m na expressão $m = \frac{x_{10} - 2x_8}{2x_9}$ é igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Solução: Como r_1 e r_2 são raízes, temos:

$$\begin{cases} r_1^2 - 6r_1 - 2 = 0 \\ r_2^2 - 6r_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por r_1^{n-2} e a segunda equação por r_2^{n-2}, temos:

$$\begin{cases} r_1^n - 6r_1^{n-1} - 2r_1^{n-2} = 0 \\ r_2^n - 6r_2^{n-1} - 2r_2^{n-2} = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira e lembrando que $x_n = r_1^n - r_2^n$, temos:

$$x_n - 6x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0 \iff x_n = 6x_{n-2} + 2x_{n-2}$$

Dessa maneira, para $n = 10$, temos:

$$x_{10} = 6x_9 + 2x_8 \iff x_{10} - 2x_8 = 6x_9$$

Como $r_1 > r_2$, então $r_1 \neq r_2$ e logo $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, temos, portanto:

$$m = \frac{x_{10} - 2x_8}{2x_9} = 3$$

Logo, o item correto é o item (c).

Dessa questão, pode-se ver que, em vez da soma de potências das raízes, nós definimos a "Soma de Newton"como a subtração das potências das duas raízes (a qual, na realidade, não é realmente uma Soma de Newton da forma como definimos inicialmente no que fora tratado). Nota-se disto que, como dito, a equação recursiva é idêntica a da Soma de Newton para quando $n \geq 2$. Isso seu deu por aplicarmos o que usamos na prova do caso geral das Somas de Newton ao adaptar o polinômio ao x_n e depois limitarmos ao caso particular que necessitávamos.

8. (Canadá) Se a, b e c são raízes da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

I. Mostre que a, b e c são distintas

II. Mostre que

$$\frac{a^{1982} - b^{1982}}{a - b} + \frac{b^{1982} - c^{1982}}{b - c} + \frac{c^{1982} - a^{1982}}{c - a}$$

é um número inteiro.

Solução:

I. Seja $p(x)$ um polinômio de grau 3 tal que este possui 2 raízes iguais a α e uma distinta β, logo, pelo que provamos na Seção 2.8, temos:

$p(x) = a(x - \alpha)(x - \alpha)(x - \beta) = a(x - \alpha)^2(x - \beta)$

Logo, temos, ao derivar, pelas observações do Apêndice 5:

$p'(x) = 2a(x - \alpha)(x - \beta) + a(x - \alpha)^2$, o que nos gera que $p'(\alpha) = 0$.

Logo, se α é uma raiz dupla do polinômio $p(x)$ (isto é, duas das raízes do polinômio são iguais), temos que $p'(\alpha) = 0$ (esta propriedade é válida para polinômios de grau qualquer, apenas ilustramos com o caso de um polinômio do terceiro grau).

Dessa maneira, se encontrarmos γ tal que $p(\gamma) = 0$ e $p'(\gamma) = 0$, necessariamente γ deve ser raiz dupla.

Isso se dá porque, se não fosse, não poderíamos ter $p'(\gamma) = 0$, pois, no caso em que o grau de $p(x)$ é 3 e sendo α, β e γ suas raízes, teríamos $p'(\gamma) = a(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) \neq 0$, dado que γ não seria raiz dupla, contrariando que $p'(\gamma) = 0$.

Dessa maneira, para averiguarmos se a, b e c são distintas no polinômio $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, basta derivarmos-o, encontrar as raízes da derivada e testar se alguma delas zera o polinômio original. Caso o zere, temos portanto raiz dupla e logo alguma delas são iguais entre si. Desse modo:

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 3(x - 1)(x + \frac{1}{3})$, logo $f'(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$, daí:

$f(1) = -2 \neq 0$ e $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{22}{27} \neq 0$

Logo, temos que a, b e c são distintas, dado que não há a presença de raiz dupla em $f(x)$.

