



**PROFMAT**

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática



**UFPB**

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

# O Cálculo Diferencial e Integral como Ferramenta Indispensável ao Estudo de Modelos de Física Mecânica e as Leis do Movimento Planetário †

por

**Eduardo Jorge Barros de Deus e Mello Filho**

sob orientação do

**Prof. Dr. Carlos Bocker Neto**

sob coorientação do

**Prof. Me. Gilmar Otávio Correia**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013

João Pessoa - PB

---

† Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

# O Cálculo Diferencial e Integral como Ferramenta Indispensável ao Estudo de Modelos de Física Mecânica e as Leis do Movimento Planetário

por

Eduardo Jorge Barros de Deus e Mello Filho

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Cálculo e Física.

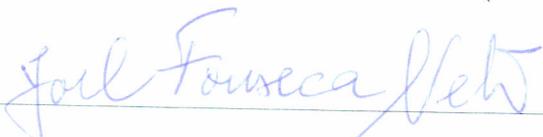
Aprovada por:



Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB (Orientador)



Prof. Me. Gilmar Otávio Correia - UFPB (Coorientador)



Prof. Dr. Joel Batista da Fonseca Neto - UFPB



Prof. Dr. José Vicente Moreira - UNIPÊ

Agosto/2013

# Agradecimentos

Quero agradecer aos professores Carlos Bocker, Gilmar Correia, e Joel por terem me auxiliado na execução deste trabalho que finaliza mais uma etapa da minha vida como estudante.

Gostaria de agradecer aos meus pais por terem me educado e me dado oportunidade de frequentar as melhores escolas, além de toda atenç ao e carinho que me dão em casa.

Agradecer ao amigo Beraldo por ter sido muito importante no meu aprendizado de física e por ter sido um grande companheiro junto com Marcos, Bravo e Jairo.

Também preciso lembrar dos meus amigos, tios e tias, além dos primos que sempre estiveram por perto, se preocupando e me divertindo nas horas de descanso.

Não poderia esquecer de ser grato ao importante João do Ó, por ter acreditado em nossa turma junto com nossos demais professores.

E pra finalizar, agradecer a companhia dos colegas de mestrado, dando uma importância muito maior a Gleidson, Cleiton e Luiz, certamente, sem estes três, eu não teria ido muito longe no mestrado.

# Dedicatória

*Aos meus amigos Gleidson, Luiz e  
Cleiton e a minha família.*

# Resumo

Neste trabalho apresentamos os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral necessários para modelar matematicamente alguns conceitos de física voltados ao movimento. Apresentamos também situações físicas que são possíveis de modelar com o ferramental matemático do ensino médio, além de sugestões de ideias matemáticas de conteúdo do ensino superior que poderiam ser colocadas para os alunos do ensino médio enriquecendo estes de meios para discutir problemas mais complexos da física do movimento.

**Palavras-chave:** Cálculo, Física, Leis de Kepler.

# Abstract

We present the concepts of Differential and Integral Calculus needed to mathematically model some physics concepts geared to the movement. We also present physical situations that are possible to model the mathematical tools of high school, as well as suggestions for ideas mathematical content of higher education that could be posed to high school students enriching media to discuss these problems more complex physics movement.

**Keywords:** Calculus, Physics, Laws of Kepler.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	Limites . . . . .	1
1.1.1	Ideia Intuitiva de Limite . . . . .	1
1.1.2	Definição Formal de Limite . . . . .	2
1.1.3	Propriedades Operatórias dos Limites . . . . .	2
1.2	Continuidade . . . . .	3
1.2.1	Ideia Intuitiva de Continuidade . . . . .	3
1.2.2	Definição Formal de Continuidade . . . . .	3
1.2.3	Continuidade em um Intervalo . . . . .	3
1.2.4	Propriedades da Continuidade . . . . .	4
1.3	Derivada . . . . .	5
1.3.1	Definição de Derivada . . . . .	5
1.3.2	Interpretação Geométrica da Derivada . . . . .	6
1.3.3	Derivada da Função Constante . . . . .	6
1.3.4	Derivada da Função Potência . . . . .	6
1.3.5	Propriedades Operatórias da Derivada . . . . .	7
1.3.6	Derivada de Funções Trigonométricas . . . . .	8
1.3.7	Regra da Cadeia . . . . .	9
1.3.8	Reta Tangente . . . . .	10
1.3.9	Máximos e Mínimos de uma Função . . . . .	11
1.4	Antiderivada . . . . .	12
1.4.1	Definição de Antiderivada . . . . .	12
1.4.2	Propriedades da Antiderivada . . . . .	13
1.4.3	Integral Definida . . . . .	14
1.4.4	Soma de Riemann . . . . .	14

1.4.5	Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .	15
1.5	Produto Escalar . . . . .	18
1.5.1	Propriedades do Produto Escalar . . . . .	18
1.6	Produto Vetorial . . . . .	19
1.6.1	Interpretação Geométrica da Norma do Produto Vetorial . . . . .	20
1.6.2	Propriedades do Produto Vetorial . . . . .	21
1.7	Curvas no Plano e no Espaço . . . . .	22
1.7.1	Funções Vetoriais e Curvas no Espaço . . . . .	22
1.7.2	Limites, Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais . . . . .	23
1.8	Coordenadas Polares . . . . .	25
1.8.1	Relação entre Coordenadas Polares e Coordenadas Cartesianas . . . . .	26
1.8.2	Áreas em Coordenadas Polares . . . . .	27
1.9	Equação Polar das Cônicas . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Movimento de uma Partícula</b>	<b>30</b>
2.1	Cinemática da Partícula . . . . .	30
2.1.1	Posição . . . . .	30
2.1.2	Deslocamento . . . . .	30
2.1.3	Velocidade Média . . . . .	31
2.1.4	Velocidade Instantânea . . . . .	31
2.1.5	Aceleração . . . . .	33
2.1.6	Aceleração Instantânea . . . . .	33
2.2	Modelamento do Movimento Retilíneo Através do Cálculo . . . . .	34
2.3	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado . . . . .	34
2.4	Fórmulas do Movimento Uniformemente Variado Através do Cálculo . . . . .	36
2.5	Movimento Curvilíneo de um Ponto Material ou Partícula . . . . .	37
2.5.1	Vetor Posição . . . . .	37
2.5.2	Velocidade . . . . .	38
2.5.3	Velocidade Escalar . . . . .	38
2.5.4	Aceleração . . . . .	39
2.6	Análise Vetorial do Movimento em Duas Dimensões . . . . .	39
2.7	Equações do Movimento nas Componentes Radial e Transversal . . . . .	40
2.7.1	Componente Radial e Transversal do Movimento Curvilíneo . . . . .	40

---

2.7.2	Momento Angular . . . . .	42
2.7.3	Movimento sob Ação de uma Força Central . . . . .	43
2.7.4	Velocidade Areolar . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Leis de Newton, Trabalho e Energia</b>	<b>46</b>
3.1	Primeira Lei de Newton . . . . .	46
3.1.1	Quantidade de Movimento . . . . .	47
3.2	Segunda Lei de Newton . . . . .	47
3.3	Terceira Lei de Newton . . . . .	48
3.4	Trabalho de uma Força Constante . . . . .	48
3.4.1	Análise Gráfica para Força Constante . . . . .	49
3.5	Definição de Trabalho Através do Cálculo . . . . .	50
3.6	Energia . . . . .	51
3.6.1	Energia Potencial . . . . .	51
3.6.2	Energia Cinética . . . . .	52
3.6.3	Teorema do Trabalho - Energia Cinética com Força Constante	52
3.6.4	Teorema do Trabalho - Energia Cinética com Força Variável	52
<b>4</b>	<b>Leis de Kepler</b>	<b>54</b>
4.1	Leis de Kepler . . . . .	54
4.1.1	Considerações Iniciais . . . . .	54
4.1.2	Leis de Newton . . . . .	55
4.1.3	Movimento Planetário . . . . .	56
4.2	Segunda Lei de Kepler . . . . .	71
4.3	Terceira Lei de Kepler . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Aplicações ao ensino médio</b>	<b>75</b>
5.1	Aplicação de Limites e Derivadas no Movimento Uniformemente Va- riado . . . . .	75
5.2	Aplicação de Integral Usando o Conceito de Trabalho de uma Força	77
5.3	Aplicação a Leis de Kepler . . . . .	78
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>80</b>

# Introdução

Datam de 2400 a.C., os registros mais antigos de matemática. Os homens passaram a refletir cada vez mais sobre seus conhecimentos e, dessa forma, buscaram uma evolução cada vez maior do raciocínio matemático, a fim de buscar maneiras de contribuir para uma evolução social.

No começo as tribos só se preocupavam com problemas simples, tais como contagens, medidas de comprimento e áreas simples. Com o passar do tempo a vida passou a exigir cada vez mais conhecimento e capacidade de solução de problemas mais complexos. Com isso a matemática evoluiu com o tempo se tornando cada vez mais eficiente quanto as aplicações.

O grego Euclides foi um dos primeiros a mostrar de forma organizada a construção e provas de teoremas da geometria que são utilizados até os dias atuais. Uma ciência que fez com que a matemática evoluísse bastante foi a Astrologia devido a exatidão cada vez maior na localização dos astros. Sendo assim, a matemática começou como uma ciência que se preocupava apenas com contagem e medições e passou cada vez mais a formular modelos mais complexos afim de resolver problemas até então insolúveis com a matemática conhecida.

O cálculo diferencial e integral é um exemplo do avanço da matemática a fim de auxiliar outras ciências. Com os estudos de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), passou-se a solucionar uma grande quantidade de problemas que antes eram difíceis ou impossíveis de serem solucionados e que preocupavam grandes pensadores da época.

---

A maior qualidade do cálculo diferencial e integral é a de ser uma ótima ferramenta capaz de resolver problemas de tangência, quadratura, retificação de arcos e outros que já haviam surgido e seguem sendo úteis até os dias atuais. Newton trabalhou nesta construção por querer resolver problemas de mecânica relacionados ao movimento, por outro lado, Leibniz se inspirou em conceitos geométricos dos trabalhos de Pascal e Cavalieri.

Para encontrar retas tangentes a curvas, assunto que já perturbava a muito tempo os pensadores os estudos de Newton e Leibniz foram fundamentais para a solução deste problema. O Cálculo diferencial e integral auxiliou muito os conhecimentos de Física.

Esta área de conhecimento, a Física, tem como principal objetivo, a compreensão dos fenômenos naturais.

Assim, teorias físicas são construções que têm por base os fenômenos naturais observados tendo como finalidade explicá-los e, neste caso, a matemática é a ferramenta capaz de explicar os resultados esperados.

A utilização da matemática como uma ferramenta no apoio ao estudo da física, embora pareça óbvia, é recente historicamente. Tem-se registros de que Arquimedes usou um pouco de matemática a fim de enriquecer alguns estudos em física, mas o real início de um tratamento intenso e moderno da matemática como uma ferramenta que auxilia a física para os estudos de Galileo Galilei e Isaac Newton.

Primeiramente a matemática auxilia a física no tratamento numérico das grandezas. Como a matemática, a física também era uma ciência simples a principio e não necessitava de uma matemática muito complicada, sendo assim, certas contagens ou medições de comprimento, tempo, velocidade ou temperatura já ajudavam bastante na qualificação de sistemas físicos. Os físicos tinham assim um resultado numérico para suas grandezas que poderiam ser analisados e comparados com o intuito de entender melhor o funcionamento dos fenômenos e leis físicas.

---

Com as exigências da física e de outras ciências, a matemática foi evoluindo e tornando-se cada vez mais importante nestas áreas de conhecimento. No caso da física, modelos matemáticos cada vez mais sofisticados podem fazer com que novas leis ou sistemas apareçam derivados de sistemas básicos e funcionem somente baseados em evidências experimentais já estudadas e numa lógica matemática capaz de prestar auxílio aos experimentos. Por fim, ainda pode-se construir uma teoria mais abrangente a partir de alguns princípios que sejam capazes de agregar, em uma determinada situação, leis empíricas conhecidas dentro de um determinado sistema, a partir do ferramental matemático disponível.

A teoria física da gravitação de Newton é um grande exemplo do que foi citado, pois dela derivam todas as leis referentes à queda de corpos e dela também pode-se obter com exatidão as leis de Kepler sobre o movimento dos planetas.

O cálculo diferencial e integral descoberto com o intuito de resolver problemas de mecânica terminou por inspirar outros físicos da época que estudaram assuntos bastante diversos daqueles estudados por Newton e Leibniz.

Jean-Baptiste Joseph Fourier, matemático e físico francês, ficou muito famoso ao aplicar na resolução de problemas de condução de calor as séries que foram batizadas com o seu nome. Andre-Marie Ampère (1775-1836), físico, filósofo e matemático francês, foi de fundamental importância ao descobrir a regra que determina o sentido do campo magnético gerado por uma corrente elétrica. Também foi ele quem descobriu que atração e repulsão magnéticas também ocorrem entre correntes elétricas em condutores paralelos. Ampère teve talento para compreender fenômenos magnéticos e foi muito importante para a evolução do estudo da eletricidade, visto que através dos seus estudos em eletromagnetismo abriu-se um grande caminho para os estudos de eletricidade.

Johann Friedrich Gauss (1777-1855), matemático, astrônomo e físico alemão, formulou uma lei muito importante no estudo de eletromagnetismo baseada na ideia de

---

fluxo do campo elétrico. Gauss, através de pensamentos abstratos conseguiu construir uma fórmula através da qual ele calculou o fluxo do campo elétrico gerado por uma ou mais partículas eletricamente carregadas através de uma superfície fechada. O cálculo acima citado se assemelha ao cálculo do público de um estádio, tendo como base de cálculo o fluxo de saída de pessoas. A grande ideia de Gauss faz da sua lei uma extraordinária ferramenta para o estudo do campo elétrico além de ter inúmeras aplicações teóricas e práticas. Através da lei de Gauss podemos deduzir a lei de atração e repulsão de Coulomb ou calcular o campo elétrico gerado por uma placa carregada de dimensões infinitas.

James Clerk Maxwell (1831-1879), Físico e Matemático, britânico, considerado o iniciador da física matemática é responsável pela interpretação moderna de vários fenômenos. Dedicou-se mais ao eletromagnetismo e ao estudo das ondas eletromagnéticas publicando o livro "A Treatise on Electricity and Magnetism", no qual apresenta a formulação matemática das leis do eletromagnetismo conhecidas como Equações de Maxwell.

Assim se nota que a física e a matemática são ciências que evoluíram juntas, uma apoiando a outra. Quando na física surgiam novos problemas sem solução prática, a matemática precisava evoluir para atender à "demanda" e a matemática, evoluindo com suas abstrações também deixou modelos em aberto que posteriormente foram usados pelos físicos. Por este motivo pode-se notar que vários dos maiores matemáticos antigos eram também físicos.

Modelos físicos, em algumas oportunidades são muito complexos e exigem que eles sejam fundamentados em termos altamente abstratos, e com isso a matemática se mistura cada vez mais com a física. Encerramos com as citações:

Segundo Galileu Galilei, “a natureza está escrita em caracteres matemáticos” .

Para Francis Bacon “a medida que a Física avança cada vez mais e desenvolve novos axiomas, ela exige uma ajuda pronta da Matemática”.

---

O Físico John Polkinghorne, de Cambridge, escreveu em 1986: “A Matemática é a chave abstrata que abre as portas do Universo físico”.

Neste trabalho, será feito um estudo preliminar de alguns conceitos de Cálculo Diferencial e Integral e de Geometria. Depois estes conceitos serão utilizados no intuito de construir modelos matemáticos capazes de definir conceitos físicos de Movimento, Trabalho e Energia para que no final seja possível, através deles, abordar as Leis de Kepler do movimento planetário.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo será apresentado um breve resumo de alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral que serão utilizados no decorrer do trabalho.

Sempre serão utilizadas funções definidas num intervalo ou numa união finita de intervalos não degenerados (ou seja, intervalos que não se reduzem a um único ponto).

### 1.1 Limites

#### 1.1.1 Ideia Intuitiva de Limite

Seja  $f$  uma função, se os valores de  $f(x)$  puderem ser tão próximos quanto quisermos de  $L$ , fazendo  $x$  suficientemente próximo de  $b$ , então escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$$

Ou seja, o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $b$  é igual a  $L$ . De outra forma, isso significa que os valores de  $f(x)$  ficam cada vez mais próximos do número  $L$  à medida que  $x$  tende ao número  $b$ , mas  $x \neq b$ .

Visto que é preciso que  $x \neq b$ , então a  $f(x)$  não precisa ser definida no ponto  $x = b$ .