II. Como a, b e c são raízes (note que elas são não-nulas pois o termo independente do polinômio é -1), temos:

$$\begin{cases} a^3 - a^2 - a - 1 = 0 \\ b^3 - b^2 - b - 1 = 0 \\ c^3 - c^2 - c - 1 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por a^{n-3}, $n \geq 3$, a segunda por b^{n-3} e a terceira, c^{n-3}, temos:

$$\begin{cases} a^n - a^{n-1} - a^{n-2} - a^{n-3} = 0 \\ b^n - b^{n-1} - b^{n-2} - b^{n-3} = 0 \\ c^n - c^{n-1} - c^{n-2} - c^{n-3} = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, a terceira da segunda e a primeira da terceira e substituindo as respectivas equações que foram subtraídas, temos:

$$\begin{cases} (a^n - b^n) - (a^{n-1} - b^{n-1}) - (a^{n-2} - b^{n-2}) - (a^{n-3} - b^{n-3}) = 0 \\ (b^n - c^n) - (b^{n-1} - c^{n-1}) - (b^{n-2} - c^{n-2}) - (b^{n-3} - c^{n-3}) = 0 \\ (c^n - a^n) - (c^{n-1} - a^{n-1}) - (c^{n-2} - a^{n-2}) - (c^{n-3} - a^{n-3}) = 0 \end{cases}$$

Como $a \neq b \neq c \neq a$, temos $a - b \neq 0, b - c \neq 0, c - a \neq 0$, logo, dividindo a primeira equação por $a - b$, a segunda equação por $b - c$ e a terceira equação por $c - a$, temos:

$$\begin{cases} \frac{a^n - b^n}{a-b} - \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b} - \frac{a^{n-2} - b^{n-2}}{a-b} - \frac{a^{n-3} - b^{n-3}}{a-b} = 0 \\ \frac{b^n - c^n}{b-c} - \frac{b^{n-1} - c^{n-1}}{b-c} - \frac{b^{n-2} - c^{n-2}}{b-c} - \frac{b^{n-3} - c^{n-3}}{b-c} = 0 \\ \frac{c^n - a^n}{c-a} - \frac{c^{n-1} - a^{n-1}}{c-a} - \frac{c^{n-2} - a^{n-2}}{c-a} - \frac{c^{n-3} - a^{n-3}}{c-a} = 0 \end{cases}$$

Definindo $S_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} + \frac{b^n - c^n}{b-c} + \frac{c^n - a^n}{c-a}$ e somando as 3 equações, temos, por fim, uma equação de recorrência:

$$S_n - S_{n-1} - S_{n-2} - S_{n-3} = 0 \iff S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$$

De maneira bastante parecida com a recorrência decorrente das Somas de Newton, conseguimos deduzi-la por um processo quase idêntico ao utilizado no caso geral delas. Acabamos, assim, por ter quase tudo que precisamos para confirmar que $S_{1982} = \frac{a^{1982}-b^{1982}}{a-b} + \frac{b^{1982}-c^{1982}}{b-c} + \frac{c^{1982}-a^{1982}}{c-a}$ é inteiro, precisando apenas checar os valores S_0, S_1 e S_2 e ver se os três são inteiros. Caso os 3 valores iniciais sejam inteiros, por indução temos que S_n é inteiro para qualquer $n \geq 0$ e, desse modo, particularmente temos S_{1982} sendo inteiro.

De fato: (S_0 está definido pois as três raízes são não-nulas)

$S_0 = \frac{a^0-b^0}{a-b} + \frac{b^0-c^0}{b-c} + \frac{c^0-a^0}{c-a} = \frac{1-1}{a-b} + \frac{1-1}{b-c} + \frac{1-1}{c-a} = 0$

$S_1 = \frac{a^1-b^1}{a-b} + \frac{b^1-c^1}{b-c} + \frac{c^1-a^1}{c-a} = \frac{a-b}{a-b} + \frac{b-c}{b-c} + \frac{c-a}{c-a} = 3$

$S_2 = \frac{a^2-b^2}{a-b} + \frac{b^2-c^2}{b-c} + \frac{c^2-a^2}{c-a} = (a+b)+(b+c)+(c+a) = 2(a+b+c) = 2(-\frac{-1}{1}) = 2$

De onde esta penúltima igualdade advém das relações de Girard no polinômio $f(x)$.