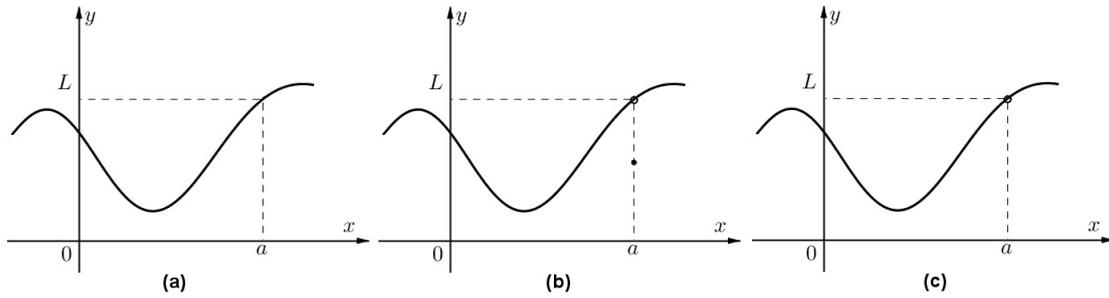


Figura 1.1

Nas três funções acima o limite quando  $x$  tende a  $a$  é igual a  $L$ , e podemos notar que no segundo gráfico  $f(a) \neq L$  e no terceiro não existe  $f(a)$ .

### 1.1.2 Definição Formal de Limite

**Definição 1.1** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida num intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}$ , tal que  $(a - \gamma, a + \gamma) \cap I \neq \emptyset$  para todo  $\gamma > 0$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $a$  é igual a  $L \in \mathbb{R}$  quando para todo  $\epsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que*

$$0 < |x - a| < \delta, x \in I \Rightarrow |f(x) - L|, \epsilon.$$

**Exemplo 1.1** *Prove que  $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5 = 7$ .*

**Solução:** Dado  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ . Assim se  $0 < |x - 3| < \delta$  então  $|(4x - 5) - 7| = |4(x - 3)| < \epsilon$ , o que prova que  $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5 = 7$ .

■

### 1.1.3 Propriedades Operatórias dos Limites

**Teorema 1.1** *Seja  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = K$  e  $c \in \mathbb{R}$ , temos que:*

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x) \pm g(x)) = c \cdot L \pm K.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot K$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{K}, \text{ com } K \neq 0.$$

**Demonstração:** Demonstraremos apenas a primeira propriedade, as demais podem ser encontradas em [12]. Por hipótese  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = K$  e  $c \in \mathbb{R}$ , inicialmente provemos que  $\lim_{x \rightarrow a} c.f(x) = c.L$ . Se  $c = 0$ ,  $c.f(x) = 0$  para todo  $x \in D_f$ , logo  $\lim_{x \rightarrow a} c.f(x) = 0 = c.L$ . Se  $c \neq 0$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|}$ .  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |c.f(x) - c.L| < \epsilon \Rightarrow c.|f(x) - L| < \epsilon$ . Agora mostra-se que:  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + K$ .  $|f(x) + g(x) - (L + K)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - K|$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$  e  $|g(x) - K| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| + |g(x) - K| < \epsilon$ .

Com isso:

$$\lim_{x \rightarrow a} (c.f(x) \pm g(x)) = c.L \pm K.$$

■

## 1.2 Continuidade

### 1.2.1 Ideia Intuitiva de Continuidade

Intuitivamente, dizemos que uma função é contínua quando seu gráfico não apresenta interrupções, isto é, para que uma função  $f$  seja contínua em um ponto  $x = b$  é necessário que a função esteja definida em  $b$  e que os valores de  $f(x)$ , para  $x$  próximos de  $b$ , estejam próximos de  $f(b)$ .

### 1.2.2 Definição Formal de Continuidade

Uma função  $f$  é dita contínua num ponto  $b$  se:

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b).$$

**Observação 1.1** *Se uma função não é contínua em um ponto  $b$ , dizemos que ela é descontínua neste ponto.*

### 1.2.3 Continuidade em um Intervalo

Uma função  $f$  é contínua em um intervalo aberto  $(a, b)$  se for contínua em todos os valores de  $x$  contidos neste intervalo.  $f$  é dita contínua no intervalo fechado

$[a, b]$  se for contínua no intervalo aberto  $(a, b)$  e além disso  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

### 1.2.4 Propriedades da Continuidade

1. Toda função polinomial é contínua em todos os reais.
2. Toda função racional (quociente de polinomiais) é contínua em seu domínio.
3. As funções  $f(x) = \text{sen}(x)$  e  $f(x) = \text{cos}(x)$  são contínuas para todo número real  $x$ .
4. A função exponencial  $f(x) = e^x$  é contínua para todo número real  $x$ .
5. Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas em um ponto  $b$ , então:
  - (a)  $f + g$  é contínua em  $b$ ;
  - (b)  $f - g$  é contínua em  $b$ ;
  - (c)  $f \cdot g$  é contínua em  $b$ ;
  - (d)  $\frac{f}{g}$  é contínua em  $b$ , desde que  $g(b) \neq 0$ ;
6. Sejam  $f$  e  $g$  funções tais que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  e  $g$  é contínua em  $a$ , então:
 
$$\lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = g[\lim_{x \rightarrow a} (f(x))]$$
7. Se  $f$  é contínua em  $a$  e  $g$  é contínua em  $f(a)$ , então a função composta  $g \circ f$  é contínua em  $a$ .
8. Seja  $y = f(x)$  definida e contínua em um intervalo real  $I$ . Seja  $J = \text{Im}(f)$ . Se  $f$  admite uma função inversa  $f^{-1} : J \rightarrow I$  então  $f^{-1}$  é contínua em todos os pontos de  $J$ .

**Observação 1.2** *Devido a esta propriedade, a função  $f(x) = \ln(x)$  é contínua em todo o seu domínio uma vez que é a inversa da função exponencial, que é contínua.*

## 1.3 Derivada

### 1.3.1 Definição de Derivada

A derivada de uma função  $f$  em um ponto  $a$ , denotada por  $f'(a)$ , é definida por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existir.

Escrevendo  $x = a + h$ , teremos uma segunda forma de escrever a definição de derivada.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**Exemplo 1.2** *Encontre a derivada da função  $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$  em  $a$ .*

**Solução:**

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4(a+h)^2 - 2(a+h) + 3] - 4a^2 + 2a - 3}{h} \\ f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 + 8ah - 2h}{h} \\ f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4h + 8a - 2)}{h} \\ f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} (4h + 8a - 2) \\ f'(a) &= 8a - 2 \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.2** *Se  $f$  é uma função derivável em um ponto  $a$  então  $f$  é contínua em  $a$ .*

**Demonstração:** Como  $f$  é derivável em  $a$ , temos  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ . Sendo  $x \neq a$ ,  $f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$ , com isso:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \lim_{x \rightarrow a} (x - a).$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

■

### 1.3.2 Interpretação Geométrica da Derivada

A reta tangente a  $y = f(x)$  em  $(a, f(a))$  é a reta que passa em  $(a, f(a))$  e que tem inclinação igual a a derivada de  $f$  em  $a$ , que é  $f'(a)$ .

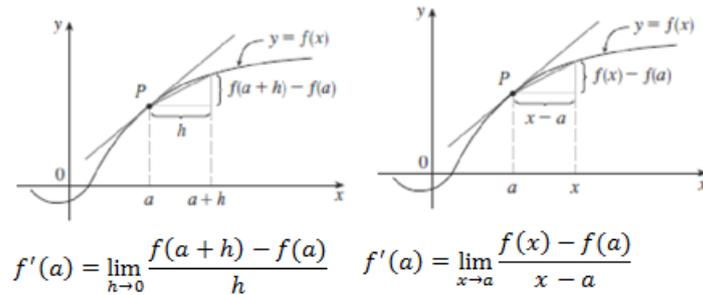


Figura 1.2

Se  $f'(a) > 0$  em  $I$  então  $f(a)$  é crescente. Caso  $f'(a) < 0$  em  $I$  então  $f(a)$  é decrescente.

### 1.3.3 Derivada da Função Constante

O gráfico da função constante  $f(x) = c$  é uma reta horizontal  $y = c$ , cuja inclinação é 0. De fato,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

### 1.3.4 Derivada da Função Potência

**Proposição 1.1** *Seja a função  $f(x) = x^n$ , tem-se que  $f'(a) = n.a^{n-1}$ .*

**Demonstração:** Tem-se que:  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n - a^n}{x - a}$

Note que:  $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}.a + \dots + x.a^{n-2} + a^{n-1})$

Com isso:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} (x^{n-1} + x^{n-2}.a + \dots + x.a^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}.a + \dots + a.a^{n-2} + a^{n-1} \\ &= n.a^{n-1} \end{aligned}$$

■

### 1.3.5 Propriedades Operatórias da Derivada

**Teorema 1.3** *Sejam  $f, g$  duas funções e  $c \in \mathbb{R}$ , tem-se que:*

1.  $[c.f(x) \pm g(x)]' = c.f'(x) \pm g'(x)$ .
2.  $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ .

*Ou seja, a derivada do produto de duas funções é igual ao produto da derivada da primeira função com a segunda função, somado ao produto da primeira função com a derivada da segunda função.*

3.  $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$ .

*Ou seja, a derivada do quociente de duas funções é igual ao produto da derivada da primeira função com a segunda função, menos o produto da primeira função com a derivada da segunda, isso tudo dividido pela segunda função elevada a dois.*

**Demonstração:** Demonstraremos apenas (2) e (3), uma vez que a prova de (1) é mais simples e será deixada para o leitor.

2.  $h(x) = f(x).g(x)$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Subtraindo e somando  $f(x + \Delta x).g(x)$  ao numerador resulta em:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x).g(x) + f(x + \Delta x).g(x) - f(x).g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ f(x + \Delta x). \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x). \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ f(x + \Delta x). \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ g(x). \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x). \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x). \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Lembrando que toda função derivável num ponto também é derivável nesse ponto, concluímos que

$$h'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x)$$

3. Sendo  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x) - f(x).g(x + \Delta x)}{\Delta x.g(x).g(x + \Delta x)} \end{aligned}$$

Subtraindo e somando  $f(x).g(x)$  no numerador resulta em:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x) - f(x).g(x) - f(x).g(x + \Delta x) + f(x).g(x)}{\Delta x.g(x).g(x + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[ g(x). \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] - \left[ f(x). \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]}{g(x).g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x). \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x). \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x). \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x)} \\ &= \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g(x).g(x)} \end{aligned}$$

Chegando assim ao resultado de que:

$$h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

■

### 1.3.6 Derivada de Funções Trigonômétricas

**Teorema 1.4** Se  $f(x) = \text{sen } x$  e  $g(x) = \text{cos } x$  então:

1.  $f'(x) = \text{cos } x$

2.  $g'(x) = -\text{sen } x$

**Demonstração:** Usando o fato de que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1$  e  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{cos } \theta - 1}{\theta} = 0$  (A demonstração pode ser encontrada em Stewart [9], página 210. ) Temos que:

1.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \cos x \text{sen } h - \text{sen } x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \text{sen } x \left( \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left( \frac{\text{sen } h}{h} \right) \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen } x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_0 + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h}}_1 \\
f'(x) &= \cos x
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \text{sen } x \text{sen } h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \frac{\text{sen } x \text{sen } h}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_0 - \lim_{h \rightarrow 0} \text{sen } x \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h}}_1 \\
f'(x) &= -\text{sen } x
\end{aligned}$$

■

### 1.3.7 Regra da Cadeia

**Teorema 1.5** *Sejam  $y = h(u)$  e  $u = g(x)$  duas funções deriváveis, com  $\text{Im } g \subseteq D_h$ , e consideremos a função composta  $y = f(x) = h \circ g = h[g(x)]$ . Então  $f$  é derivável e  $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$ ,  $\forall x \in D_g$ .*

*Na notação de Leibniz teríamos:  $\frac{df}{dx} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ .*

**Demonstração:** Vamos demonstrar o teorema apenas no caso em que existe um intervalo  $(x - \delta, x + \delta)$  em torno de  $x$  tal que,  $g(x) \neq g(y)$  para todo  $y \in (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}$ . Seja  $u = g(x)$ , e defina  $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ .

Assim,  $\Delta u \neq 0$ , desde que  $\Delta x$  esteja bem próximo de zero, mas diferente de zero. Além disso  $\Delta u \rightarrow 0$ , quanto  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Dessa forma,  $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$  e podemos escrever:

$$h(g(x)) = h(u) \text{ e } h(g(x + \Delta x)) = h(u + \Delta u)$$

Com isso,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(u + \Delta u) - h(u)}{\Delta x}$ .

Como  $\Delta u \neq 0$ , para  $\Delta x \neq 0$ , podemos escrever,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(u + \Delta u) - h(u)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(u + \Delta u) - h(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(u + \Delta u) - h(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= h'(u) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

O que conclui a prova do Teorema neste caso. O leitor interessado na prova do caso geral pode consultar [9].

■

**Exemplo 1.3** *Determine a derivada de  $F(x) = \text{sen}(x^3 + 2x^2)$*

**Solução:** Considerando que:  $f(x) = \text{sen}x$  e  $g(x) = x^3 + 2x^2$ , aplicando a regra da cadeia, tem-se:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \cos(x^3 + 2x^2) \cdot (x^3 + 2x^2)' \\ &= \cos(x^3 + 2x^2) \cdot (3x^2 + 4x) \end{aligned}$$

■

### 1.3.8 Reta Tangente

**Definição 1.2** *Seja  $y = f(x)$  uma função derivável em um ponto  $a \in D_f$ , a reta tangente ao gráfico de  $y = f(x)$  no ponto  $(a, f(a))$  é a reta que passa em  $(a, f(a))$  cuja inclinação é igual a  $f'(a)$ .*

*Assim, usando a equação da reta, tem-se que a equação da reta tangente à curva  $y = f(x)$  no ponto  $(a, f(a))$  é dada por*

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a).$$

**Exemplo 1.4** *Encontre a equação da reta tangente a parábola  $y = x^2 - 8x + 9$  no ponto  $(3, -6)$ .*

**Solução:** Note que  $f'(x) = 2x - 8$ . Assim,  $f'(3) = 2 \cdot 3 - 8 = -2$ .

Sendo assim, a equação da reta tangente será dada por  $y - (-6) = -2(x - 3)$ , isto é  $y = -2x$ .

■

### 1.3.9 Máximos e Mínimos de uma Função

Uma das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são em problemas de otimização. Esses problemas podem ser resolvidos encontrando os valores de máximo e mínimo e onde ocorrem de uma função.

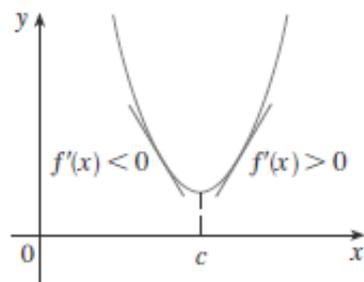
Uma função  $f$  tem um máximo absoluto em  $c$  se  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x$  em  $D_f$ , onde  $D_f$  é o domínio de  $f$ . O número  $f(c)$  é chamado de valor máximo de  $f$  em  $D_f$ . Analogamente,  $f$  tem um mínimo absoluto em  $c$  se  $f(c) \leq f(x)$  para todo  $x$  em  $D_f$ , e o número  $f(c)$  é chamado de valor mínimo de  $f$  em  $D_f$ . Os valores máximos e mínimos de  $f$  são chamados de valores extremos de  $f$ .

Uma função  $f$  tem um máximo local em  $c$  se  $f(c) \geq f(x)$  quando  $x$  estiver próximo de  $c$ . Analogamente,  $f$  tem um mínimo local em  $c$  se  $f(c) \leq f(x)$  quando  $x$  estiver próximo de  $c$ .

**Teorema 1.6 (Teorema de Fermat)** *Se  $f$  possuir um máximo ou mínimo local em  $c$ , e  $f'(c)$  existir, então  $f'(c) = 0$ .*

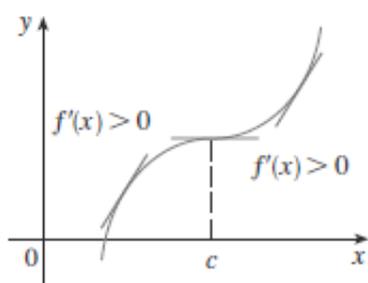
Então, pelo Teorema de Fermat, encontra-se os candidatos a ponto de máximo ou de mínimo da função, caso ele exista, derivando a função e igualando-a a zero. Para descobriremos se o ponto encontrado é de máximo ou mínimo, temos que analisar as derivadas nas proximidades do ponto encontrado.