Logo, vamos provar por indução que S_n é inteiro para $n \geq 0$:

- Casos iniciais: Já feitos! ($n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$)
- Hipótese de indução: Suponha que S_k é inteiro para $0 \leq k < n, n \geq 3$
- Passo indutivo: Vamos provar que S_n é inteiro.

Como $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}, \forall n \geq 3$, pela equação de recorrência, e como $n-1, n-2, n-3 < n$, pela hipótese de indução, temos $S_{n-1}, S_{n-2}, S_{n-3} \in \mathbb{Z}$, logo, tem-se que S_n é inteiro pela soma de três inteiros ser inteiro. Por fim, S_{1982} é inteiro e o resultado segue.

9. (Cone Sul/1988) O produto das raízes inteiras da equação irracional $\sqrt[3]{13x+37} - \sqrt[3]{13x-37} = \sqrt[3]{2}$ é igual a:

a) 7

b) -7

c) 49

d) -49

e) 14

Solução:

Chame $a = \sqrt[3]{13x+37}$ e $b = \sqrt[3]{13x-37}$. Note que $a = 0 \iff x = -\frac{37}{13}$ e, daí, $a-b = -b = -\sqrt[3]{-74} \neq \sqrt[3]{2}$. Analogamente, $b = 0 \iff x = \frac{37}{13}$, tem-se $a-b = a = \sqrt[3]{74} \neq \sqrt[3]{2}$. Veja também que não se pode ter $a = b$, pois teríamos $37 = -37$, o que claramente é falso.

Portanto, não podemos ter $a = 0$, $b = 0$ ou $a = b$. Defina $a+b = e_1$ e $ab = e_2$, temos portanto um polinômio $f(y) = y^2 - e_1 y + e_2$ com raízes a e b. Dessa maneira, temos:

$$\begin{cases} a^2 - e_1 a + e_2 = 0 \\ b^2 - e_1 b + e_2 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a equação de cima por a^{n-2} e a de baixo por b^{n-2}, para $n \geq 2$, temos:

$$\begin{cases} a^n - e_1 a^{n-1} + e_2 a^{n-2} = 0 \\ b^n - e_1 b^{n-1} + e_2 b^{n-2} = 0 \end{cases}$$

Definindo $S_n = a^n - b^n$ e subtraindo a segunda equação da primeira, temos:

$S_n - e_1 S_{n-1} + e_2 S_{n-2} = 0 \iff S_n = e_1 S_{n-1} - e_2 S_{n-2}, \forall n \geq 2$

Logo, para definirmos a sequência de "Somas de Newton adaptadas", devemos achar S_0 e S_1 (note que S_0 está definido pois $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $S_1 \neq 0$ também pois $a \neq b$)

Veja que $S_0 = a^0 - b^0 = 1 - 1 = 0$ e $S_1 = a - b = \sqrt[3]{2}$ pelo enunciado.

Note que pelas definições de a e b, temos $a^3 - b^3 = 74$, isto é, $S_3 = 74$

Portanto, pelo que mostramos para a equação de recorrência de S_n, temos:

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_1 = \sqrt[2]{2} \\ S_2 = e_1 S_1 - e_2 S_0 = e_1 \sqrt[3]{2} \\ S_3 = e_1 S_2 - e_2 S_1 = \sqrt[3]{2}(e_1^2 - e_2) \end{cases}$$

Desse modo, temos de encontrar um modo de achar e_1 ou e_2 de forma que possamos encontrar uma solução para x, para isso, vamos ver a definição de S_1:

$S_1 = a - b = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a+b)^2 - 4ab = e_1^2 - 4e_2 = \sqrt[3]{4}$

Dessa maneira, temos as duas equações que precisamos para encontrar ao menos um dos valores dentre e_1 e e_2:

$$\begin{cases} S_1^2 = e_1^2 - 4e_2 = \sqrt[3]{4} \\ S_3 = \sqrt[3]{2}(e_1^2 - e_2) = 74 \end{cases}$$

Que se torna:

$$\begin{cases} e_1^2 - 4e_2 = \sqrt[3]{4} \\ e_1^2 - e_2 = 37\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, nos gera:

$3e_2 = 36\sqrt[3]{4} \iff e_2 = 12\sqrt[3]{4}$

Pela definição de $e_2 = ab = \sqrt[3]{13x+37} \cdot \sqrt[3]{13x-37} = \sqrt[3]{(13x)^2 - 37^2} = 12\sqrt[3]{4}$, o que nos gera: $169x^2 - 37^2 = 12^3 \cdot 4 \iff 169x^2 = 8281 \iff x^2 = 49 \iff x = 7$ ou $x = -7$

Portanto, o produto das raízes inteiras da equação irracional é igual a $7 \cdot (-7) = -49$, o que nos provém o item (d) como correto.