Pode-se ver a análise nas figuras abaixo, sabendo que  $f'(c) = 0$



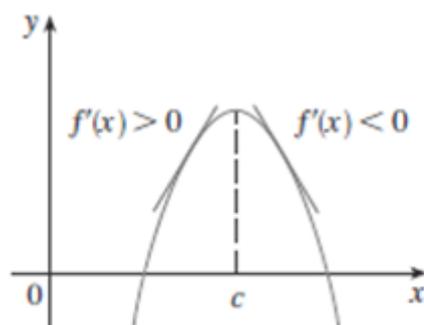
$(c, f(c))$  é um ponto de mínimo local

Figura 1.3



$(c, f(c))$  não é ponto de máximo nem de mínimo local

Figura 1.4



$(c, f(c))$  é um ponto de máximo local.

Figura 1.5

## 1.4 Antiderivada

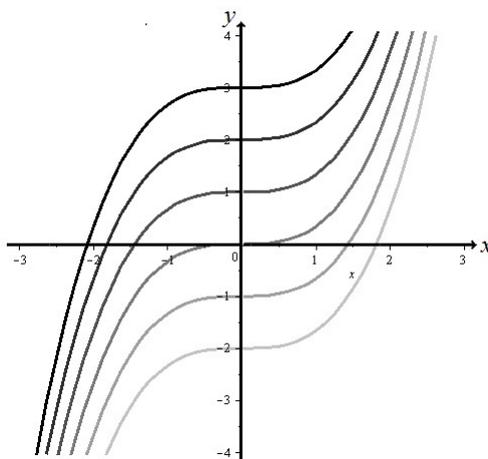
### 1.4.1 Definição de Antiderivada

Uma função  $F$  é chamada antiderivada de  $f$  sobre um intervalo  $I$  se:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

**Exemplo 1.5**  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$  é uma primitiva de  $f(x) = x^2$ .

Nota-se também que se adicionarmos uma constante a  $F(x)$ , esta nova função continuará sendo uma antiderivada de  $f(x)$ . Com isso temos que  $f(x)$  tem uma infinidade de antiderivadas todas no formato  $F(x) + C$  onde  $C$  é uma constante arbitrária. Pode-se dizer que  $f(x)$  possui uma família de antiderivadas. Na figura abaixo pode-se visualizar alguns membros desta família.



**Figura 1.6**

Com isso a solução será  $F'(x) = x^2 + C$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária.

**Observação 1.3** Denotemos a partir de agora o símbolo  $\int$  para denotar a operação de antidiferenciação.

### 1.4.2 Propriedades da Antiderivada

1.  $\int dx = x + C$ .
2.  $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$ , onde  $a$  é uma constante.
3.  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ .
4.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  se  $n \neq -1$ .

### 1.4.3 Integral Definida

Se  $f$  é uma função de  $x$ , então a sua integral definida está restrita à valores em um intervalo específico, digamos  $a \leq x \leq b$ . O resultado é um número que depende apenas de  $a$  e de  $b$ , e não de  $x$ .

**Definição 1.3** *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$ . Suponha que este intervalo seja dividido em  $n$  partes iguais cada um com largura  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  e seja  $x_j$  um número pertencente ao  $j$ -ésimo intervalo, para  $j = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ . Neste caso, a integral definida de  $f$  em  $[a, b]$  é denotada por:*

$$\int_a^b f(x)dx \text{ é dada por } \int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=1}^n f(x_j) \right] \Delta x, \text{ se este existir.}$$

Pode-se mostrar que se a função  $y = f(x)$  é contínua no intervalo  $[a, b]$ , então ela é integrável em  $[a, b]$ .

### 1.4.4 Soma de Riemann

Suponha que  $y = f(x)$  seja contínua e positiva em um intervalo  $[a, b]$ . Dividimos este intervalo em  $n$  sub-intervalos de comprimentos iguais, ou seja, de comprimento  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  de modo que  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ . Seja  $x_j$  um ponto qualquer no sub-intervalo  $[a_{k-1}, a_k]$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . Construimos em cada um desses sub-intervalos retângulos com base  $\Delta x$  e altura  $f(x_j)$ , conforme a figura abaixo:

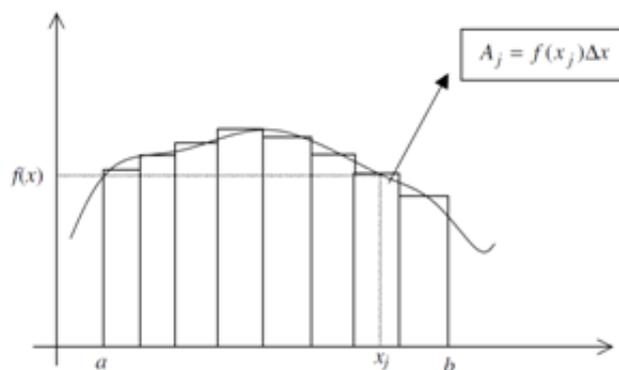


Figura 1.7

A soma das áreas dos  $n$  retângulos construídos é dada pelo somatório das áreas de cada um deles, isto é:

$$A_{\text{retangulos}} = \left[ \sum_{j=1}^n f(x_j) \right] \cdot \Delta x$$

Nota-se que a medida que o número de subintervalos cresce, os intervalos ficam cada vez mais finos, visto que o valor de  $\Delta x$  diminui e conseqüentemente o somatório anterior converge para a área da região limitado pelo gráfico da função positiva, pelo eixo  $x$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ . Portanto a área da região é dada por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=1}^n f(x_j) \right] \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

**Observação 1.4** Na definição de integral definida consideramos uma função contínua qualquer, que pode assumir valores negativos. No caso da interpretação geométrica da integral dessas funções, teríamos que colocar que a área é igual ao oposto do resultado da integral. Portanto, se  $f(x) < 0$  para  $x \in [a, b]$ , então a área limitada pela função, o eixo  $x$  e as retas  $x = a$  e  $x = b$  é dada por:

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

**Observação 1.5** O cálculo de uma integral definida através de sua definição pode ser muito trabalhosa para algumas funções. Portanto não se utiliza para calcular integrais definidas, e sim um teorema que é considerado um dos mais importantes do Cálculo, o qual enunciamos a seguir.

### 1.4.5 Teorema Fundamental do Cálculo

**Teorema 1.7** Se  $f$  for integrável em  $[a, b]$  e se  $F$  for uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Demonstração:** Supondo que  $f$  seja integrável em  $[a, b]$  e que admita uma primitiva  $F(x)$  em  $[a, b]$ , isto é,  $F'(x) = f(x)$  em  $[a, b]$ . Seja  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  de  $[a, b]$ , uma partição qualquer de  $[a, b]$ , podemos escolher, pelo Teorema do Valor Médio,  $\bar{c}_i$  em  $[x_{i-1}, x_i]$  tal que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\bar{c}_i) \Delta x_i \Rightarrow F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$$

Se, para cada partição  $P$  de  $[a, b]$  escolhermos convenientemente os  $\bar{c}_i$ , teremos

$$\lim_{\max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i = F(b) - F(a)$$

portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

■

**Teorema 1.8** *Seja  $f$  uma função **contínua** em um intervalo fechado  $[a, b]$ , se definirmos a função  $G$  por*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in [a, b]$$

então  $G$  é uma antiderivada de  $f$  em  $[a, b]$ .

**Demonstração:** Sendo  $a > c > b$  e  $f$  integrável em  $[a, b]$  temos  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$  e  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .

Sejam  $x$  e  $x+h$  pertencentes a  $[a, b]$ , então:

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt$$

logo,

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Consequentemente, se  $h \neq 0$ ,

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Sem perda de generalidade, se  $h > 0$ , então, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número  $z$  no intervalo aberto  $(x, x+h)$  tal que

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(z) \cdot h$$

e portanto,

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(z)$$

Como  $x < z < x+h$ , tem-se da continuidade de  $f$  que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(z) = \lim_{z \rightarrow x^+} f(z) = f(x)$$

e daí,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(z) = f(x)$$

De modo análogo para  $h < 0$  temos  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$ . Os dois limites unilaterais acima, implicam que

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

com isso, temos que

$$G'(x) = f(x),$$

ou seja,  $G$  é uma antiderivada de  $f$ . ■

Além disso, tomando  $F$  uma antiderivada de  $f$  e sendo  $G$  a antiderivada específica de  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ , como  $F$  e  $G$  são antiderivadas de  $f$ , temos que elas diferem apenas por uma constante, ou seja,

$$G(x) = F(x) + C$$

para todo  $x$  em  $[a, b]$ . Logo, como  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$  temos que,  $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$ , para todo  $x$  em  $[a, b]$ . Fazendo  $x = a$ , e lembrando que  $\int_a^a f(t)dt = 0$ , obtemos que

$$0 = F(a) + C$$

ou seja,

$$C = -F(a),$$

como  $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$  e  $C = -F(a)$ ,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Como essa identidade é válida para todo  $x$  em  $[a, b]$ , podemos substituir  $x$  por  $b$  e a variável  $t$  por uma outra  $x$ , obtemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Assim temos o seguinte Teorema Fundamental do Cálculo que pode ser enunciado da seguinte maneira:

**Teorema 1.9** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $F$  é uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então:*

1.  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$
2.  $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

## 1.5 Produto Escalar

**Definição 1.4** O produto escalar  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  de  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  e  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  é definido por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

**Definição 1.5** A norma de  $\vec{a}$  é dada por  $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

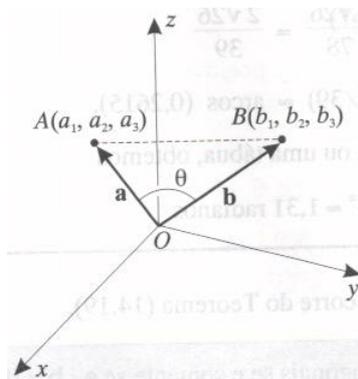
### 1.5.1 Propriedades do Produto Escalar

1.  $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$
2.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
3.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
4.  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$  com  $k$  sendo um escalar.
5.  $0 \cdot \vec{a} = 0$

**Teorema 1.10** Se  $\theta$  é o ângulo entre dois vetores não nulos  $a$  e  $b$  então:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$$

**Demonstração:**



**Figura 1.8**

Supondo  $b \neq k \cdot \vec{a}$  e aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $AOB$  da figura tem-se:

$$\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$

Ou seja:

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$

Simplificando tem-se:

$$-2a_1 \cdot b_1 - 2a_2 \cdot b_2 - 2a_3 \cdot b_3 = -2\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$

Dividindo tudo por  $-2$  conclui-se que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$$

■

**Teorema 1.11** *Dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são ortogonais se e somente se  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$*

## 1.6 Produto Vetorial

Ao contrário do produto escalar, o produto vetorial tem como resultado um vetor. O produto vetorial entre dois vetores tem como resultado um vetor ortogonal aos dois vetores, ou seja  $\vec{a} \times \vec{b}$  é ortogonal a  $\vec{a}$  e a  $\vec{b}$ . O interesse no estudo de produtos vetoriais é para aplicação em sistemas onde efeitos rotacionais se fazem presentes.

**Definição 1.6** *O produto vetorial  $\vec{a} \times \vec{b}$  de  $a = (a_1, a_2, a_3)$  e  $b = (b_1, b_2, b_3)$  é obtido resolvendo o determinante indicado:*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

**Teorema 1.12** *Se  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  então*

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin\theta \quad (1.1)$$

**Demonstração:** Pela seção 1.5.1, tem-se que:  $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$ , além disso:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Aplicando a definição 1.6, para  $(\vec{a} \times \vec{b})$  tem-se:

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \\ &\quad + a_2^2b_1^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \end{aligned}$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \cdot \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2(1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Extraindo a raiz dos dois membros, temos que

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \theta$$

■

**Corolário 1.1.1** *Dois vetores são paralelos se, e somente se,  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$*

### 1.6.1 Interpretação Geométrica da Norma do Produto Vetorial

Representando  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  por vetores  $\overrightarrow{PQ}$  e  $\overrightarrow{PR}$ , tem-se que:  $PQ$  e  $PR$  são lados adjacentes de um paralelogramo. Nota-se que  $\|\vec{b}\| \cdot \sin \theta$  é uma altura do paralelogramo, sendo assim, a área do paralelogramo seria dada por:

$$A = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \theta$$

Mas pela equação (1.1) este é o mesmo resultado encontrado para  $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ , ou seja:

$$A_{\text{Paralelogramo}} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

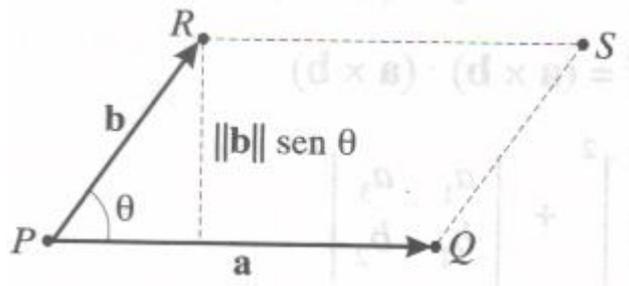


Figura 1.9

### 1.6.2 Propriedades do Produto Vetorial

Sejam  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  dois vetores e  $m$  uma constante, temos que:

1.  $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$
2.  $(m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (m\vec{b})$
3.  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$
4.  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$
5.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
6.  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

**Demonstração:** A demonstração pode ser realizada aplicando a Definição 1.6.

Demonstraremos apenas o item 1 como guia para os demais.

1. Seja  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  e  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , tem-se que:

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} k$$

Como a troca de duas linhas de um determinante muda seu sinal, tem-se

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{a} &= - \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} j - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} k \\ &= -(\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned}$$

■

## 1.7 Curvas no Plano e no Espaço

**Definição 1.7** Uma curva plana parametrizada é um conjunto  $C$  de pares ordenados  $(f(t), g(t))$ , em que  $f$  e  $g$  são funções contínuas em um intervalo  $I$ .

Pode-se dizer que a curva  $C$  é determinada por todos os pontos  $P = (f(t), g(t))$  de um plano  $xy$  com  $t$  variando em  $I$ , ou seja,  $P(t)$  descreve uma curva plana quando  $t$  varia.

**Definição 1.8** Seja  $C$  uma curva que consiste em todos os pares ordenados  $(f(t), g(t))$ , onde  $f$  e  $g$  são funções contínuas em  $I$ . As equações:  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  para  $t$  em  $I$  são as equações paramétricas de  $C$  com parâmetro  $t$ .

### 1.7.1 Funções Vetoriais e Curvas no Espaço

**Definição 1.9** Seja  $D$  um conjunto de números reais. Uma função vetorial  $\vec{r}$  com domínio  $D$  é uma correspondência que associa a cada número  $t$  do domínio exatamente um vetor  $\vec{r}(t)$  no espaço.

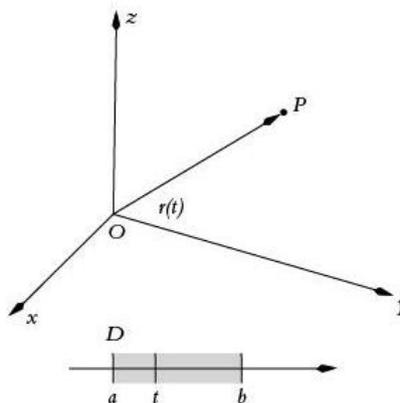


Figura 1.10

Tendo em vista que as três componentes de  $\vec{r}(t)$  são determinadas univocamente para cada  $t$  do domínio também é possível descrever

$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ , onde  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções com domínio em  $D$ ,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  base canônica do  $R^3$ . Sendo assim é possível definir  $\vec{r}(t)$  como uma função  $\vec{r}$  com valores vetoriais.

### 1.7.2 Limites, Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais

Tendo em vista que  $\vec{r}(t)$  pode ser expresso em termos de  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  e suas componentes são funções escalares  $f$ ,  $g$  e  $h$  define-se de forma natural:

**Definição 1.10** *Seja  $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ . O limite de  $\vec{r}$  quando  $t$  tende para  $a$  é dado por:*

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left[ \lim_{(t \rightarrow a)} f(t) \right] \vec{i} + \left[ \lim_{(t \rightarrow a)} g(t) \right] \vec{j} + \left[ \lim_{(t \rightarrow a)} h(t) \right] \vec{k},$$

desde que  $f$ ,  $g$  e  $h$  tenham limites quando  $t$  tende a  $a$ .

**Definição 1.11** *Uma função com valores vetoriais  $\vec{r}$  é contínua em  $a$  se*

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$$

**Definição 1.12** *Seja  $\vec{r}$  uma função com valores vetoriais. A derivada de  $\vec{r}$  é a função com valores vetoriais  $\vec{r}'$  definida por*

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [r(t + \Delta t) - \vec{r}(t)]$$

para todo  $t$  tal que o limite exista.

**Teorema 1.13** *Se  $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$  e  $f$ ,  $g$  e  $h$  são diferenciáveis, então*

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[f(t + \Delta t)\vec{i} + g(t + \Delta t)\vec{j} + h(t + \Delta t)\vec{k}] - [f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \vec{k} \right] \end{aligned}$$

e assim fica provado que:

$$\vec{r}'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$

■

**Teorema 1.14** *Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são funções vetoriais e  $c$  um escalar, então:*

1.  $[\vec{u}(t) + \vec{v}(t)]' = \vec{u}'(t) + \vec{v}'(t)$
2.  $[c\vec{u}(t)]' = c\vec{u}'(t)$
3.  $[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)]' = \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t) + \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t)$
4.  $[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)]' = \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t) + \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t)$

**Demonstração:** Demonstraremos apenas o terceiro item, a demonstração dos demais itens fica a cargo do leitor.

3. Tendo que  $\vec{u}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$

$$\vec{u}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}$$

e sabendo que  $f_k$  e  $g_k$  são funções diferenciáveis de  $t$  tem-se:

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{k=1}^3 f_k(t)g_k(t)$$

daí,

$$\begin{aligned} [\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)]' &= \left[ \sum_{k=1}^3 f_k(t)g_k(t) \right]' \\ &= \sum_{k=1}^3 [f_k(t)g_k(t)]' \\ &= \sum_{k=1}^3 [f_k(t)g_k'(t) + f_k'(t)g_k(t)] \\ &= \sum_{k=1}^3 f_k(t)g_k'(t) + \sum_{k=1}^3 f_k'(t)g_k(t) \\ &= \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t) + \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.15** Se  $\vec{r}(t)$  é diferenciável e  $\|\vec{r}(t)\|$  é constante, então  $\vec{r}'(t)$  é ortogonal a  $\vec{r}(t)$  para todo  $t$  no domínio de  $\vec{r}'$ .

**Demonstração:** Sabendo que  $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = \|\vec{r}(t)\|^2 = c^2$

tem-se que:

$$[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]' = 0$$

O que leva a

$$\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}''(t) + \vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

$$2[\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)] = 0$$

Tendo das definições de produto escalar que quando o produto escalar entre dois vetores é igual a 0 então os dois são ortogonais pode-se concluir que  $\vec{r}'(t)$  e  $\vec{r}''(t)$  são ortogonais.

■

**Definição 1.13** *Seja  $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ , com  $f$ ,  $g$  e  $h$  integráveis em  $[a, b]$ . A integral de  $\vec{r}$  de  $a$  a  $b$  é*

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left[ \int_a^b f(t) dt \right] \vec{i} + \left[ \int_a^b g(t) dt \right] \vec{j} + \left[ \int_a^b h(t) dt \right] \vec{k}$$

## 1.8 Coordenadas Polares

Em um sistema de coordenadas cartesianas, cada ponto é determinado por um par ordenado  $(a, b)$  onde  $a$  é a distância do ponto ao eixo  $x$  e  $b$  é a distância do ponto ao eixo  $y$ . O sistema de coordenadas cartesianas é bastante utilizado e através dele é possível resolver boa parte dos problemas encontrados devida a sua simplicidade. Contudo, em determinadas circunstâncias, existe também um outro método de representação de pontos, que são as coordenadas polares.

Para introduzirmos este sistema, precisamos de um ponto fixo  $O$  (a origem, ou polo) e uma semirreta orientada, conhecida como o eixo polar, com extremidade em  $O$ . Agora considera-se um ponto arbitrário do plano. Denotaremos por  $\theta$  a medida do ângulo formado pelo eixo polar e pela reta que passa pela origem e o ponto desejado e denota-se por  $r$  a distância da origem ao ponto arbitrário. Com isso,  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares do ponto desejado. Sendo assim, as coordenadas polares do ponto seriam  $(r, \theta)$ . Usa-se o sinal positivo caso gerado por uma rotação no sentido anti-horário e, sinal negativo, caso gerado por uma rotação no sentido horário.

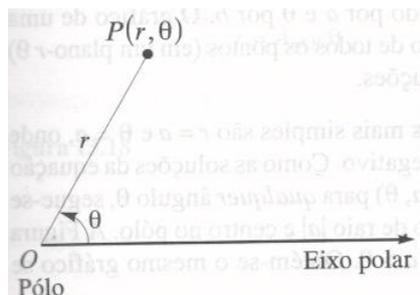


Figura 1.11

### 1.8.1 Relação entre Coordenadas Polares e Coordenadas Cartesianas

Supondo que o eixo-x positivo coincida com o eixo polar, as coordenadas cartesianas e polares se relacionariam da seguinte maneira:

$$x = r \cdot \cos\theta, \quad y = r \cdot \sin\theta, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad \text{tg}\theta = \frac{y}{x}, \quad \text{sex} \neq 0$$

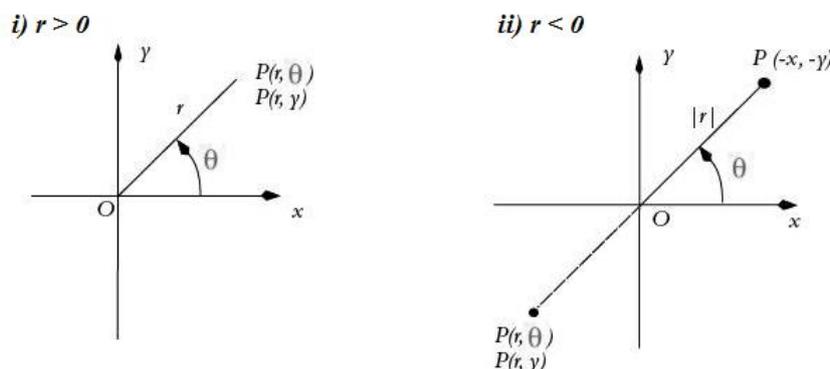


Figura 1.12

Pois, tendo  $r > 0$ , nota-se que  $\cos\theta = \frac{x}{r}$  e  $\sin\theta = \frac{y}{r}$ , ou seja:

$$x = r \cdot \cos\theta$$

$$y = r \cdot \sin\theta$$

Tendo  $r < 0$ , então  $|r| = -r$  e daí tem-se que:

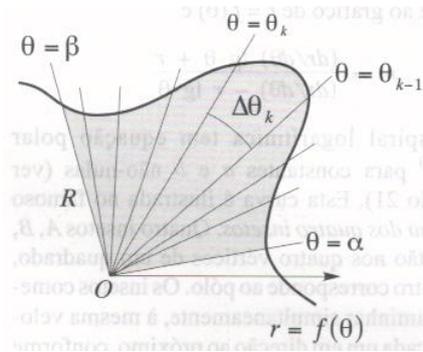
$$\cos\theta = \frac{-x}{|r|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{-y}{|r|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}$$

**Observação 1.6** O resultado apresentado conecta as coordenadas retangulares com as coordenadas polares.

### 1.8.2 Áreas em Coordenadas Polares

É possível calcular áreas de regiões delimitadas por gráficos de equações polares. Utiliza-se para isso, limites de somas de áreas de setores circulares.



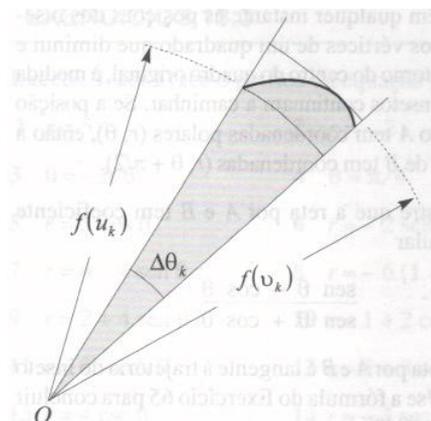
**Figura 1.13**

Na figura, pode-se calcular a área da região no plano, (definido em coordenadas polares), fazendo uma integração em relação a  $\theta$ . Note que a região é delimitada pelas retas  $\theta = \alpha$  e  $\theta = \beta$  com  $0 < \alpha < \beta < 2\pi$  e pelo gráfico da equação polar  $r = f(\theta)$  com  $f(\theta)$  continua em  $[\alpha, \beta]$ .

Fazendo agora uma partição  $P$  de  $[\alpha, \beta]$ , dada por:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = \beta$$

E  $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$  com  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . As retas  $\theta = \theta_k$  dividem a região em várias sub-regiões, em forma de cunha. Considerando  $f(v_k)$  é o valor máximo e  $f(u_k)$  é o valor mínimo de  $f$  no intervalo  $[\theta_{k-1}, \theta_k]$  nota-se que a área do setor circular particionado é maior do que a área de um setor circular com raio igual a  $f(u_k)$  e menor do que a área do setor circular com raio  $f(v_k)$ , ou seja:



**Figura 1.14**

$$\frac{1}{2}[f(u_k)]^2 \cdot \Delta\theta_k \leq A_k \leq \frac{1}{2}[f(v_k)]^2 \cdot \Delta\theta_k$$

Agora, somando de  $k = 1$  até  $k = n$  tem-se:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2}[f(u_k)]^2 \cdot \Delta\theta_k \leq A \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}[f(v_k)]^2 \cdot \Delta\theta_k$$

Por fim, fazendo com que  $\|P\|$  tenda a 0, os limites das somas resultam em

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

## 1.9 Equação Polar das Cônicas

**Teorema 1.16** *Sejam  $F$  um ponto fixo e  $l$  uma reta fixa de um plano. O conjunto de todos os pontos  $P$  do plano tais que a razão  $\frac{d(P, F)}{d(P, Q)}$  (com  $d(P, Q)$  sendo a distância do ponto  $P$  à reta  $l$ ) é uma constante positiva  $\epsilon$  é uma seção cônica. A cônica é uma parábola se  $\epsilon = 1$ , uma elipse se  $0 < \epsilon < 1$  e uma hipérbole se  $\epsilon > 1$ .*

**Demonstração:**

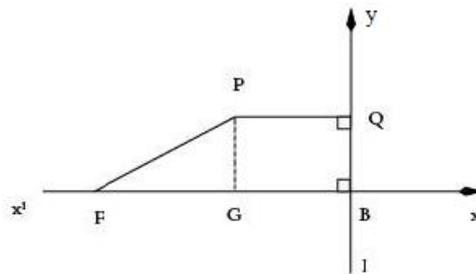


Figura 1.15

Temos que:  $\frac{\overline{FP}}{\overline{PQ}} = \epsilon = \text{constante}$ .

Além disso:

$$\overline{FP} = r$$

$$\overline{GB} = \overline{FB} - \overline{FG}$$

$$\overline{FB} = d$$

$$\overline{FG} = r \cdot \cos\theta$$

$$\overline{PQ} = d - r \cdot \cos\theta$$

Assim:

$$\overline{FP} = \epsilon \cdot \overline{PQ}$$

$$r = d\epsilon - \epsilon \cdot r \cdot \cos \theta$$

De forma que

$$r = \frac{d \cdot \epsilon}{1 + \epsilon \cdot \cos \theta}$$

■

# Capítulo 2

## Movimento de uma Partícula

Neste capítulo abordamos os conceitos de movimento uniformemente variado aplicando os conhecimentos de cálculo diferencial e integral para construir as fórmulas e elaborar um modelo matemático para o modelo físico.

Posteriormente os conceitos apresentados neste capítulo serão utilizados para demonstrar as Leis de Kepler a partir da lei de gravitação proposta por Newton.

### 2.1 Cinemática da Partícula

#### 2.1.1 Posição

Se um ponto material ou partícula  $P$  se move ao longo de uma reta  $l$ , seu movimento é retilíneo. Se  $l$  é uma reta ordenada com coordenada  $x$ , e se a coordenada de  $P$  no instante  $t$  é  $x(t)$ , então  $x$  é a função posição de  $P$ .

#### 2.1.2 Deslocamento

É a variação de posição da partícula em movimento, ou seja, a distância percorrida com relação a um ponto fixo.

$$\Delta x = x - x_0,$$

onde  $x$  é a posição em  $t$  e  $x_0$  a posição em  $t_0$ .

### 2.1.3 Velocidade Média

Define-se velocidade média de uma partícula, em um intervalo de tempo  $\Delta t$  como sendo a razão entre o deslocamento  $\Delta x$  realizado e o intervalo de tempo  $\Delta t$ , isto é,

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

A unidade de velocidade média no S.I. é o  $m/s$ , mas utiliza-se muito a unidade  $Km/h$ .

É importante observar a direção do movimento. Tomando como base o eixo das abscissas e  $x = 0$  como referencial, se a partícula se movimenta da esquerda para direita, ou seja, se o valor de  $x$  aumenta com o decorrer do tempo, a velocidade escalar média será positiva, caso contrário, será negativa.

Tendo em vista que a preocupação se resume apenas com a análise em dois instantes distintos, concluímos que a velocidade média da partícula é o coeficiente angular da reta que liga o ponto  $(x_1, t_1)$  e o ponto  $(x_2, t_2)$  no gráfico posição x tempo.

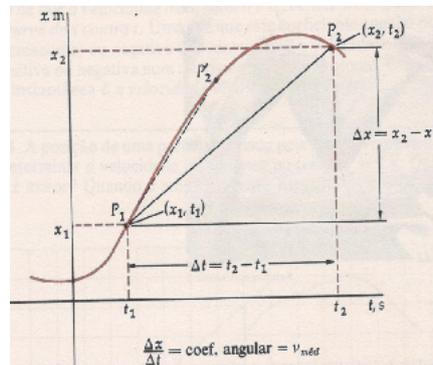


Figura 2.1

### 2.1.4 Velocidade Instantânea

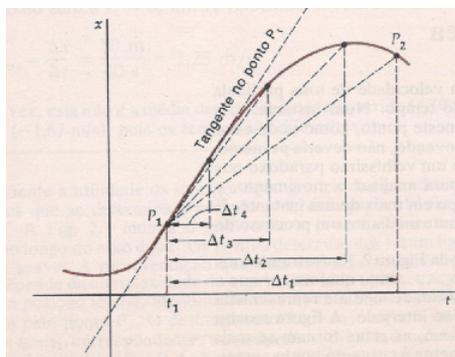
A princípio, pode-se pensar que é impossível calcular a velocidade de um objeto em um instante dado. Foi colocado que a velocidade média de um objeto é medida pela razão entre o deslocamento e o tempo necessário para que exista este deslocamento. Com os recursos do cálculo diferencial e integral é possível calcular

a velocidade num dado instante.

Utilizando o que foi visto anteriormente, aliado aos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, a velocidade instantânea pode ser calculada aplicando o que foi exposto na seção que trata sobre derivadas, temos:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

de forma que  $v(t)$  é numericamente igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva  $x(t)$  no ponto estudado, como está indicado na figura abaixo.

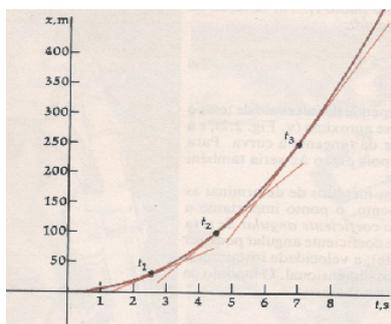


**Figura 2.2**

Sendo assim, pode-se obter a velocidade em qualquer instante de um movimento retilíneo, se for conhecida uma equação que exprima a posição como função do tempo, apenas calculando a derivada da posição com relação ao tempo, como concluiremos no exemplo.

**Exemplo 2.1** *A posição de uma pedra que cai do alto de um rochedo a partir do repouso é dada por  $x = 5t^2$ , onde  $x$  está em metros e  $t$  está em segundos. O sentido positivo do eixo  $x$  é para baixo. Determine a velocidade num instante qualquer.*

**Solução:**



**Figura 2.3**

Note na figura acima que os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico do movimento aumentam com o passar do tempo, e o movimento é tal que a velocidade aumenta com o passar do tempo.

A partir da equação  $x = 5t^2$  podemos calcular a velocidade instantânea considerando que a derivada da posição com relação ao tempo resultará numa equação que vai mostrar a velocidade da partícula num instante de tempo qualquer de acordo com

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 10t.$$

Com isso pode-se calcular a velocidade em qualquer instante apenas substituindo o valor do instante de tempo no qual se quer calcular a velocidade da partícula, na função  $v(t)$ .

■

**2.1.5 Aceleração**

Quando a velocidade da partícula muda com o passar do tempo, diz-se que ela está acelerada. Define-se aceleração média como a razão entre a variação da velocidade  $\Delta v$  e o intervalo do tempo  $\Delta t$  de acordo com

$$a_{media} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

A unidade de aceleração no S.I. é o  $m/s^2$ , mas utiliza-se muito a unidade  $km/h^2$ .