10. Sejam x, y números complexos não nulos satisfazendo $x^2 + xy + y^2 = 0$. Determine

$$(\frac{x}{x+y})^{2001} + (\frac{y}{x+y})^{2001}$$

Solução:

Chame $a = \frac{x}{x+y}$ e $b = \frac{y}{x+y}$. Logo temos $a + b = e_1 = 1$. Note que $a \neq 0$ e $b \neq 0$ pois $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Defina $e_2 = ab$ e $S_n = a^n + b^n$. (Logo temos $S_1 = 1$)

Pela equação $x^2 + xy + y^2 = 0$, dividindo ambos os lados por $(x+y)^2$, temos: $\frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{x}{x+y} \cdot \frac{y}{x+y} + \frac{y^2}{(x+y)^2} = 0 \iff (\frac{x}{x+y})^2 + (\frac{x}{x+y})(\frac{y}{x+y}) + (\frac{y}{x+y})^2 = 0 \iff a^2 + ab + b^2 = 0 \iff a^2 + b^2 = -ab \iff S_2 = -e_2$

Logo, como S_n representa um formato para soma de Newton, podemos utilizar suas equações:

$$\begin{cases} S_0 = 2 \\ S_1 = e_1 = 1 \\ S_n = e_1 S_{n-1} - e_2 S_{n-2}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Desse modo, para $n = 2$, temos $S_2 = e_1 S_1 - e_2 S_0 = e_1^2 - 2e_2 = -e_2$ pelo que encontramos acima, portanto, $e_1^2 = e_2 \iff e_2 = 1$

Logo, a equação de recorrência se torna apenas $S_n = S_{n-1} - S_{n-2}$.

Como a questão pede $(\frac{x}{x+y})^{2001} + (\frac{y}{x+y})^{2001} = S_{2001}$, temos que checar algum padrão para os números. Vamos ver os S_n para $0 \leq n \leq 7$ para checarmos se achamos algo de interesse:

$$\begin{cases} S_0 = 2 \\ S_1 = 1 \\ S_2 = S_1 - S_0 = 1 - 2 = -1 \\ S_3 = S_2 - S_1 = -1 - (1) = -2 \\ S_4 = S_3 - S_2 = -2 - (-1) = -1 \\ S_5 = S_4 - S_3 = -1 - (-2) = 1 \\ S_6 = S_5 - S_4 = 1 - (-1) = 2 \\ S_7 = S_6 - S_5 = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Desse maneira, como $S_6 = S_0 = 2$ e $S_7 = S_1 = 1$, temos que a sequência se tornará periódica de período 6 dado que S_n depende apenas de seus 2 termos anteriores, isto é, S_{n-1} e S_{n-2}. Logo, ao repetir 2 termos seguidos de $n-1$ e $n-2$ com dois termos seguidos anteriores $n-7$ e $n-8$ da sequência, vamos ter que os respectivos S_n irão ser iguais à S_{n-6}, de tal modo que podemos dizer certamente que, para $k \geq 0$, tem-se:

$$\begin{cases} S_{6k} = 2 \\ S_{6k+1} = 1 \\ S_{6k+2} = -1 \\ S_{6k+3} = -2 \\ S_{6k+4} = -1 \\ S_{6k+5} = 1 \end{cases}$$

Como $2001 = 6 \cdot 333 + 3$, tomando $k = 333$, temos $2001 = 6k + 3$, o que nos garante que $S_{2001} = S_{6k+3} = -2$.