**2.1.6 Aceleração Instantânea**

Este tópico será abordado da mesma maneira que o de velocidade instantânea. É difícil, apenas com conhecimentos básicos de matemática elementar, determinar num dado instante, a aceleração em um instante considerado. Serão utilizados os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral para definirmos a aceleração instantânea como

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

## 2.2 Modelamento do Movimento Retilíneo Através do Cálculo

De acordo com a seção anterior a cinemática da partícula pode ser definida a partir dos seguintes conceitos.

**Definição 2.1** *Seja  $x(t)$  a coordenada de um ponto  $P$  em uma reta coordenada  $l$  no instante  $t$ .*

1. *A velocidade de  $P$  é  $v(t) = x'(t)$ .*
2. *O módulo da velocidade de  $P$  é  $|v(t)|$ .*
3. *A aceleração de  $P$  é  $a(t) = v'(t) = x''(t)$ .*

Utilizando o que foi visto na subseção 1.3.2, tem-se que: se  $v(t)$  é positiva em um intervalo de tempo,  $x'(t) > 0$  e  $x(t)$  é crescente, isto é, o ponto  $P$  se move na direção positiva em  $l$ . Se  $v(t)$  é negativa, o movimento processa-se na direção negativa. Se a aceleração  $a(t) = v'(t)$  é positiva, a velocidade é crescente. Se  $a(t)$  é negativa, a velocidade é decrescente.

## 2.3 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

Os vestibulares de todo o Brasil sempre trazem questões referentes a este assunto, tendo em vista que ele possui um conteúdo que é facilmente aplicado ao cotidiano.

Um pouco de cálculo diferencial e integral ajudaria a entender melhor o conteúdo e tornaria os estudantes capazes de resolver problemas com mais facilidade e problemas mais complexos.

O movimento retilíneo uniformemente variado se caracteriza por possuir aceleração constante, levando a velocidade a variar linearmente com o tempo, isto é,

$$v(t) = v_0 + at,$$

com  $v_0 =$  Velocidade inicial.

Considere que a partícula começa a se mover no instante  $t_0 = 0$ , começando o movimento em  $x_0$  (posição inicial) e que no instante  $t$  sua posição é  $x$ . O deslocamento  $\Delta x = x - x_0$  da partícula, no intervalo de tempo  $\Delta t = t - t_0 = t$ , pode ser expresso como

$$\Delta x = v_{media}t.$$

Sabendo que a aceleração é constante, a velocidade média pode ser calculada através da média aritmética entre a velocidade inicial e final. Pode-se também calcular o valor da velocidade média apenas somando a metade da variação da velocidade e assim tem-se:

$$v_{media} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0 + \frac{1}{2}at.$$

Com isso:

$$\begin{aligned}\Delta x &= (v_0 + \frac{1}{2}at)t \\ x &= x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Que é a equação que determina a posição como função do tempo.

Um outro resultado importante é a equação de Torricelli. Esta equação é obtida substituindo a equação  $t = \frac{v - v_0}{a}$  na (2.1), obtemos

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}\Delta x &= v_0t + \frac{at^2}{2} \\ \Delta x &= v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + a \frac{(v - v_0)^2}{2a^2} \\ \Delta x &= \frac{2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2}{2a} \\ 2a\Delta x &= 2v_0v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0v + v_0^2\end{aligned}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x\tag{2.2}$$

Este seria o procedimento utilizado por professores de física do ensino médio ou fundamental, pois não envolve conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Desta

forma os estudantes entenderiam a construção das fórmulas com o conhecimento matemático construído até então.

## 2.4 Fórmulas do Movimento Uniformemente Variado Através do Cálculo

Nesta seção vamos mostrar que os resultados da seção anterior podem ser demonstrados através da utilização do que foi estudado de Cálculo Diferencial e Integral.

Partindo da equação que determina a posição em função do tempo no movimento retilíneo uniformemente variado dada por

$$x = x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$$

e sabendo que a derivada da posição em função do tempo é igual à velocidade instantânea tem-se

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}\right)$$

e, daí segue que

$$v = v_0 + at.$$

Semelhantemente a derivada da velocidade instantânea em função do tempo é igual à aceleração obtém-se que a aceleração instantânea é constante. Como podemos considerar  $v$  como função de  $x$ , que é função do tempo, pela regra da cadeia segue que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dx}v$$

$$adx = vdv$$

Utilizando o resultado acima, a equação de Torricelli pode ser obtida da de acordo com

$$\int_{x_0}^x adx = \int_{v_0}^v vdv$$

$$a(x - x_0) = \int_{v_0}^v v dv$$

$$a(x - x_0) = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

E assim também pode-se construir as equações de movimento uniformemente variado. Elas serão muito utilizadas nos assuntos de queda livre, que tem a peculiaridade de possuir a aceleração com o valor igual ao da gravidade e de lançamento oblíquo, que seria uma composição de dois movimentos um uniforme (com velocidade constante) e outro uniformemente variado como foi visto acima.

## 2.5 Movimento Curvilíneo de um Ponto Material ou Partícula

Depois de estudar por movimento de uma partícula numa dimensão, será feito o mesmo para movimento em mais de uma dimensão. Serão utilizados os conceitos do cálculo vetorial e coordenadas polares com a finalidade de explicar as leis que regem o movimento de um planeta em torno do Sol.

### 2.5.1 Vetor Posição

Quando um ponto material se desloca numa trajetória curva, ou seja, está em movimento curvilíneo, um vetor é usado para definir a posição do ponto material. Chamando de  $P$  o ponto onde está localizada a partícula e utilizando o sistema de coordenadas cartesianas  $Oxyz$ , com origem no ponto  $O$  definimos a posição da partícula como o vetor que tem origem em  $O$  e extremidade em  $P$ . O vetor que define a posição da partícula e será denotado por  $\vec{r}$ .

Como o vetor de posição  $\vec{r}$  depende do instante  $t$ , assim ele é uma função do tempo e designamos por  $\vec{r}(t)$ .

### 2.5.2 Velocidade

Considerando agora o vetor  $\vec{r}$  que define uma segunda posição ( $P'$ ) ocupada pelo ponto material no instante  $t + \Delta t$ , pode ser construído o vetor  $\overrightarrow{\Delta r}$  que tem origem em  $P$  e extremidade em  $P'$  e representa a variação do vetor posição no intervalo de tempo  $\Delta t$ , isto é, o vetor deslocamento.

Nota-se que o vetor  $\overrightarrow{\Delta r}$  representa variação de direção, sentido e módulo do vetor posição  $\vec{r}$ . Sendo assim, o vetor velocidade média  $\vec{v}_m$  é determinado pela multiplicação do vetor  $\overrightarrow{\Delta r}$  pelo escalar  $\frac{1}{\Delta t}$ . O resultado desta divisão será o vetor  $\vec{v}$  que tem mesma direção e sentido que  $\overrightarrow{\Delta r}$ .

O vetor velocidade instantânea no instante  $t$  pode ser obtido fazendo com que o intervalo de tempo estudado o menor possível, isto é, utilizando o conceito de derivada de acordo com

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Quando o  $\Delta t$  é diminuído,  $P'$  se aproxima de  $P$ . No caso do limite, o vetor  $\vec{v}$  será tangente à trajetória do ponto material.

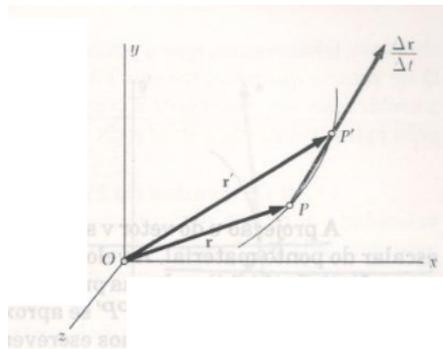


Figura 2.4

### 2.5.3 Velocidade Escalar

Quando o intervalo de tempo decresce, o comprimento de  $PP'$  se aproxima do comprimento do arco  $PP'$ , o qual será dado por  $\Delta s$ . Sendo assim, a velocidade escalar pode ser obtida derivando o comprimento do arco  $PP'$  com relação ao tempo.

$$v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

### 2.5.4 Aceleração

Agora, traçando os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{v}'$  a partir da mesma origem, vetor  $\Delta\vec{v}$  é construído unindo as extremidade  $Q$  e  $Q'$  dos vetores da velocidade no primeiro e no segundo instante. O vetor  $\Delta\vec{v}$  representa a variação de módulo direção e sentido da velocidade e por isso, a aceleração média é dada pela multiplicação do vetor  $\Delta\vec{v}$  por  $\frac{1}{\Delta t}$ .

A aceleração instantânea será obtida quando o  $\Delta t$  é pequeno, ou seja

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

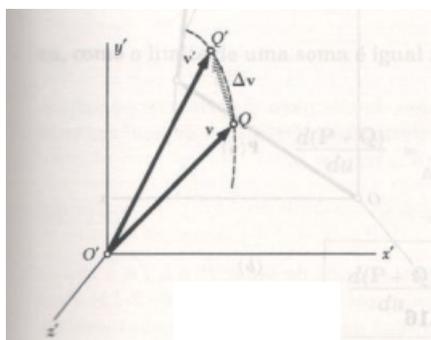


Figura 2.5

## 2.6 Análise Vetorial do Movimento em Duas Dimensões

Nesta seção vamos generalizar os resultados anteriores da cinemática, para estudar o movimento de uma partícula no plano. É importante o conhecimento da posição de um ponto no plano afim de estudar o movimento de uma partícula em coordenadas cartesianas onde a posição é dada por  $(x, y)$ .

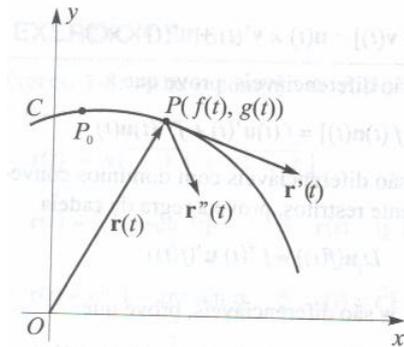
Tendo que as coordenadas do ponto P variam como função do tempo, tem-se que  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ ,

Ou seja, o vetor posição da partícula é dado por

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$

Note que, a posição da partícula  $P$  é dada pela extremidade do vetor  $\vec{r}(t)$  que varia no intervalo de tempo que está sendo estudado.

De acordo com os resultados anteriores, a cinemática do movimento de uma partícula no plano esta sujeita ao cenário



**Figura 2.6**

**Definição 2.2** Seja  $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$  o vetor posição de um ponto  $P(x, y)$  que se movimenta no plano-  $xy$  onde  $t$  é o tempo e  $f$  e  $g$  possuem derivadas primeira e segunda. A velocidade vetorial a velocidade escalar e a aceleração de  $P$  no instante  $t$  serão dadas por:

1. **Velocidade vetorial:**  $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$
2. **Velocidade escalar:**  $v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$
3. **Aceleração:**  $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}$

## 2.7 Equações do Movimento nas Componentes Radial e Transversal

### 2.7.1 Componente Radial e Transversal do Movimento Curvilíneo

Em alguns momentos é conveniente definir a posição  $P$  do ponto material através de coordenadas polares. Sendo assim, expressamos a velocidade e a aceleração do

ponto material em componentes paralela e perpendicular à linha  $OP$ , estas duas serão denominadas de componente radial e transversal, respectivamente.

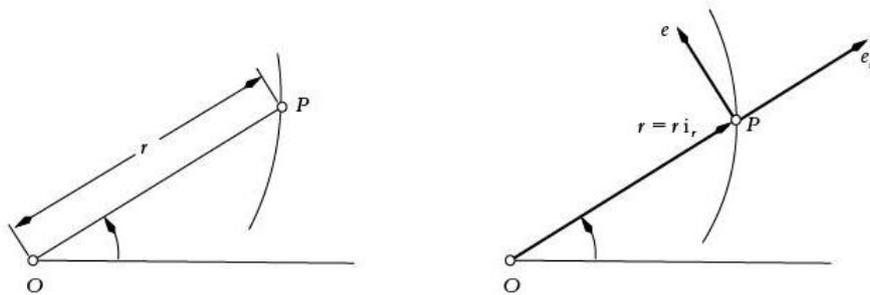
Considerando em  $P$  os vetores unitários  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$ . O vetor  $\hat{r}$  tem a mesma direção e sentido de  $\overrightarrow{OP}$  e define a direção radial, ou seja, a direção na qual  $P$  teria que se deslocar se  $r$  aumentasse com  $\theta$  permanecendo constante. O vetor  $\hat{\theta}$  é determinado rotacionando  $\hat{r}$  de  $90^\circ$  no sentido anti-horário, ou seja, a direção na qual  $P$  teria que se deslocar para que  $\theta$  aumentasse, com  $r$  permanecendo constante.

Com isso tem-se

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \tag{2.3}$$

e

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}. \tag{2.4}$$



**Figura 2.7**

Usando a notação,  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ ,  $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$ ,  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  e  $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ . Determinando o vetor posição do ponto material através do produto do escalar  $r$  pelo vetor unitário  $\hat{r}$  e derivando em relação ao tempo, tem-se

$$\vec{r} = r\hat{r}.$$

O vetor velocidade instantânea fica dado por

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}.r\hat{r} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} \\ \vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{r}}{d\theta} \end{aligned}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Derivando novamente em relação ao tempo obtemos o vetor aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

Finalmente, considerando um ponto material  $P$ , de coordenadas  $r$  e  $\theta$ , que se move num plano sob a ação de uma força  $\vec{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta}$ , tem-se que a segunda lei de Newton fica dada por

$$\sum F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \omega(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2),$$

$$\sum F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \omega(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}),$$

em coordenadas polares.

## 2.7.2 Momento Angular

É a quantidade de movimento relacionada a uma partícula que executa um movimento de rotação em torno de um ponto fixo, e é dado por

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição,  $m$  é a massa da partícula e  $\vec{v}$  é o vetor velocidade da partícula.

Podemos verificar pelo que foi analisado acima, que  $\vec{L}$  é perpendicular ao plano que contém  $\vec{r}$  e  $m\vec{v}$ , e que  $|\vec{L}| = rmv \sin \phi$ , onde  $\phi$  é o Ângulo entre  $\vec{r}$  e  $m\vec{v}$ .

Calculando agora a variação do momento angular em função do tempo obtém-se que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

Tendo em vista que

$$\vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

resulta que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a}$$

Finalmente, utilizando a segunda lei de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

### 2.7.3 Movimento sob Ação de uma Força Central

Quando a única força  $\vec{F}$  que atua sobre a partícula é paralela ao seu vetor posição  $\vec{r}$ , tem-se que  $\vec{r} \times \vec{F} = 0$  e disso resulta

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

ou seja, o momento angular é um vetor constante.

Tendo em vista que uma força é dita central quando possui as propriedades de ser uma resultante paralela ao vetor posição da partícula, com centro de força na origem podemos concluir que um ponto material sujeito apenas a uma força central se move em um plano fixo perpendicular a  $\vec{L}$ , pois este é um vetor constante.

### 2.7.4 Velocidade Areolar

Observando que o raio do vetor  $\vec{OP}$  varre uma área infinitesimal  $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$  quando rotacionado de um ângulo  $d\theta$ , a velocidade areolar é definida pela razão  $\frac{dA}{dt}$ .

Sabendo que  $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$  é uma constante, nota-se que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

ou seja, também é constante.

**Exemplo 2.2** Lança-se um projétil, com velocidade inicial  $\vec{v}_0$  de uma altura  $h_0$  metros acima do solo. Como a aceleração do o projétil é a aceleração gravitacional  $\vec{g}$ , determine a posição após  $t$  segundos.

**Solução:** Denotando por  $P(x, y)$  a posição do projétil após  $t$  segundos e sendo  $r(t)$  o vetor posição de  $P$  e tendo que o projétil é afetado apenas pela ação da gravidade, tem-se que o movimento se dá de maneira uniforme na direção do eixo  $x$  e é um movimento uniformemente variado na direção do eixo  $y$ .

Como a aceleração do projétil é igual à aceleração da gravidade tem-se:

$$\overrightarrow{r''(t)} = \vec{g}$$

Então:

$$\int \overrightarrow{r''(t)}.dt = \int \vec{g}.dt$$

$$\overrightarrow{r'(t)} = t.\vec{g} + \vec{c}$$

com  $c$  sendo um vetor constante.

$$\overrightarrow{r'(t)} = \vec{v}(t),$$

sendo assim:

$$\vec{v}_0 = \overrightarrow{r'(0)} = \vec{c},$$

$$\overrightarrow{r'(t)} = t.\vec{g} + \vec{v}_0,$$

Mais uma vez efetuando a integral nos dois lados da igualdade tem-se

$$\int \overrightarrow{r'(t)}.dt = \int (t.\vec{g} + \vec{v}_0).dt$$

$$\overrightarrow{r(t)} = \frac{1}{2}.t^2.\vec{g} + t.\vec{v}_0 + \vec{d}$$

com  $\vec{d}$  sendo um vetor constante.

Como  $\overrightarrow{r(0)} = h_0 \vec{j}$  tem-se:

$\vec{d} = h_0 \vec{j}$ , e conseqüentemente,

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}.t^2.\vec{g} + t.\vec{v}_0 + h_0\vec{j}$$

Considerando que  $\vec{g} = -g\vec{j}$  pode ser escrito que:

$$\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2.g + h_0\right)\vec{j} + t.\vec{v}_0$$

Por fim, sabendo que  $\theta_0$  é o ângulo de inclinação através do qual é arremessado o projétil tem-se que

$$\vec{v}_0 = v_0.\cos\theta_0\vec{i} + v_0.\sen\theta_0\vec{j}$$

E com isso:

$$\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2}t^2.g + t.v_0.\sen\theta_0 + h_0\right)\vec{j} + (t.v_0.\cos\theta_0)\vec{i}$$

■

No que segue-se abordamos as Leis de Newton, o Trabalho e Energia associados a uma partícula.

# Capítulo 3

## Leis de Newton, Trabalho e Energia

Neste capítulo serão abordados os conceitos de trabalho e energia, utilizando as aplicações da integral para o cálculo de áreas, aplicações essas que serão bastante eficazes quando os problemas em discussão possuírem grandezas que variam com o tempo ou distância.

### 3.1 Primeira Lei de Newton

Tendo uma partícula objeto que se encontra em repouso, a tendência é a de que ele permaneça em repouso, a não ser que algum agente externo execute uma ação sobre ele, fazendo com que se mova. O mesmo acontece se a partícula estiver se deslocando com movimento retilíneo uniforme, a tendência é a de que ele continue se movimentando sem que sua velocidade varie. Isto acontece em uma classe de referenciais chamados inerciais.

O que foi dito acima não é nada mais do que a primeira lei de Newton.

*"Todo corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a modificar seu estado pela ação de forças impressas sobre ele".*

É importante agora acrescentar um novo conceito.

### 3.1.1 Quantidade de Movimento

A grandeza física que relaciona massa e velocidade é conhecida como quantidade de movimento.

Como exemplo, podemos afirmar que, um caminhão e uma bicicleta, ambos com a mesma velocidade, é mais fácil fazer com que a bicicleta pare. Sendo assim, pode se dizer que o caminhão tem uma quantidade de movimento maior do que a da bicicleta. A quantidade de movimento ou momento linear de uma partícula é definida por

$$\vec{Q} = m \vec{v}$$

Considerando que o corpo se encontra em movimento retilíneo uniforme (a velocidade não se altera) e que não existe nenhuma ação externa sobre ele e que sua massa não se altera, podemos concluir que a quantidade de movimento se conserva com o tempo.

A força é um agente externo que pode causar dois tipos de efeitos quando atua e um corpo: pode deformar ou alterar seu vetor velocidade.

## 3.2 Segunda Lei de Newton

Chama-se força atuante sobre uma partícula a qualquer agente capaz de modificar seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme, em um referencial inercial.

De acordo com a segunda lei de Newton, a força é diretamente proporcional à aceleração ( $\vec{a}$ ). De forma mais precisa, a segunda lei de Newton afirma que a força  $\vec{F}$  é igual a derivada da quantidade  $\vec{Q}$  de movimento em relação ao tempo, isto é,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$
$$\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

Como a massa é constante,  $\frac{dm}{dt} = 0$ , daí

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

A unidade de força no S.I., corresponde à capacidade de imprimir uma aceleração de  $1m/s^2$  a um corpo de  $1kg$ , e esta unidade é chamada de Newton ( $N$ ).

### 3.3 Terceira Lei de Newton

A terceira lei de Newton afirma que a interação entre dois corpos quaisquer, A e B é representada por forças mútuas: uma força que o corpo A exerce sobre o corpo B e uma força que o corpo B exerce sobre o corpo A. Estas forças têm mesmo módulo, mesma direção, mas sentidos contrários. É usual dizer que as forças relacionadas pela terceira lei de Newton é um par ação-reação. Por outro lado, é importante que fique bem claro o seguinte. Da interação entre dois corpos origina duas forças de mesma natureza. As forças atuam em corpos diferentes e, por isso, elas não se cancelam mutuamente. As forças são simultâneas: uma não vem antes nem depois da outra.

### 3.4 Trabalho de uma Força Constante

Como exemplo ilustrativo pode se supor que exista uma caixa parada e que será desprendida uma força externa constante para movê-la por uma certa distância. O trabalho seria o produto do deslocamento com a componente da força no sentido do movimento. Uma análise vetorial faria com que chegasse a conclusão de que o trabalho é numericamente igual ao produto escalar entre o vetor força e o vetor deslocamento.

$$W = Fd \cos \theta$$

Onde:

$W$  é o trabalho exercido pela força.

$\theta$  é o ângulo formado entre a força e o deslocamento.

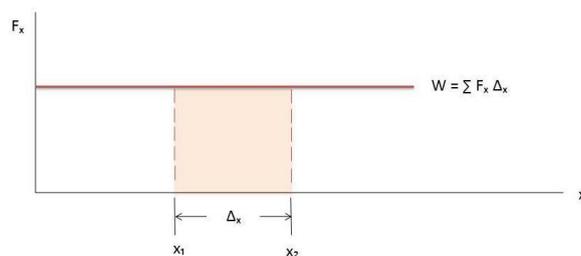
**Observação 3.1** *Se a força estiver na mesma direção e sentido do deslocamento, o trabalho será calculado da seguinte forma:*

$$W = Fd, \quad (3.1)$$

pois  $\cos \theta = 1$ .

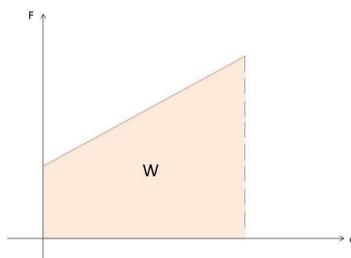
### 3.4.1 Análise Gráfica para Força Constante

Sendo  $F$  uma força constante, atuando no mesmo sentido do deslocamento, teríamos:



**Figura 3.1**

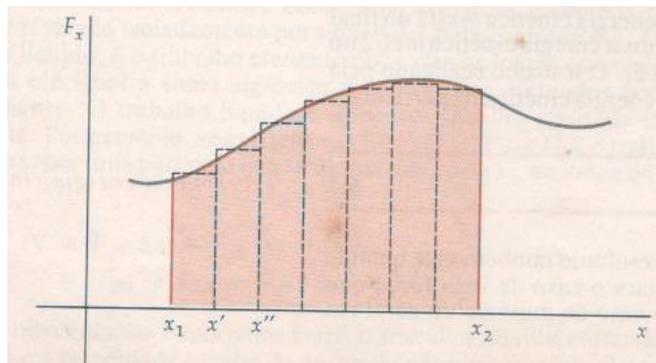
Como dito acima, pode se notar pelo gráfico que a força é constante, como  $W = F \cdot d$  tem-se que este é numericamente igual à área do retângulo.



**Figura 3.2**

Considere agora que a força  $F$  varia linearmente em função da posição  $x$ . A força é variável, mas ainda assim é fácil calcular a área abaixo do gráfico, devido a linearidade da função.

### 3.5 Definição de Trabalho Através do Cálculo

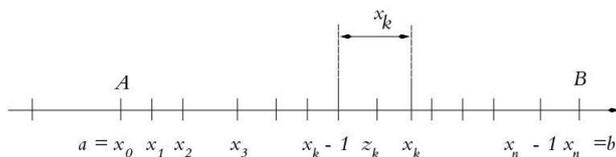


**Figura 3.3**

A seguir será estabelecido um método para determinar o trabalho realizado por uma força variável ao deslocar um objeto através de uma trajetória retilínea na mesma direção da força.

Considere uma força que faz o objeto mover-se ao longo de uma reta correspondente ao eixo- $x$ , de  $x = a$  a  $x = b$ , e seja dada por  $f(x)$ , com  $f$  contínua em  $[a, b]$ . Agora considerando uma partição  $P$  de  $[a, b]$ , tal que:

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b \text{ com } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$



**Figura 3.4**

Se  $\Delta W_k$  é o incremento do trabalho, ou seja, a quantidade de trabalho realizado de  $x_{k-1}$  a  $x_k$ , então o trabalho realizado de  $a$  até  $b$  é numericamente igual a soma

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n = \sum_{k=1}^n \Delta W_k$$

Para fazer uma aproximação de  $\Delta W_k$ , escolhe-se um valor arbitrário  $z_k$  em  $[x_{k-1}, x_k]$  e considerando a força  $f(z_k)$  em  $z_k$ . Se a norma  $\|P\|$  é pequena, então os valores da função variam muito pouco em  $[x_{k-1}, x_k]$ , isto é,  $f$  é muito próxima da constante neste intervalo. Então, utilizando a equação (3.1), tem-se que:

$$W = \Delta W_k \approx f(z_k) \cdot \Delta x_k$$

então,

$$W = \sum_{k=1}^n \Delta W_k \approx \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k$$

Esta aproximação deve melhorar à medida que  $\|P\| \rightarrow 0$ , então  $W$  é definido como o limite de tais somas, o que conduz a uma integral definida.

**Definição 3.1** *Se  $f(x)$  é a força em  $x$ , e se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então o trabalho realizado ao mover um objeto ao longo do eixo- $x$  de  $x = a$  a  $x = b$  é dado por:*

$$W = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k f(z_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

## 3.6 Energia

Energia é uma grandeza escalar relacionada com a capacidade de realização de trabalho em um sistema físico. Pode-se dizer que está relacionada à capacidade que uma força tem de alterar ou transformar um sistema, e a que enfocaremos é a potencial e cinética..

### 3.6.1 Energia Potencial

Está associada à posição que um dado objeto se encontra em relação a um sistema.

1. A energia potencial gravitacional é associada à altura ou à distância entre massas.

$$E_{p \text{ gravitacional}} = mgh$$

2. A energia potencial elétrica é associada à carga elétrica, ou seja, ao efeito que uma carga exerce sobre outra quando estão a uma certa distância.

$$E_{p \text{ eletrica}} = \frac{KQq}{d}$$

3. A energia potencial elástica se associa a uma mola ou a um corpo que esteja deformado.

$$E_{p \text{ elastica}} = \frac{Kx^2}{2}$$

### 3.6.2 Energia Cinética

Esse tipo de energia se relaciona ao movimento de uma partícula, se é definida por

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

### 3.6.3 Teorema do Trabalho - Energia Cinética com Força Constante

De posse da equação de Torricelli do movimento uniformemente variado que é:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

Isolando  $\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$

Como  $W = Fd$  e  $F = ma$ , tem-se:

$$W = ma\Delta x$$

$$W = ma \left( \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \right)$$

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$W = \Delta E_c.$$

Assim, concluímos que o trabalho realizado é igual à variação da energia cinética. Esse resultado é mais geral e vale para qualquer força, como veremos a seguir.

### 3.6.4 Teorema do Trabalho - Energia Cinética com Força Variável

Considere uma força variável  $F$ , com movimento no eixo- $x$ , onde no início do movimento o corpo está na posição  $x_0$ , com velocidade inicial  $v_0$ , e no final ele está na posição  $x$  com velocidade  $v$ . Neste caso, o trabalho realizado é dado por

$$W = \int_{x_0}^x F dx \quad e \quad F = m \frac{dv}{dt}.$$

Assim, procede-se da seguinte maneira:

$$F = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$$

$$W = \int_{x_0}^x m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx$$

$$W = \int_{x_0}^x m \frac{dv}{dt} dx$$

$$W = m \int_{v_0}^v v dv$$

$$W = m \left[ \frac{v^2}{2} \right]_{v_0}^v$$

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$W = \Delta E_c$$

Nas duas abordagens o resultado encontrado constata que o trabalho executado por uma força é igual à variação de energia cinética que esta força imprime ao objeto.

# Capítulo 4

## Leis de Kepler

Astrônomo alemão, Johannes Kepler comprovou que os planetas se movem em trajetórias elípticas ao redor do Sol, e que este seria um dos focos das órbitas dos planetas, a partir dos dados coletados por Ticho Braher.

Neste capítulo serão demonstradas as três Leis de Kepler, que influenciaram muito a astronomia e até hoje são muito importantes nos estudos do sistema solar. Para executar tais demonstrações será feito o uso dos conceitos de produto vetorial, produto escalar e cálculo diferencial e integral. Kepler, por não possuir as ferramentas (não existiam na época) que serão utilizadas nas demonstrações, só foi capaz de provar suas leis experimentalmente, ficando para Newton a tarefa de prová-las matematicamente, usando a "Lei da Gravitação Universal de Newton" e as "Leis do Movimento de Newton", isto é, a partir dos princípios gerais da Física.

### 4.1 Leis de Kepler

#### 4.1.1 Considerações Iniciais

Considere um sistema de coordenadas cartesianas, com a origem no Sol e um planeta ocupando um ponto  $P$  do espaço. Denotaremos por  $\vec{r}$  o vetor que tem origem no Sol e extremidade no planeta, ou seja,  $\vec{r}$  é o vetor posição do planeta em um dado instante de tempo.

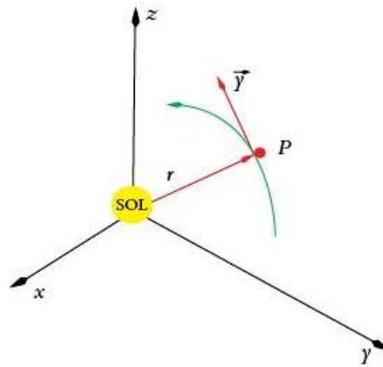


Figura 4.1

A, a cinemática do movimento do planeta pode ser estudada a partir das seguintes grandezas vetoriais

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (4.1)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (4.2)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4.3)$$

Onde  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$  são os vetores que indicam, respectivamente, a velocidade e a aceleração do planeta.

A norma do vetor  $\vec{r}$  é dada por  $r = \|\vec{r}\|$ , sendo assim podemos definir  $\vec{u}$  dado por

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{r}\right) \vec{r}$$

como um vetor unitário que tem a mesma direção de  $\vec{r}$ .

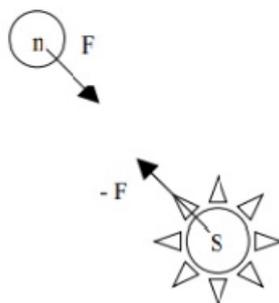
### 4.1.2 Leis de Newton

Tendo como base as leis de Kepler, Newton chegou à conclusão de que, se os planetas descrevem órbitas ao redor do sol. Estes deveriam estar sujeitos a uma força centrípeta para que eles pudessem executar trajetórias curvas.

Desta maneira, Newton admitiu que suas leis de movimento também seriam válidas para corpos celestes.

Se baseando nas leis do movimento e no que Kepler havia estudado, considerando a massa do sol como  $M$  e a de um planeta como  $m$ , Newton concluiu que a força exercida entre o Sol e o planeta seria a manifestação de uma interação universal, e enunciou a lei da gravitação universal como:

*"Duas partículas se atraem com força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas".*



**Figura 4.2**

Considerando  $M$  muito maior do que  $m$ , pode-se supor que o corpo de massa  $M$  está em repouso e que este seria o centro de massa de um sistema isolado no qual se observa uma única força de interação, a força gravitacional. Esta força tem a mesma direção do vetor posição do planeta, porém, possui sentido contrário sendo assim tem-se:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u} \quad (4.4)$$

Também chamada de Princípio Fundamental da Dinâmica, a segunda lei de Newton,

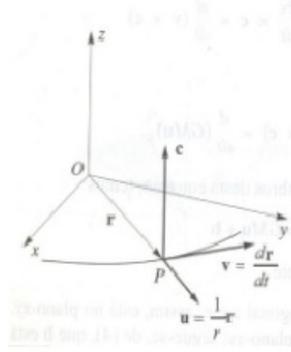
$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (4.5)$$

consiste na afirmação de que um corpo em repouso necessita da aplicação de uma força para que possa se movimentar, e para que um corpo em movimento retilíneo uniforme tenha sua velocidade alterada, também é necessária a aplicação de uma força.

### 4.1.3 Movimento Planetário

Da mesma forma que o Sol exerce uma força sobre o planeta, outros corpos também exercerão força sobre ele, mas para efeito de simplicidade, colocamos por

hipótese que somente o Sol exerça força sobre o planeta.