5 CONCLUSÃO

Com isto, conclui-se esta pesquisa com a abordagem, prova e aplicação das Somas de Newton para a resolução de diversos problemas advindos de olimpíadas matemáticas. Tendo-se em mente que o principal ponto chave das Somas de Newton é o processo com o qual se utiliza para o caso em que o índice da soma é maior ou igual à quantidade de potências de complexos a serem somadas, pode-se ver a sua importância. Um motivo subsequente de tal análise pode-se dar pela possibilidade de estendermos esse mesmo processo não só para soma de potências de números, mas também para subtrações ou outras expressões que envolvam as raízes de um certo polinômio dado ou podendo ser definido pelo enunciado da questão. Além dessa análise, demos um tratamento especial para os casos de somas de 2 e 3 parcelas pois essas duas situações são, no geral, bem mais cobrados em questões que os casos com mais parcelas.

Além dessa possível extensão para outros formatos, tal análise pode servir como porta de entrada para um aluno olímpico curioso para os chamados polinômios simétricos. Como se nota pelas somas de Newton, é possível de se encontrar todas as somas de potências $k \in \mathbb{N}$ de raízes de um polinômio por meio de equações de recorrência, de onde, tendo-se os respectivos e_i para $i \in \{1,2,...,n\}$, poderia-se descobrir todos os valores da sequência dos S_k pela recorrência (exceto o S_0, que meramente era dependente da quantidade de termos). Ou seja, apenas possuindo cada e_i, poderíamos encontrar todas as somas de Newton relativas àquele polinômio em função deles.

Isto seria capaz de fazer o aluno se indagar: "Mas essa propriedade de expressões dependerem dos e_i vale apenas para as somas de Newton? Isso é válido para situações distintas dessa? Quais são as condições para que algo desse gênero possa ocorrer?", de onde, ao menos, as duas primeiras foram respondidas com a resolução de algumas das questões no capítulo 4. Quer-se dizer, as Somas de Newton não são as únicas expressões que podem ser escritas em função dos e_i, tendo-se os termos iniciais bem definidos. No entanto, a terceira pergunta permanece um mistério com o qual o aluno possa se sentir interessado a ir mais atrás de fontes que falem sobre esse assunto, acabando por se deparar com os polinômios simétricos e seu "Teorema Fundamental para Polinômios Simétricos". Tendo-se em mente a possibilidade deste trabalho poder incitar uma busca por mais conhecimento por parte do discente sobre outros assuntos e um desenvolvimento de sua aptidão matemática, de longe excederia as expectativas criadas no decorrer do que fora feito aqui.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, Tom M.. Differential Calculus. In: APOSTOL, Tom M.. **Calculus**. 2. ed. [S. L.]: John Wiley & Sons, 1967. Cap. 4. p. 161-167.

BRILLIANT (org.). **Newton's Identities**. [201-]. Disponível em: https://brilliant.org/wiki/newtons-identities/. Acesso em: 10 fev. 2021.

GOMES, Carlos A.. POLINÔMIOS SIMÉTRICOS. **Revista Eureka**, Rio de Janeiro, n. 25, p. 46-52, 2007. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/Eureka_25.pdf. Acesso em: 12 fev. 2021.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Ltc, 2001. 778 p. 1 v.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e Equações Algébricas**. **Coleção PROFMAT**, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2018.

IRELAND, Kenneth; ROSEN, Michael. **A Classical Introduction to Modern Number Theory**. 2. ed. [S. L.]: Springer, 1990.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ. Sistema de Bibliotecas. **Guia de normalização de trabalhos acadêmicos**. 3 ed. Fortaleza, CE, 2020. 150 p. Disponível em: <http://www.uece.br/biblioteca/wp-content/uploads/sites/27/2020/02/GUIA-UECE-2020-FINAL.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2021.

APÊNDICE A - SOBRE TEOREMAS DE CÁLCULO

As definições e provas neste apêndice se baseiam nas ideias apresentadas nas seções 3.2, 3.3, 3.9, 7.2, 7.3 e 7.7 de (GUIDORIZZI, 2001).

Definição de limite:

Sendo $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ definida por $y = f(x)$, dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in A$, tem-se $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

Intuitivamente, isso significa que, se o limite é igual a L, dado uma "margem de erro"ε, podemos fazer com que $f(x)$ fique próximo a L por uma diferença (em módulo) menor que ε (ou seja, $f(x)$ se aproxima de L), contanto que o argumento x esteja próximo a a por uma diferença (em módulo) menor que δ (ou seja, quando x se aproxima de a). Note que, pela definição dada, se exclui a necessidade da análise quando $x = a$, considerando-se a possibilidade que a função nem mesmo esteja definida para tal ponto, por exemplo.