**Figura 4.3**

Substituindo a equação (4.4) na equação (4.5), segue-se que

$$-\frac{GMm}{r^2} \vec{u} = m \cdot \vec{a}$$

Podemos então deduzir que:

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \vec{u} \quad (4.6)$$

logo  $\vec{a}$  é paralelo a  $\vec{r}$ , pois  $\vec{r} = r \vec{u}$  e,

$$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \quad (4.7)$$

Concluindo assim que a gravidade é uma força central.

Calculando a derivada de  $\vec{r} \times \vec{v}$  com relação ao tempo, obtém-se que

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \quad (4.8)$$

Agora, substituindo as equações (4.2) e (4.1) na equação acima obtemos

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v} \quad (4.9)$$

substituindo a equação (4.7) na equação (4.9) temos que

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = 0 \quad (4.10)$$

E conclui-se, utilizando o conceito de derivada, que a variação de  $\vec{r} \times \vec{v}$  com relação ao tempo é zero, então  $\vec{r} \times \vec{v}$  é um vetor constante o qual denotaremos por

$$\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v} \quad (4.11)$$

Como  $\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}$ , tem-se que  $\vec{c} = \frac{\vec{L}}{m}$ , este resultado mostra que durante o movimento, o momento angular se conserva.

Como o produto vetorial entre  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  é constante conclui-se que a órbita do planeta está contida num plano ortogonal a  $\vec{c}$ . Podemos simplificar os cálculos escolhendo o eixo  $z$  paralelo a  $\vec{c}$ . Logo, a partir de agora a trajetória do planeta está no plano  $xy$ .

Agora vamos obter uma outra constante do movimento.

Como  $\vec{r} = r \vec{u}$ , obtemos

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r \vec{u})}{dt} \\ \vec{v} &= r \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dr}{dt} \vec{u}\end{aligned}\tag{4.12}$$

Agora, como  $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v}$  e aplicando as propriedades do produto vetorial, obtém-se:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= r \vec{u} \times \left( r \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{dr}{dt} \vec{u} \right), \\ \vec{c} &= r \vec{u} \times r \frac{d\vec{u}}{dt} + r \cdot \vec{u} \frac{dr}{dt} \times \vec{u}, \\ \vec{c} &= r^2 \left( \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right) + r \cdot \frac{dr}{dt} (\vec{u} \times \vec{u}) \\ \vec{c} &= r^2 \left( \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right)\end{aligned}\tag{4.13}$$

Portanto, a partir da equação (4.6) e da equação (4.13),

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{c} &= -\frac{G.M}{r^2} \cdot \vec{u} \times \left[ r^2 \left( \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \right] \\ \vec{a} \times \vec{c} &= -G.M \left( \vec{u} \times \left( \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \right)\end{aligned}$$

Utilizando a identidade vetorial

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}\tag{4.14}$$

nos leva a:

$$\vec{a} \times \vec{c} = -GM \left[ \left( \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u}) \frac{d\vec{u}}{dt} \right]$$

Como,  $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$  e  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 1$  obtém-se:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{c} &= -GM \left[ 0 - \frac{d\vec{u}}{dt} \right], \\ \vec{a} \times \vec{c} &= GM \frac{d\vec{u}}{dt}, \\ \vec{a} \times \vec{c} &= \frac{d(GM\vec{u})}{dt}.\end{aligned}$$

Considerando que,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

Segue-se que

$$\vec{a} \times \vec{c} = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{c} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{c})$$

E concluímos que

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{c}) = \frac{d}{dt}(GM\vec{u}) \quad (4.15)$$

Logo,

$$\vec{v} \times \vec{c} = GM\vec{u} + \vec{b} \quad (4.16)$$

$\vec{b} = \vec{v} \times \vec{c} - GM\vec{u}$  e é um vetor constante, pois usando a equação (4.15) tem-se que  $\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{c} - GM\vec{u}) = 0$

Agora fazendo o produto escalar por  $\vec{c}$  em ambos os lados da igualdade (4.16) e substituindo  $\vec{u} = \left(\frac{1}{r}\right) \vec{r}$  obtém-se

$$\vec{c} \cdot (\vec{v} \times \vec{c}) = \frac{GM}{r} \vec{c} \cdot \vec{r} + \vec{c} \cdot \vec{b} \quad (4.17)$$

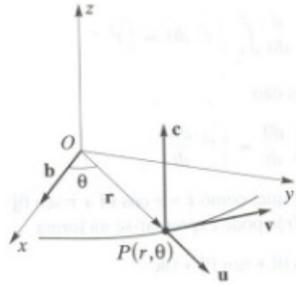
Usando a identidade

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

temos que  $\vec{c} \cdot (\vec{v} \times \vec{c}) = \vec{v} \cdot (\vec{c} \times \vec{c}) = 0$  e como  $\vec{c}$  e  $\vec{r}$  são ortogonais, o produto escalar entre eles é nulo. Utilizando estas conclusões na equação (4.16) chega-se à conclusão de que  $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$  e com isso  $\vec{c}$  e  $\vec{b}$  são ortogonais, sendo assim,  $\vec{b}$  está no plano  $xy$ .

A partir deste ponto, é mais conveniente usarmos coordenadas polares. Considerando  $Ox$  como eixo polar e  $\theta$  o ângulo entre esse eixo e  $\vec{r}$ , tem-se que  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares de  $P$ . Para simplificar, vamos escolher o eixo  $x$  na direção

do vetor  $\vec{b}$ .



**Figura 4.4**

$|\vec{r}| = r$ ,  $r \geq 0$  o módulo do vetor posição  $\vec{r}$  e  $\theta$ , com  $0 \leq \theta < 2\pi$ , o ângulo entre o vetor  $\vec{r}$  e o eixo  $x$ .

Com o objetivo de encontrar a equação da órbita de um planeta em torno do Sol tomemos  $\hat{r}$  como o vetor unitário associado à coordenada  $r$  e  $\hat{\theta}$  como o vetor unitário associado à coordenada  $\theta$ . Eles são perpendiculares e serão os eixos do novo sistema de coordenadas.

Sabendo-se que o produto escalar  $\vec{u} \cdot \vec{b}$  é definido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{b} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\theta$$

Obtemos que

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{c} &= c^2 \\ c^2 &= \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{c}) \\ c^2 &= r \vec{u} \cdot (GM \vec{u} + \vec{b}) \\ c^2 &= rGM(\vec{u} \cdot \vec{u}) + r(\vec{u} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} c^2 &= rGM + rbcos\theta \\ c^2 &= r(GM + bcos\theta) \\ r &= \frac{c^2}{GM + bcos\theta} \end{aligned}$$

Definindo:

$$l = \frac{c^2}{GM} \quad e \quad \epsilon = \frac{b}{GM}$$

,

onde  $l$  e  $\epsilon$  são constantes

Assim tem-se que a equação da órbita é dada por

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cdot \cos \theta} \quad (4.18)$$

Esta é a equação que determina o movimento do partícula em relação ao Sol.

E com isto chega-se à conclusão de que a trajetória da partícula ao redor do Sol, além de plana, tem o formato de uma cônica.

Agora o objetivo é mostrar, através de conhecimentos físicos e com o auxílio do cálculo diferencial e integral, que quando considerada apenas a força gravitacional entre o sol e um planeta, este, por ter massa muito menor, vai executar uma órbita em forma de elipse ao redor do sol.

### A Cinemática do movimento no plano

Posição:  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$

Usando o novo sistema de eixos tem-se:

Posição:  $\vec{r} = r \hat{r}$

Para continuar o estudo da cinemática do movimento, é necessário executar os cálculos a seguir:

$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$ , como  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , temos que

$$\vec{r} = (r(t), (\theta(t))) = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} \quad (4.19)$$

O vetor unitário  $\hat{r}$  pode ser definido por:

$$\hat{r} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|}$$

$$\hat{r} = \cos \theta \vec{i} + \text{sen} \theta \vec{j}$$

Utilizando a Equação 4.19, tem-se que:

$$\hat{r} = \frac{1}{r} \vec{r}$$

Agora, o vetor unitário  $\hat{\theta}$  pode ser definido por:

$$\hat{\theta} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|}$$

$$\hat{\theta} = -\text{sen} \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Derivando ambos com relação ao tempo tem-se:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (-\text{sen} \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (-\cos \theta \vec{i} - \text{sen} \theta \vec{j}) \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta} \hat{r}$$

Velocidade:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j}$$

Usando , mais uma vez, o novo sistema de eixos, tem-se:

Velocidade:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\hat{r})$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Dividindo a velocidade em componentes tem-se:

$$r_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta},$$

denotando  $\dot{\theta}$  por  $\omega$ ,

$$v_\theta = r\omega$$

Aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j}$$

No novo sistema de eixos tem-se:

Aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d(\dot{r}\hat{r})}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\hat{\theta})}{dt}$$

Usando a regra da derivada do produto:

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta}) + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r})$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

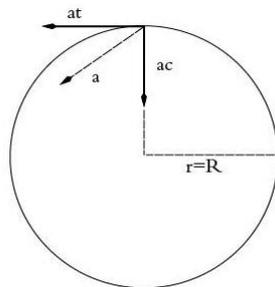
Dividindo a aceleração em componentes tem-se:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

**Observação 4.1** *Movimento circular uniformemente variado.*

$r$  é constante, logo,  $\dot{r} = 0 = \ddot{r}$



**Figura 4.5**

$a_t$  é a aceleração tangencial.

$a_c$  é a aceleração centrípeta.

$$a_t = a_\theta = r\ddot{\theta}$$

$$a_c = a_r = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{r}$$

## Energia

Com o auxílio dos cálculos executados anteriormente, será feito um estudo sobre a energia cinética e potencial para o cálculo do trabalho e novas conclusões serão

concebidas.

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}m \vec{v} \cdot \vec{v} \\ E_c &= \frac{1}{2}m |\vec{v}|^2 \\ E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

Tendo que:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta})(v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta})$$

Como  $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$ , pois são perpendiculares, assim:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{v} &= v_r^2 + v_\theta^2 \\ \vec{v} \cdot \vec{v} &= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Conclui-se assim que:

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (4.20)$$

Tendo agora que o vetor posição da partícula é uma função vetorial que varia com o tempo tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \\ d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta \end{aligned}$$

como já foi visto,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \hat{r} \text{ e } \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r\hat{\theta}$$

Tem-se então que:

$$d\vec{r} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}$$

Como a única força que atua no sistema é a da gravidade, dada por,

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Tem-se que o trabalho executado durante um deslocamento  $d\vec{r}$  é dado por:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}_g \cdot d\vec{r} \\ dW &= -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \cdot (dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}) \\ dW &= -\frac{GMm}{r^2}dr \end{aligned}$$

Agora será feita uma análise em relação à energia potencial, que é baseada na distância entre o planeta considerado e o sol.

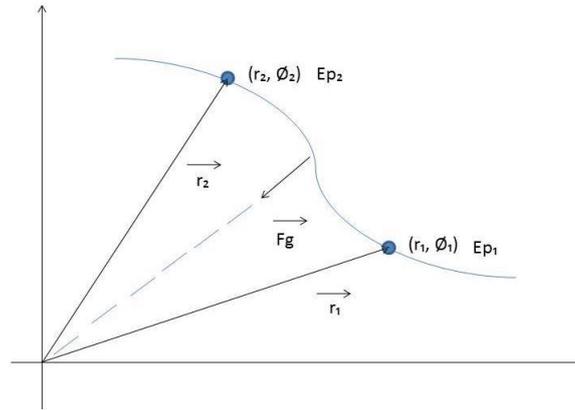


Figura 4.6

Tendo que:

$$\begin{aligned}
 W_{12} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} \\
 W_{12} &= \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} dr \\
 W_{12} &= \left[ \frac{GMm}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \\
 W_{12} &= GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)
 \end{aligned}$$

Assim concluímos que o trabalho depende exclusivamente das posições inicial e final do planeta, ou seja, não depende da trajetória. Logo  $F_g$  é uma força conservativa e disto resulta a existência da energia potencial gravitacional, definida a partir de:

$$W = -\Delta E_p$$

e disto:

$$E_p(r_2) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \cdot d\vec{r} + E_p(r_1)$$

$$E_p(r_2) = -GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) + E_p(r_1)$$

Considerando  $r_2 = r$  um valor arbitrário e  $r_1 = r_{Ref}$  um valor fixo tem-se:

$$E_p(r) = -GMm \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_{Ref}} \right) + E_p(r_{Ref}) \quad (4.21)$$

Tomando  $r_{Ref} = \infty$ , ou seja, a distância de  $M$  até  $m$  muito grande e adotando que  $E_p(r_{Ref}) = 0$  o que é uma escolha que possui lógica física visto que a interação

entre corpos que estão a uma distância infinita um do outro deve ser nula, conclui-se que:

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r}$$

### Conservação da energia mecânica total

Finalmente, dos resultados anteriores, é obtida a conservação da energia mecânica total.

$$\Delta E = 0 \Leftrightarrow E = E_c + E_p = \text{constante}. \quad (4.22)$$

Agora será feita uma análise usando o conceito de momento angular e o fato de que a energia mecânica do corpo se conserva no movimento.

$$E = E_c + E_p = \text{constante}$$

Onde,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

Então,

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = \text{constante} \quad (4.23)$$

Como já observado, o vetor momento angular ( $\vec{L}$ ) também é conservado, e assim:

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

ou seja:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

E disso tem-se que:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = \text{constante}$$

Chamando  $V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$  de energia potencial efetiva, cuja análise gráfica da relação:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) \quad (4.24)$$

é

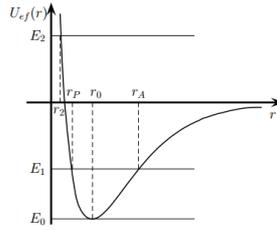


Figura 4.7

Chamando os pontos onde  $\dot{r} = 0$  de pontos de retorno e denominando-os por  $r_R$ , conclui-se que nestes pontos a Energia Total ( $E$ ) tem o mesmo valor da Energia Potencial Efetiva ( $V$ ).

Sendo assim, denotando por  $E_{Ret}$  a Energia no ponto de retorno, tem-se:

$$E = E_{Ret} = V$$

Então:

$$E_{Ret} = \frac{L^2}{2mr_R^2} - \frac{GMm}{r_R}$$

Fazendo uma mudança de variável  $u = \frac{1}{r}$  a equação acima fica:

$$E = \frac{L^2}{2m}u_R^2 - GMmu_R$$

e daí tem-se:

$$\frac{L^2}{2m}u_R^2 - GMmu_R - E = 0$$

Multiplicando a equação toda por  $\frac{2m}{L^2}$  obtém-se:

$$u_R^2 - \frac{2GMm^2}{L^2}u_R - \frac{2mE}{L^2} = 0$$

Para facilitar os cálculos, na equação da órbita, será feita a seguinte substituição:

$$B = \frac{1}{l} = \frac{GM}{c^2} = \frac{GMm^2}{L^2}$$

$$A = \frac{\epsilon}{l}$$

E da equação construída usando o conceito de energia tem-se:

$$u_R^2 - 2Bu_R - \frac{2mE}{L^2} = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau tem-se:

$$u_R = \frac{2B \pm \sqrt{(-2B)^2 - 4\left(\frac{-2mE}{L^2}\right)}}{2}$$

$$u_R = B \pm \sqrt{B^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

Agora usando também que  $u = \frac{1}{r}$  na equação da órbita obtém-se:

$$u = \frac{1 + \epsilon \cos \theta}{l}$$

$$u = \frac{1}{l} + \frac{\epsilon}{l} \cos \theta$$

Sabendo que  $\vec{c} = \vec{r}' \times \vec{v}$  e que  $\vec{L} = \vec{r}' \times m\vec{v}$  obtemos que  $c = \frac{L}{m}$ .

Sendo assim, a equação da órbita será:

$$u = B + A \cos \theta$$

Nos pontos de retorno, tem-se que  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . Sendo assim, utilizando a equação da cônica nota-se que:

$$u_R = B \pm A$$

Agora igualando as duas equações tem-se:

$$B \pm A = B \pm \sqrt{B^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

$$A = \sqrt{B^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

Quanto a excentricidade da cônica que determina a órbita do planeta.

Tendo que:

$$B = \frac{1}{l} \text{ e } A = \frac{\epsilon}{l}$$

Chega-se à conclusão de que  $\epsilon = \frac{A}{B}$

Sendo assim:

$$\epsilon = \frac{\sqrt{B^2 + \frac{2mE}{L^2}}}{B}$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^2}}$$

Definindo:  $k = GMm$ , tem-se que:  $f(r) = -\frac{k}{r^2}$  e  $E_P = -\frac{k}{r}$ .