Por tal definição, pode-se provar as propriedades de limites, donde suas provas podem ser encontradas na seção 3.9 de (GUIDORIZZI, 2001):

Se k for uma constante real, $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, então

a)

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L_1 + L_2 = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

b)

$$\lim_{x\to a} kf(x) = kL_1 = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

c)

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = L_1L_2 = (\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))$$

d) Se $L_2 \neq 0$, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Definição de continuidade num ponto:

Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ com $y = f(x)$ e $a \in A$, dizemos que a função é contínua em a se, e somente se,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Note que, para essa definição fazer sentido de fato, temos ainda 2 condições sobre ela, as quais são a necessidade de estarem bem definidos $f(a)$ e $\lim_{x\to a} f(x)$.

Por essa definição, temos propriedades análogas às 4 anteriores para funções contínuas num ponto a.

Dessa maneira, como $\lim_{x\to a} x = a$ (bastando tomar $f(x) = x$ e $\delta = \varepsilon$), temos portanto que $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ aplicando a terceira propriedade $n \in \mathbb{N}$ vezes seguidas com o primeiro limite, $\lim_{x\to a} a_n x^n = a_n a^n$ pela segunda propriedade com $a_n \in \mathbb{R}$ e, por fim, $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{m} a_n x^n = \sum_{n=0}^{m} a_n a^n$ aplicando-se a primeira propriedade $m+1 \in \mathbb{N}$ vezes seguidas.

Desse modo vê-se que qualquer função polinomial no corpo dos reais é contínua em todos os seus pontos, dado que n, m e a_j para $j \in \{1, 2, ..., m\}$ e $a \in \mathbb{R}$ são todos números arbitrários.

Definição de derivada:

A derivada de uma função é uma nova função $f' : A' \to R$, onde $A' \subset A$ e é definida por

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Por tal definição, podem ser provadas, como foram feitas na seção 7.7 de (GUIDORIZZI, 2001), as seguintes propriedades:

Dado que f e g são funções definidas e deriváveis em $A \subset R$, suas derivadas têm como domínio A' e definindo-se as funções $f+g$, kf ($k \in \mathbb{R}$) e fg como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(kf)(x) = kf(x)$ e $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$, temos que:

a)

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \forall x \in A'.$$

b)

$$(kf)'(x) = kf'(x), \forall x \in A'.$$

c)

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \forall x \in A'.$$

Derivada da função $f(x) = x^n$:

Pela definição de derivada, tendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x}.$$

Definindo $t = x+h$, quando h se aproxima de 0, t se aproxima de x e temos que o limite se torna:

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{t^n - x^n}{t - x}.$$

Como $t^n - x^n = (t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + ... + t^2x^{n-3} + tx^{n-2} + x^{n-1})$, então $\frac{t^n - x^n}{t-x} = t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + ... + t^2x^{n-3} + tx^{n-2} + x^{n-1}$ para $t \neq x$, que é o caso no limite, pois embora t se aproxime de x, ele não irá se igualar a x pela definição de limite.

Desse modo,

$$f'(x) = \lim_{t\to x} t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + ... + t^2x^{n-3} + tx^{n-2} + x^{n-1}.$$

Como tal função é uma função polinomial em t e acabamos de ver que todo polinômio no corpo dos reais é contínuo, temos portanto que

$$f'(x) = (n-1)x^{n-1}.$$

Importante observação: Aqui consideramos que x e h eram números reais, no entanto, para as considerações que fizemos sobre polinômios no corpo dos números complexos, deveríamos estender a derivada para tal corpo, e isto pode ser feito simplesmente ao se considerar que $x, h \in \mathbb{C}$ e adaptarmos a definição da derivada para que, em vez de h tender a zero, seja $|h|$ (módulo do complexo h) que tenda a 0 pois assim limitamos a liberdade das duas coordenadas de h no plano de Argand-Gauss e a prova segue análoga.