Com isso:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{2L^2}{mk^2}\right) E}$$

Agora pensando nas várias possibilidades tem-se:

1. Circunferência ( $\epsilon = 0$ )

$$1 + \left(\frac{2L^2}{mk^2}\right) E_{circ} = 0$$

$$E_{circ} = -\frac{mk^2}{2L^2} < 0$$

2. Elipse ( $0 < \epsilon < 1$ )  $\Rightarrow$  *Primeira Lei de Kepler*

$$0 < \epsilon < 1 \Rightarrow 0 < \epsilon^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 + \left(\frac{2L^2}{mk^2}\right) E < 1$$

Sendo assim:

$$0 < 1 + \left(\frac{2L^2}{mk^2}\right) E_{eli} \Rightarrow E_{circ} < E_{eli}$$

e

$$1 + \left(\frac{2L^2}{mk^2}\right) E_{eli} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2L^2}{mk^2}\right) E_{eli} < 0 \Rightarrow E_{eli} < 0$$

Com isso

$$E_{circ} < E_{eli} < 0$$

3. Parábola ( $\epsilon = 1$ )  $\Rightarrow$  *velocidade de escape*

Como  $\epsilon = 1 \Rightarrow \epsilon^2 = 1$ , com isso

$$1 + \left(\frac{2L^2}{mk^2}\right) E_{parab} = 1$$

$$E_{parab} = 0$$

4. Hipérbole ( $\epsilon > 1$ )

Temos  $\epsilon^2 > 1$

$$1 + \left(\frac{2L^2}{mk^2}\right) E_{Hiper} > 1 \Rightarrow \left(\frac{2L^2}{mk^2}\right) E_{Hiper} > 0$$

$$E > 0$$

Como os planetas se movimentam em torno do Sol, os dois únicos formatos de órbita possíveis seriam o de uma elipse ou uma circunferência, mas Kepler, através de observações mostrou que a órbita é *elíptica*, fazendo desta sua primeira lei.

Utilizando a equação cartesiana da elipse que determina a órbita dos planetas, tem-se:

$$d.\epsilon = \sqrt{x^2 + y^2} + \epsilon.x$$

E organizando obtemos:

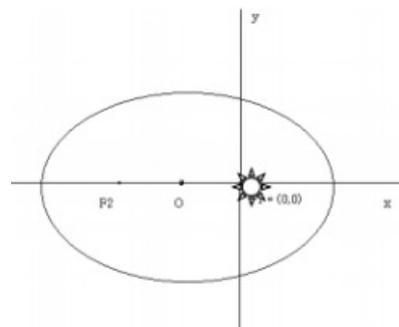
$$(1 - \epsilon^2)x^2 + 2d.\epsilon^2.x + y^2 = d^2.\epsilon^2$$

com isso,

$$\frac{\left(x + \frac{d.\epsilon^2}{1+\epsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{d.\epsilon}{1-\epsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{d^2\epsilon^2}{(1-\epsilon)^2}} = 1 \quad (4.25)$$

Finalizando assim a demonstração da Primeira Lei de Kepler, a qual afirma que:

*"Todos os planetas se movem em orbitas elípticas tendo o Sol como um dos focos".*



**Figura 4.8**

## 4.2 Segunda Lei de Kepler

"Uma linha unindo um planeta ao Sol varre áreas iguais em períodos de tempo iguais."

### Demonstração:

Sabendo que a órbita do planeta é dada por uma função contínua e em forma de elipse com o Sol ocupando um dos focos, a qual denota-se por  $r = f(\theta)$  em coordenadas polares, pode se calcular que a área varrida por  $\overline{OP}$  ou  $\vec{r}$  utilizando os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  que seriam respectivamente os ângulos formados pelo vetor posição e o eixo  $\overrightarrow{OX}$  nos instantes  $t_0$  quando o planeta se encontra no ponto  $P_0$  e no instante  $t$ , quando o planeta se encontra no ponto  $P$ , é dada por

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

logo

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \dot{\theta}$$

Como  $\vec{r}$  pode ser dado por:  $\vec{r} = r \cos\theta \vec{i} + r \sin\theta \vec{j} + 0 \vec{k}$  e  $\vec{u} = \left(\frac{1}{r} \vec{r}\right)$  tem-se que:

$$\vec{u} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} + 0 \vec{k}$$

Sendo assim:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\sin\theta \dot{\theta} \vec{i} + \cos\theta \dot{\theta} \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\theta} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \vec{k} = \dot{\theta} \vec{k}$$

Como visto na primeira lei de Kepler, tem-se que:

$$\vec{c} = r^2 \left( \vec{u} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right)$$

$$\vec{c} = r^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

Então,

$$c = r^2 \dot{\theta}$$

Concluindo que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}c$$

E como  $c$  é uma constante, a área varrida por  $\vec{r}$  num dado intervalo de tempo é constante, ou seja, a variação da área com o passar do tempo é constante, com isso

*"Uma linha unindo um planeta ao Sol varre áreas iguais em períodos de tempo iguais."*

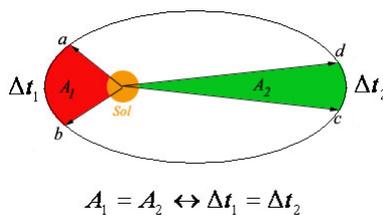


Figura 4.9

■

### 4.3 Terceira Lei de Kepler

*"O quadrado do período de qualquer planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo da medida do semi-eixo maior da elipse que determina a órbita do planeta."*

**Demonstração:**

Retomando a equação da órbita dos planetas em torno do sol, tem-se que:

$$a = \frac{l}{1 - \epsilon^2}$$

onde se tem que:  $l = d \cdot \epsilon$ .

Sabendo que, a excentricidade da elipse é dada por:  $\epsilon = \frac{c}{a}$  e que  $c^2 = a^2 - b^2$ , onde  $a$  é o semi-eixo maior da elipse,  $b$  é o semi-eixo menor da elipse e  $c$  é a distância do foco ao centro da elipse. Tem-se que:

$$\begin{aligned}\epsilon^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2} \\ \epsilon^2 \cdot a^2 &= a^2 - b^2 \\ b^2 &= a^2(1 - \epsilon^2) \\ 1 - \epsilon^2 &= \frac{b^2}{a^2}\end{aligned}$$

Com o que foi determinado acima tem-se que:

$$a = \frac{l}{\frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow b^2 = l \cdot a$$

Sabendo que a equação polar da órbita dos planetas é dada por:

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad \text{com } l = \frac{c^2}{GM} \quad \text{e } \epsilon = \frac{b}{GM}$$

Chamando de  $T$  o tempo necessário para que o planeta complete seu ciclo ao redor do Sol, ou seja, sendo  $T$  o período, tem-se que:

$$A = \int_0^T \left( \frac{dA}{dt} \right) dt = \int_0^T \frac{1}{2} c dt$$

daí,

$$A = \left[ \frac{1}{2} ct \right]_0^T \Rightarrow A = \frac{1}{2} cT$$

E isso seria a área delimitada pela elipse que o planeta segue como órbita, ou seja:

$$\frac{1}{2} cT = \pi a \cdot b \Rightarrow T = \frac{2\pi ab}{c}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, tem-se:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 l a}{c^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 l a^3}{c^2}$$

Usando o fato de:  $l = \frac{c^2}{GM}$  tem-se:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

Considerando  $\frac{4\pi^2}{GM} = k$  tem-se:

$$T^2 = ka^3$$

Demonstrando assim a terceira Lei de Kepler.

*"O quadrado do período de qualquer planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo da medida do semi-eixo maior da elipse que determina a órbita do planeta."*

■

# Capítulo 5

## Aplicações ao ensino médio

Este trabalho defende que o Cálculo Diferencial e Integral, a partir de suas ideias, deve ser iniciado ainda no ensino médio. Talvez exista dificuldade com o tempo que teria que ser despendido para este estudo, mas o pensamento é o de abordá-lo de maneira simples. O mais importante não é fazer com que os alunos consigam resolver limites, derivadas e integrais complicadas, o objetivo deve ser que entendam os conceitos e consigam visualiza-los tanto em matemática quanto em física, que foi o meio utilizado neste trabalho.

Mostraremos uma forma de abordagem para o Cálculo Diferencial e Integral utilizado para criar modelos matemáticos utilizando situações físicas. Uma ciência interferindo e auxiliando a outra.

### 5.1 Aplicação de Limites e Derivadas no Movimento Uniformemente Variado

Este assunto marca o começo dos estudos de física. É fato que a dificuldade do conhecimento matemático prejudica muito a evolução do assunto e exigir que os estudantes utilizem ferramentas as quais não tiveram acesso é inviável, mas seria interessante o aprendizado das ideias de cálculo diferencial e integral através de algumas comparações.

No capítulo do trabalho que trata deste conteúdo, foram expostas aplicações de Cálculo a física que utilizam limites, o cálculo da aceleração instantânea e da

velocidade instantânea. O conteúdo pode ser tratado privilegiando o cotidiano dos estudantes, um bom exemplo seria o velocímetro de um carro, que mostra o valor do módulo da velocidade num exato momento. Os alunos até então teriam aprendido formas de calcular velocidade média, e provavelmente ficariam curiosos sobre a forma de como calcular a velocidade de um corpo se não existe um intervalo de tempo para que este se desloque. Seria impossível obter tal valor através dos conceitos matemáticos estudados até aquele momento, os estudantes poderiam pensar em diminuir cada vez mais o intervalo de tempo no qual o carro se desloca, tentariam fazer com que este se aproximasse cada vez mais de zero e assim seriam incentivados a entender o conceito de limite, nesta situação visto que a velocidade instantânea seria calculada em um intervalo de tempo que tende a zero.

O professor ainda poderia incentivar o aluno a conhecer o modo como funcionam as "lombadas eletrônicas" que limitam as velocidades em alguns pontos das estradas. Isso tudo aguçaria a curiosidade e faria com que os alunos tivessem acesso a uma prévia do estudo de limites sem que para isso fossem exigidos demais.

### **Observação 5.1** *Funcionamento da lombada eletrônica*

*A lombada eletrônica funciona com duas bobinas (do tipo laço magnético) são instaladas na pista a 4 metros uma da outra, abaixo do asfalto e cerca de 20 metros antes do monólito no sentido do fluxo do trânsito, gerando um campo eletromagnético. A passagem do carro metálico sobre as bobinas produz uma variação no campo eletromagnético. Um sistema eletrônico baseado na variação do campo calcula a velocidade do veículo indicando-a no display do monólito e emitindo um sinal luminoso e outro sonoro. Quando a velocidade registrada for superior ao limite permitido e a margem de tolerância for superada uma máquina fotográfica é acionada.*

O estudante que buscar esta pesquisa, terminará notando que a intenção da entidade que instalou a lombada eletrônica é a de calcular a velocidade dos carros num ponto.

Mas com o conhecimento do funcionamento do dispositivo, pode se notar que existe a tentativa de diminuir ao máximo a distância que o carro percorre quando esta sendo estudado o seu movimento, e que o dispositivo não é capaz de expor o valor da velocidade em um único ponto, calculando a velocidade média do móvel em um curto espaço de tempo e não em um ponto exato.

Para entender limites deve se notar que o cálculo da velocidade instantânea seria obtido diminuindo ao máximo a distância entre as bobinas. Mas como essa distância não pode ser nula, seria possível, somente, calcular uma aproximação da velocidade instantânea, e isto seria feito aproximando ao máximo as bobinas fazendo com que a distância entre elas tenda a zero e assim explorando o conceito de limites.

Depois disto seria interessante inserir o conceito de derivada usando a correspondência com coeficiente angular ou taxa de variação e o conceito de limite ao qual já teriam tido acesso.

## 5.2 Aplicação de Integral Usando o Conceito de Trabalho de uma Força

No capítulo do trabalho que aborda o referido conteúdo, vários conceitos são introduzidos e passam a ser conhecidas várias grandezas. No ensino médio elas são estudadas como funções constantes ou se comportam como uma função do primeiro grau ou ainda como a união de funções constantes e do primeiro grau. Como foi visto, partindo da força, o trabalho é calculado através do gráfico que relaciona força e distância, este também pode ser calculado utilizando o gráfico que relaciona potência e tempo e ainda é mostrado que o impulso deve ser calculado tendo como base a variação da força com relação ao tempo.

No ensino médio as grandezas se comportam de maneira uniforme, mas se os alunos forem incentivados a pensar, por exemplo numa viagem de carro, notarão que o carro não mantém uma velocidade constante, com isso, a potência despendida

varia durante toda a viagem, ou seja, na vida real os gráficos não se comportariam de uma maneira tão simples quanto a que foi exposta. Com isso viria a pergunta de como fazer este cálculo se a grandeza fosse variável.

Tomando como exemplo o trabalho calculado através do gráfico da potência com relação ao tempo e tendo uma potência variável, com um comportamento mais complexo do que o de uma função do primeiro grau o professor deveria mostrar que o trabalho seria calculado dividido em várias pequenas partes de tempo. O objetivo seria fazer com que o intervalo de tempo se reduzisse ao máximo e isso faria com que a variação de potência fosse nula. Com isso, o cálculo do trabalho seria feito somente naquele intervalo de tempo mínimo.

Depois disso seria importante mostrar que o processo deve ser repetido várias vezes, dividindo o intervalo de tempo em partes muito pequenas e calculando o trabalho em várias partes separadas e depois somando todas elas para obter o trabalho total. E aí estaria apresentado o conceito de integral. Seria complicado fazer cálculos com isso no ensino médio, mas a ideia estaria apresentada de forma clara e prática o que é muito importante para fazer com que os alunos entendam o conceito e possam notar que o assunto estudado por eles é um caso particular que faz com que eles entendam o conteúdo de maneira mais didática.

Desta maneira ficaria claro que, com uma matemática mais rebuscada, poderiam ser calculadas áreas que antes eram impossíveis de serem mensuradas e que elas podem auxiliar bastante a física.

### 5.3 Aplicação a Leis de Kepler

O trabalho também se volta a este conteúdo. O que ficaria desta parte para os alunos do ensino médio seria a capacidade de se criar modelos matemáticos capazes de explicar fenômenos da natureza, no caso, o movimento de um planeta em torno do Sol.

Utilizar esta parte a nível de ensino médio seria um pouco mais complicado, pois exige um tratamento vetorial mais complexo do que o normal para esse nível. Contudo, a formulação de modelos matemáticos e a aplicação destes geraria um conteúdo que poderia ser abordado de maneira interdisciplinar e terminaria por mostrar que as duas ciências se misturam e, desta maneira, têm a capacidade de explicar como a natureza se comporta.

Por tudo isso, seria bastante eficaz o estudo de Cálculo no ensino médio. Além de expandir vários conteúdos, seria importante para que os estudantes tivessem acesso a uma prévia do que seria estudado, caso optassem por cursos universitários nessa área.

# Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, G., *Cálculo das Funções de Uma Variável - Volume 1*, 7. ed. LTC. Rio de Janeiro, 2003.
- [2] Ávila, G., *Cálculo das Funções de Uma Variável - Volume 2*, 7. ed. LTC. Rio de Janeiro, 2004.
- [3] Beer, F. P., *Mecânica vetorial para engenheiros*, Tradução: Mário Alberto Tennan. 5. ed. Makron. São Paulo, 1991.
- [4] Boyer, C. B. *História da Matemática*, 2. ed. Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo: 1996.
- [5] Filho, D. C., *Um Convite à Matemática*, Edição do Autor. Campina Grande, 2010.
- [6] Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo - Vol. 1*, 5. ed. LTC. Rio de Janeiro, 2001.
- [7] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J., *Fundamentos de Física - Vol. 1*. 7. ed., LTC. Rio de Janeiro, 2006.
- [8] Leithold, L. *O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1*, Tradução: Antonio Paques, Otilia T. W. Paques. Sebastião A. J. Filho. 2. ed. Harbra. São Paulo, 1982.
- [9] Stewart, J., *Cálculo - Volume 1*, Tradução: Antonio C. Moretti e Antonio C. G. Martins. 5. ed. Pioneira Thomson Learning. São Paulo, 2006.
- [10] Stewart, J., *Cálculo - Volume 2*, Tradução: Antonio C. Moretti e Antonio C. G. Martins. 5. ed. Pioneira Thomson Learning. São Paulo, 2006.

- [11] Symon, K. R., *Mecânica*, Tradução: Gilson Brand Batista. Campus. Rio de Janeiro, 1996.
- [12] Swokowski, E. W., *Cálculo com Geometria Analítica - Volume 2*, Tradução: Alfredo A. de Farias, com a colaboração de Vera R. L. Flores e Marcio Q. Moreno. 2. ed. Makron Books. São Paulo, 1994.
- [13] Tipler, P. A., *Física - Vol. 1*. 5. ed., LTC. Rio de Janeiro, 2006.