Derivada da função polinomial $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$:

Aplicando sequencialmente as propriedades anteriores de derivada e usando a derivada que acabamos de provar, temos:

$f'(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n)' = (a_0)' + (a_1x + a_2x^2 + ...a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n)' = (a_0)' + (a_1x)' + (a_2x^2 + ...a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n)' = ... = (a_0)' + (a_1x)' + (a_2x^2)' + ... + (a_{n-1}x^{n-1})' + (a_nx^n)' = (a_0)' + a_1(x)' + a_2(x^2)' + ... + a_{n-1}(x^{n-1})' + a_n(x^n)' = 0 + a_1 + 2a_2x + ... + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}.$

Portanto, temos então que $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1$.

Derivada da função $g(x) = (f_1 f_2 ... f_n)(x)$**:**

Para encontrar tal derivada, vamos usar indução em n:

1. Casos iniciais:

   $n = 1$: $g(x) = f(x)$, logo $g'(x) = f'(x)$.

   $n = 2$: $g(x) = (f_1 f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ que, pela propriedade 3 de derivada, tem-se $g'(x) = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x)$.

2. Hipótese de indução: Suponha que, para $n = k \in \mathbb{N}$, temos:

   $g'(x) = f_1'(x) f_2(x) ... f_{k-1}(x) f_k(x) + f_1(x) f_2'(x) ... f_{k-1}(x) f_k(x) + ... + f_1(x) f_2(x) ... f_{k-1}'(x)$
   $f_k(x) + f_1(x) f_2(x) ... f_{k-1}(x) f_k'(x)$.

3. Passo indutivo: Vamos provar que, para $n = k+1$ é válido o resultado:

   $g'(x) = f_1'(x) f_2(x) ... f_k(x) f_{k+1}(x) + f_1(x) f_2'(x) ... f_k(x) f_{k+1}(x) + ... + f_1(x) f_2(x) ... f_k'(x)$
   $f_{k+1}(x) + f_1(x) f_2(x) ... f_k(x) f_{k+1}'(x)$.

   De fato, se $g(x) = f_1(x) f_2(x) ... f_k(x) f_{k+1}(x)$, chamando $g_1(x) = f_1(x) f_2(x) ... f_k(x)$, temos $g(x) = g_1(x) f_{k+1}(x)$.

   Aplicando o caso inicial, temos que $g'(x) = g_1'(x) f_{k+1}(x) + g_1(x) f_{k+1}'(x) = g_1'(x) f_{k+1} + f_1(x) f_2(x) ... f_k(x) f_{k+1}'(x)$.

   Pela hipótese de indução, temos $g_1'(x) = f_1'(x) f_2(x) ... f_k(x) + f_1(x) f_2'(x) ... f_k(x) + ... + f_1(x) f_2(x) ... f_k'(x)$, de onde, por fim, temos o resultado:

   $g'(x) = f_1'(x) f_2(x) ... f_k(x) f_{k+1}(x) + f_1(x) f_2'(x) ... f_k(x) f_{k+1}(x) + ... + f_1(x) f_2(x) ... f_k'(x)$
   $f_{k+1}(x) + f_1(x) f_2(x) ... f_k(x) f_{k+1}'(x)$.

Dessa maneira, o resultado segue por indução e temos $(f_1 f_2 ... f_n)'(x) = f_1'(x) f_2(x) ... f_k(x) + f_1(x) f_2'(x) ... f_k(x) + ... + f_1(x) f_2(x) ... f_k'(x)$.

Derivada da função $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$

Aplicando o que fora visto anteriormente, definindo $f_j(x) = x - x_j$ para $1 \leq j \leq n$, temos:

$f_j'(x) = 1$
$Q'(x) = f_1'(x) f_2(x) ... f_n(x) + f_1(x) f_2'(x) ... f_n(x) + ... + f_1(x) f_2(x) ... f_n'(x) \Rightarrow$
$Q'(x) = 1 \cdot f_2(x) ... f_n(x) + f_1(x) \cdot 1 \cdot ... f_n(x) + ... + f_1(x) f_2(x) ... f_{n-1}(x) \cdot 1 \Rightarrow$
$Q'(x) = (x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)...(x - x_n) + ... + (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1})$.